République Algérienne démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Benyahia -Jijel-

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....
№ de série : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse fonctionnelle.

Thème

Inclusion différentielle impulsive d'ordre fractionnaire

Présenté par :

Bensouilah Hakima

Devant le jury

Président	: N. Arada	M.C.A. Université de Jijel
Encadreur	: F. Aliouane	M.C.A. Université de Jijel
Examinateur	: M. Benguessoum	M.C.B. Université de Jijel

Promotion **2021/2022**

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement à ***Dieu*** *le tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience qu'il m'a donné pour achever ce travail.*

Je remercie chaleureusement mon encadreur Melle ***F. Aliouane*** *pour ses précieux conseils, ses remarques, sa patience et sa disponibilité durant la réalisation de ce travail. J'admire beaucoup son sérieux et sa manière de diriger qui furent pour moi une grande source d'inspiration et de motivation.*

Je tiens également à remercier les membres du jury. A l'examinatrice Madame ***M. Benguessoum*** *pour avoir accepter d'être membre de ce jury. Je remercie vivement Monsieur* ***N. Arada*** *pour avoir accepter de présider le jury de cette soutenance.*

Je tiens à remercier Monsieur ***B. Bensouilah****, le chef département de mathématiques, et tous mes enseignants et collègues du département de mathématiques.*

A tous ceux qui m'ont, de près ou de loin, encouragée pour terminer ce travail, merci à vous.

Enfin, c'est avec beaucoup de plaisir que je veux remercier profondément tous les membres de ma famille pour leurs conseils et encouragements durant toutes les années de mes études.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à

*L'homme de ma vie, mon exemple éternel, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi mon père **Bouzid**.*

*La lumière de ma vie, la source de mes efforts et mon bonheur, ma mère **Djouhra**.*

Merci d'avoir été les meilleurs parents du monde.

*Mes belles sœurs, **Hayet** et **Ahlem**.*

Mes frères, ***Abdelhak**, **Abdelwahid*** et ***Yassine**.*

*Mon fiancé et tous les membres de mes familles, **Bensouilah** et **Boubessit**.*

*Mes chères amies, surtout **Wissam**, elles n'ont cessé de consentir pour moi, par leur encouragement et leur profonde affection.*

*Mes collègues avec qui j'ai partagé des moments agréables et inoubliables **Kenza**, **Leila**, **Lamia** et **Nada**.*

Enfin, je dédie ce mémoire à tout ceux qui m'aiment et ceux que j'aime.

Hakima.

Table des matières

Introduction

Le calcul fractionnaire est un domaine de recherche important, non seulement utilisés en mathématiques pures, mais aussi en mathématiques appliquées, en physique, en biologie, en ingénierie, etc. Il s'agit d'une généralisation à des ordres réelles où complexes de l'intégration et la dérivation avec des ordres entiers (voir [18], [23] etc).

Il s'avère que les opérations de la différentiation et d'intégration fractionnaire sont aussi vieux que le calcul de la différentiation classique et remonte à l'époque où Leibnitz, Gauss et Newton ont inventé ce type de calcul. En 1695, c'est Leibniz le pionnier qui a initié le sujet en posant une question à l'Hôpital : ''le sens des dérivées avec ordre entier peut-il être généralisé à des dérivées avec un ordre non entier ?''. L'histoire raconte que l'Hôpital était quelque peu curieux à propos de cette question et a répondu par une autre question à Leibniz : ''Et si la commande était $\frac{1}{2}$?''. Leibniz, dans une lettre datée du 30 septembre 1695 répond : ''Cela conduira à un paradoxe, qui en tirera un jour des conséquences utiles''.

Depuis ce temps, le domaine du calcul fractionnaire connait une avancée prodigieuse et a attiré l'attention de nombreux mathématiciens tels que Euler (1730), Lagrange (1772), Laplace (1812), Fourier (1822), Abel (1823-1826), Liouville (1832-1837), Riemann (1847), Grünwald (1867), Letnikov (1868-1872), Hadamard (1892), Heaviside (1892-1912), Weyl (1917), Riesz (1949) etc. Diverses définitions d'intégrales et de dérivées fractionnaires sont apparues, chacune avec ses propres avantages. La première définition a été établie par Riemann et Liouville. Cependant, cette définition présente des inconvénients. le marquis de Caputo participe, à la fin des années 1960, à étoffer cette définition en la reformulant.

L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales de la dérivée fractionnaire au son sens des équations différentielles fractionnaires prennent la même forme que dans le cas des équations différentielles d'ordre entier. Néanmoins, les opérateurs fractionnaires ne partagent pas les mêmes propriétés et à cause de cela, on trouve un grand nombre des travaux pour des problèmes similaires. Une façon de les surmonter, est de définir des formes généralisées d'intégrales et dérivées fractionnaires en considérant la dérivée et l'intégrale par rapport à une autre fonction. Pour certains choix de cette dernière, on obtient des définitions bien connues, comme les opérateurs fractionnaires de Riemann-Liouville et de Hadamard classiques (voir [18]).

Les équations et les inclusions différentielles avec des dérivées d'ordre fractionnaire apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques.

La dynamique de nombreux processus en évolution est sujette à des changements brusques, tels que chocs et catastrophes naturelles. Ces phénomènes impliquent des perturbations de courte durée issues des dynamiques continues et lisses, dont la durée est négligeable par rapport à l'évolution entière. Dans les modèles impliquant de telles perturbations, il est naturel de supposer que ces perturbations agissent instantanément ou sous forme "d'impulsions".

Les inclusions différentielles d'ordre fractionnaires avec impulsion ont été considérées pour la première fois par Ait Dads et al (voir [1]). A l'issue, beaucoup de chercheurs ont été motivés par l'exploration de ce domaine (voir [6], [11] etc). En conséquence, le développement de cette théorie a fait l'objet d'une attention considérable dans la modélisation des problèmes impulsifs en physique, dynamique des populations, écologie, biotechnologie, robotique industrielle, pharmaco-cinétique, contrôle optimal, etc. Dans [27], Wang et des co-auteurs, ont discuté la contrôlabilité des inclusions différentielles semi-linéaires impulsives non instantanées impliquant des dérivées d'ordre entiers et fractionnaires.

Lié à ce contexte, on propose dans ce travail de faire une synthèse de certains travaux sur l'analyse fractionnaire et son application dans la résolution d'une inclusion différentielle d'ordre fractionnaire du type impulsif suivant (voir [26])

$$\begin{cases} D_g^{\alpha} u(t) \in \ F(t,u(t)) & t \ \in J=[0,T] \quad \text{avec} \quad t \neq t_k, \quad k=1,2,\ldots,p; \\ \delta u^{[i]}(t_k) = \mathscr{I}_{ik}(u(t_k)) & i=0,1,\ldots,m-1; \quad k=1,2,\ldots,p; \\ u^{[i]}(0)=\eta_i & i=0,1,\ldots,m-1; \end{cases} \tag{1}$$

où $D_g^{\alpha}(\cdot)$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α par rapport à g, avec $m-1<\alpha\leq m$, $m\in\mathbb{N}^*$, $F: J\times\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application, $\eta_i\in\mathbb{R}$ et $\mathscr{I}_{ik}\in\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}\big(\,\mathbb{R}^n\big)$ $(i=0,1,\ldots,m-1;\ k=1,\ldots,p),\ p\in\mathbb{N}^*$.
De plus, $u^{[i]}: J\to\mathbb{R}^n$ est une fonction continue par morceaux dans J avec des points de discontinué de première espèce aux points $t_k\in J$, i.e., ils existent des limites $u^{[i]}(t_k^+)<+\infty$ et $u^{[i]}(t_k^-)=u^{[i]}(t_k)<+\infty$, $u^{[m]}: J\to\mathbb{R}^n$ et $\delta u^{[i]}(t_k)=u^{[i]}(t_k^+)-u^{[i]}(t_k^-)$ $(i=0,1,\ldots,m-1;\ k=1,2,\ldots,p)$. On note par J_k l'intervalle $]t_k,t_{k+1}]$.

Ce manuscrit est reparti en trois chapitres qui sont organisée selon le plan suivant :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions, notations et résultats de l'analyse fonctionnelle et de l'analyse multivoque qui nous seront utiles dans la suite de cette étude.

Dans le deuxième chapitre, on introduit les deux plus importantes approches de dérivation fractionnaire, qui sont l'approche de Riemann-Liouville et de Caputo ainsi que leurs propriétés voir ([17] et [2]).

Finalement, dans le troisième chapitre on s'intéresse à des conditions assurant l'existence, l'unicité et la stabilité de solution du problème (1).

Chapitre 1

Notations et préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons toutes les notions et les résultats de base qui nous seront utiles au long de ce travail. Nous commençons par quelques notations, puis nous énonçons des définitions et concepts fondamentaux de l'analyse fonctionnelle et de l'analyse multivoque.

1.1 Notations

On note par

p.p.	Presque partout.
$\mathbb{N}$	L'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	L'ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$	L'ensemble des nombres complexes hormis les entiers négatifs.
$\mathbb{R}^n$	L'espace euclidien réel à n dimension muni de la norme $\|\cdot\|$.
$[a,b]$	Un intervalle de $\mathbb{R}$ $(a<b)$ et $J=[0,T],\ T>0$.
$\mathcal{L}\big([a,b]\big)$	Tribu de Lebesgue.
(Ω,Σ,μ)	Espace mesuré.
(Y,τ)	Espace topologique.
(X,d)	Espace métrique.
$(E,\|\cdot\|)$	Espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$.
$v_x(x_0)$	Voisinage de x_0.

$\mathcal{P}(X)$	Ensemble des parties de X.
$\mathcal{B}(X)$	Tribu borélienne.
$L^p_E([a,b])$	L'espace de Banach des fonctions mesurables $f:[a,b]\to E$ telles que $\displaystyle\int_a^b \|f(t)\|^p dt < +\infty,$ muni de la norme $\|f\|_p = \displaystyle\int_a^b \Big(\big\|f(t)\big\|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$
$\mathcal{C}_E\big([a,b]\big)$	L'espace de Banach des fonctions continues $f:[a,b]\to E,$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[a,b]} \big\|f(t)\big\|.$
$\mathcal{C}^n_E\big([a,b]\big)$	L'espace de Banach des fonctions d'ordre $(n-1)$ continues sur $[a,b]$.
$AC\big([a,b],E\big)$	L'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$.
$[z]$	La partie entière de z.
$\mathcal{R}e(z)$	Partie réelle d'un nombre complexe z.
${}_aI^\alpha_g f(\cdot)$	L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α $(\alpha>0)$ d'une fonction f par rapport à une fonction g.
${}_aD^{R,\alpha}_g f(\cdot)$	La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α $(\alpha>0)$ d'une fonction f par rapport à une fonction g.
${}_aD^{C,\alpha}_g f(\cdot)$	La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α $(\alpha>0)$ d'une fonction f par rapport à une fonction g.
$\mathcal{L}\{\cdot\}(\cdot)$	La Transformée de Laplace.
$\mathcal{L}_g\{\cdot\}(\cdot)$	Transformée de Laplace généralisée.
$\Gamma(\cdot)$	La fonction Gamma d'Euler.
$\beta(\cdot,\cdot)$	La fonction bêta d'Euler.
χ_A	La fonction caractéristique de A définie par $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x\in A; \\ 0, & \text{si} \quad x\notin A. \end{cases}$
$d(x,A)$	La distance entre x et l'ensemble A définie par $d(x,A) = \inf\limits_{x\in A} \|x-y\|.$

1.2 Fonctions absolument continues

Définition 1.2.1. [4](***Applications absolument continues***)

Soit E un espace de Banach. Une fonction $f : [a, b] \to E$ est dite absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que pour toute partition dénombrable de l'intervalle $[a, b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$, $k \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\sum_{k\geq 0}(b_k - a_k) < \delta,$$

on a

$$\sum_{k\geq 0} \big\| f(b_k) - f(a_k)\big\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.2.2. [4] *Une fonction $f : [a, b] \to E$ est absolument continue si et seulement si, il existe une fonction intégrable $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [a, b]$*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b v(t)dt,$$

dans ce cas f est dérivable presque partout et sa dérivée $f' = v$ p.p.
L'espace de toutes les fonctions absolument continues définies sur $[a, b]$ est notée $AC\big([a, b], E\big)$.

Définition 1.2.3. [17] *Soit $g \in \mathcal{C}^n_{\mathbb{R}}\big([a, b]\big)$ telle que $g'(t) \neq 0$ sur $[a, b]$. L'espace $AC^n_g\big([a, b], \mathbb{R}\big)$ est définie par*

$$AC^n_g\big([a, b], \mathbb{R}\big) = \Bigg\{ f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ et } f^{[k-1]} \in AC\big([a, b], \mathbb{R}\big)(k = 1, \dots, n) \text{ avec } f^{[k-1]} = \left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{k-1} f\Bigg\}.$$

Définition 1.2.4. *Soit $g \in \mathcal{C}^n_{\mathbb{R}}\big([a, b]\big)$ tele que $g'(t) \neq 0$ sur $[a, b]$. Alors*

$$\mathcal{C}_g\big([a, b], \mathbb{R}\big) = \Big\{ f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ tel que } \big(g(\cdot) - g(a)\big)f(\cdot) \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}\big([a, b]\big)\Big\}.$$

Définition 1.2.5. *Soit $g \in \mathcal{C}^n_{\mathbb{R}}\big([a, b]\big)$ tele que $g'(t) \neq 0$ sur $[a, b]$. Alors*

$$\mathcal{C}^{[n]}_g\big([a, b], \mathbb{R}\big) = \Big\{ f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ tel que } f^{[k-1]} \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}\big([a, b]\big)(k = 1, \dots, n),\ f^{[n]} \in C_g\big([a, b], \mathbb{R}\big)\Big\},$$

avec $\mathcal{C}^{[0]}_g\big([a, b]\big) = \mathcal{C}_g\big([a, b]\big)$.
Muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{[n]}_g} : \mathcal{C}^n_E\big([a, b]\big) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{[n]}_g} = \sum_{k=0}^{n} \|f^{[k]}\|_\infty.$$

Définition 1.2.6. [24](***Fonction λ-Lipschitzienne***) *Soient* $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ *deux espaces de Banach. On dit que la fonction* $f : E \to F$ *est de type Lipschitz de rapport* λ *ou* λ*-Lipschitzienne si pour un certain scalaire positif* λ *on a*

$$\big\|f(x) - f(y)\big\|_F \leq \lambda\|x - y\|_E \text{ pour tous } x, y \in E.$$

Remarque 1.2.7. [4] *Toute application* λ*-Lipschitzienne est absolument continue.*

Définition 1.2.8. [24](***Contraction***) *Soit* E *un espace de Banach et* $f : E \to E$ *une application. On dit que* f *est une contraction ou fonction contractante si elle est* λ*-lipschitzienne avec* $0 < \lambda < 1$.

1.3 Outils d'analyse fonctionnelle

Définition 1.3.1. [9](***Ensemble convexe***) *Soit* E *un espace vectoriel, et soit* A *un sous-ensemble de* E. *On dit que* A *est convexe, si et seulement si, pour tous* $x, y \in A$ *et pour tout* $\lambda \in [0, 1]$,

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A.$$

La notion de décomposabilitée à été introduite par Rockafellar [22] en 1968 en connection avec les fonctionnelles intégrales et depuis, les ensembles décomposables sont devenus un outil essentiel dans l'analyse non convexe. Ils sont dans le sens d'un substitut de la convexité et donc de nombreuses propriétés des ensembles convexes ont des contreparties d'ensembles décomposables.

Définition 1.3.2. [8](***Ensemble décomposable***) *Soient* (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré et* $K \subset L^1_E(\Omega)$. *On dit que* K *est décomposable si pour tout ensemble mesurable* A *et tous* $u,\ v \in K$

$$u\chi_A + v\chi_{E\setminus A} \in K. \tag{1.1}$$

Exemple 1.3.3. [21] *Soit* (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré et soit* C *l'ensemble défini par* $C = \big\{\chi_A /\ A \subset \Omega \text{ mesurable}\big\}$. *Alors* C *est décomposable. En effet, soit* B *un ensemble mesurable de* Ω *et soient* $u,\ v \in C$. *Montrons que* $u\chi_B + v\chi_{E\setminus B} \in C$. *Nous avons*

$$u \in C \Leftrightarrow \exists\ A_1 \subset \Omega \text{ mesurable telle que } u = \chi_{A_1}$$

$$v \in C \Leftrightarrow \exists\ A_2 \subset \Omega \text{ mesurable telle que } v = \chi_{A_2},$$

et donc

$$\begin{aligned} u\chi_B + v\chi_{E\backslash B} &= \chi_{A_1}\chi_B + \chi_{A_2}\chi_{E\backslash B} \\ &= \chi_{A_1\cap B} + \chi_{A_2\cap E\backslash B} \\ &= \chi_{(A_1\cap B)\cup(A_2\cap E\backslash B)}. \end{aligned}$$

Alors, il existe $D = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap E\backslash B)$ *mesurable tel que* $u\chi_B + v\chi_{E\backslash B} = \chi_D$. *Donc*

$$u\chi_B + v\chi_{E\backslash B} \in C.$$

Ceci montre la décomposabilitée de C.

Définition 1.3.4. [28](***Équicontinuté***) *Soient* $(X,\ d)$, $(Y,\ d')$ *deux espaces métriques. Une partie* $H \in \mathcal{C}_Y(X)$ *est dite équicontinue sur* X *si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tels que*

$$d(t_1, t_2) < \delta \Rightarrow d'\big(f(t_1), f(t_2)\big) < \varepsilon \text{ pour tous } t_1,\ t_2 \in X \text{ et tout } f \in H.$$

Définition 1.3.5. [16] *Soit* (Y, τ) *un espace topologique et* K *une partie de* Y. *On dit que* K *est relativement compacte si son adhérence est compacte.*

Définition 1.3.6. [5](***Complètement continue***) *Soient* $(E, \|\cdot\|_E)$ *et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *deux espaces de Banach et* $f : E \to F$ *une application. On dit que* f *est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de* E *en un ensemble relativement compact dans* F.

Théorème 1.3.7. [9](***Théorème de la convergence dominée de Lebesgue***)
Soient (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré,* E *un espace de Banach,* $1 \le p < +\infty$ *et* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions mesurables définies sur* Ω *à valeurs dans* E. *Si la suite* $(f_n)_n$ *vérifie*

(i) $f_n \to f$ μ.*p.p. sur* Ω,

(ii) il existe une fonction positive $h \in L^p_{\mathbb{R}}(\Omega)$ *telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n(t)\| \le h(t) \ \mu.p.p.$$

Alors $f_n \to f$ *dans* $L^p_E(\Omega)$.

Définition 1.3.8. [15] *Soient* (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré de mesure* μ *finie. Une fonction mesurable* $f : \Omega \to E$ *est dite intégrable au sens de Bochner si et seulement si*

$$\int_\Omega \|f\| d\mu < +\infty.$$

Corollaire 1.3.9. [15] *Si $f : \Omega \to E$ est une fonction intégrable au sens de Bochner et $A \in \Sigma$, alors*

$$\left\| \int_A f(x)d\mu \right\| \leq \int_A \|f(t)\| d\mu.$$

Théorème 1.3.10. [9] *Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, E un espace de Banach et soit $1 \leq p < \infty$. Si $f_n \to f$ dans $L^p_E(\Omega)$ alors il existe $(f_{n_k})_k$ une suite extraite de $(f_n)_n$ et une fonction positive $h \in L^p_E(\Omega)$ telles que*

(i) $f_{n_k} \to f$ *μ.p.p. sur Ω,*

(ii) pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|f_{n_k}(t)\| \leq h(t)$ μ.p.p.

Théorème 1.3.11 (Fubini). [15] *Soient (X, d), (Y, d') deux espaces métriques. Si f est une fonction Bochner-intégrable sur $X \times Y$, Alors la fonction $\int f dy$ est définie presque partout sur X et est Bochner-intégrable sur X. De même, la fonction $\int f dx$ est définie presque partout sur Y. De plus, on a*

$$\int\limits_Y \int\limits_X f dx dy = \int\limits_X dx \int\limits_Y f dy = \int\limits_Y dy \int\limits_X f dx.$$

1.4 Fonctions spéciales

Dans cette section, nous introduisons quelques fonctions spéciales qui nous seront utiles dans la suite. Ces fonctions jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire. On renvoie le lecteur à [18].

Définition 1.4.1. (***Fonction Gamma***) *Pour tout nombre complexe z tel que $\mathcal{R}e(z) > 0$, on pose*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{1.2}$$

Cette fonction est appelée "fonction Gamma d'Euler".

Proposition 1.4.2. *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(z) > 0$, nous avons*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.3}$$

Si $z = n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \tag{1.4}$$

Définition 1.4.3. (***Fonction bêta***) *Soient $p, q \in \mathbb{C}$ tels que $\mathcal{R}e(p) > 0$ et $\mathcal{R}e(q) > 0$, on définit la fonction bêta par*

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt. \tag{1.5}$$

Remarque 1.4.4. *Par le changement de variable $y = 1-t$, on remarque que*

$$\beta(p,q) = \beta(q,p). \tag{1.6}$$

Théorème 1.4.5. (***Relation entre la fonction Gamma et bêta***)
Soient $p, q \in \mathbb{C}$ tels que $\mathcal{R}e(p) > 0$ et $\mathcal{R}e(q) > 0$, on a

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{1.7}$$

Définition 1.4.6. (***Symbôle de Pochhammer***) *Soient $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$ et $k \in \mathbb{N}$. On définit le symbôle de Pochhammer par*

$$(\alpha)_k = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)}. \tag{1.8}$$

On a à priori

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1). \tag{1.9}$$

1.5 Notions sur les multi-applications

Les résultats suivants sont pris des référence [4], [10], et [13].

Définition 1.5.1. *Soient X, Y deux ensembles non vides. On dit que F est une multi-application ou application multivoque si pour tout $x \in X$, $F(x)$ est un sous-ensemble de Y $\big(F(x) \in \mathcal{P}(Y)\big)$. On note*

$$F : X \rightrightarrows Y.$$

- *On appelle **domaine** de F qu'on note $D(F)$, l'ensemble défini par*

$$D(F) = \big\{x \in X,\ F(x) \neq \emptyset\big\}.$$

- *On appelle **graphe** de F, le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par*

$$gph(F) = \big\{(x,y) \in X \times Y,\ x \in D(F) :\ y \in F(x)\big\}.$$

- *On appelle **image** de F ou bien **rang** de F, l'ensemble défini par*

$$R(F) = Im(F) = \big\{y \in Y,\ \exists\, x \in X,\ y \in F(x)\big\}.$$

Proposition 1.5.2. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application et soit O un ouvert de Y. Alors*

$$F^{-1}(O) = \big\{x \ \in \ X, \ F(x) \cap O \neq \emptyset\big\}. \tag{1.10}$$

Cet ensemble est appelé image réciproque large de O par la multi-application F.

Proposition 1.5.3. *On appelle image réciproque étroite de tout ouvert O de Y par la multi-application F, l'ensemble noté $F_+^{-1}(O)$, et est défini par*

$$F_+^{-1}(O) = \big\{x \in X : F(x) \subset O\big\}. \tag{1.11}$$

Définition 1.5.4 (Sélection). *Soit (Ω, Σ) un espace mesurable et soit $F : \Omega \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : X \to Y$ telle que*

$$f(t) \in F(t) \textit{ pour tout } t \in X.$$

Définition 1.5.5 (Semi-continuité inférieure). *Soient X, Y deux espaces topologiques, et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est semi-continue inférieurement (en abrégé s.c.i.) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de Y vérifiant $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage Ω de x_0 $\big(\Omega \in v_x(x_0)\big)$ tel que pour tout $z \in \Omega$, $F(z) \cap U \neq \emptyset$.*

Proposition 1.5.6 (Caractérisation de la s.c.i.).
Soit X, Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) F *est s.c.i. sur* X.

(ii) $F^{-1}(O)$ *est un ouvert de* X *pour tout ouvert* O *de* Y.

(iii) $F_+^{-1}(U)$ *est un fermé de* X *pour tout fermé* U *de* Y.

(iv) $\overline{F_+^{-1}(A)} \subset F_+^{-1}(\overline{A})$, *pour tout* $A \subset Y$.

Proposition 1.5.7. *Soient (X, d), (Y, d') deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. F est s.c.i. au point $x_0 \in X$ si et seulement si pour tout $y \in F(x_0)$ et pour toute suite $(x_n)_n$ de X tel que $(x_n)_n$ converge vers x_0, il existe une suite $(y_n)_n \subset Y$ telle que $y_n \in F(x_n)$ convergeaont vers y.*

Définition 1.5.8. (***Mesurabilité***) *Soit (Ω, Σ) un espace mesurable, X un espace topologique et $F : \Omega \rightrightarrows X$ une multi-application. On dit que F est mesurable si et seulement si pour tout ouvert O de X,*

$$F^{-1}(O) \in \Sigma.$$

Définition 1.5.9. [26] *Soit* $A \subseteq J \times \mathbb{R}^n$. *A est* $\mathcal{L} \otimes \mathscr{B}$*-mesurable si A appartient à la* σ*-algèbre engendrée par les ensembles* $C \times D$ *où* $C \subset J$ *et* $D \subset \mathbb{R}^n$ *sont des ensembles mesurables au sens de Lebesgue et Borel respectivement.*

Proposition 1.5.10. (***Existence de sélection mesurable***)
Soient (Ω, Σ) *un espace mesurable,* (X, d) *un espace métrique complet séparable et* $F : \Omega \rightrightarrows X$ *une multi-application à valeurs fermées. Si F est mesurable alors elle admet une sélection mesurable.*

Proposition 1.5.11. *Soit* (Ω, Σ) *un espace mesurable,* (X, d) *un espace métrique séparable et* $F : \Omega \rightrightarrows X$ *une multi-application. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *F est* Σ*-mesurable.*
2. *pour chaque* $x \in X$*, la fonction*

$$\begin{aligned} g_x : \Omega &\longrightarrow [0, +\infty[\\ t &\longmapsto d(x, F(t)). \end{aligned}$$

   est mesurable.

Proposition 1.5.12. *Soit E un espace de Banach séparable et* $[a, b]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *Soit* $G : [a, b] \rightrightarrows E$ *une multi-application mesurable à valeurs non vides compactes (fermées si* $dim(E) < +\infty$*), et* $z : [a, b] \to E$ *une application mesurable. Alors G admet une sélection mesurable v telle que*

$$\|z(t) - v(t)\| = d\big(z(t), G(t)\big) \text{ p.p. sur } [a, b].$$

1.6 Théorèmes de point fixe

Dans cette section, nous présentons quelques théorèmes de point fixe qui seront utiles dans notre travail.

Définition 1.6.1. [25](***Point fixe***)
Soit E un espace de Banach et $N : E \to E$ *une application. Un élément x de E est dit point fixe de N si* $N(x) = x$.

Théorème 1.6.2. [25](***Banach***)
Soit (X, d) *un espace métrique complet et* $N : X \to X$ *une contraction, alors N admet un point fixe unique.*

Théorème 1.6.3. [26](***Schaefer***)
Soit E un espace vectoriel normé et $S \subset E$ un sous-ensemble convexe tel que $0 \in S$. Supposons que $H : S \to S$ est un opérateur complètement continue. Si l'ensemble

$$\varepsilon(H) = \left\{ x \in S,\ x = \lambda H(x) \ \textit{pour certains}\ \lambda \in]0,1[\right\}$$

est borné, alors H admet au moins un point fixe sur S.

Chapitre 2

Intégrale et dérivée fractionnaire généralisée

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de certaines propriétés des intégrales et dérivées fractionnaires généralisées, ainsi que leurs transformées de Laplace.
Dans la suite, on désigne par E un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$, $[a,b]$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle fini où infini de la droite réelle $\mathbb{R}$ et $g \in \mathcal{C}_E^1\big([a,b]\big)$ une fonction croissante positive telle que $g'(t) \neq 0$, pour tout $t \in [a,b]$.

2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.1.1. [18] *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > 0$ et $f \in L_E^1\big([a,b]\big)$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α d'une fonction f par rapport à une autre fonction g sur $[a,b]$, notée ${}_aI_g^\alpha f$, est définie par*

$$ {}_aI_g^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1} f(s) g'(s) ds, \quad t > a. \tag{2.1}$$

Désormais, on la note par $I_g^\alpha f$ au lien de ${}_aI_g^\alpha f$.

Théorème 2.1.2. [3] *Si f est continue sur $[a,b]$, alors $I_g^\alpha f(t)$ est bien définie pour tout $t \in [a,b]$. De plus, $I_g^\alpha f \in L_E^1\big([a,b]\big)$ et*

$$\|I_g^\alpha f\|_1 \leq K\|f\|_\infty,$$

avec $K = \dfrac{(b-a)\big(g(b)-g(a)\big)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$.

Preuve. Soit $t \in [a,b]$. Grâce aux relations (1.3), (2.1), le Corollaire 1.3.9 et à la croissance de g, nous avons

$$\begin{aligned}
\left\|I_g^\alpha f(t)\right\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left|g(t)-g(s)\right|^{\alpha-1} \left\|f(s)\right\| \left|g'(s)\right| ds \\
&\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1} ds \\
&= -\frac{\|f\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)} \big(g(t)-g(s)\big)^\alpha \Big|_a^t \\
&= \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \big(g(t)-g(a)\big)^\alpha \\
&\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \big(g(b)-g(a)\big)^\alpha < +\infty.
\end{aligned}$$

Alors $I_g^\alpha f(t)$ existe pour tout $t \in [a,b]$. De plus,

$$\begin{aligned}
\left\|I_g^\alpha f\right\|_1 &= \int_a^b \left\|I_g^\alpha f(t)\right\| dt \\
&\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \big(g(b)-g(a)\big)^\alpha \int_a^b ds \\
&= \frac{(b-a)\big(g(b)-g(a)\big)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_\infty < +\infty.
\end{aligned}$$

D'où, $I_g^\alpha f \in L_E^1([a,b])$. ■

Exemple 2.1.3. [17, 18] *Soient $\alpha,\ \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha > 0,\ \gamma > 0$ et pour tout $t \in [a,b]$, on pose $f(t) = \big(g(t)-g(a)\big)^{\gamma-1}$. Alors*

$$\begin{aligned}
I_g^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1} f(s) g'(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1} \big(g(s)-g(a)\big)^{\gamma-1} g'(s) ds.
\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $g(s) = g(a) + x\big(g(t)-g(a)\big)$, on trouve par les relations (1.5), (1.6), *et* (1.7),

$$\begin{aligned}
I_g^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \Big(g(t)-g(a)-x\big(g(t)-g(a)\big)\Big)^{\alpha-1} \Big(g(a)+x\big(g(t)-g(a)\big)-g(a)\Big)^{\gamma-1} \\
&\qquad \times \big(g(t)-g(a)\big) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} \big(g(t)-g(a)\big)^{\alpha-1} x^{\gamma-1} \big(g(t)-g(a)\big)^{\gamma-1} \big(g(t)-g(a)\big) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \big(g(t)-g(a)\big)^{\alpha+\gamma-1} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^{\gamma-1} dx \\
&= \frac{\beta(\alpha,\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \big(g(t)-g(a)\big)^{\alpha+\gamma-1} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\gamma)} \big(g(t)-g(a)\big)^{\alpha+\gamma-1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\big(g(t)-g(a)\big)^{\alpha+\gamma-1}.$$

Théorème 2.1.4. [18](*Additivité*) *Soient* $\alpha,\ \gamma \in \mathbb{R}$ *tels que* $\alpha > 0, \gamma > 0$. *Alors l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante*

$$I_g^\alpha I_g^\gamma f(t) = I_g^{\alpha+\gamma} f(t) \text{ pour tout } t \in [a,b]. \tag{2.2}$$

Preuve. Soit $t \in [a,b]$, par la Définition 2.1.1 on a

$$\begin{aligned}
I_g^\alpha I_g^\gamma f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1}\big(I_g^\gamma f(s)\big)g'(s)ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1}g'(s)\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\left(\int_a^s \big(g(s)-g(x)\big)^{\gamma-1}f(x)g'(x)dx\right)ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}\int_a^t\int_a^s \big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1}\big(g(s)-g(x)\big)^{\gamma-1}f(x)g'(s)g'(x)dxds.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini (Théorème 1.3.11), on pourra permuter l'ordre d'intégration et on procède de même que dans l'Exemple 2.1.3, pour obtenir

$$\begin{aligned}
I_g^\alpha I_g^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}\int_a^t f(x)g'(x)\int_x^t \big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1}\big(g(s)-g(x)\big)^{\gamma-1}g'(s)dsdx\\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_a^t \big(g(t)-g(x)\big)^{\alpha+\gamma-1}f(x)g'(x)dx\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_a^t \big(g(t)-g(x)\big)^{\alpha+\gamma-1}f(x)g'(x)dx\\
&= I_g^{\alpha+\gamma}f(t).
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.1.5. [17] Soient $\alpha \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}$ tels que $\alpha > m$ et soit $f \in L_E^1\big([a,b]\big)$, alors

$$\left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^m I_g^\alpha f(\cdot) = I_g^{\alpha-m}f(\cdot). \tag{2.3}$$

Preuve. En vertu du la Définition 2.1, Théorème 3.4.5 et utilisant (1.3), pour tout $t \in [a,b]$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^m I_g^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^m\int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1}f(s)g'(s)ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)\int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1}f(s)g'(s)ds\\
&= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}\left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{m-1}\frac{1}{g'(t)}g'(t)(\alpha-1)\\
&\quad\times\int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-2}f(s)g'(s)ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{m-1} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-2} f(s)g'(s)ds \\
&= \frac{1}{(\alpha-2)\Gamma(\alpha-2)} \left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{m-2} \left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right) \\
&\quad \times \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-2} f(s)g'(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{m-2} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-3} f(s)g'(s)ds.
\end{aligned}
$$

Par récurrence sur m, on obtient

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{m} I_g^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-m)} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-m-1} f(s)g'(s)ds \\
&= I_g^{\alpha-m} f(t).
\end{aligned}
$$

■

2.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.2.1. [18, 17] *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > 0$ et $f \in L^1_E([a,b])$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α d'une fonction f par rapport à g sur $[a,b]$, notée ${}_aD_g^{R,\alpha} f$, est définie pour tout $t \in [a,b]$ par*

$$
\begin{aligned}
{}_aD_g^{R,\alpha} f(t) &= \left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n} I_g^{n-\alpha} f(t) \qquad (2.4) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha-1} f(s)g'(s)ds,
\end{aligned}
$$

avec $n = [\alpha] + 1$.

Il est clair que si $g(t) = t$, (2.4) est l'intégrale fractionnaire classique de Riemann-Liouville et si $g(t) = \log(t)$, (2.4) est l'intégrale fractionnaire classique de Hadamard.

Exemple 2.2.2. [18]

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha > 0$ et soit $f \equiv c$. On a par la relation (1.3)

$$
\begin{aligned}
{}_aD_g^{R,\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha-1} c g'(s)ds \\
&= \frac{c}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n} \big(g(t)-g(a)\big)^{n-\alpha} \\
&= \frac{c}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right) \big(g(t)-g(a)\big)^{n-\alpha}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{c}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right)^{n-1} \big(g(t)-g(a)\big)^{n-\alpha-1}.$$

Par itération sur n, on trouve

$${}_aD_g^{R,\alpha} f(t) = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \big(g(t)-g(a)\big)^{-\alpha}.$$

Ce qui montre que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas toujours nulle.

2) Soient α, $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ et soit pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = \big(g(t)-g(a)\big)^{\gamma-1}$. On a par la Définition 2.2.1,

$$\begin{aligned}
{}_aD_g^{R,\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right)^{n} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha-1} f(s) g'(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right)^{n} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha-1} \big(g(s)-g(a)\big)^{\gamma-1} g'(s) ds.
\end{aligned}$$

En vertu de l'Exemple 2.1.3*,*

$$\begin{aligned}
{}_aD_g^{R,\alpha} f(t) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(n-\alpha+\gamma)} \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right)^{n} \big(g(t)-g(a)\big)^{n-\alpha+\gamma-1} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(n-\alpha+\gamma)} \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right)^{n-1} \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right) \big(g(t)-g(a)\big)^{n-\alpha+\gamma-1} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(n-\alpha+\gamma)} \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right)^{n-1} \frac{(n-\alpha+\gamma-1)}{g'(t)} g'(t) \big(g(t)-g(a)\big)^{n-\alpha+\gamma-2} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(n-\alpha+\gamma-1)} \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right)^{n-1} \big(g(t)-g(a)\big)^{n-\alpha+\gamma-2} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(n-\alpha+\gamma-1)} \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right)^{n-2} \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right) \big(g(t)-g(a)\big)^{n-\alpha+\gamma-2} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(n-\alpha+\gamma-1)} \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right)^{n-2} \frac{(n-\alpha+\gamma-2)}{g'(t)} g'(t) \big(g(t)-g(a)\big)^{n-\alpha+\gamma-3} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(n-\alpha+\gamma-2)} \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right)^{n-2} \big(g(t)-g(a)\big)^{n-\alpha+\gamma-3}.
\end{aligned}$$

Par itération sur n, on aura

$${}_aD_g^{R,\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \big(g(t)-g(a)\big)^{\gamma-\alpha-1}.$$

2.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

Les résultats de cette section et de la section suivante sont pris de la référence [2].

Définition 2.3.1. *Soient $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > 0$ et $f \in \mathcal{C}_E^n\big([a,b]\big)$.*
La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α de f par rapport à g sur $[a,b]$, notée ${}_aD_g^{C,\alpha}$, est définie par

$$ {}_aD_g^{C,\alpha} f(t) = I_g^{n-\alpha} \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n f(t), \tag{2.5}$$

avec $n = [\alpha] + 1$ pour $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $n = \alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Pour simplifier la notation, on pose

$$ f^{[n]}(t) = \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n f(t). \tag{2.6}$$

Par convention on a si $\alpha = n$ alors ${}_aD_g^{C,\alpha} f(\cdot) = f^{[n]}(\cdot)$.

Dans la suite, on note par $D_g^{\alpha} f$ la dérivée fractionnaire de Caputo au lieu de ${}_aD_g^{C,\alpha} f$.

Remarque 2.3.2. *Si $g(t) = t$, (2.5) est l'intégrale fractionnaire classique de Caputo.*

Théorème 2.3.3. *Soit $f \in \mathcal{C}_E^n\big([a,b]\big)$. Les dérivées fractionnaires de Caputo sont des opérateurs bornés. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > 0$, on a*

$$ \|D_g^{\alpha} f\|_\infty \leq K \|f\|_{\mathcal{C}_g^{[n]}}, $$

où $K = \dfrac{\big(g(b) - g(a)\big)^{n-\alpha}}{\Gamma(n - \alpha + 1)}$.

Preuve. Soit $t \in [a,b]$, nous avons

$$ \big\| f^{[n]}(t) \big\| \leq \|f^{[n]}\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{n} \|f^{[k]}\|_\infty = \|f\|_{\mathcal{C}_g^{[n]}}, $$

alors, par la relation (2.5) et la croissance de g, on obtient

$$\begin{aligned}
\|D_g^\alpha f\|_\infty &= \sup_{t\in[a,b]} \|D_g^\alpha f(t)\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha-1} \big\|f^{[n]}(s)\big\| g'(s)ds \\
&\leq \frac{\|f\|_{\mathcal{C}_g^{[n]}}}{\Gamma(n-\alpha)} \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha-1} g'(s)ds \\
&= \frac{\|f\|_{\mathcal{C}_g^{[n]}}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \sup_{t\in[a,b]} \big(g(t)-g(a)\big)^{n-\alpha} \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{C}_g^{[n]}} \frac{\big(g(b)-g(a)\big)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

■

Exemple 2.3.4. *1) La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante $f(t)=c$ est nulle. En effet , Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha>0$ et pour tout $t\in[a,b]$, nous avons*

$$\begin{aligned}
D_g^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha-1} f^{[n]}(s) g'(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha-1} \left(\frac{1}{g'(s)}\frac{d}{ds}\right)^n (c) g'(s)ds \\
&= 0.
\end{aligned}$$

En remarque que $D_g^\alpha f(a)=0$.

2) Soient α, $\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha>0$, $\gamma>0$ et pour tout $t\in[a,b]$ $f(t)=\big(g(t)-g(a)\big)^{\gamma-1}$. Nous avons,

$$D_g^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha-1} f^{[n]}(s) g'(s)ds. \tag{2.7}$$

On procède comme dans l'Exemple 2.2.2, on trouve par la relation (1.8)

$$\begin{aligned}
f^{[n]}(s) &= \left(\frac{1}{g'(s)}\frac{d}{ds}\right)^n \big(g(s)-g(a)\big)^{\gamma-1} \\
&= \left(\frac{1}{g'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{g'(s)}\frac{d}{ds}\right) \big(g(s)-g(a)\big)^{\gamma-1} \\
&= (\gamma-1)\left(\frac{1}{g'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-1} \big(g(s)-g(a)\big)^{\gamma-2} \\
&= \cdots = (\gamma-1)(\gamma-2)\cdots(\gamma-n)\big(g(s)-g(a)\big)^{\gamma-n-1} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-n)}\big(g(s)-g(a)\big)^{\gamma-n-1}.
\end{aligned}$$

Remplaçant la dernière relation dans (2.7) *on obtient,*

$$D_g^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-n)\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha-1}\big(g(s)-g(a)\big)^{\gamma-n-1} g'(s)ds.$$

En utilisant le changement de variable $g(s) = g(a) + x\big(g(t)-g(a)\big)$*, il résulte que* $\big($*voir Exemple* 2.1.3$\big)$

$$\begin{aligned} D_g^\alpha f(t) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\gamma-n)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\gamma-n)\Gamma(\gamma-\alpha)}\big(g(t)-g(a)\big)^{\gamma-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\big(g(t)-g(a)\big)^{\gamma-\alpha-1}. \end{aligned}$$

Corollaire 2.3.5. *Soient* $\alpha,\ \gamma \in \mathbb{R}$*, tels que* $\alpha > m > \gamma$ *où* $m \in \mathbb{N}$*. Alors*

$$D_g^\gamma I_g^\alpha f(\cdot) = I_g^{\alpha-\gamma} f(\cdot). \tag{2.8}$$

En particulier,

$$D_g^\alpha I_g^\alpha f(\cdot) = f(\cdot). \tag{2.9}$$

Preuve. En utilisant les relations (2.5), (2.3) et (2.2), on trouve $\big($pour $m = [\gamma]+1\big)$ pour tout $t \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} D_g^\gamma I_g^\alpha f(t) &= I_g^{m-\gamma}\left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^m I_g^\alpha f(t) \\ &= I_g^{m-\gamma} I_g^{\alpha-m} f(t) \\ &= I_g^{m-\gamma+\alpha-m} f(t) \\ &= I_g^{\alpha-\gamma} f(t), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

Théorème 2.3.6. *Soient* $f \in \mathcal{C}_E^n\big([a,b]\big)$*,* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $\alpha > 0$*. Nous avons, pour tout* $t \in [a,b]$

$$I_g^\alpha D_g^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{[k]}(a)}{k!}\big(g(t)-g(a)\big)^k. \tag{2.10}$$

Preuve. Soit $t \in [a,b]$. Par (2.5), on a pour $n = [\alpha]+1$,

$$I_g^\alpha D_g^\alpha f(t) = I_g^\alpha I_g^{n-\alpha} f^{[n]}(t).$$

Donc en utilisant la relation (2.2), il vient que

$$\begin{aligned}
I_g^\alpha D_g^\alpha f(t) &= I_g^n f^{[n]}(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-1} f^{[n]}(s) g'(s) ds \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-1} \left(\frac{1}{g'(s)}\frac{d}{ds}\right)^n f(s) g'(s) ds \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-1} \left(\frac{1}{g'(s)}\frac{d}{ds}\right)\left(\frac{1}{g'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-1} f(s) g'(s) ds \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-1} \frac{d}{ds} f^{[n-1]}(s) ds.
\end{aligned}$$

Utilisant l'intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}
I_g^\alpha D_g^\alpha f(t) &= \frac{1}{(n-1)!} \big(g(t)-g(s)\big)^{n-1} f^{[n-1]}(s)\big)\Big|_a^t \\
&\quad + \frac{1}{(n-2)!} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-2} g'(s) f^{[n-1]}(s) ds \\
&= -\frac{f^{[n-1]}(a)}{(n-1)!} \big(g(t)-g(a)\big)^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-2} \frac{d}{ds} f^{[n-2]}(s) ds.
\end{aligned}$$

De manière Similaire, on trouve

$$\begin{aligned}
I_g^\alpha D_g^\alpha f(t) &= -\frac{f^{[n-1]}(a)}{(n-1)!} \big(g(t)-g(a)\big)^{n-1} - \frac{f^{[n-2]}(a)}{(n-2)!} \big(g(t)-g(a)\big)^{n-2} \\
&\quad + \frac{1}{(n-3)!} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-3} g'(s) f^{[n-2]}(s) ds \\
&= -\frac{f^{[n-1]}(a)}{(n-1)!} \big(g(t)-g(a)\big)^{n-1} - \frac{f^{[n-2]}(a)}{(n-2)!} \big(g(t)-g(a)\big)^{n-2} \\
&\quad + \frac{1}{(n-3)!} \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-3} \frac{d}{ds} f^{[n-3]}(s) ds \\
&= \cdots = \int_a^t \frac{d}{ds} f(s) ds - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{[k]}(a)}{k!} \big(g(t)-g(a)\big)^k \\
&= f(t) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{[k]}(a)}{k!} \big(g(t)-g(a)\big)^k \\
&= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{[k]}(a)}{k!} \big(g(t)-g(a)\big)^k,
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. ■

2.4 Relation entre la dérivée de Caputo et la dérivée de Riemann-Liouville

Théorème 2.4.1. *Si $f \in \mathcal{C}_E^n\big([a,b]\big)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > 0$, alors*

$$D_g^{\alpha} f(t) = {}_aD_g^{R,\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{[k]}(a)}{k!}\big(g(t)-g(a)\big)^k\right] \text{ pour tout } t \in [a,b]. \tag{2.11}$$

Preuve. D'après la Définition 2.2.1, on a $\big($avec $n = [\alpha]+1)\big)$

$$\begin{aligned}
&\Gamma(n-\alpha)\ {}_aD_g^{R,\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{[k]}(a)}{k!}\big(g(t)-g(a)\big)^k\right] \\
&\quad = \left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha-1}\left[f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{[k]}(a)}{k!}\big(g(s)-g(a)\big)^k\right] ds.
\end{aligned}$$

En intégrant par part, il vient que

$$\begin{aligned}
&\Gamma(n-\alpha)\ {}_aD_g^{R,\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{[k]}(a)}{k!}\big(g(t)-g(a)\big)^k\right] \\
&\quad = \left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n \Bigg(-\frac{1}{n-\alpha}\big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha}\left[f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{[k]}(a)}{k!}\big(g(s)-g(a)\big)^k\right]\Bigg|_a^t \\
&\qquad + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha}\left[\frac{d}{ds}f(s) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{[k]}(a)}{(k-1)!}g'(s)\big(g(s)-g(a)\big)^{k-1}\right]\Bigg) \\
&\quad = \left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n \Bigg(-\frac{1}{n-\alpha}\big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha}\left[f(s) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{[k]}(a)}{k!}\big(g(s)-g(a)\big)^k\right]\Bigg|_a^t \\
&\qquad + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha}\left[\frac{d}{ds}f(s) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{[k]}(a)}{(k-1)!}g'(s)\big(g(s)-g(a)\big)^{k-1}\right]\Bigg) \\
&\quad = \frac{1}{n-\alpha}\left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha}\left[\frac{d}{ds}f(s) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{[k]}(a)}{(k-1)!}g'(s)\big(g(s)-g(a)\big)^{k-1}\right] ds.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

De plus, comme $f^{[1]}(s) = \left(\frac{1}{g'(s)}\frac{d}{ds}\right) f(s)$, on a

$$\frac{d}{ds}f(s) = g'(t)f^{[1]}(s). \tag{2.13}$$

Remplaçant la relation (2.13) dans (2.12), on a

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(n-\alpha)\ {}_aD_g^{R,\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{[k]}(a)}{k!}\big(g(t)-g(a)\big)^k\right]\\
&=\frac{1}{n-\alpha}\left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n\int_a^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha}\left[f^{[1]}(s)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{[k]}(a)}{(k-1)!}\big(g(s)-g(a)\big)^{k-1}\right]ds\\
&=\frac{1}{n-\alpha}\left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)\int_a^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha}\\
&\qquad\times\left[f^{[1]}(s)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{[k]}(a)}{(k-1)!}\big(g(s)-g(a)\big)^{k-1}\right]ds\\
&=\left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n-1}\int_a^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha-1}\left[f^{[1]}(t)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{[k]}(a)}{(k-1)!}\big(g(s)-g(a)\big)^{k-1}\right]ds.
\end{aligned}
$$

De la même façon, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(n-\alpha)\ {}_aD_g^{R,\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{[k]}(a)}{k!}\big(g(t)-g(a)\big)^k\right]\\
&=\left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n-2}\int_a^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha-1}\left[f^{[2]}(t)-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{f^{[k]}(a)}{(k-2)!}\big(g(s)-g(a)\big)^{k-2}\right]ds,
\end{aligned}
$$

et par itération sur n, il résulte que

$$
\Gamma(n-\alpha)D_g^{\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{[k]}(a)}{k!}\big(g(t)-g(a)\big)^k\right]=\int_a^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha-1}f^{[n]}(s)ds.
$$

Par conséquence,

$$
\begin{aligned}
{}_aD_g^{\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{[k]}(a)}{k!}\big(g(t)-g(a)\big)^k\right]&=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha-1}f^{[n]}(s)ds\\
&=D_g^{\alpha}f(t).
\end{aligned}
$$

■

Remarque 2.4.2. *Si $f^{[k]}(a)=0$ pour tout $k=0,\dots,n-1$, alors*

$$D_g^{\alpha}f(\cdot)={}_aD_g^{R,\alpha}f(\cdot). \tag{2.14}$$

Théorème 2.4.3. (*Additivité de la dérivée*) *Soient $\alpha,\ \gamma\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha>0$, $\gamma>0$ et supposons qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ avec $\gamma,\ \alpha+\gamma\in[k-1,k]$. Alors, pour tout $f\in\mathcal{C}_E^k\big([a,b]\big)$,*

$$D_g^{\alpha}D_g^{\gamma}f(\cdot)=D_g^{\alpha+\gamma}f(\cdot). \tag{2.15}$$

Preuve. Dans le premier cas, supposons que $\alpha + \gamma = k$.
Comme $\gamma \in [k-1, k[$, on a alors $[\gamma] = k - 1 = \alpha + \gamma - 1$. Par définition, on a pour tout $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} D_g^\alpha D_g^\gamma f(t) &= D_g^\alpha I_g^{k-\gamma} f^{[k]}(t) \\ &= D_g^\alpha I_g^{\alpha+\gamma-\gamma} f^{[\alpha+\gamma]}(t) \\ &= D_g^\alpha I_g^\alpha f^{[\alpha+\gamma]}(t). \end{aligned}$$

Par la relation (2.9), on trouve

$$D_g^\alpha D_g^\gamma f(t) = f^{[\alpha+\gamma]}(t).$$

Puisque $\alpha + \gamma = k \in \mathbb{N}$, il résulte que,

$$D_g^\alpha D_g^\gamma f(t) = D_g^{\alpha+\gamma} f(t).$$

Dans le deuxième cas, supposons que $\alpha + \gamma < k$. Comme $\gamma \in [k-1, k[$ alors, $0 < \alpha < 1$ et donc $k - 1 \leq \alpha + \gamma < k$. D'où,

$$[\gamma] = [\alpha + \gamma] = k - 1.$$

Puisque, $D_g^\gamma f(a) = 0$, par la relation (2.14), on obtient pour tout $t \in [a, b]$

$$D_g^\alpha D_g^\gamma f(t) = D_g^{R,\alpha} D_g^\gamma f(t).$$

Donc d'après les relations (2.4), (2.5), (2.2), et (2.3) on a $\big($rappalons que $0 < \alpha < 1\big)$

$$\begin{aligned} D_g^\alpha D_g^\gamma f(t) &= \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt}\right) I_g^{1-\alpha} D_g^\gamma f(t) \\ &= \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt}\right) I_g^{1-\alpha} I^{k-\gamma} f^{[k]}(t) \\ &= \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt}\right) I_g^{1-\alpha+k-\gamma} f^{[k]}(t) \\ &= \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt}\right) I_g^1 I^{k-(\alpha+\gamma)} f^{[k]}(t) \\ &= \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt}\right) I_g^1 D^{\alpha+\gamma} f(t) \\ &= D^{\alpha+\gamma} f(t), \end{aligned}$$

car $\left(\dfrac{1}{g'(t)} \dfrac{d}{dt}\right) I_g^1 h(\cdot) = h(\cdot)$ et $k = [\alpha + \gamma] + 1$. ■

2.5 La transformée de Laplace généralisée

Dans cette section, nous présentons la définition de la transformée de Laplace généralisée ainsi que ses propriétés principales. Pour plus de détails, nous revoyons la lecteur à [18].

Définition 2.5.1. *Soient $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f \in L^1_{\mathbb{R}}\big([a, +\infty[\big)$, $g(\cdot)$ est continue et $g'(\cdot) > 0$ sur $[a, +\infty[$. On définit la transformée de Laplace généralisée de f par*

$$\mathcal{L}_g\{f(t)\}(s) = \int_a^{+\infty} e^{-s\big(g(t)-g(a)\big)} f(t)g'(t)dt. \tag{2.16}$$

Pour toutes valeurs de s dans $\mathbb{R}_+$, l'intégrale (2.16) est bien définie.

Dans le théorème suivant, nous représentons la relation entre les transformées de Laplace généralisée et classique.

Théorème 2.5.2. *Soient $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $g(\cdot)$ est continue et $g'(\cdot) > 0$ sur $[a, +\infty[$ et la transformée de Laplace généralisée de f existe. Alors*

$$\mathcal{L}_g\big\{f(t)\big\}(s) = \mathcal{L}\Big\{f\Big(g^{-1}\big(t + g(a)\big)\Big)\Big\}(s), \tag{2.17}$$

où $\mathcal{L}\{f\}$ est la transformée de Laplace classique de f.

Preuve. Par la Définition 2.5.1, nous avons

$$\mathcal{L}_g\{f(t)\}(s) = \int_a^{+\infty} e^{-s\big(g(t)-g(a)\big)} f(t)g'(t)dt.$$

En utilisant le changement de variable $u = g(t) - g(a)$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g\{f(t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-su} f\Big(g^{-1}\big(u + g(a)\big)\Big)du \\ &= \mathcal{L}\Big\{f\Big(g^{-1}\big(t + g(a)\big)\Big)\Big\}(s).\end{aligned}$$

■

Définition 2.5.3. *Une fonction $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est dite d'ordre $g(t)$-exponentiel s'il existe des constantes positives M, c, T telles que*

$$|f(t)| \leq Me^{cg(t)} \text{ pour tout } t \geq T.$$

Maintenant, nous présentons les conditions d'existence de la transformée de Laplace généralisée d'une fonction.

Théorème 2.5.4. *Si $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux et d'ordre $g(t)$-exponentiel. Alors sa transformée de Laplace généralisée existe pour tout $s > c$ (c est donnée dans la Définition 2.5.3).*

Preuve. Nous avons,

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{L}_g\{f(t)\}(s)\right| &= \left|\int_a^{+\infty} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} f(t)g'(t)dt\right| \\ &\leq \int_a^{+\infty} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} \left|f(t)\right| g'(t)dt.\end{aligned}$$

f étant d'ordre $g(t)$-exponentiel. Donc par la Définition 2.5.3, ils exist $M > 0,\ c > 0$, $T > 0$ telle que pour tout $t \geq T$,

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{L}_g\{f(t)\}(s)\right| &\leq M \int_a^{+\infty} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} e^{cg(t)} g'(t)dt \\ &= Me^{sg(a)} \int_a^{+\infty} e^{g(t)(c-s)} g'(t)dt \\ &= \frac{Me^{sg(a)}}{c-s} e^{g(t)\left(c-s\right)}\Big|_a^{+\infty}.\end{aligned}$$

Puisque $s > c$, on obtient

$$\left|\mathcal{L}_g\{f(t)\}(s)\right| \leq \frac{M}{s-c} e^{cg(a)} < +\infty.$$

D'où le résultat. ■

Théorème 2.5.5. *Si la transformée de Laplace généralisée de $f_1 : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ existe pour $s > c_1$ et la transformée de Laplace généralisée de $f_2 : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ existe pour $s > c_2$. Alors, pour $a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$, la transformée de Laplace généralisée de $a_1 f_1 + a_2 f_2$ existe et on a*

$$\mathcal{L}_g\left\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\right\}(s) = a_1 \mathcal{L}_g\{f_1(t)\}(s) + a_2 \mathcal{L}_g\{f_2(t)\}(s) \quad \textit{pour } s > \max\{c_1, c_2\}. \tag{2.18}$$

Exemple 2.5.6. *1) Soit $s > 0$ et soit $f \equiv 1$ une fonction définie sur $[a, +\infty[$. En utilisant la relation* (2.17)*, on trouve*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{f\left(g^{-1}\left(t + g(a)\right)\right)\right\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{1\}(s) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s}\end{aligned}$$

2) Soient $s > 0$, $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(\gamma) > 0$ et $f(t)=\big(g - g(a)\big)^{\gamma-1}$ une fonction définie sur $[a, +\infty[$. Par la relation (2.17)*, nous avons*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\Big\{f\Big(g^{-1}\big(t+g(a)\big)\Big)\Big\}(s)\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st}\bigg(g\Big(g^{-1}\big(t+g(a)\big)\Big) - g(a)\bigg)^{\gamma-1} dt\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st}t^{\gamma-1}dt.\end{aligned}$$

Par le changement de variable $u = st$, on obtient $\big($via la relation (1.2)$\big)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g\{f(t)\}(s) &= \frac{1}{s^\gamma}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\gamma-1}du\\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{s^\gamma}.\end{aligned}$$

3) Soient $s > 0$ tel que $s > \lambda$, $f(t) = e^{\lambda g(t)}$ une fonction définie sur $[a, +\infty[$. De la relation (2.17)*, on a*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\Big\{f\Big(g^{-1}\big(t+g(a)\big)\Big)\Big\}(s)\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{\lambda g\left(g^{-1}\left(t+g(a)\right)\right)}dt\\ &= e^{\lambda g(a)}\int_0^{+\infty} e^{t(\lambda-s)}dt\\ &= \frac{e^{\lambda g(a)}}{\lambda-s}e^{t(\lambda-s)}\Big|_0^{+\infty},\end{aligned}$$

puisque $s > \lambda$, alors

$$\mathcal{L}_g\{f(t)\}(s) = \frac{e^{\lambda g(a)}}{\lambda - s}.$$

Les transformées de Laplace généralisées des dérivées généralisées d'ordre entier sont présentées ci-dessous.

Théorème 2.5.7. *Soit $f(\cdot) \in \mathcal{C}_g\big([a, b], \mathbb{R}\big)$ une fonction d'ordre $g(t)$-exponentiel telle que $f^{[1]}(\cdot)$ est continue par morceaux sur tout intervalle fini $[a, b]$. Alors la transformée de Laplace généralisée de $f^{[1]}(\cdot)$ existe, et on a*

$$\mathcal{L}_g\{f^{[1]}(t)\}(s) = s\mathcal{L}_g\{f(t)\}(s) - f(a). \tag{2.19}$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t_1, t_2, \dots, t_n \in]a, b[$ sont les points de l'intervalle $[a, b[$ où $f^{[1]}$ est discontinue. Alors par (2.13), nous avons

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} f^{[1]}(t)g'(t)dt &= \int_a^b e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} \frac{d}{dt}f(t)dt \\
&= \int_a^{t_1} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} \frac{d}{dt}f(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} \frac{d}{dt}f(t)dt + \dots \\
&\quad + \int_{t_n}^{b} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} \frac{d}{dt}f(t)dt \\
&= \int_a^{t_1} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} \frac{d}{dt}f(t)dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} \frac{d}{dt}f(t)dt \\
&\quad + \int_{t_n}^{b} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} \frac{d}{dt}f(t)dt.
\end{aligned}$$

L'intégration par partie nous amène,

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} f^{[1]}(t)g'(t)dt &= e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} f(t)\Big|_a^{t_1} + s\int_a^{t_1} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} f(t)g'(t)dt \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} f(t)\Big|_{t_i}^{t_{i+1}} + s\sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} f(t)g'(t)dt \\
&\quad + e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} f(t)\Big|_{t_n}^{b} + s\int_{t_n}^{b} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} f(t)g'(t)dt \\
&= e^{-s\left(g(t_1)-g(a)\right)} f(t_1) - f(a) + e^{-s\left(g(t_2)-g(a)\right)} f(t_2) \\
&\quad - e^{-s\left(g(t_1)-g(a)\right)} f(t_1) + \dots + e^{-s\left(g(t_n)-g(a)\right)} f(t_n) \\
&\quad - e^{-s\left(g(t_{n-1})-g(a)\right)} f(t_{n-1}) + e^{-s\left(g(b)-g(a)\right)} f(b) \\
&\quad - e^{-s\left(g(t_n)-g(a)\right)} f(t_n) + s\Bigg[\int_a^{t_1} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} f(t)g'(t)dt \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} f(t)g'(t)dt + \int_{t_n}^{b} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} f(t)g'(t)dt\Bigg].
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_a^b e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} f^{[1]}(t)g'(t)dt = e^{-s\left(g(b)-g(a)\right)} f(b) - f(a) + s\int_a^b e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} f(t)g'(t)dt.$$

En faisant tendre b vers $+\infty$, on obtient Le résultat. ∎

Le résultat du Théorème 2.5.7 peut être généralisé comme suit.

Corollaire 2.5.8. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}_g^{n-1}([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f^{[i]}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, sont d'ordre $g(t)$-exponentiel. Soit $f^{[n]}$ une fonction continue par morceaux sur l'intervalle*

$[a, b]$. *Alors, la transformée de Laplace généralisée de* $f^{[n]}$ *existe et*

$$\mathcal{L}_g\{f^{[n]}(t)\}(s) = s^n \mathcal{L}_g\{f(t)\}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{[k]}(a). \tag{2.20}$$

Preuve. Par la Définition 2.5.1 et la relation (2.13) , on a

$$s^n \mathcal{L}_g\{f(t)\}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{[k]}(a) = s^n \int_a^{+\infty} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} f(t) g'(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{[k]}(a)$$

Utilisant l'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
s^n \mathcal{L}_g\{f(t)\}(s) &- \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{[k]}(a) \\
&= s^{n-1}\Big[- e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} f(t)\Big]\Big|_a^{+\infty} + s^{n-1} \int_a^{+\infty} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} \frac{d}{dt} f(t) dt \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{[k]}(a) \\
&= s^{n-1} f(a) + s^{n-1} \int_a^{+\infty} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} \frac{d}{dt} f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{[k]}(a) \\
&= s^{n-1} \int_a^{+\infty} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} \frac{d}{dt} f(t) dt - \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-k-1} f^{[k]}(a) \\
&= s^{n-1} \int_a^{+\infty} g'(t) e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} f^{[1]}(t) dt - \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-k-1} f^{[k]}(a) \\
&= s^{n-2}\Big[- e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} f^{[1]}(t)\Big]\Big|_a^{+\infty} + s^{n-2} \int_a^{+\infty} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} \frac{d}{dt} f^{[1]}(t) dt \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-k-1} f^{[k]}(a) \\
&= s^{n-2} f^{[1]}(a) + s^{n-2} \int_a^{+\infty} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} g'(t) f^{[2]}(t) dt - \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-k-1} f^{[k]}(a) \\
&= s^{n-2} \int_a^{+\infty} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} g'(t) f^{[2]}(t) dt - \sum_{k=2}^{n-1} s^{n-k-1} f^{[k]}(a).
\end{aligned}$$

Par itération sur n, on a

$$s^n \mathcal{L}_g\{f(t)\}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{[k]}(a) = s \int_a^{+\infty} e^{-s\left(g(t)-g(a)\right)} g'(t) f^{[n-1]}(t) dt - f^{[n-1]}(a)$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big[- e^{-s\big(g(t)-g(a)\big)} f^{[n-1]}(t) \Big]\Big|_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} e^{-s\big(g(t)-g(a)\big)} g'(t) f^{[n]}(t)dt \\
&\quad - f^{[n-1]}(a) \\
&= \int_a^{+\infty} e^{-s\big(g(t)-g(a)\big)} g'(t) f^{[n]}(t)dt \\
&= \mathcal{L}_g\{f^{[n]}(t)\}(s).
\end{aligned}
$$

■

Pour pouvoir trouver les transformées généralisées des opérateurs fractionnaires généralisées, nous devons définir l'intégrale du produit de convolution généralisé.

Définition 2.5.9. *Soient f et h deux fonctions continues par morceaux sur chaque intervalle $[a, b]$ et d'ordre $g(t)$-exponentiel. On définit le produit de convolution généralisé de f et h par*

$$(f *_g h)(t) = \int_a^t f(\tau) h\Big(g^{-1}\big(g(t) + g(a) - g(\tau)\big)\Big) g'(\tau)d\tau. \tag{2.21}$$

Lemme 2.5.10. *Soient f et h deux fonctions continues par morceaux sur chaque intervalle $[a, b]$ et d'ordre $g(t)$-exponentiel. Alors*

$$f *_g h = h *_g f. \tag{2.22}$$

Preuve. Par la Définition 2.5.9, on a pour tout $t \in [a, b]$

$$(f *_g h)(t) = \int_a^t f(\tau) h\Big(g^{-1}\big(g(t) + g(a) - g(\tau)\Big) g'(\tau)d\tau.$$

Utilisant le changement de variable $u = g^{-1}\big(g(t) + g(a) - g(\tau)\big)$, on trouve

$$
\begin{aligned}
(f *_g h)(t) &= - \int_t^a f\Big(g^{-1}\big(g(t) + g(a) - g(u)\big)\Big) h(u) g'(u)du \\
&= \int_a^t h(u) f\Big(g^{-1}\big(g(t) + g(a) - g(u)\big)\Big) g'(u)du \\
&= h *_g f(t).
\end{aligned}
$$

■

Théorème 2.5.11. *Soient f et h deux fonctions continues par morceaux sur chaque intervalle $[a, b]$ et d'ordre $g(t)$-exponentiel. Alors*

$$\mathcal{L}_g\{f *_g h\} = \mathcal{L}_g\{f\}\mathcal{L}_g\{h\}. \tag{2.23}$$

Preuve. Nous avons, par la relation (2.16)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g\{f\}(s)\mathcal{L}_g\{h\}(s) &= \int_a^{+\infty} e^{-s\big(g(t)-g(a)\big)} f(t)g'(t)dt \int_a^{+\infty} e^{-s\big(g(u)-g(a)\big)} f(u)g'(u)du \\ &= \int_a^{+\infty}\int_a^{+\infty} e^{-s\big(g(t)+g(u)-2g(a)\big)} f(t)h(u)g'(t)g'(u)dtdu.\end{aligned}$$

Maintenant, en choisissant τ tel que $g(\tau) = g(t) + g(u) - g(a)$, on obtient

$$\mathcal{L}_g\{f\}(s)\mathcal{L}_g\{h\}(s) = \int_a^{+\infty}\int_u^{+\infty} e^{-s\big(g(\tau)-g(a)\big)} f\Big(g^{-1}\big(g(\tau) - g(u) + g(a)\big)\Big)h(u)g'(\tau)g'(u)d\tau du.$$

En utilisant le théorème de Fubini (Théorème 1.3.11), on aura par (2.21), (2.16)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g\{f\}(s)\mathcal{L}_g\{h\}(s) &= \int_a^{+\infty} e^{-s\big(g(\tau)-g(a)\big)} \left[\int_a^{\tau} f\Big(g^{-1}\big(g(\tau) - g(u) - g(a)\big)\Big)h(u)g'(u)du\right]g'(\tau)d\tau \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-s\big(g(\tau)-g(a)\big)} (h *_g f)(\tau)g'(\tau)d\tau \\ &= \mathcal{L}_g\{h *_g f\}(s).\end{aligned}$$

Par conséquence du Lemme 2.5.10, on déduit que

$$\mathcal{L}_g\{f\}(s)\mathcal{L}_g\{h\}(s) = \mathcal{L}_g\{f *_g h\}(s).$$

■

Maintenant, nous avons tous les arguments pour calculer la transformée de Laplace généralisée des opérateurs fractionnaires généralisées.

Théorème 2.5.12. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > 0$ et f une fonction continue par morceaux sur chaque intervalle $[a, t[$ et d'ordre $g(t)$-exponentiel. Alors*

$$\mathcal{L}_g\{I_g^{\alpha} f(t)\}(s) = \frac{\mathcal{L}_g\{f(t)\}}{s^{\alpha}}. \tag{2.24}$$

Preuve. Par les relations (2.21), (2.22) et la Définition 2.1.1, nous avons

$$\begin{aligned}\big(g(t) - g(a)\big)^{\alpha-1} *_g f(t) &= f(t) *_g \big(g(t) - g(a)\big)^{\alpha-1} \\ &= \int_a^t f(\tau)\Big(g\Big(g^{-1}\big(g(t) + g(a) - g(\tau)\big)\Big) - g(a)\Big)^{\alpha-1} g'(\tau)d\tau \\ &= \int_a^t f(\tau)\big(g(t) - g(\tau)\big)^{\alpha-1}g'(\tau)d\tau \\ &= \Gamma(\alpha)\ I_g^{\alpha} f(t).\end{aligned}$$

Il s'ensuit que,

$$\mathcal{L}_g\{I_g^\alpha f(t)\}(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathcal{L}_g\Big\{\big(g(t)-g(a)\big)^{\alpha-1} *_g f(t)\Big\}(s).$$

Par le Théorème 2.5.11 on a,

$$\mathcal{L}_g\{I_g^\alpha f(t)\}(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathcal{L}_g\Big\{\big(g(t)-g(a)\big)^{\alpha-1}\Big\}(s)\mathcal{L}_g\{f(t)\}(s).$$

En utilisant 2) de l'Exemple 2.5.6, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g\{(I_g^\alpha f)(t)\}(s) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha}\mathcal{L}_g\{f(t)\}(s)\\ &= \frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_g\{f(t)\}(s).\end{aligned}$$

■

Les corollaires suivants présentent les transformées de Laplace généralisées des dérivées fractionnaires généralisées à gauche de Riemann-Liouville et de Caputo.

Corollaire 2.5.13. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, et f, g deux fonctions telles que $f \in AC_g^n([a,b],\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^1\big([a,b]\big)$ et $g'(t) > 0$ pour tout $b > a$. De plus, $I_g^{n-k-\alpha}f$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ d'ordre $g(t)$-exponentiel avec $n-\alpha > k$. Alors*

$$\mathcal{L}_g\{\,{}_aD_g^{R,\alpha} f(t)\}(s) = s^\alpha\mathcal{L}_g\{f(t)\}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} I_g^{n-k-\alpha} f(a). \tag{2.25}$$

Preuve. Grâce à (2.4), nous avons

$$\mathcal{L}_g\{\,{}_aD_g^{R,\alpha} f(t)\}(s) = \mathcal{L}_g\Big\{\big(I_g^{n-\alpha}f\big)^{[n]}(t)\Big\}(s).$$

En vertu du Corollaire 2.5.8 et du Théorème 2.5.12, on obtient alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g\{\,{}_aD_g^{R,\alpha} f(t)\}(s) &= s^n\mathcal{L}_g\Big\{I_g^{n-\alpha}f(t)\Big\}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\big(I_g^{n-\alpha}f\big)^{[k]}(a)\\ \mathcal{L}_g\{\,{}_aD_g^{R,\alpha} f(t)\}(s) &= s^n\frac{\mathcal{L}_g\{f(t)\}(s)}{s^{n-\alpha}} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\big(I_g^{n-\alpha}f\big)^{[k]}(a)\\ &= s^\alpha\mathcal{L}_g\{f(t)\}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\big(I_g^{n-\alpha}f\big)^{[k]}(a).\end{aligned}$$

Par conséquent, du Théorème 2.1.5 on obtient,

$$\mathcal{L}_g\{\,{}_aD_g^{R,\alpha} f(t)\}(s) = s^\alpha\mathcal{L}_g\{f(t)\}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\big(I_g^{n-\alpha-k}f\big)(a).$$

D'où le résultat. ■

Corollaire 2.5.14. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > 0$, $f \in AC_g^n\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et $f^{[k]}$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ d'ordre $g(t)$-exponentiel avec $n = [\alpha] + 1$. Alors*

$$\mathcal{L}_g\big\{D_g^\alpha f(t)\big\}(s) = s^\alpha\Big[\mathcal{L}_g\big\{f(t)\big\}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{[k]}(a)\Big]. \tag{2.26}$$

Preuve. Par la relation (2.5), nous avons

$$\mathcal{L}_g\big\{D_g^\alpha f(t)\big\}(s) = \mathcal{L}_g\big\{I_g^{n-\alpha} f^{[n]}(t)\big\}(s).$$

Le Théorème 2.5.12 affirme que,

$$\mathcal{L}_g\big\{D_g^\alpha f(t)\big\}(s) = s^{\alpha-n}\mathcal{L}_g\big\{f^{[n]}(t)\big\}(s).$$

Il résulte de (2.20) que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g\big\{\big(D_g^\alpha\big) f(t)\big\}(s) &= s^{\alpha-n}\Big[s^n\mathcal{L}_g\{f(t)\}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{[k]}(a)\Big]\\ &= s^\alpha\Big[\mathcal{L}_g\{f(t)\}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{[k]}(a)\Big].\end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Étude d'une inclusion différentielle fractionnaire avec impulsion

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence, l'unicité et la stabilité de solution pour une inclusion différentielle impulsive d'ordre fractionnaire du type suivant ([26]) :

$$\begin{cases} D_g^{\alpha}u(t) \in F(t,u(t)) & t \in J=[0,T] \quad \text{avec} \quad t \neq t_k, \quad k=1,2,\ldots,p; \\ \delta u^{[i]}(t_k) = \mathscr{I}_{ik}(u(t_k)) & i=0,1,\ldots,m-1; \quad k=1,2,\ldots,p; \\ u^{[i]}(0)=\eta_i & i=0,1,\ldots,m-1; \end{cases} \tag{3.1}$$

où $D_g^{\alpha}(\cdot)$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α par rapport à g, avec $m-1<\alpha\leq m$, $m\in\mathbb{N}^*$, $F: J\times\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application, $\eta_i\in\mathbb{R}$ et $\mathscr{I}_{ik}\in\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathbb{R}^n\big)$ $(i=0,1,\cdots,m-1;\ k=1,\cdots,p)$, $p\in\mathbb{N}^*$.
De plus, $u^{[i]}: J\to\mathbb{R}^n$ est une fonction continue par morceaux dans J avec des points de discontinué de première espèce aux points $t_k\in J$, i.e., il existe des limites $u^{[i]}(t_k^+)<+\infty$ et $u^{[i]}(t_k^-)=u^{[i]}(t_k)<+\infty$, $u^{[m]}: J\to\mathbb{R}^n$ et $\delta u^{[i]}(t_k)=u^{[i]}(t_k^+)-u^{[i]}(t_k^-)$ $(i=0,1,\cdots,m-1;\ k=1,2,\cdots,p)$. On note par J_k l'intervalle $]t_k,t_{k+1}]$.
Dans tout ce chapitre, $PC(J,\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Banach défini par

$$\begin{aligned} PC(J,\mathbb{R}^n) = \Big\{ u: J\to\mathbb{R}^n |\ & u_k\in\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}(J_k),\ k=1,\cdots,p \\ & \text{et il existe } u(t_k^-) \text{ et } u(t_k^+) \text{ où } u(t_k^-)=u(t_k)\Big\}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{PC} = \max\big\{\|u_k\|_\infty;\ k=1,\cdots,p\big\},$$

où u_k est la restriction de u sur $J_k,\ k=0,\dots,p$. On suppose de plus que g' est croissante. Pour montrer notre théorème, on aura besoin des hypothèses suivantes:

$(\mathcal{H}_1)$ Ils existe des constantes positives $c_{ik}>0$ telle que

$$\Big\|\mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big)-\mathscr{I}_{ik}\big(v(t_k)\big)\Big\|\le c_{ik}\Big\|u(t_k)-v(t_k)\Big\| \text{ pour tous } u,v\in PC(J,\mathbb{R}^n),$$

avec $\mathscr{I}_{ik}(0)=0,\ i=0,1,\cdots,m-1;\ k=1,\cdots,p$.

$(\mathcal{H}_2)$ $F:J\times\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ est une multi-application à valeurs non vides compactes et décomposables telle que $(t,u)\to F(t,u)$ est $\mathscr{L}\otimes\mathscr{B}$- mesurable et $u\to F(t,u)$ est s.c.i. p.p. $t\in J$.

$(\mathcal{H}_3)$ Il existe une fonction positive $M(\cdot)\in L^1_{\mathbb{R}}(J)$ telle que

$$\|F(t,u)\|=\sup\Big\{\|v|;\ v\in F(\cdot,u)\Big\}\le M(t) \text{ pour chaque } t\in J,\ u\in\mathbb{R}^n.$$

3.1 Préliminaires

Nous allons commencer par rappeler quelques résultats qui nous seront utiles dans la preuve du nos théorèmes principaux.

Théorème 3.1.1. [26](***Théorème d'Ascoli-Arzelà de type-***PC)
Soit $H\subset PC(J,\mathbb{R}^n)$. Alors H est relativement compact si et seulement s'il est uniformément borné et équicontinu sur chaque intervalle J_k $(k=0,\cdots,p)$.

Définition 3.1.2. [26] *Soient (X,d) un espace métrique séparable et $F:X\rightrightarrows L^1_{\mathbb{R}^n}(J)$ une multi-application. On dit que F possède la propriété (BC) si et seulement si*

1. *F est s.c.i.*
2. *F à valeurs non vides fermées et décomposables.*

Définition 3.1.3. [26](***Opérateur de Nemitsky***) *Soit $F:J\times\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ une multi-application à valeurs non vides compactes. On définit l'opérateur multivoque $\mathscr{F}:PC(J,\mathbb{R}^n)\rightrightarrows L^1_{\mathbb{R}^n}(J)$ par*

$$\mathscr{F}(u)=\Big\{v\in L^1_{\mathbb{R}^n}(J),\ v(t)\in F\big(t,u(t)\big)\ p.p.\ t\in J\Big\}. \tag{3.3}$$

$\mathscr{F}$ est appelée l'opérateur de Nemitsky associé à F.

Définition 3.1.4. [26] *Soit $F:J\times\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ une multi-application à valeurs non vides compactes. On dit que F est de type s.c.i. si l'opérateur de Nemitsky $\mathscr{F}$ est s.c.i. à valeurs non vides fermées et décomposables i.e., $\mathscr{F}$ possède la propriété (BC).*

Théorème 3.1.5. [8](***Théorème de sélection de Bressan-Colombo***) *Soit* (X, d) *un espace métrique séparable et* $F : X \rightrightarrows L^1_{\mathbb{R}^n}(J)$ *un opérateur multivoque possédant la propriété* (BC). *Alors* F *admet une sélection continue, i.e., il existe une fonction continue* $f : X \to L^1_{\mathbb{R}^n}(J)$ *telle que* $f(x) \in F(x)$ *pour tout* $x \in X$.

Lemme 3.1.6. [14] *Soit* $F : J \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *une multi-application à valeurs non vides compactes satisfaisant* $(\mathcal{H}_2)$ *et* $(\mathcal{H}_3)$. *Alors* F *est de type s.c.i.*

Preuve. Par la Définition 3.1.4, pour montrer que F est de type s.c.i., il suffit de montrer que l'opérateur de Nemitsky $\mathscr{F}$ associé à F est s.c.i. à valeurs non vides fermées et décomposables.

• Montrons que $\mathscr{F}$ est à valeurs non vides.

Puisque F satisfait l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$, par la Proposition 1.5.10, on déduit que F admet une sélection mesurable i.e., il existe une fonction mesurable $v : J \to \mathbb{R}^n$ telle que $v(t) \in F(t, u(t))$ pour tout $t \in J$. De plus, d'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$ et la relation (3.1.3) pour tout $t \in J$

$$\begin{aligned}\int_0^T \|v(t)\| dt &\leq \int_0^T \sup_{t\in J} \|v(t)\| dt \\ &\leq \int_0^T M(t) dt < +\infty,\end{aligned}$$

donc $v(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}^n}(J)$. C'est-à-dire, il existe une fonction $v \in L^1_{\mathbb{R}^n}(J)$ telle que $v(t) \in F(t, u(t))$ p.p., d'où la nonvacuité de $\mathscr{F}$.

• Montrons que $\mathscr{F}$ est à valeurs décomposables.

Soit A un ensemble mesurable et soient $v, w \in \mathscr{F}(u)$, on montre que

$$v\chi_A + w(1 - \chi_A) \in \mathscr{F}(u),$$

i.e.,

$$v(t)\chi_A(t) + w(t)(1 - \chi_A(t)) \in F\big(t, u(t)\big) \text{ p.p. } t \in J.$$

Nous avons,

$$\begin{aligned} v \in \mathscr{F}(u) &\Leftrightarrow v \in L^1_{\mathbb{R}^n}(J) \text{ et } v(t) \in F\big(t, u(t)\big) \text{ p.p. } t \in J \\ w \in \mathscr{F}(u) &\Leftrightarrow w \in L^1_{\mathbb{R}^n}(J) \text{ et } \ w(t) \in F\big(t, u(t)\big) \text{ p.p. } t \in J.\end{aligned}$$

Donc,

$$v(t)\chi_A(t)+w(t)(1-\chi_A(t)) \in \chi_A(t)F\big(t, u(t)\big)+\big(1-\chi_A(t)\big)F\big(t, u(t)\big) \subset F\big(t, u(t)\big) \text{ p.p. } t \in J.$$

Car F à valeurs décomposables. On conclut donc que $v\chi_A + w(1-\chi_A) \in \mathscr{F}(u)$. D'où, $\mathscr{F}(u)$ est décomposable.

• Montrons que $\mathscr{F}$ est à valeurs fermées i.e., pour toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}(u)$ telle que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v_0 dans $L^1_{\mathbb{R}^n}(J)$ on a $v_0 \in \mathscr{F}(u)$.

Par le Théorème 1.3.10, on peut extraite de $(v_n)_n$ une sous-suite $(v_{n_k})_k$ telle que $v_{n_k}(t) \to v_0(t) \quad$ p.p. $t \in J$. On a pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_n \in \mathscr{F}(u)$ i.e. $v_n(t) \in F\big(t, u(t)\big)$ p.p. $t \in J$ et comme F est à valeurs fermées, on conclut que $v_0(t) \in F(t, u(t)) \quad$ p.p. $t \in J$. De plus, par $(\mathcal{H}_3)$ nous avons

$$\sup \big\|v_{n_k}(t)\big\| \le M(t),$$

un passage à la limite quand $k \to +\infty$ nous affirme que $\sup_{t\in J} \big\|v_0(t)\big\| \le M(t)$ d'où $v_0 \in L^1_{\mathbb{R}^n}(J)$ autrement dit, $v_0 \in \mathscr{F}(u)$, et donc $\mathscr{F}(u)$ est à valeurs fermées.

• Reste à montrer que $\mathscr{F}(\cdot)$ est s.c.i. Pour celà, soit $B \in L^1_{\mathbb{R}^n}(J)$ un sous-ensemble fermé et soit $\mathcal{A} = \big\{y \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}(J); \mathscr{F}(y) \subset B\big\}$. On veut montrer que $\mathcal{A}$ est fermé. Soit $(y_n)_n \subset \mathcal{A}$ une suite qui converge vers y dans $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}(J)$ et soit $v \in \mathscr{F}(y)$ i.e.,

$$v(t) \in F\big(t, y(t)\big) \ \text{ p.p. } t \in J.$$

Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N},\ y_n \in \mathcal{A}$ donc $\mathscr{F}(y_n) \subset B$. Puisque $u \mapsto F(t,u)$ est s.c.i. pour presque tout $t \in J$, on déduit par la Proposition 1.5.7 qu'il existe $\big(v_n(\cdot)\big)_n \subset L^1_{\mathbb{R}^n}(J)$ tel que $v_n(t) \in F\big(t, y_n(t)\big)$ et $v_n(t) \to v(t)$ p.p. $t \in J$. Or F est mesurable à valeurs non vides et compactes, par la Proposition 1.5.12, on aura

$$\|v_n(t) - v(t)\| = d\Big(v(t), F(t, y_n(t))\Big) \quad \text{p.p. } t \in J.$$

Par l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$, il est clair que

$$\big\|v_n(t)\big\| \le M(t) \text{ pour tout } t \in J.$$

Donc

$$\|v_n - v\|_1 = \int_0^T \big\|v_n(t) - v(t)\big\| dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

Alors $(v_n)_n$ converge vers v dans $L^1_{\mathbb{R}^n}(J)$ et $v \in \mathscr{F}(y)$. On déduit que $y \in \mathcal{A}$. D'où la fermeture de $\mathcal{A}$. D'après la Proposition 1.5.6 iii) $\mathscr{F}$ est s.c.i. ■

3.2 Existence des solutions

Considérons le problème

$$\begin{cases} D_g^{\alpha} u(t) = f(t) & t \in J = [0,T],\ t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p; \\ \delta u^{[i]}(t_k) = \mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big) & i = 0, 1, \ldots, m-1; \quad k = 1, 2, \cdots, p; \\ u^{[i]}(0) = \eta_i & i = 0, 1, \ldots, m-1, \end{cases} \tag{3.4}$$

où $f : J \to L^1_{\mathbb{R}^n}(J)$. Pour montrer l'existence de la solution du problème (3.1), on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.2.1. [20] On dit que u est une solution du problème (3.4) si et seulement si $u \in PC(J, \mathbb{R}^n)$ et s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} u(t) &= \eta_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\eta_i}{i!}\big(g(t) - g(0)\big)^i + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t g'(s)\big(g(t) - g(s)\big)^{\alpha-1} f(u)(s)ds \\ &\quad + \sum_{0<t_k<t} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big)}{i!}\big(g(t) - g(t_k)\big)^i. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Preuve. Pour la premier implication, supposons que u est une solution du l'équation (3.4). Elle sera divisée en deux parties.

<u>Première partie.</u> développons la solution. Pour tout $t \in J$ et $u \in PC(J, \mathbb{R}^n)$, on pose $f(t) = g'(t)u^{[i]}(t)$ $\big($pour tout $i = 0, \ldots, m-1\big)$. On a $\Big($sachant que $u^{[i]}(t) = \Big(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\Big)^i u(t)\Big)$,

$$\begin{aligned} \int_{t_k^+}^t f(s)ds &= \int_{t_k^+}^t g'(s)u^{[i]}(s)ds \\ &= \int_{t_k^+}^t g'(s)\left(\frac{1}{g'(s)}\frac{d}{ds}\right)^i u(s)ds \\ &= \int_{t_k^+}^t \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{g'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{i-1} u(s)ds \\ &= \int_{t_k^+}^t \frac{d}{ds} u^{[i-1]}(s)ds \\ &= u^{[i-1]}(t) - u^{[i-1]}(t_k^+). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Par la relation (3.6) et puisque $\delta u^{[i]}(t_k) = u^{[i]}(t_k^+) - u^{[i]}(t_k^-)$, on trouve que

$$\begin{aligned}
\int_0^t f(s)ds &= \int_0^{t_1^-} f(s)ds + \int_{t_1^+}^{t_2^-} f(s)ds + \cdots + \int_{t_p^+}^{t} f(s)ds \\
&= u^{[i-1]}(t_1^-) - u^{[i-1]}(0) + u^{[i-1]}(t_2^-) - u^{[i-1]}(t_1^+) + \cdots + u^{[i-1]}(t) - u^{[i-1]}(t_p^+) \\
&= u^{[i-1]}(t) - u^{[i-1]}(0) - \big(u^{[i-1]}(t_1^+) - u^{(i-1)}(t_1^-) + u^{[i-1]}(t_2^+) - u^{[i-1]}(t_2^-) \\
&\qquad + \cdots + u^{[i-1]}(t_p^+) - u^{[i-1]}(t_p^-)\big) \\
&= u^{[i-1]}(t) - u^{[i-1]}(0) - \sum_{0<t_k<t} \delta u^{[i-1]}(t_k).
\end{aligned}$$

Alors

$$u^{[i-1]}(t) = u^{[i-1]}(0) + \int_0^t f(s)ds + \sum_{0<t_k<t} \delta u^{[i-1]}(t_k), \tag{3.7}$$

et

$$u^{[i-2]}(t) = u^{[i-2]}(0) + \int_0^t g'(s)u^{[i-1]}(s)ds + \sum_{0<t_k<t} \delta u^{[i-2]}(t_k).$$

Par itération sur i, on trouve

$$u^{[2]}(t) = u^{[2]}(0) + \int_0^t g'(s)u^{[3]}(s)ds + \sum_{0<t_k<t} \delta u^{[2]}(t_k), \tag{3.8}$$

$$u^{[1]}(t) = u^{[1]}(0) + \int_0^t g'(s)u^{[2]}(s)ds + \sum_{0<t_k<t} \delta u^{[1]}(t_k), \tag{3.9}$$

et donc

$$u(t) = u(0) + \int_0^t g'(s)u^{[1]}(s)ds + \sum_{0<t_k<t} \delta u(t_k). \tag{3.10}$$

En substituant (3.9) dans (3.10), on obtient

$$\begin{aligned}
u(t) &= u(0) + \int_0^t g'(s)u^{[1]}(0)ds + \int_0^t g'(s)\int_0^s g'(\tau)u^{[2]}(\tau)d\tau ds + \int_0^t g'(s)\sum_{0<t_k<t} \delta u^{[1]}(t_k)ds \\
&\qquad + \sum_{0<t_k<t} \delta u(t_k) \\
&= u(0) + u^{[1]}(0)\big(g(t) - g(0)\big) + \int_0^t g'(\tau)u^{[2]}(\tau)\int_\tau^t g'(s)dsd\tau + \sum_{0<t_k<t}\int_{t_k}^t g'(s)\delta u^{[1]}(t_k)ds \\
&\qquad + \sum_{0<t_k<t} \delta u(t_k) \\
&= u(0) + u^{[1]}(0)\big(g(t) - g(0)\big) + \int_0^t g'(\tau)u^{[2]}(\tau)\big(g(t) - g(\tau)\big)d\tau \\
&\qquad + \sum_{0<t_k<t}\big(g(t) - g(t_k)\big)\delta u^{[1]}(t_k) + \sum_{0<t_k<t} \delta u(t_k).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

En utilisant la relation (3.8), on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^t g'(\tau)\big(g(t)-g(\tau)u^{[2]}(\tau)\big)d\tau \qquad (3.12)\\
&= \int_0^t u^{[2]}(0)g'(\tau)\big(g(t)-g(\tau)\big)d\tau + \int_0^t g'(\tau)\big(g(t)-g(\tau)\big)\int_0^\tau g'(s)u^{[3]}(s)dsd\tau\\
&\quad + \int_0^t g'(\tau)\big(g(t)-g(\tau)\big)\sum_{0<t_k<t}\delta u^{[2]}(t_k)d\tau\\
&= u^{[2]}(0)\Big[-\frac{1}{2}\big(g(t)-g(\tau)\big)^2\Big]\Big|_0^t + \int_0^t g'(s)u^{[3]}(s)\int_s^t g'(\tau)\big(g(t)-g(\tau)\big)d\tau ds\\
&\quad + \sum_{0<t_k<\tau}\int_{t_k}^t \delta u^{[2]}(t_k)g'(\tau)\big(g(t)-g(\tau)\big)d\tau\\
&= \frac{u^{[2]}(0)}{2}\big(g(t)-g(0)\big)^2 + \int_0^t g'(s)u^{[3]}(s)\Big[-\frac{1}{2}\big(g(t)-g(\tau)\big)^2\Big]\Big|_s^t ds\\
&\quad + \sum_{0<t_k<t}\delta u^{[2]}(t_k)\Big[-\frac{1}{2}\big(g(t)-g(\tau)\big)^2\Big]\Big|_{t_k}^t\\
&= \frac{u^{[2]}(0)}{2}\big(g(t)-g(0)\big)^2 + \frac{1}{2}\int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^2 u^{[3]}(s)ds\\
&\quad + \sum_{0<t_k<t}\frac{\delta u^{[2]}(t_k)}{2}\big(g(t)-g(t_k)\big)^2.
\end{aligned}$$

Remplaçant cette dernière équation dans (3.11), on déduit que

$$\begin{aligned}
u(t) &= u(0) + u^{[1]}(0)\big(g(t)-g(0)\big) + \frac{u^{[2]}(0)}{2}\big(g(t)-g(0)\big)^2 + \frac{1}{2}\int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^2\\
&\quad \times u^{[3]}(s)ds + \sum_{0<t_k<t}\frac{\delta u^{[2]}(t_k)}{2}\big(g(t)-g(t_k)\big)^2 + \sum_{0<t_k<t}\big(g(t)-g(t_k)\big)\delta u^{[1]}(t_k) + \sum_{0<t_k<t}\delta u(t_k).
\end{aligned}$$

Par itération sur i, on obtient

$$\begin{aligned}
u(t) &= u(0) + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{u^{[i]}(0)}{i!}\big(g(t)-g(0)\big)^i + \frac{1}{(m-1)!}\int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{m-1}u^{[m]}(s)ds\\
&\quad + \sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\delta u^{[i]}(t_k)}{i!}\big(g(t)-g(t_k)\big)^i
\end{aligned}$$

Par la relation (2.1), on déduit que

$$= \eta_0 + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\eta_i}{i!}\big(g(t)-g(0)\big)^i + I_g^m u^{[m]}(t) + \sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big)}{i!}\big(g(t)-g(t_k)\big)^i.$$

Deuxième partie. En introduisant l'opérateur I_g^α aux deux membres de l'équation (3.4) pour déterminer $I_g^m u^{[m]}(\cdot)$, pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, il résulte que

$$I_g^\alpha D_g^\alpha u(t) = I_g^\alpha f(t),$$

par définition de $D_g^\alpha u(\cdot)$, on trouve

$$I_g^\alpha I_g^{m-\alpha} u^{[m]}(t) = I_g^\alpha f(t) \quad \text{avec } m = [\alpha] + 1,$$

on en déduit de la relation (2.2), que

$$I_g^m u^{[m]}(t) = I_g^\alpha f(t),$$

d'où

$$\begin{aligned} u(t) = \eta_0 &+ \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\eta_i}{i!}\big(g(t)-g(0)\big)^i + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1} f(s)ds \\ &+ \sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big)}{i!}\big(g(t)-g(t_k)\big)^i. \end{aligned}$$

Inversement, on vérifie que (3.5) satisfait (3.4) par calcul direct. ■

Théorème 3.2.2. *Supposons que* $(\mathcal{H}_2)$ *et* $(\mathcal{H}_3)$ *ainsi que l'hypothèse suivante sont satisfaites*

$(\mathcal{H}_4)$ *ils existent des constantes* d_{ik} $(i = 0, 1, \cdots, m-1;\ k = 1, 2, \cdots, p)$ *telles que*

$$\big\|\mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big)\big\| \leq d_{ik}\|u(t_k)\| \quad \textit{pour chaque } u \in PC(J, \mathbb{R}^n).$$

Si la condition suivante est satisfaite

$$\mathscr{L} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=0}^{m-1} \frac{d_{ik}}{i!}\big(g(T)-g(t_k)\big)^i < 1. \tag{3.13}$$

Alors, le problème (3.1) *admet au moins une solution sur* J.

Preuve. Comme F vérifie les hypothèses $(\mathcal{H}_2)$ et $(\mathcal{H}_3)$, d'après le Lemme 3.1.6 F est de type s.c.i. donc par la Définition 3.1.4, l'opérateur de $\mathscr{F}$ associé à F est s.c.i. à valeurs non vides fermées et décomposables i.e., $\mathscr{F}$ vérifie la propriété (BC). Par conséquence du Théorème 3.1.5, $\mathscr{F}$ admet une sélection continue i.e., il existe une fonction continue $f : PC(J, \mathbb{R}^n) \to L^1_{\mathbb{R}^n}(J)$ telle que $f(u) \in \mathscr{F}(u)$ pour chaque $u \in PC(J, \mathbb{R}^n)$. Par la relation (3.3), on a donc

$$f(u)(t) \in F\big(t, u(t)\big) \text{ p.p. } t \in J.$$

Pour montrer l'existence de solution pour le problème (3.1), il suffit d'étudier le problème (3.4) avec $f(t) = f(y)(s),\ t \in J$. Considérons l'opérateur $L : PC(J, \mathbb{R}^n) \to PC(J, \mathbb{R}^n)$

défini pour tout $t \in J$ par

$$L(u)(t) = \eta_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\eta_i}{i!}\big(g(t)-g(0)\big)^i + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1} f(u)(s)ds$$
$$+ \sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big)}{i!}\big(g(t)-g(t_k)\big)^i. \tag{3.14}$$

D'après le Lemme 3.2.1, il est clair que les points fixes de l'opérateur L sont les solutions du problème (3.4). Ceci revient à dire qu'il suffit de montrer que L admet un point fixe. Pour celà, on va utiliser le théorème de point fixe de Schaeffer (Théorème 1.6.3). La preuve se fait donc en cinq étapes.

Étape 1 : $PC(J,\mathbb{R}^n)$ est convexe et $0 \in PC(J,\mathbb{R}^n)$.

Il est clair que $0 \in PC(J,\mathbb{R}^n)$. Montrons qu'il est convexe. Soient $u, v \in PC(J,\mathbb{R}^n)$ et soit $\lambda \in [0,1]$, on a

$$u \in PC(J,\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow u_k \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}(J_k), k=0,\cdots,p \text{ et il existe } u(t_k^-) \text{ et } u(t_k^+) \text{ où } u(t_k^-) = u(t_k)$$
$$v \in PC(J,\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow v_k \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}(J_k), k=0,\cdots,p \text{ et il existe } v(t_k^-) \text{ et } v(t_k^+) \text{ où } v(t_k^-) = v(t_k).$$

Nous avons,

$$\big(\lambda u + (1-\lambda)v\big)(t_k^-) = \lambda u(t_k^-) + (1-\lambda)v(t_k^-)$$
$$= \lambda u(t_k) + (1-\lambda)v(t_k),$$

et

$$\lambda u_k + (1-\lambda)v_k \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}(J_k).$$

Donc

$$(\lambda u + (1-\lambda)v) \in PC(J,\mathbb{R}^n).$$

D'où la convexité de $PC(J,\mathbb{R}^n)$.

Étape 2 : L est continue.

Soit $(u_n)_n$ une suite de $PC(J,\mathbb{R}^n)$ telle que $(u_n)_n$ converge vers u dans $PC(J,\mathbb{R}^n)$. Pour tout $t \in J$, nous avons

$$\big\|L(u_n)(t) - L(u)(t)\big\|$$
$$= \Bigg\|\eta_0 + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\eta_i}{i!}\big(g(t)-g(0)\big)^i + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1} f(u_n)(s)ds$$
$$+ \sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\mathscr{I}_{ik}\big(u_n(t_k)\big)}{i!}\big(g(t)-g(t_k)\big)^i - \eta_0 - \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\eta_i}{i!}\big(g(t)-g(0)\big)^i$$
$$- \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1} f(u)(s)ds - \sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big)}{i!}\big(g(t)-g(t_k)\big)^i\Bigg\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigg\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1} f(u_n)(s)ds + \sum_{0<t_k<t} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\mathscr{I}_{ik}\big(u_n(t_k)\big)}{i!}\big(g(t)-g(t_k)\big)^i \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1} f(u)(s)ds - \sum_{0<t_k<t} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big)}{i!}\big(g(t)-g(t_k)\big)^i \bigg\| \\
&= \bigg\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1} \big(f(u_n)(s) - f(u)(s)\big)ds \\
&\quad + \sum_{0<t_k<t} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{i!}\big(g(t)-g(t_k)\big)^i \Big(\mathscr{I}_{ik}\big(u_n(t_k)\big) - \mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big)\Big) \bigg\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1} \big\| f(u_n)(s) - f\big(u\big)(s)\big\| ds \\
&\qquad + \sum_{0<t_k<t} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{i!}\big(g(t)-g(t_k)\big)^i \Big\| \mathscr{I}_{ik}\big(u_n(t_k)\big) - \mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big) \Big\| .
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit que,

$$
\begin{aligned}
\big\| L(u_n)(t) - L(u)(t) \big\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1} \sup_{s\in J} \big\| f(u_n)(s) - f(u)(s) \big\| ds \\
&\quad + \sum_{0<t_k<t} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{i!}\big(g(t)-g(t_k)\big)^i \sup_{t_k\in J} \big\| \mathscr{I}_{ik}\big(u_n(t_k)\big) - \mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big) \big\| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \big\| f(u_n) - f(u) \big\|_\infty \int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1} ds \\
&\quad + \big\| \mathscr{I}_{ik}(u_n) - \mathscr{I}_{ik}(u) \big\|_\infty \sum_{0<t_k<t} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{i!}\big(g(t)-g(t_k)\big)^i .
\end{aligned}
$$

Utilisant la croissance et la positivité de g, il vient que

$$
\begin{aligned}
&\big\| L(u_n)(t) - L(u)(t) \big\| \\
&\qquad \leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \big\| f(u_n) - f(u) \big\|_\infty \Big[-\big(g(t)-g(s)\big)^\alpha \Big]\Big|_0^t \\
&\qquad\qquad + \big\| \mathscr{I}_{ik}(u_n) - \mathscr{I}_{ik}(u) \big\|_\infty \sum_{0<t_k<t} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\big(g(T)\big)^i}{i!} \\
&\qquad \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \big\| f(u_n) - f(u) \big\|_\infty \big(g(t)-g(0)\big)^\alpha \\
&\qquad\qquad + \big\| \mathscr{I}_{ik}(u_n) - \mathscr{I}_{ik}(u) \big\|_\infty \sum_{0<t_k<t} \sum_{i\geq 0} \frac{\big(g(T)\big)^i}{i!} \\
&\qquad \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \big\| f(u_n) - f(u) \big\|_\infty \big(g(T)-g(0)\big)^\alpha + \big\| \mathscr{I}_{ik}(u_n) - \mathscr{I}_{ik}(u) \big\|_\infty \sum_{k=1}^{p} e^{g(T)} \\
&\qquad = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \big\| f(u_n) - f(u) \big\|_\infty \big(g(T)-g(0)\big)^\alpha + p\, e^{g(T)} \big\| \mathscr{I}_{ik}(u_n) - \mathscr{I}_{ik}(u) \big\|_\infty
\end{aligned}
$$

Comme f et $\mathscr{I}_{ik}$ sont continues, on conclut que

$$\begin{aligned}\big\|L(u_n)-L(u)\big\|_\infty \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\big\|f(u_n)-f(u)\big\|_\infty\big(g(T)-g(0)\big)^\alpha \\ + p\, e^{g(T)}\big\|\mathscr{I}_{ik}(u_n)-\mathscr{I}_{ik}(u)\big\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

d'où la continuité de L.

***Étape* 3 : L transforme tout sous-ensemble borné en un ensemble borné dans $PC(J,\mathbb{R}^n)$.**

Soient $B_a=\big\{u\in PC(J,\mathbb{R}^n),\ \|u\|_{PC}\leq a\big\}$ un sous-ensemble borné dans $PC(J,\mathbb{R}^n)$ où a une constante positive et soit $u\in B_a$.

On a, pour tout $t\in J$ $\big($rappelons que $f(u)(t)\in F(t,u(t))$ p.p. $t\in J\big)$

$$\begin{aligned}\big\|L(u)(t)\big\| &= \Bigg\|\eta_0+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\eta_i}{i!}\big(g(t)-g(0)\big)^i+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1}f(u)(s)ds \\ &\quad + \sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big)}{i!}\big(g(t)-g(t_k)\big)^i\Bigg\| \\ &\leq |\eta_0|+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{|\eta_i|}{i!}\big(g(t)-g(0)\big)^i+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1}\big\|f(u)(s)\big\|ds \\ &\quad + \sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\big\|\mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big)\big\|}{i!}\big(g(t)-g(t_k)\big)^i.\end{aligned}$$

Les fonctions g et g' étant croissantes, on a pour tout $t\in J$

$$\begin{aligned}\big\|L(u)(t)\big\| &\leq |\eta_0|+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{|\eta_i|}{i!}\big(g(T)-g(0)\big)^i+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}g'(T)\big(g(T)-g(0)\big)^{\alpha-1}\int_0^t \big\|f(u)(s)\big\|ds \\ &\quad + \sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\big\|\mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big)\big\|}{i!}\big(g(T)-g(t_k)\big)^i.\end{aligned}$$

Par l'hypothèse $(\mathcal{H}_4)$, on trouve

$$\begin{aligned}\big\|L(u)(t)\big\| &\leq |\eta_0|+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{|\eta_i|}{i!}\big(g(T)-g(0)\big)^i+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}g'(T)\big(g(T)-g(0)\big)^{\alpha-1}\int_0^t \big\|f(u)(s)\big\|ds \\ &\quad + \sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{d_{ik}}{i!}\big(g(T)-g(t_k)\big)^i\big\|u(t_k)\big\| \\ &\leq |\eta_0|+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{|\eta_i|}{i!}\big(g(T)-g(0)\big)^i+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}g'(T)\big(g(T)-g(0)\big)^{\alpha-1} \\ &\quad \times\int_0^t \sup_{s\in[0,T]}\big\|f(u)(s)\big\|ds+\sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{d_{ik}}{i!}\big(g(T)-g(t_k)\big)^i\sup_{t_k\in[0,T]}\big\|u(t_k)\big\|.\end{aligned}$$

L'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$ implique que

$$\begin{aligned}\big\|L(u)(t)\big\| &\leq |\eta_0| + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{|\eta_i|}{i!}\big(g(T)-g(0)\big)^i + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}g'(T)\big(g(T)-g(0)\big)^{\alpha-1}\int_0^t M(s)ds \\ &\quad + \|u\|_{PC}\sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{d_{ik}}{i!}\big(g(T)-g(t_k)\big)^i \\ &= |\eta_0| + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{|\eta_i|}{i!}\big(g(T)-g(0)\big)^i + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}g'(T)\big(g(T)-g(0)\big)^{\alpha-1}\big\|M\big\|_1 \\ &\quad + \big\|u\big\|_{PC}\sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{d_{ik}}{i!}\big(g(T)-g(t_k)\big)^i.\end{aligned}$$

Il résulte par la relation (3.13),

$$\big\|L(u)\big\|_{PC} \leq |\eta_0| + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{|\eta_i|}{i!}\big(g(T)-g(0)\big)^i + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}g'(T)\big(g(T)-g(0)\big)^{\alpha-1}\big\|M\big\|_1 + \mathscr{L}\|u\|_{PC}. \tag{3.15}$$

Par conséquent, pour tout $u \in B_a$,

$$\big\|L(u)\big\|_{PC} \leq |\eta_0| + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{|\eta_i|}{i!}\big(g(T)-g(0)\big)^i + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}g'(T)\big(g(T)-g(0)\big)^{\alpha-1}\big\|M\big\|_1 + \mathscr{L}a.$$

On déduit qu'il existe une constante positive K telle que

$$\big\|L(u)\big\|_{PC} \leq K,$$

avec

$$K = |\eta_0| + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{|\eta_i|}{i!}\big(g(T)-g(0)\big)^i + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}g'(T)\big(g(T)-g(0)\big)^{\alpha-1}\big\|M\big\|_1 + \mathscr{L}a.$$

Ce qui montre que $L(B_a)$ est borné dans $PC(J,\mathbb{R}^n)$.

Étape 4: **L transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinu dans $PC(J,\mathbb{R}^n)$.**

Soient $\tau_1,\tau_2 \in J_k,\ k=1,\cdots,p,\ \tau_1<\tau_2$, B_a un ensemble borné dans $PC(J,\mathbb{R}^n)$ (défini dans l'étape 2) et soit $u \in B_a$. Par définition nous avons,

$$\begin{aligned}&\big\|L(u)(\tau_2)-L(u)(\tau_1)\big\| = \\ &\Bigg\|\eta_0 + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\eta_i}{i!}\big(g(\tau_2)-g(t_k)\big)^i + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\tau_2} g'(s)\big(g(\tau_2)-g(s)\big)^{\alpha-1}f(u)(s)ds \\ &+ \sum_{0<t_k<\tau_2}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big)}{i!}\big(g(\tau_2)-g(t_k)\big)^i - \eta_0 - \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\eta_i}{i!}\big(g(\tau_1)-g(t_k)\big)^i \\ &- \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\tau_1} g'(s)\big(g(\tau_1)-g(s)\big)^{\alpha-1}f(u)(s)ds - \sum_{0<t_k<\tau_1}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big)}{i!}\big(g(\tau_1)-g(t_k)\big)^i\Bigg\|\end{aligned}$$

$$\leq \Bigg\| \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\eta_i}{i!} \Big(\big(g(\tau_2) - g(t_k)\big)^i - \big(g(\tau_1) - g(t_k)\big)^i \Big) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tau_1} g'(s)\big(g(\tau_2) - g(s)\big)^{\alpha-1} f(u)(s)ds$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} g'(s)\big(g(\tau_2) - g(s)\big)^{\alpha-1} f(u)(s)ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tau_1} g'(s)\big(g(\tau_1) - g(s)\big)^{\alpha-1} f(u)(s)ds$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big)}{i!} \Big(\big(g(\tau_2) - g(t_k)\big)^i - \big(g(\tau_1) - g(t_k)\big)^i \Big) \Bigg\|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{m-1} \frac{|\eta_i|}{i!} \Big| \big(g(\tau_2) - g(t_k)\big)^i - \big(g(\tau_1) - g(t_k)\big)^i \Big|$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tau_1} g'(s) \Big| \big(g(\tau_2) - g(s)\big)^{\alpha-1} - \big(g(\tau_1) - g(s)\big)^{\alpha-1} \Big| \big\| f(u)(s)\big) \big\| ds$$
$$+ \int_{\tau_1}^{\tau_2} g'(s) \Big| \big(g(\tau_2) - g(s)\big)^{\alpha-1} \Big| \big\| f(u)(s) \big\| ds$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\big\| \mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big) \big\|}{i!} \Big| \big(g(\tau_2) - g(t_k)\big)^i - \big(g(\tau_1) - g(t_k)\big)^i \Big|.$$

Par l'hypothèse $(\mathcal{H}_4)$ et les relations (A_1) et (A_4) on obtient $\big($gardons en tête la positivité et la croissance de $g\big)$

$$\big\| L(u)(\tau_2) - L(u)(\tau_1) \big\|$$
$$\leq \big(g(\tau_2) - g(\tau_1)\big) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{|\eta_i|}{i!} \sum_{l=0}^{i-1} \big(g(\tau_2) - g(t_k)\big)^{i-l-1} \big(g(\tau_1) - g(t_k)\big)^l$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} g'(s) \Big| \big(g(\tau_2) - g(s)\big)^{\alpha-1} \Big| \big\| f(u)(s) \big\| ds$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tau_1} g'(s) \Big| \big(g(\tau_2) - g(s)\big)^{\alpha-1} - \big(g(\tau_1) - g(s)\big)^{\alpha-1} \Big| \big\| f(u)(s) \big\| ds$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} \big\| u(t_k) \big\| \sum_{i=0}^{m-1} \frac{d_{ik}}{i!} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} g(t_k)^{i-j} \big(g(\tau_2)^j - g(\tau_1)^j\big)$$
$$\leq \big(g(\tau_2) - g(\tau_1)\big) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{|\eta_i|}{i!} \sum_{l=0}^{i-1} g(\tau_2)^{i-l-1} g(\tau_1)^l$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} g'(s) \sum_{i=0}^{m-1} \Big| (-1)^{\alpha-1-i} \binom{m-1}{i} g(s)^{\alpha-1-i} g(\tau_2)^i \Big| \big\| f(u)(s) \big\| ds$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tau_1} g'(s) \sum_{i=0}^{m-1} \Big| (-1)^{\alpha-1-i} \binom{m-1}{i} g(s)^{\alpha-1-i} \big(g(\tau_2)^i - g(\tau_1)^i\big) \Big| \big\| f(u)(s) \big\| ds$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} \big| u(t_k) \big| \sum_{i=0}^{m-1} \frac{d_{ik}}{i!} \sum_{j=0}^{i} \Big| (-1)^{i-j} \binom{i}{j} g(t_k)^{i-j} \big(g(\tau_2)^j - g(\tau_1)^j\big) \Big|$$

Par la relation (A_4) et la croissance de g, on obtient

$$\begin{aligned}
&\big\|L(u)(\tau_2) - L(u)(\tau_1)\big\| \\
&\quad\le \big(g(\tau_2) - g(\tau_1)\big) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{|\eta_i|}{i!} \sum_{l=0}^{i-1} g(T)^{i-l-1} g(T)^l \\
&\qquad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} g'(s) \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} g(T)^{\alpha-1-i} g(T)^i \big\|f(u)(s)\big\| ds \\
&\qquad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \big(g(\tau_2) - g(\tau_1)\big) \int_0^{\tau_1} g'(s) \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} g(s)^{\alpha-1-i} \sum_{c=0}^{i-1} g(\tau_2)^{i-c-1} g(\tau_1)^c \\
&\qquad \times \big\|f(u)(s)\big\| ds + \big(g(\tau_2) - g(\tau_1)\big) \sum_{k=1}^{p} \big\|u(t_k)\big\| \sum_{i=0}^{m-1} \frac{d_{ik}}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} g(T)^{i-j} \\
&\qquad \times \sum_{c=0}^{j-1} g(\tau_2)^{j-c-1} g(\tau_1)^c \\
&\quad\le \big(g(\tau_2) - g(\tau_1)\big) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{i|\eta_i|}{i!} g(T)^{i-1} \\
&\qquad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} g'(s) \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} g(T)^{\alpha-1} \big\|f(u)(s)\big\| ds \\
&\qquad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \big(g(\tau_2) - g(\tau_1)\big) \int_0^{\tau_1} g'(s) \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} g(T)^{\alpha-1-i} \sum_{c=0}^{i-1} g(T)^{i-c-1} g(T)^c \\
&\qquad \times \big\|f(u)(s)\big\| ds + \big(g(\tau_2) - g(\tau_1)\big) \sum_{k=1}^{p} \big\|u(t_k)\big\| \sum_{i=0}^{m-1} \frac{d_{ik}}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} g(T)^{i-j} \\
&\qquad \times \sum_{c=0}^{j-1} g(T)^{j-c-1} g(T)^c \\
&\quad= \big(g(\tau_2) - g(\tau_1)\big) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{|\eta_i|}{(i-1)!} g(T)^{i-1} \\
&\qquad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} g(T)^{\alpha-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} g'(s) \big\|f(u)(s)\big\| ds \\
&\qquad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \big(g(\tau_2) - g(\tau_1)\big) \int_0^{\tau_1} g'(s) \sum_{i=0}^{m-1} i \binom{m-1}{i} g(T)^{\alpha-2} \big\|f(u)(s)\big\| ds \\
&\qquad + \big(g(\tau_2) - g(\tau_1)\big) \sum_{k=1}^{p} \big\|u(t_k)\big\| \sum_{i=0}^{m-1} \frac{d_{ik}}{i!} \sum_{j=0}^{i} j \binom{i}{j} g(T)^{i-1}.
\end{aligned}$$

En vertu de (A_2) et (A_3) et la croissance de g' on trouve, puisque $u \in B_a$, que

$$\begin{aligned}
\big\|L(u)(\tau_2) - L(u)(\tau_1)\big\| &\leq \big(g(\tau_2) - g(\tau_1)\big) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{|\eta_i|}{(i-1)!} g(T)^{i-1} + \frac{2^{m-1}}{\Gamma(\alpha)} g'(T) g(T)^{\alpha-1} \\
&\quad \times \int_{\tau_1}^{\tau_2} \big\|f(u)(s)\big\| ds + \frac{(m-1)2^{m-2}}{\Gamma(\alpha)} g'(T) g(T)^{\alpha-2} \big(g(\tau_2) - g(\tau_1)\big) \\
&\quad \times \int_0^{\tau_1} \big\|f(u)(s)\big\| ds + a\big(g(\tau_2) - g(\tau_1)\big) \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{d_{ik}}{i!} g(T)^{i-1} i 2^{i-1} \\
&\leq \big(g(\tau_2) - g(\tau_1)\big) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{|\eta_i|}{(i-1)!} g(T)^{i-1} \\
&\quad + \frac{2^{m-1}}{\Gamma(\alpha)} g'(T) g(T)^{\alpha-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sup_{s\in[0,T]} \big\|f(u)(s)\big\| ds \\
&\quad + \frac{(m-1)2^{m-2}}{\Gamma(\alpha)} g'(T) g(T)^{\alpha-2} \big(g(\tau_2) - g(\tau_1)\big) \int_0^{\tau_1} \sup_{s\in[0,T]} \big\|f(u)(s)\big\| ds \\
&\quad + a\big(g(\tau_2) - g(\tau_1)\big) \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{2^{i-1} d_{ik}}{(i-1)!} g(T)^{i-1}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$, il en résulte que

$$\begin{aligned}
\big\|L(u)(\tau_2) - L(u)(\tau_1)\big\| &\leq \big(g(\tau_2) - g(\tau_1)\big) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{|\eta_i|}{(i-1)!} g(T)^{i-1} + \frac{2^{m-1}}{\Gamma(\alpha)} g'(T) g(T)^{\alpha-1} \\
&\quad \times \int_{\tau_1}^{\tau_2} M(s) ds + \frac{(m-1)2^{m-2}}{\Gamma(\alpha)} g'(T) g(T)^{\alpha-2} \big(g(\tau_2) - g(\tau_1)\big) \\
&\quad \times \int_0^{\tau_1} M(s) ds + a\big(g(\tau_2) - g(\tau_1)\big) \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{2^{i} d_{ik}}{(i-1)!} g(T)^{i-1} \\
&\leq \big(g(\tau_2) - g(\tau_1)\big) \Bigg[\sum_{i=1}^{m-1} \frac{|\eta_i|}{(i-1)!} g(T)^{i-1} + \frac{(m-1)2^{m-2}}{\Gamma(\alpha)} \|M\|_1 g'(T) \\
&\quad \times g(T)^{\alpha-2} + a \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{2^{i} d_{ik}}{(i-1)!} g(T)^{i-1} \Bigg] + \frac{2^{m-1}}{\Gamma(\alpha)} g'(T) g(T)^{\alpha-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} M(s) ds
\end{aligned}$$

.

Quand $\tau_1 \to \tau_2$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers zéro, ce qui montre que $L(B_a)$ est équicontinue.

D'après les étapes $2-4$ et le Théorème d'Ascoli-Arzelà 3.1.1, $L(B_a)$ est relativement compact pour tout borné de $PC(J, \mathbb{R}^n)$. Alors l'application est complètement continu.

<u>Étape 5</u>: L'ensemble $\varepsilon(L) = \big\{u \in PC(J, \mathbb{R}^n), u = \lambda L(u)$ pour certains $0 < \lambda < 1\big\}$ **est borné.**

Soit $u \in \varepsilon(L)$, alors $u = \lambda L(u)$ pour certain $0 < \lambda < 1$. Donc pour tout $t \in J$ on a

$$u(t) = \lambda\Bigg(\eta_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\eta_i}{i!}\big(g(t) - g(0)\big)^i + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t g'(s)\big(g(t) - g(s)\big)^{\alpha-1} f(u)(s)ds$$
$$+ \sum_{0<t_k<t} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\big(g(t) - g(t_k)\big)^i}{i!} \mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big)\Bigg).$$

Alors

$$\big\|u\big\|_{PC} = \big\|\lambda L(u)\big\|_{PC} = \lambda\big\|L(u)\big\|_{PC} \le \big\|L(u)\big\|_{PC}.$$

Par la relation (3.15), on a

$$\big\|u\big\|_{PC} \le |\eta_0| + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{|\eta_i|}{i!}\big(g(T) - g(0)\big)^i + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} g'(T)\big(g(T) - g(0)\big)^{\alpha-1} \big\|M\big\|_1 + \mathscr{L}\|u\big\|_{PC}.$$

D'où, moyennant la relation (3.13),

$$\big\|u\big\|_{PC} \le \frac{\big|\eta_0\big| + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{|\eta_i|}{i!}\big(g(T) - g(0)\big)^i + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} g'(T)\big(g(T) - g(0)\big)^{\alpha-1}\big\|M\big\|_1}{1 - \mathscr{L}} =: R$$

Alors , il existe une constante $R > 0$ telle que $\big\|u\big\|_{PC} \le R$ i.e., $\varepsilon(L)$ est borné.
On déduit du Théorème de point fixe de Schaeffer (Théorème 1.6.3) que L admet au moins un point fixe u i.e., il existe une fonction $u \in PC(J, \mathbb{R}^n)$ telle que $u = L(u)$ autrement dit, pour tout $t \in J$, $u(t) = L(u)(t)$, et donc

$$u(t) = \eta_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\eta_i}{i!}\big(g(t) - g(0)\big)^i + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t g'(s)\big(g(t) - g(s)\big)^{\alpha-1} f(u)(s)ds$$
$$+ \sum_{0<t_k<t} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\big(g(t) - g(t_k)\big)^i}{i!} \mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big).$$

Par conséquent du Lemme 3.2.1, u est est un solution du problème (3.4). Ceci termine la preuve du Théorème 3.2.2. ■

3.3 Unicité de la solution

Théorème 3.3.1. *Supposons que* $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ *et* $(\mathcal{H}_3)$ *ainsi que l'hypothèse suivante sont satisfaites*

$(\mathcal{H}_5)$ *il existe une constante positive* b *telle que*

$$\big\|f(u)(t) - f(v)(t)\big\| \le b\|u - v\|_{PC} \text{ pour tout } u, v \in PC(J, \mathbb{R}^n),$$

où f est la sélection obtenue dans la preuve du Théorème 3.2.2.*si*

$$\mathscr{L}_1 = \frac{b}{\Gamma(\alpha+1)}\big(g(T)-g(0)\big)^{\alpha} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=0}^{m}\frac{c_{ik}}{i!}g(T)^i < 1. \tag{3.16}$$

Alors l'équation (3.4) *admet une solution unique sur J.*

Preuve. D'après la preuve de Théorème 3.2.2, les points fixes de l'opérateur L sont les solutions du problème (3.4). Dans cette partie, on va utiliser le théorème de point fixe de Banach(Théorème 1.6.2). Pour cela, il suffit de montrer que L est une contraction.
Soient $u, v \in PC(J, \mathbb{R}^n)$. Alors Pour tout $t \in J$ et la relation (3.14) on obtient

$$\begin{aligned}
\big\|L(u)(t) - L(v)(t)\big\| = &\Bigg\|\eta_0 + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\eta_i}{i!}\big(g(t)-g(0)\big)^i + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1}f(u)(s)ds\\
&+ \sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\big(g(t)-g(t_k)\big)^i}{i!}\mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big) - \eta_0 - \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\eta_i}{i!}\big(g(t)-g(0)\big)^i\\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1}f(v)(s)ds\\
&- \sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\big(g(t)-g(t_k)\big)^i}{i!}\mathscr{I}_{ik}\big(v(t_k)\big)\Bigg\|\\
= &\Bigg\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1}\big(f(u)(s)-f(v)(s)\big)ds\\
&+ \sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\big(g(t)-g(t_k)\big)^i}{i!}\Big(\mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big) - \mathscr{I}_{ik}\big(v(t_k)\big)\Big)\Bigg\|\\
\leq &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1}\big\|f(u)(s)-f(v)(s)\big\|ds\\
&+ \sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\big(g(t)-g(t_k)\big)^i}{i!}\Big\|\mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big) - \mathscr{I}_{ik}\big(v(t_k)\big)\Big\|.
\end{aligned}$$

Par les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_5)$, on a

$$\begin{aligned}
\big\|L(u)(t) - L(v)(t)\big\| \leq &\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\|u-v\|_{PC}\int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1}ds\\
&+ \sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{c_{ik}}{i!}\big(g(t)-g(t_k)\big)^i\big\|u(t_k)-v(t_k)\big\|\\
\leq &\frac{b}{\alpha\Gamma(\alpha)}\|u-v\|_{PC}\Big[-\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha}\Big]\Bigg|_0^t\\
&+ \sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{c_{ik}}{i!}\big(g(T)\big)^i\sup_{t_k\in J}\big\|u(t_k)-v(t_k)\big\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{b}{\Gamma(\alpha+1)} \|u-v\|_{PC} \big(g(t)-g(0)\big)^{\alpha} \\
&\quad + \big\|u-v\|_{PC} \sum_{0<t_k<t} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{c_{ik}}{i!} \big(g(t)-g(t_k)\big)^{i}
\end{aligned}
$$

La croissance et la positivité de la fonction g, nous amène à déduire que

$$
\begin{aligned}
\big\|L(u)(t)-L(v)(t)\big\| &\leq \frac{b}{\Gamma(\alpha+1)} \|u-v\|_{PC} \big(g(T)-g(0)\big)^{\alpha} + \big\|u-v\|_{PC} \sum_{0<t_k<t} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{c_{ik}}{i!} \big(g(T)\big)^{i} \\
&= \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha+1)} \big(g(T)-g(0)\big)^{\alpha} + \sum_{0<t_k<t} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{c_{ik}}{i!} \big(g(T)\big)^{i} \right) \|u-v\|_{PC} \\
&= \mathscr{L}_1 \|u-v\|_{PC}.
\end{aligned}
$$

Donc, pour tout $t \in J$, on a

$$
\big\|L(u)-L(v)\big\|_{PC} \leq \mathscr{L}_1 \|u-v\|_{PC}.
$$

Si la relation (3.16). On déduit que L est une contraction. D'après le Théorème 1.6.2, L admet un point fixe unique qui est une solution du problème (3.4). ■

3.4 Stabilité de solution

Théorème 3.4.1. *Supposons que toutes les hypothèses du Théorème 3.3.1 sont satisfaites. Alors la solution de l'inclusion* (3.4) *est uniformément stable.*

Preuve. Soient u une solution du problème (3.4) et $\bar{u}$ une autre solution de (3.4) vérifiant la condition $\bar{u}(0) = \bar{\eta}_0$ telle que $\bar{\eta}_0 \in \mathbb{R}$. D'après la preuve de Théorème 3.2.2, u et $\bar{u}$ sont des points fixes de l'opérateur L, c'est à dire $u(t) = L(u)(t)$ et
$\bar{u}(t) = L(\bar{u})(t)$. En vertu de la relation (3.14), pour tout $t \in J$, on a

$$
\begin{aligned}
u(t)-\bar{u}(t) &= \eta_0 - \bar{\eta}_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1}\big(f(u)(s)-f(\bar{u})(s)\big)ds \\
&\quad + \sum_{0<t_k<t} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{i!}\big(g(t)-g(t_k)\big)^{i}\Big(\mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big)-\mathscr{I}_{ik}\big(\bar{u}(t_k)\big)\Big). \quad (3.17)
\end{aligned}
$$

Alors,

$$\begin{aligned}\big\|u(t)-\bar{u}(t)\big\| = \Bigg\|&\eta_0-\bar{\eta}_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1}\big(f(u)(s)-f(\bar{u})(s)\big)ds\\&+\sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{i!}\big(g(t)-g(t_k)\big)^i\Big(\mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big)-\mathscr{I}_{ik}\big(\bar{u}(t_k)\big)\Big)\Bigg\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\le\big|\eta_0-\bar{\eta}_0\big|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1}\big\|f(u)(s)-f(\bar{u})(s)\big\|ds\\&\quad+\sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{i!}\big(g(t)-g(t_k)\big)^i\Big\|\mathscr{I}_{ik}\big(u(t_k)\big)-\mathscr{I}_{ik}\big(\bar{u}(t_k)\big)\Big\|.\end{aligned}$$

Par les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_5)$ on obtient,

$$\begin{aligned}\big\|u(t)-\bar{u}(t)\big\| &\le \big|\eta_0-\bar{\eta}_0\big|+\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\|u-\bar{u}\|_{PC}\int_0^t g'(s)\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha-1}ds\\&\quad+\sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{c_{ik}}{i!}\big(g(t)-g(t_k)\big)^i\big\|u(t_k)-\bar{u}(t_k)\big\|\\&\le\big|\eta_0-\bar{\eta}_0\big|+\frac{b}{\alpha\Gamma(\alpha)}\|u-\bar{u}\|_{PC}\Big[-\big(g(t)-g(s)\big)^{\alpha}\Big]\Big|_0^t\\&\quad+\sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{c_{ik}}{i!}\big(g(t)-g(t_k)\big)^i\sup_{t_k\in J}\big\|u(t_k)-\bar{u}(t_k)\big\|\\&=\big|\eta_0-\bar{\eta}_0\big|+\frac{b}{\Gamma(\alpha+1)}\|u-\bar{u}\|_{PC}\big(g(t)-g(0)\big)^{\alpha}\\&\quad+\big\|u-\bar{u}\big\|_{PC}\sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{c_{ik}}{i!}\big(g(t)-g(t_k)\big)^i\end{aligned}$$

g étant croissante et positive, on aura alors

$$\begin{aligned}\big\|u(t)-\bar{u}(t)\big\| &\le \big|\eta_0-\bar{\eta}_0\big|+\frac{b}{\Gamma(\alpha+1)}\|u-\bar{u}\|_{PC}\big(g(T)-g(0)\big)^{\alpha}\\&\quad+\|u-\bar{u}\|_{PC}\sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{c_{ik}}{i!}\big(g(T)\big)^i\\&=\big|\eta_0-\bar{\eta}_0\big|+\|u-\bar{u}\|_{PC}\Bigg(\frac{b}{\Gamma(\alpha+1)}\big(g(T)-g(0)\big)^{\alpha}+\sum_{0<t_k<t}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{c_{ik}}{i!}\big(g(T)\big)^i\Bigg).\end{aligned}$$

De (3.16), il vient que

$$\big\|u(t)-\bar{u}(t)\big\|\le\big|\eta_0-\bar{\eta}_0\big|+\mathscr{L}_1\|u-\bar{u}\|_{PC}.$$

Donc, pour tout $t \in J$, il résulte que

$$\|u-\bar{u}\|_{PC} \leq \left|\eta_0-\bar{\eta}_0\right| + \mathscr{L}_1\|u-\bar{u}\|_{PC}.$$

Puisque $\mathscr{L}_1 < 1$, on obtient

$$\|u-\bar{u}\|_{PC} \leq \frac{1}{1-\mathscr{L}_1}\left|\eta_0-\bar{\eta}_0\right|.$$

De plus, si $\left|\eta_0-\bar{\eta}_0\right| < \delta$, alors pour tout $\varepsilon > 0$. En prenant $\delta = \varepsilon(1-\mathscr{L}_1) > 0$, on obtient $\|u-\bar{u}\|_{PC} < \varepsilon$. En conclusion,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0,\ \left|\eta_0-\bar{\eta}_0\right| < \delta \Rightarrow \|u-\bar{u}\|_{PC} < \varepsilon.$$

Ce qui montre que la solution de problème (3.4) est uniformément stable. ■

Appendice

Définition 3.4.2. (***Formule du binôme de Newton***)
Soient x et y deux réels et n un entier naturel non nul. On a

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad \text{où} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{A_1}$$

En particulier

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \tag{A_2}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}. \tag{A_3}$$

Proposition 3.4.3. *Pour tous réels x et y et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k. \tag{A_4}$$

Définition 3.4.4. [7](***Transformée de Laplace***)
On appelle transformée de Laplace d'une fonction localement intégrable f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) la fonction

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt.$$

Il est parfois utile de savoir dériver une fonction définie par une intégrale dont les bornes dépendent du paramètre.

Proposition 3.4.5. [19](***Théorème fondamentale de l'analyse***)
Soient $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ deux intervalles, $a : I_1 \to I_2$ et $b : I_1 \to I_2$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(I_1)$ et $f : I_1 \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet en tout point une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\cdot, t)$ qui elle-même est continue sur $I_1 \times [a, b]$. Alors la fonction $h : I_1 \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t)dt,$$

est de classe $\mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(I_1)$ et on a

$$h'(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt + b'(x)f(x, b(x)) - a'(x)f(x, a(x)). \tag{A_5}$$

Définition 3.4.6. [12](***Stabilité***)
Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x),\ t > 0 \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{A_6}$$

*Une solution $x(\cdot)$ du système (A_6) est dite **stable** si pour toute autre solution $y(\cdot)$ du système, on a*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \|x(0) - y(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - y(t)\| < \varepsilon.$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons mis le point sur l'étude des dérivées fractionnaires généralisées de Reimann-Liouville, et de Caputo. Afin de mettre en exergue cette dernière notion, nous avons présenté des conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir l'existence, l'unicité et la stabilité d'une inclusion différentielle impulsive d'ordre fractionnaire dans un espace de dimension finie, à travers le théorème de point fixe, théorème d'Ascoli-Arzelà et la théorie de l'analyse multivoque.

Bibliographie

[1] **E. Ait Dads, M. Benchohra, S. Hamani,** *Impulsive fractional differential inclusions involving the Caputo fractional derivative,* Fract. Calc. Appl. Anal. 12(1), 15-38 (2009).

[2] **R. Almeida,** *A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function,* Commun. Nonl. Sci. Numer. Simult, 44, 460–481, (2017).

[3] **R. Almeida,** *Further properties of Osler's generalized fractional integrals and derivatives with respect to another function*, J. Mathématiques, Vol 49, 2459-2492, (2019).

[4] **J. P. Aubin, A. Cellina,** *Differential inclusion, set-valued maps and viability theory,* springer-verlag. Berlin Heildelberg, New York Tokyo (1984).

[5] **M. Benchohra, J. Henderson, S. Ntouyas,** *Impulsive differential equations and inclusions,* Hindawi Publishing Corporation, 2 New York, (2006).

[6] **M. Benchohra, A. Ouahab,** *Existence and uniqueness of solutions to impulsive fractional differential equations,* Elec. J. Qual. Diff. Equ, 2009(10), 1-11, (2009).

[7] **N. Boccara,** *Analyse fonctionnelle,* Paris, (1984).

[8] **A. Bressan, G. Colombo,** *Existence and selections of maps with decomposable values,* Studia Math. 90, 69-85, (1988).

[9] **H. Brezis,** *Analyse fonctionnelle,* Masson, Paris, (1983).

[10] **C. Castaing, M.Valadier,** *Convex analysis and measurable multifunctions,* LNM 580, Springer Verlag, Berlin (1977).

[11] **Y. K. Chang, W.T. Li,** *Existence results for second order impulsive functional differential inclusions,* J. Math. Anal. Appl. 301, 477–490, (2005).

[12] **Ju. L. Daleckiĩ, M. G. Krĕn,** *Stability of solutions of differential equations in Banach space,* Amer. Math. Soc. Translations of mathematical monographs, vol 43.

[13] **K. Deimling,** *Multivalued differential equations,* Walter de Gruyter, Berlin, (1992).

[14] **A. Granas, M. Frigon, G. Sabidussi,** *Topological methods in differential equations and inclusions,* Springer, Montreal, Canada, (1995).

[15] **G. Gupur,** *Functional Analysis Methods for Reliability Models,* Birkhauser (2011).

[16] **N. E. Hassan,** *Topologie générale et espaces normés,* Dunod, (2011).

[17] **F. Jarad, T. Abdeljawad,** *Generalized fractional derivatives and Laplace transform,* Discrete and Continuous Dynamical Systems S, Volume 13(3), 709–722, (2020).

[18] **A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo,** *Theory and applications of fractional differential equations*, North Holland Mathematics Studies, 204, Amsterdam, (2006).

[19] **J. P. Ramis et A. Warusfel,** *Mathématiques tout-en-un pour la Licence, Niveau L2*, Dunod, Paris, (2007).

[20] **M. Rehman, P. W. Eloe,** *Existence and uniqueness of solutions for impulsive fracional differential equations*, Applied Mathematics and Computation 224, 422-431, (2013).

[21] **D. Repovs, P.V. Semenor,** *Continuons selections of multivalued mappings*, Springer science and business media Dordrecht (1984).

[22] **R.T. Rockafellar,** *Integrals which are convex functionals,* Pacific J. Math. 24 , 525-539, (1968).

[23] **S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev,** *Fractional integrals and derivatives theory and applications,* CRC Press, (1993).

[24] **Y. Sonntag,** *Topologie et analyse fonctionnelle,* ellipses, édition marketing, (1998).

[25] **D. R. Smart,** *Fixed Point Theorems,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1974).

[26] **J. Vanterler, K. Kucche,** *Existence, uniqueness and stability of fractional impulsive functional differential inclusions*, Journal of matimatical sciences 15(2), 839-857 (2020).

[27] **J. Wang, A. G Ibrahim, D. Óregan, Y. Zhou,** *Controllability for noninstantaneous impulsive semilinear functional differential inclusions without compactness,* Indagationes Math 29(5), 1362–1392, (2018).

[28] **K. Yosida,** *Functional analysis,* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1980).