République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahai - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique

Département de Mathématique

№ d'ordre : ....

№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Sur le théorème d'Ascoli-Arzelà

Présenté par :

- Fekrache Safia
- Boufekane Samira.

Devant le jury :

Président	: Affane Doria	MCA Université de Jijel
Encadreur	: Menigher Hammoud	MAB Université de Jijel
Examinateur	: Belhadef Rafik	MCB Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

Dédicace

Avec un énorme plaisir, un coeur ouvres et une immense joie, je dédie ce mémoire.

𝒜 ma très chères parents ★ ***ℐsmail*** ★ *et* ★ ***ℱatiha*** ★

Qui m'ont guidé durant les moments les plus pénible de ce long chemin.

𝒜 ***mes frères et mes soeurs****.*

𝒜 ***mes amis de ma promotion****.*

Ainsi a toute la famille ★*ℱekrache* ***et*** *𝒜lioua*★ .

𝒜 ***tous mes enseignants****.*

♣ *𝒮afia* ♣

Dédicace

Avec un énorme plaisir, un coeur ouvres et une immense joie, je dédie ce mémoire.

*A ma très chères parents ★ Zidane ★ et ★ W**ahiba** ★*

Qui m'ont guidé durant les moments les plus pénible de ce long chemin.

*A **mes frères et mes soeurs**.*

*A **mes amis de ma promotion**.*

***Ainsi a toute la famille** ★Boufekane **et** Laouar★ .*

*A **tous mes enseignants**.*

♣ *Samira* ♣

Remerciements

*Nous remercions tout d'abord **ALLAH**, le tout puissant et maitre de l'univers qui nous a donné la capacité nécessaire, la forte volonté et la patience afin d'accomplir ce travail, et qui nous a toujours guidé vers le bon chemin.*

*Nous tenons à exprimer notre gratitude à **H. Menigher** maitre assistant à l'université de Jijel, qui a encadré ce mémoire et nous a guidé tout au long de ce travail avec patience et beaucoup d'intérêt.*

Merci de nous avoir montré le bon exemple.

Nous remercions également les membres du jury :

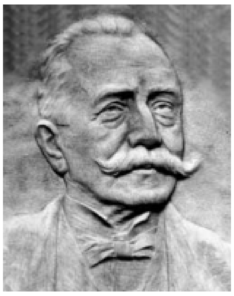
***D. Affane** et **R. Belhadef**,*

pour nous avoir honoré par leur évaluation du travail en tant qu'examinateurs.

Enfin, nous n'oublions pas tous notre enseignants au département de mathématiques de l'université de Jijel, nos amis et nos collègues.

Table des matières

Introduction

Cesare-Arzelà et Guilio-Ascoli

En mathématique, le théorème d'Ascoli, ou théorème d'Ascoli-Arzelà de l'analyse fonctionnelle, démontré par les mathématiciens Italiens Guilio-Ascoli $(1843-1896)$ et Cesare-Arzelà $(1847-1912)$, donne des conditions nécessaires et suffisantes pour décider si une suite donnée d'application continues, est relativement compact pour certaines topologies, ces conditions sont généralement aussi nécessaires. Afin d'établir sa démonstration, nous introduirons la notion d'espaces précompacts, qui nous donnera un critère de compacité, des espaces complet, et aussi la notion d'équicontinue qui a été introduit à la même époque par Ascoli $(1883-1884)$ et Arzelà $(1882-1883)$. Une forme faible du théorème a été prouvée par Ascoli, il a établi la condition suffisante de compacité, et par Arzelà (1895), qui a établi la condition nécessaire et a donné la première présentation claire du résultat.

Ce mémoire est composé en quatre chapitre. Dans le premier chapitre on commence par donner quelques rappelles et notions fondamentales des espace topologiques et métriques.

Dans le deuxième chapitre on s'intéresse à la notion de compacité dans des espaces topologiques ou métriques.

Dans le troisième chapitre on expose les différentes topologies définies sur $C(X, Y)$; l'espace des fonctions continues définies d'un espace topologique X dans un espace métrique Y, et donner quelques propriétés de ces topologies.

On expose également la topologie de la convergence simple, la topologie de la convergence uniforme, et la topologie de la convergence compacte.

Enfin, dans le dernier chapitre on s'intéresse au théorème d'Ascoli-Arzelà. Dans la première section nous avons présenté les énoncés du Théorème d'Ascoli-Arzelà avec leurs démonstration donnés dans des espaces topologique. La deuxième section est consacrée au théorèmes d'Ascoli-Arzelà sur un espace métrique asymétrique.

Chapitre 1

Espaces Topologiques et métriques

Dans ce chapitre on définit les notions de base d'un espace topologique et d'un espace métrique, ainsi d'un espaces métrique asymétrique.

1.1 Notations

Tout au long de ce travail, nous utiliserons les notations suivantes :

- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels $0, 1, 2, \ldots$
- $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls $1, 2, \ldots$
- $\overline{1, n}$ l'ensemble des entiers naturels entre 1 et n.
- $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$.
- ϕ L'ensemble vide.
- $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble de voisinages de x.
- C_X^A complémentaire de A par rapport à X.
- $\mathcal{A}(X, Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y.
- $C(X, Y)$ l'ensemble des applications continues de X dans Y.
- $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de parties de X.
- $\mathcal{F}(x)$ parties fermés de x.
- $C_s(X, Y)$ l'ensemble des application de X dans Y muni de la topologie de la convergence simple.

1.2 Espaces topologiques

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1.

Soit X un ensemble non vide. On appelle topologie sur X, toute famille τ de parties de X tel que :

(O1) ϕ et X appartiennent à τ.

(O2) Toute réunion d'éléments de τ est un élément de τ.

(O3) Toute intersection finie d'éléments de τ est un élément de τ.

On dit que (X,τ) est un espace topologique. Les éléments de τ s'appelles les ouverts.

$$A \subset X,\ A \text{ ouvert} \iff A \in \tau.$$

Exemple 1.2.1.

1. *Soit τ_d l'ensemble des parties de X. Le couple (X, τ_d) est un espace topologique appelé discret et τ_d est dit la topologie discrète.*
2. *La famille $\tau_g = \{X, \phi\}$ définit une topologie sur X appelée la topologie grossière. Dans une topologie grossière les seuls ouverts sont X et ϕ.*
3. *Soit $X = \{a, b, c\}$. La famille $\tau = \{X, \phi, \{a\}\}$ définit une topologie sur X.*

Définition 1.2.2.

Soient τ_1 et τ_2 deux topologies sur X, on dit que τ_1 et τ_2 sont comparables si l'une des familles est contenue dans l'autre. Si $\tau_1 \subset \tau_2$ (i.e. tout ouvert de τ_1 est un ouvert de τ_2) on dit que τ_2 est moins fine que τ_2.

Deux topologies τ_1 et τ_2 sur X sont égales si et seulement si chacune est plus fine que l'autre.

Définition 1.2.3.

Soit (X, τ) un espace topologique et $B \subset X$. On dit que B est fermé si C_X^B est ouvert.

1.2.2 Axiomes des fermés

La famille $\mathcal{F}$ des parties fermées de X vérifie les propriétés suivantes, appelées axiomes des fermés.

(C1) L'ensemble X et la partie vide ϕ appartiennent à la famille $\mathcal{F}$, i.e., sont fermés.

(C2) Toutes intersections (finie ou infinie) de fermés est un fermé.

(C3) La réunion de deux fermés (et par suite toute réunion finie de fermés) est un fermé.

Définition 1.2.4.

Soit x un point de l'espace topologique (X, τ). On appelle voisinage de x toute partie V de X contenant un ouvert qui lui-même contient le point x. On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

Proposition 1.2.1.

Soit (X,τ) un espace topologique. Une partie O est ouverte si et seulement si elle est un voisinage de chacun de ses points.

$$O \text{ ouverte} \iff \forall x \in O,\ O \in \mathcal{V}(x).$$

Définition 1.2.5.

Soit (X, τ) un espace topologique, et soient $A \subset X$, $x \in X$. On dit que x est un point adhérent à A si l'intersection de A avec tous voisinage de x est non vide ,i.e.,

$$x \in \overline{A} \iff \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \phi.$$

L'ensemble de tous les points adhérents à A est appelé l'adhérence de A et noté $\overline{A}$.

Définition 1.2.6.

Soit (X, τ) un espace topologique. On dit que (X, τ) est séparé si,

$$\forall x, y \in X,\ x \neq y \implies \exists U \in \mathcal{V}(x),\ \exists W \in \mathcal{V}(y) \text{ tels que } U \cap W = \phi.$$

Définition 1.2.7.

Soit (X, τ) un espace topologique et soit $A \subset X$. On dit que X est séparable si et seulement si il admet un sous ensemble dénombrable partout dense.

Définition 1.2.8.

Soient (X, τ) *un espace topologique et* $A \subset X$. *On appelle topologie induite par* X *sur* A *le couple* (A, τ_A) *où* $\tau_A = \{O \cap A / O \in \tau\}$.

Définition 1.2.9.

La famille $\tau_{\mathbb{R}}$ *définie par :*

$$\tau_{\mathbb{R}} = \{A \subset \mathbb{R}, \forall x \in A, \exists h > 0,]x-h, x+h[\subset A\}.$$

Alors $\tau_{\mathbb{R}}$ *est une topologie sur* $\mathbb{R}$ *appelée la topologie usuelle et* $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ *l'espace topologie usuelle.*

Définition 1.2.10.

Soit (X, τ) *un espace topologique et soit* $\mathcal{B} \subset \tau$. *On dit que* $\mathcal{B}$ *est une base de* (X, τ) *si tout ouvert non vide de* X *est réunion d'éléments de* $\mathcal{B}$*, i.e.,*

$$\forall O \in \tau : \ O = \bigcup_{i \in I} V_i \,, \ V_i \in \mathcal{B}, \ \forall i \in I, I \subset \mathbb{N}.$$

Exemple 1.2.2.

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{]a, b[; a, b \in \mathbb{R}\}$ *est une base de la topologie usuelle sur* $\mathbb{R}$.

Proposition 1.2.2.

Toute base $\mathcal{B}$ *d'un espace topologique* (X, τ) *joue les deux propriétés suivantes :*

(B1) $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in U_1 \cap U_2, \exists U \in \mathcal{B} : x \in U \subset U_1 \cap U_2$.

(B2) $\forall x \in X, \exists U \in \mathcal{B} : x \in U$.

Définition 1.2.11.

Soit (X, τ) *un espace topologique et* $\mathcal{B}_0 \subset \tau$. *On dit que* $\mathcal{B}_0$ *est une sous-base de* τ *si la famille* $I(\mathcal{B}_0)$ *forme une base de* τ*, tel que*

$$I(\mathcal{B}_0) = \{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n / A_i \in \mathcal{B}_0, \ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Exemple 1.2.3.

La famille $\mathcal{B}_0 = \{]-\infty, a[, \ ]b, +\infty[; \ a, b \in \mathbb{R}\}$ *est une sous-base pour* $(\mathbb{R}, |\ .\ |)$ *puisque* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset I(\mathcal{B}_0)$.

Définition 1.2.12.

Soit $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$. On dit que $\mathcal{B}(x)$ est un système fondamental de voisinages de x, noté SFV(x) si

$$\forall V \in \mathcal{V}(x),\ \exists U \in \mathcal{B}(x) : x \in U \subset V.$$

Exemple 1.2.4.

1. *Dans un espace discret X, $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}, x \in X\}$ forme un système fondamental de voisinage de x.*

Proposition 1.2.3.

Soit $\mathcal{B}$ une base d'un espace topologique X. Alors la famille

$$\mathcal{B}(x) = \{\Omega \in \mathcal{B}/x \in \Omega\},$$

est un SFV de x.

Proposition 1.2.4.

Soit (X, τ) un espace topologique. Tout système fondamental de voisinage $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ satisfait les propriétés suivantes :

(BP1) Pour tout $x \in X, \mathcal{B}(x) \neq \phi$, et pour tout $U \in \mathcal{B}(x), x \in U$.

(BP2) Si $x \in U \in \mathcal{B}(y)$, alors il existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tel que $V \subset U$.

(BP3) Pour tous $U_1, U_2 \in \mathcal{B}(x)$ il existe $U \in \mathcal{B}(x)$ tel que $U \subset U_1 \cap U_2$.

1.2.3 Applications continues

Définition 1.2.13.

Soient (X, τ_X), (Y, τ_Y) deux espaces topologiques et soit $f : X \longrightarrow Y$. On dit que f est continue au point $x_0 \in X$ si

$$\forall W \in \mathcal{V}_Y(f(x_0)),\ \exists V \in \mathcal{V}_X(x_0)/f(V) \subset W,$$

où bien

$$\forall W \in \mathcal{V}_Y(f(x_0)),\ f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_X(x_0).$$

On dit que f est continue sur X si f est continue en tout point $x_0 \in X$.

Définition 1.2.14.

Une application $f : X \longrightarrow Y$ est ouverte (resp fermée) si l'image par f de tout ouvert (resp fermée) de X est un ouvert (resp fermé) de Y.

Théorème 1.2.15.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application et soit $\mathcal{B}$ une base de X. Alors

$$f \text{ ouverte} \iff f(U) \text{ est un ouvert de } Y \text{ pour tout } U \in \mathcal{B}.$$

Proposition 1.2.5.

Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. *L'application f est continue.*
2. *Pour toute partie A de X, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*
3. *Pour tout fermé B de Y, $f^{-1}(B)$ est un fermé de X.*
4. *Pour tout ouvert U de Y, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.*

Définition 1.2.16.

Soient X, Y deux espaces topologiques. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est dite homéomorphisme si elle est bijective et f et f^{-1} sont continues, ou d'une manière équivalente si f est une application continue et ouverte (ou fermée).

1.2.4 Limites et valeur d'adhérence

Définition 1.2.17.

On appelle suite dans un ensemble non vide X une application $x : \mathbb{N} \longrightarrow X$ de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels dans l'ensemble X.

Définition 1.2.18.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace topologique X. On dit qu'un élément l de X est limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou que cette suite converge vers l'élément $l \in X$, si pour tout voisinage V de l, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq n_0$, on ait $x_n \in V$.

Remarque.

Un élément l de X est limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si tout voisinage de l contient tous les termes x_n de la suite, sauf pour un nombre fini de valeurs de l'indice n.

Définition 1.2.19.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace topologique X. On dit qu'un élément a de X est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si pour tout voisinage V de a et tout entier $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq n_0$ et $x_n \in V$.

Remarque.

Un élément a de X est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si tout voisinage de a contient les termes x_n de la suite pour une infinité de valeurs distinctes de l'indice n.

Proposition 1.2.6.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x alors x est une valeur d'adhérence pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 1.2.7.

Soit (X,τ) un espace topologique et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Posons $A_n = \{x_k,\ k \geq n\} = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Soit A l'ensemble de toutes les valeurs d'adhérence de $(x_n)_n$ alors $A = \bigcap\limits_n \overline{A}_n$.

1.2.5 Méthodes d'engendré une topologie

Proposition 1.2.8.

Soit X un ensemble et $\mathcal{B}$ une famille de sous ensemble de X qui vérifie les conditions de la proposition (1.2.2). Soit τ la famille de tous les sous ensembles de X qui sont des unions de sous famille de $\mathcal{B}$ c'est à dire,

$$U \in \tau \iff U = \bigcup \mathcal{B}_0 \text{ pour } \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}.$$

La famille τ est une topologie sur X et la famille $\mathcal{B}$ est un base pour l'espace topologique (X,τ).

Démonstration.

Montrons que la famille τ forme une topologie sur X .

1. La condition $(O1)$ est satisfaite car $\phi = \bigcup \mathcal{B}_0$ pour $\mathcal{B}_0 = \phi$, et par $(B2)$ on a $X = \bigcup \mathcal{B}_0$ pour $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$.

2. Montrons que la condition $(O3)$ est satisfaite. Prenons $U_1, U_2 \in \tau$, alors $U_1 = \bigcup\limits_{s \in S} U_s$ et $U_2 = \bigcup\limits_{t \in T} U_t$ où $U_s, U_t \in \mathcal{B}$ pour $s \in S$ et $t \in T$. On a
$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{s \in S, t \in T} U_S \cap U_t.$$
Pour cela il suffit de prouver que $U_s \cap U_t$ est l'union d'une sous famille de $\mathcal{B}$. Par $(B1)$ pour chaque $x \in U_s \cap U_t$, il existe $U(x) \in \mathcal{B}$ tel que
$$x \in U(x) \subset U_s \cap U_t.$$
Et cela implique
$$U_s \cap U_t = \bigcup \mathcal{B}_0 \text{ pour } \mathcal{B}_0 = \{U(x) : x \in U_s \cap U_t\}.$$

3. La condition $(O2)$ est satisfaite par la définition de la famille τ. Donc τ est une topologie sur X. Clairement $\mathcal{B}$ est une base de X. □

Proposition 1.2.9.

Soit X un ensemble et $C \subset \mathcal{P}(X)$ tel que :

1. *$\phi, X \in C$;*
2. *pour tous $B_1, B_2 \in C : B_1 \cup B_2 \in C$;*
3. *pour tout $(B_i)_{i \in I} \in C : \bigcap\limits_{i \in I} B_i \in C$.*

Alors la famille $\tau = \{\Omega / C_X^{\Omega} \in C\}$ est une topologie sur X.

Proposition 1.2.10.

Soient X un ensemble et $\sim: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ un opérateur qui associe à toute partie $A \subset X$ une partie $\widetilde{A} \subset X$, de telle sorte que les conditions suivantes sont satisfaites.

1. *$\widetilde{\phi} = \phi$.*
2. *$A \subset \widetilde{A}$.*
3. *$\widetilde{A \cup B} = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$.*
4. *$\widetilde{\widetilde{A}} = \widetilde{A}$.*

Alors la famille $\tau = \{\Omega : C_X^\Omega = \widetilde{C_X^\Omega}\} = \{C_X^\Omega : \Omega = \widetilde{\Omega}\}$ *est une topologie sur* X*. De plus, pour tout* $A \subset X$*, l'ensemble* $\widetilde{A}$ *est la fermeture de* A *dans* (X, τ)*.*

Démonstration.

Montrons que la famille τ est une topologie sur X. On a

1. $\widetilde{\phi} = \phi$ donc $C_X^\phi = X \in \tau$, par définition et $X \subset \widetilde{X}$ donc $X = \widetilde{X}$ implique $C_X^X = \phi \in \tau$ par définition.

2. Soient $\Omega_1, \Omega_2 \in \tau$ donc

$$\widetilde{C_X^{\Omega_1}} = C_X^{\Omega_1} \text{et } \widetilde{C_X^{\Omega_2}} = C_X^{\Omega_2}.$$

D'autre part

$$\widetilde{C_X^{\Omega_1}} \cup \widetilde{C_X^{\Omega_2}} = \widetilde{C_X^{\Omega_1} \cup C_X^{\Omega_2}} = \widetilde{C_X^{\Omega_1 \cap \Omega_2}},$$

et on a aussi

$$\widetilde{C_X^{\Omega_1}} \cup \widetilde{C_X^{\Omega_2}} = C_X^{\Omega_1} \cup C_X^{\Omega_2} = C_X^{\Omega_1 \cap \Omega_2},$$

donc

$$\widetilde{C_X^{\Omega_1 \cap \Omega_2}} = C_X^{\Omega_1 \cap \Omega_2}.$$

Finalement $\Omega_1 \cap \Omega_2 \in \tau$.

3. Soit $(\Omega_i)_{i \in I} \subset \tau$, on va montrer que $C_X^{\cup \Omega_i}$. On a d'après la condition (2) $C_X^{\cup \Omega_i} \subset \widetilde{C_X^{\cup \Omega_i}}$.

Pour montrer l'inclusion inverse on dit tout d'abord montrer que si $A \subset B$, alors $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$. Soit $A \subset B$ donc $A \cup B = B$, donc

$$\widetilde{A \cup B} = \widetilde{A} \cup \widetilde{B} = \widetilde{B}, \text{d'ou } \widetilde{A} \subset \widetilde{B}.$$

D'autre part on a

$$\bigcap_{i \in I} C_X^{\Omega_i} \subset C_X^{\Omega_i},$$

alors

$$\widetilde{\bigcap_{i \in I} C_X^{\Omega_i}} \subset \widetilde{C_X^{\Omega_i}} = C_X^{\Omega_i},$$

donc

$$\widetilde{\bigcap_{i \in I} C_X^{\Omega_i}} \subset \bigcap C_X^{\Omega_i},$$

d'où

$$\widetilde{C_X^{\cup_{i\in I}\Omega_i}} \subset C_X^{\cup_{i\in I}\Omega_i}.$$

Donc par double inclusion

$$C_X^{\cup\Omega_i} = \widetilde{C_X^{\cup\Omega_i}}, \text{pour tout } i \in I.$$

D'où $\bigcup_{i\in I}\Omega_i \in \tau$. Donc τ est une topologie sur X.

Maintenant, on doit montrer que $\widetilde{F} = \overline{F}$ pour tout $F \subset X$.

On a $\widetilde{F}$ est un fermé puisque $\widetilde{\widetilde{F}} = \widetilde{F}$. D'autre part $F \subset \widetilde{F}$ donc $\overline{F} \subset \widetilde{F}$, puisque $\overline{F}$ est le plus petit fermé qui contient F.

Vérifions que $\widetilde{F} \subset \overline{F}$. Soit B un fermé dans X tel que $F \subset B$, donc $\widetilde{F} \subset \widetilde{B} = B$, alors

$$\widetilde{F} \subset \bigcap\{B : B = \overline{B} \text{ et } F \subset B\} = \overline{F}.$$

Donc par double inclusion $\overline{F} = \widetilde{F}$. □

Proposition 1.2.11.

Soit X un ensemble donné et $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ une collection de familles de sous ensembles de X, de telle sorte que les axiomes de la proposition (1.2.4) *soient vérifiées. Soit $\mathcal{O}$ la famille de tous les sous ensembles de X qui sont des unions d'une sous famille de $\bigcup_{x\in X}\mathcal{B}(x)$. La famille $\mathcal{O}$ satisfait les conditions de la définition* (1.2.1) *et la collection $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ est un système fondamental de voisinages de x pour l'espace* $(X, \mathcal{O})$.

La topologie $\mathcal{O}$ est appelée la topologie engendrée par le système fondamental de voisinage $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$.

1.2.6 Topologie produit

Définition 1.2.20.

Soient $X_i, i \in I$, des espaces topologiques, et $X = \prod_{i\in I} X_i$ l'ensemble produit. Pour chaque $i \in I$, on note $p_i : X \longrightarrow X_i$ la projection canonique de X sur le facteur X_i. La topologie produit sur X est la topologie engendrée par l'ensemble des parties de X de la forme ${p_i}^{-1}(U_i)$, avec $i \in I$ et U_i ouvert de X_i. Lorsque l'ensemble produit X est muni *de cette topologie, on dit que c'est l'espace topologique produit des espaces topologiques* $X_i, i \in I$.

Proposition 1.2.12.

L'ensemble produit étant supposé muni d'une topologie. Soit $i \in I$. *La projection canonique* $p_i : X \longrightarrow X_i$ *est continue si et seulement si, pour chaque ouvert* U_i *de* X_i, ${p_i}^{-1}(U_i)$ *est un ouvert de* X. *Nous voyons donc que la topologie produit sur* X *est la moins fine des topologies pour lesquelles les projections canoniques* $p_i : X \longrightarrow X_i$, $i \in I$, *sont toutes continues.*

Définition 1.2.21.

On appelle ouvert élémentaire ou pavé ouvert de l'espace topologique produit $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$, *l'intersection d'une famille finie de parties de* X *de la forme* ${p_i}^{-1}(U_i)$, *avec* $i \in I$ *et* U_i *ouvert de* X_i.

Remarque.

Une partie U *de* X *est un pavé ouvert si et seulement si elle est de la forme* $U = \prod\limits_{i \in I} U_i$ *avec* $i \in I$ *et* U_i *ouvert de* X_i *et* $U_i = X_i$ *sauf pour un nombre fini de valeurs de l'indice* $i \in I$. *En effet, un pavé ouvert est, d'après la définition* (1.2.21), *intersection d'une famille finie de parties de* X *de la forme* ${p_i}^{-1}(U_i)$ *avec* $i \in I$ *et* U_i *ouvert de* X_i. *On peut donc l'écrire*

$$U = p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap p_{i_k}^{-1}(U_{i_k}),$$

avec $i_1, i_2, \ldots, i_k$ *éléments de* I, *et* U_{i_j} *ouvert de* X_{i_j}, $1 \leqslant j \leqslant k$. *Mais on peut écrire aussi*

$$U = \prod_{i \in I} U_i$$

$$U_i = \begin{cases} U_{i_1}, & si \quad i = i_1 \\ U_{i_2}, & si \quad i = i_2 \\ \ldots & \\ U_{i_k}, & si \quad i = i_k \\ X_i, & si \quad i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}. \end{cases}$$

Théorème 1.2.22.
Une partie de l'espace topologique produit $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ *est ouverte si et seulement si elle est la réunion d'une famille quelconque (finie ou non) de pavés ouverts. En particulier, tout pavé ouvert est un ouvert.*

Remarque.

1. *Lorsque l'ensemble d'indices* I *est fini, toute partie de la forme* $\prod\limits_{i \in I} U_i$ *avec* U_i *ouvert de* X_i*, est un pavé ouvert. Ce n'est plus le cas lorsque l'ensemble* I *est infini : il ne faut pas oublier alors de préciser que* U_i *doit être égal à* X_i *sauf pour un nombre fini de valeurs de l'indice* $i \in I$.

2. *On peut exprimer le théorème* (1.2.22) *en disant que dans un espace topologique produit, l'ensemble des pavés ouverts est une base d'ouverte.*

3. *Soit* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots), i \in I$ *un point de l'espace topologique produit* $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$. *On voit aisément que l'ensemble des parties de* X *de la forme* $V = \prod\limits_{i \in I} V_i$ *avec* V_i *voisinage de* (x_i) *dans* X_i *et* $V_i = X_i$ *sauf pour un nombre fini de valeurs de l'indice* $i \in I$*, est un système fondamental de voisinages de* x *dans* X *; on peut même choisir, pour chaque* $i \in I$*, un système fondamental* $W_i(x_i)$ *de voisinages de* x_i *dans* X_i *et imposer à chaque* V_i *qui n'est pas égal à* X_i *d'être élément de* $W_i(x_i)$.

Proposition 1.2.13.
Chaque projection canonique $p_i : X \longrightarrow X_i$ *de l'espace topologique produit* $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ *sur un de ses facteurs est une application ouverte.*

Proposition 1.2.14.
Un espace topologique produit est séparé si et seulement si chacun de ses facteurs est séparé.

Démonstration.
Montrons que, $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ est séparé. En effet, soient $a, b \in X$ tels que $a \neq b$, où

$a = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_i, \dots)$ avec $a_i, b_i \in X_i$, $\forall i \in I$.

$$\begin{aligned} a \neq b &\implies \exists i_0 \in I, \text{tel que } a_{i_0} \neq b_{i_0} \\ &\implies \exists U_{i_0} \in \mathcal{V}(a_{i_0}), \exists V_{i_0} \in \mathcal{V}(b_{i_0}) \text{ tel que } U_{i_0} \bigcap V_{i_0} = \phi \\ &\implies U_{i_0} \times \prod_{i \neq i_0} X_i \textit{ et } V_{i_0} \times \prod_{i \neq i_0} X_i \text{ sont des voisinages disjoints de a et b} \\ &\implies \prod_{i \in I} X_i \text{ est séparé.} \end{aligned}$$

□

Proposition 1.2.15.

Soit Y un autre espace topologique. Une application $f : Y \longrightarrow X$ est continue si et seulement si chacune de ses composantes $f_i = p_i \circ f : Y \longrightarrow X_i$ est continue (on a noté $p_i : X \longrightarrow X_i$ la projection canonique sur le facteur X_i).

En effet, si f est continue, chacune de ses composantes $f_i = p_i \circ f$ est continue, puisque composée d'applications continues. Réciproquement, supposons les composantes de f toutes continues. Soit $\bigcap_{j=1}^{k} p_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$ un pavé ouvert de X on a noté $i_1, \dots, i_k$ des éléments de I et, pour chaque j, $1 \leq j \leq k$, U_{i_j} est un ouvert de X_{i_j}. On a

$$f^{-1}(U) = \bigcap_{j=1}^{k} f^{-1}(p_{i_j}^{-1}(U_{i_j})) = \bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(U_{i_j}).$$

Les $f_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$ sont des ouverts, puisque les applications f_{i_j} sont continues. Par suite, $f^{-1}(U)$ est ouvert, comme intersection d'une famille finie d'ouverts. Cela prouve que f est continue, l'ensemble des pavés ouverts étant une base de la topologie produit.

1.3 Espaces métriques

Définition 1.3.1.

Soit X un ensemble non vide. Une distance sur X est une application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

1. *pour tout $x, y \in X$: $d(x, y) = d(y, x)$,*

2. *pour tout* $x, y \in X$: $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

3. *pour tout* $x, y, z \in X$: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Le couple (X, d) *est dit espace métrique.*

Exemple 1.3.1.

1. *Sur* $\mathbb{R}$ *la distance usuelle est définie par :* $d(x, y) = |x - y|$.

2. *Si* X *un ensemble quelconque, on définit une distance sur* X *en posant*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & si \;\; x = y, \\ \\ 1, & si \;\; x \neq y. \end{cases}$$

On dit que d *est la distance discrète sur* X.

Définition 1.3.2.

On appelle semi-distance sur un ensemble X. *Une application* d *de* $X \times X$ *dans la demi droite réel* $\mathbb{R}_+$ *ayant les propriétés suivantes :*

1. *Symétrie :* $d(x, y) = d(y, x)$.

2. *Semi positivité :* $d(x, y) \geq 0$ *et* $d(x, x) = 0$.

3. *Inégalité triangulaire :* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Définition 1.3.3.

On appelle espace semi-métrique un ensemble X *muni d'une famille* $(d_i)_{i \in I}$ *de semi-distance, vérifiant la condition de filtration, i.e., pour toute partie finie* J *de* I, *il existe* $k \in I$ *tel que* $d_k \geq d_j$ *pour tout* $j \in J$.

Proposition 1.3.1.

Tout espace métrique est séparé.

Définition 1.3.4.

On dit que $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d^{'})$ *est lipschitzienne si il existe* $k > 0$ *tel que*

$$d^{'}(f(x_1), f(x_2) \leq kd(x_1, x_2)), \;\; \forall x_1, x_2 \in X.$$

Si $0 < k < 1$ *on dit que* f *est contraction.*

Définition 1.3.5.
Soient (X, d) *et* $(Y, d^{'})$ *deux espaces métriques. On dit qu'une application* $f : X \longrightarrow Y$ *est uniformément continue si elle vérifie la propriété suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in X,\ d(x, y) \leq \delta \implies d^{'}(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Proposition 1.3.2.
Toute application lipschitzienne est uniformément continue et donc continue.

Théorème 1.3.6. *(Bolzano-Weierstrass)*
De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée par un certain réel $M \in \mathbb{R}^+$. Nous allons construire par un procédé dichotomique deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier naturel n, soit l'ensemble infini

$$A_n = \{k \in \mathbb{N}/a_n \leq u_k \leq b_n\}.$$

<u>Étape initiale</u> :

Pour $a_0 = -M$, $b_0 = M$ l'ensemble A_0 est infini car égal à $\mathbb{N}$.

<u>Étape n</u> :

Soit a_n et b_n tels que l'ensemble $A_n = \{k \in \mathbb{N}/a_n \leq u_k \leq b_n\}$ infini et construisons a_{n+1} et b_{n+1}. Posons $d_n = \frac{b_n+a_n}{2}$ et considérons

$$A^- = \{k \in \mathbb{N}/a_n \leq u_k \leq d_n\} \text{ et } A^+ = \{k \in \mathbb{N}/d_n \leq u_k \leq b_n\}$$

$$A_n = A^- \cup A^+.$$

Comme A_n est infini, au moins l'un des deux ensembles A^- ou A^+ doit être infini.

Si A^+ est infini, on pose $a_{n+1} = d_n$ et $b_{n+1} = b_n$. Sinon, A^- est nécessairement infini et on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = d_n$. Dans les deux cas l'ensemble

$$A_{n+1} = \{k \in \mathbb{N}/a_{n+1} \leq u_k \leq b_{n+1}\},$$

est infini.

De plus dans les deux cas

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}.$$

Montrons qu'alors les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Par récurrence, sachant

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2},$$

on obtient

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0).$$

On en déduit que $b_n - a_n \longrightarrow 0$, il ne reste plus qu'à étudier la monotonie de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. A l'étape n, sachant que $b_n - a_n \geq 0$ on a

$$a_n \leq d_n = \frac{b_n + a_n}{2} \leq b_n.$$

Par suite que a_{n+1} soit égale à a_n ou à d_n on a $a_{n+1} \geq a_n$ De même, que b_{n+1} soit égale à b_n ou à d_n on a $b_{n+1} \leq b_n$.

Ainsi (a_n) est croissante et b_n est décroissante.

Finalement les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien adjacentes, elles convergent donc vers une même limite c.

De plus on a la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \{k \in \mathbb{N}/a_n \leq u_k \leq b_n\}$$

est un ensemble infini.

Nous allons maintenant pouvoir construire une suite extraite de (u_n) qui soit convergente.

Définissons par récurrence, une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ de la manière suivante : on pose $\varphi(0) = 0$, puis lorsque $\varphi(n)$ est défini, on pose

$$\varphi(n+1) = \min(A_{n+1} \setminus \{0, 1, 2, \ldots, \varphi(n)\})$$

Comme l'ensemble A_{n+1} est infini, l'ensemble $A_{n+1}\backslash\{0,1,2,\ldots,\varphi(n)\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, et par suite, elle admet bien un plus petit élément.

Par construction on a

$$\forall n\in\mathbb{N}, \varphi(n+1)>\varphi(n).$$

L'application φ est donc strictement croissante.

Considérons maintenant la suite extraite $(u_{\varphi(n)})$. Par construction de φ, on a

$$\forall n\in\mathbb{N}, \varphi(n)\in A_n,$$

c'est à dire

$$a_n\leq u_{\varphi(n)}\leq b_n.$$

Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers c, il en est de même de $(u_{\varphi(n)})$.

Finalement, nous avons extrait de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente. □

Définition 1.3.7.

Soit (X,d) est un espace métrique, et $a\in X$, et $r\geq 0$. La boule ouverte de centre a et de rayon r est l'ensemble

$$\mathbf{B}(a,r)=\{x\in X,\quad d(x,a)<r\}.$$

La boule fermée correspondante est l'ensemble

$$\mathbf{B}_f(a,r)=\{x\in X,\quad d(x,a)\leqslant r\}.$$

Exemple 1.3.2.

1. *Dans $\mathbb{R}$, la boule ouverte $\mathbf{B}(a,r)$ est l'intervalle $]a-r,a+r[$, la boule fermée est l'intervalle $[a-r,a+r]$*
2. *Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance usuelle, les boules sont des disques.*

Définition 1.3.8.

Soit (X,d) est un espace métrique. On dit qu'un ensemble $O\subseteq X$ est un ouvert de (X,d) s'il vérifie la propriété suivante :
pour tout point $x\in O$, on peut trouver $r>0$ tel que $\mathbf{B}(x,r)\subseteq O$.

Proposition 1.3.3.

Toute boule ouverte est un ensemble ouvert.

Démonstration.

Soit $O = \mathbf{B}(a, r)$ une boule ouverte, et soit x un point quelconque de $\mathbf{B}$. On a $d(x, a) < r$, donc on peut trouver

$$\varepsilon > 0 \text{ tel que } \varepsilon + d(x, a) < r.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a alors

$$\mathbf{B}(x, \varepsilon) \subseteq \mathbf{B}(a, r) = O.$$

Comme x est un point quelconque de O, cela prouve que O est un ouvert de X. $\square$

Proposition 1.3.4.

Soit (X, d) un espace métrique. La famille des ouverts de (X, d) vérifie les propriétés suivantes :

1. *ϕ et X sont des ouverts de X.*
2. *Une réunion quelconque d'ouverts est encore un ouvert.*
3. *Une intersection finie d'ouverts est encore un ouvert.*

Corollaire 1.3.9.

Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'un ensemble $O \subseteq X$ est ouvert pour la distance d si et seulement si O est une réunion de boules ouvertes.

Définition 1.3.10.

Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'un ensemble $C \subseteq X$ est fermé dans X s'il vérifie la propriété suivante : chaque fois qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C converge dans X, sa limite appartient encore à C.

Proposition 1.3.5.

Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'un ensemble $C \subseteq X$ est fermé si et seulement si son complémentaire $X \setminus C$ est ouvert.

Corollaire 1.3.11.

Une intersection quelconque de fermés est un fermé, une réunion finie de fermés est un fermé.

1.4 Espaces métriques asymétriques

Définition 1.4.1.

Une application $d_a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une métrique asymétrique (par fois appelée un quasi-métrique) et (X, d_a) est un espace métrique asymétrique si :

1. *Pour tout $x, y \in X$, $d_a(x, y) \geq 0$ et $d_a(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.*
2. *Pour tout $x, y, z \in X$, $d_a(x, z) \leq d_a(x, y) + d_a(y, z)$.*

Définition 1.4.2.

La topologie à droit τ_+ induit par d_a est la topologie générée par les boules ouvertes à droit

$$\mathbf{B}^+(x, \varepsilon) = \{y \in X / d_a(x, y) < \varepsilon\} \text{ pour } x \in X, \ \varepsilon > 0.$$

Également, la topologie à gauche τ_- induit par d_a est la topologie générée par les boules ouvertes à gauche

$$\mathbf{B}^-(x, \varepsilon) = \{y \in X / d_a(y, x) < \varepsilon\} \text{ pour } x \in X, \ \varepsilon > 0.$$

Définition 1.4.3.

Un ensemble $S \subset X$ est borné à droit, respectivement borné à gauche, si il existe $x \in X$ et $\varepsilon > 0$ tel que $S \subset \mathbf{B}^+(x, \varepsilon)$, respectivement $S \subset \mathbf{B}^-(x, \varepsilon)$.

Définition 1.4.4.

Un sous-ensemble $S \subset X$ est totalement borné à droit si, pour chaque $\varepsilon > 0$, il peut être recouvré en nombre fini de boules à droit de rayon ε.

Définition 1.4.5.

On suppose (X, d_{a_X}) et (Y, d_{a_Y}) deux espaces métriques asymétriques. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une fonction, on dit que f est continue à droit respectivement continue à gauche à $x \in$

X, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $y \in \mathbf{B}^+(x, \delta)$ respectivement $y \in \mathbf{B}^-(x, \delta)$ implique $f(y) \in \mathbf{B}^+(f(x), \varepsilon)$ respectivement $f(y) \in \mathbf{B}^-(f(x), \varepsilon)$.

Cependant, on note que la continuité uniforme à droit et à gauche est définie de même manière.

Définition 1.4.6.

Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge à droit vers $x_0 \in X$, (resp converge à gauche) vers $x_0 \in X$ si

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} d_a(x_0, x_k) = 0(\text{ resp } \lim_{k\longrightarrow\infty} d_a(x_k, x_0) = 0).$$

On note $x_k \stackrel{a}{\longrightarrow} x_0$ (resp $x_k \stackrel{d}{\longrightarrow} x_0$).

Lemme 1.4.7.

Une fonction $f : X \longrightarrow Y$ est continue à droite à $x \in X$ si et seulement si $x_k \stackrel{d}{\longrightarrow} x$ dans (X, d_{a_X}) implique $f(x_k) \stackrel{d}{\longrightarrow} f(x)$ dans (Y, d_{a_Y}).

La continuité à gauche est définie de même manière.

Définition 1.4.8.

On suppose (X, d_a) est un espace métrique asymétrique. On dit que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ est de

1. *Cauchy à gauche si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $m \geq n \geq N$, $d_a(x_n, x_m) < \varepsilon$.*
2. *Cauchy à droit si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $m \geq n \geq N$ $d_a(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Définition 1.4.9.

Un espace métrique asymétrique (X, d_a) est complet à droit si toute suite de Cauchy à droit a une sous-suite convergente.

Lemme 1.4.10.

Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ converge à droit vers $x_0 \in X$ et converge à gauche vers $y_0 \in X$ alors $x_0 = y_0$.

Corollaire 1.4.11.
Si la convergence à droite d'une suite implique la convergence à gauche, la limite droit est unique.

Proposition 1.4.1.
Supposons $d_a(y,x) \leq c(x,y)d_a(x,y)$ *pour tout* $x, y \in X$*, où* $c : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfait à la contrainte suivante :*

$$\forall x \in X,\ \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } y \in \mathbf{B}^{+}(x,\varepsilon) \implies c(x,y) \leq C(x),$$

où C *est une fonction qui ne dépend que de* x*.*

Dans ce cas, l'existence de limites à droit implique l'existence de limites à gauche et les limites sont donc uniques.

Chapitre 2

Espaces compacts

Dans ce chapitre on donne quelques généralités et notions de compacité, compacité locale, et compacité d'un produit.

2.1 Espaces compacts

Définition 2.1.1.

Soit X un espace topologique et A une partie de X. Un recouvrement de A est une famille $(U_i)_{i\in I}$ de parties de X vérifiant $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$.

Un recouvrement est dit fini s'il est formé seulement d'un nombre fini de parties de X.

Un recouvrement est dit ouvert si toutes les parties appartenant à ce recouvrement sont des ouverts de X.

Un sous-recouvrement d'un recouvrement $\{U_i, i \in I\}$ est une partie $\{U_i, i \in J\}$ où $J \subset I$.

Exemple 2.1.1.

1. $(U_a)_{a\in A}$ *avec* $U_a = \{a\}$ *est un recouvrement de* A.
2. $\{[-n, n],\ n \in \mathbb{N}\}$ *et* $\{]-n, n],\ n \in \mathbb{N}\}$ *sont des recouvrements de* $\mathbb{R}$.

3. $\{]0, 1 - \frac{1}{n}[,\ n \geq 2\}$ *est un recouvrement ouvert de* $]0, 1[$.

Définition 2.1.2.

Soit X un espace topologique et A une partie de X. On dit que A est compact si de tout recouvrement ouvert de A on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Exemple 2.1.2.

1. *$\mathbb{R}$ n'est pas compact car $\{]-n, n[,\ n \in \mathbb{N}\}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$, mais tout sous-recouvrement est de la forme $\{]-n_1, n_1[,\ ]-n_2, n_2[,\ \ldots,\ ]-n_r, n_r[\}$ dont la réunion est $]-N, N[$, $N = \max(n_1, n_2, \ldots, n_r)$, et $\mathbb{R} \not\subseteq\ ]-N, N[$.*

2. *Tout espace topologique fini est compact.*

   En effet, si X est fini alors $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $\{U_i,\ i \in I\}$ est un recouvrement ouvert de X, i.e., $X \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, alors $\forall x \in X$, il existe $i_x \in I$ tel que $x \in U_{i_x}$.

   L'ensemble$\{\ i_x : x \in X\} = J \subset I$est fini et la famille $\{U_i\}_{i \in I}$ recouvre X.

Théorème 2.1.3. *(Heine)*

Tout intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ est compact.

Propriétés 2.1.1.

1. *Valeurs d'adhérence d'une suite :*

   Toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans un espace compact X possède une valeur d'adhérence. Soit en effet $F_n = \overline{\{x_m; m \geq n\}}$. Les F_n sont des parties fermées de X, et tout sous-famille finie extraite de la famille de parties (F_n) est d'intersection non vide, donc l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui n'est autre que $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$, est non vide.

2. *Parties fermées d'un compact :*

   Toute partie fermée Y d'un espace compact X est compact, car les fermés de Y sont aussi des fermés de X.

3. *Parties compactes d'un séparé :*

   Toute partie compacte K d'un espace topologique séparé X est fermée. En effet, soit x un point adhérent à K . Tous les voisinages fermés de x rencontrent

K, et leurs intersections avec K forment une famille de parties fermées de K dont toute sous-famille finie a une intersection non vide. Donc l'intersection de tous les voisinages fermés de x, qui n'est autre que $\{x\}$, puisque X est séparé, rencontre K. En d'autres termes, $x \in K$, donc K est fermé.

4. *Réunions finies et intersections de parties compactes :*

   Dans un espace topologique séparé, toute intersection de parties compactes est compacte, et toute réunion finie de parties compactes est compacte.

5. *Parties compactes de $\mathbb{R}$:*

   D'après le théorème de Heine et les propriétés ci-dessus, les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées et bornées.

Définition 2.1.4.

Soit X un espace métrique asymétrique. Un ensemble $S \subset X$ est compact, si toute recouvrement ouvert de S dans la topologie à droit a un sous-recouvrement finie.

On dit que S est séquentiellement compact à droit si toute suite à droit a une sous-suite convergente avec limite dans S, finalement, $S \subset X$ est complet à droit si toute suite de Cauchy à droit est convergent à droit.

Notons qu' il existe une définition à gauche dans chaque cas, qui est obtenu en remplaçant "à droit" par "à gauche" dans chaque définition.

Lemme 2.1.5.

Un ensemble S compact à droit est séquentiellement compact à droit.

Lemme 2.1.6.

Soit $d_a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une métrique asymétrique . Si (X, d_a) est séquentiellement compact à droit et $x_n \xrightarrow{a} x$, alors $x_n \xrightarrow{d} x$.

Proposition 2.1.1.

Si (X, d_a) est séquentiellement compact à droit et totalement borné à droit, alors X est compact à droit.

Proposition 2.1.2.

Si (X, d_a) est séquentiellement compact, et si la convergence à droit implique la convergence à gauche, alors X est totalement borné à droit.

Proposition 2.1.3.

Un espace métrique asymétrique (X, d_a) est compact à droit si et seulement si il est complet à droit et totalement borné à droit.

Démonstration.

Si X est compact à droit, il est séquentiellement compact par lemme (2.1.5).

En particulier, toute suite de Cauchy à droit a une sous-suite convergent à droit, donc d'après la définition (1.4.9), l'espace X est complet à droit. Totalement borné suit parce que toute recouvrement de X par des $\varepsilon - boules$ à droit a un sous-recouvrement fini.

Inversement, soit X est complet à droit et totalement borné. Nous prouverons X est séquentiellement compact, par la proposition (2.1.1) implique une compacité à droit.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite en X. Première recouvrement X avec un nombre fini de boules de rayon 1 une de ces boules, dire $\mathbf{B_1}$, dire contient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour un nombre infini de valeurs de n. Soit $J_1 \subset \mathbb{N}$, les indices n pour les quels $x_n \in \mathbf{B_1}$.

Maintenant $\mathbf{B_1}$ est totalement borné, on peut donc le recouvrir finalement de plusieurs boules de rayon $\frac{1}{2}$. Au moins une de ces boules, dire $\mathbf{B}_2$, contient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour un nombre infini de valeurs de n dans J_1.

En procédant de maniéré itérative, on peut définir une suite décroissante de boules $\mathbf{B_1} \supset \mathbf{B_2} \supset \mathbf{B_3} \cdots$ et ensemble correspondants

$$J_{k+1} = \{n/n \in J_k, x_n \in \mathbf{B_{k+1}}\}.$$

Choisissons $n_1 \in J_1$. Soit n_k, choisissons $n_{k+1} \in J_{k+1}$ tel que $n_{k+1} > n_k$. Alors $x_{n_j} \in \mathbf{B_j}$ pour chaque $j \in \mathbb{N}$.

Soit y_j le centre de $\mathbf{B_j}$, donc $\mathbf{B_j}= \mathbf{B}^+(y_j, \frac{1}{j})$. Maintenant $d(y_j, y_{j+1}) < \frac{1}{j}$, comme $j \longrightarrow \infty$.

Ainsi, pour $j \leq k$, $d_a(y_j, y_k) \longrightarrow 0$, comme $j \longrightarrow \infty$. Puisque X est complet, $y_k \xrightarrow{a} y \in X$ comme $k \longrightarrow \infty$.

Enfin,

$$d_a(y, x_{n_j}) \leq d_a(y, y_j) + d_a(y_j, x_{n_j}) \longrightarrow 0 \text{ comme } j \longrightarrow \infty.$$

Donc $x_{n_j} \xrightarrow{a} y \in X$, nous avons trouvé un convergent à droit sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, prouvant la séquentielle compacité à droit. $\square$

2.2 Applications continues sur un compact

Théorème 2.2.1.

a) Soient (X, τ) un espace topologique, (Y, τ') un espace séparé et A une partie compacte de X. L'image $f(A)$ de A par une application continue $f : X \longrightarrow Y$ est compacte.

b) Si deux espaces sont séparés et si f et f^{-1} sont continues, une partie fermée A de X est compacte si son image $f(A)$ l'est.

Démonstration.

1. Considérons un recouvrement ouvert de $f(A)$,

$$f(A) \subset \bigcup_{i\in I} W_i, \ W_i \in \tau'.$$

On a

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\bigcup_{i\in I} W_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(W_i).$$

Comme f est continue, alors $f^{-1}(W_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de A dans Y, celui-ci étant compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini,

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(W_{i_j}) = f^{-1}(\bigcup_{j=1}^{n} W_{i_j}),$$

donc

$$f(A) \subset f[f^{-1}(\bigcup_{j=1}^{n} W_{i_j})] \subset \bigcup_{j=1}^{n} W_{i_j}.$$

D'où $(W_{i_j})_{j=\overline{1,n}}$ est sous recouvrement ouvert fini de $f(A)$, alors $f(A)$ est compact.

2. Si $f(A)$ est compact, $(f^{-1} \circ f)(A) = f^{-1}(f(A))$ est compact d'après a), A est une partie fermée de $f^{-1}(f(A))$ car ce dernier est fermé dans X donc A est compact. □

Corollaire 2.2.2.

Une application f bijective continue d'un espace compact X dans un espace séparé Y est un homéomorphisme.

Corollaire 2.2.3.

Dans un espace compact, une suite converge si et seulement si, elle admet une seule valeur d'adhérence.

Corollaire 2.2.4.

Soient X un espace compact et Y un espace séparé. Alors toute application $f : X \longrightarrow Y$ est fermée.

Théorème 2.2.5.

Soient X et Y deux espaces métriques. Si X est compact, alors toute application continue $f : X \longrightarrow Y$ est uniformément continue.

Démonstration.

Supposons que X est un compact, et fixons $f : X \longrightarrow Y$ continue. Par l'absurde, supposons que f ne soit pas uniformément continue. Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ et deux suites $(x_n), (y_n) \subseteq X$ tels que $d(x_n, y_n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, mais $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme X est compact, on peut supposer que la suite (x_n) converge vers un point $a \in X$. Alors (y_n) converge également vers a puisque $d(x_n, y_n)$ tend vers 0. Comme f est continue en a, les suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ doivent converger toutes les deux vers $f(a)$, et donc $d(f(x_n), f(y_n))$ doit tendre vers 0, ce qui contredit l'hypothèse faite. □

2.3 Espaces localement compacts

Définition 2.3.1.

Un espace topologique est dit localement compact s'il est séparé et si chacun de ses *points admet un voisinage compact,*

$$\forall x \in X, \ \exists V \in \mathcal{V}(x)/V \, compact.$$

Exemple 2.3.1.

1. *Tout espace topologique compact X est localement compact car X est un voisinage compact de chacun de ses point.*
2. *$\mathbb{R}$ est localement compact car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intervalle $[x-1, x+1]$ est un voisinage compact de x.*

Propriétés 2.3.1.

Les parties ouvertes et les parties fermées d' un espace localement compact sont localement compactes.

Propriétés 2.3.2.

Dans un espace séparé, l'intersection de deux parties localement compactes est localement compacte. Par contre, la réunion de deux parties localement compactes n'est en général pas localement compacte.

Propriétés 2.3.3.

Tout produit des espaces localement compact est localement compact.

Exemple 2.3.2.

$\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont localement compacts car $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont localement compacts.

Définition 2.3.2.

Soit (X, τ) un espace topologique. On dit qu'un sous-ensemble $A \subseteq X$ est relativement compact dans X si $\bar{A}$ est un compact de X. Par exemple, l'intervalle $]0, 1[$ est relativement compact dans $\mathbb{R}$, mais il n'est pas compact.

Définition 2.3.3.

Soit X un espace métrique asymétrique. On dit que S est relativement compact à droit si $\overline{S}$ compact à droit, où $\overline{S}$ dénote la fermeture dans la topologie à droit.

2.4 Produit de compacts

Proposition 2.4.1.
Si $X_1, \ldots, X_k$ sont des espaces topologiques compacts, alors l'espace produit $X = X_1 \times \cdots \times X_k$ est compact.

Démonstration.
Par récurrence, il suffit de traiter le cas $k = 2$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $X = X_1 \times X_2$; on écrit $x_n = (x_{n,1}, x_{n,2})$. Comme X_1 est compact, la suite $(x_{n,1})$ possède une sous-suite convergente : on peut donc trouver une sous-suite (x'_n) de (x_n) telle que la suite $(x'_{n,1})$ converge dans X_1. De même, comme X_2 est compact, on peut trouver une sous-suite (x''_n) de (x'_n) telle que la suite $(x''_{n,2})$ converge dans X_1 , alors la suite $(x''_{n,1})$ converge dans X_1 car elle est extraite de $(x'_{n,1})$.

Ainsi, la suite (x''_n) converge, autrement dit converge dans l'espace produit X. □

Théorème 2.4.1. *(Tychonoff)*
Tout produit fini ou non d'espaces compacts est compact. Inversement, si le produit fini d'espaces est compact chacun d'eux est compact.

Démonstration.
Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces compacts alors, pour tout $i \in I$, X_i est séparé et de tout recouvrement par des ouverts de X_i on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Montrons que $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ est séparé. D'après la proposition (1.2.14), X est séparé

Soit maintenant $(U_j)_{j\in J}$ un recouvrement de X par des ouverts de X, alors $X \subset \bigcup\limits_{j\in J} U_j$ et $\forall j \in J, U_j = \prod\limits_{i\in I} U_{i,j}$, avec $U_{i,j}$ ouvert de X_i, donc

$$\prod_{i\in I} X_i \subset \bigcup_{j\in J}\prod_{i\in I} U_{i,j} \implies \prod_{i\in I} X_i \subset \prod_{i\in I}\bigcup_{j\in J} U_{i,j}.$$

$(U_{i,j})_{j\in J}$ recouvre X_i pour tout i dans I et comme les ensembles X_i sont compacts alors $\forall i \in I, \exists n_i$ tel que $X_i \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n_i} U_{i,j}$. En prenant $k = \max\limits_i(n_i)$, on obtient

$$\prod_{i\in I} X_i \subset \prod_{i\in I}\bigcup_{j=1}^{k} U_{i,j},$$

c'est à dire,

$$\prod_{i\in I} X_i \subset \bigcup_{j=1}^{k}\prod_{i\in I} U_{i,j},$$

et donc, $(\prod\limits_{i\in I} U_{i,j})_{1\leq j\leq k}$ est recouvrement fini par des ouverts de X. D'où, X est compact.

Inversement, supposons $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ compact, et tous les X_i non vides, on sait alors que pour tout $b \in \prod\limits_{i\neq k} X_i$, l'application

$$\begin{aligned} f : X_k &\longrightarrow X_k \times \{b\} \\ x &\longmapsto f(x) = (x, b). \end{aligned}$$

f est aussi bijective. En effet

$$\forall x, y \in X_k, f(x) = f(y) \implies (x, b) = (y, b) \implies x = y \implies f \text{ est injective.}$$

$$\forall y \in X_k \times \{b\}, \exists x \in X_k, \text{ tel que } y = (x, b) = f(x) \implies f \text{ est surjective.}$$

Et f une application continue et f^{-1} est continue.

Donc f est un homéomorphisme de X_k dans $X_k \times \{b\}$. Comme $\prod\limits_{i\in I} X_i$ est compact, alors $\prod\limits_{i\in I} X_i$ est fermé, et car tous les X_i sont non vides alors tous les X_i sont fermés.

D'où, $\forall k \in I, X_k \times \{b\}$ est fermé dans un compact, et donc est compact. f étant un homéomorphisme, alors X_k est aussi compact pour tout k. □

2.5 Espaces précompacts

Définition 2.5.1.

Soit (X, d) un espace métrique. On dit que (X, d) est précompact si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille $(B_i)_{i\in I}$ recouvrant X et $\forall i \in I$, $diam(B_i) < \varepsilon$.

Rappelons que le diamètre de $A \subset X$ est défini par, $diam(A) = \sup\limits_{x,y\in A} d(x, y)$.

Proposition 2.5.1.

Un espace métrique précompact est séparable.

Proposition 2.5.2.

Soient X, Y *deux espaces métriques et* $f : X \longrightarrow Y$ *une application uniformément continue. Alors l'image par* f *de toute partie précompacte de* X *est une partie précompacte de* Y.

Proposition 2.5.3.

Dans un espace métrique, toute partie relativement compacte est précompacte.

Chapitre 3

L'espace $C(X, Y)$ des fonctions continues

Dans ce chapitre, on va exposer les différentes topologies définies sur l'espace des fonctions continues $C(X, Y)$. Dans la première section on traite la topologie de la convergence simple, dans la deuxième section la topologie de la convergence uniforme, et dans la troisième section la topologie de la convergence compacte.

3.1 Topologie de la convergence simple

Soient X, Y deux espaces topologiques, et $Y^X = \{f / f : X \longrightarrow Y\}$, l'ensemble des applications définies de X dans Y. Alors Y^X sera identifie avec le produit $\prod_{x \in X} Y_x$ avec $Y_x = Y$ pour tout $x \in X$.

L'ensemble de toutes les applications continues de X dans Y est noté par $C(X, Y)$.

Soient $A \subset X$ et $B \subset Y$, on note

$$[A, B] = \{f \in C(X, Y) : f(A) \subset B\}.$$

Si $A = \{x\}$, on écrit $[x, B]$ au lieu de $[\{x\}, B]$.

Définition 3.1.1.
La famille $\mathcal{B}_p = \{\bigcap_{i=1}^{n}[x_i, U_i],\ x_i \in X \text{ et } U_i \in \tau_Y\}$ *forme une base pour une topologie sur* $C(X,Y)$ *appelée la topologie de la convergence simple sur* $C(X,Y)$, *qu'on note* τ_p *et l'espace topologique obtenu sera noté* $C_p(X,Y)$.

Proposition 3.1.1.

1. $[\bigcup_{i=1}^{n} A_i, U] = \bigcap_{i=1}^{n}[A_i, U]$.
2. $[A, \bigcap_{i=1}^{n} U_i] = \bigcap_{i=1}^{n}[A, U_i]$.

Démonstration.

1.
$$\begin{aligned}
[\bigcup_{i=1}^{n} A_i, U] &= \{f \in C(X,Y) : f(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \subset U\} \\
&= \{f \in C(X,Y) : \bigcup_{i=1}^{n} f(A_i) \subset U\} \\
&= \{f \in C(X,Y) : f(A_i) \subset U, \forall i = 1,2,...,n\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n}\{f \in C(X,Y) : f(A_i) \subset U\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n}[A_i, U].
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
[A, \bigcap_{i=1}^{n} U_i] &= \{f \in C(X,Y) : f(A) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i\} \\
&= \{f \in C(X,Y) : f(A) \subset U_i, \forall i = \overline{1,n}\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n}\{f \in C(X,Y) : f(A) \subset U_i\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n}[A, U_i].
\end{aligned}$$
□

Proposition 3.1.2. *Soit* $x \in X, U \subset Y$ *et* P_x *l'application projection :*

$$\begin{aligned}
P_x : Y^X &\longrightarrow Y \\
f &\longmapsto P_x(f) = f(x).
\end{aligned}$$

Alors, on a $C(X,Y) \cap P_x^{-1}(U) = [x, U]$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} f \in C(X,Y) \cap P_x^{-1} &\iff f \in C(X,Y) \wedge f \in P_x^{-1}(U) \\ &\iff f \in C(X,Y) \wedge P_x(f) \in U \\ &\iff f \in C(X,Y) \wedge f(x) \in U \\ &\iff f \in [x,U]. \end{aligned}$$

□

Définition 3.1.2.

La topologie τ_p coïncide avec la topologie induite sur $C(X,Y)$ par la topologie produit de Y^X.

Proposition 3.1.3.

Soient X, Y deux espaces topologiques, et $\mathcal{B}_Y$ une base de Y. Alors

$$\mathcal{B}_p = \{\bigcap_{i=1}^{k}[x_i, U_i], x_i \in X, U_i \in \mathcal{B}_Y\},$$

est une base de $C_p(X,Y)$.

Théorème 3.1.3.

Soient X ,Y deux espaces topologiques. L'espace $C_s(X,Y)$, muni de la topologie de la convergence simple, est compact si et seulement si, Y est compact. Si Y est séparé, une partie A de $C_s(X,Y)$ est relativement compacte si et seulement si, pour tout $x \in X$, l'ensemble

$$\mathcal{F}(x) = pr_x(\mathcal{F}) = \{f(x), f \in \mathcal{F}\},$$

est relativement compact dans Y.

3.2 Topologie de la convergence uniforme sur $C(X,Y)$

Définition 3.2.1.

Soit X un espace topologique, et (Y,d) un espace métrique. On dit qu'une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y^X$ converge uniformément vers une fonction f si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X, \forall n \geq \delta : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Ou d'une manière équivalente, si $\lim_{n\longrightarrow\infty}\sup d(f_n(x),f(x))=0$. *On écrit dans ce cas* $\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n = f$.

Définition 3.2.2.

Soit $A \subset C(X,Y)$, $f \in C(X,Y)$. *On définit l'ensemble* $\overline{A}$ *comme suit : $f \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tel que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, i.e.,*

$$f \in \overline{A} \iff \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A : f = \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n.$$

Proposition 3.2.1.

1. $\overline{\phi} = \phi$.
2. $A \subset \overline{A}$.
3. $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.
4. $\overline{A\bigcup B} = \overline{A}\bigcup\overline{B}$.
5. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Démonstration.

1. évident.
2. Soit $f \in A$. Si on prend $f_n = f$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f_n converge uniformément vers f et donc par définition $f \in \overline{A}$.
3. Supposons que $A \subset B$. Soit $f \in \overline{A}$, alors il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ telle que (f_n) converge uniformément vers f, mais $A \subset B$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ et (f_n) converge vers f. D'où $f \in \overline{B}$.
4. On a $\overline{A} \subset \overline{A\cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A\cup B}$. D'où $\overline{A}\cup\overline{B} \subset \overline{A\cup B}$.

   Soit maintenant $f \in \overline{A\cup B}$; alors il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A\cup B$ telle que (f_n) converge uniformément vers f. Dans l'un des deux ensembles A et B, par exemple A, il existe une sous-suite $(f_{n_i})_{n_i\in\mathbb{N}}$ de (f_n) telle que $(f_{n_i})_{n_i\in\mathbb{N}} \subset A$. Par définition de la convergence uniforme, on a

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in X, \forall i \geq \delta : d(f_{n_i}(x), f(x)) < \varepsilon,$$

c'est-à-dire (f_{n_i}) converge uniformément vers f ce qui implique que $f \in \overline{A}$. Donc $f \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

5. On a $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. Il suffit donc de montrer que $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. Soit $f \in \overline{\overline{A}}$. Alors il existe une suite de fonctions $(f_n) \subset \overline{A}$ telle que (f_n) converge uniformément vers f. Pour $\varepsilon = \frac{1}{2k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\exists \delta > 0, \forall n \geq \delta, \forall x \in X : d(f_n(x), f(x)) < \frac{1}{2k}.$$
Prenons $n(k) > \delta$, alors
$$d(f_{n(k)}(x), f(x)) < \frac{1}{2k},$$
i.e.,
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists n(k) : d(f(x), f_{n(k)}(x)) < \frac{1}{2k}, \forall x \in X.$$
Puisque $f_{n(k)} \in \overline{A}$, alors $f_{n(k)} = \lim\limits_{i \longrightarrow \infty} g_i^k$ où $(g_i^k) \subset A$. Donc
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' \in \mathbb{N}^*, \forall i \geq \delta' : d(f_{n(k)}(x), g_i^k(x)) < \varepsilon,$$
pour $\varepsilon = \frac{1}{2k}$
$$\exists \delta', \forall i \geq \delta' : d(f_{n(k)}(x), g_i^k(x)) < \frac{1}{2k}.$$
Prenons $i = i(k) \geq \delta'$, alors
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists i(k) \in \mathbb{N}^* : d(f_{n(k)}(x), g_i^k(x)) < \frac{1}{2k}.$$
Il existe $i(k) \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$d(f_{n(k)}(x), g_i^k(x)) < \frac{1}{2k}, \forall x \in X.$$
Prenons $g_k = g_{i(k)}^k \in A$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, alors
$$\forall k \in \mathbb{N}^* : d(f(x), g_k(x)) < \frac{1}{k}, \forall x \in X.$$
Donc (g_k) converge uniformément vers f, d'où $f \in \overline{A}$. Alors on obtient $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. Donc $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. □

Proposition 3.2.2.

La famille $\tau_u = \{W \subset C(X,Y) : \overline{C^W} = C^W\}$ est une topologie sur $C(X,Y)$, appelée la topologie de la convergence uniforme sur $C(X,Y)$. On note $C_u(X,Y)$ l'espace topologique $C(X,Y)$ muni de la topologie τ_u.

Proposition 3.2.3.

Soit X un espace topologique et (Y, d) un espace métrique. Alors, la topologie de la convergence simple sur $C(X, Y)$ est moins fine que la topologie de la convergence uniforme, i.e., $\tau_p \subset \tau_u$ et on écrit :

$$C_p(X, Y) = C_p(X) \leq C_u(X, Y) = C_u(X).$$

Démonstration.

On a $\tau_p \subset \tau_u$ si et seulement si l'application identique $id : C_u(X, Y) \longrightarrow C_p(X, Y)$ est continue, ce qui est équivalent à $id(\overline{F}) \subset \overline{id(F)}$, pour tout $F \subset C(X, Y)$.

Soit $F \subset C(X, Y)$. Notons par $\overline{F}^u$ la fermeture de F par rapport à τ_u et $\overline{F}^p$ la fermeture de F par rapport à τ_p, donc on va montrer que $\overline{F}^u \subset \overline{F}^p$, $\forall F \subset C(X, Y)$.

Soit $f \in \overline{F}^u$. On a

$$f \in \overline{F}^p \iff \forall U \in \mathcal{V}_p(f) : U \cap F^p \neq \phi.$$

Soit $U \in \mathcal{V}_p(f)$, alors

$$U = C(X, Y) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} P_{x_i}^{-1}(U_i)),$$

où U_i est un ouvert de Y, pour tout $i = \overline{1, n}$. Comme U_i est un ouvert de Y, alors

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ B(f(x_i), \varepsilon_0) \subset U_i, \forall i.$$

D'autre part $f \in \overline{F}^u$ donc

$$\exists (f_n) \subset F : f = \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n.$$

D'où

$$\exists j \in \mathbb{N}^* : d(f(x), f_j(x)) < \varepsilon_0,\ \forall x \in X.$$

En particulier,

$$d(f_j(x_i), f(x_i)) < \varepsilon_0 \implies f_j(x_i) \in B(f(x_i), \varepsilon_0) \subset U_i.$$

Donc

$$f_j \in C(X,Y) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} P_{x_i}^{-1}(U_i)) = U \implies f_j \in U \cap F^p \implies U \cap F^p \neq \phi.$$

D'où $f \in \overline{F^p}$. □

3.3 Topologie de la convergence compacte

Définition 3.3.1.

Soit (Y,d) un espace métrique et X un espace topologique. Étant donné un élément f de Y^X, un sous-espace compact K de X et un nombre $\varepsilon > 0$. Soit

$$B(K,f,\varepsilon) = \{g \in Y^X / \sup_{x \in K} d(f(x),g(x)) < \varepsilon\}.$$

Les ensembles $B(K,f,\varepsilon)$ constituent une base pour une topologie sur Y^X, noté τ_c. C'est ce qu'on appelle la topologie de la convergence compacte (ou parfois la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles compacts).

La topologie de la convergence compacte diffère de la topologie de la convergence simple en ce que l'élément de base général contenant f est constitué de fonctions qui sont proches de f pas seulement à des points précis, mais à tous les points d'un ensemble compact. La justification du choix de la terminologie provient du théorème suivant.

Théorème 3.3.2.

Une suite $f_n : X \to Y$ de fonctions converge vers la fonction f dans la topologie de la convergence compacte si et seulement si, pour tout sous-espace compact K de X, la suite $f_n|_K$ converge uniformément vers $f|_C$.

Définition 3.3.3.

On dit qu'un espace X est généré de manière compacte s'il satisfait la condition suivante : Un ensemble A est ouvert dans X si $A \cap K$ est ouvert dans K pour tout sous-espace compact K de X.

Cette condition équivaut à dire qu'un ensemble B soit fermé dans X si $B \cap K$ est fermé dans K pour tout compact K.

Lemme 3.3.4.
Si X est localement compact ou si X satisfait le premier axiome de dénombrabilité (i.e., tout point de X admet un système fondamental de voisinages, qui est dénombrable), X est généré de manière compacte.

Lemme 3.3.5.
Si X est généré de manière compacte, une fonction $f : X \to Y$ est continue si, pour tout sous-espace compact K de X, la fonction restreinte $f|_K$ est continue.

Théorème 3.3.6.
Soit X un espace généré de manière compacte et (Y, d) un espace métrique. Alors $C(X, Y)$ est fermé dans Y^X dans la topologie de la convergence compacte.

Corollaire 3.3.7.
Soit X un espace généré de manière compacte et (Y, d) un espace métrique. Si une suite de fonctions continues $f_n : X \to Y$ converge vers f dans la topologie de la convergence compacte, alors f est continue.

Nous avons maintenant trois topologies dans l'espace de fonctions Y^X lorsque Y est métrique. La relation entre eux est énoncée dans le théorème suivant.

Théorème 3.3.8.
Soit X un espace topologique et (Y, d) un espace métrique. Pour l'espace de fonctions Y^X, on a les inclusions de topologies suivantes : $\tau_p \subset \tau_c \subset \tau_u$.

Si X est discret, les deux premiers coïncident, et si X est compact, les deux autres coïncident.

Chapitre 4

Théorème d'Ascoli-Arzelà

Dans ce chapitre nous avous essayé de rassembler quelques théorèmes d'Ascoli-Arzelà qui existent dans la littérature. Ces théorèmes sont d'une grande importance dans l'analyse fonctionnelle. Dans la première section nous avons présenté les énoncés des théorèmes d'Ascoli-Arzelà avec leurs démonstration donnés dans des espaces topologiques. La deuxièmes section est consacrée au théorème d'Ascoli-Arzelà dans un espace métrique asymétrique.

Les résultats de ce chapitre ont été pris de référence [2], [6] et [8].

Définition 4.0.1.

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et A une famille d'applications continues de X dans Y. A est dite équicontinu en $x \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in A, \forall x' \in X, d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

A est dite uniformément équicontinu si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in A, \forall x, x' \in X, d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

4.1 Cas d'un espace topologique

Théorème 4.1.1.
Soient X un espace topologique et Y un espace semi-métrique. Sur un ensemble équicontinu $\mathcal{F}$ d'applications de X dans Y, les structures semi-métrique de la convergence simple sur un sous-ensemble dense X_0 de X, de la convergence simple sur X, et de la convergence uniforme sur toute partie compact de X, sont uniformément équivalentes.

Théorème 4.1.2. *(Ascoli-Arzelà)*
Soient X un espace topologique, Y un espace semi-métrique, et $\mathcal{F}$ un sous-ensemble d'applications continues de X dans Y. Pour que $\mathcal{F}$ soit relativement compact dans $C(X,Y)$ (muni de la topologie de la convergence compacte), il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1. *$\mathcal{F}$ est équicontinu,*
2. *pour tout $x \in X$, l'ensemble $\mathcal{F}(x) = \{f(x), f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans Y.*

Si X est localement compact, ces condition sont aussi nécessaires.

Démonstration.
$\Longrightarrow$) La démonstration de ce théorème, à été pris de la référence [6].

Supposons que les conditions (1) et (2) sont vérifiées, et montrons que $\mathcal{F}$ est relativement compact. Nous avons, $\forall x \in X$, $\overline{\mathcal{F}(x)}$ est un compact dans Y.

D'après le théorème de Tychonoff, $\prod\limits_{x\in X} \overline{\mathcal{F}(x)}$ est compact.

Posons

$$A = \{f \in \mathcal{A}(X,Y), \forall x \in X, f(x) \in \overline{\mathcal{F}(x)}\}.$$

A est un ensemble compact de $\mathcal{A}(X,Y)$. En effet, soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un recouvrement ouvert de A, i.e., $A \subset \bigcup\limits_i U_i$.

Soient $x \in X$, $f \in A$ et $f \in \bigcup\limits_i U_i$ alors il existe $i_0 \in \mathbb{N}$, tel que $f(x) \in \overline{\mathcal{F}(x)}$ et

$f(x) \in U_{i_0}(x)$.

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{F}(x)} \subset U_{i_0}(x) &\implies \prod_{x\in X} \overline{\mathcal{F}(x)} \subset \prod_{x\in X} U_{i_0}(x), \forall x \in X \\
&\implies \prod_{x\in X} \overline{\mathcal{F}(x)} \subset \bigcup_i \prod_{x\in X} U_{i_0}(x) \\
&\implies (\prod_{x\in X} U_{i_0}(x))_i \text{est un recouvrement ouvert de} \prod_{x\in X} \overline{\mathcal{F}(x)},
\end{aligned}$$

et donc on peut extraire un sous-recouvrement fini, i.e., il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\prod_{x\in X} \overline{\mathcal{F}(x)} \subset \bigcup_{j=1}^{n} \prod_{x\in X} U_{i_j}(x) = \prod_{x\in X} \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}(x),$$

c'est à dire, $\overline{\mathcal{F}(x)} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{i_j}(x)$, pour tout $x \in X$.

D'où

$$\begin{aligned}
f(x) \in \overline{\mathcal{F}(x)} &\implies f(x) \in \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}(x) \\
&\implies f \in \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \\
&\implies A \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \\
&\implies (U_{i_j})_{j=\overline{1\ldots n}} \text{ est un recouvrement fini de A,}
\end{aligned}$$

et par conséquent A est un compact dans $\mathcal{A}(X,Y)$.

D'autre part, nous avons, $\mathcal{F} \subset A$ car $\forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in X$, $f(x) \in \mathcal{F}(x) \subset \overline{\mathcal{F}(x)} \implies f \in A$.

Montrons maintenant que A est fermé. Remarquons que, l'espace fonctionnel $\mathcal{A}(X,Y)$ défini par les semi-distances

$$\delta_{j,A}(f,g) = \max_{x\in A} \delta_j(f(x), g(x)) \text{ A partie fini de X,}$$

est séparé. Comme A est compact dans $\mathcal{A}(X,Y)$, on déduit que A est fermé.

D'où, $\mathcal{F} \subset A \implies \overline{\mathcal{F}} \subset \overline{A} = A$.

$\overline{\mathcal{F}}$ fermé dans A qui est compact, et donc $\overline{\mathcal{F}}$ est compact dans $A \subset \mathcal{A}(X,Y)$. Par le Théorème (4.1.1), sur $\overline{\mathcal{F}}$ la topologie définie sur $\mathcal{A}(X,Y)$ et la topologie définie sur

$C(X, Y)$ coïncident. Donc $\overline{\mathcal{F}}$ est un compact de $C(X, Y)$, et $\mathcal{F}$ est bien relativement compact dans $C(X, Y)$.

$\Longleftarrow$) On suppose que $\overline{\mathcal{F}}$ est compact dans $C(X, Y)$, et on va montrer que les conditions (1) et (2) sont vérifiées.

Soit $x \in X$, considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi_x : C(X, Y) &\longrightarrow Y \\ f &\longmapsto \varphi_x(f) = f(x). \end{aligned}$$

On notera δ_j la semi-métrique de la convergence uniforme sur $C(X, Y)$,

$$\delta_j(f, g) = \sup_{y \in X} \delta_j(f(y), g(y)).$$

φ_x est clairement 1-lipschitzienne. En effet, on a pour tout $f, g \in C(X, Y)$,

$$\delta_j(\varphi_x(f), \varphi_x(g)) = \delta_j(f(x), g(x)) \leq \sup_{y \in X} \delta_j(f(y), g(y)) = \delta_j(f, g),$$

et donc φ_x est continue sur $C(X, Y)$, par suite $\varphi_x(\overline{\mathcal{F}}) = \overline{\mathcal{F}(x)}$ est un compact de Y, c'est à dire, $\mathcal{F}(x)$ est bien relativement compact dans Y.

Montrons maintenant que $\mathcal{F}$ est équicontinu. Soient K un compact de X. On définit la restriction suivante

$$\begin{aligned} \psi : C(X, Y) &\longrightarrow C(K, Y) \\ f &\longmapsto \psi(f) = f_K, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} f_K : K &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f_K = f(x). \end{aligned}$$

On définit sur K les semi-distances $(\delta_{j,K})_{j \in J}$ telles que $(\delta_j)_{j \in J}$ sont les semi-distances sur Y. En effet, on notera $\delta_{j,K}$, la semi-métrique de la convergence uniforme sur $C(K, Y)$.

$$\delta_{j,K}(f, g) = \sup_{x \in K} \delta_j(f(x), g(x)).$$

ψ continue sur $C(X,Y) \iff \forall f \in C(X,Y)$, ψ continue au point f, c'est à dire, on doit montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall g \in C(X,Y), \delta_j(f,g) < \eta \implies \delta_{j,K}(\psi(f), \psi(g)) < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $g \in C(X,Y)$. Alors

$$\delta_{j,K}(f,g) < \varepsilon \implies \sup_{x \in K} \delta_j(f(x), g(x)) < \varepsilon.$$

D'autre part, $\sup_{x\in K} \delta_j(f(x), g(x)) \leq \sup_{x \in X} \delta_j(f(x), g(x))$, et donc il suffit de prende $\eta = \varepsilon$.

ψ est donc continue au point f, ce qui implique que ψ est continue sur $C(X,Y)$.

Alors, $\psi(\overline{\mathcal{F}}) = \overline{\mathcal{F}}_K$ est compact de $C(X,Y)$.

$\forall \varepsilon > 0, \forall j \in J, \forall f_{j,K} \in \overline{\mathcal{F}_K}$:

$$\begin{aligned} f_{j,K} \subset \mathbf{B}_{j,K}(f_{j,K}, \frac{\varepsilon}{3}) &\implies f_{j,K} \subset \bigcup_{f_{j,K \in \overline{\mathcal{F}}_K}} \mathbf{B}_{j,K}(f_{j,K}, \frac{\varepsilon}{3}) \\ &\implies \overline{\mathcal{F}}_K \subset \bigcup_{f_{j,K} \in \overline{\mathcal{F}}_K} \mathbf{B}_{j,K}(f_{j,K}, \frac{\varepsilon}{3}), \end{aligned}$$

et comme $\overline{\mathcal{F}}_K$ est un compact de $C(K,Y)$, on aura

$$\forall j \in J, \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \text{tels que } \overline{\mathcal{F}}_K \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathbf{B}_{j,K}(f_{j,K}, \frac{\varepsilon}{3}).$$

D'où, pour tout $f_{j,K} \in \mathcal{F}_K$, il existe $i \in \overline{1 \ldots n}$, tel que $f_{j,K} \in \mathbf{B}_{i,K}(f_{i,K}, \frac{\varepsilon}{3})$ c'est à dire $\delta_K(f_{i,K}, f_{j,K}) < \frac{\varepsilon}{3}$, et comme un ensemble fini d'applications continues $f_{j,K}$, est toujours équicontinu, on aura $\forall a \in K, \exists U$ voisinage de a dans K, tel que $\forall x \in U$, $\forall j = \overline{1 \ldots n}$, $\delta_j(f_{i,K}(a), f_{j,K}(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$, d'où $\forall x \in U$, $\forall f \in \overline{\mathcal{F}_K}$

$$\begin{aligned} \delta_{j,K}(f(a), f(x)) &\leq \delta_{j,K}(f(a), f_{j,K}(a)) + \delta_{j,K}(f_{j,K}(a), f_{i,K}(x)) + \delta_{j,K}(f_{i,K}(x), f(x)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Cette inégalité montre que l'ensemble $\overline{\mathcal{F}_K}$ de fonctions continues sur K est équicontinu.

Mais celà ne prouve nullement que $\overline{\mathcal{F}}$ soit équicontinu sur X. Si par contre nous supposons que X est localement compact, alors tout point $a \in X$ admet un voisinage compact K dans X. Donc U trouvé plus haut voisinage de a dans K est voisinage de a dans X.

Alors d'après la relation (4.1), $\overline{\mathcal{F}}$ est équicontinu au point a. Ce qui implique que $\mathcal{F}$ est équicontinu en tout point a de X. $\square$

Proposition 4.1.1.
Soient X un espace topologique, Y un espace métrique et $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ un ensemble équicontinu en un point $a \in X$. Alors, l'adhérence $\overline{\mathcal{F}}^s$ de A dans $C_s(X,Y)$ (c'est-à-dire pour la topologie de la convergence simple) est équicontinue au point a.

Proposition 4.1.2.
Soient X un espace topologique compact, Y un espace métrique et $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ un ensemble équicontinu d'applications de X dans Y. Alors, sur $\mathcal{F}$ les topologies de la convergence simple et de la convergence uniforme coïncident.

Théorème 4.1.3. *(Ascoli-Arzelà)*
Soient X un espace compact et Y un espace métrique. Pour qu'une partie $\mathcal{F}$ de $C_u(X,Y)$ soit relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme, il faut et il suffit que les deux conditions qui suivent soient vérifiées :

1. *$\mathcal{F}$ est une partie équicontinue,*
2. *pour tout x de X, l'ensemble $\mathcal{F}(x) = \{f(x); f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans Y.*

Démonstration.
$\Longrightarrow$) La démonstration de ce théorème à été pris de la référence [8].

Supposons que les condition (1) et (2), sont vérifiées et on va montrons que $\mathcal{F}$ est relativement compact, 2. signifie que A est relativement compact pour la topologie τ_s théorème (3.1.3), donc $\overline{\mathcal{F}}^s$ est compact pour la topologie τ_s. D'après la proposition (4.1.1), $\overline{\mathcal{F}}^s$ est une partie équicontinue et la proposition (4.1.2) montre alors que $\overline{\mathcal{F}}^s$

est compact pour la topologie de la convergence uniforme, il en résulte que $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}^s$ est relativement compact pour la topologie de la convergence uniforme.

$\Longleftarrow$) On suppose que $\mathcal{F}$ est compact de $C_u(X,Y)$, et on va montrer que les conditions (1) et (2) sont vérifiées.

Soit $x \in I$, considérons les applications $pr_x : f \longrightarrow f(x)$ de $C_u(X,Y)$ dans Y étant continues, les ensembles $pr_x(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(x)$ sont relativement compacts dans Y.

Montrons que $\mathcal{F}$ est équicontinu en un point a de X, notons d'abord que $\mathcal{F}$ est pré-compact proposition (2.5.3), donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille finie $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ de fonctions appartenant à $\mathcal{F}$ telle que les boules de $\mathcal{F}$, $\mathbf{B}(f_i, \varepsilon)$, $1 \leq i \leq n$, recouvrent $\mathcal{F}$. Une famille finie de fonctions continues étant de toute évidence équicontinue, il existe un voisinage V de a tel que, pour tout $x \in V$ et tout $1 \leq i \leq n$, on ait $d(f_i(x), f_i(a)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Considérons alors une fonction f de $\mathcal{F}$, il existe $i \in [1, n]$ tel que $f \in \mathbf{B}(f_i, \varepsilon)$, on a alors pour tout x de V

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a)) &\leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(a)) + d(f_i(a), f(a)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Et ceci prouve l'équicontinuité de $\mathcal{F}$ au point a. $\square$

Corollaire 4.1.4.

Si X est un espace métrique compact, alors une partie fermée dans $C(X,\mathbb{R})$ est compacte pour $\tau(X,\mathbb{R})$ si et seulement si elle est bornée et équicontinue.

4.2 Cas d'un espace métrique asymétrique

Définition 4.2.1.

Soit (X, d_{a_X}) et (Y, d_{a_Y}) deux espaces métriques asymétriques. Un ensemble $\mathcal{F}$ d'application de X dans Y est équicontinue à droit, respectivement à gauche, si pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in Y$ et tout $f \in \mathcal{F}$ avec $d_{a_X}(x,y) < \delta$, $d_{a_Y}(f(x), f(y)) < \varepsilon$, respectivement $d_{a_Y}(f(y), f(x)) < \varepsilon$.

La métrique uniforme sur Y^X est donnée par

$$\overline{\rho} = \sup\{\overline{d_a}(f(x), g(x))/x \in X\},$$

où $\overline{d_a}(x,y) = min\{d_a(x,y), 1\}$ et d_a est la métrique asymétrique associée à Y. Cette métrique induit la topologie uniforme sur Y^X.

Lemme 4.2.2.

Supposons que (Y, d_a)est un compact à droit, et que la convergence à droit implique la convergence à gauche pour cette métrique. Alors

1. *Si un ensemble $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ est équicontinu à droit, il est également équicontinu à gauche.*
2. *Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y^X$ est convergente uniformément à gauche, elle est convergente uniformément à droit.*

Démonstration.

La compacité à droit implique la séquentiellement compact à droit par lemme (2.1.5) puisque la convergence à droit implique la convergence à gauche, nous savons que l'espace est séquentiellement compact à gauche.

Maintenant, par lemme (2.1.6), nous savons que la convergence à gauche implique la convergence à droit et peut donc conclure, en utilisant les propositions (2.1.1) et (2.1.2), que l'espace est compact à gauche.

Nous utilisons maintenant le fait que si un espace est compact à la fois à droit et à gauche, les topologies à droit et à gauche sont équivalentes. Un argument simple montre que la convergence uniforme dans une topologie implique la convergence uniforme dans l'autre, et de même avec l'équicontinuité à droit et à gauche. □

Proposition 4.2.1.

Soit (X, d_{a_X}) et (Y, d_{a_Y}) deux espaces métriques asymétriques avec les topologiques compactes à droit. Supposons aussi que la convergence à droit implique la convergence à gauche dans (Y, d_{a_Y}). Si un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $C(X,Y)$ est équicontinue à droit, alors $\mathcal{F}$ est totalement borné à droit dans la métrique uniforme $\overline{\rho}$ correspondant à d_{a_Y}.

Démonstration.

Notons que la condition asymétrique de la convergence à droit implique la convergence à gauche est satisfaite.

Supposons que $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ est équicontinu à droit, alors $\mathcal{F}$ également équicontinu à gauche par lemme (4.2.2).

Nous devons montrer que pour tout $0 < \varepsilon < 1$, il existe un recouvrement de $\mathcal{F}$ par des ensembles $\varepsilon-$boules ouvertes dans la métrique $\overline{\rho}$.

On pose $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Pour tout $a \in X$, il existe $\delta_a > 0$ tel que chaque fois $d_{a_X}(a,x) < \delta_a$ nous avons $d_{a_Y}(f(a), f(x)) < \delta$ et $d_{a_Y}(f(x), f(a)) < \delta$ pour tous $f \in \mathcal{F}$, $x \in X$. Par compacité à droit de X, nous pouvons recouvrir X par des boules $\mathbf{B}^{+}(a, \delta_a)$, pour $a = a_1, \ldots, a_k$. Par la compacité à droit de Y, nous pouvons recouvrir Y par des ensemble ouverts $V_1, \ldots, V_m$ de diamètre inférieur à δ (ici $diam(S) = \max\limits_{x,y \in S} d_a(x,y)$, et chaque boule de diamètre ε est contenue dans une boule à droit de rayon 2ε afin que tous les arguments de compacité puissent être utilisés normalement).

Soit J la collection de fonctions $\alpha : \{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, \ldots, m\}$. Soit $\alpha \in J$, s'il existe une fonction $f \in \mathcal{F}$ tel que $f(a_j) \in V_{\alpha_j}$ pour tout $j = 1, \ldots, k$, choisissons une de ces fonctions qui on la note f_α. La collection f_α est indexée par un sous-ensemble $J^{'}$ de l'ensemble J et donc fini.

Nous affirmons que les boules ouvertes $\mathbf{B}_{\overline{\rho}}(f_\alpha, \varepsilon)$ recouvre $\mathcal{F}$, pour $\alpha \in J^{'}$. Pour voir, soit $f \in \mathcal{F}$ et pour chacun $j = 1, \ldots, k$, choisissons un entier α_j tel que $f(a_j) \in V_{\alpha_j}$. Alors la fonction α est dans J'. Nous affirmons que $f \in \mathbf{B}^{+}(a_j, \delta_{a_j})$.

Alors

$$d_{a_Y}(f_\alpha(x), f_\alpha(a_j)) < \delta \text{ (par équicontinuité)},$$
$$d_{a_Y}(f_\alpha(a_j), f(a_j)) < \delta \text{ (puisque } f(a_j) \text{ et } f_\alpha(a_j) \text{ sont dans } V_{\alpha_j},$$
$$d_{a_Y}(f(a_j), f(x)) < \delta \text{ (par équicontinué)}.$$

Alors nous concluons que $d_{a_Y}(f_\alpha(x), f(x)) < \varepsilon < 1$. Cette inégalité vaut pour tout

$x \in X$, donc

$$\overline{\rho}(f_\alpha, f) = \max\{\overline{d_a}(f_\alpha(x), f(x))\} < \varepsilon.$$

Alors $f \in \mathbf{B}^+_{\overline{\rho}}(f_\alpha, \varepsilon)$. $\square$

Lemme 4.2.3.

Si l'espace asymétrique (Y, d_a) est compact à droit et possédé la propriété que la convergence à droit implique la convergence à gauche, alors l'espace Y^X est complet dans la métrique uniforme $\overline{\rho}$ correspondant à d_a.

Démonstration.

Si (Y, d_a) est un compact à droit, alors il est compact, ainsi que $(Y, \overline{d_a})$.

Supposons maintenant que $f_1, f_2, \ldots$ une suite dans Y^X est une suite de Cauchy à droit par rapport à $\overline{\rho}$ alors, pour chaque $x \in X$, la suite $f_1(x), f_2(x) \ldots$ est une suite de Cauchy à droit dans $(Y, \overline{d_a})$ et donc converge à droit et à gauche, vers un point Y_x.

Soit la fonction définie par

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x) = Y_x. \end{aligned}$$

Nous montrons maintenant que $f_n \xrightarrow{d} f$ dans la métrique $\overline{\rho}$ en montrant d'abord qu'il converge à gauche. Étant donné $\varepsilon > 0$, choisissons $N \in \mathbb{N}$ pour que $\overline{\rho}(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{3}$ pour $m \geq n \geq N$. En particulier, $\overline{d_a}(f_n(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tous $x \in X$. Soit n et x fixés et soit m arbitrairement grand, alors

$$\begin{aligned} \overline{d_a}(f_n(x), f(x)) &\leq \overline{d_a}(f_n(x), f_m(x)) + \overline{d_a}(f_m(x), f(x)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Cette inégalité est valable pour tout $x \in X$, à condition que $n \geq N$, donc $\overline{\rho}(f_n, f) < \varepsilon$ pour $n \geq N$. Donc la suite est converge uniformément à gauche, et par le lemme (4.2.2), cela signifie qu'il est converge uniformément à droit. $\square$

Lemme 4.2.4.

Soit (X, d_{a_X}) et (Y, d_{a_Y}) deux espaces métriques asymétriques avec la convergence à droit équivalente à la convergence à gauche dans Y. Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(X,Y)$ converge uniformément vers f, alors $f \in C(X,Y)$.

Démonstration.

Fixons $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in X$. Puisque $f_n \xrightarrow{d} f$ uniformément, on peut choisir $N_1 \in \mathbb{N}$ pour que $d_{a_Y}(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $n \geq N_1$ et $x \in X$, en particulier $f_n(x_0) \xrightarrow{d} f(x_0)$, et $f_n(x_0) \xrightarrow{a} f(x_0)$.

Ainsi on peut trouver $N_2 \in \mathbb{N}$ pour que $d_{a_Y}(f_n(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$ pour $n \geq N_1$. Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$. La fonction f_N est continue à droit et donc continue à gauche par l'équivalence de la convergence à droit et à gauche. Cela signifie que nous pouvons choisir $\delta > 0$ pour que $d_{a_Y}(f_N(x), f_N(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$ pour $d_{a_X}(x_0, x) < \delta$. Donc $d_{a_X}(x_0, x) < \delta$,

$$\begin{aligned} d_{a_Y}(f(x), f(x_0)) &\leq d_{a_Y}(f(x), f_N(x)) + d_{a_Y}(f_N(x), f_N(x_0)) + d_{a_Y}(f_N(x_0), f(x_0)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent f est continue à gauche, et par l'équivalence de la convergence il est également continue à droit si $f \in C(X,Y)$. $\square$

Proposition 4.2.2.

Soit (X, d_{a_X}) et (Y, d_{a_Y}) deux espaces métriques asymétriques, Y étant compact à droit tel que la convergence à droit implique la convergence à gauche. Alors l'ensemble $C(X,Y)$ est complet dans la métrique uniforme $\overline{\rho}$ correspondant à d_{a_Y}.

Démonstration.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(X,Y)$ converge vers $f \in Y^X$ par rapport à $\overline{\rho}$ (i.e. la convergence uniforme). Nous avons supposé que la convergence à droit implique la convergence à gauche, et par la compacité à droit dans Y nous savons que la convergence à gauche implique la convergence à droit par le lemme (2.1.6). Ainsi, par le lemme (4.2.4), $f \in C(X,Y)$ ce qui signifie que $C(X,Y)$ est fermé. Puisque Y^X est complet par lemme (4.2.3) , $C(X,Y)$ est complet aussi. $\square$

Théorème 4.2.5. *(Ascoli-Arzelà)*
Soit (X, d_{a_X}) et (Y, d_{a_Y}) deux espaces métriques asymétriques. Supposons que X est compact à droit, les ensembles bornés fermés sont compacts à droit dans Y, et que la convergence à droit implique la convergence à gauche dans Y. Doter $C(X, Y)$ de la métrique uniforme $\overline{\rho}$ associée à la métrique asymétrique. Alors un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $C(X, Y)$ est relativement compact à droit si $\mathcal{F}$ est équicontinue à droit et borné à droit dans d_{a_Y}.

Démonstration.
La démonstration de ce théorème, à été pris de la référence [2]

Étape 1 : Si $\mathcal{F}$ est équicontinue à droit et borné à droit, il en est de même pour $\overline{\mathcal{F}}$.
Équicontinuité de $\overline{\mathcal{F}}$: Étant donné $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$, choisissons $\delta > 0$ pour que $d_{a_X}(x_0, x) < \delta$ implique $d_{a_Y}(f(x_0), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ et $x \in X$. Étant donné $g \in \overline{\mathcal{F}}$, on peut trouver une suite de points de $\mathcal{F}$ convergeant à droit vers g, et donc aussi convergeant à gauche vers g. Donc nous pouvons choisir $f \in \mathcal{F}$ pour que $\overline{\rho}(g, f) < \frac{\varepsilon}{3}$ et $\overline{\rho}(f, g) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Alors nous avons cela pour $d_{a_X}(x_0, x) < \delta$,

$$\begin{aligned} d_{a_Y}(g(x_0), g(x)) &\leq d_{a_Y}(g(x_0), f(x_0)) + d_{a_Y}(f(x_0), f(x)) + d_{a_Y}(f(x), g(x)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $\overline{\mathcal{F}}$ est équicontinue.

Bornitude de $\overline{\mathcal{F}}$: Étant donné $a \in X$, choisissons $y \in Y$ pour que $\{d_{a_Y}(y, f(a))\}$ soit borné, i.e., $d_{a_Y}(y, f(a)) \leq M$ pour tout $f \in \mathcal{F}$. Étant donné $g \in \overline{\mathcal{F}}$, nous pouvons trouver une suite de points de $\mathcal{F}$ convergeant vers g à droit et à gauche, et ainsi nous pouvons choisir $f \in \mathcal{F}$ pour que $\overline{\rho}(f, g) < 1$. Alors

$$d_{a_Y}(y, g(a)) \leq d_{a_Y}(y, f(a)) + d_{a_Y}(f(a), g(a)) < M + 1.$$

Maintenant, $g \in \overline{\mathcal{F}}$ arbitraire, donc $\{d_{a_Y}(y, g(a))/g \in \overline{\mathcal{F}}\}$ est borné, et donc $\overline{\mathcal{F}}$ est borné à droit.

Étape 2 : Nous montrons que si $\overline{\mathcal{F}}$ est équicontinu à droit et borné à droit, alors il existe un sous-espace compact à droit E de Y qui contient alors l'union des ensembles $g(X)$ pour $g \in \overline{\mathcal{F}}$.

Choisissons, pour tout $a \in X$, $\delta_a > 0$ tel que $d_{a_X}(a, X) < \delta_a$ implique $d_{a_Y}(g(a), g(x)) < 1$ pour tout $g \in \overline{\mathcal{F}}$. Puisque X est compact à droit, nous pouvons recouvrir X par un nombre fini de boules $\mathbf{B}^+(a, \delta_a)$, dire pour $a_1, \ldots, a_n$. Comme les ensembles $\{g(a_j)/g \in \overline{\mathcal{F}}\}$ sont bornés à droit, leur union est également borné à droit ; supposons que l'union se trouve dans $\mathbf{B}^+(y, N)$ pour certains $y \in Y$, $N \in \mathbb{N}$.

Choisissons $g \in \overline{\mathcal{F}}$ arbitraire, choisissons $x \in X$. Soit $x \in \mathbf{B}^+(a_j, \delta_{a_j})$ pour certain $j = 1, \ldots, n$, alors

$$\begin{aligned} d_{a_Y}(y, g(x)) &\leq d_{a_Y}(y, g(a_j)) + d_{a_Y}(g(a_j), g(x)) \\ &< N + 1. \end{aligned}$$

Ainsi $g(X) \subset \mathbf{B}^+(y, N + 1))$. Soit E la fermeture de cette boule. Puisque les ensembles bornés fermés sont compacts à droit dans Y, E est compact à droit.

Étape 3 : Supposons que $\mathcal{F}$ est équicontinu à droit et borné à droit dans d_{a_Y}. Par l'étape 1, $\overline{\mathcal{F}}$ est aussi équicontinue à droit et bornée à droit dans d_{a_Y}. Par l'étape 2, il y a un sous-espace compact E de Y tel que $\overline{\mathcal{F}} \subset C(X, E)$.

La proposition (4.2.1) révèle maintenant que $\overline{\mathcal{F}}$ est totalement borné à droit dans $\overline{\rho}$. Puisque E est compact à droit, l'ensemble $C(X, E)$ est complet à droit dans la métrique uniforme par proposition (4.2.2). $\overline{\mathcal{F}}$ est un sous-espace fermé de $C(X, E)$, également complet à droit.

Alors par la proposition (2.1.3) nous en déduisons que $\overline{\mathcal{F}}$ est un compact à droit, car il est complet et totalement borné à droit. Donc $\mathcal{F}$ est relativement compact. $\square$

Bibliographie

[1] **V. Avanissian**, *Initiation à l'analyse fonctionnelle*, Hermann, Paris, 1996.

[2] **J. Collins, J. Zimmer**, *An asymmetric Arzelà-Ascoli theorem*, Topology and its Applications 154 (2007) 2312-2322.

[3] **A. Cot and C. M. Marle and G. Christol**, *Topologie*, Ellipses, Paris, 1997.

[4] **S. Dolecki**, *Analyse fondamentale*, 2ème édition, Hermann, Paris, 2013.

[5] **R. Engelking**, *General topology*, Heldemann, Berlin, 1989.

[6] **S. Laurent**, *Analyse, topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, Paris, 1970.

[7] **J. R. Munkres**, *Topology*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2ème édition, 2000.

[8] **C. Wagschal**, *Topologie et analyse fonctionnelle*, Hermann, Paris, 2012.