République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Benyahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

№ d'ordre ....

№ de séries ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Etude d'une inclusion différentielle régie par des opérateurs maximaux monotones dépendants du temps et de l'état

Présenté par

Hana Latli

Devant le jury composé de

Président	Dalila Azzam-Laouir	Prof.	Université de Jijel
Encadreur	Soumia Saïdi	M.C.A.	Université de Jijel
Examinateur	Sabrina Izza	M.C.B.	Université de Jijel

Promotion **2021/2022**

Remerciements

En premier lieu, je remercie ALLAH le tout puissant pour la volonté et la santé qu'il m'a donné tout au long des années de mes études pour terminer ce mémoire.

Je voudrai présenter mes sincères remerciements à mon encadreur Mme. Soumia Saïdi, Maître de Conférences A à l'université de Jijel, pour la qualité de son encadrement, et surtout pour sa disponibilité et sa gentillesse.

J'exprime ma gratitude et mes remerciements au Prof Dalila Azzam-Laouir et Mme Sabrina Izza Maître de Conférences B à l'université de Jijel, d'avoir accepté d'être membres au jury.

Je remercie très sincèrement tous les enseignants du Département de Mathématiques.

Enfin, je souhaite remercier ma famille. Elle a toujours cru en moi. Elle m'a toujours soutenue au fil des années. Ce soutien sans faille est l'élément le plus précieux à mes yeux.

Hana Latli

Dédicace

C'est avec l'aide et la grâce d'Allah que j'ai achevé ce modeste travail que je dédie :

A ma très chère mère

Tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi. Ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études. Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que tu mérites pour tous les sacrifices que tu n'as cessé de me donner depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte.

A mon très cher père

Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, et le respect que j'ai pour toi. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jours et nuits pour mon éducation et mon bien être. Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

A mes frères et sœurs

Salah Eddine, Zineb, Tabet, Amina et mon petit ange Ahmed. Je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite.

A mes chères amies

Je ne peux trouver les mots justes et sincères pour vous exprimer mon affection et mes pensées, vous êtes pour moi des sœurs sur qui je peux compter.

Table des matières

Introduction

L'étude des inclusions différentielles gouvernées par des opérateurs maximaux monotones a fait l'objet de plusieurs livres et articles, on peut citer par exemple [1], [2], [4], [5], [6], [7], [8], [10], [14], [20], [27], [29], parmi d'autres références sur le sujet.

Le papier [20] traite une classe de problèmes d'évolution du premier ordre régie par des opérateurs maximaux monotones dépendent du temps, variant au sens de la pseudo-distance introduite dans [28] (voir (1.9) pour sa définition). Quelques années après, dans la lignée de cet article, des variantes ont été considérées, voir par exemple [4], [5], [6], [14], [16], [26]. Actuellement, le cas des inclusions différentielles du premier ordre régies par des opérateurs dépendant du temps et de l'état a été étudié dans [21] (en dimension finie) et dans [24] (en dimension infinie). Dans ce mémoire, on s'intéresse au cas du second-ordre de cette classe de problèmes d'évolution. On a mené dans ce mémoire une étude détaillée d'une partie du papier récent [13].

Un bref schéma du contenu présenté dans ce mémoire peut se décrire comme suit : Le premier chapitre est intitulé "Préliminaires". Il comporte des notations et quelques espaces usuels. Aussi, il réunit un ensemble de définitions, propositions et théorèmes sur l'analyse fonctionnelle ainsi que les propriétés fondamentales des opérateurs maximaux monotones qui vont nous servir de clé dans le chapitre qui suit. Dans le deuxième chapitre intitulé "Résultats principaux", on s'intéresse à l'étude d'existence de solutions au problème du second ordre suivant, dans un espace de Hilbert H,

$$(P_1)\begin{cases} x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \quad \forall t \in I \\ x(0) = x_0, u(0) = u_0 \in D(A_{(0,x_0)}) \\ -\dot{u}(t) \in A_{(t,x(t))}u(t) \quad \text{p.p. } t \in I \\ u(t) \in D(A_{(t,x(t))}), \forall t \in I, \end{cases}$$

où $I := [0,T]$, $A_{(t,x)}$ est un opérateur maximal monotone dépendant du temps et de l'état qui varie de manière absolument continue en temps et du type Lipschitz en état, au sens de la pseudo-distance (voir l'hypothèse (H_2)). Pour bien mener cette étude, on démontre d'abord un lemme important permettant le passage du cas d'opérateurs dépendant du temps au cas dépendant du temps et de l'état pour les inclusions différentielles du premier ordre

$$(P_0)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A_{(t,x(t))}u(t),\ \text{p.p. } t \in I,\ x \in W^{1,2}(I,H), \\ u(t) \in D(A_{(t,x(t))}), \forall t \in I \\ u(0) = u_0 \in D(A_{(0,x(0))}). \end{cases}$$

Dans notre développement, on réduit le problème au premier ordre. Après, on construit un ensemble, on définit convenablement une fonction dans le but d'appliquer le théorème du point fixe de Schauder.

Ensuite, on considère le problème perturbé

$$(P_2)\begin{cases} x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \quad \forall t \in I \\ x(0) = x_0, u(0) = u_0 \in D(A_{(0,x_0)}) \\ -\dot{u}(t) \in A_{(t,x(t))}u(t) + f(t,x(t),u(t)) \quad \text{p.p. } t \in I \\ u(t) \in D(A_{(t,x(t))}), \forall t \in I, \end{cases}$$

où $f : I \times H \times H \to H$ est une perturbation univoque satisfaisant à des conditions appropriées. La démonstration s'appuie essentiellement sur les techniques et idées utilisées dans l'étude d'existence de solutions pour (P_1).

Ce mémoire se termine par le chapitre 3 intitulé "Cas particulier du processus de la rafle". En effet, des théorèmes du chapitre précédent découlent les résultats d'existence correspondants aux problèmes suivants

$$(P_3)\begin{cases} x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \quad t \in I \\ -\dot{u}(t) \in N_{C(t,x(t))}u(t) \quad \text{p.p. } t \in I, \\ u(t) \in C(t,x(t)), \quad t \in I \\ u(0) = u_0 \in C(0,x_0),\ x(0) = x_0 \in H; \end{cases}$$

et

$$(P_4)\begin{cases} x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \quad t \in I \\ -\dot{u}(t) \in N_{C(t,x(t))}u(t) + f(t,x(t),u(t)) \quad \text{p.p. } t \in I, \\ u(t) \in C(t,x(t)), \quad t \in I \\ u(0) = u_0 \in C(0,x_0),\ x(0) = x_0 \in H. \end{cases}$$

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rassemblons des notions de base, quelques résultats fondamentaux utiles, notamment les définitions et les propriétés des multi-applications et celles des opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert.

1.1 Notations générales et espaces usuels

Tout au long de ce mémoire nous adoptons les notations suivantes :

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des nombres réels positifs.
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.
- $I := [0, T]$, $T > 0$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.
- H est un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$.
- $\overline{S}$ est l'adhérence d'un ensemble S ($S \subset H$).
- $\overline{co}S$ est le plus petit convexe fermé contenant l'ensemble S ($S \subset H$).
- $\overline{B}_H(0, r)$ est la boule fermée dans H de centre 0 et de rayon r.
- $\overline{B}_H$ est la boule unité fermée dans H.
- $\mathcal{L}(I)$ est la tribu de Lebesgue sur I.
- $\mathcal{B}(H)$ est la tribu borélienne sur H.
- $\mathcal{P}(X)$ où 2^X est l'ensemble des parties d'un ensemble X.

- $\rightharpoonup$ désigne la convergence faible.
- $\to$ désigne la convergence forte.
- $\mathbf{1}_S$ est la fonction caractéristique d'un sous-intervalle S de I, définie par $\mathbf{1}_S(x) = 1$ si $x \in S$ et 0 sinon.
- $\mathcal{C}_H(I)$ est l'espace des fonctions continues de I dans H muni de la norme de la convergence uniforme $\|x\|_\infty = \sup_{t\in I} \|x(t)\|$.
- $\dot{x}$ ou x' (resp. $\ddot{x}$) est la dérivée première (resp. seconde) de $x : I \to H$ quand elles existent.
- $L^p_H(I)$, $p \in [1, +\infty[$, est l'espace des fonctions mesurables $x : I \to H$ telles que $\int_0^T \|x(t)\|^p dt < +\infty$ muni de la norme $\|x\|_{L^p_H(I)} = (\int_0^T \|x(t)\|^p dt)^{1/p}$.
  Si $p = 2$ alors $L^2_H(I)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2_H(I)}$ pour tous $f, g \in L^2_H(I)$
$$\langle f, g\rangle_{L^2_H(I)} = \int_0^T \langle f(t), g(t)\rangle dt.$$
- $L^\infty_H(I)$ est l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées définies sur I à valeurs dans H muni de la norme
$$\|f\|_{L^\infty_H(I)} = \inf\{c \geq 0 : \quad \|f(t)\| \leq c \ \ p.p.\}.$$
- $W^{1,2}(I, H)$ est l'espace des fonctions $x : I \to H$ absolument continues à dérivée dans $L^2_H(I)$ et on note $W^{1,2}(I)$ si $H = \mathbb{R}$.
- $W^{2,2}(I, H)$ est l'espace des fonctions $x : I \to H$ absolument continues à dérivée w absolument continue avec $\dot{w}$ dans $L^2_H(I)$.
- I_H est l'identité de H.
- p.p. presque partout.

Une bonne partie du contenu du chapitre a été prise des références [3], [8], [9], [25].

1.2 Rappels et résultats fondamentaux

Dans tout ce qui suit X est un ensemble non-vide.

Définition 1.1. *Soit $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$. Alors, Γ est dite topologie si*

1. $\emptyset \in \Gamma$, $X \in \Gamma$.

2. *Toute intersection finie d'éléments de Γ appartient à Γ.*

3. *Toute réunion quelconque d'éléments de Γ appartient à Γ.*

Dans ce cas, le couple (X, Γ) est dit espace topologique.
Les éléments de Γ sont appelés ensembles ouverts.
Les sous-ensembles fermés de X sont les complémentaires des ouverts.

Caractérisation 1.2.
Soit (X, Γ) un espace topologique. On dit qu'une partie V de X est un voisinage de $x \in X$ s'il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset V$.
On appelle adhérence de A notée $\overline{A}$ le plus petit fermé contenant A.
On appelle intérieur de C noté $Int(C)$ le plus grand ouvert de X inclus dans C.

Définition 1.3. *On dit que X est un espace séparé si pour tous points distincts x et y dans X, il existe un voisinage V_x de x dans X, et un voisinage V_y de y dans X tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$.*

Définition 1.4. *On appelle tribu sur X toute famille Σ de parties de X telle que :*

1. $\emptyset \in \Sigma$.
2. *Σ est stable par passage aux complémentaires.*
3. *Σ est stable par passage aux réunions dénombrables.*

Dans ce cas, le couple (X, Σ) est appelé espace mesurable.

Définition 1.5. *(Application mesurable)*
Soient (X_1, Σ_1) et (X_2, Σ_2) deux espaces mesurables. Une application $f : (X_1, \Sigma_1) \to (X_2, \Sigma_2)$ est dite mesurable si $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$, pour tout $A \in \Sigma_2$.

Définition 1.6. *Soit* (X, Σ) *un espace mesurable. Une mesure sur* (X, Σ) *est une application $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ vérifiant*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. *Pour toute famille $\{A_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de Σ deux à deux disjoints (c'est-à-dire que $A_n \bigcap A_m = \emptyset$ lorsque $n \neq m$), on a la propriété de σ-additivité dénombrable*
$$\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

On dit alors que (X, Σ, μ) *est un espace mesuré.*
Lorsque μ(X) $< \infty$, on dit que la mesure μ est finie.
Un ensemble A est dit μ-négligeable s'il existe $B \in \Sigma$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

Définition 1.7. *(Mesure de Lebesgue) Soit* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *l'espace mesurable* $\mathbb{R}$ *muni de sa tribu borélienne. Il existe une unique mesure notée* λ *sur cet espace mesurable qui possède les deux propriétés suivantes :*
(1) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \ \lambda(a + A) = \lambda(A),$
(2) $\lambda([0, 1]) = 1.$
Cette mesure est appelée mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. *De plus, on peut montrer qu'elle coïncide avec la notion de longueur sur les intervalles, c'est-à-dire que la mesure de Lebesgue d'un intervalle est égale à la longueur de cet intervalle.*

Définition 1.8. (*Propriété vraie* μ*-presque partout*)
On dit qu'une propriété est vraie μ*-presque partout sur l'espace mesuré* $(\mathrm{X}, \ \Sigma, \ \mu)$ *si la propriété est fausse sur une partie* μ*-négligeable de* X*, on note* μ *p.p.*
Si μ *est la mesure de Lebesgue, on écrit p.p. pour simplicité.*

Définition 1.9.
L'application $d : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to [0, \ +\infty[$ *est une distance sur* X *si pour tous* $x, \ y, \ z \in \mathrm{X}$*, on a*

1. $d(x, \ y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$,
2. $d(x, \ y) = d(y, \ x)$,
3. $d(x, \ z) \leq d(x, \ y) + d(y, \ z)$ *(inégalité triangulaire).*

   Dans ce cas, on dit que $(\mathrm{X}, \ d)$ *est un espace métrique.*

Exemple 1.10. *Tout espace métrique est séparé.*

Définition 1.11.
Soient (X, d) *un espace métrique,* $S \subset X$ *et* $x_0 \in X$*, alors*

$$d(x_0, S) = \inf_{x \in S} d(x_0, x),$$

$d(x_0, S)$ *est la plus petite distance entre le point* x_0 *et les points de* S.

Définition 1.12. *Soient* S_1*,* S_2 *deux sous-ensembles de* H*. La distance de Hausdorff entre* S_1 *et* S_2 *est définie par*

$$d_H(S_1, S_2) = \max\left(\sup_{x \in S_2} d(x, S_1), \sup_{x \in S_1} d(x, S_2)\right). \tag{1.1}$$

Définition 1.13. *On appelle norme sur un espace vectoriel* X *réel ou complexe, de dimension finie ou infinie, toute application* $x \mapsto \|x\|$ *de* X *dans* $\mathbb{R}_+$ *vérifiant les conditions*

i) $\forall x \in \mathrm{X} : \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

ii) $\forall x \in \mathrm{X}, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \ \|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|,$

iii) $\forall x, y \in \mathrm{X} : \ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Toute norme définit naturellement une distance : $d(x,y) = \|x-y\|$.

Définition 1.14. *On appelle espace vectoriel normé le couple* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *où* X *est un espace vectoriel et* $\|\cdot\|$ *est une norme sur* X.

Définition 1.15. *Soit* X *un espace métrique. La suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite une suite de Cauchy si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p > q \geq n_0 : \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Définition 1.16. *Soit* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. On dit que* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *est un espace complet si et seulement si toute suite de Cauchy pour* $\|\cdot\|$, *composée d'éléments de* X, *admet une limite dans* X. *On dit aussi que* X *est un espace de Banach.*

Définition 1.17. *(Continuité séquentielle)*

Soient (X_1, Γ_1), (X_2, Γ_2) *deux espaces topologiques et* $f : \mathrm{X}_1 \longrightarrow \mathrm{X}_2$. *La fonction* f *est dite séquentiellement continue en* $x \in \mathrm{X}_1$ *si pour toute suite* $(x_n) \subset \mathrm{X}_1$ *telle que* $x_n \longrightarrow x$, *alors, on a* $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

La fonction f *est séquentiellement continue sur* X_1 *si elle est séquentiellement continue en tout point de* X_1.

Remarque 1.18. *Dans les espaces métriques, la continuité séquentielle est équivalente à la continuité.*

Définition 1.19. *Soit* $(\mathrm{X}, \mathit{\Gamma})$ *un espace topologique et soit* $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$. *On dit que* A *est dense dans* X *si* $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{X}$.

Définition 1.20. *On dit qu'un espace topologique* $(\mathrm{X}, \mathit{\Gamma})$ *est séparable s'il existe un sous-ensemble* $A \subset \mathrm{X}$ *dénombrable et dense dans* X.

Définition 1.21. (1) *Un recouvrement de* X *est une famille* $(A_i)_{i\in I}$ *de parties de* X *telle que* $X \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.

Si de plus, I *est un ensemble fini, on dit que* $(A_i)_{i\in I}$ *est un recouvrement fini de* X.

(2) *Soit* $(A_i)_{i\in I}$ *un recouvrement de* X. *Soit* $J \subset I$ *tel que* $X \subset \bigcup_{j\in J} A_j$, *on dit que* $(A_j)_{j\in J}$ *est un sous-recouvrement de* $(A_i)_{i\in I}$.

(3) *Un recouvrement ouvert de* X *est une famille d'ouverts* $(U_i)_{i\in I}$ *tel que* $X \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

Définition 1.22. *On dit que* (X, Γ) *espace topologique est compact s'il est séparé et de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Définition 1.23. *Soit* (X, Γ) *un espace topologique. On dit que*

(i) $K \subset \mathrm{X}$ *est compact si de tout recouvrement de* K *par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

(ii) $A \subset \mathrm{X}$ *(où* X *est séparé) est relativement compact si* $\overline{A}$ *est compact.*

(iii) $D \subset \mathrm{X}$ *est compact si et seulement si* D *est fermé et relativement compact.*

Caractérisation 1.24. *Soit* X *un espace métrique.*

(i) Un sous-ensemble K *de* X *est dit relativement compact, si de toute suite dans* K *on peut extraire une sous-suite convergente dans* X.

(ii) Un sous-ensemble D *de* X *est dit compact, si de toute suite dans* D *on peut extraire une sous-suite convergente dans* D.

(iii) Un sous-ensemble F *de* X *est fermé si et seulement si toute limite (dans* X*) d'une suite à valeurs dans* F *appartient à* F.

Proposition 1.25. *Tout fermé inclus dans un compact est compact.*
Tout compact d'un espace séparé est fermé.

Soient E, X deux espaces normés, $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications et $f : X \to E$.

Définition 1.26. (*Convergence ponctuelle*)
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ponctuellement vers* f *(sur* X*) si et seulement si, pour tout* $x \in X$*, la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(x)$ *dans* E.

Définition 1.27. *(Convergence uniforme)*

1) On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f*(sur* X*) si et seulement si :*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \quad (n \geq N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon).$$

2) Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et l'application* f *sont bornées, alors* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* X*, si et seulement si*

$$\sup_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\| \to 0.$$

Définition 1.28.
Soient X *un espace topologique et* $X' = \{f : X \to \mathbb{R}/f$ *linéaire continue*$\}$ *son dual*

topologique. Soit $f \in X'$ et soit

$$\begin{aligned}\varphi_f : X &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \varphi_f(x) = \langle f, x\rangle_{X',X},\end{aligned}$$

où l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X,X'}$ les crochets de dualité.
Lorsque f parcourt X', on obtient une famille d'applications $(\varphi_f)_{f\in X'}$. On appelle topologie faible sur X, la topologie la moins fine sur X rendant les applications $(\varphi_f)_{f\in X'}$ continues sur X et on la note $\sigma(X, X')$.

Définition 1.29. *(Convergence faible)*
Soit (x_n) une suite de points de X, alors on a

$$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \langle f, x_n\rangle_{X',X} \longrightarrow \langle f, x\rangle_{X',X}\ \forall f \in X'.$$

On note que la convergence forte entraine la convergence faible.

Définition 1.30.
Soient X un espace topologique et X' son dual topologique. Soit $x \in X$ et soit

$$\begin{aligned}\varphi_x : X' &\longrightarrow \mathbb{R}\\ f &\longmapsto \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle_{X',X}.\end{aligned}$$

Lorsque x parcourt X, on obtient une famille d'applications $(\varphi_x)_{x\in X}$. On appelle topologie faible sur X', la topologie la moins fine sur X' rendant les applications $(\varphi_x)_{x\in X}$ continues sur X' et on la note $\sigma^*(X', X)$.*

Définition 1.31. *(Convergence faible*)*
Soit (f_n) une suite de points de X', alors on a

$$f_n \rightharpoonup^* f \Leftrightarrow \langle f_n, x\rangle_{X',X} \longrightarrow \langle f, x\rangle_{X',X}\ \forall x \in X.$$

Définition 1.32. *(Produit scalaire) Soit H un espace vectoriel réel. Un produit scalaire sur H est une application de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$ qui associe à tout couple (x, y) le produit scalaire noté $\langle x, y\rangle$ telle que*
(i) L'application $x \longmapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire, i.e., pour tous $y, x_1, x_2 \in H$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ on a

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\rangle = \alpha_1\langle x_1, y\rangle + \alpha_2\langle x_2, y\rangle,$$

(ii) Pour tous $x, y \in H$, on a : $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.
(iii) Pour tout $x \in H$, on a : $\langle x, x\rangle \geq 0$ et $(\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.

Définition 1.33. *Un espace préhilbertien (réel) est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. *Sur cet espace, on définit une norme par* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in H$, *dite norme induite par le produit scalaire.*

Définition 1.34. *Un espace de Hilbert réel est un espace préhilbertien (réel) complet, i.e., un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est complet pour la norme associée.*

Théorème 1.35. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit* H *un espace préhilbertien, alors, on a pour tous* $x, y \in H$

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}. \tag{1.2}$$

De cette inégalité, résulte la continuité des applications de H *dans* $\mathbb{R}$: $x \longmapsto \langle x, y\rangle$ *et* $y \longmapsto \langle x, y\rangle$.

Théorème 1.36. *(Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki)*
Soit E *un espace de Banach, soit* E' *son dual topologique. La boule unité fermée dans* E' *notée* $\overline{B}_{E'}$ *est compacte pour la topologie* $\sigma^*(E', E)$.

Corollaire 1.37. *Soit* H *un espace de Hilbert. Alors*
Toute suite convergente de H *est bornée.*
Toute suite bornée dans H *admet une sous-suite faiblement convergente.*
Soit $(x_n) \subset H$, *si* $x_n \rightharpoonup x$, *alors* $(\|x_n\|)$ *est bornée et* $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

Définition 1.38. *Un ensemble* $S \subset H$ *est convexe si*

$$\forall x,\, y \,\in\, S, \forall t \,\in\, [0,\, 1] : \quad tx + (1-t)y \in S.$$

Exemple 1.39. *Pour tout* $x \in H$ *et* $r \geq 0$, *la boule centrée en* x *et de rayon* r *(ouverte ou fermée) est convexe.*

Définition 1.40. *Soit un intervalle* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$. *Une fonction* $\varphi : [a, b] \to H$ *est dite absolument continue si pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour toute suite finie* $([a_n, b_n])_{n\leq N}$ *de sous-intervalles de* $[a, b]$ *d'intérieurs disjoints,*

$$\sum_{n\geq 0}(b_n - a_n) < \delta \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} \|\varphi(b_n) - \varphi(a_n)\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.41. *Soit un intervalle* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$. *Une fonction* $\varphi : [a, b] \to H$ *est dite absolument continue si et seulement si il existe une fonction* g *intégrable sur* $[a, b]$ *telle que pour tout* $x \in [a, b]$ *on a*

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x g(t)dt,$$

$g \equiv \dot{\varphi}$ *p.p.*

Remarque 1.42. *Soit une fonction* $\varphi : [a, b] \to H$.

1. *Toute fonction absolument continue est une fonction continue.*
2. *Toute fonction absolument continue est dérivable presque partout.*
3. *Toute fonction continue est mesurable.*

Définition 1.43. *(Fonction du type Lipschitz)*
Soit $\varphi : I \to H$. *On dit que* φ *est du type Lipschitz de rapport* $L > 0$ *si et seulement si*

$$\forall\ x,\ y\ \in\ I :\ \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq L|x - y|.$$

On dit que φ *est une contraction si, elle est du type Lipschitz de rapport* $0 < L < 1$.

Remarque 1.44.
Toute fonction du type Lipschitz est absolument continue.

1.3 Multi-applications et sélections

Pour commencer, nous définissons les multi-applications, aussi appelées correspondances, applications multivoques ou multi-fonctions. Pour plus de détails sur les propriétés des multi-applications, on peut se référer par exemple à [3] et [17].

Définition 1.45. *Soient* X, Y *deux ensembles non-vides, on appelle multi-application définie sur* X *à valeurs dans* Y *toute application de* X *ayant ses valeurs dans* 2^Y. *On note*

$$F : X \rightrightarrows Y \quad ou \quad F : X \to 2^Y,$$

c'est à dire pour tout x *dans* X : $F(x)$ *est un sous-ensemble de* Y.

Définition 1.46. *Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application.*
On appelle domaine de F *noté* $D(F)$ *l'ensemble*

$$D(F) = \{x \in X :\ F(x) \neq \emptyset\}.$$

On définit l'image de F *notée* $R(F)$ *par*

$$R(F) = \{y \in Y :\ \exists x \in X, y \in F(x)\} = \bigcup_{x \in D(F)} F(x).$$

On définit le graphe de F *noté* $Gr(F)$ *par*

$$Gr(F) = \{(x, y) \in D(F) \times Y : y \in F(x)\}.$$

Définition 1.47. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non-vides. On appelle sélection de F toute application $f : X \longrightarrow Y$ vérifiant $f(x) \in F(x), \forall x \in X$.*

Définition 1.48.

Soient (X, Γ) un espace mesurable, Y un espace métrique, et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est mesurable si pour tout ouvert V de Y

$$F^{-1}(V) = \{x \in X,\ F(x) \cap V \neq \emptyset\} \in \Gamma.$$

Exemple 1.49. *Toute multi-application constante est mesurable.*

Théorème 1.50. *Soient (X, Γ) un espace mesurable, Y un espace métrique complet séparable et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application mesurable à valeurs non-vides fermées. Alors, F admet au moins une sélection mesurable.*

Définition 1.51. *Soit E un espace normé. Soit $F : I \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable. La multi-application F est dite intégrablement bornée si il existe $h \in L^1_E(I)$ telle que*

$$\sup\{\|y\|, y \in F(t)\} \leq h(t) \ \text{ p.p. } t \in I.$$

Théorème 1.52. *Soit $F : I \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable intégrablement bornée à valeurs non-vides convexes faiblement compactes dans un espace de Banach séparable E. Alors, S^1_F est convexe et compact pour la topologie faible de $L^1_E(I)$, où S^1_F est l'ensemble des sélections intégrables de F défini par*

$$S^1_F = \{f \in L^1_E(I) : f(t) \in F(t)\ \}.$$

On rappelle un résultat de [11], adapté au contexte étudié dans ce mémoire.

Théorème 1.53. *Soit $G : I \rightrightarrows H$ une multi-application mesurable intégrablement bornée à valeurs convexes compactes, alors la multi-application intégrale*

$$\int_0^T G(s)ds = \left\{ \int_0^T g(s)ds, g \in S^1_G \right\}$$

est convexe compacte.

1.4 Opérateurs maximaux monotones

Définition 1.54. *Un opérateur $A : H \rightrightarrows H$ est dit monotone si pour tous $x_1, x_2 \in D(A)$ et tous $y_1 \in Ax_1$, $y_2 \in Ax_2$, on a*

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0. \tag{1.3}$$

Définition 1.55. *Un opérateur $A : H \rightrightarrows H$ est dit maximal monotone s'il est monotone et si toute extension monotone de A coïncide avec A.*

Proposition 1.56. *(Théorème de Minty) Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$, on a équivalence entre les deux propriétés suivantes :*

1. *A est maximal monotone.*
2. *A est monotone et $R(I_H + \lambda A) = H$, pour tout $\lambda > 0$.*

Définition 1.57. *Soit S un sous-ensemble de H. Le cône normal de S en $x \in H$ défini par*

$$N_S(x) = \{y \in H : \langle y, z - x\rangle \leq 0 \ \forall z \in S\}. \tag{1.4}$$

Si S est convexe fermé, alors N_S est un opérateur maximal monotone. Il est à noter que $D(N_S) = S$.

Définition 1.58. *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone. Alors, pour tout $x \in D(A)$, Ax est non-vide convexe fermé. De plus, il existe $y \in Ax$ unique appelé élément de norme minimale de Ax, noté A^0x tel que $\|y\| = \inf\{\|z\|, z \in Ax\}$.*

Définition 1.59. *Un opérateur $A : H \rightrightarrows H$ est dit demi-fermé si la condition suivante est satisfaite : Si $x_n \in D(A), y_n \in Ax_n$ tels que $x_n \to x$ et $y_n \rightharpoonup y$ dans H alors $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.*

Proposition 1.60. *Tout opérateur maximal monotone est demi-fermé.*

Définition 1.61. *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$. On appelle l'opérateur $J_\lambda^A : H \to H$ défini par*

$$J_\lambda^A = (I_H + \lambda A)^{-1}, \tag{1.5}$$

la résolvante de A, et l'opérateur $A_\lambda : H \to H$ défini par

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I_H - J_\lambda^A), \tag{1.6}$$

l'approximation de Yosida de A, pour tout $\lambda > 0$.
Les opérateurs A_λ, J_λ^A sont univoques et définis sur l'espace H tout entier. On a

$$J_\lambda^A x \in D(A) \ \text{ et } \ A_\lambda(x) \in A(J_\lambda^A x), \text{ pour tout } \ x \in H, \tag{1.7}$$

$$\|A_\lambda(x)\| \leq \|A^0 x\|, \text{ pour tout } \ x \in D(A). \tag{1.8}$$

Définition 1.62. *[28] Soient $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ et $B : D(B) \subset H \rightrightarrows H$ deux opérateurs maximaux monotones, alors on note $dis(A, B)$ la pseudo-distance entre A et B définie par*

$$dis(A,B) = \sup\left\{\frac{\langle y - y', x' - x\rangle}{1 + \|y\| + \|y'\|} : (x,y) \in gph(A),\, (x',y') \in gph(B)\right\}. \tag{1.9}$$

On a $dis(A,B) \in [0, +\infty]$, $dis(A,B) = dis(B,A)$ et $dis(A,B) = 0$ ssi $A = B$.

On rappelle le résultat suivant de [28] : si S_1, S_2 sont deux ensembles convexes fermés non-vides de H, alors on a

$$dis(N_{S_1}, N_{S_2}) = d_H(S_1, S_2), \tag{1.10}$$

où la distance de Hausdorff entre S_1 et S_2 est donnée par (1.1).

1.5 Quelques résultats utiles

On rappelle le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Théorème 1.63. *(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)*
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans $L^p_H(I)$, $1 \le p < +\infty$. On suppose que

1) *$f_n(t) \longrightarrow f(t)$ p.p sur I.*

2) *Il existe une fonction $g \in L^p_{\mathbb{R}_+}(I)$ telle que pour tout n : $\|f_n(t)\| \le g(t)$ p.p sur I.*

Alors, on a $f \in L^p_H(I)$ et $\|f_n - f\|_{L^p_H(I)} \longrightarrow 0$.

Théorème 1.64. *(Théorème d'Ascoli-Arzelà) Soit (I,d) un espace métrique compact et (X,d') un espace métrique complet. Alors, une partie $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}_X(I)$ est relativement compacte pour la topologie de la convergente uniforme, si seulement si les deux conditions sont satisfaites :*

1. *$\mathcal{H}$ est équicontinue, i.e.,*

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{H}, \forall y \in I,\ (d(x,y) < \delta) \Rightarrow (d'(f(x), f(y)) < \epsilon).$$

2. *Pour tout $x \in I$, l'ensemble $\mathcal{H}(x) = \{f(x), f \in \mathcal{H}\}$ est relativement compact.*

Rappelons le théorème du point fixe de Schauder [18].

Théorème 1.65. *Soit C un sous ensemble convexe, borné, fermé, non-vide d'un espace de Banach E et soit $f : C \to C$ une application continue. Si $f(C)$ est relativement compact, alors f admet un point fixe, i.e. il existe $y \in C$ vérifiant $y = f(y)$.*

On termine ce chapitre par la définition classique de la convergence au sens de Komlós (cf p.128 [15]) et une propriété de cette convergence (cf. Théorème 3.1 [19]).

Définition 1.66. *Une suite* $(u_n) \subset L^1_H(I)$ *converge au sens de Komlós vers une fonction* $u \in L^1_H(I)$ *si pour toute sous-suite* (v_n) *de* (u_n), *la suite* $(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} v_j)_n$ *converge ponctuellement* p.p. *vers* u.

Proposition 1.67. *Soit* H *un espace de Hilbert séparable. Soit* (u_n) *une suite bornée dans* $L^1_H(I)$. *Alors, il existe une sous-suite* (v_n) *de* (u_n) *et* $u \in L^1_H(I)$ *tel que* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} w_j = u$ *p.p. pour toute sous-suite* (w_n) *de* (v_n).

Chapitre 2

Résultats principaux

Ce chapitre a pour but d'étudier les problèmes (P_1) et (P_2). Il comprend trois sections. Dans la première, on établit un lemme intéressant concernant les inclusions différentielles gouvernées par les opérateurs maximaux monotones dépendant du temps et de l'état. Ce dernier permet le passage du cas d'opérateurs dépendant du temps au cas d'opérateurs dépendant du temps et de l'état.

2.1 Résultats préparatoires

Pour démontrer nos résultats d'existence de solutions, nous avons besoin de rappeler les lemmes suivants (voir [20]).

Lemme 2.1. *Soit A un opérateur maximal monotone sur H. Si $x \in \overline{D(A)}$ et $y \in H$ sont tels que*

$$\langle A^0 z - y, z - x\rangle \geq 0 \ \ \forall z \in D(A),$$

alors $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.

Lemme 2.2. *Soient A_n $(n \in \mathbb{N})$, A des opérateurs maximaux monotones sur H tels que $dis(A_n, A) \to 0$. Supposons aussi que $x_n \in D(A_n)$ avec $x_n \to x$ et $y_n \in A_n(x_n)$ avec $y_n \rightharpoonup y$ pour certains $x, y \in H$. Alors, on a $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.*

Lemme 2.3. *Soient A, B des opérateurs maximaux monotones sur H. Alors, on a*
(1) *Pour $\lambda > 0$ et $x \in D(A)$*

$$\|x - J_\lambda^B(x)\| \leq \lambda\|A^0x\| + dis(A,B) + \sqrt{\lambda\big(1 + \|A^0x\|\big)dis(A,B)}.$$

(2) *Pour* $\lambda > 0$ *et* $x, x' \in H$

$$\|J_\lambda^A(x) - J_\lambda^A(x')\| \leq \|x - x'\|. \tag{2.1}$$

Lemme 2.4. *Soient* A_n $(n \in \mathbb{N})$, A *des opérateurs maximaux monotones sur* H *tels que* $dis(A_n, A) \to 0$ *et* $\|A_n^0 x\| \leq c(1 + \|x\|)$ *pour* $c > 0$, *tous* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in D(A_n)$. *Alors, pour tout* $z \in D(A)$ *il existe une suite* (z_n) *telle que*

$$z_n \in D(A_n), \quad z_n \to z \text{ et } A_n^0 z_n \to A^0 z. \tag{2.2}$$

Rappelons Théorème 3.1 [4].

Théorème 2.5. *Supposons que pour tout* $t \in I$, $A_t : D(A_t) \subset H \rightrightarrows H$ *est un opérateur maximal monotone satisfaisant*
(h_1) *il existe un nombre réel positif* c *tel que*

$$\|A_t^0 u\| \leq c(1 + \|u\|) \text{ pour tout } (t, u) \in I \times D(A_t),$$

(h_2) *il existe une fonction* $\beta \in W^{1,2}(I)$ *qui est positive sur* $[0, T[$ *et croissante avec* $\beta(T) < \infty$ *et* $\beta(0) = 0$ *telle que*

$$dis(A_t, A_s) \leq |\beta(t) - \beta(s)|, \ \forall t, s \in I.$$

Alors, le problème non-perturbé

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A_t u(t) \quad \text{p.p. } t \in I, \\ u(0) = u_0 \in D(A_0), \end{cases}$$

admet une unique solution absolument continue $u(\cdot)$ *sur* I. *De plus, on a*

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t)) \text{ p.p. } t \in I; \tag{2.3}$$

où K *est une constante réelle positive dépendant de* $\|u_0\|$, c, I *et* $\beta(\cdot)$.

Énonçons et démontrons le lemme principal de cette section (voir [13]).

Lemme 2.6. *Soit* H *un espace de Hilbert réel séparable. Supposons que pour tout* $(t, x) \in I \times H$, $A_{(t,x)} : D(A_{(t,x)}) \subset H \rightrightarrows H$ *est un opérateur maximal monotone satisfaisant*
(H_1) *il existe un nombre réel non négatif* c *tel que*

$$\|A_{(t,x)}^0 y\| \leq c(1 + \|x\| + \|y\|) \text{ pour tout } (t, x, y) \in I \times H \times D(A_{(t,x)}),$$

(H_2) *il existe une constante réelle positive* r, *et une fonction* $a \in W^{1,2}(I)$ *qui est positive sur* I *et croissante avec* $a(T) < \infty$ *et* $a(0) = 0$ *telle que*

$$dis(A_{(t,u)}, A_{(\tau,v)}) \leq a(t) - a(\tau) + r\|u - v\|, \text{ pour tout } 0 \leq \tau \leq t \leq T, \text{ pour tout } u, v \in H.$$

Alors, on a les résultats suivants.
$(\mathcal{I})$ *Pour tout* $x \in W^{1,2}(I, H)$ *et pour tout* $u_0 \in D(A_{(0,x(0))})$, *le problème*

$$(P_0) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A_{(t,x(t))}u(t), \text{ p.p. } t \in I \\ u(t) \in D(A_{(t,x(t))}), \forall t \in I \\ u(0) = u_0 \in D(A_{(0,x(0))}), \end{cases}$$

admet une unique solution absolument continue avec $\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t))$ *où*

$$\beta(t) = \int_0^t [\dot{a}(s) + r\|\dot{x}(s)\|]ds, \; \forall t \in I$$

et K *est une constante positive dépendant de* $\|u_0\|, c, T, x$ *et* β.
$(\mathcal{J})$ *Supposons de plus que*
l'application $(t, x, y) \to J_\lambda^{A_{(t,x)}}(y)$ *est* $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(H)$*-mesurable.*
Alors, pour tout $x \in W^{1,2}(I, H)$ *l'opérateur* $\mathcal{A}_x : D(\mathcal{A}_x) \subset L^2_H(I) \rightrightarrows L^2_H(I)$ *défini par*

$$\mathcal{A}_x u = \{v \in L^2_H(I) : v(t) \in A_{(t,x(t))}u(t) \text{ p.p. } t \in I\},$$

pour tout $u \in D(\mathcal{A}_x)$ *où*
$D(\mathcal{A}_x) := \{u \in L^2_H(I) : u(t) \in D(A_{(t,x(t))}) \text{ p.p.}, \; \exists\, y \in L^2_H(I) : y(t) \in A_{(t,x(t))}u(t), \text{ p.p.}\}$
est maximal monotone.

Démonstration. Montrons d'abord $(\mathcal{I})$. L'opérateur $B_t = A_{(t,x(t))}$ est un opérateur maximal monotone à variation absolument continue par rapport au temps : Pour tout $0 \leq \tau \leq t \leq T$, on a par hypothèse (H_2)

$$\begin{aligned} dis(B_t, B_\tau) &= dis(A_{(t,x(t))}, A_{(\tau,x(\tau))}) \\ &\leq a(t) - a(\tau) + r\|x(t) - x(\tau)\| = \int_\tau^t \dot{a}(s)ds + r\|\int_\tau^t \dot{x}(s)ds\|, \end{aligned}$$

la dernière égalité se justifie par le fait que $x \in W^{1,2}(I, H)$ et $a \in W^{1,2}(I)$, avec $\dot{a}(s) \geq 0$ pour tout $s \in I$ car a est croissante sur I. Alors, en simplifiant, il résulte

$$\begin{aligned} dis(B_t, B_\tau) &\leq \int_0^t [\dot{a}(s) + r\|\dot{x}(s)\|]ds - \int_0^\tau [\dot{a}(s) + r\|\dot{x}(s)\|]ds \\ &= \beta(t) - \beta(\tau), \end{aligned}$$

où $\beta \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ est définie par

$$\beta(t) = \int_0^t [\dot{a}(s) + r\|\dot{x}(s)\|]ds, \ \forall t \in I.$$

De plus, par hypothèse (H_1) on a

$$\begin{aligned}
\|B_t^0 y\| = \|A^0_{(t,x(t))} y\| &\leq c(1 + \|x(t)\| + \|y\|) \\
&\leq c(1 + \|x_0 + \int_0^t \dot{x}(s)ds\| + \|y\|) \\
&\leq c(1 + \|x_0\| + \int_0^t \|\dot{x}(s)\|ds + \|y\|)
\end{aligned}$$

car x est absolument continue. Or, $\|\dot{x}\|_{L^2_H(I)} < +\infty$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\begin{aligned}
\|B_t^0 y\| &\leq c(1 + \|x_0\| + (t-0)^{1/2}(\int_0^t \|\dot{x}(s)\|^2 ds)^{1/2} + \|y\|) \\
&\leq c(1 + \|x_0\| + T^{1/2}\|\dot{x}\|_{L^2_H(I)} + \|y\|) \\
&= c(1 + \|x_0\| + T^{1/2}\|\dot{x}\|_{L^2_H(I)}) + c\|y\| \\
&= c_1 + c_1 \frac{\|y\|}{1 + \|x_0\| + T^{1/2}\|\dot{x}\|_{L^2_H(I)}}.
\end{aligned}$$

En remarquant que $\frac{\|y\|}{1+\|x_0\|+T^{1/2}\|\dot{x}\|_{L^2_H(I)}} < \|y\|$, il revient

$$\|B_t^0 y\| \leq c_1(1 + \|y\|),$$

pour tout $y \in D(A_{(t,x(t))})$, où $c_1 = c(1 + \|x_0\| + T^{1/2}\|\dot{x}\|_{L^2_H(I)})$ est une constante réelle positive qui dépend de c et de x.

Alors, les conditions (h_1) et (h_2) du Théorème 2.5 sont satisfaites. Par conséquent, pour tout $u_0 \in D(B_0)$, il existe une unique solution absolument continue $u : I \to H$ au problème

$$\begin{cases}
-\dot{u}(t) \in B_t u(t) = A_{(t,x(t))} u(t) \quad \text{p.p. } t \in I \\
u(t) \in D(B_t) = D(A_{(t,x(t))}), \forall t \in I, \\
u(0) = u_0 \in D(B_0) = D(A_{(0,x_0)}),
\end{cases}$$

telle que $\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t))$, où $\beta(t) = \int_0^t [\dot{a}(s) + r\|\dot{x}(s)\|]ds, \forall t \in I$ et K est une constante réelle positive qui dépend de $\|u_0\|$, c_1, β et T.

Montrons maintenant $(\mathcal{J})$. En tenant compte de $(\mathcal{I})$, on remarque que pour tout $x \in W^{1,2}(I, H)$ et pour tout $u_0 \in D(A_{(0,x(0))})$, le problème (P_0) admet une unique solution absolument continue. Il résulte alors que $D(\mathcal{A}_x)$ est non-vide et $\mathcal{A}_x$ est bien défini.

L'opérateur $\mathcal{A}_x$ est monotone. En effet, soient $y_i \in \mathcal{A}_x z_i$, $z_i \in D(\mathcal{A}_x)$, $i = 1, 2$, on a

$$\langle y_1 - y_2, z_1 - z_2 \rangle_{L^2_H(I)} = \int_0^T \langle y_1(t) - y_2(t), z_1(t) - z_2(t) \rangle dt.$$

Or $y_i(t) \in A_{(t,x(t))}z_i(t)$, $i = 1,2$ (de la définition de l'opérateur $\mathcal{A}_x$) et $A_{(t,x(t))}$ est par hypothèse monotone. De Définition 1.54, il résulte

$$\langle y_1(t) - y_2(t), z_1(t) - z_2(t)\rangle \geq 0.$$

En intégrant sur I, il résulte

$$\langle y_1 - y_2, z_1 - z_2\rangle_{L^2_H(I)} \geq 0.$$

Pour démontrer que $\mathcal{A}_x$ est maximal, on vérifie que

$$R(I_{L^2_H(I)} + \lambda\mathcal{A}_x) = L^2_H(I), \text{ pour tout } \lambda > 0.$$

Il est évident que $R(I_{L^2_H(I)} + \lambda\mathcal{A}_x) \subset L^2_H(I)$, pour tout $\lambda > 0$. Il reste à montrer

$$L^2_H(I) \subset R(I_{L^2_H(I)} + \lambda\mathcal{A}_x), \text{ pour tout } \lambda > 0, \tag{2.4}$$

c'est-à-dire étant donné $g \in L^2_H(I)$, il existe $v \in L^2_H(I)$ tel que

$$g \in v + \lambda\mathcal{A}_x v \text{ pour tout } \lambda > 0.$$

Remarquons que pour tout $t \in I$, $A_{(t,x(t))}$ est maximal monotone alors, si on pose

$$v(t) = [I_H + \lambda A_{(t,x(t))}]^{-1}g(t),$$

la fonction v satisfait

$$g(t) \in [I_H + \lambda A_{(t,x(t))}]v(t).$$

Il reste à démontrer que $v \in L^2_H(I)$.
Des définitions de la résolvante et de l'approximation Yosida (1.5) et (1.6), on a

$$\begin{aligned} v(t) &= [I_H + \lambda A_{(t,x(t))}(t)]^{-1}g(t) = J_\lambda^{A_{(t,x(t))}}g(t) \\ &= (I_H - \lambda A_\lambda^{A_{(t,x(t))}})g(t) \\ &= g(t) - \lambda A_\lambda^{A_{(t,x(t))}}g(t). \end{aligned}$$

De l'hypothèse de mesurabilité supplémentaire et celle de g et x, on a $t \mapsto J_\lambda^{A_{(t,x(t))}}g(t) = v(t)$ est mesurable. Il résulte que v est mesurable.
On pose $h(t) = \lambda A_\lambda^{A_{(t,x(t))}}g(t)$, pour tout $t \in I$. Les fonctions v et g étant mesurables, on déduit que h est mesurable. Montrons que $t \mapsto \|h(t)\|^2$ est intégrable. Soit u l'unique solution absolument continue du problème (P_0). On a

$$\begin{aligned} h(t) &= \lambda A_\lambda^{A_{(t,x(t))}}g(t) - \lambda A_\lambda^{A_{(t,x(t))}}u(t) + \lambda A_\lambda^{A_{(t,x(t))}}u(t) \\ &= \lambda[\frac{1}{\lambda}(I_H - J_\lambda^{A_{(t,x(t))}})g(t)] - \lambda[\frac{1}{\lambda}(I_H - J_\lambda^{A_{(t,x(t))}})u(t)] + \lambda A_\lambda^{A_{(t,x(t))}}u(t) \\ &= [g(t) - J_\lambda^{A_{(t,x(t))}}g(t)] - [u(t) - J_\lambda^{A_{(t,x(t))}}u(t)] + \lambda A_\lambda^{A_{(t,x(t))}}u(t) \\ &= (g(t) - u(t)) - [J_\lambda^{A_{(t,x(t))}}g(t) - J_\lambda^{A_{(t,x(t))}}u(t)] + \lambda A_\lambda^{A_{(t,x(t))}}u(t), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|h(t)\| \leq \|g(t) - u(t)\| + \|J_\lambda^{A(t,x(t))} g(t) - J_\lambda^{A(t,x(t))} u(t)\| + \|\lambda A_\lambda^{A(t,x(t))} u(t)\|.$$

En tenant compte de (2.1), on obtient

$$\|J_\lambda^{A(t,x(t))} g(t) - J_\lambda^{A(t,x(t))} u(t)\| \leq \|g(t) - u(t)\|,$$

il revient alors

$$\|h(t)\| \leq 2\|g(t) - u(t)\| + \|\lambda A_\lambda^{A(t,x(t))} u(t)\|. \tag{2.5}$$

De (1.8), il résulte que

$$\|A_\lambda^{A(t,x(t))} u(t)\| \leq \|A^0_{(t,x(t))} u(t)\|,$$

et de (H_1), on trouve

$$\|A_\lambda^{A(t,x(t))} u(t)\| \leq c(1 + \|x(t)\| + \|u(t)\|).$$

D'après (2.5), il s'en suit que

$$\begin{aligned}
\|h(t)\| &\leq 2\|g(t) + u(t)\| + c(1 + \|x(t)\| + \|u(t)\|), \\
&\leq 2\|g(t)\| + 2\|u(t)\| + c(1 + \|x(t)\| + \|u(t)\|).
\end{aligned}$$

Comme pour tous $y, z \geq 0$ si $y \leq z$ alors $y^2 \leq z^2$, et pour tous $y, z \in \mathbb{R}$, on a $(y+z)^2 \leq 2y^2 + 2z^2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|h(t)\|^2 &\leq [2\|g(t)\| + 2\|u(t)\| + c(1 + \|x(t)\| + \|u(t)\|)]^2, \\
&\leq 8\|g(t)\|^2 + 2[2\|u(t)\| + c(1 + \|x(t)\| + \|u(t)\|)]^2, \\
&\leq 8\|g(t)\|^2 + 16\|u(t)\|^2 + 4c^2(1 + \|x(t)\| + \|u(t)\|)^2, \\
&\leq 8\|g(t)\|^2 + 16\|u(t)\|^2 + 8c^2(1 + \|x(t)\|)^2 + 8c^2\|u(t)\|^2, \\
&\leq 8\|g(t)\|^2 + 16\|u(t)\|^2 + 16c^2 + 16c^2\|x(t)\|^2 + 8c^2\|u(t)\|^2, \\
&\leq 8\|g(t)\|^2 + (16 + 8c^2)\|u(t)\|^2 + 16c^2 + 16c^2\|x(t)\|^2,
\end{aligned}$$

Or pour tout $t \in I$: $\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_0^t \|\dot{x}(s)\| ds$ car x est absolument continue. Aussi, $\|\dot{x}\|_{L^2_H(I)} < +\infty$ car $x \in W^{1,2}(I, H)$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &\leq \|x_0\| + (t-0)^{1/2} (\int_0^t \|\dot{x}(s)\|^2 ds)^{1/2} \\
&\leq \|x_0\| + T^{1/2} \|\dot{x}\|_{L^2_H(I)} \\
&\leq \|x_0\| + T^{1/2} \|\dot{x}\|_{L^2_H(I)}.
\end{aligned}$$

Comme $u \in W^{1,2}(I,H)$, de même, on trouve $\|u(t)\| \leq \|u_0\| + T^{1/2}\|\dot{u}\|_{L^2_H(I)}$ pour tout $t \in I$. Ce qui entraine que $\int_0^t \|x(t)\|^2 dt < +\infty$ et $\int_0^t \|u(t)\|^2 dt < +\infty$. Or $g \in L^2_H(I)$ alors $\|g\|_{L^2_H(I)} < +\infty$, on en déduit que $\int_0^t \|h(t)\|^2 dt < +\infty$. D'où, la fonction $t \mapsto \|h(t)\|^2$ est intégrable. Par conséquent, l'inclusion (2.4) a lieu. En combinant avec l'autre inclusion résulte l'égalité.

La démonstration du lemme est terminée. ■

On aura besoin des propriétés de l'ensemble $\mathcal{X}_\gamma$ défini dans cette proposition.

Proposition 2.7. *Soit le sous-ensemble $\mathcal{X}_\gamma$ de l'espace de Banach $\mathcal{C}_H(I)$ défini par*

$$\mathcal{X}_\gamma := \{h \in W^{1,2}(I,H) : h(t) = x_0 + \int_0^t \dot{h}(s)ds,\ \|\dot{h}(s)\| \leq \gamma(s) \text{ p.p.}\},$$

où $\gamma \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$. Alors, l'ensemble $\mathcal{X}_\gamma$ est convexe, équicontinu, borné, et fermé dans $\mathcal{C}_H(I)$.

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{X}_\gamma$ est convexe. En effet, soient $\lambda \in [0,1]$, et $h_1,\ h_2 \in \mathcal{X}_\gamma$, alors

$$\begin{aligned} h_1(t) &= x_0 + \int_0^t \dot{h}_1(s)ds,\ \|\dot{h}_1(s)\| \leq \gamma(s) \text{ p.p. } s \in I, \\ h_2(t) &= x_0 + \int_0^t \dot{h}_2(s)ds,\ \|\dot{h}_2(s)\| \leq \gamma(s) \text{ p.p. } s \in I. \end{aligned}$$

On remarque que pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \Big(\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2\Big)(t) &= \lambda(x_0 + \int_0^t \dot{h}_1(s)ds) + (1-\lambda)(x_0 + \int_0^t \dot{h}_2(s)ds), \text{ p.p.} \\ &= x_0 + \int_0^t \Big(\lambda\dot{h}_1(s) + (1-\lambda)\dot{h}_2(s)\Big)ds, \text{ p.p.} \\ &= x_0 + \int_0^t \Big(\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2\Big)'(s)ds, \text{ p.p.} \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction $\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2$ est absolument continue. Or

$$\begin{aligned} \|\Big(\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2\Big)'(s)\| &= \|\lambda\dot{h}_1(s) + (1-\lambda)\dot{h}_2(s)\|, \text{ p.p.} \\ &\leq \lambda\|\dot{h}_1(s)\| + (1-\lambda)\|\dot{h}_2(s)\|, \text{ p.p.} \\ &\leq \lambda\gamma(s) + (1-\lambda)\gamma(s) = \gamma(s), \text{ p.p.,} \end{aligned}$$

car $\|\dot{h}_i(s)\| \leq \gamma(s)\ i = 1,2,$ p.p. $s \in I$, où $\gamma \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$, alors $\Big(\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2\Big)' \in L^2_H(I)$. On en conclut que $\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2 \in W^{1,2}(I,H)$ et $\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2 \in \mathcal{X}_\gamma$. D'où, il résulte la convexité de $\mathcal{X}_\gamma$.

L'ensemble $\mathcal{X}_\gamma$ est équicontinu. En effet, soit $h \in X_\gamma$, alors pour tous $t, s \in I$ tels que $s \leq t$, on a

$$\begin{aligned}\|h(t) - h(s)\| &= \|x_0 + \int_0^t \dot{h}(\tau)d\tau - x_0 - \int_0^s \dot{h}(\tau)d\tau\| \\ &= \|\int_s^t \dot{h}(\tau)d\tau\|.\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned}\|h(t) - h(s)\| &\leq (t-s)^{1/2}(\int_s^t \dot{h}^2(\tau)d\tau)^{1/2}, \\ &\leq (t-s)^{1/2}(\int_s^t \gamma^2(\tau)d\tau)^{1/2}, \\ &\leq c_\gamma(t-s)^{1/2},\end{aligned}$$

où c_γ est une constante réelle positive donnée par $c_\gamma = (\int_0^T \gamma^2(\tau)d\tau)^{1/2} = \|\gamma\|_{L^2_{\mathbb{R}}(I)}$.
En particulier, pour $s = 0$ dans l'estimation précédente on trouve pour tout $h \in X_\gamma$, et tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\|h(t)\| &\leq \|h(t) - h(0)\| + \|h(0\| \\ &\leq \|x_0\| + c_\gamma t^{1/2},\end{aligned}$$

et alors

$$\|h\|_\infty \leq \|x_0\| + c_\gamma T^{1/2},$$

Ceci montre que l'ensemble X_γ est borné dans $\mathcal{C}_H(I)$.
Montrons enfin que l'ensemble $\mathcal{X}_\gamma$ est fermé dans $\mathcal{C}_H(I)$. Soit (h_n) une suite dans $\mathcal{X}_\gamma$ qui converge vers h dans $\mathcal{C}_H(I)$ et montrons que $h \in \mathcal{X}_\gamma$ (voir Caractérisation 1.24 (iii)). Comme $\|\dot{h}_n(s)\| \leq \gamma(s)$, p.p. où $\gamma \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$, alors la suite $(\dot{h}_n)$ est bornée dans $L^2_H(I)$. D'après Corollaire 1.37, on peut extraire une sous suite de $(\dot{h}_n)$ notée $(\dot{h}_n)$ qui converge faiblement dans $L^2_H(I)$ vers w. Notons que $(\dot{h}_n)$ est incluse dans l'ensemble $\{g \in L^2_H(I) : \|g(s)\| \leq \gamma(s)\}$ qui est convexe fermé dans $L^2_H(I)$ et donc faiblement fermé dans $L^2_H(I)$. Ainsi, la fonction w appartient à cet ensemble, i.e., $w \in L^2_H(I)$ et $\|w(s)\| \leq \gamma(s)$ p.p.
Rappelons que la fonction h_n est absolument continue pour tout n. Pour tout $z \in H$ et tous $0 \leq s \leq t \leq T$, on a

$$\begin{aligned}\langle z, \int_s^t \dot{h}_n(\tau)d\tau\rangle &= \int_0^T \langle z\mathbf{1}_{]s,t]}(\tau), \dot{h}_n(\tau)\rangle d\tau \\ &= \langle z, h_n(t) - h_n(s)\rangle.\end{aligned}$$

Un passage à la limite dans l'égalité précédente entraine

$$\langle z, \int_s^t w(\tau)d\tau\rangle = \langle z, h(t) - h(s)\rangle.$$

D'où, pour tous $s, t \in I$ tels que $s \leq t$, on obtient $\int_s^t w(\tau)d\tau = h(t) - h(s)$, et alors h est absolument continue et w coïncide presque partout sur I avec $\dot{h}$. Ainsi, $h \in \mathcal{X}_\gamma$. L'ensemble X_γ est par conséquent fermé.
La démonstration de la proposition est achevée.

■

2.2 Étude du problème (P_1)

Nous allons étudier dans cette section, le problème (P_1).

Théorème 2.8. *Soit H un espace de Hilbert réel séparable. Supposons que pour tout $(t, x) \in I \times H$, $A_{(t,x)} : D(A_{(t,x)}) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone satisfaisant*
(H_1) il existe un nombre réel positif c tel que

$$\|A^0_{(t,x)}y\| \leq c(1 + \|x\| + \|y\|) \text{ pour tout } (t, x, y) \in I \times H \times D(A_{(t,x)}),$$

(H_2) il existe une constante réelle positive r, et une fonction $a \in W^{1,2}(I)$ qui est positive sur I et croissante avec $a(T) < \infty$ et $a(0) = 0$ telle que

$$dis(A_{(t,u)}, A_{(\tau,v)}) \leq a(t) - a(\tau) + r\|u - v\|, \text{ pour tout } 0 \leq \tau \leq t \leq T, \text{ pour tout } u, v \in H.$$

(H_3) pour tout ensemble borné $B \subset H$, il existe une multi-application mesurable intégrablement bornée à valeurs compactes $\Psi_B : I \rightrightarrows H$ telle que $D(A_{(t,x)}) \subset \Psi_B(t) \subset \gamma(t)\overline{B}_H$ pour tout $(t, x) \in I \times B$, où $\gamma \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$.
Alors, pour tout $(x_0, u_0) \in H \times D(A_{(0,x_0)})$ il existe $x : I \to H$ et $u : I \to H$ absolument continues telles que

$$(P_1)\begin{cases} x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \quad \forall t \in I \\ x(0) = x_0, u(0) = u_0 \in D(A_{(0,x_0)}) \\ -\dot{u}(t) \in A_{(t,x(t))}u(t) \quad \text{p.p. } t \in I \\ u(t) \in D(A_{(t,x(t))}), \forall t \in I. \end{cases}$$

Plus précisément, le problème non-perturbé du second-ordre

$$\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in A_{(t,x(t))}\dot{x}(t) \quad \text{p.p. } t \in I \\ \dot{x}(t) \in D(A_{(t,x(t))}), \quad t \in I \\ x(0) = x_0, \ \dot{x}(0) = u_0 \in D(A_{(0,x_0)}); \end{cases}$$

admet au moins une solution $x \in W^{2,2}(I, H)$.

Démonstration. Considérons le sous-ensemble $\mathcal{X}_\gamma$ de l'espace de Banach $\mathcal{C}_H(I)$ défini par

$$\mathcal{X}_\gamma := \{h \in W^{1,2}(I,H) : h(t) = x_0 + \int_0^t \dot{h}(s)ds,\ \|\dot{h}(s)\| \leq \gamma(s) \text{ p.p.}\}.$$

En vertu de Proposition 2.7, l'ensemble $\mathcal{X}_\gamma$ est convexe borné fermé dans $\mathcal{C}_H(I)$.

En vertu du Lemme 2.6 $(\mathcal{I})$, pour tout $h \in X_\gamma$, il existe une unique solution $u_h \in W^{1,2}(I,H)$ de l'inclusion différentielle

$$(P_h) \begin{cases} -\dot{u}_h(t) \in A_{(t,h(t))}u_h(t) \quad \text{p.p. } t \in I \\ u_h(t) \in D(A_{(t,h(t))}), \forall t \in I \\ u_h(0) = u_0 \in D(A_{(0,h(0))}) = D(A_{(0,x_0)}), \end{cases}$$

avec $\|\dot{u}_h(t)\| \leq g(t) = K(1+\dot{\beta}(t))$ p.p., où $g \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$, $\dot{\beta}(t) = \int_0^t [\dot{a}(s) + \gamma(s)]ds$, $\forall t \in I$, et K est une constante réelle positive qui dépend de $\|u_0\|, c, T$ et β.

Maintenant, pour tout $h \in \mathcal{X}_\gamma$ considérons l'application Φ définie par

$$\Phi(h)(t) := x_0 + \int_0^t u_h(s)ds,\ t \in I.$$

Par l'hypothèse (H_3) et le fait que $X_\gamma(s) \subset H$ est borné et $u_h(s) \in D(A_{(s,h(s))})$, on a

$$u_h(s) \in D(A_{(s,h(s))}) \subset \bigcup_{x \in \mathcal{X}_\gamma(s)} D(A_{(s,x)}) \subset \Psi_\gamma(s) \subset \gamma(s)\overline{B}_H \text{ pour tout } s \in I, \tag{2.6}$$

où $\gamma \in L^2_{\mathbb{R}_+}(I)$ et $\Psi_{\gamma(s)\overline{B}_H}$ qui sera notée Ψ_γ est une multi-application mesurable intégrablement bornée, à valeurs compactes (voir l'hypothèse (H_3)).

Il est clair que $\Phi(h) \in \mathcal{X}_\gamma$, pour tout $h \in \mathcal{X}_\gamma$ et alors $\Phi : \mathcal{X}_\gamma \to \mathcal{X}_\gamma$.

Nous allons appliquer le théorème du point fixe de Schauder (cf Théorème 1.65). Montrons d'abord que $\Phi(X_\gamma)$ est relativement compact dans $\mathcal{C}_H(I)$.

Des définitions de X_γ et Φ, on a pour tout $t \in I$

$$\Phi(h)(t) \in u_0 + \int_0^t \overline{co}\Psi_\gamma(s)ds.$$

Comme $t \mapsto \overline{co}\Psi_\gamma(t)$ est une multi-application mesurable intégrablement bornée, à valeurs convexes compactes , le second membre est convexe compact d'après Théorème 1.53. Ainsi $\Phi(\mathcal{X}_\gamma)(t)$ est inclus dans le compact $Y(t) = u_0 + \int_0^t \overline{co}\Psi_\gamma(s)ds$ pour tout $t \in I$. Or tout compact de H (H espace séparé) est fermé (voir Proposition 1.25), i.e. $Y(t) = \overline{Y(t)}$, pour tout $t \in I$. On en déduit que $\overline{\Phi(\mathcal{X}_\gamma)(t)} \subset Y(t)$ (car pour deux sous-ensembles B et C de H si $B \subset C$ alors $\overline{B} \subset \overline{C}$). De Proposition 1.25 (tout fermé dans un compact est compact), il résulte que $\overline{\Phi(\mathcal{X}_\gamma)(t)}$ est compact, pour tout $t \in I$. D'après Définition 1.23 (ii), $\Phi(\mathcal{X}_\gamma)(t)$ est relativement compact dans H, pour tout $t \in I$.

Montrons que $\Phi(\mathcal{X}_\gamma)$ est équicontinu.

Soient $h \in \mathcal{X}_\gamma$, $t, \tau \in I$ $(\tau \leq t)$, de (2.6), par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned}
\|\Phi(h)(t) - \Phi(h)(\tau)\| &= \|\int_\tau^t u_h(s)ds\| \\
&\leq \int_\tau^t \|u_h(s)\|ds \\
&\leq \int_\tau^t \gamma(s)ds \\
&\leq (t-\tau)^{1/2}(\int_\tau^t \gamma^2(s)ds)^{1/2} \\
&\leq (t-\tau)^{1/2}(\int_0^T \gamma^2(s)ds)^{1/2} = c_\gamma(t-\tau)^{1/2},
\end{aligned}$$

où $c_\gamma = (\int_0^T \gamma^2(s)ds)^{1/2}$ est une constante réelle positive (car $\gamma \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$).

Il résulte alors que $\Phi(\mathcal{X}_\gamma)$ est équicontinu.

Du théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.64), on conclut que $\Phi(\mathcal{X}_\gamma)$ est relativement compact dans l'espace de Banach $\mathcal{C}_H(I)$.

Maintenant, nous allons vérifier que Φ est continue. Il suffit de montrer que Φ est séquentiellement continue. Montrons d'abord que, si (h_n) converge uniformément vers h dans $\mathcal{X}_\gamma$, alors la suite des solutions absolument continues u_{h_n} associées à h_n

$$\begin{cases}
u_{h_n}(0) \in D(A_{(0,h_n(0))}) = D(A_{(0,x_0)}) \\
u_{h_n}(t) \in D(A_{(t,h_n(t))}), \forall t \in I \\
-\dot{u}_{h_n}(t) \in A_{(t,h_n(t))}u_{h_n}(t), \quad \text{p.p. } t \in I,
\end{cases}$$

converge uniformément vers la solution absolument continue u_h associée à h de (P_h).

Rappelons que

$$\|\dot{u}_{h_n}(t)\| \leq g(t) = K(1+\dot{\beta}(t)) \text{ p.p. pour tout } t \in I,\ n \in \mathbb{N}, \tag{2.7}$$

où $g \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$. Pour tous $t, \tau \in I$ $(\tau \leq t)$, alors de la continuité absolue de u_{h_n}, de (2.7), par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned}
\|u_{h_n}(t) - u_{h_n}(\tau)\| = \|\int_\tau^t \dot{u}_{h_n}(s)ds\| &\leq \int_\tau^t \|\dot{u}_{h_n}(s)\|ds \\
&\leq \int_\tau^t g(s)ds \\
&\leq (t-\tau)^{1/2}(\int_\tau^t g^2(s)ds)^{1/2} \\
&\leq (t-\tau)^{1/2}(\int_0^T g^2(s)ds)^{1/2} = e_\gamma(t-\tau)^{1/2},
\end{aligned}$$

où $e\gamma = (\int_0^T g^2(s)ds)^{1/2}$ est une constante réelle positive (car $g \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$).
D'où (u_{h_n}) est équicontinue.
En particulier, pour $\tau = 0$ dans l'estimation précédente on trouve pour tout n et tout $t \in I$

$$\|u_{h_n}(t)\| \leq \|u_0\| + e_\gamma t^{1/2} \leq \|u_0\| + e_\gamma T^{1/2}. \tag{2.8}$$

De (2.6), on rappelle que $(u_{h_n}(s))$ est inclus dans le compact $\Psi_\gamma(s)$ pour tout $s \in I$. Or tout compact de H (H espace séparé) est fermé (voir Proposition 1.25), i.e. $\Psi_\gamma(s) = \overline{\Psi_\gamma(s)}$, pour tout $s \in I$. On en déduit que $\overline{(u_{h_n}(s))} \subset \Psi_\gamma(s)$ (car pour deux sous-ensembles B et C de H si $B \subset C$ alors $\overline{B} \subset \overline{C}$). De Proposition 1.25 (tout fermé dans un compact est compact), il résulte que $\overline{(u_{h_n}(s))}$ est compact, pour tout $s \in I$. D'après Définition 1.23 (ii), $(u_{h_n}(s))$ est relativement compact dans H, pour tout $s \in I$.
Du théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.64) et Caractérisation 1.24 (i), on peut supposer que (u_{h_n}) converge uniformément vers une application $u \in \mathcal{C}_H(I)$. De (2.7), $(\dot{u}_{h_n})$ est bornée dans $L^2_H(I)$. D'après Corollaire 1.37, on peut extraire une sous suite de $(\dot{u}_{h_n})$ notée $(\dot{u}_{h_n})$ qui converge faiblement dans $L^2_H(I)$ vers w, avec $\|w(t)\| \leq g(t)$ p.p. $t \in I$. Rappelons que la fonction u_{h_n} est absolument continue pour tout n. Pour tout $z \in H$ et tous $0 \leq s \leq t \leq T$, on a

$$\begin{aligned} \langle z, \int_s^t \dot{u}_{h_n}(\tau)d\tau\rangle &= \int_0^T \langle z\mathbf{1}_{]s,t]}(\tau), \dot{u}_{h_n}(\tau)\rangle d\tau \\ &= \langle z, u_{h_n}(t) - u_{h_n}(s)\rangle. \end{aligned}$$

Un passage à la limite dans l'égalité précédente entraine

$$\langle z, \int_s^t w(\tau)d\tau\rangle = \langle z, u(t) - u(s)\rangle.$$

D'où, pour tous $s, t \in I$ tels que $s \leq t$, on obtient $\int_s^t w(\tau)d\tau = u(t) - u(s)$, et alors u est absolument continue et w coïncide presque partout sur I avec $\dot{u}$.
Montrons que $u(t) \in D(A_{(t,h(t))}), \forall t \in I$.
On sait que $u_{h_n}(t) \in D(A_{(t,h_n(t))}), \forall t \in I$ et $u_{h_n}(t) \to u(t)$. On note que $y_n(t) = A^0_{(t,h_n(t))}u_{h_n}(t) \in A_{(t,h_n(t))}u_{h_n}(t)$. On rappelle de Proposition 2.7, pour tout $t \in I$ et tout n

$$\|h_n(t)\| \leq \|x_0\| + c_\gamma T^{1/2},$$

et de (2.8), on a

$$\|u_{h_n}(t)\| \leq \|u_0\| + e_\gamma T^{1/2}.$$

En combinant cela avec (H_1)

$$\|A^0_{(t,h_n(t))}u_{h_n}(t)\| \leq c(1+\|h_n(t)\|+\|u_{h_n}(t)\|) \leq c(1+\|x_0\|+\|u_0\|+(c_\gamma+e_\gamma)T^{1/2}) = \xi_1 < +\infty,$$

alors $(y_n(t))$ est bornée dans H pour tout $t \in I$. D'après Corollaire 1.37, on peut extraire une sous suite de $(y_n(t))$ qui converge faiblement dans H vers $y(t)$. De plus, on a

$$dis(A_{(t,h_n(t))}, A_{(t,h(t))}) \leq r\|h_n(t) - h(t)\| \to 0, \tag{2.9}$$

quand $n \to \infty$ par (H_2). Du Lemme 2.2 on déduit que $u(t) \in D(A_{(t,h(t))}), \forall t \in I$. Maintenant montrons que u satisfait l'inclusion différentielle

$$-\dot{u}(t) \in A_{(t,h(t))}u(t) \quad \text{p.p. } t \in I.$$

Comme $\dot{u}_{h_n} \to \dot{u}$ faiblement dans $L^2_H(I)$, alors $\dot{u}_{h_n} \to \dot{u}$ au sens de Komlós (cf. Proposition 1.67), i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_{h_j}(t) = \dot{u}(t) \ \text{ p.p.} \tag{2.10}$$

Soit $\eta \in D(A_{(t,h(t))})$. En appliquant Lemme 2.4 sur les opérateurs maximaux monotones $A_{(t,h_n(t))}$ et $A_{(t,h(t))}$ vérifiant (2.9), il existe une suite (η_n) telle que

$$\eta_n \in D(A_{(t,h_n(t))}),\ \eta_n \to \eta, \text{ et } \ A^0_{(t,h_n(t))}\eta_n \to A^0_{(t,h(t))}\eta. \tag{2.11}$$

Or on sait que pour presque tout $t \in I$

$$-\dot{u}_{h_n}(t) \in A_{(t,h_n(t))}u_{h_n}(t) \ \text{ et } A^0_{(t,h_n(t))}\eta_n \in A_{(t,h_n(t))}\eta_n.$$

Comme de plus $A_{(t,h_n(t))}$ est monotone (voir Définition 1.54), alors

$$\langle A^0_{(t,h_n(t))}\eta_n + \dot{u}_{h_n}(t), \eta_n - u_{h_n}(t)\rangle \geq 0,$$

et donc

$$\langle \dot{u}_{h_n}(t), u_{h_n}(t) - \eta_n\rangle \leq \langle A^0_{(t,h_n(t))}\eta_n, \eta_n - u_{h_n}(t)\rangle. \tag{2.12}$$

On remarque que

$$\langle \dot{u}_{h_n}(t), u(t) - \eta\rangle = \langle \dot{u}_{h_n}(t), u_{h_n}(t) - \eta_n\rangle + \langle \dot{u}_{h_n}(t), u(t) - u_{h_n}(t) - (\eta - \eta_n)\rangle,$$

et on écrit

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\langle \dot{u}_{h_j}(t), u(t) - \eta\rangle = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left\langle \dot{u}_{h_j}(t), u_{h_j}(t) - \eta_j\right\rangle + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\langle \dot{u}_{h_j}(t), u(t) - u_{h_j}(t)\rangle$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left\langle \dot{u}_{h_j}(t), \eta_j - \eta\right\rangle.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il résulte

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\langle \dot{u}_{h_j}(t), u(t)-\eta\rangle \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left\langle \dot{u}_{h_j}(t), u_{h_j}(t)-\eta_j\right\rangle + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|\dot{u}_{h_j}(t)\|\|u(t)-u_{h_j}(t)\|$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|\dot{u}_{h_j}(t)\|\|\eta_j-\eta\|.$$

Alors, simplifions à l'aide de (2.7) et (2.12), on obtient

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left\langle \dot{u}_{h_j}(t), u(t)-\eta\right\rangle \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left\langle A^0_{(t,h_j(t))}\eta_j, \eta_j-u_{h_j}(t)\right\rangle + g(t)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|u(t)-u_{h_j}(t)\|$$
$$+g(t)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|\eta_j-\eta\|.$$

En passant à la limite quand $n\to\infty$, en tenant compte de la convergence uniforme de la suite (u_{h_n}) vers u, de (2.10) et (2.11), cette dernière inégalité donne immédiatement

$$\left\langle \dot{u}(t), u(t)-\eta\right\rangle \leq \left\langle A^0_{(t,h(t))}\eta, \eta-u(t)\right\rangle \text{ p.p.}$$

Ainsi, pour tout $\eta\in D(A_{(t,h(t))})$ on a

$$\left\langle A^0_{(t,h(t))}\eta+\dot{u}(t), \eta-u(t)\right\rangle \geq 0 \text{ p.p.}$$

Par conséquent, d'après Lemme 2.1 on obtient $-\dot{u}(t)\in A_{(t,h(t))}u(t)$ p.p. avec $u(t)\in D(A_{(t,h(t))})$ pour tout $t\in I$. D'où par unicité de la solution, il s'en suit $u=u_h$.
On rappelle que $h_n\to h$ uniformément dans $\mathcal{C}_H(I)$, et pour tout $t\in I$

$$\begin{aligned}\|\Phi(h_n)(t)-\Phi(h)(t)\| &= \left\|\int_0^t u_{h_n}(s)ds-\int_0^t u_h(s)ds\right\| \\ &\leq \int_0^T \|u_{h_n}(s)-u_h(s)\|ds.\end{aligned}$$

De (2.8), et le fait que $u_{h_n}\to u_h$ uniformément dans $\mathcal{C}_H(I)$, on conclut que

$$\sup_{t\in I}\|\Phi(h_n)(t)-\Phi(h)(t)\| \leq \int_0^T \|u_{h_n}(\cdot)-u_h(\cdot)\|_\infty ds\to 0.$$

D'où $\Phi(h_n)\to\Phi(h)$ uniformément dans $\mathcal{C}_H(I)$.
On vient de définir une fonction $\Phi:\mathcal{X}_\gamma\to\mathcal{X}_\gamma$, où $\mathcal{X}_\gamma$ est un ensemble convexe borné fermé dans $\mathcal{C}_H(I)$, qui est continue telle que $\Phi(\mathcal{X}_\gamma)$ est relativement compact dans $\mathcal{C}_H(I)$. D'après le théorème du point fixe de Schauder (voir Théorème 1.65), la fonction Φ admet un point fixe, $h=\Phi(h)\in\mathcal{X}_\gamma$, c'est-à-dire

$$h(t)=\Phi(h)(t)=x_0+\int_0^t u_h(s)ds,\ t\in I,$$

où

$$\begin{cases} u_h(t) \in D(A_{(t,h(t))}) \\ -\dot{u}_h(t) \in A_{(t,h(t))}u_h(t) \text{ p.p. } t \in I. \end{cases}$$

Enfin, il est à noter que $h \in W^{2,2}(I, H)$ car h est absolument continue et $\dot{h} = u_h$ l'est aussi, avec $\ddot{h} = \dot{u}_h \in L^2_H(I)$ car $\|\dot{u}_h(t)\| \leq g(t)$ p.p., où $g \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$.
La démonstration du théorème est ainsi complète. ■

2.3 Étude du problème (P_2)

Pour commencer cette section, on rappelle d'abord Théorème 3.2 [4] qui sera utile dans la démonstration.

Théorème 2.9. *Soit H un espace de Hilbert réel séparable. Supposons que pour tout $t \in I$, $A_t : D(A_t) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone satisfaisant*
(h_1) il existe un nombre réel positif c tel que

$$\|A^0_t u\| \leq c(1 + \|u\|) \text{ pour tout } \ (t, u) \in I \times D(A_t),$$

(h_2) il existe une fonction $\beta \in W^{1,2}(I)$ qui est positive sur $[0, T[$ et croissante avec $\beta(T) < \infty$ et $\beta(0) = 0$ telle que

$$dis(A_t, A_s) \leq |\beta(t) - \beta(s)|, \ \forall t, s \in I.$$

Soit $f : I \times H \to H$ une application telle que pour tout $x \in H$, l'application $f(\cdot, x)$ appartient à $L^\infty_H(I)$, et f vérifie la condition de croissance linéaire : il existe une constante réelle non négative M telle que

$$\|f(t, x)\| \leq M(1 + \|x\|) \ \text{ pour } \ (t, x) \in I \times H.$$

De plus, pour tout $\eta > 0$ il existe une fonction réelle positive $\xi_\eta(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}}(I)$ telle que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \xi_\eta(t)\|x - y\|, \ \forall t \in I, \ \forall x, y \in \overline{B}_H(0, \eta).$$

Alors, pour tout $x_0 \in D(A_0)$, le problème

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in A_t x(t) + f(t, x(t)) \text{ p.p. } t \in I, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

admet une unique solution absolument continue $x(\cdot)$ qui satisfait

$$\|\dot{x}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t)) \text{ p.p.} \, t \in I, \tag{2.13}$$

où K une constante réelle positive qui dépend de $\|x_0\|$, c, M, T, et β.

Nous allons maintenant démontrer le théorème d'existence de solutions pour (P_2). Même si la démonstration repose sur celle du Théorème 2.8 avec des modifications appropriées, on préfère donner tous les détails nécessaires.

Théorème 2.10. *Soit H un espace de Hilbert réel séparable. Supposons que pour tout $(t,x) \in I \times H$, $A_{(t,x)} : D(A_{(t,x)}) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone satisfaisant*

(H_1) il existe un nombre réel positif c tel que

$$\|A^0_{(t,x)}y\| \leq c(1+\|x\|+\|y\|) \text{ pour tout } (t,x,y) \in I \times H \times D(A_{(t,x)}),$$

(H_2) il existe une constante réelle positive r, et une fonction $a \in W^{1,2}(I)$ qui est positive sur I et croissante avec $a(T) < \infty$ et $a(0) = 0$ telle que

$$dis(A_{(t,u)}, A_{(\tau,v)}) \leq a(t) - a(\tau) + r\|u-v\|, \quad \text{pour tout } 0 \leq \tau \leq t \leq T, \quad \text{pour tout } u, v \in H.$$

(H_3) pour tout ensemble borné $B \subset H$, il existe une multi-application mesurable intégrablement bornée à valeurs compactes $\Psi_B : I \rightrightarrows H$ telle que $D(A_{(t,x)}) \subset \Psi_B(t) \subset \gamma(t)\overline{B}_H$ pour tout $(t,x) \in I \times B$, où $\gamma \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$.

Soit $f : I \times H \times H \to H$ une application telle que

(i) $f(\cdot, x, y)$ est Lebesgue mesurable sur I pour tout $(x,y) \in H \times H$,

(ii) $f(t, \cdot, \cdot)$ est continue sur $H \times H$,

(iii) $\|f(t,x,y)\| \leq M$ pour tout $(t,x,y) \in I \times H \times H$,

(iv) $\|f(t,x,y) - f(t,x,z)\| \leq M\|y-z\|$, pour tout $x, y, z \in H$ et $t \in I$;

pour une constante réelle positive M.

Alors, pour tout $(x_0, u_0) \in H \times D(A_{(0,x_0)})$ il existe $x : I \to H$ et $u : I \to H$ absolument continues telles que

$$(P_2) \begin{cases} x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \quad \forall t \in I \\ x(0) = x_0, u(0) = u_0 \in D(A_{(0,x_0)}) \\ -\dot{u}(t) \in A_{(t,x(t))}u(t) + f(t,x(t),u(t)) \quad \text{p.p. } t \in I \\ u(t) \in D(A_{(t,x(t))}), \forall t \in I. \end{cases}$$

Plus précisément, le problème perturbé du second-ordre

$$\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in A_{(t,x(t))}\dot{x}(t) + f(t,x(t),\dot{x}(t)) \quad \text{p.p. } t \in I \\ \dot{x}(t) \in D(A_{(t,x(t))}), \quad t \in I \\ x(0) = x_0, \ \dot{x}(0) = u_0 \in D(A_{(0,x_0)}); \end{cases}$$

admet au moins une solution $x \in W^{2,2}(I,H)$.

Démonstration. Considérons le sous-ensemble $\mathcal{X}_\gamma$ de l'espace de Banach $\mathcal{C}_H(I)$ défini par

$$\mathcal{X}_\gamma := \{h \in W^{1,2}(I,H) : h(t) = x_0 + \int_0^t \dot{h}(s)ds,\ \|\dot{h}(s)\| \leq \gamma(s) \text{ p.p.}\}.$$

En vertu de Proposition 2.7, l'ensemble $\mathcal{X}_\gamma$ est convexe borné fermé dans $\mathcal{C}_H(I)$.

On définit pour tout $h \in \mathcal{X}_\gamma$, la fonction f_h par

$$f_h(t,x) := f(t,h(t),x) \text{ pour tout } (t,x) \in I \times H.$$

On a h est mesurable et de (i) $f(\cdot,x,y)$ est mesurable, alors $f_h(\cdot,x)$ est mesurable pour $x \in H$. Ceci avec (iii), entraine que $f_h(\cdot,x) \in L^\infty_H(I)$. Aussi, pour tout $(t,x) \in I \times H$ on a

$$\|f_h(t,x)\| \leq M \leq M(1+\|x\|).$$

De plus, de (iv) pour tous $x,y \in H$ et $t \in I$, on a

$$\|f_h(t,x) - f_h(t,y)\| = \|f(t,h(t),x) - f(t,h(t),y)\| \leq M\|x-y\|.$$

La fonction f_h satisfait aux hypothèses du Théorème 2.9.

De plus, l'opérateur $B_t = A_{(t,h(t))}$, pour tout $t \in I$, satisfait aux hypothèses (h_1)-(h_2) du Théorème 2.9, en procédant comme dans la démonstration de $(\mathcal{I})$ du Lemme 2.6 avec la fonction h au lieu de x.

Du Théorème 2.9, pour tout $h \in X_\gamma$, il existe une unique solution $u_h \in W^{1,2}(I,H)$ de l'inclusion différentielle

$$(P_h) \begin{cases} -\dot{u}_h(t) \in A_{(t,h(t))}u_h(t) + f(t,h(t),u_h(t)) \quad \text{p.p. } t \in I \\ u_h(t) \in D(A_{(t,h(t))}), \forall t \in I \\ u_h(0) = u_0 \in D(A_{(0,h(0))}) = D(A_{(0,x_0)}), \end{cases}$$

avec $\|\dot{u}_h(t)\| \leq g(t) = K(1+\dot{\beta}(t))$ p.p., où $g \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$, $\dot{\beta}(t) = \int_0^t [\dot{a}(s) + \gamma(s)]ds$, $\forall t \in I$, et K est une constante réelle positive qui dépend de $\|u_0\|, c, T, M$ et β.

Maintenant, pour tout $h \in \mathcal{X}_\gamma$ considérons l'application Φ définie par

$$\Phi(h)(t) := x_0 + \int_0^t u_h(s)ds,\ t \in I.$$

Par l'hypothèse (H_3) et le fait que $X_\gamma(s) \subset H$ est borné et $u_h(s) \in D(A_{(s,h(s))})$, on a

$$u_h(s) \in D(A_{(s,h(s))}) \subset \bigcup_{x \in \mathcal{X}_\gamma(s)} D(A_{(s,x)}) \subset \Psi_\gamma(s) \subset \gamma(s)\overline{B}_H \text{ pour tout } s \in I, \tag{2.14}$$

où $\gamma \in L^2_{\mathbb{R}_+}(I)$ et $\Psi_{\gamma(s)\overline{B}_H}$ qui sera notée Ψ_γ est une multi-application mesurable intégrablement bornée, à valeurs compactes (voir l'hypothèse (H_3)).

Il est clair que $\Phi(h) \in \mathcal{X}_\gamma$, pour tout $h \in \mathcal{X}_\gamma$ et alors $\Phi : \mathcal{X}_\gamma \to \mathcal{X}_\gamma$.

Nous allons appliquer le théorème du point fixe de Schauder (cf Théorème 1.65). Montrons d'abord que $\Phi(X_\gamma)$ est relativement compact dans $\mathcal{C}_H(I)$.

Des définitions de X_γ et Φ, on a pour tout $t \in I$

$$\Phi(h)(t) \in u_0 + \int_0^t \overline{co}\Psi_\gamma(s)ds.$$

Comme $t \mapsto \overline{co}\Psi_\gamma(t)$ est une multi-application mesurable intégrablement bornée à valeurs convexes compactes, le second membre est convexe compact d'après Théorème 1.53. Ainsi $\Phi(\mathcal{X}_\gamma)(t)$ est inclus dans le compact $Y(t) = u_0 + \int_0^t \overline{co}\Psi_\gamma(s)ds$ pour tout $t \in I$. Or tout compact de H (H espace séparé) est fermé (voir Proposition 1.25), i.e. $Y(t) = \overline{Y(t)}$, pour tout $t \in I$. On en déduit que $\overline{\Phi(\mathcal{X}_\gamma)(t)} \subset Y(t)$ (car pour deux sous-ensembles B et C de H si $B \subset C$ alors $\overline{B} \subset \overline{C}$). De Proposition 1.25 (tout fermé dans un compact est compact), il résulte que $\overline{\Phi(\mathcal{X}_\gamma)(t)}$ est compact, pour tout $t \in I$. D'après Définition 1.23 (ii), $\Phi(\mathcal{X}_\gamma)(t)$ est relativement compact dans H, pour tout $t \in I$.

Montrons que $\Phi(\mathcal{X}_\gamma)$ est équicontinu.

Soient $h \in \mathcal{X}_\gamma$, $t, \tau \in I$ ($\tau \leq t$), de (2.14), par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned}
\|\Phi(h)(t) - \Phi(h)(\tau)\| &= \| \int_\tau^t u_h(s)ds\| \\
&\leq \int_\tau^t \|u_h(s)\|ds \\
&\leq \int_\tau^t \gamma(s)ds \\
&\leq (t-\tau)^{1/2}(\int_\tau^t \gamma^2(s)ds)^{1/2} \\
&\leq (t-\tau)^{1/2}(\int_0^T \gamma^2(s)ds)^{1/2} = c_\gamma(t-\tau)^{1/2},
\end{aligned}$$

où $c_\gamma = (\int_0^T \gamma^2(s)ds)^{1/2}$ est une constante réelle positive (car $\gamma \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$).

Il résulte alors que $\Phi(\mathcal{X}_\gamma)$ est équicontinu.

Du théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.64), on conclut que $\Phi(\mathcal{X}_\gamma)$ est relativement compact dans l'espace de Banach $\mathcal{C}_H(I)$.

Maintenant, nous allons vérifier que Φ est continue. Il suffit de montrer que Φ est séquentiellement continue. Montrons d'abord que, si (h_n) converge uniformément vers h dans $\mathcal{X}_\gamma$, alors la suite des solutions absolument continues u_{h_n} associée à h_n

$$\begin{cases}
u_{h_n}(0) \in D(A_{(0,h_n(0))}) = D(A_{(0,x_0)}) \\
u_{h_n}(t) \in D(A_{(t,h_n(t))}), \forall t \in I \\
-\dot{u}_{h_n}(t) \in A_{(t,h_n(t))}u_{h_n}(t) + f(t, h_n(t), u_{h_n}(t)), \quad \text{p.p. } t \in I,
\end{cases}$$

converge uniformément vers la solution absolument continue u_h associée à h de (P_h).
Rappelons que

$$\|\dot{u}_{h_n}(t)\| \leq g(t) = K(1+\dot{\beta}(t)) \text{ p.p. pour tout } t \in I,\ n \in \mathbb{N}, \tag{2.15}$$

où $g \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$. Pour tous $t, \tau \in I$ $(\tau \leq t)$, alors de la continuité absolue de u_{h_n}, de (2.15), par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned}
\|u_{h_n}(t) - u_{h_n}(\tau)\| = \|\int_\tau^t \dot{u}_{h_n}(s)ds\| &\leq \int_\tau^t \|\dot{u}_{h_n}(s)\|ds \\
&\leq \int_\tau^t g(s)ds \\
&\leq (t-\tau)^{1/2}(\int_\tau^t g^2(s)ds)^{1/2} \\
&\leq (t-\tau)^{1/2}(\int_0^T g^2(s)ds)^{1/2} = e_\gamma(t-\tau)^{1/2},
\end{aligned}$$

où $e\gamma = (\int_0^T g^2(s)ds)^{1/2}$ est une constante réelle positive (car $g \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$).
D'où (u_{h_n}) est équicontinue.
En particulier, pour $\tau = 0$ dans l'estimation précédente on trouve pour tout n et tout $t \in I$

$$\|u_{h_n}(t)\| \leq \|u_0\| + e_\gamma t^{1/2} \leq \|u_0\| + e_\gamma T^{1/2}. \tag{2.16}$$

De (2.14), on rappelle que $(u_{h_n}(s))$ est inclus dans le compact $\Psi_\gamma(s)$ pour tout $s \in I$. Or tout compact de H (H espace séparé) est fermé (voir Proposition 1.25), i.e. $\Psi_\gamma(s) = \overline{\Psi_\gamma(s)}$, pour tout $s \in I$. On en déduit que $\overline{(u_{h_n}(s))} \subset \Psi_\gamma(s)$ (car pour deux sous-ensembles B et C de H si $B \subset C$ alors $\overline{B} \subset \overline{C}$). De Proposition 1.25 (tout fermé dans un compact est compact), il résulte que $\overline{(u_{h_n}(s))}$ est compact, pour tout $s \in I$. D'après Définition 1.23 (ii), $(u_{h_n}(s))$ est relativement compact dans H, pour tout $s \in I$.
Du théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.64) et Caractérisation 1.24 (i), on peut supposer que (u_{h_n}) converge uniformément vers une application $u \in \mathcal{C}_H(I)$.
De (2.15), $(\dot{u}_{h_n})$ est bornée dans $L^2_H(I)$. D'après Corollaire 1.37, on peut extraire une sous suite de $(\dot{u}_{h_n})$ notée $(\dot{u}_{h_n})$ qui converge faiblement dans $L^2_H(I)$ vers w, avec $\|w(t)\| \leq g(t)$ p.p. $t \in I$. Rappelons que la fonction u_{h_n} est absolument continue pour tout n. Pour tout $z \in H$ et tous $0 \leq s \leq t \leq T$, on a

$$\begin{aligned}
\langle z, \int_s^t \dot{u}_{h_n}(\tau)d\tau\rangle &= \int_0^T \langle z\mathbf{1}_{]s,t]}(\tau), \dot{u}_{h_n}(\tau)\rangle d\tau \\
&= \langle z, u_{h_n}(t) - u_{h_n}(s)\rangle.
\end{aligned}$$

Un passage à la limite dans l'égalité précédente entraine

$$\langle z, \int_s^t w(\tau)d\tau\rangle = \langle z, u(t) - u(s)\rangle.$$

D'où, pour tous $s, t \in I$ tels que $s \leq t$, on obtient $\int_s^t w(\tau)d\tau = u(t) - u(s)$, et alors u est absolument continue et w coïncide presque partout sur I avec $\dot{u}$.
Montrons que $u(t) \in D(A_{(t,h(t))}), \forall t \in I$.
On sait que $u_{h_n}(t) \in D(A_{(t,h_n(t))}), \forall t \in I$ et $u_{h_n}(t) \to u(t)$. On note que $y_n(t) = A^0_{(t,h_n(t))}u_{h_n}(t) \in A_{(t,h_n(t))}u_{h_n}(t)$. On rappelle de Proposition 2.7, pour tout $t \in I$ et tout n

$$\|h_n(t)\| \leq \|x_0\| + c_\gamma T^{1/2},$$

et de (2.16), on a

$$\|u_{h_n}(t)\| \leq \|u_0\| + e_\gamma T^{1/2}.$$

En combinant cela avec (H_1)

$$\|A^0_{(t,h_n(t))}u_{h_n}(t)\| \leq c(1+\|h_n(t)\|+\|u_{h_n}(t)\|) \leq c(1+\|x_0\|+\|u_0\|+(c_\gamma+e_\gamma)T^{1/2}) = \xi < +\infty,$$

alors $(y_n(t))$ est bornée dans H pour tout $t \in I$. D'après Corollaire 1.37, on peut extraire une sous suite de $(y_n(t))$ qui converge faiblement dans H vers $y(t)$. De plus, on a

$$dis(A_{(t,h_n(t))}, A_{(t,h(t))}) \leq r\|h_n(t) - h(t)\| \to 0, \tag{2.17}$$

quand $n \to \infty$ par (H_2). Du Lemme 2.2 on déduit que $u(t) \in D(A_{(t,h(t))}), \forall t \in I$.
Maintenant montrons que u satisfait l'inclusion différentielle

$$-\dot{u}(t) \in A_{(t,h(t))}u(t) + f(t, h(t), u(t)) \quad \text{p.p. } t \in I.$$

En tenant compte de la continuité de $f(t, \cdot, \cdot)$ (voir (ii)) et des convergences uniformes des suites (u_{h_n}) et (h_n) vers u et h respectivement, on obtient

$$f(t, h_n(t), u_{h_n}(t)) \to f(t, h(t), u(t)) \quad \text{p.p.} t \in I,$$

quand $n \to \infty$. De plus, de (iii) on a

$$\|f(t, h_n(t), u_{h_n}(t))\| \leq M \text{ pour tout } n \text{ et tout } t \in I. \tag{2.18}$$

Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (voir Théorème 1.63), il résulte

$$f(\cdot, h_n(\cdot), u_{h_n}(\cdot)) \to f(\cdot, h(\cdot), u(\cdot)) \quad \text{dans } L^2_H(I), \tag{2.19}$$

quand $n \to \infty$.
Comme $\dot{u}_{h_n} \to \dot{u}$ faiblement dans $L^2_H(I)$, et de (2.19) résulte $f(\cdot, h_n(\cdot), u_{h_n}(\cdot)) \to f(\cdot, h(\cdot), u(\cdot))$ faiblement dans $L^2_H(I)$, alors $\dot{u}_{h_n}(\cdot) + f(\cdot, h_n(\cdot), u_{h_n}(\cdot)) \to \dot{u}(\cdot) + f(\cdot, h(\cdot), u(\cdot))$ au sens de Komlós (cf. Proposition 1.67), i.e.,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[\dot{u}_{h_j}(t) + f(t, h_j(t), u_{h_j}(t))] = \dot{u}(t) + f(t, h(t), u(t)) \text{ p.p.} \tag{2.20}$$

Soit $\eta \in D(A_{(t,h(t))})$. En appliquant Lemme 2.4 sur les opérateurs maximaux monotones $A_{(t,h_n(t))}$ et $A_{(t,h(t))}$ vérifiant (2.17), il existe une suite (η_n) telle que

$$\eta_n \in D(A_{(t,h_n(t))}),\ \eta_n \to \eta, \text{ et } A^0_{(t,h_n(t))}\eta_n \to A^0_{(t,h(t))}\eta. \tag{2.21}$$

Or on sait que pour presque tout $t \in I$

$$-\dot{u}_{h_n}(t) \in A_{(t,h_n(t))}u_{h_n}(t) + f(t,h_n(t),u_{h_n}(t)) \text{ et } A^0_{(t,h_n(t))}\eta_n \in A_{(t,h_n(t))}\eta_n.$$

Comme de plus $A_{(t,h_n(t))}$ est monotone (voir Définition 1.54), alors

$$\langle A^0_{(t,h_n(t))}\eta_n + \dot{u}_{h_n}(t) + f(t,h_n(t),u_{h_n}(t)), \eta_n - u_{h_n}(t)\rangle \geq 0,$$

et donc

$$\langle \dot{u}_{h_n}(t) + f(t,h_n(t),u_{h_n}(t)), u_{h_n}(t) - \eta_n\rangle \leq \langle A^0_{(t,h_n(t))}\eta_n, \eta_n - u_{h_n}(t)\rangle. \tag{2.22}$$

On remarque

$$\langle \dot{u}_{h_n}(t) + f(t,h_n(t),u_{h_n}(t)), u(t) - \eta\rangle$$

$$= \langle \dot{u}_{h_n}(t)+f(t,h_n(t),u_{h_n}(t)), u_{h_n}(t)-\eta_n\rangle + \langle \dot{u}_{h_n}(t)+f(t,h_n(t),u_{h_n}(t)), u(t)-u_{h_n}(t)-(\eta-\eta_n)\rangle,$$

et on écrit

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\langle \dot{u}_{h_j}(t) + f(t,h_j(t),u_{h_j}(t)), u(t) - \eta\rangle$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big\langle \dot{u}_{h_j}(t)+f(t,h_j(t),u_{h_j}(t)), u_{h_j}(t)-\eta_j\big\rangle + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\langle \dot{u}_{h_j}(t)+f(t,h_j(t),u_{h_j}(t)), u(t)-u_{h_j}(t)\rangle$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big\langle \dot{u}_{h_j}(t) + f(t,h_j(t),u_{h_j}(t)), \eta_j - \eta\big\rangle.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il résulte

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\langle \dot{u}_{h_j}(t) + f(t,h_j(t),u_{h_j}(t)), u(t) - \eta\rangle$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big\langle \dot{u}_{h_j}(t)+f(t,h_j(t),u_{h_j}(t)), u_{h_j}(t)-\eta_j\big\rangle + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|\dot{u}_{h_j}(t)+f(t,h_j(t),u_{h_j}(t))\|\|u(t)-u_{h_j}(t)\|$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|\dot{u}_{h_j}(t) + f(t,h_j(t),u_{h_j}(t))\|\|\eta_j - \eta\|.$$

Alors, simplifions à l'aide de (2.15), (2.18), et (2.22), on obtient

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big\langle \dot{u}_{h_j}(t) + f(t,h_j(t),u_{h_j}(t)), u(t) - \eta\big\rangle$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big\langle A^0_{(t,h_j(t))}\eta_j, \eta_j - u_{h_j}(t)\big\rangle + (g(t)+M)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|u(t) - u_{h_j}(t)\|$$

$$+ (g(t)+M)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|\eta_j - \eta\|.$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$, en tenant compte de la convergence uniforme de la suite (u_{h_n}) vers u, de (2.20) et (2.21), cette dernière inégalité donne immédiatement

$$\left\langle \dot{u}(t) + f(t, h(t), u(t)), u(t) - \eta \right\rangle \leq \left\langle A^0_{(t,h(t))}\eta, \eta - u(t) \right\rangle \text{ p.p.}$$

Ainsi, pour tout $\eta \in D(A_{(t,h(t))})$ on a

$$\left\langle A^0_{(t,h(t))}\eta + \dot{u}(t) + f(t, h(t), u(t)), \eta - u(t) \right\rangle \geq 0 \text{ p.p.}$$

Par conséquent, d'après Lemme 2.1 on obtient $-\dot{u}(t) \in A_{(t,h(t))}u(t) + f(t, h(t), u(t))$ p.p. avec $u(t) \in D(A_{(t,h(t))})$ pour tout $t \in I$. D'où par unicité de la solution, il s'en suit $u = u_h$.
On rappelle que $h_n \to h$ uniformément dans $\mathcal{C}_H(I)$, et pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \|\Phi(h_n)(t) - \Phi(h)(t)\| &= \left\| \int_0^t u_{h_n}(s)ds - \int_0^t u_h(s)ds \right\| \\ &\leq \int_0^T \|u_{h_n}(s) - u_h(s)\| ds. \end{aligned}$$

De (2.16) et le fait que $u_{h_n} \to u_h$ uniformément dans $\mathcal{C}_H(I)$, on conclut que

$$\sup_{t \in I} \|\Phi(h_n)(t) - \Phi(h)(t)\| \leq \int_0^T \|u_{h_n}(\cdot) - u_h(\cdot)\|_\infty ds \to 0.$$

D'où $\Phi(h_n) \to \Phi(h)$ uniformément dans $\mathcal{C}_H(I)$.
On vient de définir une fonction $\Phi : \mathcal{X}_\gamma \to \mathcal{X}_\gamma$, où $\mathcal{X}_\gamma$ est un ensemble convexe borné fermé dans $\mathcal{C}_H(I)$, qui est continue telle que $\Phi(\mathcal{X}_\gamma)$ est relativement compact dans $\mathcal{C}_H(I)$. D'après le théorème du point fixe de Schauder (voir Théorème 1.65), la fonction Φ admet un point fixe, $h = \Phi(h) \in \mathcal{X}_\gamma$, c'est-à-dire

$$h(t) = \Phi(h)(t) = x_0 + \int_0^t u_h(s)ds, \ t \in I,$$

où

$$\begin{cases} u_h(t) \in D(A_{(t,h(t))}) \\ -\dot{u}_h(t) \in A_{(t,h(t))}u_h(t) + f(t, h(t), u_h(t)) \text{ p.p. } t \in I. \end{cases}$$

Enfin, il est à noter que $h \in W^{2,2}(I, H)$ car h est absolument continue et $\dot{h} = u_h$ l'est aussi, avec $\ddot{h} = \dot{u}_h \in L^2_H(I)$ car $\|\dot{u}_h(t)\| \leq g(t)$ p.p., où $g \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$.
La démonstration du théorème est terminée. ∎

Chapitre 3

Cas particulier du processus de la rafle

Nous allons appliquer le résultat d'existence du Théorème 2.8 au cas du processus de la rafle correspondant (P_3).

Corollaire 3.1. *Soit H un espace de Hilbert réel séparable. Soit $C : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application telle que*
(H_1') pour tout $(t, y) \in I \times H$, $C(t, y)$ est un sous-ensemble convexe fermé non-vide de H ;
(H_2') il existe une constante réelle positive r, et une fonction $a \in W^{1,2}(I)$ qui est positive sur I et croissante avec $a(T) < \infty$ et $a(0) = 0$ telle que

$$d_H(C(t,u)), C(s,v)) \leq a(t) - a(s) + r\|v - u\| \text{ pour tous } 0 \leq s \leq t \leq T, \text{ et } v, u \in H;$$

(H_3') pour tout ensemble borné $B \subset H$, il existe une multi-application mesurable intégrablement bornée à valeurs compactes $\Psi_B : I \rightrightarrows H$ telle que $C(t, x) \subset \Psi_B(t) \subset \gamma(t)\overline{B}_H$ pour tout $(t, x) \in I \times B$, où $\gamma \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$.
Alors, pour tout $(x_0, u_0) \in H \times C(0, x_0)$, le problème

$$(P_3) \begin{cases} x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \quad t \in I \\ -\dot{u}(t) \in N_{C(t,x(t))}u(t) \quad \text{p.p. } t \in I, \\ u(t) \in C(t, x(t)), \quad t \in I \\ u(0) = u_0 \in C(0, x_0),\ x(0) = x_0 \in H; \end{cases}$$

a une solution absolument continue $(x, u) : I \to H \times H$.
Plus précisément, le processus de la rafle non-perturbé du second-ordre

$$\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in N_{C(t,x(t))}\dot{x}(t) \quad \text{p.p. } t \in I \\ \dot{x}(t) \in C(t, x(t)), \quad t \in I \\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = u_0 \in C(0, x_0); \end{cases}$$

admet au moins une solution $x \in W^{2,2}(I, H)$.

Démonstration. Soit $A_{(t,x)} = N_{C(t,x)}$, pour tout $(t,x) \in I \times H$. Alors, pour tout $(t,x) \in I \times H$, $A_{(t,x)} : D(A_{(t,x)}) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone (en tenant compte de (1.4) et (H_1')).
L'hypothèse (H_3) découle immédiatement de (H_3'), en remarquant que $D(A_{(t,x)}) = C(t,x)$.
On déduit de (1.4) que $A^0_{(t,x)}y = 0$ (car $0 \in N_{C(t,x)}$) pour tout $(t,x,y) \in I \times H \times H$, alors la condition (H_1) est vérifiée.
Il reste à vérifier (H_2).
De (1.10) comme $C(t,u)$, $C(s,v)$ sont des ensembles convexes fermés, alors on a

$$dis(N_{C(t,u)}, N_{C(s,v)}) = d_H(C(t,u), C(s,v)). \tag{3.1}$$

En combinant (H_2') et (3.1), alors la condition (H_2) est vérifiée.
Par conséquent, toutes les hypothèses du Théorème 2.8 sont satisfaites. Ce dernier assure l'existence d'une solution au processus de la rafle considéré (P_3).
La démonstration du corollaire est achevée. ∎

Du Théorème 2.10 découle le résultat correspondant au cas du processus de la rafle (P_4).

Corollaire 3.2. *Soit H un espace de Hilbert réel séparable. Soit $C : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application telle que*
(H_1') *pour tout $(t,y) \in I \times H$, $C(t,y)$ est un sous-ensemble convexe fermé non-vide de H ;*
(H_2') *il existe une constante réelle positive r, et une fonction $a \in W^{1,2}(I)$ qui est positive sur I et croissante avec $a(T) < \infty$ et $a(0) = 0$ telle que*

$$d_H(C(t,u)), C(s,v)) \leq a(t) - a(s) + r\|v-u\| \text{ pour tous } 0 \leq s \leq t \leq T, \text{ et } v,u \in H;$$

(H_3') *pour tout ensemble borné $B \subset H$, il existe une multi-application mesurable intégrablement bornée à valeurs compactes $\Psi_B : I \rightrightarrows H$ telle que $C(t,x) \subset \Psi_B(t) \subset \gamma(t)\overline{B}_H$ pour tout $(t,x) \in I \times B$, où $\gamma \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$.*
Soit $f : I \times H \times H \to H$ une application telle que

- (i) *$f(\cdot,x,y)$ est Lebesgue mesurable sur I pour tout $(x,y) \in H \times H$,*
- (ii) *$f(t,\cdot,\cdot)$ est continue sur $H \times H$,*
- (iii) *$\|f(t,x,y)\| \leq M$ pour tout $(t,x,y) \in I \times H \times H$,*
- (iv) *$\|f(t,x,y) - f(t,x,z)\| \leq M\|y-z\|$, pour tout $x,y,z \in H$ et $t \in I$;*

  pour une constante réelle positive M.

Alors, pour tout $(x_0, u_0) \in H \times C(0, x_0)$*, le problème*

$$(P_4)\begin{cases} x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \quad \forall t \in I, \\ x(0) = x_0, u(0) = u_0 \in C(0, x_0), \\ -\dot{u}(t) \in N_{C(t,x(t))}u(t) + f(t, x(t), u(t)) \quad \text{p.p. } t \in I, \\ u(t) \in C(t, x(t)), \forall t \in I, \end{cases}$$

a une solution absolument continue $(x, u) : I \to H \times H$*.*
Plus précisément, le processus de la rafle perturbé du second-ordre

$$\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in N_{C(t,x(t))}\dot{x}(t) + f(t, x(t), \dot{x}(t)) \quad \text{p.p. } t \in I \\ \dot{x}(t) \in C(t, x(t)), \quad t \in I \\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = u_0 \in C(0, x_0); \end{cases}$$

admet au moins une solution $x \in W^{2,2}(I, H)$*.*

Démonstration. Soit $A_{(t,x)} = N_{C(t,x)}$, pour tout $(t, x) \in I \times H$. Alors, d'après la démonstration du Corollaire 3.1, l'opérateur $A_{(t,x)}$ vérifient les hypothèses (H_1)-(H_2)-(H_3). Par conséquent, toutes les hypothèses du Théorème 2.10 sont satisfaites. Ce dernier assure l'existence d'une solution au processus de la rafle considéré (P_4). ■

Conclusion

Ce mémoire discute une partie du papier récemment publié [13]. Le thème abordé étant d'actualité. Ce travail établit (dans le cadre d'un espace de Hilbert) un résultat d'existence de la solution à une classe de problèmes d'évolution régie par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps et de l'état (sous l'hypothèse (H_2)) avec perturbation du type Lipschitz par rapport à sa troisième variable. La technique adoptée est celle du point fixe.

Dans l'étude de sujets en relation, d'autres auteurs utilisent la méthode de discrétisation par exemple. On cite l'article [14] pour l'étude de problèmes d'évolution du second-ordre régis par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps. Le lecteur peut se référer aux travaux [12], [22], pour des résultats récents concernant la classe d'inclusions différentielles gouvernée par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps et de l'état (sous l'hypothèse (H_2)) avec d'autres types de perturbations (univoques f ou multivoques F) du type

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \quad \forall t \in I \\ x(0) = x_0, u(0) = u_0 \in D(A_{(0,x_0)}) \\ -\dot{u}(t) \in A_{(t,x(t))}u(t) + f(t, x(t), u(t)) \quad \text{p.p. } t \in I \\ u(t) \in D(A_{(t,x(t))}), \forall t \in I, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \quad \forall t \in I \\ x(0) = x_0, u(0) = u_0 \in D(A_{(0,x_0)}) \\ -\dot{u}(t) \in A_{(t,x(t))}u(t) + F(t, x(t), u(t)) \quad \text{p.p. } t \in I \\ u(t) \in D(A_{(t,x(t))}), \forall t \in I, \end{cases}$$

et bien d'autres applications. On cite aussi le papier [23], pour une étude récente de ces problèmes en présence d'un retard fini.

Bibliographie

[1] Aizicovici, S., Staicu, V. : Multivalued evolution equations with nonlocal intial conditions in Banach spaces, NoDEA, Nolinear Diff. Equ. Appl. 14 (3), 361-376 (2007).

[2] Aubin, J.P., Cellina, A. : Differential Inclusions, Grundlehren Math. Wiss., vol. 264., Springer, (1984).

[3] Aubin, J.P., Frankowska, H. : Set valued analysis, Birkouiser, Boston, (1990).

[4] Azzam-Laouir, D., Belhoula, W., Castaing C. and Monteiro Marques, M.D.P. : Perturbed evolution problems with absolutely continuous variation in time and applications, J. Fixed Point Theory Appl. 21 (2), 1-32 (2019).

[5] Azzam-Laouir, D., Belhoula, W., Castaing, C., Monteiro Marques, M.D.P. : Multivalued perturbation to evolution problems involving time dependent maximal monotone operators, Evol. Equ. Control Theory 9(1), 219-254 (2020).

[6] Azzam-Laouir, D., Castaing, C., Monteiro Marques, M.D.P. : Perturbed evolution problems with continuous bounded variation in time and applications, Set-Valued Var. Anal. 26, 693-728 (2018).

[7] Barbu, V. : Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces, Noordhoff Int. Publ., Leyden (1976).

[8] Brézis, H. : Opérateurs maximaux monotone et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland, Amesterdam, London (1973).

[9] Brézis, H. : Analyse fonctionnelle théorie et applications, Masson (1993).

[10] Brogliato, B., Tanwani, A. : Dynamical Systems Coupled with Monotone Set- 345 Valued Operators : Formalisms, Applications, Well-Posedness and Stability, 346 SIAM Rev. 62 (1), 3-129 (2020).

[11] Castaing, C. : Quelques résultats de compacité liés a l'intégration, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 270 (1970), 1732-1735 and Bull. Soc. Math. France, 31, 73-81 (1972).

[12] Castaing, C., Godet-Thobie, C., Saïdi, S. : On fractional evolution inclusion coupled with a time and state dependent maximal monotone operator, Set-Valued Var. Anal. 30(2), 621-656 (2022).

[13] Castaing, C., Godet-Thobie, C., Truong, L.X. : Fractional order of evolution inclusion coupled with a time and state dependent maximal monotone operator, Mathematics (2020).

[14] Castaing, C., Monteiro Marques, M.D.P., Raynaud de Fitte, P. : Second-order evolution problems with time-dependent maximal monotone operator and applications, Adv. Math. Econ. 22, 25-77 (2018).

[15] Castaing, C., Raynaud de Fitte P., Valadier, M. : Young Measures on Topological Spaces with Applications in Control Theory and Probability Theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2004).

[16] Castaing, C., S. Saïdi, S. : Lipschitz perturbation to evolution inclusion driven by time-dependent maximal monotone operators, Topol. Methods Nonlinear Anal. 58 (2) , 677-712 (2021).

[17] Castaing, C., Valadier, M. : Convex analysis and measurable multifunctions, Lecture Notes in Math, 580, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1977).

[18] Deimling, K. : Non Linear Functional Analysis, Springer-verlag, Berlin, 1985.

[19] Guessous, M. : An elementary proof of Komlós-Révész Theorem in Hilbert spaces, J. Convex Anal. 4(2), 321-332 (1997).

[20] Kunze, M., Monteiro Marques, M.D.P. : BV solutions to evolution problems with time-dependent domains, Set-Valued Anal. 5, 57-72 (1997).

[21] Le, B.K. : Well-posedeness and nonsmooth Lyapunov pairs for state-dependent maximal monotone differential inclusions, Optimization 69(6), 1187-1217 (2020).

[22] Saïdi, S. : A perturbed second-order problem with time and state-dependent maximal monotone operators, Discuss. Math., Differ. Incl. Control Optim. 41, 61-86 (2021).

[23] Saïdi, S. : On a second-order functional evolution problem with time and state dependent maximal monotone operators, Evol. Equ. Control Theory, doi : 10.3934/eect.2021034

[24] Selamnia, F., Azzam-Laouir, D., Monteiro Marques, M.D.P. : Evolution problems involving state-dependent maximal monotone operators, Appl. Anal. 101 (1), 297-313 (2022).

[25] Sonntag, Y. : Topologie et analyse fonctionnelle, ellipses, édition marketing S.A, (1998).

[26] Tolstonogov, A.A. : BV Continuous Solutions of an Evolution Inclusion with Maximal Monotone Operator and Nonconvex-Valued Perturbation. Existence Theorem, Set-Valued Var. Anal 29, 29-60 (2021).

[27] Vilches E., Nguyen, B.T. : Evolution inclusions governed by time-dependent maximal monotone with a full Domain, Set-Valued Var. Anal. 28 (2020), 569-581.

[28] Vladimirov, A.A. : Nonstationary dissipative evolution equations in Hilbert space, Nonlinear Anal. 17, 499-518 (1991).

[29] Vrabie, I.I. : Compactness methods for nonlinear evolution equations, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied mathematics, 32, Longman Scientific and Technical, John Wiley, New York (1987).