

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BENYAHIA JIJEL

Faculté des sciences et de la technologie

Département de Génie Civil et Hydraulique

N° :/2022

MEMOIRE DE MASTER

DOMAINE : Sciences et Technologies

FILIERE: HYDRAULIQUE

SPECIALITE : Hydraulique urbaine

Thème

ANALYSE THEORIQUE DE L'ECOULEMENT AU VOISINAGE D'UNE CHUTE LIBRE EN CANAL A PROFIL RECTANGULAIRE

Présenté Par : BOUKEMOUKH Rokia

Encadré Par : AMARA Lyes

Date de soutenance : 15/09/2022

Jury de Soutenance

Président : LABIED Chouaib

Grade MCA

Univ MSB jijel

Encadrant : AMARA Lyes

Grade MCA

Univ MSB jijel

Examineur : ABDI Ishak

Grade MCB

Univ MSB jijel

Promotion : 2021 /2022



Remerciement



En préambule à ce mémoire nous remercions الله qui l'a aidons et le donnons la patience et le courage durant ces longues années d'études.

Nous tenons à remercier toutes les personnes qui l'ont aidée lors de la rédaction de ce mémoire.

Nous voulons dans un premier temps remercier, notre directeur de mémoire **Dr.AMARA Lyes**, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter notre réflexion.

Nous remercions également toute l'équipe pédagogique de l'Université Mohamed Seddik Benyahia Jijel, Faculté de Science et Technologie.

Nous adressons notre sincères remerciements à tous les professeurs dès la primaire jusqu'au universitaire, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé notre réflexions, ainsi que les honorables membres des jurys qui ont eu l'amabilité de bien accepter d'évaluer notre mémoire.

Enfin, nous remercions chaleureusement les membres de notre famille pour leur soutien constant et leurs encouragements et nos amis qu'on n'a pas cités et qui ont toujours été là pour nous. Nous remercions aussi tous les collègues de la promotion de 2022.

Class 2022

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à...

Mes très chers parents « Moubha Soraya » et « Boukemoukh Filali » qui n'ont pas cessé de m'encourager et de prier pour moi. Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, et le respect que j'ai pour eux. Ce travail est le fruit de vos sacrifices que vous avez consentis pour mon éducation. Que le dieu, le tout puissant, vous préserve et vous accorde santé, longue vie et bonheur.

A mes chères frères et sœurs : « Idris, Soudjoud, et Djihad », que j'adore beaucoup.

A ma chère sœur : « Amira » et son mari : « Hemza » et sa fille : « Djinane ».

A ma chère sœur : « Randa » et son mari : « Bilal ».

A toutes les personnes de ma grande famille.

A tout la famille « Boukemoukh et Moubha ».

A tous mes amies spécialement : « Souhila, Fatima, Ines, Marwa, Fatiha, Sabah, Hanane, Ouissal, Nada, Rayen, Amira, warda, Fatima Zohra et Nabila... ».

A tous les étudiants de l'Université de Jijel, surtout mes collègues.

A tous les enseignants et les éducateurs qui ont contribué à ma formation durant tout le parcours de mes études jusqu'à ce jour.

A tous ceux qui m'ont porté et me portent dans leurs cœurs.

**BOUKEMOUKH
ROKIA**



NOTATION

a_n	Accélération normale (m/s^2)
B	Largeur en amont du déversoir (m)
b	Large du canal (m)
C_d	Coefficient de débit (-)
d	Diamètre d'un déversoir circulaire (m)
F_r	Nombre de Froude (-)
g	Accélération de pesanteur (m/s^2)
h	Profondeur d'eau (m)
H	Energie spécifique (m)
h_c	Profondeur critique (m)
h_e	profondeur à l'extrémité du canal (m)
H_c	Energie spécifique critique (m)
I	Pente (-)
i	Angle de l'inclusion ($^\circ$)
K	Coefficient de déversoir incliné
L	Largeur de déversoir (m)
P	Hauteur de pelle (m)
P_0	Force de pression (N)
Q	Débit (m^3/s)
Q_1	Débit de la partie rectangulaire (m^3/s)
Q_2	Débit de la partie triangulaire (m^3/s)
q_n	Débit déversé par un déversoir du même type placé perpendiculairement (m^3/s)
r	Rayon de courbure (m)
S	Section de la chute (m^2)
u	Vitesse d'écoulement dans la direction x (m/s)
V	Vitesse (m/s)
w	Vitesse d'écoulement dans la direction z (m/s)

α	Angle de sommet (°)
β	Coefficient de Boussinesq (-)
ρ	Masse volumique du fluide (Kg/ m ³)

TABLE DE MATIERES

Introduction générale	1
-----------------------------	---

Chapitre I : Généralités et état de l'art

I.1. Introduction	4
I.2. Déversoirs	4
I.2.1. Définition.....	4
I.2.2. Classification des déversoirs.....	5
I.2.3. Différents formes.....	6
I.2.3.1. Déversoir à mince paroi,,.....	6
I.2.3.1.1. Déversoir vertical.....	6
I.2.3.1.2. Déversoir incliné	11
I.2.3.1.3. Déversoir oblique.....	12
I.2.3.1.4. Déversoir latéral.....	12
I.2.3.2. Déversoir à crête épaisse.....	14
I.2.3.2.1. Particularités du seuil à crête épaisse.....	14
I.2.3.3. Déversoir à crête arrondie.....	15
I.3. Chute libre dans un canal.....	17
I.4. Etat de l'art.....	19
I.5. Conclusion.....	21

Chapitre II : Analyse théorique

II.1 Introduction	23
II.2 Equations de base	23
II.2.1. Equation de quantité de mouvement uni-dimensionnelle	23
II.2.2. Equation de continuité	26
II.2.3. Nombre de Froude	27
II.3 Rapport de profondeur finale	28
II.4 Profil d'écoulement	30
II.5 Débit	32
II.6 Conclusion	33

Chapitre III : Résolution analytique approchée

III.1. Introduction	35
III.2. Méthodes d'approximations intégrales et variationnelles	35
III.2.1. Méthodes de résidus pondérés	35
III.2.1.1. Forme générale	35
III.2.1.2. Méthodes des résidus pondérés	36
III.2.1.2.1. Méthode de Collocation par point	36
III.2.1.2.2. Méthode de Collocation par sous domaines	39
III.2.1.2.3. Méthode des moindres carrés	41
III.2.1.2.4. Méthode de Galerkin	42
III.3. Conclusion	47

Chapitre IV : Application et discussion

IV.1. Introduction	49
IV.2. Profondeur finale	49
IV.3. Solution analytique.....	50
IV.3.1. Méthode de Collocation par point	50
IV.3.2. Méthode de Galerkin	51
IV.4. Comparaison et discussion des résultats	52
IV.4.1. Comparaison des résultats.....	52
IV.4.1.1. Interprétations des résultats (Marchi).....	54
IV.4.1.2. Interprétations des résultats (Montes).....	55
IV.4.1.3. Interprétations des résultats (Strelkoff et Moayeri)	57
IV.4.1.4. Interprétations des résultats (Southwell et Vaisey)	59
IV.5. Conclusion	60
Conclusion générale	61
Références bibliographiques	62

LISTE DES FIGURES

Figure (I.1) : Déversoir rectangulaire (Carlier, 1980)	4
Figure (I.2) : Classification des déversoirs (Bonvin ,2005)	5
Figure (I.3) : Déversoir en mince paroi standard, a) définition de la géométrie, b) détail de la crête (Hager, 1988)	6
Figure (I.4) : Débit du déversoir rectangulaire à crête mince et à nappe libre (Carlier, 1980)	7
Figure (I.5) : Vue en perspective d'un déversoir rectangulaire sans contraction latérale (Cetmef, 2005)	8
Figure (I.6) : Vue en perspective d'un déversoir rectangulaire avec contraction latérale (Cetmef, 2005)	8
Figure (I.7) : forme de la crête du déversoir rectangulaire avec contraction latérale (Cetmef, 2005)	8
Figure (I.8) : Déversoir triangulaire (Carlier, 1980)	9
Figure (I.9) : Forme de la crête d'un déversoir à échancrure triangulaire (Cetmef,2005).....	9
Figure (I.10) : Déversoir trapéziq. (Carlier, 1980)	10
Figure (I.11) : coupe transversale d'un déversoir circulaire (Cetmef, 2005)	11
Figure (I.12) : Déversoir circulaire. (Lancastre, 1996)	11
Figure (I.13) : Coupe longitudinale d'un déversoir incliné (Carlier, 1980)	11
Figure (I.14) : coupe longitudinale de deux types d'ouvrages (à crête épaisse et à crête mince incliné). (Cetmef,2005)	11
Figure (I.15) : Vue en plan d'un déversoir oblique (Carlier, 1980)	12
Figure (I.16) : vue en plan d'un déversoir avec contraction latérale et d'un déversoir oblique (Cetmef, 2005)	12
Figure (I.17) : Les régimes d'écoulement –schéma de définition (Lancastre, 1996)	12

Figure (I.18) : d'écoulement à débit Q ou à énergie spécifique H constante (Lancastre, 1996)	13
Figure (I.19) : Déversoir latéral. (Hager,1980)	13
Figure (I.20) : Schéma de définition de l'écoulement dans le déversoir latéral (Subramanya, 2009)	14
Figure (I.21) : Déversoir à seuil épais, géométrie polygonale, (Hager, 1988)	14
Figure.I.22 : Types des seuils à crête épaisse selon le rapport $\frac{h_1}{c}$ (Cetmef, 2005)	15
Figure.I.23 : Croquis de définition d'un barrage à charge creuse à écoulement libre et à écoulement submergé (Hulsing,1968)	16
Figure.I.24 : déversoir à crête arrondie (Rouse,1929)	17
Figure (I.25) : Chute libre dans un canal et caractéristique principale (Lancastre, 1996)	17
Figure (I.26) : Photo d'une chute libre sans crête (Rouse, 1929)	18
Figure (I.27) : Photo d'une chute libre à crête arrondie (Rouse,1929)	18
Figure (I.28) : Chute libre dans un canal trapézoïdal avec section de contrôle rectangulaire (Lancastre, 1996)	19
Figure (II.1) : Un canal du profil rectangulaire	23
Figure (IV.1) : Comparaison des résultats analytiques (la méthode de Collocation par point) avec les résultats expérimentaux (Rouse, 1933)	50
Figure (IV.2) : Comparaison des résultats analytiques (la méthode de Galerkin) avec les résultats expérimentaux (Rouse, 1933)	51
Figure (IV.3) : Comparaison des résultats analytiques (la méthode de Collocation par point) avec les résultats analytiques (Marchi, 1993)	52
Figure (IV.4) : Comparaison des résultats analytiques (la méthode de Galerkin) avec les résultats analytiques (Marchi, 1993)	53
Figure (IV.5) : Comparaison des résultats analytiques (la méthode de Collocation par point) avec les résultats numériques (Montes, 1992)	54

Figure (IV.6) : Comparaison des résultats analytiques (la méthode de Galerkin) avec les résultats numériques (Montes, 1992)	55
Figure (IV.7) : Comparaison des résultats analytiques (la méthode de Collocation par point) avec les résultats numériques (Strelkoff et Moayeri, 1970)	56
Figure (IV.8) : Comparaison des résultats analytiques (la méthode de Galerkin) avec les résultats numériques (Strelkoff et Moayeri, 1970)	57
Figure (IV.9) : Comparaison des résultats analytiques (la méthode de Collocation par point) avec les résultats numériques (Southwell et Vaisey, 1948)	58
Figure (IV.10) : Comparaison des résultats analytiques (la méthode de Galerkin) avec les résultats numériques (Southwell et Vaisey, 1948)	59

LISTE DES TABLEAUX

Tableau (IV.1) : Tableau illustrant les approches des chercheur et les valeurs de la profondeur à l'extrémité du canal	49
Tableau (IV.2) : Tableau illustrant les résultats de la méthode de Collocation par point avec les résultats expérimentaux et l'erreur relative	50
Tableau (IV.3) : Tableau illustrant les résultats de la méthode de Galerkin avec les résultats expérimentaux et l'erreur relative	52
Tableau (IV.4) : Tableau illustrant les résultats de la méthode de Collocation par point avec les résultats Marchi (1993)	53
Tableau (IV.5) : Tableau illustrant les résultats de la méthode de Galerkin avec les résultats Marchi (1993)	53
Tableau (IV.6) : Tableau illustrant les résultats de la méthode de Collocation par point avec les résultats Montes (1992)	54
Tableau (IV.7) : Tableau illustrant les résultats de la méthode de Galerkin avec les résultats Montes (1992)	55
Tableau (IV.8) : Tableau illustrant les résultats de la méthode de Collocation par point avec les résultats Strelkoff et Moayeri (1970)	56
Tableau (IV.9) : Tableau illustrant les résultats de la méthode de Galerkin avec les résultats Strelkoff et Moayeri (1970)	57
Tableau (IV.10) : Tableau illustrant les résultats de la méthode de Collocation par point avec les résultats Southwell et Vaisey (1948)	58
Tableau (IV.11) : Tableau illustrant les résultats de la méthode de Galerkin avec les résultats Southwell et Vaisey (1948)	59

Introduction Générale

Le problème de la chute libre a reçu beaucoup d'attention depuis près de 50 ans parce qu'il agit comme un outil simple pour mesurer le débit, car c'est Rouse qui a calculé les relations simples du rapport de profondeur final.

Le problème de la valeur seuil a également été formulé sous forme d'équation intégrée, puis résolu analytiquement. Son but est de trouver une relation de drainage quant aux canaux rectangulaires et la profondeur du bord de la falaise. Le calcul du débit sur des écoulements à surface libre est réalisé en associant une mesure de niveau à des mesures de vitesse et à la profondeur.

Il est possible de formuler l'équation du profil de la surface libre régissant l'écoulement étudié qui est dans ce cas une équation aux dérivées ordinaires (EDO) de deuxième ordre, non linéaire.

Parmi les nombreuses méthodes dédiées à la précision analytique des équations différentielles est la méthode de Galerkin.

L'importance de l'écoulement dans un canal à profil rectangulaire a conduit à une multitude de recherches expérimentales à l'image de celle de Rouse (1934), Hager (1983), Marchi (1993) et Dey (1998).

Dans ce cas, nous avons étudié l'écoulement du canal rectangulaire, le but de cette étude est de trouver une formule de la chute libre à l'extrémité du canal, ainsi que l'équation différentielle du profil de la surface libre, calculant ainsi le débit.

Ce travail s'articule autour de quatre chapitres principaux :

Dans le premier chapitre, nous chercherons à effectuer une recherche bibliographique complète sur la classification des déversoirs et de leurs différents types, en plus d'un aperçu de la chute libre dans les canaux rectangulaires, selon certaines approches et chercheurs de cette étude.

Dans le deuxième chapitre, nous formulerons les équations différentielles de base afin d'obtenir l'apparence de la chute libre ainsi que la profondeur finale et le profil de la surface libre.

Dans le chapitre trois, nous nous sommes concentrés sur la solution analytique, et ceci en appliquant plusieurs méthodes, dont la méthode de Collocation par point et Galerkin, où cette dernière est la plus précise et nous permet également d'obtenir la solution exacte des équations différentielles ordinaires.

Dans le quatrième chapitre, nous étudierons les applications de différents modèles et comparerons les résultats analytiques (la méthode de collocation par point et Galerkin) d'une part. d'autre part nous comparerons des résultats analytiques avec les résultats obtenus par chaque chercheur avec les résultats analytiques. Ceci nous permet de juger la véracité de l'approche analytique dans ce type de problème hydraulique.

À la fin de cet humble travail, nous terminerons par une conclusion générale.



Chapitre I

Chapitre I :

Généralités et état de l'art

I.1. Introduction

Les déversoirs jouent un rôle très important dans les constructions hydrauliques. Ils sont utilisés pour les mesures de débit d'une part et servent souvent d'ouvrages de contrôle d'autre part. Dans ce chapitre, nous essayerons de donner une vue générale sur la classification et les différents types des déversoirs, puis nous nous pencherons sur la chute libre dans un canal. Il sera ensuite enchaîné par une présentation de l'état de l'art, où nous présenterons les principaux résultats de notre recherche bibliographique dans le domaine de calcul de la chute libre dans un canal de profil rectangulaire.

I.2. Déversoirs

I.2.1. Définition

Un déversoir est un orifice superficiel ouvert à sa partie supérieure et pratiqué dans une paroi généralement verticale, la Figure (I.1) présente un déversoir rectangulaire.

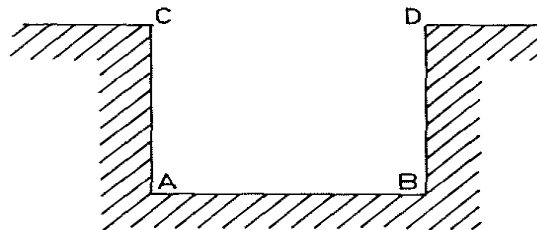


Figure (I.1) : Déversoir rectangulaire (Carlier, 1980).

Lorsque le profil de l'échancrure est rectangulaire, AB est seuil ou crête et AC et BD sont les joues

Examinons l'aspect qualitatif de l'écoulement successivement à l'amont et à l'aval du déversoir.

A l'amont :

On constate que le niveau supposé constant à l'amont s'abaisse sensiblement au-dessus du seuil, où la hauteur H du niveau constant d'amont au-dessus du seuil est la charge. L'abaissement au-dessus du seuil dépend de la charge H et des caractéristiques du déversoir.

En effet, un déversoir peut être vertical ou incliné, soit vers l'amont, soit vers l'aval, sa crête peut être épaisse ou mince. Il peut, en outre, y avoir ou non une contraction latérale. Enfin, la forme de l'échancrure peut être très diverse (rectangle, triangle, cercle, etc...).

A l'aval :

Après son passage sur le seuil, la lame déversante ou nappe déversante peut présenter différentes formes en rapport avec la charge et le niveau d'aval (Carlier, 1980).

I.2.2. Classification des Déversoirs

Généralement, un déversoir est classé selon ses dimensions, sa forme, l'orientation de sa crête, de son profil en plan et fonction des conditions amont et aval du courant.

La figure (1.2) suivante résume les détails de cette classification :

CLASSIFICATION GENERALE DES DEVERSOIRS	
CRITERE	TYPE DE DEVERSOIRS
FORME DE LA PAROI	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p><i>paroi mince</i></p> <p>$\frac{d}{h}$ petit</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p><i>crête arrondie</i></p> <p>forte courbure $r < h$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p><i>faible courbure</i></p> <p>faible courbure $r \gg h$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p><i>seuil épais</i></p> <p>$3h < l < 8h$</p> </div> </div>
CONTRACTION LATÉRALE	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> </div> <div style="width: 50%;"> <p>Type de contraction</p> <ul style="list-style-type: none"> ① pas de contraction $b=B$ ② contraction incomplète $b > \frac{B}{3}$ ③ contraction complète $b < \frac{B}{3}$ ④ contraction partielle <p style="font-size: small;">} disposition symétrique (for 1-3) } disposition asymétrique (for 4)</p> </div> </div>
FORME EN PLAN	<p style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> frontal latéraux polygonaux courbes </p>
FORME EN ELEVATION	<p style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> rectangulaire trapézoïdal triangulaire circulaire hyperbolique composé </p>
FORME DE LA NAPPE DEVERSANTE	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p><i>adhérente</i></p> <p>stable instable</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p><i>déprimée</i></p> <p>$p < P_{at}$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p><i>libre</i></p> <p>$p = P_{at}$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p><i>ondulée</i></p> </div> </div>
POSITION DU NIVEAU AVAL	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p><i>au-dessous de la crête</i></p> <p>déversement parfait - déversoir dénoyé</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p><i>au-dessus de la crête</i></p> <p>déversement imparfait - déversoir noyé</p> </div> </div>

Figure (I.2) : Classification des déversoirs (Bonvin ,2005)

I.2.3. Différentes formes de déversoirs

Il y a plusieurs types de déversoirs, et les déversoirs à mince paroi sont les plus couramment utilisés en pratique.

I.2.3.1. Déversoir à mince paroi

Le déversoir en mince paroi de largeur b permet de déterminer le débit Q en connaissant uniquement la hauteur d'eau à l'amont de l'ouvrage. Ce type de déversoir constitue donc une structure qui permet une mesure de débit. Si la paroi est placée verticalement dans un canal rectangulaire prismatique, la crête ayant la forme de la figure (I.3) et la nappe inférieure étant suffisamment aérée, cette structure est appelée déversoir en mince paroi standard (Hager, 1988).

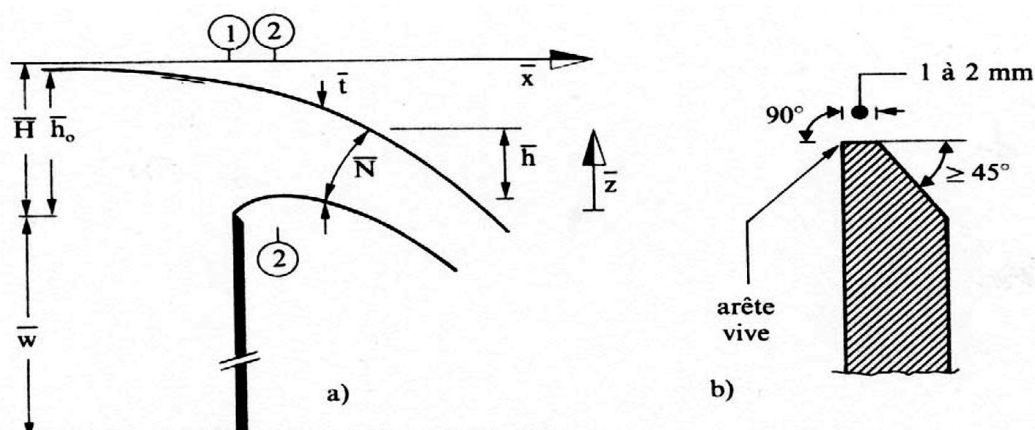


Figure (I.3) : Déversoir en mince paroi standard, a) définition de la géométrie, b) détail de la crête (Hager, 1988).

I.2.3.1.1. Déversoir vertical

Suivant la forme du profil de l'échancrure nous distinguerons plusieurs types :

a) Déversoir rectangulaire

C'est le plus classique et celui qui a été le mieux étudié, la théorie exacte est délicate à établir en raison de la difficulté à définir une section transversale perpendiculaire à tous les filets.

Considérons figure (I.4) dans le plan vertical de l'échancrure rectangulaire de largeur L , une tranche de la nappe de hauteur dh située à une profondeur h par rapport au niveau Constant d'amont.

Le théorème de Bernoulli appliqué entre un point de vitesse négligeable situé sur la surface libre à l'amont, origine du filet liquide passant par la tranche de nappe considérée et le point de vitesse V situé dans cette tranche et en négligeant la perte de charge entre ces deux points permet d'écrire :

$$V = \sqrt{2gh} \quad (\text{I.1})$$

Le débit élémentaire de la tranche de nappe considérée est égal à la vitesse commune V de ses divers points multipliée par la section $L dh$ que nous affecterons d'un coefficient m pour

tenir compte de la contraction de la nappe à son passage dans l'échancrure pratiquée dans une paroi mince, soit :

$$dQ = mL\sqrt{2gh}dh \quad (\text{I.2})$$

Le débit du déversoir sera donc :

$$Q = \int_0^H mL\sqrt{2gh}dh \quad (\text{I.3})$$

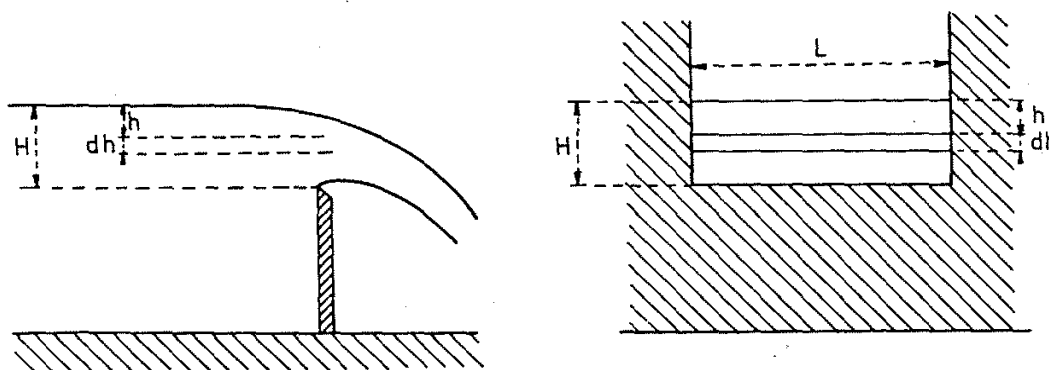


Figure (I.4) : Débit du déversoir rectangulaire à crête mince et à nappe libre (Carlier, 1980).

Ou, en supposant m constant avec h :

$$Q = \frac{2}{3}mLH\sqrt{2gH} \quad (\text{I.4})$$

C'est la formule établie par Poleni au XVIII^e siècle. On lui donne généralement la forme simplifiée suivante :

$$Q = \mu LH\sqrt{2gH} \quad (\text{I.5})$$

Cette formule qui rappelle la formule de débit des orifices et des ajutages

Les coefficients m et $\mu = 2/3 m$ devront tenir compte non seulement de la contraction proprement dite mais également des diverses approximations faites, en particulier de la vitesse à l'amont qui peut prendre des valeurs appréciables si la hauteur de pelle z est faible par rapport à H .

Par ailleurs, les expériences l'ont confirmé, de même pour que les orifices m varie avec les caractéristiques locales de l'écoulement, de même μ variera avec la charge H , avec la largeur L du déversoir, avec la hauteur de pelle z et, s'il y a contraction latérale, avec la largeur relative des joues par rapport à la largeur du canal.

Nous examinerons successivement le cas d'un déversoir rectangulaire sans contraction latérale et avec contraction latérale (Carlier, 1980).

- **Déversoir rectangulaire sans contraction latérale : « déversoir de Bazin »**

Sur le déversoir rectangulaire sans contraction latérale, habituellement désigné par déversoir de Bazin, il existe un grand nombre d'observation, ce qui permet d'obtenir une bonne précision dans la mesure des débits (Lancastre, 1996).

Lorsque la largeur du déversoir (L) est égale à la largeur de (B) en amont du déversoir, on dit que le déversoir rectangulaire est « sans contraction » Sous cité dans la figure ci-après (Figure I.5).

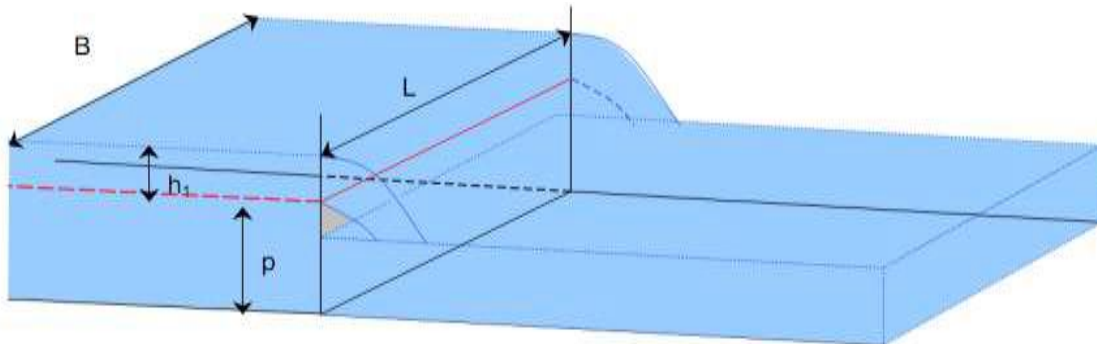


Figure (I.5) : Vue en perspective d'un déversoir rectangulaire sans contraction latérale (Cetmef, 2005)

- **Déversoir rectangulaire avec contraction latérale**

Il y a contraction latérale quand la largeur B du canal est supérieure à la largeur L du déversoir. (Lancastre, 1996). Elle est citée dans les figures ci-dessous (I.6) et (I.7).

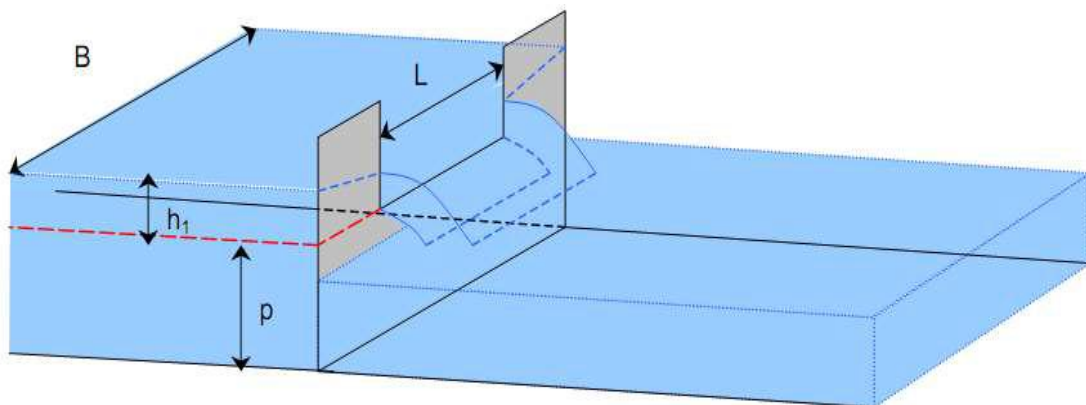


Figure (I.6) : Vue en perspective d'un déversoir rectangulaire avec contraction latérale (Cetmef, 2005)

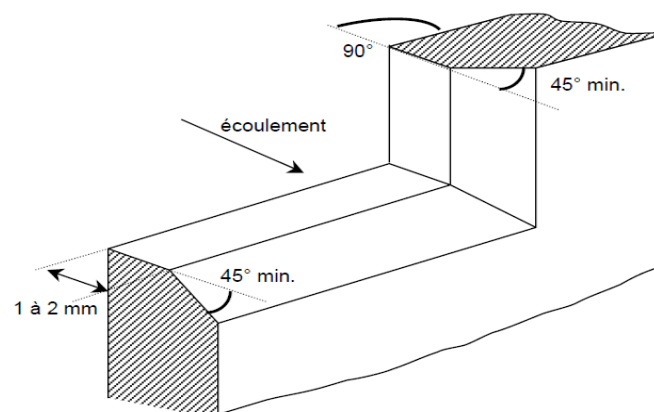


Figure (I.7) : Forme de la crête du déversoir rectangulaire avec contraction latérale (Cetmef, 2005)

b) Déversoir triangulaire

Dans un déversoir triangulaire, le profil de l'échancrure est un triangle (l'échancrure est en forme de V), et la bissectrice parfaitement verticale. (Figures I.8 et I.9)

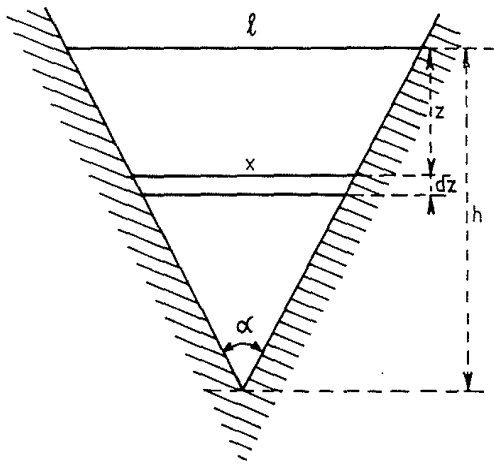


Figure (I.8) : Déversoir triangulaire (Carlier, 1980).

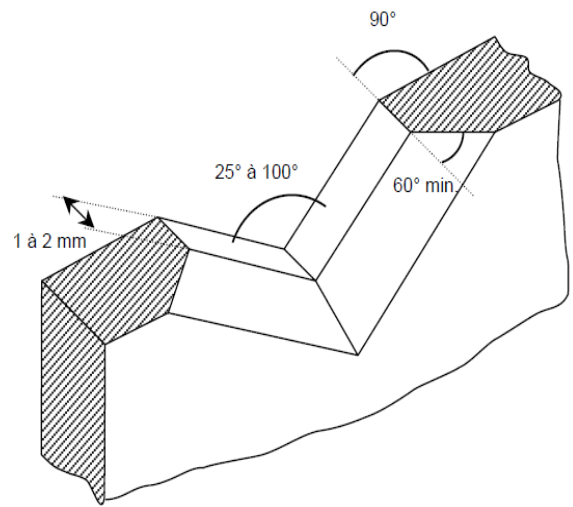


Figure (I.9) : Forme de la crête d'un déversoir à échancrure triangulaire (Cetmef,2005)

Entre autres formules, nous indiquons celle de Kindsvater (1957), recommandée par l'Association Internationale de Normalisation (I.S.O.), comme formule pratique pour des calculs approchés, nous proposons celle de Gourley et Grimp :

$$Q = 1,32tg \frac{\alpha}{2} h^{2,47} \tag{I.6}$$

Où :

Q : le débit en m^3/s ;

h : la charge sur le sommet, en m ;

α : l'angle du sommet, ($^\circ$) ;

La surlargeur, $L-l$ doit être, au moins, égale à $3l/2$.

Pour $\alpha = \pi/2$, on retrouve la formule de Thompson (Lancastre, 1996)

$$Q = 1.42h^{3/2} \tag{I.7}$$

c) Déversoir trapézoïque

Si l'échancrure du déversoir a la forme d'un trapèze isocèle évasé vers le haut le débit total est la somme des débits Q_1 et Q_2 elle est citée dans la figure ci-dessous. (I.10).

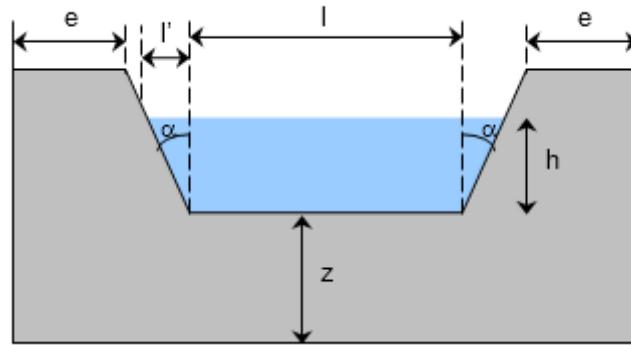


Figure (I.10) : Déversoir trapézoïdal. (Carlier, 1980).

Avec Q_1 : débit de la partie rectangulaire :

$$Q_1 = \mu l h \sqrt{2gh} \quad (I.8)$$

Et Q_2 : débit des deux parties triangulaires :

$$Q_2 = \frac{8}{15} \mu_1 l' h \sqrt{2gh} \quad (I.9)$$

Pour une valeur quelconque de l'angle α d'inclinaison des joues du déversoir sur la verticale le débit peut être calculé par la formule de Gourley et Crimp :

$$Q = 1.32h^{2.47} \operatorname{tg} \alpha + 1.69l^{1.02} h^{1.47} \quad (I.10)$$

Cipolletti a imaginé un déversoir trapézoïdal dont l'angle α est tel que $\operatorname{tg} \alpha = 1/4$, ce qui permet de compenser l'influence de la contraction due aux joues par l'augmentation de la largeur superficielle de la nappe due à la forme de l'échancrure, de manière à conserver un coefficient μ constant pour une large plage de variation de la charge h

Le débit du déversoir trapézoïdal de Cipolletti est donc donné par la formule générale :

$$Q = \mu l h \sqrt{2gh}$$

La formule de Cipolletti s'écrit donc sous forme simplifiée (Carlier, 1980) :

$$Q = 1.68lh^{1.5} \quad (I.11)$$

d) Déversoir circulaire

Ce type de déversoir, assez similaire à un écoulement de type orifice du point de vue géométrique, n'en est pas moins totalement différent du point de vue hydraulique les figures (I.11) et (I.12) présente ce type. En effet, ce type de déversoir comporte une section d'écoulement à surface libre et présente les avantages suivants :

- Simplicité et facilité d'exécution et de mise en place (il n'y a ni à placer le seuil parfaitement horizontalement comme c'est le cas pour un déversoir rectangulaire, ni à placer la bissectrice parfaitement verticalement comme c'est le cas pour un déversoir triangulaire),
- Facilité de ventilation de la nappe,

- Une plus grande précision que le déversoir rectangulaire pour la mesure des petits débits. (Cetmef, 2005)

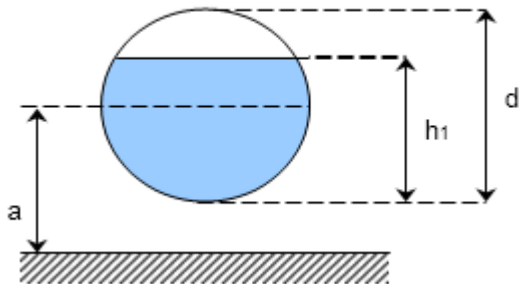


Figure (I.11) : coupe transversale d'un déversoir circulaire (Cetmef, 2005)

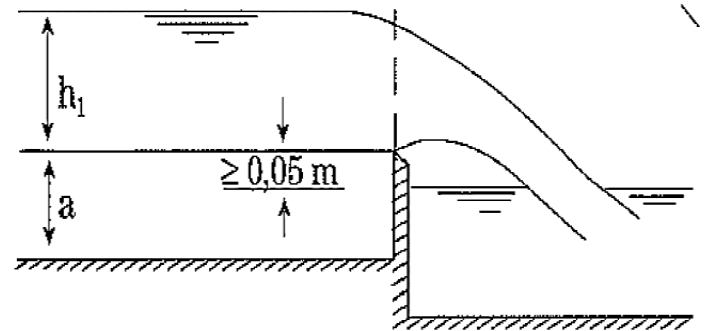


Figure (I.12) : Déversoir circulaire. (Lancastre, 1996)

I.2.3.1.2. Déversoir incliné

Le déversoir incliné a une crête perpendiculaire à l'axe du canal, mais le plan qui le contient est incliné par rapport à la verticale. Sous cité dans les figures ci-après (I.13) et (I.14)

Considérons l'angle d'inclinaison i , on constate d'après la théorie de Boussinesq, que le coefficient de débit de ce type de déversoirs est égal au produit du coefficient de débit d'un déversoir vertical par un coefficient $K = 1 - 0.3902 \frac{\alpha}{180}$, tel que α exprimé en degrés (Lancastre, 1996)

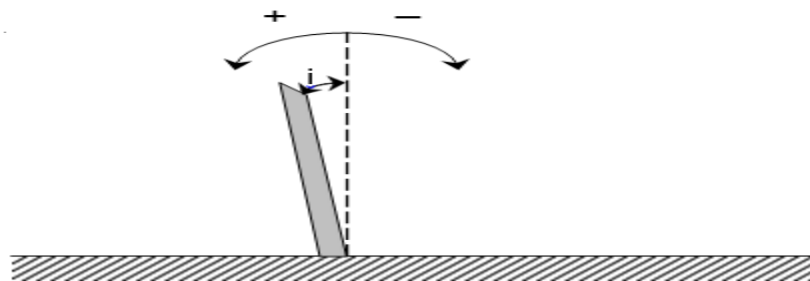


Figure (I.13) : Coupe longitudinale d'un déversoir incliné (Carlier, 1980).

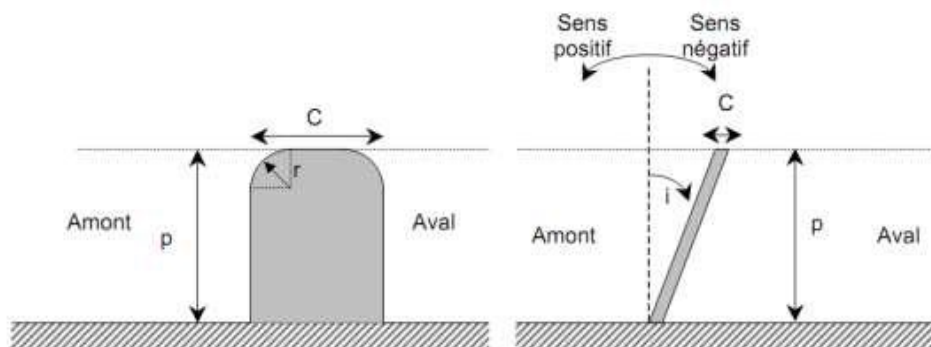


Figure (I.14) : coupe longitudinale de deux types d'ouvrages (à crête épaisse et à crête mince incliné) (Cetmef, 2005)

I.2.3.1.3. Déversoir oblique

C'est un déversoir sur un plan vertical dont la crête est oblique par rapport à l'axe longitudinal du canal où il est installé, les figures suivantes (I.15) et (I.16) représentent une vue en plan d'un déversoir oblique.

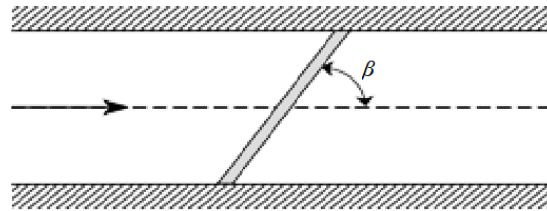


Figure (I.15) : Vue en plan d'un déversoir oblique (Carlier, 1980).

Où

q_n : débit déversé par un déversoir du même type placé perpendiculairement à l'axe ;

h : charge ;

α : distance de la crête au fond du canal ;

B : fonction sans dimensions de l'angle β (Lancastre, 1996).

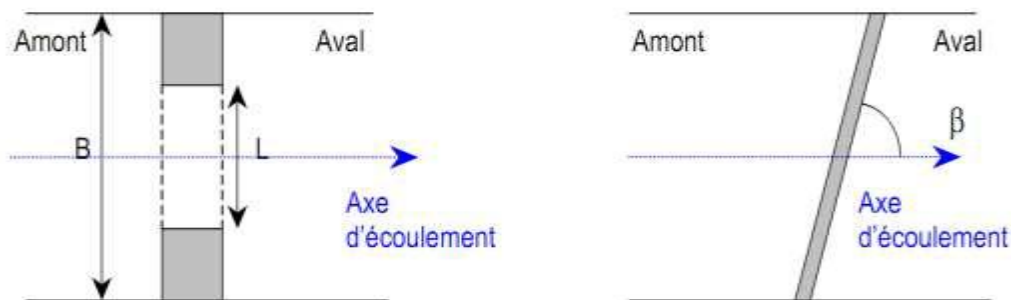
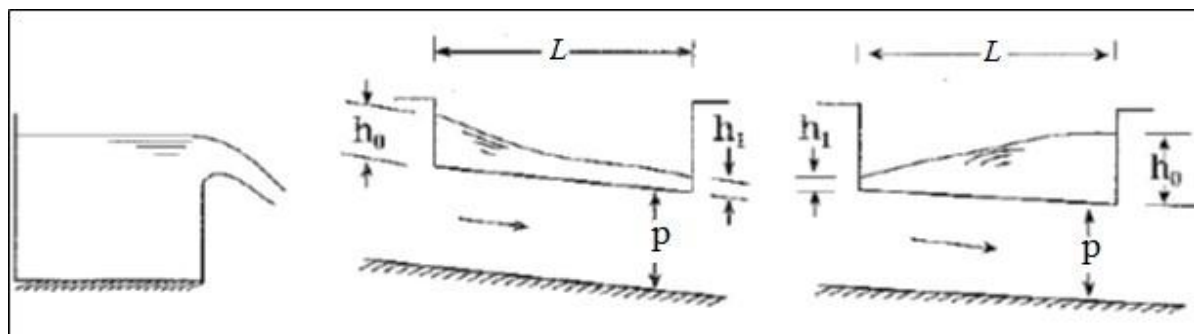


Figure (I.16) : vue en plan d'un déversoir avec contraction latérale et d'un déversoir oblique (Cetmef, 2005).

I.2.3.1.4. Déversoir latérale

Le déversoir latérale est un déversoir installé dans la paroi d'un canal, parallèlement à son axe.



a)

b) Régime rapide

c) Régime lent

Figure (I.17) : Les régimes d'écoulement –schéma de définition (Lancastre, 1996).

On détermine la forme de la surface libre au long du déversoir latéral et conjointement, la charge sur le déversoir, en considérant que l'énergie spécifique, sur le fond, le long du canal, se maintient constante, et que le débit se réduit progressivement au fur et à mesure qu'il est déversé.

Dans ces conditions, compte tenu de la notion d'énergie spécifique (figure I.18) reliant la hauteur d'eau, h , et le débit Q , en supposant l'énergie (H constante), la hauteur d'eau en fonction du débit diminue en régime torrentiel et augmente en régime fluvial Figure (I.17.)

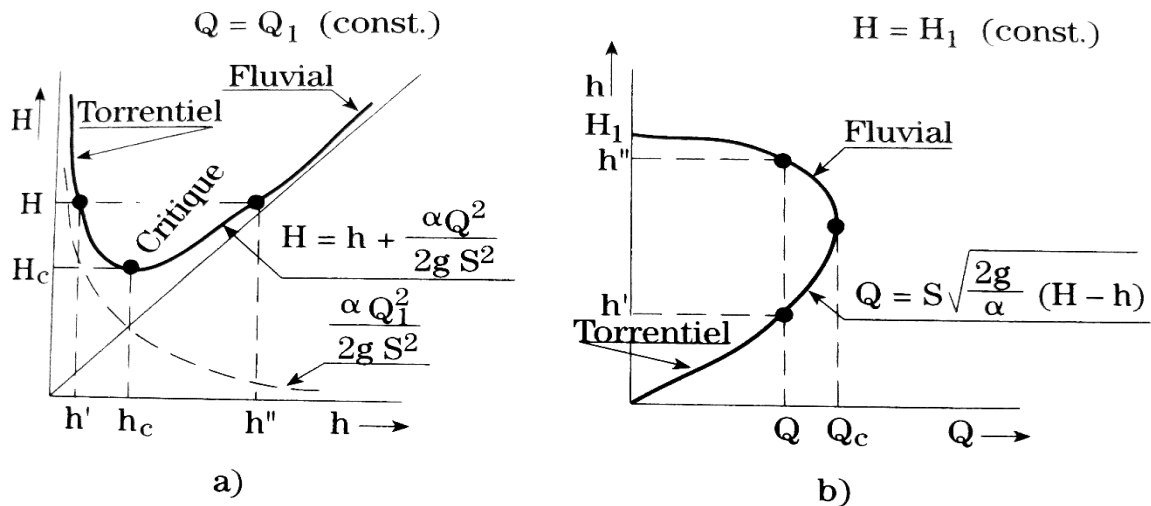


Figure (I.18) : Ecoulement à débit Q ou à énergie spécifique H constante (Lancastre, 1996)

En régime torrentiel (figure (I.17) b), l'écoulement est commandé par l'amont. Ainsi, à partir de la hauteur h , en amont, (qui peut être la profondeur normale, si $I > I_c$, ou une autre imposée à l'écoulement), on calcule par différences finies, le débit déversé et, à partir de la courbe $h(Q)$, avec H constante, on détermine les hauteurs d'eau dans le canal et les débits déversés correspondants.

En régime fluvial (figure (I.17) c), l'écoulement est commandé par l'aval, et l'on procède d'une manière identique à partir de la hauteur h , en aval qui peut être la profondeur normale, si $I < I_c$, ou une autre imposée à l'écoulement).

Le débit déversé peut être déterminé par la formule de Dominguez. (Lancastre, 1996)

$$Q = \phi \mu l \sqrt{2g} h_0^{3/2} \tag{I.12}$$

Les figures suivantes (I.19) et (I.20) représentent les déversoirs latéraux et l'écoulement dans ce type de déversoirs.

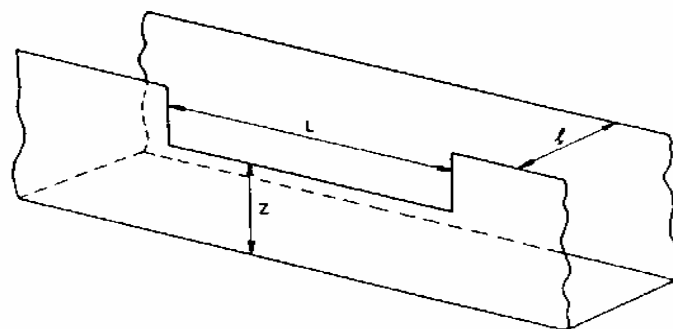


Figure (I.19) : Déversoir latéral (Hager, 1980).

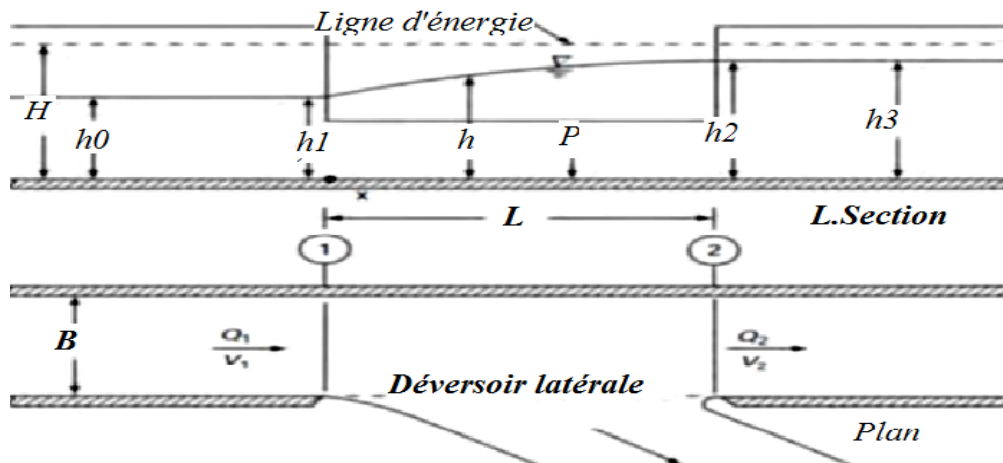


Figure (I.20) : Schéma de définition de l'écoulement dans le déversoir latéral (Subramanya, 2009).

I.2.3.2. Déversoir à crête épaisse

Ce type de déversoir à angles vifs, représenté dans la figure (I.21), peut s'imposer notamment pour des phases de construction de barrages. Comparé au déversoir en mince paroi, deux paramètres supplémentaires relatifs à la pente amont et la longueur de la crête L du déversoir doivent être considérés. Le calcul simplifié introduit le coefficient de correction dans la formule générale du déversoir en mince paroi, (Hager, 1988).

Donc :

$$Q = \bar{C}_b \bar{C}_e b \sqrt{2gH}^{3/2} \tag{I.13}$$

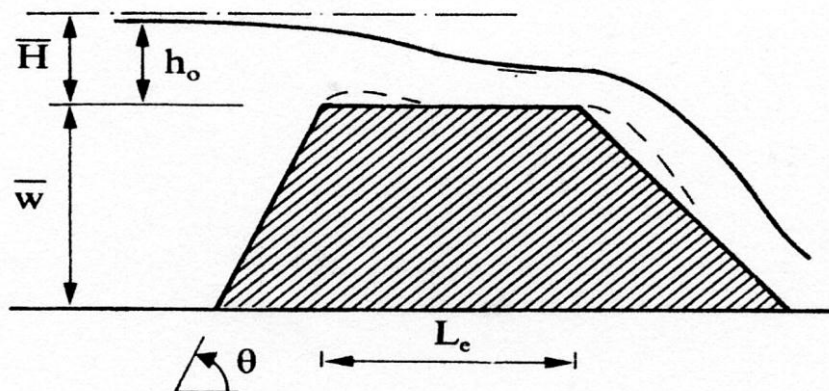


Figure (I.21) : Déversoir à seuil épais, géométrie polygonale, (Hager, 1988).

I.2.3.2.1. Particularités du seuil à crête épaisse

a) Caractéristiques suivant la plage de valeurs de h_1/C

Le seuil épais est caractérisé par le fait que la nappe inférieure de l'écoulement adhère à la crête du seuil. En effet, plus cette crête est faible, plus le seuil se comporte comme un seuil à crête mince. Trois types de seuils épais peuvent être distingués et sont reportés sur la figure (I.22).

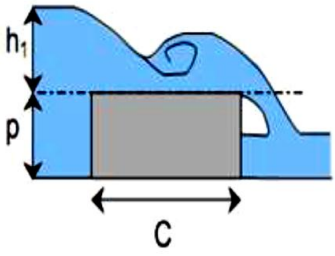
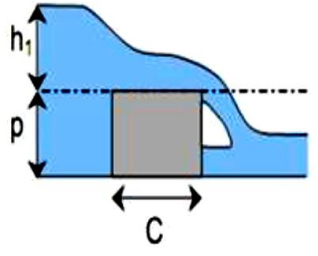
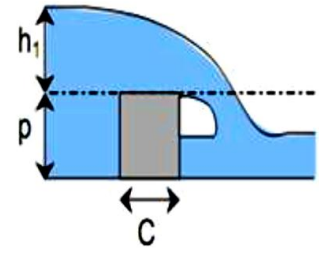
		
<p style="text-align: center;">$h_1/C < 0,1$</p> <p>Seuil à crête épaisse et longue</p> <p>Un ressaut se crée au-dessus du déversoir</p>	<p style="text-align: center;">$0,1 < h_1/C < 0,4$</p> <p>Seuil à crête épaisse</p> <p>La nappe s'abaisse jusqu'à obtenir un parallélisme avec la crête du déversoir et passe par une hauteur critique, notée h_c.</p>	<p style="text-align: center;">$0,4 < h_1/C < 1,5$</p> <p>Seuil à crête « pas très épaisse »</p> <p>La nappe s'incline de l'amont vers l'aval sur toute l'épaisseur du déversoir. L'écoulement passe par une hauteur critique difficilement identifiable.</p>

Figure.I.22 : Types des seuils à crête épaisse selon le rapport $\frac{h_1}{c}$ (Cetmef, 2005).

I.2.3.3. Déversoir à crête arrondie

Les déversoirs à crête ronde (ou à crête arrondie) illustrés dans les figures (I.23) et (I.24) sont définis comme des déversoirs dont les crêtes sont des surfaces lisses à courbe simple (cylindriques). Les profils longitudinaux de la crête ne sont généralement pas un arc de circulaire, comme son nom l'indique ; il s'agit souvent d'une courbe complexe qui ne peut être décrite en termes géométriques simples. Les crêtes des déversoirs de la plupart des hauts barrages modernes, qui ont la forme de la surface inférieure de la nappe d'un déversoir à plaques minces pleine largeur, sont des exemples particuliers de déversoirs à crête ronde. Ceux-ci sont communément appelés barrages en doucine ou barrages à charge de conception.

La géométrie du profil des déversoirs à crête ronde montre qu'ils appartiennent à une classe intermédiaire entre les déversoirs à plaques minces et les déversoirs à crête large. La crête est suffisamment longue (dans le sens de l'écoulement) pour fournir un support à la nappe à travers la section de contrôle, mais elle est suffisamment courte pour que l'écoulement sur la crête soit nettement curviligne. La limite inférieure fixe de la nappe est donc soumise à de fortes variations de pression ; pour une charge donnée, la pression peut varier considérablement d'un point à l'autre, et en un point donné la pression varie sensiblement avec la charge.

La géométrie et le schéma d'écoulement d'un simple déversoir à crête arrondie sont illustrés dans les figures (I.23 et I.24). L'intersection de la crête curviligne et de la face verticale (ou inclinée) du déversoir est appelée "point de ressort" et la hauteur P du déversoir est référencé au point le plus élevé de la crête.

La hauteur P du déversoir au-dessus du plancher du chenal d'approche est une propriété importante du profil car, avec la charge, c'est une mesure du degré de contraction dans un plan vertical imposé à l'écoulement par la limite. Ceci, à son tour, affecte la répartition de la pression le long de la crête et dans la section de contrôle, pour la raison suivante : la hauteur du déversoir

par rapport à la charge régit la trajectoire que les particules dans les filaments les plus bas de la nappe prendraient si elles étaient « libres » (comme dans le cas d'un écoulement sur un déversoir à plaques minces ventilé). C'est-à-dire que la "montée" de la nappe libre est contrôlée par le degré de contraction verticale des limites, tout comme la contraction du jet à partir d'un orifice est contrôlée par les amplitudes relatives des diamètres de tuyau et d'orifice. Dans certaines limites, plus le seuil est haut pour une charge donnée, plus la montée est importante. Ainsi, si un déversoir à crête ronde a une crête qui correspond exactement à une nappe libre pour une certaine charge, la pression le long de la crête est sensiblement nulle (atmosphérique). Si, sans changement de charge ou de conformation de la crête, la hauteur du déversoir devait être réduite, la crête solide dépasserait du profil de la nappe à partir d'un déversoir à plaques minces de hauteur comparable. La pression le long de la crête solide ne serait plus nulle. Une pression positive existerait parce que la crête dévierait le courant légèrement vers le haut à partir de sa position "libre". L'augmentation de la pression dans la section de contrôle doit entraîner une diminution du coefficient de débit.

L'inclinaison de la face amont du déversoir influence également le débit par son influence sur la contraction de la nappe. En règle générale, plus la pente du parement amont est plate, plus le profil de nappe libre sera faible.

Les déversoirs à crête arrondie comprennent une variété illimitée de profils de crête spécifiques, même avec la limitation qu'aucun profil ne peut inclure une courbure locale si grande que la nappe se sépare de la crête. Étant donné que les effets visqueux sont considérés comme négligeables, la géométrie de la limite détermine de manière unique le modèle d'écoulement sur la crête. Ainsi, pour chaque profil de limite spécifique, il existe un modèle d'écoulement unique pour toute charge donnée, avec des distributions de vitesse et de pression uniques dans la nappe qui déterminent le coefficient de débit (Hulsing, 1968).

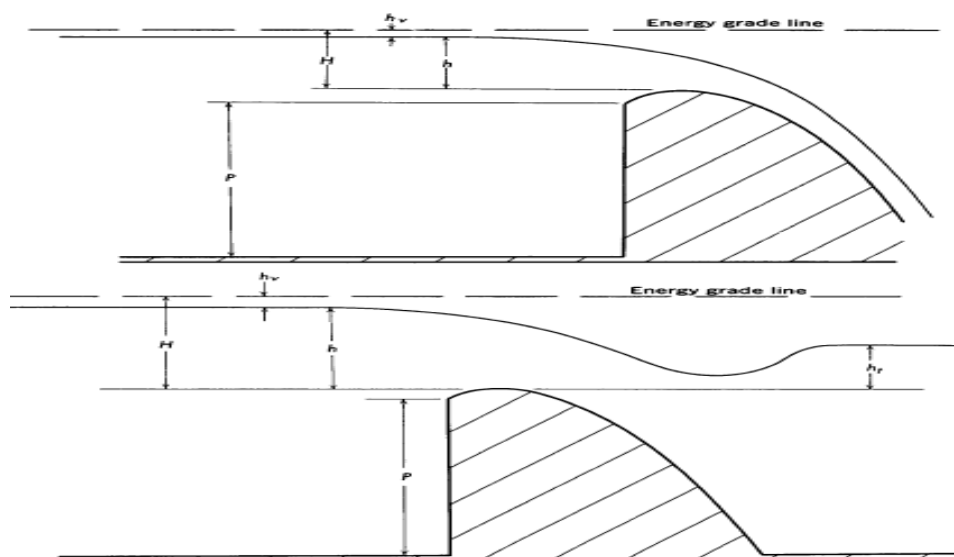


Figure (I.23) : Croquis de définition d'un barrage à charge creuse à écoulement libre et à écoulement submergé (Hulsing, 1968).

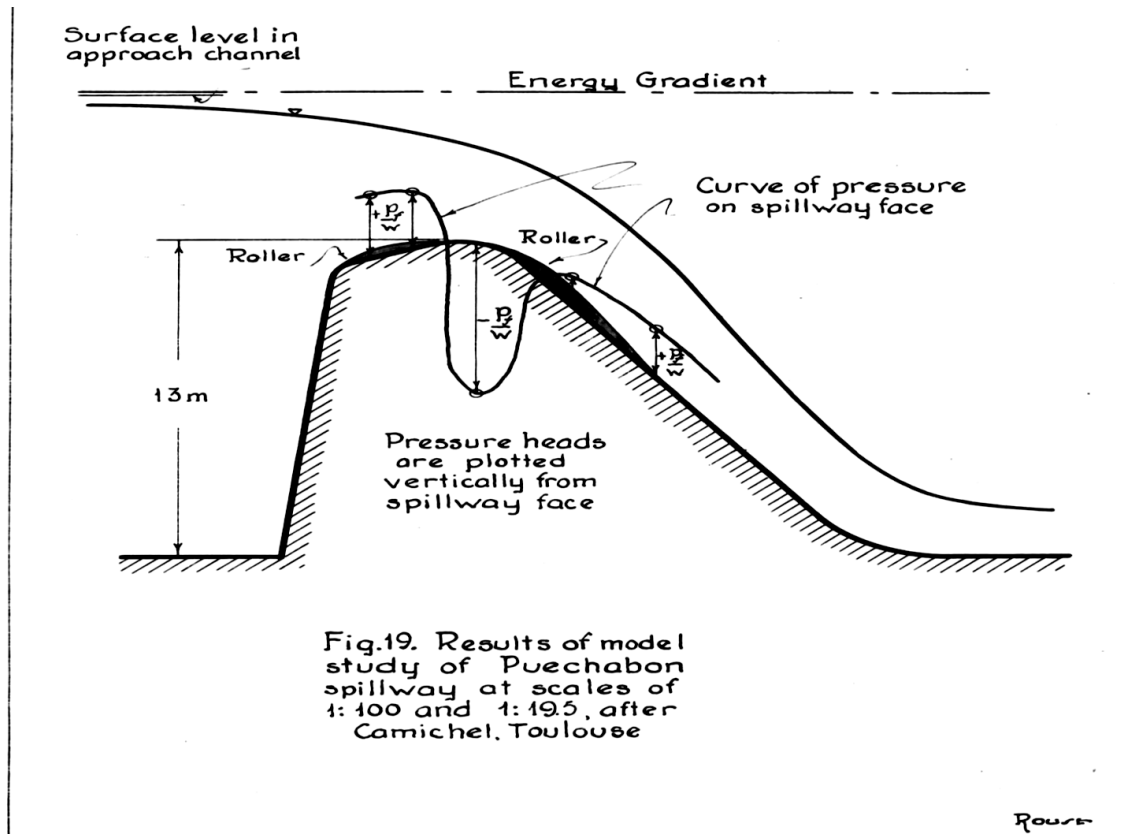


Figure (I.24) : déversoir à crête arrondie (Rouse, 1929).

I.3. Chute libre dans un canal

Toute les fois que l'on dispose d'une chute libre dans un canal, celle-ci peut servir pour la mesure des débits. La figure (I.25) représente les caractéristiques principales d'un canal, comme c'est définis dans les photos suivantes (I.26, I.27).

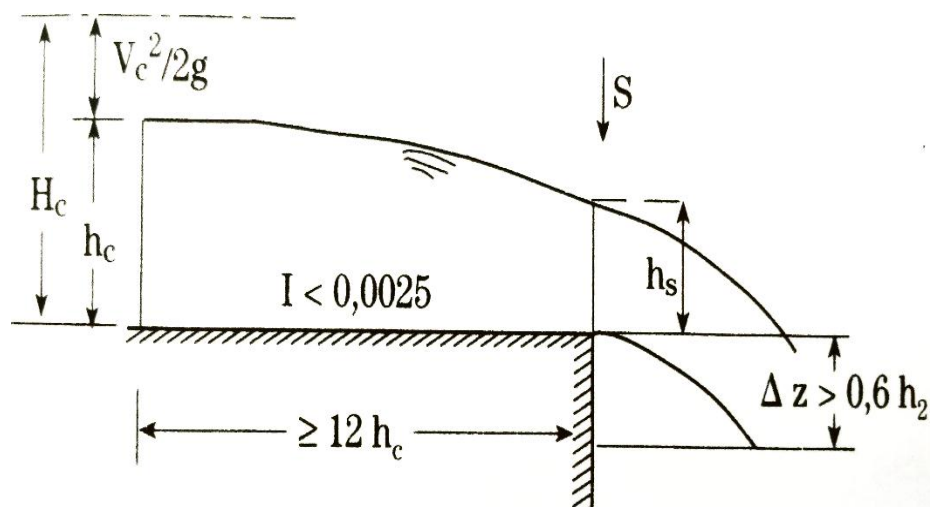


Figure (I.25) : Chute libre dans un canal et caractéristiques principales (Lancastre, 1996).

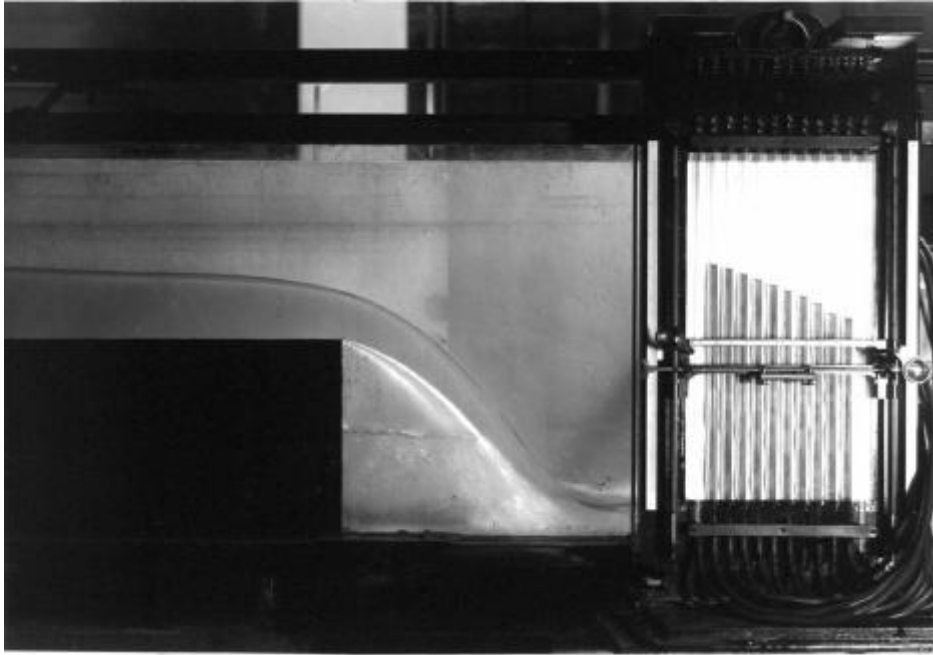


Figure (I.26) : Photo d'une chute libre sans crête (Rouse, 1929).

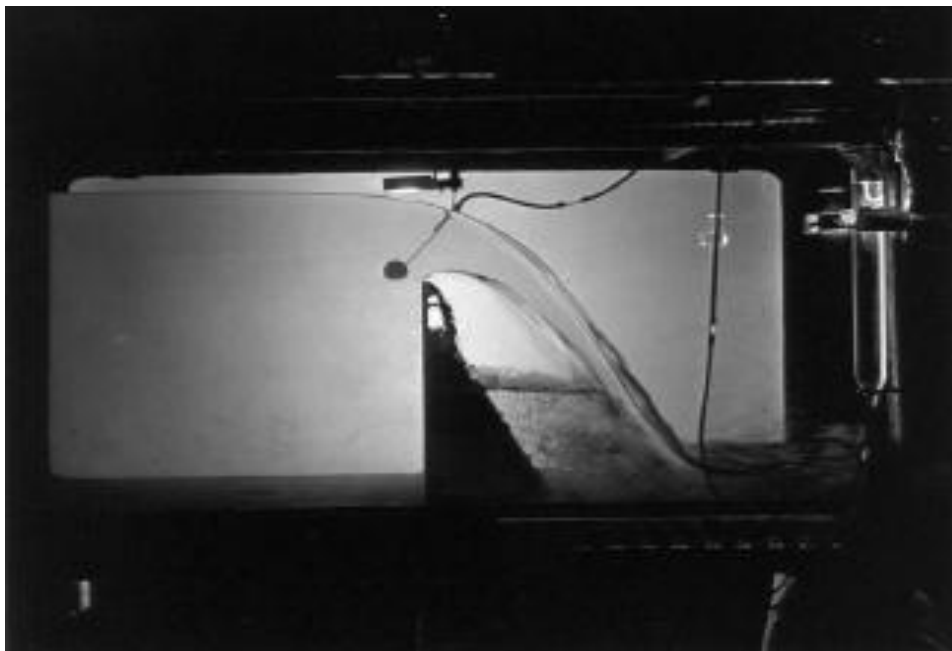


Figure (I.27) : Photo d'une chute libre à crête arrondie (Rouse, 1929).

a) Canal rectangulaire sans contraction latéral :

En amont de la section de chute, dans une zone où il y a encore parallélisme des lignes de courant, l'écoulement s'opère en régime critique et l'on a alors $h_c = 2/3 H_c$. Si l'on prend comme coefficient de Coriolis $\alpha = 1$,

on aura :

$$Q = l\sqrt{gh_s^{3/2}} \quad (I.14)$$

Dans la pratique, il est difficile de déterminer exactement la section où l'écoulement atteint le régime critique ; il est plus facile au moyen d'une pointe ou d'une règle, de mesurer la hauteur d'eau, exactement dans la section S correspondant à l'arrêt de la chute.

Les expériences de Rouse (1936), confirmé par d'autres expérimentateurs, ont montré que $h_s = 0.715h_c$.

Ainsi, le débit sera donné par :

$$Q = l\sqrt{g}\left(\frac{h_s}{0.715}\right)^{3/2} \quad (I.15)$$

Si la valeur de h_s est mesurée au milieu du canal, l'erreur est de l'ordre de 2% à 3% ; les côtés du canal doivent être parallèles et l'arête de chute doit être bien définie et perpendiculaire à l'écoulement. La longueur du canal d'approche doit être supérieure à $12 h_c$ et sa pente, dans ce tronçon, doit être, de préférence, nulle, et ne doit pas dépasser, en tout cas, $0,0025$. La hauteur d'eau doit être telle que $h_s > 0,03 \text{ cm}$; la chute Δz doit être plus grande que $0,6 h_c$. La largeur du canal doit être $l > 3 h_c$ et non inférieure à $0,30 \text{ m}$ (Lancastre, 1996)

b) Chute libre dans un canal trapézoïdal avec section de contrôle rectangulaire :

Dans cette partie, nous parlerons de la chute libre dans un canal trapézoïdal et la figure suivante (I.28) représente la chute libre dans un canal trapézoïdal avec section de contrôle rectangulaire.

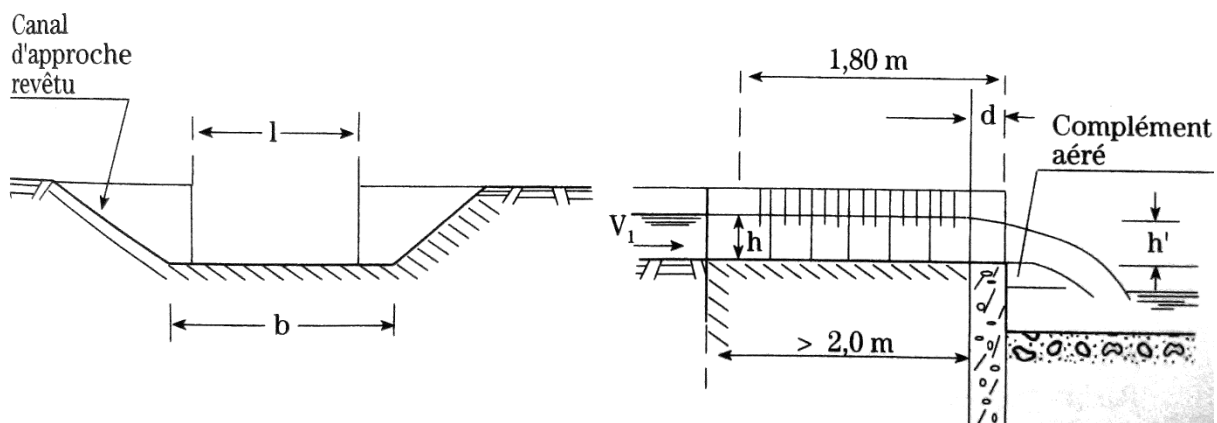


Figure (I.28) : Chute libre dans un canal trapézoïdal avec section de contrôle rectangulaire (Lancastre, 1996)

Le débit est donné par la formule suivante :

$$Q = C_d C_v \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3} g \right]^{0.5} l h^{3/2} \quad (I.16)$$

La valeur de $K = C_d C_v \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3} g \right]^{0.5}$ en $m^{1/2}$.

$$Q = K l h^{3/2} \quad (I.17)$$

Il est recommandé $0,09 \text{ m} < h < 0,90 \text{ m}$; $b = 1,25l$; $h' / h < 0,20$. (Lancastre, 1996).

I.4. Etat de l'art sur les approches de calcul

L'écoulement dans une chute brusque est un cas typique de l'écoulement spatialement varié. Des solutions analytiques, et expérimentales sont été proposées par plusieurs chercheurs.

Les études existantes ont comme objectif de répondre aux problèmes des écoulements d'une chute libre dans un canal et ce par les différentes approches (Approximation de Boussinesq,

approche énergétique, approche de quantité de mouvement, approche du débit du déversoir (sans crête), approche en vortex libre, approche écoulement en potentiel et approche empirique).

- Approximation de Boussinesq : La courbure de la surface libre d'un déversoir libre étant relativement faible, varie d'une valeur finie à la surface libre à zéro au fond du canal. Selon l'approximation de Boussinesq, une variation linéaire de la courbure de la ligne de courant avec la profondeur y est supposée (Dey, 2002).

- Approche énergétique : Hager a appliqué une équation d'énergie étendue en tenant compte de l'inclinaison et de la courbure de la ligne de courant. Rubin a utilisé une solution analytique d'une équation non linéaire de la théorie d'une nappe fluide directe pour prouver que pour une profondeur d'extrémité constante et une profondeur amont variable, la charge d'énergie en écoulement constant en chute libre est minimisée lorsque l'écoulement est critique. (Dey, 2002).

- Approche de quantité de mouvement : À la section d'extrémité, la pression est non hydrostatique en raison de l'écoulement accéléré et du profil incliné de la ligne de courant. En appliquant l'équation de quantité de mouvement unidimensionnelle entre deux sections pour la chute libre d'un canal ayant une pente de lit (Dey, 2002).

- Approche du débit du déversoir (sans crête) : On peut supposer que l'écoulement d'un déversoir libre dans un chenal est similaire à l'écoulement sur un déversoir à crête mince ayant la même section avec une hauteur de crête égale à zéro. Comme cela est fait pour déterminer le débit sur un déversoir à crête mince, en négligeant le compactage de la nappe, une distribution de pression nulle et des lignes de courant parallèles à la section d'extrémité sont supposées. La vitesse d'écoulement à la section d'extrémité est calculée en appliquant l'équation de Bernoulli sur une ligne de courant entre la section amont et la section d'extrémité (Dey, 2002).

- Approche vortex libre : La distribution des vitesses et la courbure du vortex libre ont été utilisées pour simuler l'écoulement à l'extrémité d'un canal horizontal de différentes sections transversales par Ali et A. Sykes, 1972, et Ali et Ridgway, 1977. En supposant un mouvement de vortex libre à la section d'extrémité d'un canal (Dey, 2002).

- Approche en écoulement potentiel : Les conditions aux limites de l'écoulement potentiel dans une chute libre ont été exprimées en termes de nombre de Froude, de hauteur d'élévation y et de dérivées partielles avec respectivement le potentiel de vitesse et les fonctions de courant, dans le plan potentiel complexe. Les formes aux différences finies de l'équation de Laplace ainsi que les conditions aux limites, la constance de la charge totale et la pression nulle aux lignes de courant libres ont été résolues ensemble par un processus itératif pour le nombre de Froude approchant égal et supérieur à l'unité (Dey, 2002).

- Approche empirique : L'ensemble des paramètres caractéristiques propres au phénomène de chute libre en bout de canal peut être donné sous forme fonctionnelle comme suit :

$$Q = f_1(h_e, l, m, g, \mu)$$

➤ Pour les canaux rectangulaires, le paramètre de longueur caractéristique l devient la largeur de canal b avec $m=1$. Bauer et Graf, (1971) ont donné une équation de déversoir rectangulaire.

D'autre part, Ferro (2002) a exprimé la relation fonctionnelle en utilisant les données mesurées de Paderi (1954), Gill (1979) et Ferro (1992) sur le dépassement libre rectangulaire (Dey, 2002).

➤ Pour les canaux trapézoïdaux, Ferro (2002) a donné une relation fonctionnelle en utilisant les données mesurées de Diskin (1961), Rajaratnam et Muralidhar (1970), Keller et Fong (1989), et Pagliara et Viti (1995) sur la chute libre trapézoïdale.

Cependant, Pagliara et Viti (1995) ont proposé une équation empirique des canaux trapézoïdaux incluant la pente I (Dey, 2002).

➤ Aussi, pour les canaux circulaires, Dey (2001) a proposé une relation fonctionnelle utilisant les données mesurées de Rajaratnam et Muralidhar (1964) sur le déversoir circulaire.

Aussi, les équations empiriques de la profondeur finale h et l'EDR (EDR= la profondeur finale / la profondeur critique) en fonction de la profondeur critique h_c (Dey, 2002).

I.5. Conclusion

Dans le premier chapitre de notre étude, nous avons abordé plusieurs éléments, dont les plus importants sont la définition et la classification des déversoirs ainsi que leurs différents types. Nous avons aussi parlé de la chute libre dans les canaux rectangulaires d'une part. Par ailleurs, nous avons introduit certaines approches qui nous ont aidés à calculer le débit déversé dans différents types des canaux, selon un certain nombre de chercheurs.

Chapitre II

Chapitre II :

Analyse Théorique

II.1. Introduction

Après avoir effectué une recherche bibliographique générale sur la classification, et les différents types des déversoirs, dans ce chapitre nous allons présenter les équations principales permettant de formuler le modèle mathématique qui gouverne l'écoulement dans les canaux rectangulaires. L'objectif de cette analyse théorique est de trouver la formulation analytique de la hauteur de chute à l'extrémité du canal et l'équation différentielle du profil de la surface libre.

II.2. Equations de base

II.2.1. Equation de quantité de mouvement uni dimensionnelle

En appliquant l'équation de quantité de mouvement entre la section $x = -L$ et la section $x = -x$ dans la direction longitudinale x comme la figure suivant (II.1) , On écrit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \rho Q \Delta \vec{V} \quad (II.1)$$

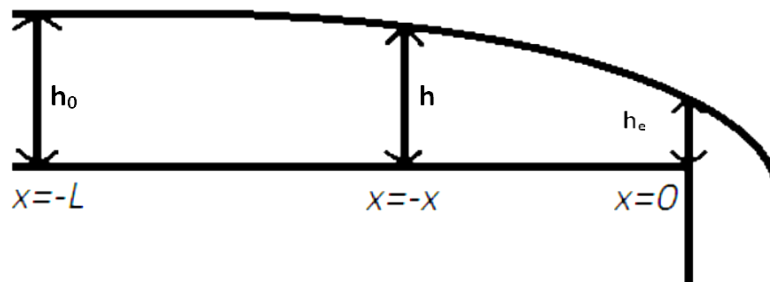


Figure (II.1) : Un canal du profil rectangulaire

Les forces extérieures s'exerçant sur la tranche liquide projetées sur l'axe x du canal se composent de :

- Les forces de pressions P, P_o
- La force d'inertie F_i

Dans ce cas on peut conclure :

$$\vec{P}_o + \vec{P} = \rho Q \Delta \vec{V} \quad (II.2)$$

En projetant sur l'axe ox , on trouve :

$$P_o - P = \rho Q (\beta V - \beta_o V_o) \quad (II.3)$$

Avec :

ρ : la masse volumique du fluide ;

Q : le débit ;

β : coefficient de Boussinesq.

Dans un écoulement curviligne ayant une accélération constante a_n perpendiculaire à la direction d'écoulement, L'intensité de la pression A à toute profondeur h est déterminée à partir de l'intégration de l'équation d'Euler(Chow,1959) :

$$\text{Suivant } x : \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + f_x \quad (\text{II.4})$$

$$\text{Suivant } y : \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + f_y \quad (\text{II.5})$$

$$\text{Suivant } z : \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + f_z \quad (\text{II.6})$$

Ainsi donc, Suivant y :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}P + \vec{f} \quad (\text{II.7})$$

$$\text{Donc :} \quad \vec{a}_n = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}P - g \quad (\text{II.8})$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}(A + \rho g y) = \rho a_n \quad (\text{II.9})$$

Avec :

g accélération de la pesanteur.

Selon la théorie de Boussinesq, la courbure d'une ligne de courant est supposée varier linéairement avec la profondeur(Jaeger,1957). Ainsi, le rayon de courbure d'une ligne de courant à un niveau y s'exprime par :

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{y}{h}\right) \left(\frac{1}{r_s}\right) \quad (\text{II.10})$$

Où :

h : la profondeur d'eau ;

r : le rayon de courbure.

Le rayon de courbure de la petite surface libre peut être approximé comme suit :

$$\frac{1}{r_s} = \frac{d^2 h}{dx^2} \quad (\text{II.11})$$

Avec :

$$a_n = \frac{v^2}{r} \quad (\text{II.12})$$

En mettant l'équation (II.10) dans l'équation (II.12), on obtient :

$$a_n = \frac{v^2 y}{h} \left(\frac{d^2 h}{dx^2} \right) \quad (\text{II.13})$$

Donc :

$$a_n = Ry \quad (\text{II.14})$$

Où :

$$R = \frac{v^2}{h} \left(\frac{d^2 h}{dx^2} \right) \quad (\text{II.15})$$

En supposant que la vitesse d'écoulement à n'importe quelle profondeur est la vitesse d'écoulement moyenne v , l'accélération normale a_n est égale à Ry . Ici,

En utilisant $a_n = Ry$, l'équation (II.9) est intégrée de y à h pour obtenir l'équation de la distribution de la pression comme suit:

$$-\int_y^h \frac{\partial}{\partial y} (A + \rho g y) dy = \int_y^h \rho a_n dy \quad (\text{II.16})$$

$$\text{Donc :} \quad -\int_y^h \frac{\partial}{\partial y} (A + \rho g y) dy = \int_y^h \rho R y dy \quad (\text{II.17})$$

$$-(A + \rho g(h - y)) = \rho R \left(\frac{h^2 - y^2}{2} \right) \quad (\text{II.18})$$

$$\text{Alors :} \quad A = \rho g(h - y) + \frac{1}{2} \rho R(h^2 - y^2) \quad (\text{II.19})$$

Par conséquent, l'équation ci-dessus ne nécessite pas la détermination empirique d'un coefficient de pression, la force de pression P_0 à $x = -x$ donner par l'équation suivante :

$$P = b \int_0^h P_o dy = \rho b h^2 \left(\frac{g}{2} + \frac{R}{3} h \right) \quad (\text{II.20})$$

Donc :

$$P = b \int_0^h \left(\rho g (h - y) + \frac{1}{2} \rho R (h^2 - y^2) \right) dy \quad (\text{II.21})$$

On obtient :

$$P = b \left[\rho g \left(h \cdot h - \frac{h^2 - 0^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \rho R \left(h^2 \cdot h - \frac{h^3 - 0^3}{3} \right) \right] \quad (\text{II.22})$$

Donc :

$$P = b \left[\rho g \left(h^2 - \frac{h^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \rho R \left(h^3 - \frac{h^3}{3} \right) \right] \quad (\text{II.23})$$

En simplifiant, on trouve :

$$P = b \left[\rho g \left(\frac{h^2}{2} \right) + \rho R \left(\frac{1}{2} \frac{2h^3}{3} \right) \right] \quad (\text{II.24})$$

Alors :

$$P = \rho b h^2 \left(\frac{g}{2} + \frac{R}{3} h \right) \quad (\text{II.25})$$

Où b est la largeur du canal. A $x = -l$, la force de pression hydrostatique bien connue P_o est

$$P_o = b \int_0^h A dy = b \int_0^h \rho g (h - y) dy \quad (\text{II.26})$$

Ainsi :

$$P_o = \rho b h_0^2 \left(\frac{g}{2} \right) \quad (\text{II.27})$$

Donc :

$$P_o = \rho g b \left(\frac{h_0^2}{2} \right) \quad (\text{II.28})$$

II.2.2. Equation de continuité

L'équation de continuité dans un écoulement peut être écrite comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.29})$$

u : Vitesse d'écoulement dans la direction x ;

w : Vitesse d'écoulement dans la direction z ;

L'équation de continuité entre les sections à $x = -L$ et $x = -x$

$$Q = b h_0 V_0 = b h V \quad (\text{II.30})$$

II.2.3. Nombre de Froude

$$F_r = \frac{V}{\sqrt{gh}} \quad (\text{II.31})$$

Où h est la hauteur d'eau moyenne dans la section d'écoulement et V est la vitesse moyenne.

Il permet en particulier de distinguer trois régimes d'écoulement :

$F_r = 1$ Régime critique ;

$F_r > 1$ Régime torrentiel ;

$F_r < 1$ Régime fluvial.

En utilisant les équations (II.20), (II.28) et (II.30), et en incorporant le nombre de Froude en amont du débit F_r dans l'équation (II.3)

$$P_o - P = \rho Q (\beta V - \beta_o V_o) \quad (\text{II.32})$$

$$\rho g b \left(\frac{h_o^2}{2} \right) - \rho b h^2 \left(\frac{g}{2} + \frac{R}{3} h \right) = \rho b h V (\beta V - \beta_o V_o) \quad (\text{II.33})$$

En divisant l'équation (II.33) par le terme $\rho g b h_o^2$

$$\frac{1}{2} - \bar{h}^2 \left(\frac{g}{2} + \frac{R}{3} h \right) = \frac{Q}{g b h_o^2} (\beta V - \beta_o V_o) \quad (\text{II.34})$$

Pour la simplifier, on suppose que $\beta = \beta_o = 1$

$$\frac{1}{2} - \bar{h}^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{R h}{3 g} \right) = \beta \frac{Q}{g b h_o^2} (V - V_o) \quad (\text{II.35})$$

Où $\bar{h} = \frac{h}{h_o}$,

Et :

$$F_r = \frac{Q}{b g^{0.5} h^{1.5}} \quad (\text{II.36})$$

Par ailleurs $Q = b h_o V_o = b h V$ donc $V = \frac{Q}{b h}$ et $V_o = \frac{Q}{b h_o}$

Ainsi, l'équation (II.35) devient :

$$\frac{1}{2} - \bar{h}^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{R h}{3 g} \right) = \beta \frac{Q}{g b h_o^2} \left(\frac{Q}{b h} - \frac{Q}{b h_o} \right) \quad (\text{II.37})$$

Donc :

$$\frac{1}{2}(1-\bar{h}^2) - \frac{Rh}{3g}\bar{h}^2 = \beta \frac{Q^2}{gb^2h_o^2} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_o} \right) \quad (\text{II.38})$$

En multipliant la deuxième partie de l'équation précédent par h_o/h_o :

$$\frac{1}{2}(1-\bar{h}^2) - \frac{Rh}{3g}\bar{h}^2 = \beta \frac{Q^2}{gb^2h_o^3} \left(\frac{h_o}{h} - \frac{h_o}{h_o} \right) \quad (\text{II.39})$$

Alors :

$$\frac{1}{2}(1-\bar{h}^2) - \frac{Rh}{3g}\bar{h}^2 = \beta F_r^2 \left(\frac{1}{\bar{h}} - 1 \right) \quad (\text{II.40})$$

II.3. Rapport de profondeur finale :

Dans les canaux horizontaux, le débit devient critique ($F_r=1$) à ($x=-L$). En réalité, le profil d'écoulement est une surface libre en chute continue qui traverse le bord et se termine par une trajectoire parabolique d'une chute par gravité. Par conséquent, le taux de changement de la pente de la surface libre à la section d'extrémité, tel que considéré par Anderson (1967), et donne par l'équation suivante :

$$\left(\frac{d^2h}{dx^2} \right)_{x=0} = -\frac{g}{V_e^2} \quad (\text{II.41})$$

Où l'indice « e » fait référence à la section finale ($x=0$). En utilisant l'équation (II.41), R à la section finale trouvée à partir de l'équation (II.15), on écrit :

$$R_e = \frac{v_e^2}{h_e} \left(\frac{d^2h}{dx^2} \right)_{x=0} \quad (\text{II.42})$$

$$\left(\frac{d^2h}{dx^2} \right)_{x=0} = -\frac{R_e h_e}{V_e^2} \quad (\text{II.43})$$

$$R_e h_e = -g \Rightarrow R_e = -\frac{g}{h_e} \quad (\text{II.44})$$

En compensant l'équation (II.44) dans l'équation (II.40) on obtient :

$$\frac{1}{2}(1-\bar{h}_e^2) + \frac{1}{3}\bar{h}_e^2 = \beta F_r^2 \left(\frac{1}{\bar{h}_e} - 1 \right) \quad (\text{II.45})$$

Où $\bar{h}_e = \frac{h_e}{h_c}$ est le rapport de profondeur d'extrémité, et $F_r=1$

En multipliant l'équation (II.45) par 2, nous trouvons :

$$(1 - \bar{h}_e^2) + \frac{2}{3} \bar{h}_e^2 = 2\beta \left(\frac{1}{\bar{h}_e} - 1 \right) \quad (\text{II.46})$$

En multipliant l'équation (II.46) par \bar{h}_e , on obtient :

$$\bar{h}_e(1 - \bar{h}_e^2) + \frac{2}{3} \bar{h}_e^3 = 2\beta(1 - \bar{h}_e) \quad (\text{II.47})$$

Donc :

$$\bar{h}_e - \bar{h}_e^3 + \frac{2}{3} \bar{h}_e^3 - 2\beta + 2\beta\bar{h}_e = 0 \quad (\text{II.48})$$

Ainsi :

$$-\frac{1}{3} \bar{h}_e^3 + (1 + 2\beta)\bar{h}_e - 2\beta = 0 \quad (\text{II.49})$$

En multipliant l'équation (II.52) par (-3), nous trouvons :

$$\bar{h}_e^3 - 3\bar{h}_e(2\beta + 1) + 6\beta = 0 \quad (\text{II.50})$$

L'équation (II.50) c'est une équation de troisième degré sans terme de second ordre, de type :

$$\bar{h}_e^3 + a_1\bar{h}_e^2 + a_2\bar{h}_e + a_3 = 0 \quad (\text{II.51})$$

Pour $\beta = \beta_o = 1$

$$\text{Avec } \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = -9 \\ a_3 = 6 \end{cases}$$

La solution s'obtient avec le changement de la variable comme suit :

$$\gamma = \frac{3a_2 - a_1^2}{9} = -3 \quad (\text{II.52})$$

$$\psi = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54} = -3 \quad (\text{II.53})$$

Discriminant $\Delta = \gamma^3 + \psi^2 = -18 < 0$

Ayant $\Delta < 0$, la solution sera trouvée par la méthode trigonométrique :

$$\bar{h}_{e(1)} = 2\sqrt{-\gamma} \cos\left(\frac{1}{3}\theta\right) - \frac{a_1}{3} \quad (\text{II.54})$$

$$\bar{h}_{e(2)} = 2\sqrt{-\gamma} \cos\left(\frac{1}{3}\theta + 120^\circ\right) - \frac{a_1}{3} \quad (\text{II.55})$$

$$\bar{h}_{e(3)} = 2\sqrt{-\gamma} \cos\left(\frac{1}{3}\theta + 240^\circ\right) - \frac{a_1}{3} \quad (\text{II.56})$$

Donc :

$$\bar{h}_{e(1)} = -3.28994$$

$$\bar{h}_{e(2)} = 2.58422$$

$$\bar{h}_{e(3)} = 0.70571$$

le régime d'écoulement à extrémité du canal est supercritique, donc $\frac{\bar{h}_e}{h_c} < 1$ et $\bar{h}_e < h_c \Rightarrow \bar{h}_e < 1$

, alors la racine de cette équation est $\bar{h}_e = 0.7057$

Pour $\beta = 1.033$ la racine de cette équation est $\bar{h}_e = 0.7133$.

II.4. Profil d'écoulement

L'effet de courbure de la ligne de courant à la surface libre d'un déversoir rectangulaire est utilisé pour déterminer le profil d'écoulement en amont d'un ouvrage de chute. En considérant ($F_r = 1$) et en utilisant les équations (II.15), (II.30) et (II.36) dans l'équation (II.40),

$$\frac{1}{2}(1 - \bar{h}^2) - \frac{Rh}{3g}\bar{h}^2 = \beta F_r^2 \left(\frac{1}{\bar{h}} - 1\right) \quad (\text{II.57})$$

Alors :

$$\frac{1}{2}(1 - \bar{h}^2) - \frac{v^2}{3g}\bar{h}^2 \frac{d^2\bar{h}}{dx^2} = \beta F_r^2 \left(\frac{1}{\bar{h}} - 1\right) \quad (\text{II.58})$$

Et :

$$\frac{d^2\bar{h}}{dx^2} = \frac{d^2(\bar{h}h_o)}{dx^2} \quad (\text{II.59})$$

Alors :

$$\frac{d^2\bar{h}}{dx^2} = \frac{1}{h_o} \frac{d^2\bar{h}}{d\bar{x}^2} \quad (\text{II.60})$$

Donc :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \bar{h}^2 - \frac{v^2}{3gh_o} \bar{h}^2 \frac{d^2 \bar{h}}{d\bar{x}^2} = \beta F_r^2 \left(\frac{1}{\bar{h}} - 1 \right) \quad (\text{II.61})$$

En multipliant l'équation (II.61) par \bar{h} , on obtient :

$$\frac{\bar{h}}{2} - \frac{1}{2} \bar{h}^3 - \frac{v^2}{3gh_o} \bar{h}^3 \frac{d^2 \bar{h}}{d\bar{x}^2} = \beta F_r^2 (1 - \bar{h}) \quad (\text{II.62})$$

En multipliant l'équation (II.62) par $\frac{3gh_o}{v^2 \bar{h}^3}$, on obtient :

$$\frac{3}{2} \frac{gh_o}{v^2 \bar{h}^2} - \frac{3}{2} \frac{gh_o}{v^2} - \frac{d^2 \bar{h}}{d\bar{x}^2} = 3 \frac{gh_o}{v^2 \bar{h}^3} \beta F_r^2 (1 - \bar{h}) \quad (\text{II.63})$$

Avec $v_o h_o = vh \Rightarrow v = \frac{v_o h_o}{h}$, donc $v = \frac{v_o}{h}$

Donc :

$$\frac{3}{2} \frac{gh_o}{v_o^2} - \frac{3}{2} \frac{gh_o}{v_o^2} \bar{h}^2 - \frac{d^2 \bar{h}}{d\bar{x}^2} = 3 \frac{gh_o}{v_o^2 \bar{h}} \beta F_r^2 (1 - \bar{h}) \quad (\text{II.64})$$

Où $F_r = \frac{Q}{bg^{0.5} h^{1.5}}$, et $Q = bh_o V_o = bhV$

Donc : $F_r^2 = \frac{v_o^2}{gh}$

$$\frac{3}{2} \frac{1}{F_r^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{F_r^2} \bar{h}^2 - \frac{d^2 \bar{h}}{d\bar{x}^2} = 3 \frac{1}{\bar{h}} \beta (1 - \bar{h}) \quad (\text{II.65})$$

En multipliant l'équation (II.65) par \bar{h} , on obtient :

$$\frac{3}{2} \frac{\bar{h}}{F_r^2} (1 - \bar{h}^2) - \bar{h} \frac{d^2 \bar{h}}{d\bar{x}^2} = 3\beta (1 - \bar{h}) \quad (\text{II.66})$$

Alors :

$$\bar{h} \frac{d^2 \bar{h}}{d\bar{x}^2} = \frac{3}{2} \frac{\bar{h}}{F_r^2} (1 - \bar{h}^2) - 3\beta (1 - \bar{h}) \quad (\text{II.67})$$

Donc :

$$\bar{h} \frac{d^2 \bar{h}}{d\bar{x}^2} = 3 \frac{\bar{h}}{F_r^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\bar{h}^2}{2} \right) - 3\beta + 3\beta \bar{h} \quad (\text{II.68})$$

Pour $F_r^2 = 1$, on obtient :

$$\bar{h} \frac{d^2 \bar{h}}{d\bar{x}^2} = 3\bar{h}(\beta + 0.5) - 1.5\bar{h}^3 - 3\beta \quad (\text{II.69})$$

II.5. Débit

Le concept de chute libre est utilisé pour estimer le débit à partir des valeurs connues de \bar{h}_e et $\bar{\epsilon}_e$. En considérant $F_r = 1$, l'équation du débit en terme adimensionnel est obtenue à partir de l'équation (II.42) comme suit :

$$F_r = \frac{Q}{bg^{0.5}h^{1.5}} = 1 \quad (\text{II.70})$$

Donc :

$$Q = bg^{0.5}h^{1.5} \quad (\text{II.71})$$

Par ailleurs :

$$\bar{Q} = \frac{bg^{0.5}\epsilon^{1.5}}{Q} \quad (\text{II.72})$$

On déduit que :

$$\bar{Q} = \frac{\epsilon^{1.5}}{h^{1.5}} = \left(\frac{\epsilon}{h}\right)^{1.5} \quad (\text{II.73})$$

Pour

$$q^2 = g^2 h_c^3 \quad (\text{II.74})$$

Et :

$$Q = qb \quad (\text{II.75})$$

Donc :

$$Q^2 = g^2 h_c^3 b^2 \Rightarrow Q = \sqrt{g^2 h_c^3 b^2} \quad (\text{II.76})$$

Ainsi :

$$Q = gbh_c^{3/2} \quad (\text{II.77})$$

Et :

$$h_e = 0.715h_c \Rightarrow h_c = \frac{h_e}{0.715} \quad (\text{II.78})$$

En compensant l'équation (II.78) dans l'équation (II.77) on obtient :

$$Q = gb \left(\frac{h_e}{0.715} \right)^{3/2} \quad (\text{II.79})$$

Donc pour chaque valeur de h_e mesuré, on calcule la valeur de h_c par l'équation précédent (II.79), puis on déduit le débit Q .

II.6. Conclusion

Au cours de ce chapitre, la conception de la chute libre dans les canaux rectangulaires disposés horizontalement a été théoriquement modélisée pour calculer le rapport de profondeur finale et le profil d'écoulement. Enfin, l'équation du débit a été obtenue à partir de la profondeur critique.

Chapitre III

Chapitre III :

Résolution analytique approchée

III.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur l'exposition de la discrétisation par la méthode des Résidus pondérées au tant que la méthode de Galerkin est la méthode la plus précise. Cette méthode permet d'obtenir une approximation de la solution exacte des équations différentielles ordinaires.

III.2. Méthodes d'Approximations Intégrales et Variationnelles

On présente les méthodes de résolution des équations différentielles aux dérivées partielles, sont principalement les méthodes de résidus pondérés et les méthodes variationnelles. Les méthodes de résidus pondérés, principalement la méthode de collocation par point, par sous domaines, la méthode des moindres carrés et la méthode de Galerkin. On présente également la méthode de Rayleigh - Ritz, méthode variationnelle de résolution de problèmes à extremum.

III.2.1. Méthodes de résidus pondérés

C'est une technique utilisée pour la résolution approximative des équations différentielles aux dérivées partielles linéaires et non linéaires. (Gouri.D, Gilbert.T,1984)

III.2.1.1. Forme générale

Lorsqu'on recherche la solution sous forme approchée. La méthode des résidus pondérés consiste à calculer les $N + 1$ composantes q_i de la solution approchée par projection sur $N + 1$ couples de fonctions de projection

$$\int_{\Omega} R(x) \cdot P_i(x) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{R}(x) \cdot \bar{P}_i(x) d\Gamma = 0 \quad i = 0, \dots, N \quad (\text{III.1})$$

Les fonctions $(P_i(x), \bar{P}_i(x))$ sont appelées fonctions de pondération d'où le nom de la méthode.

Dans le cas usuel où les fonctions pondération sont les mêmes sur le contour et dans le domaine, lorsqu'on développe les résidus et qu'on introduit l'approximation de la solution. On obtient le système suivant :

$$\int_{\Omega} [L(q_i \cdot \Phi_i(x) - g)] P_i(x) d\Omega + \int_{\Gamma} [B(q_i \cdot \Phi_i(x) - h)] P_i(x) d\Gamma = 0 \quad j=0, \dots, N \quad (\text{III.2})$$

Dans le cas où les opérateurs L et B sont linéaires, la résolution du système conduit à la résolution du système algébrique :

$$Kq = f \quad (\text{III.3})$$

Où

$$K_{ij} = \int_{\Omega} P_i \cdot L(\Phi_j) d\Omega + \int_{\Gamma} P_i \cdot B(\Phi_j) d\Gamma \quad (\text{III.4})$$

$$\text{Et :} \quad f_i = \int_{\Omega} P_i \cdot g d\Omega + \int_{\Gamma} P_i \cdot h d\Gamma \quad (\text{III.5})$$

III.2.1.2. Méthodes des résidus pondérés

Les choix possibles pour les fonctions de projection $P_i(x)$ sont nombreux. Certains choix particuliers correspondent à des méthodes connues dont voici certaines :

A. Méthode de collocation par points

➤ Fonction de Dirac

La fonction de Dirac¹ (on dit aussi fonction δ ou fonction impulsion de Dirac) est définie par la limite, d'une fonction rectangulaire $d_{x_i}(x)$, définie sur l'intervalle $[x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$ dont l'aire est égale à l'unité. A la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, la fonction $d_{x_i}(x)$ est idéalisée par la fonction de Dirac.

La fonction rectangulaire $d_{x_i}(x)$ est définie par

$$d_{x_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & x_i - \varepsilon \leq x \leq x_i + \varepsilon \\ 0 & x \neq x_i \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Les principales propriétés de la fonction de Dirac sont les suivantes :

1) la fonction de Dirac est nulle aux points qui ne sont pas soumis à l'impulsion

$$\delta(x - x_i) = 0 \quad x \neq x_i \quad (\text{III.7})$$

2) Définition de la fonction de Dirac à partir de la fonction rectangulaire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_i) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_i - \varepsilon}^{x_i + \varepsilon} d_{x_i}(x) dx = 1 \quad x \neq x_i \quad (\text{III.8})$$

3) Représentation d'une charge donnée $f(x)$ agissant en un point $x = x_i$ à l'aide de la fonction de Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_i) f(x) dx = f(x_i) \quad \forall f(x) \quad (\text{III.9})$$

➤ Méthode de collocation par points

Dans la méthode de collocation par points, les fonctions test ψ_i sont données par les fonctions de Dirac :

$$\psi_i = \delta(x - x_i) \quad (\text{III.10})$$

Où x_i représente la position du point de collocation.

Les points de collocations x_i sont des points géométriques du domaine Ω . Ils sont choisis selon les deux critères principaux suivants :

- ❖ La symétrie du problème,

❖ Le nombre des points de collocation doit être égal au nombre de paramétré de l'approximation et ce pour avoir autant d'équations que d'inconnus intervenant dans l'approximation $\tilde{\phi}$.

Utilisant l'équation (III.9) de la fonction de Dirac, on obtient le résultat important suivant :

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_i) \mathfrak{R}(x) dx = \mathfrak{R}(x_i) = 0 \tag{III.11}$$

Pour l'ensemble des n composantes de la fonction test $[\psi]$,

$$\delta(x - x_1), \delta(x - x_2), \dots, \delta(x - x_n)$$

L'équation (III.11) s'écrit :

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_i) \mathfrak{R}(x) dx = \mathfrak{R}(x_i) = 0 \quad i = 1, \dots, n \tag{III.12}$$

Soit :

$$\mathfrak{R}(x_i) = 0 \quad i = 1, \dots, n \tag{III.13}$$

L'équation ci-dessus définit la méthode de collocation par point, on obtient un système d'équation où chaque équation est obtenue par l'annulation du résidu au point de collocation. Sous forme matricielle, la relation (III.13) s'écrit :

$$\int_{\Omega} \begin{pmatrix} \delta(x - x_1) \\ \delta(x - x_2) \\ \dots \\ \delta(x - x_n) \end{pmatrix} \left\{ L \left[\begin{matrix} P_1(x) \\ P_2(x) \\ \dots \\ P_n(x) \end{matrix} \right] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + f \right\} dx = 0 \tag{III.14}$$

En faisant sortir le vecteur $\{\alpha\}$, indépendant de x , à l'extérieur de l'intégrale puis en distribuant l'opération L sur chacun des termes de la matrice polynomiale, l'équation(III.14) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \int_{\Omega} \delta(x - x_1) L(P_1(x)) dx & \int_{\Omega} \delta(x - x_1) L(P_2(x)) dx & \dots & \int_{\Omega} \delta(x - x_1) L(P_n(x)) dx \\ \int_{\Omega} \delta(x - x_2) L(P_1(x)) dx & \int_{\Omega} \delta(x - x_2) L(P_2(x)) dx & \dots & \int_{\Omega} \delta(x - x_2) L(P_n(x)) dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{\Omega} \delta(x - x_n) L(P_1(x)) dx & \int_{\Omega} \delta(x - x_n) L(P_2(x)) dx & \dots & \int_{\Omega} \delta(x - x_n) L(P_n(x)) dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_{\Omega} \delta(x - x_1) f(x) dx \\ \int_{\Omega} \delta(x - x_2) f(x) dx \\ \dots \\ \int_{\Omega} \delta(x - x_n) f(x) dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{III.15}$$

Appliquant la propriété (III.9) de la fonction de Dirac à chacun des termes matriciels on obtient :

$$\begin{bmatrix} LP_1(x)|_{x_1} & LP_2(x)|_{x_1} & \dots & LP_n(x)|_{x_1} \\ LP_1(x)|_{x_2} & LP_2(x)|_{x_2} & \dots & LP_n(x)|_{x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ LP_1(x)|_{x_n} & LP_2(x)|_{x_n} & \dots & LP_n(x)|_{x_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_n) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.16})$$

Le système d'équation (III.16) s'écrit sous la forme connue :

$$\{F\} = [K]\{\alpha\} \quad (\text{III.17})$$

Avec :

$$[K] = \begin{bmatrix} LP_1(x)|_{x_1} & LP_2(x)|_{x_1} & \dots & LP_n(x)|_{x_1} \\ LP_1(x)|_{x_2} & LP_2(x)|_{x_2} & \dots & LP_n(x)|_{x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ LP_1(x)|_{x_n} & LP_2(x)|_{x_n} & \dots & LP_n(x)|_{x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

Et

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_n) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

On détermine le vecteur $\{\alpha\}$ en résolvant le système (III.16) par la méthode directes comme la méthode d'élimination substitution de Gauss ou les méthodes itératives comme la méthode de sur-relaxation. Un fois le vecteur $\{\alpha\}$ déterminé, l'approximation $\tilde{\phi}(x)$ est alors obtenue à l'aide de l'équation suivante :

$$\tilde{\phi}(x) = [P(x)] \cdot \{\alpha\} \quad (\text{III.20})$$

a) Résolution approchée par la méthode de Collocation par points

Pour une équation aux dérivée ordinaire de second ordre suivante :

$$h'' + \frac{3}{2}h' + \frac{3}{h} - \frac{9}{2} = 0 \quad (\text{III.21})$$

Avec la fonction de forme est :

$$h = 1 - \frac{1}{(a.x + b)^2} \quad (\text{III.22})$$

Pour $x=0$ la valeur de h est égale 0.715 (la profondeur dans l'extrémité de canal), en remplaçant cette condition dans l'équation (III.22). On trouve :

$$0.715 = 1 - \frac{1}{(b)^2} \quad (\text{III.23})$$

Donc

$$b = \sqrt{\frac{1}{1-0.715}} = 1.873171623 \quad (\text{III.24})$$

Donc l'équation (III.22) comme suivante :

$$h = 1 - \frac{1}{(a.x + 1.873171623)^2} \quad (\text{III.25})$$

En remplaçant l'équation (III.22) dans l'équation (III.21), on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{-6a^2}{(a.x + 1.873171623)^4} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{(a.x + 1.873171623)^2} \right)^2 \\ & + \frac{3}{1 - \frac{1}{(a.x + 1.873171623)^2}} - \frac{9}{2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

Pour déduire la valeur de a en pose $x=0$ dans cette équation, on obtient

$$a = -0.9743206358 \quad (\text{III.27})$$

En remplaçant les valeurs de a et b dans l'équation (III.22), on trouve :

$$h = 1 - \frac{1}{(-0.9743206358.x + 1.873171623)^2} \quad (\text{III.28})$$

Alors pour chaque valeur de x en déduit la profondeur h .

B. Méthode de collocation par sous domaines

Dans la méthode de collection par sous-domaine, la fonction de test ψ est définie par l'ensemble de sous-domaine $\Omega_i = [x_i, x_{i+1}]$ du domaine global $\Omega = [a, b]$. La fonction test a la propriété suivant :

$$\psi_i = \begin{cases} 1 & \text{Si } x \in \Omega_i \\ 0 & x \notin \Omega_i \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

Comme pour la méthode de collection par point, le nombre de sous-domaine doit être égal au nombre de paramètre de l'approximation. Le domaine Ω étant décomposé en n sous-domaine Ω_i , l'équation intégrale s'écrit :

$$\int_{\Omega} \psi_i \mathcal{R}(x) dx = \int_a^{x_1} \psi_i \mathcal{R}(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \psi_i \mathcal{R}(x) dx + \dots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi_i \mathcal{R}(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_b} \psi_i \mathcal{R}(x) dx \quad (\text{III.30})$$

$i = 1, n$

En tenant compte de la propriété (III.30), on a :

$$\Psi_i=0 \text{ pour tout } x \notin \Omega_i \text{ D'où } \int_a^{x_1} \psi_i \mathfrak{R}(x) dx = \dots = \int_{x_{n-1}}^{x_b} \psi_i \mathfrak{R}(x) dx = 0 \quad (\text{III.31})$$

$$\Psi_i=1 \text{ pour tout } x \in \Omega_i \text{ D'où } \int_{\Omega} \psi_i \mathfrak{R}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathfrak{R}(x) dx = \int_{\Omega_i} \mathfrak{R}(x) dx \quad (\text{III.32})$$

D'où

$$\int_{\Omega_i} \mathfrak{R}(x) dx = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{III.33})$$

La relation (III.33) exprime la formulation de la méthode de collocation par sous-domaines. La relation montre que la moyenne du résidu sur chacun des sous-domaine de collection est nulle.

A chaque sous-domaine Ω_i correspond une équation (III.33). On obtient un système d'équation qui s'écrit :

$$\int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \dots \\ \psi_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} LP_1(x) & LP_2(x) & \dots & LP_n(x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} dx = - \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \dots \\ \psi_n \end{Bmatrix} f(x) dx \quad (\text{III.34})$$

Qui s'écrit encore

$$\{F\} = [K]\{\alpha\} \quad (\text{III.35})$$

Avec

$$[K] = \begin{bmatrix} \int_a^{x_1} LP_1(x) dx & \int_a^{x_1} LP_2(x) dx & \dots & \int_a^{x_1} LP_n(x) dx \\ \int_{x_1}^{x_2} LP_1(x) dx & \int_{x_1}^{x_2} LP_2(x) dx & \dots & \int_{x_1}^{x_2} LP_n(x) dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{x_{n-1}}^b LP_1(x) dx & \int_{x_{n-1}}^b LP_2(x) dx & \dots & \int_{x_{n-1}}^b LP_n(x) dx \end{bmatrix} \quad (\text{III.36})$$

$$\{F\} = - \begin{Bmatrix} \int_a^{x_1} f(x) dx \\ \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \\ \dots \\ \int_{x_{n-1}}^b f(x) dx \end{Bmatrix} \quad (\text{III.37})$$

C. Méthode des moindres carrés

Soit à former la moyenne du carré du résidu de l'équation différentielle définie sur le domaine Ω

$$\mathfrak{T} = \int_{\Omega} \mathfrak{R}^2 dx \tag{III.38}$$

La méthode des moindres carrés consiste à rechercher les meilleurs valeur α_i de l'approximation $\tilde{\phi}$ qui rendent l'intégrale \mathfrak{T} minimale, soit :

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha_i} = 2 \int_{\Omega} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \alpha_i} \mathfrak{R} dx = 0 \quad i = 1, \dots, n \tag{III.39}$$

D'où

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \alpha_i} \mathfrak{R} dx = 0 \quad i = 1, \dots, n \tag{III.40}$$

L'équation (III.40) et l'équation intégrale (III.39) sont équivalentes, la fonction test pour la méthode des moindres carrés est donc égale à :

$$\psi_i = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \alpha_i} \quad i = 1, \dots, n \tag{III.41}$$

Sous forme matricielle l'équation (III.40) s'écrit :

$$\int \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \alpha_i} \\ \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \alpha_i} \\ \dots \\ \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \alpha_i} \end{array} \right\} \mathfrak{R} dx = 0 \tag{III.42}$$

Tenant compte de la valeur du résidu, le terme $\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \alpha_i}$ s'écrit :

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\left[LP_1(x) \quad LP_2(x) \quad \dots \quad LP_n(x) \right] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} + f \right) \tag{III.43}$$

Soit

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} LP_i(x) \tag{III.44}$$

D'où

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \alpha_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \alpha_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} LP_1(x) \\ LP_2(x) \\ \dots \\ LP_n(x) \end{pmatrix} \quad (\text{III.45})$$

En substituant le vecteur dérivé donné par l'équation (III.45) dans l'équation intégrale (III.43), on obtient :

$$\int_{\Omega} \begin{pmatrix} LP_1(x) \\ LP_2(x) \\ \dots \\ LP_n(x) \end{pmatrix} \left(\begin{bmatrix} LP_1(x) & LP_2(x) & \dots & LP_n(x) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + f \right) dx = 0 \quad (\text{III.46})$$

L'intégrale (III.45) se met sous forme

$$\{F\} = [K]\{\alpha\} \quad (\text{III.47})$$

Avec

$$[K] = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} LP_1(x)LP_1(x)dx & \int_{\Omega} LP_1(x)LP_2(x)dx & \dots & \int_{\Omega} LP_1(x)LP_n(x)dx \\ \int_{\Omega} LP_2(x)LP_1(x)dx & \int_{\Omega} LP_2(x)LP_2(x)dx & \dots & \int_{\Omega} LP_2(x)LP_n(x)dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{\Omega} LP_n(x)LP_1(x)dx & \int_{\Omega} LP_n(x)LP_2(x)dx & \dots & \int_{\Omega} LP_n(x)LP_n(x)dx \end{bmatrix} \quad (\text{III.48})$$

$$\{F\} = - \begin{pmatrix} \int_{\Omega} LP_1(x).f .dx \\ \int_{\Omega} LP_2(x).f .dx \\ \dots \\ \int_{\Omega} LP_n(x).f .dx \end{pmatrix} \quad (\text{III.49})$$

D. Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est une méthode très générale et très robuste. L'idée de la méthode est la suivante. Partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie. On

résout ensuite le problème approché, ce qui est en général plus facile que de résoudre directement en dimension infinie.

Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ. Il convient de noter que, outre son intérêt théorique, la méthode de Galerkin fournit également un procédé constructif d'approximation.

On considère que les perturbations sur le potentiel $\delta\phi = \delta u = w$.

Soit l'intégrale :

$$\int_{\Omega} \delta u \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) d\Omega \quad (\text{III.50})$$

On a :

$$\text{div}(\delta\phi \text{grad}\phi) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \begin{bmatrix} \delta\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \delta\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{III.51})$$

$$\text{div}(w \text{grad}\phi) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \begin{bmatrix} w \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ w \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (\text{III.52})$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + w \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = w \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (\text{III.53})$$

Implique :

$$\text{div}(w \text{grad}\phi) = w \Delta \phi + \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (\text{III.54})$$

Finalement :

$$\text{div}(w \text{grad}\phi) = w \Delta \phi + \text{grad}w \cdot \text{grad}\phi \quad (\text{III.55})$$

D'où :

$$w \Delta \phi = \text{div}(w \text{grad}\phi) - (\text{grad}w \cdot \text{grad}\phi) \quad (\text{III.56})$$

$$\delta\phi \Delta \phi = \nabla^T (\delta\phi \text{grad}\phi) - (\nabla w \cdot \nabla \phi) = \text{div}(\delta\phi \text{grad}\phi) - (\text{grad}\delta\phi \cdot \text{grad}\phi) \quad (\text{III.57})$$

Si on prend l'intégrale sur le domaine Ω , $\int_{\Omega} \delta\phi(\Delta\phi)d\Omega$ on remplace par l'expression précédente on obtient :

$$\int_{\Omega} \delta\phi(\text{grad}\phi)d\Omega - \int_{\Omega} \text{grad}\delta\phi \cdot \text{grad}\phi d\Omega = 0 \quad (\text{III.58})$$

Implique :

$$\int_{\Omega} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \begin{pmatrix} \delta\phi \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \delta\phi \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{pmatrix} d\Omega - \int_{\Omega} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial\delta\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\delta\phi}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{pmatrix} \right\} d\Omega = 0 \quad (\text{III.59})$$

Dans la méthode de Galerkin (appelée aussi la méthode de Petrov-Galerkin) les fonctions de test $\psi_i(x)$ sont donnée par les fonctions de base $P_i(x)$. On a :

$$\psi_i(x) = P_i(x) \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{III.60})$$

En substituant $\psi_i(x)$ dans l'équation intégrale (III.), on a :

$$\int_{\Omega} P_i(x) \mathcal{R}(x) dx = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{III.61})$$

Qui s'écrit sous forme matricielle

$$\int_{\Omega} \begin{pmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \\ \dots \\ P_n(x) \end{pmatrix} \left\{ L \begin{bmatrix} P_1(x) & P_2(x) & \dots & P_n(x) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + f \right\} d\Omega = 0 \quad (\text{III.62})$$

En développant on obtient :

$$\begin{pmatrix} \int_{\Omega} P_1 L(P_1) dx & \int_{\Omega} P_1 L(P_2) dx & \dots & \int_{\Omega} P_1 L(P_n) dx \\ \int_{\Omega} P_2 L(P_1) dx & \int_{\Omega} P_2 L(P_2) dx & \dots & \int_{\Omega} P_2 L(P_n) dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{\Omega} P_n L(P_1) dx & \int_{\Omega} P_n L(P_2) dx & \dots & \int_{\Omega} P_n L(P_n) dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} P_1 f d\Omega \\ \int_{\Omega} P_2 f d\Omega \\ \dots \\ \int_{\Omega} P_n f d\Omega \end{pmatrix} \quad (\text{III.63})$$

Qui s'écrit sous la forme usuelle :

$$[K]\{\alpha\} = \{F\} \quad (\text{III.64})$$

Avec

$$[K] = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} P_1 L(P_1) dx & \int_{\Omega} P_1 L(P_2) dx & \dots & \int_{\Omega} P_1 L(P_n) dx \\ \int_{\Omega} P_2 L(P_1) dx & \int_{\Omega} P_2 L(P_2) dx & \dots & \int_{\Omega} P_2 L(P_n) dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{\Omega} P_n L(P_1) dx & \int_{\Omega} P_n L(P_2) dx & \dots & \int_{\Omega} P_n L(P_n) dx \end{bmatrix} \quad (III.65)$$

Et

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \int_{\Omega} P_1 f d\Omega \\ \int_{\Omega} P_2 f d\Omega \\ \dots \\ \int_{\Omega} P_n f d\Omega \end{Bmatrix} \quad (III.66)$$

a) Résolution approchée par la méthode de Galerkin

La méthode de collocation fait partie d'une famille de méthodes appelées méthodes résiduelles. Dans les méthodes résiduelles, une forme approchée de la solution $h(x)$ est supposée, et le résidu $R(x)$ est défini en substituant la solution approchée dans l'équation différentielle exacte.

La solution approchée est généralement choisie comme la somme d'un certain nombre de fonctions d'essai linéairement indépendantes, comme cela est fait dans la méthode de Rayleigh-Ritz. Les coefficients sont ensuite choisis pour minimiser le résidu dans un certain sens. Dans la méthode de collocation, le résidu lui-même est égal à zéro aux emplacements sélectionnés. Alors le nombre d'emplacements est le même que le nombre de coefficients inconnus dans la solution approchée $h(x)$ (Hoffman, Joe.D, 2001).

Les étapes de la méthode de Galerkin sont résumées comme suit :

1. Déterminer l'équation différentielle à résoudre,

$$\bar{h}'' + \frac{3}{2} \bar{h}' + \frac{3}{h} = \frac{9}{2} \quad (III.67)$$

2. Supposer que la forme fonctionnelle de la solution d'approximation $h(x)$ est donnée par :

$$\bar{h}(x) = h(x) \quad (III.68)$$

3. Choisir la forme fonctionnelle de la fonction de base $h_i(x)$ et s'assurer qu'elle est linéairement indépendante et satisfait les conditions aux limites :

$$h_i(x) = 1 - \frac{1}{(a \cdot x + b)^2} \quad (III.69)$$

4. Introduire la solution d'approximation $h(x)$ dans l'équation différentielle et définir le résidu $R(x)$:

$$R(x) = h'' + \frac{3}{2}h^2 + \frac{3}{h} - \frac{9}{2} \quad (\text{III.70})$$

5. Choisir les fonctions de pondération $\Psi_j(x)$ ($j = 1, 2 \dots$) ;

$$\Psi_j(x) = \frac{1}{(a.x)^2} \quad (\text{III.71})$$

6. Définir les intégrales des résidus pondérés $\Psi_j(x).R(x)$ égal à zéro ;

$$\int_{x_1}^{x_2} \Psi_j(x).R(x)dx = 0 \quad (j = 1, 2 \dots) \quad (\text{III.72})$$

7. Pour illustrer la méthode des résidus pondérés de Galerkin, appliquons-la pour résoudre le problème de valeur aux limites spécifié par l'équation (III.21) avec les conditions spécifiques données par : $h(0) = 0.715$ et $h(-\infty) = 1$.

Pour $h(0) = 0.715$ en remplaçant dans l'équation (III.69), on trouve

$$0.715 = 1 - \frac{1}{(b)^2} \quad (\text{III.73})$$

Donc la valeur de b est :

$$b = 1.873171623 \quad (\text{III.74})$$

Donc l'équation (III.69) comme suit

$$h_i(x) = 1 - \frac{1}{(a.x + 1.873171623)^2} \quad (\text{III.75})$$

La substitution d'équation (III.75) dans l'équation (III.70) donné comme l'équation suivante :

$$R(x) = \frac{-6a^2}{(a.x + 1.873171623)^4} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{(a.x + 1.873171623)^2} \right)^2 \quad (\text{III.76})$$

$$+ \frac{3}{\left(1 - \frac{1}{(a.x + 1.873171623)^2} \right)} - \frac{9}{2}$$

La substitution des équations (III.76) et (III.71) dans l'équation (III.72), on obtient :

$$\int_0^{-\infty} \left(\frac{1}{(a.x)^2} \cdot \left(\frac{-6a^2}{(a.x+1.873171623)^4} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{(a.x+1.873171623)^2} \right)^2 \right) + \frac{3}{\left(1 - \frac{1}{(a.x+1.873171623)^2} \right)} - \frac{9}{2} \right) dx = 0 \quad (\text{III.77})$$

Alors

$$\frac{1.003508772 \cdot 10^{19} a^2 - 9.526315788 \cdot 10^{18}}{a^2} = 0 \quad (\text{III.78})$$

Donc la valeur de a est :

$$a = -0.9743206346 \quad (\text{III.79})$$

Donc la fonction de forme comme suit :

$$h(x) = 1 - \frac{1}{(-0.9743206346.x + 1.873171623)^2} \quad (\text{III.80})$$

III.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé l'une des méthodes les plus précises pour la résolution analytique et approchée des équations différentielles ordinaire, qui est la méthode des Résidus pondérées.

On a présenté la méthode précédente avec la résolution analytique et approchée par la méthode de collocation par point et aussi la méthode de Galerkin.



Chapitre IV

Chapitre IV :

Application et Discussion

IV.1. Introduction

Après avoir présenté dans le chapitre précédent des méthodes de résolution analytique et approchée qui permettent de résoudre les équations qui régissent l'écoulement dans les canaux ouverts, nous présenterons dans ce chapitre une étude sur les applications et les différents modèles analytiques, et nous comparerons les résultats de la méthode de Collocation par point et la méthode de Galerkin avec les résultats expérimentaux d'une part. D'autre part, nous comparerons les résultats analytiques avec les résultats obtenus par certains chercheurs (Montes, Marchi...etc.).

IV.2. Profondeur finale

Plusieurs expériences ont été menées pour trouver la valeur exacte de la profondeur finale dans les canaux rectangulaires ouverts le tableau suivant illustrant les approches des chercheurs et les valeurs de la hauteur dans l'extrémité du canal et l'erreur relative obtenue.

Les résultats calculés ont été obtenus par des méthodes analytiques telle que les méthodes de Galerkin et Collocation par point, et nous avons également trouvé la même valeur (0.715).

Tableau (IV.1) : Tableau illustrant les approches des chercheurs et les valeurs de la hauteur dans l'extrémité du canal.

Approche	année	h_e	Erreur relative (déviation) (%)
Dey	1998	0,706	1,2587
Montes	1995	0,7169	0,2657
Marchi	1993	0,706	1,2587
Ferro	1992	0,76	6,2937
Methew	1991	0,717	0,2797
Hager	1983	0,696	2,6573
Chow et Han	1979	0,728	1,8181
Ali et Ridgway	1977	0,6	16,0839
Kraijenhoff et Dommerholt	1977	0,714	0,1399
Ali et Sykes	1972	0,673	5,8741
Bauer et Graf	1971	0,781	9,2308
Strelkoff et Moayeri	1970	0,672	6,0140
Andersen	1967	0,693	3,0769
Markland	1965	0,720	0,6993
Rajaratnam et Muralidhar	1964	0,725	1,3986
Diskin	1961	0,731	2,2378
Hay et Markland	1958	0,676	5,4545
M.Craya	1948	0,65	9,0909
Southwell et Vaisey	1946	0,681	4,7552
Rouse	1934	0,715	0

IV.3. Solution analytique

Pour l'application numérique, on prend comme référence les valeurs qui ont été obtenues par Rouse (1933) dans ses recherches théoriques et expérimentales sur les écoulements au voisinage d'une chute libre en canal à profil rectangulaire.

IV.4.1.1. Méthode de Collocation par point

Dans cette partie, nous allons comparer les résultats que nous avons trouvés dans la méthode de collocation par point avec les résultats expérimentaux et le graphique suivant représente les résultats de variation de la profondeur h par la distance x .

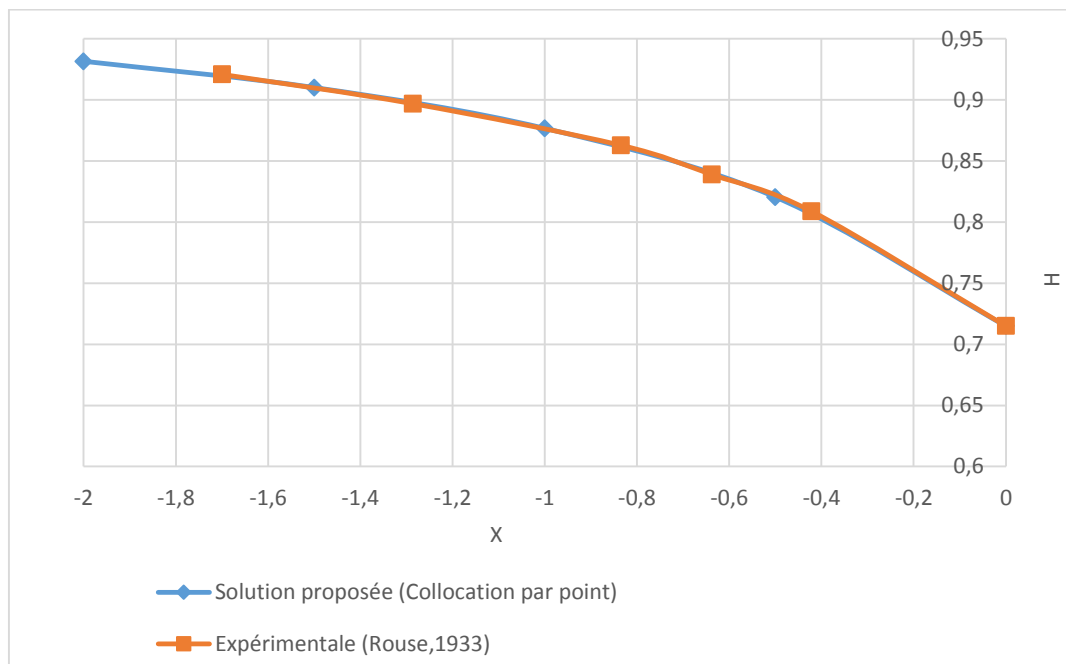


Figure (IV.1) : Résultats analytique (collocation par point) et expérimentaux du la profil de la surface libre.

A partir de la figure (IV.1), on remarque que les résultats de la méthode de collocation par point sont identiques aux résultats expérimentaux, pour chaque valeur de x la valeur de la profondeur h presque la même valeur.

Le tableau suivant résumé les résultats analytiques (la méthode de Collocation par point) obtenus dans ce travail avec les résultats présentés par Rouse (1933) (expérimentale) afin de clarifier les différences entre nos résultats et leurs résultats.

Tableau (IV.2) : Tableau illustrant les résultats de la méthode de Collocation par point avec les résultats expérimentaux et l'erreur relative

X	0	-1	-2
h (Collocation par point)	0,715	0,87667	0,93154
h (Expérimentale)	0,715	0,879	0,925
Erreur relative (%)	0	0,26	0,7

D'après le tableau (IV.2), on peut voir que les valeurs de h sont identiques pour tous les valeurs de x et l'erreur relative est très petite.

Pour $x=0$ la valeur de la profondeur est la même 0,715 et l'erreur relative est 0%.

Pour $x=-1$ la valeur de la profondeur par la méthode de collocation par point est 0,87667 et la profondeur des résultats expérimentaux est 0,879 et l'erreur relative est 0,26%.

Pour $x=-2$ la valeur de la profondeur par la méthode de collocation par point est 0,93154 et la profondeur des résultats expérimentaux est 0,925 et l'erreur relative est 0,7%.

IV.4.2. Méthode de Galerkin

Dans cette partie, nous allons comparer les résultats que nous avons trouvés dans la méthode de Galerkin avec les résultats expérimentaux et le graphique suivant représente les résultats de variation de la profondeur h par la distance x .

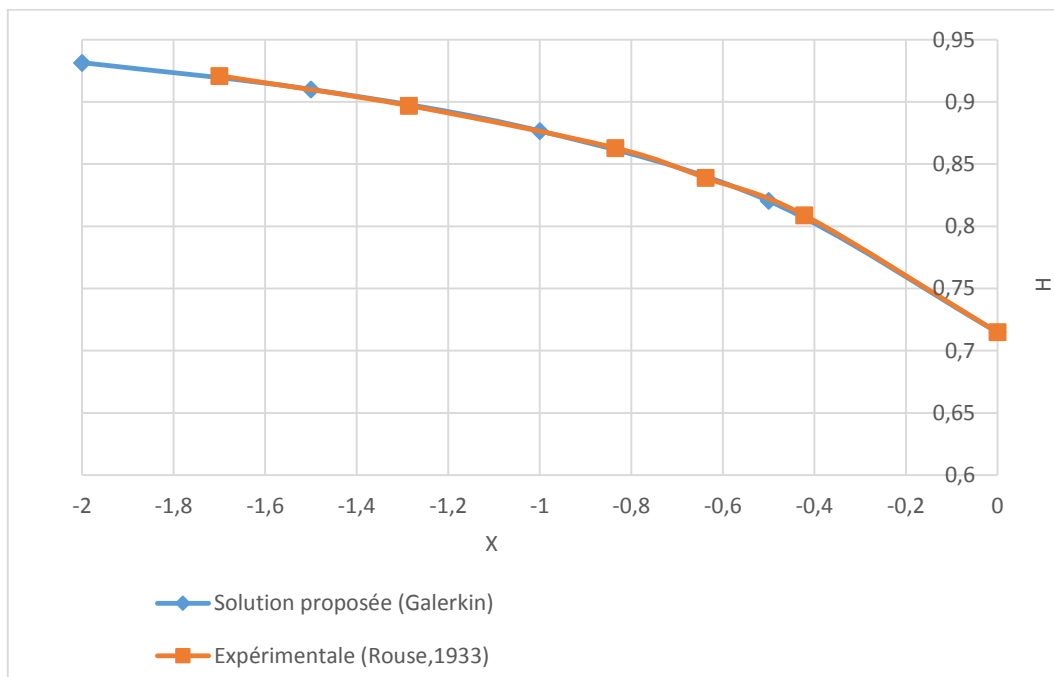


Figure (IV.2) : Comparaison des résultats analytique (Galerkin) avec les résultats expérimentaux du profil de la surface libre

D'après la figure (IV.2), on peut voir que les résultats de la méthode de Galerkin sont identiques aux résultats expérimentaux. Pour chaque valeur x , nous trouvons que la valeur h des résultats expérimentaux et h des résultats de la méthode de Galerkin sont les mêmes.

Le tableau suivant résumé les résultats analytiques (la méthode de Galerkin) obtenus dans ce travail avec les résultats présentés par Rouse (1933) (les résultats expérimentaux) afin de clarifier les différences entre nos résultats et leurs résultats.

Tableau (IV.3) : Tableau illustrant les résultats de la méthode de Galerkin avec les résultats expérimentaux et l'erreur relative.

X	0	-1	-2
h (Galerkin)	0,715	0,87667	0,93154
h (Expérimentale)	0,715	0,879	0,925
Erreur relative (%)	0	0,26	0,7

A partir du tableau précédent (tableau IV.3), nous pouvons voir que les valeurs de h sont identique pour tous les valeurs de x et l'erreur relative est très petite.

Pour $x=0$ la valeur de la profondeur est la même 0,715 et l'erreur relative est 0%.

Pour $x=-1$ la valeur de la profondeur par la méthode de collocation par point est 0,87667 et la profondeur des résultats expérimentaux est 0,879 et l'erreur relative est 0,26%.

Pour $x=-2$ la valeur de la profondeur par la méthode de collocation par point est 0,93154 et la profondeur des résultats expérimentaux est 0,925 et l'erreur relative est 0,7%.

IV.4. Comparaison et discussions des résultats

IV.4.1. Comparaison des résultats

L'utilisation d'un déversoir libre comme dispositif de mesure dépend de la constance du rapport entre la profondeur terminale et la profondeur critique. La valeur de ce rapport, que Rouse a trouvé à 0,715 dans les canaux rectangulaires, a été confirmée par plusieurs expériences ultérieures.

Plusieurs chercheurs ont mené des études sur ce sujet, notamment : Montes, Marchi, Strelkoff, Moayeri, Southwell et Vaisey. Où nous comparerons les résultats de chaque chercheur avec les résultats analytiques.

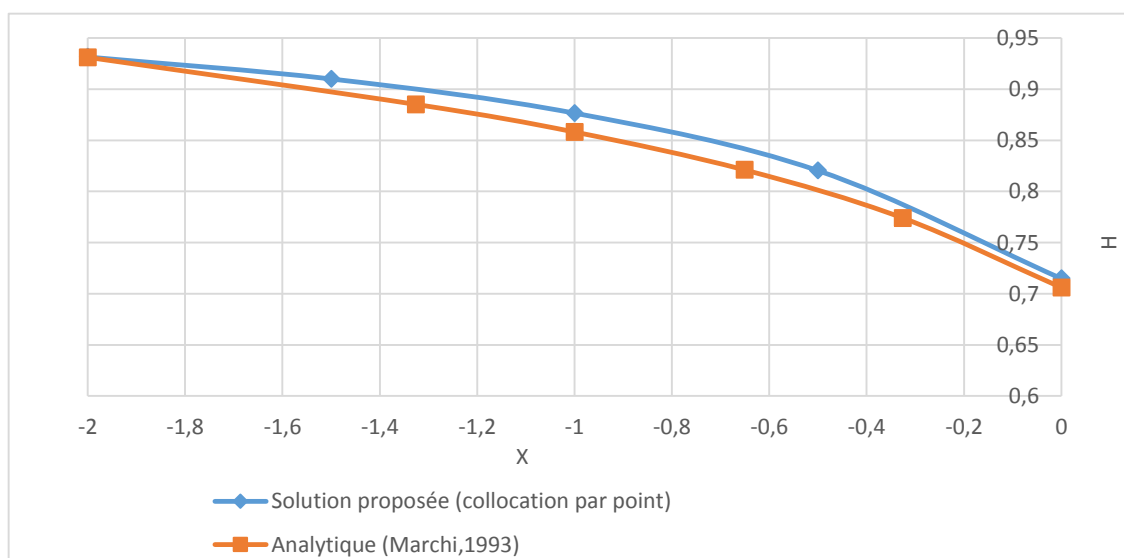


Figure (IV.3) : Comparaison des résultats analytique (collocation par point) avec les résultats analytiques (Marchi, 1993).

Le tableau suivant résumé les résultats analytiques (la méthode de Collocation par point) obtenus dans ce travail avec les résultats présentés par Marchi (1993) afin de clarifier les différences entre nos résultats et leurs résultats.

X	0	-0,5	-1	-1,5	-2
h (Collocation par point)	0,715	0,82	0,87667	0,91	0,93154
X	0	-0,651	-1	-1,326	-2
h (Marchi)	0,706	0,821	0,858	0,885	0,931

Tableau (IV.4) : Tableau illustrant les résultats de la méthode de Collocation par point avec les résultats de Marchi (1993).

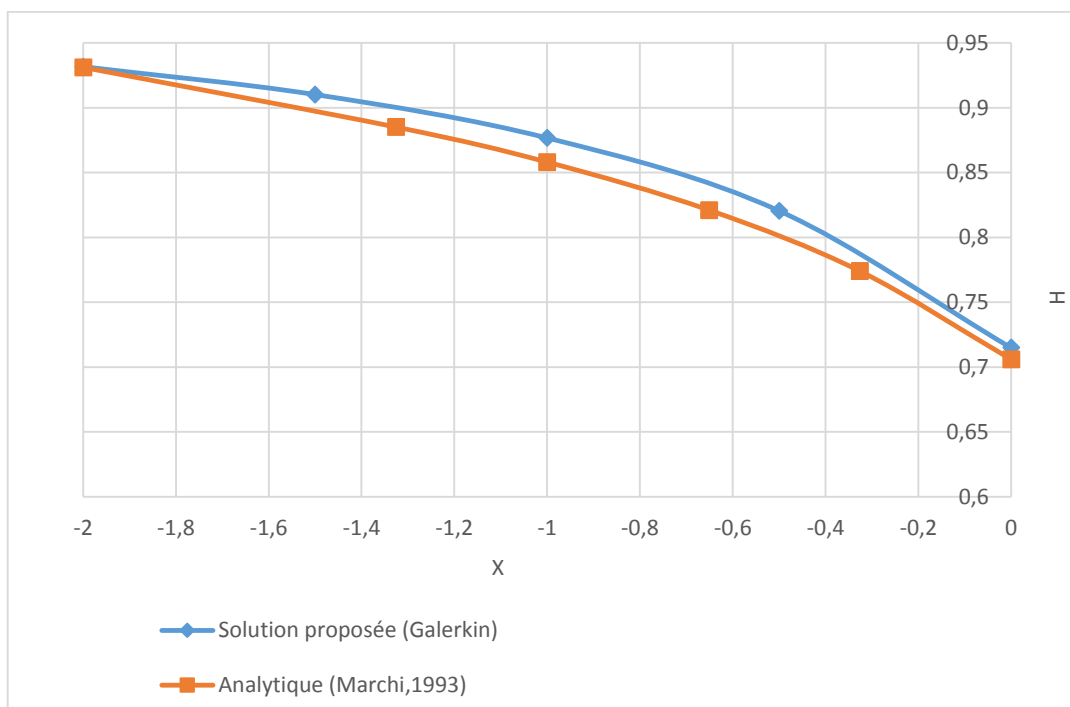


Figure (IV.4) : Comparaison des résultats analytique (Galerkin) avec les résultats analytiques (Marchi,1993).

Dans le tableau suivant une représentation des résultats analytiques (la méthode de Galerkin) obtenus dans ce travail avec les résultats obtenus par Marchi (1993) afin de clarifier les différences entre les deux résultats.

Tableau (IV.5) : Tableau illustrant les résultats de la méthode de Galerkin avec les résultats Marchi (1993).

X	0	-0,5	-1	-1,5	-2
h (Galerkin)	0,715	0,82	0,87667	0,91	0,93154
X	0	-0,651	-1	-1,326	-2
h (Marchi)	0,706	0,821	0,858	0,885	0,931

IV.4.1.1. Interprétations des résultats (Marchi)

En 1993, Marchi a fait des recherches sur la profondeur finale et le profil de la surface d'eau, et ses résultats sont présentés dans la figure précédente (la figure IV.3, IV.4)

La profondeur étant connue, on peut également rechercher le profil de la chute libre en amont de cette profondeur.

La profondeur finale (mise à l'échelle sous forme adimensionnelle par la profondeur critique) est apparue égale à $h/h_e = 0,706$, est comparé aux données mesurées par les résultats analytiques.

A partir des figures et les tableaux précédents, on remarque que :

Pour $x=0$ la valeur trouvée par Marchi est de 0,706 et la valeur que nous avons trouvée analytiquement est de 0,715, où il y a une plus grande différence entre les deux valeurs.

Pour $x=-1$ la valeur que nous avons trouvée analytiquement est de 0,87667 et la valeur trouvée par Marchi est de 0,858, où il y a une plus grande différence entre les deux valeurs.

Pour $x=-2$ la valeur de la profondeur h entre les résultats analytiques que nous avons obtenus et les résultats numériques obtenus par Marchi est la même que 0,931.

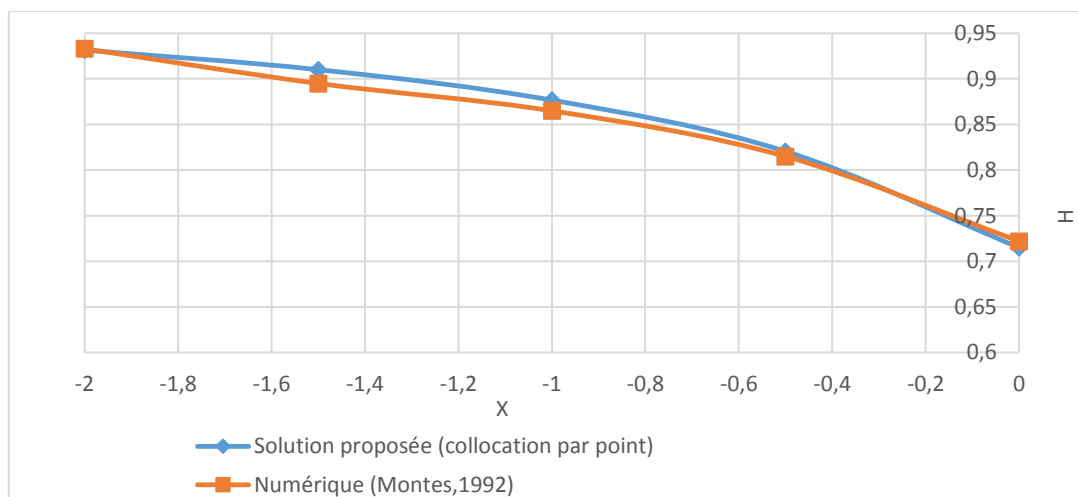


Figure (IV.5) : Comparaison des résultats analytique (collocation par point) avec les résultats numériques (Montes, 1992).

En résumant dans le tableau suivant les résultats analytiques (la méthode de Collocation par point) obtenus dans ce travail avec les résultats de Montes (1992) afin de clarifier les différences entre les deux résultats.

Tableau (IV.6) : Tableau illustrant les résultats de la méthode de Collocation par point avec les résultats Montes (1992).

X	0	-0,5	-1	-1,5	-2
h (Collocation par point)	0,715	0,82	0,87667	0,91	0,93154
X	0	-0,5	-1	-1,5	-2
h(Montes)	0,722	0,815	0,865	0,895	0,933

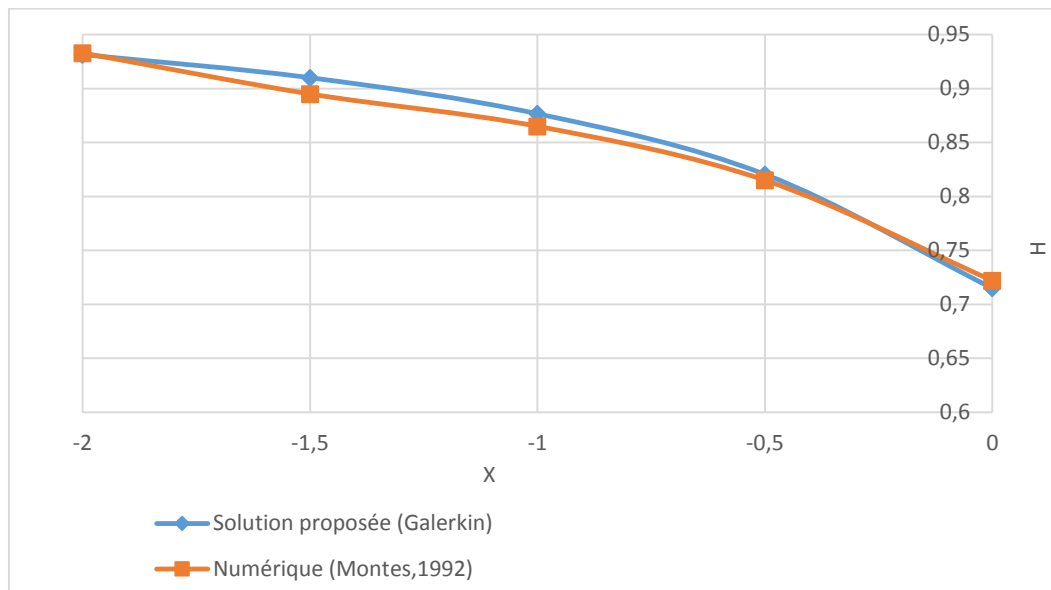


Figure (IV.6) : comparaison des résultats analytique (Galerkin) avec les résultats numériques (Montes,1992).

Le tableau suivant résumé les résultats analytiques (la méthode de Galerkin) obtenus dans ce travail avec les résultats présentés par Montes (1992) afin de clarifier les différences entre nos résultats et leurs résultats.

Tableau (IV.7) : Tableau illustrant les résultats de la méthode de Galerkin avec les résultats Montes (1992).

X	0	-0,5	-1	-1,5	-2
h (Galerkin)	0,715	0,82	0,87667	0,91	0,93154
X	0	-0,5	-1	-1,5	-2
h (Montes)	0,722	0,815	0,865	0,895	0,933

IV.4.1.2. Interprétations des résultats (Montes)

En 1992, le chercheur Montes a mené plusieurs études sur la surface libre de l'eau, et le résumé de ses résultats est présente à la figure (IV.5, IV.6)

Ces résultats sont comparés à d'autre méthodes d'écoulement potentiel et vérifiés par rapport aux nombreuses données expérimentales disponibles dans a littérature. Et la profondeur finale qui vous obtenez est $h/h_e = 0,722$.

Il y a une légère différence entre les résultats de Montes et les résultats analytiques. Et cette différence augmente à mesure que nous passons à $-\infty$

D'après les figures et les tableaux précédents, nous remarquons que

Pour $x=0$ la valeur trouvée par Montes est de 0,722 et la valeur que nous avons trouvée analytiquement est de 0,715, où il y a une légère différence entre les deux valeurs.

Pour $x=-1$ la valeur que nous avons trouvée analytiquement est de 0,87667 et la valeur trouvée par Montes est de 0,865, où il y a une plus grande différence entre les deux valeurs.

Pour $x=-2$ la valeur que nous avons trouvée analytiquement est de 0,93154 et la valeur trouvée numériquement par Montes est de 0,933, où il y a une légère différence entre les deux valeurs.

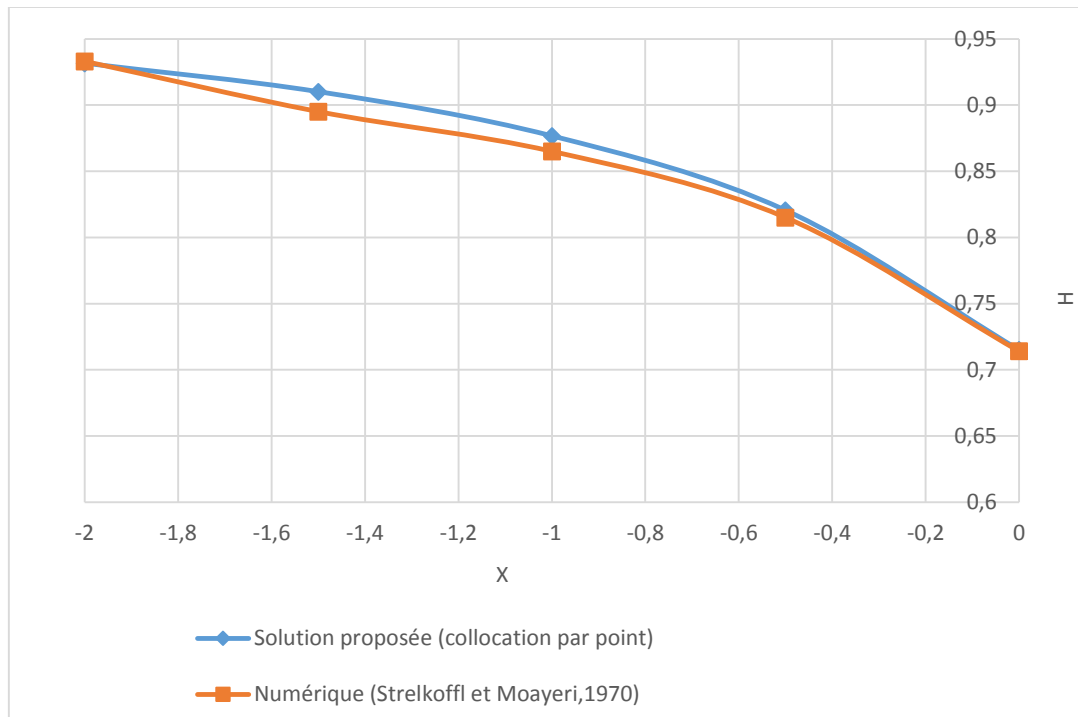


Figure (IV.7) : Comparaison des résultats analytique (Collocation par point) avec les résultats numériques (Strelkoff et Moayeri, 1970).

Le tableau suivant illustrant les résultats de la méthode de Collocation par point avec les résultats de Strelkoff et Moayeri (1970) afin de clarifier les différences entre nos résultats et leurs résultats.

Tableau (IV.8) : Tableau illustrant les résultats de la méthode de Collocation par point avec les résultats Strelkoff et Moayeri (1970).

X	0	-0,5	-1	-1,5	-2
h (Collocation par point)	0,715	0,82	0,87667	0,91	0,93154
X	0	-0,5	-1	-1,5	-2
h (Strelkoff et Moayeri)	0,714	0,811	0,865	0,895	0,933

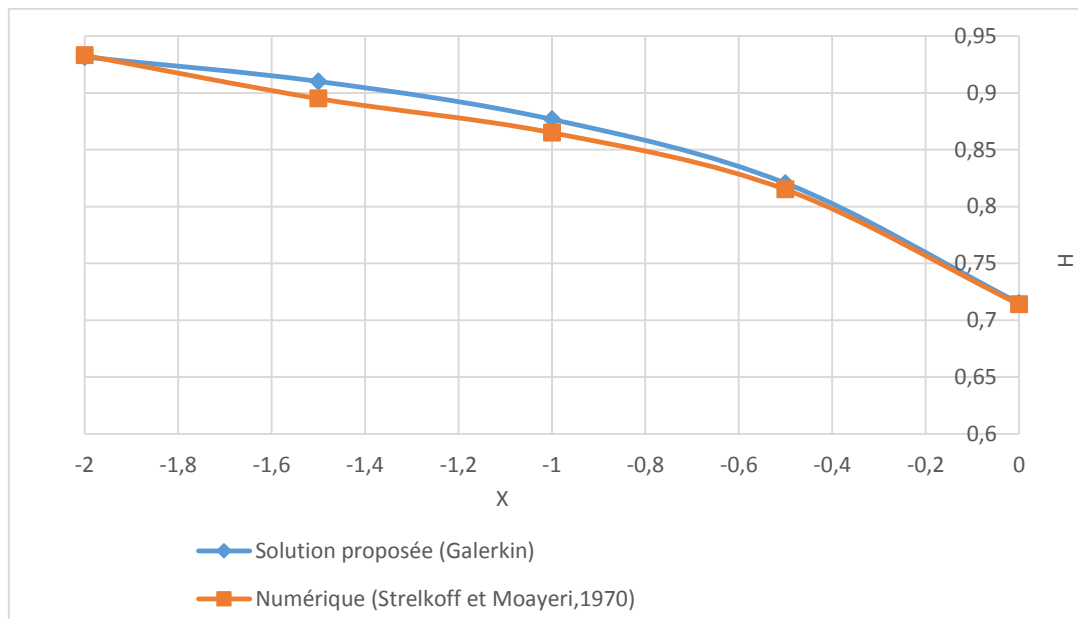


Figure (IV.8) : Comparaison des résultats analytique (Galerkin) avec les résultats numériques (Strelkoff et Moayeri,1970).

En résumant dans le tableau suivant les résultats analytiques (la méthode de Galerkin) obtenus dans ce travail avec les résultats présentés par Strelkoff et Moayeri (1970) afin de clarifier les différences entre nos résultats et leurs résultats.

Tableau (IV.9) : Tableau illustrant les résultats de la méthode de Galerkin avec les résultats Strelkoff et Moayeri (1970).

X	0	-0,5	-1	-1,5	-2
h (Galerkin)	0,715	0,82	0,87667	0,91	0,93154
X	0	-0,5	-1	-1,5	-2
h (Strelkoff et Moayeri)	0,714	0,811	0,865	0,895	0,933

IV.4.1.3. Interprétations des résultats (Strelkoff et Moayeri)

En 1970, le chercheur Strelkoff et Moayeri a mené des recherches sur la surface de profil d'eau et la profondeur final dans un canal rectangulaire, les résultats sont présentés dans la figure précédente (figure IV.7, IV.8)

Strelkoff et Moayeri ont trouvé les valeurs de la profondeur pour la surface d'eau est plus cohérente avec les valeurs trouvées par les résultats analytiques et la valeur de la profondeur à l'extrémité du canal de Strelkoff et Moayeri $h/h_e=0,714$, le rapport de profondeur finale pour $Fr= 1$ s'est avéré correspondre exactement à la valeur de Rouse $h/h_e=0,715$.

Pour $x=-1$ la valeur que nous avons trouvée analytiquement est de 0,87667 et la valeur trouvée par Strelkoff et Moayeri est de 0,865, où il y a une plus grande différence entre les deux valeurs.

Pour $x=-2$ la valeur que nous avons trouvée analytiquement est de 0,93154 et la valeur numérique trouvée par Strelkoff et Moayeri est de 0,933, où il y a une légère différence entre les deux valeurs.

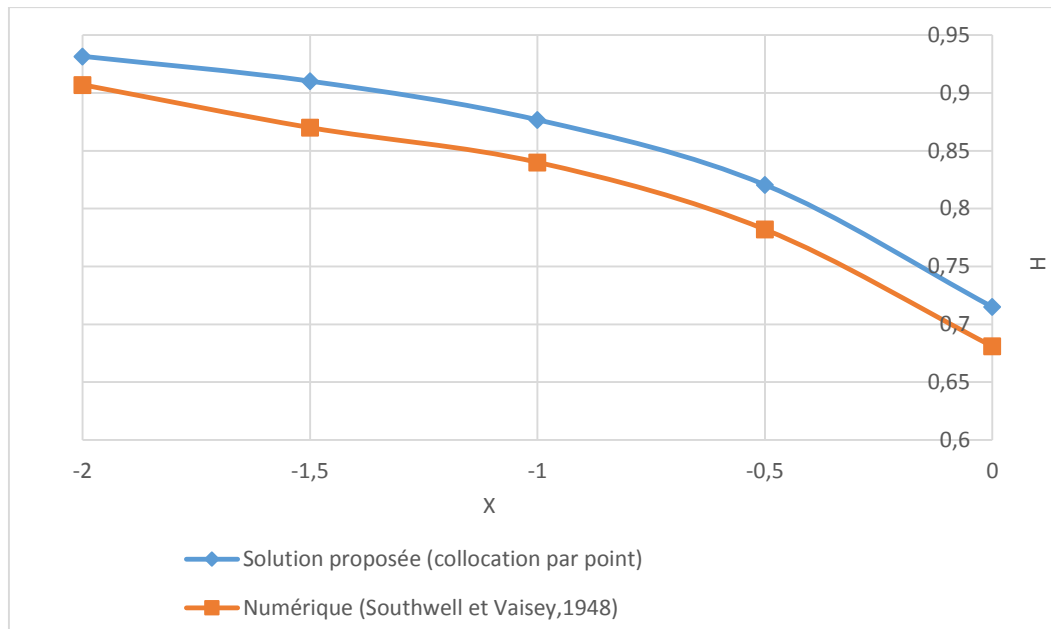


Figure (IV.9) : Comparaison des résultats analytique (collocation par point) avec les résultats numériques (Southwell et Vaisey,1948).

Le tableau suivant résumé les résultats analytiques (la méthode de Collocation par point) obtenus dans ce travail avec les résultats présentés par Southwell et Vaisey (1948) afin de clarifier les différences entre nos résultats et leurs résultats.

Tableau (IV.10) : Tableau illustrant les résultats de la méthode de Collocation par point avec les résultats numériques (Southwell et Vaisey,1948).

X	0	-0,5	-1	-1,5	-2
h (Collocation par point)	0,715	0,82	0,87667	0,91	0,93154
X	0	-0,5	-1	-1,5	-2
h(Southwell et Vaisey)	0,681	0,782	0,84	0,87	0,907

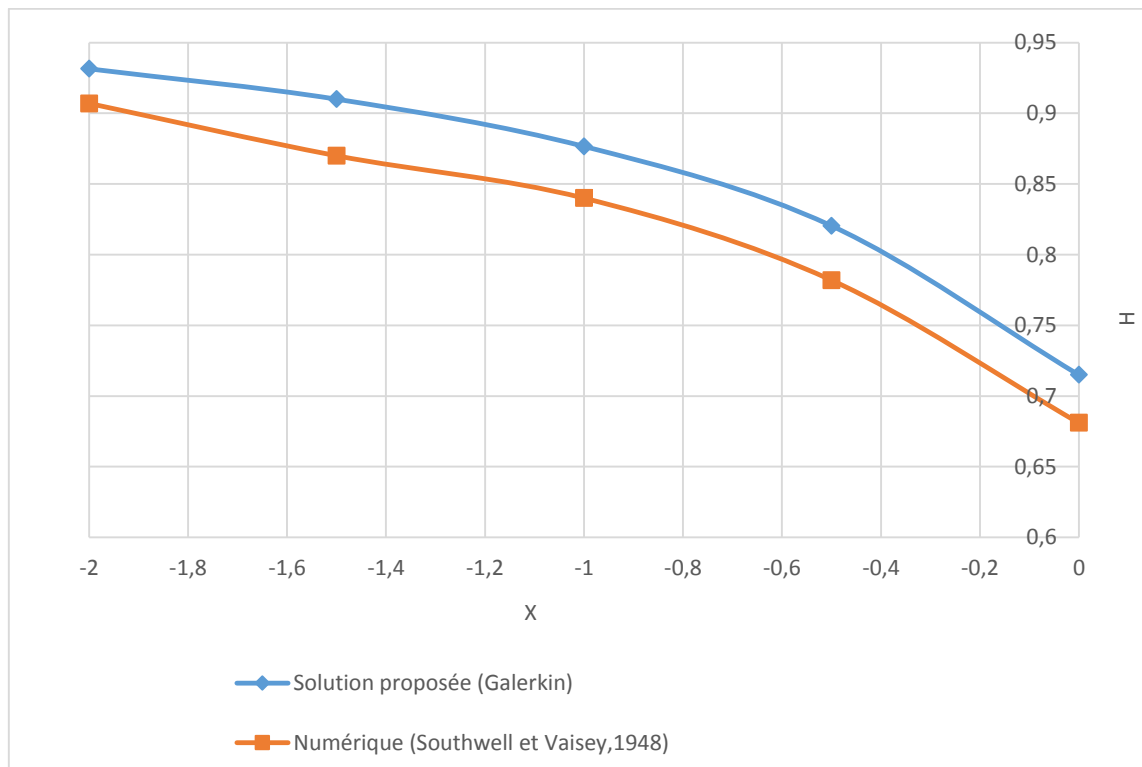


Figure (IV.10) : Comparaison des résultats analytique (la méthode de Galerkin) avec les résultats numériques (Southwell et Vaisey, 1948).

En résumant les résultats analytiques (la méthode de Galerkin) obtenus avec les résultats présentés par Southwell et Vaisey (1948) afin de clarifier les différences entre les deux résultats dans le tableau suivant :

Tableau (IV.11) : Tableau illustrant les résultats de la méthode de Galerkin avec les résultats Southwell et Vaisey (1948).

X	0	-0,5	-1	-1,5	-2
h (Galerkin)	0,715	0,82	0,87667	0,91	0,93154
X	0	-0,5	-1	-1,5	-2
h (Southwell et Vaisey)	0,681	0,782	0,84	0,87	0,907

IV.4.1.4. Interprétations des résultats (Southwell et Vaisey)

Southwell et Vaisey en 1948 ont trouvé les valeurs de profondeur pour la surface d'eau, mais il y a une légère différence entre ses résultats et les résultats analytiques.

Les résultats obtenus dans la figure précédente (figure IV.9, IV.10)

Une solution d'écoulement potentielle de ce problème, non strictement confinée à la section du canal, a d'abord été présentée par Southwell et Vaisey, qui ont utilisé la méthode de relaxation de Southwell pour résoudre l'équation de Laplace pour la fonction de courant sur le plan $x-h$. La profondeur finale calculée par Southwell et Vaisey est $h/h_e=0,681$

D'après les figures et les tableaux précédents, nous remarquons qu'il y a une grande différence entre les résultats trouvés par Southwell et Vaisey et les résultats analytiques que nous avons trouvés.

Pour $x=0$ la valeur trouvée par Southwell et Vaisey est de 0,681 et la valeur que nous avons trouvée analytiquement est de 0,715, où il y a une plus grande différence entre les deux valeurs.

Pour $x=-1$ la valeur que nous avons trouvée analytiquement est de 0,87667 et la valeur trouvée par Southwell et Vaisey est de 0,84, où il y a une plus grande différence entre les deux valeurs.

Pour $x=-2$ la valeur que nous avons trouvée analytiquement est de 0,93154 et la valeur trouvée par Southwell et Vaisey est de 0,907, où il y a une plus grande différence entre les deux valeurs.

IV.5. Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons appliqué directement la méthode de Galerkin et la méthode de collocation par point, et on compare les résultats des méthodes précédents avec les résultats expérimentaux d'une part. D'autre part, nous avons comparé les résultats que nous avons trouvés par des méthodes analytiques avec les résultats trouvés par chaque chercheur.

Conclusion Générale

A travers ce modeste travail, nous avons tenté de répondre à l'un des problèmes importants de l'hydraulique. Dans ce cas, nous avons étudié l'écoulement en chute libre dans un canal à profil rectangulaire.

L'objectif de cette analyse théorique est de trouver la formulation analytique de la hauteur de chute à l'extrémité du canal et l'équation différentielle du profil de la surface libre.

Dans un premier temps, nous avons introduit l'équation différentielle fondamentale de ce problème, à travers laquelle nous pouvons formuler le modèle mathématique qui gouverne l'écoulement dans les canaux rectangulaires.

Ensuite pour résoudre cette équation différentielle, nous avons utilisé l'une des méthodes analytiques telles que Collocation par point et la méthode de Galerkin.

La méthode de Galerkin est la méthode analytique la plus puissante et actuellement répandue dans le domaine de la mécanique des fluides et de l'hydraulique.

Deuxièmement, dans le quatrième chapitre, qui représente le cœur de notre travail, nous avons fait une application directe pour but de comparer les résultats du modèle analytique avec ceux expérimentaux obtenus par des expériences effectuées par Rouse (1933), Marchi (1993) et Strelkoff et Moayeri (1970) ...etc. Comparaison faite, il a été jugé que ceux découlant du calcul analytique concordent assez bien avec ceux obtenus expérimentalement.

Enfin, au terme de ce modeste travail, nous espérons avoir contribué à la modélisation et résolution analytique et approchée d'un des problèmes de l'écoulement au voisinage d'une chute libre en canal à profil rectangulaire.

BIBLIOGRAPHIE

ALI.K.M.H, RIDGWAY.A: "*The circular free overfall* " Water power and dam construction 29, 1977

ALI.K.M.H, SYKES.A: "*Free vortex theory applied to free overfall*" journal of hydraulic division ASCE 98, 1972

ANDERSON.M.V: "*Non-uniform flow in front of a free overfall*" Acta polytechnic scandinavia 42, 1967

BAUER.S.W, GRAF.W.H: "*Free overfall as flow measuring device* " journal of irrigation and drainage division ASCE 97, 1971

BONVIN J., 2005 : « *Hydraulique urbaine I Captages – Réseaux d’adduction – Réservoirs - Réseaux de distribution – Equipements - Pompes – Petites centrales hydrauliques* », école d’ingénieur du Canton de Vaud,

<http://depg.heig-vd.ch/pdf/Cours%20hydraulique%20I-v2005.21.pdf>

CARLIER, M. : "*Hydraulique générale et appliquée*". Eyrolles, Paris, 1980.

CEFTMEF (Ministère Française de transport de l’équipement du tourisme et de la mer). "*Notice sur les déversoirs : synthèse des lois d’écoulement au droit des seuils et déversoirs*", 2005.

CHOW, V.T: "*Open-channel hydraulics*". McGraw-Hill, New York, 1959.

CHOW.W.L, HAN.T: "*Inviscid solution for the problem of the free overfall* " journal of applied mechanics 46, 1979

DEY.S: "*EDR in circular channels*" journal of irrigation and drainage engineering ASCE 127, 2001

DEY.S : "*Free overall in open channels : state-of-the-art review*", Departement of civil engineering, Indian Institue of Technology 2002.

DISKIN.M.H: "*The end depth at a drop in trapezoidal channels*" journal of hydraulic division

ASCE 87, 1961

FERRO.V: " *Flow measurements with rectangular free overfall* " journal of irrigation and drainage engineering ASCE 118, 1992

FERRO.V: " *Discussion on EDR in circular chanal* " journal of irrigation and drainage engineering ASCE 128, 2002

GILL.M.A : "*hydraulics of rectangular vertical drop structure*" journal of hydraulic research 17, 1979

GOURI.D, GILBERT, T: "*méthode des éléments finis du comportement vibratoire d'un rotor*", 1984

HAGER, W.H. et SINNIGER, R.O. : "*Construction Hydrauliques* ". Volume 15, Presses Polytechniques Romandes, 1989.

HATZIGIANNAKIS.E: "*Hydraulic study of overfall in a parabolic channel* "B.Sc,thesis, school of agriculture, Aristotle university, Thessaloniki, Greece, 1987

HOFFMAN, Joe.D. : "*Numerical Methods for Engineers and Scientists*". Deuxième édition, Marcel Dekker, Inc., New York, 2001.

JAEGER.C: "*Engeneering fluid mechanics*", St Martin's press, inc, 1957

KELLER.R.J, FONG.S.S: "*Flow measurements with trapezoidal free overfall* " journal of irrigation and drainage engineering ASCE 115, 1989

KINDSVATER.C.E, CRTER.R.W : "*Discharge characteristics of rectangular thin-plate*" journal of hydraulic division ASCE, Vol 83, NO.HY6/1453, Dec. 1961

LENCASTRE, A. : "*Hydraulique générale*". Eyrolles, Paris, 1996.

MARCHI.E: "*On the free overfall*" journal of hydraulic research 31, 1993

MONTES.J.S: "*A potentiel flow solution for the free overfall*" Water maritime and energy proceedings of institution of civil engineers 96, 1992

PADERI.F: "*Sulla chiamata di sbocco*" L'Energia elettrica 31, 1954

PAGLIARA.S, VITI.C: "*Ciamata di sbocco in alvci con seziontrapezia* "La ricerca e I ricercatori della facolta di ingegneria, Tipografia editirice pisana, 1995

RAJARTNAM.N, MURALIDHAR.D: "*The end depth for circular channels*" journal of hydraulic division ASCE 90, 1964

RAJARTNAM.N, MURALIDHAR.D: "*The trapezoidal free overfall* " journal of hydraulic research 8, 1970

ROUSE.H: "*The distribution of hydraulic ennergy in weir flow with relation to spillway design*" Master of Science in Civil Engineering from the Massachusetts Institute of Technology 1929.

SAAD Bennis, 2007 « *hydraulique et hydrologie* », 2^{ème} édition, université du Québec école de technologie supérieur.

STREALKOFF.T, MOAYERI.M.S: "*Pattern of potential flow in a free overfall*" journal of hydraulic division ASCE 96, 1970

SUBRAMANYA, K: "*Flow in Open Channels*". Troisième édition, McGraw-Hill, New Delhi, 2009.

TAHAR ABBES, M. : "*Méthodes Numériques*". Office de Publications Universitaires, Alger, 2007.

Résumé

L'un des problèmes hydrauliques les plus importants auxquels nous sommes confrontés est la mesure des écoulements en surface libre et l'utilisation de la chute libre comme moyen le plus simple. Ce travail vise à créer une formulation analytique pour les chutes élevées à l'extrémité du canal et l'équation différentielle de la surface libre. Le modèle analytique est donné en utilisant les méthodes de Galerkin et le point de rassemblement, où les résultats de ces deux méthodes sont d'abord comparés aux résultats expérimentaux, puis aux résultats trouvés par certains chercheurs dans leur étude sur cette recherche.

Mots clés : Déversoir, Ecoulement à surface libre, Equation différentielle non linéaire, Chute libre, Méthode de Galerkin, Méthode de Collocation par point.

Abstract

One of the most important hydraulic problems we face is the measurement of free surface flows and the use of free fall as the simplest means. This work aims to create an analytical formulation for high falls at the end of the channel and the differential equation of the free surface. The analytical model is given using the Galerkin methods and the collection point, where the results of these two methods are first compared to the experimental results and then to the results found by some researchers in their study on this research.

Keywords : Weir, Open channel flow, Nonlinear differential equation, Free overfall, Galerkin method, Collocation method by point.

ملخص:

واحدة من أهم المشاكل الهيدروليكية التي نواجهها هي قياس تدفقات السطح الحر واستخدام السقوط الحر كأبسط الوسائل. يهدف هذا العمل إلى إيجاد صياغة تحليلية لارتفاع السقوط في نهاية القناة والمعادلة التفاضلية للسطح الحر. يتم إعطاء النموذج التحليلي باستخدام طرق جاليركين والتجميع النقطي، حيث تتم مقارنة نتائج هاتين الطريقتين أولاً بالنتائج التجريبية، ثم بالنتائج التي وجدها بعض الباحثين في دراستهم حول هذا البحث.

الكلمات المفتاحية: الهدار، التدفق السطحي الحر، معادلة تفاضلية غير خطية، السقوط الحر، طريقة جاليركين، طريقة التجميع النقطي.