République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben-Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....

№ de série : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Étude d'une classe d'inclusions différentielles avec perturbation multivoque

Présenté par

Atrih Nada

Soutenu le **07/07/2022**

Devant le jury

Président	D. Affane	M.C.A	Université de Jijel
Encadreur	I. Boutana	M.C.B	Université de Jijel
Examinateur	F. Aliouane	M.C.A	Université de Jijel

Promotion **2021/2022**

Remerciements

Tous mes remerciements vont avant tout à ALLAH, qui m'a donnée la puissance, la santé, la volonté et la patience, pour accomplir ce modeste travail.

*J'exprime mes profonds remerciements à mon encadreur, **Mme** BOUTANA IMEN **(M.C.B)** pour sa patience, surtout ses judicieux conseils et remarques, sa bienveillance et la confiance qu'elle m'a accordée pour réaliser ce travail.*

*Bien entendu, je remercie **Mme** AFFANE DORIA **(M.C.A)**, pour avoir accepté de présider ma soutenance.*

*Mes remerciements vont aussi à **Mille** ALIOUANE FATINE **(M.C.A)** pour avoir accepté d'examiner mon travail.*

Je voudrais aussi remercier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation, ainsi qu'à l'équipe du département de mathématiques à l'université de Jijel.

Je ne pourrais oublier d'exprimer ma profonde gratitude et avec grand amour envers mes chers parents qui m'ont soutenu toute ma vie, pour leurs conseils et encouragements durant toutes les années de mes études.

Enfin, je n'oublierai pas de remercier tous mes sæurs et mon frère, ma familles, mes amis, mes collègues pour leur soutien et leurs encouragements et toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin, à terminer ce travail.

Merci à tous...

♡*NADA*♡

Table des matières

Introduction

L'analyse multivoque c'est étude des propriétés des applications multivaluées, autrement dit, les applications dont l'image est un sous ensemble de l'espace d'arrivées. Le besoin de l'analyse multivoque s'est ainsi fait sentir pour la résolution de nombreux problèmes émergents dans divers domaines. Parmi les divers domaines dans les quels les outils de l'analyse multivoque sont utilisés, on peut citer le contrôle optimal [21], l'économie mathématiques [17], le calcul sous-différentiel [26], l'optimisation et l'étude des inclusions différentielles.
Les inclusions différentielles représentent une généralisation des équations différentielles ordinaires i.e., une équation différentielle à second membre multivoque de la forme

$$\dot{u}(t) \in F(t, u(t)), u(0) = u_0, \tag{1}$$

où $\dot{u}(\cdot)$ indique la dérivée temporelle de $u(.)$, u_0 une condition initiale et F une application dont les valeurs sont des sous ensembles.
Quand F est un singleton, on obtient un cas particulier de (1) notamment l'équation

différentielle

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)), u(0) = u_0,\ f \in L^1,$$

qui est intensément étudiée dans la littérature (voir par exemple [19]). Contrairement aux équations différentielles ordinaires, l'existence de solution pour une inclusion différentielle repose non seulement sur des conditions de régularité sur F (i.e, les divers types de continuité ou semi-continuité) mais aussi à des conditions de type topologiques ou géométrique (compacité, convexité) de son image (Pour plus de détails voir [2, 18, 28]). Aujourd'hui, cette théorie est devenue plus importante et plus attirante.

Les problèmes gouvernés par les opérateurs maximaux monotones constituent une classe importante d'inclusions différentielles. Ces problèmes était l'objet de grandes recherches entre les années 1960 et 1980, lorsque Brezis, Browder, Minty et Rockafellar ont en établi les résultats fondamentaux comme on les connait actuellement (voir [10, 11, 24, 27]). Le sous différentiel d'une fonction convexe semi-continue inférieurement et la fonction indicatrice d'un ensemble fermé convexe sont des exemples importants, qui possèdent des propriétés spécifiques, c'est-à-dire, sont des cas particuliers d'opérateurs maximaux monotones. En analyse non linéaire, les opérateurs maximaux monotones jouent un rôle crucial dans l'optimisation convexe etc.

Une théorie générale sur l'existence, l'unicité et la stabilité de solution d'inclusion régies par de tels opérateurs a été étudiée par plusieurs auteurs. En 1971, Brézis dans [9] a étudié le problème

$$-\dot{u}(t) \in Au(t) \quad p.p.t \in [0, +\infty[, u(0) = u_0 \in D(A). \tag{2}$$

où $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone et H est un espace de Hilbert. Depuis, divers travaux concernant le problème (1) on été développés. Par exemple, dans [1] Attouch et Damlamian, ont étudié le problème

$$-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t, u(t)), \qquad p.p.\ t \in I,\ u(0) = u_0 \in D(A). \tag{3}$$

où $F : I \times \overline{D(A)} \rightrightarrows H$ est une perturbation multivoque.

Les méthodes de résolution des inclusions différentielles de premier ordre de la forme (3) qui est le sujet de notre intérêt, varient beaucoup suivant les hypothèses imposées à la multi-application F.

L'hypothèse de la convexité est largement utilisée, particulièrement pour établir la fermé-

ture de l'ensemble de solutions, qui est généralement non fermé sans la convexité.
En l'absence de la convexité des valeurs de F, qui est l'objet de notre travail, A.Cellina et A.Ornelas [15] ont donné une condition assurant l'existence de solutions inclusion différentielle (3), où F est semi-continue supérieurement à valeurs non convexes, particulièrement presque convexes, qui est une condition plus faible que la convexité. La méthode de démonstration utilisée est d'étudier la relation entre la solution du problème relaxé

$$-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + co(F(u(t))) \qquad p.p.\ t \in I,\ u(0) = u_0 \in D(A). \tag{4}$$

et non relaxé (3). Elle consiste à déduire la solution du problème (3) en fonction de la solution du problème (4).
Ce mémoire est composé essentiellement de trois chapitres ordonné comme suit :
Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions et résultats de base qui nous utiliserons tout au long de notre travail.
Nous commençons par quelques définition de la continuité et théorèmes de l'analyse fonctionnelle et convexes aussi des notions de l'analyse multivoque et quelques résultats de convergence qui sont nécessaires pour les démonstrations de nos théorèmes principaux.
Dans le deuxième chapitre, nous étudions l'existence de solution absolument continue pour une inclusion différentielle du premier ordre de la forme (3).
Notre étude est menée dans un espace de Hilbert séparable H, avec $F : [0, T] \times H \rightrightarrows H$ est une multi-application scalairement mesurable, scalairement semi-continue supérieurement à valeurs non vides convexes faiblement compactes et régis par un opérateur maximale monotone à valeurs coniques dans le cas ou $t \mapsto A(t)$ est absolument continue au sens de Vladimirov, i.e., il existe une fonction $\beta \in W^{1,1}([0, T], \mathbb{R})$ croissante tel que

$$dis(A(t), A(s)) \leq \beta(t) - \beta(s) \quad \text{pour } 0 \leq s \leq t \leq T.$$

où dis est la pseudo-distance introduit par Vladimirov dans [30]. Ce résultat a été obtenu par Azzam et all dans [5].
Dans le troisième chapitre, en affaiblissant l'hypothèse de convexité de la multi-application F à la presque convexité, on commence par donner la notion de la presque convexité, définie dans [15], et un exemple qui montre l'existence des ensembles presque convexes et non convexes.

En utilisant le résultat obtenu dans le chapitre 2 à l'étude de l'inclusion différentielle (3), dans le cas où F à valeurs non vides presque convexes compactes et semi-continue supérieurement. On obtient un résultat d'existence à travers une méthode inspiré de [4, 15] qui consiste à trouver la relation entre la solution de problème relaxé et non relaxé puis on déduit la solution en fonction de la solution du problème avec perturbation à valeurs convexes que nous avons donné dans le chapitre 2.

Abréviations et notations

Dans tout le mémoire, nous allons adopter les abréviations et notations suivantes

- p.p Presque partout.
- := Egal à, par définition.
- resp respectivement.
- min Minimum.
- max Maximum.
- inf Infimum.
- sup Supermum.
- i.e. ou c-à-d C'est-à-dire.
- s.c.s Semi-continue supérieurement.
- $B(x_0, r)$ La boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.
- B_H La boule ouverte de centre 0 et de rayon 1.
- $\overline{B}(x_0, r)$ La boule fermé de centre x_0 et de rayon r.

- $\overline{B}_H$ La boule fermé de centre 0 et de rayon 1.
- $co(A)$ L'enveloppe convexe de A.
- $\overline{co}(A)$ L'enveloppe convexe fermé de A.
- $\mathcal{P}(H)$ L'ensemble des parties de H.
- $\mathcal{B}(H)$ La tribu de Borel sur H.
- $I = [0, T]$ Un intervalle de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, $T > 0$.
- H Espace de Hilbert réel.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Le produit scalaire de H.
- $\| \cdot \|$ La norme de H.
- $\mathcal{L}(I)$ La tribu de Lebesgue sur l'intervalle I.
- $x_n \to x$ Exprime que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers x.
- $x_n \rightharpoonup x$ Exprime que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x.
- $d(x, A) = \inf\limits_{a\in A} \mid x - a \mid$ La distance d'un point x d'un espace métrique X à l'ensemble A (A est une partie non vide de X).
- $\chi_A(.)$ La fonction caractéristique de l'ensemble A définie sur H par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \quad si \quad x \in A, \\ 0 \quad si \quad x \notin A. \end{cases}$$

- $\delta(\cdot, A)$ La fonction indicatrice à l'ensemble A définie sur H à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ par

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad x \in A; \\ +\infty \quad si \quad x \notin A. \end{cases}$$

- $\delta^*(\cdot, A)$ La fonction polaire de $\delta(\cdot, A)$, appelée aussi fonction d'appui de l'ensemble A, définie sur H par

$$\delta^*(\cdot, A) : x \in H \mapsto \delta^*(x, A) = \sup_{y\in A}\langle x, y\rangle.$$

- I_H Opérateur unité de H.
- $Proj_A(x)$ La projection du point $x \in H$ dans l'ensemble A, définie par

$$Proj_A(x) = \Big\{ y \in A : d(x, A) = \|y - x\| \Big\}.$$

Si de plus A est convexe la projection est unique et vérifie

$$y \in Proj_A(x) \Leftrightarrow y \in A \text{ et } \langle x - y, y - a \rangle \geq 0 \quad \forall a \in A.$$

• $L^p(I, H)$ L'espace des applications définies sur I à valeurs dans H $p^{ième}$ intégrables ($1 \leq p < +\infty$) c'est à dire mesurables et $\int_I \|u(t)\|^p dt < +\infty$, muni de la norme

$$\|u(\cdot)\|_{L^p} = \Big(\int_I \|u(t)\|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

• $L^\infty(I, H)$ L'espace des applications essentiellement bornées définies sur I à valeurs dans H, muni de la norme

$$\|u(\cdot)\|_{L^\infty} = \inf\{c \geq 0 : \quad \|u(t)\| \leq c \quad p.p. \quad \text{sur} \;\; I\}.$$

• $C(I, H)$ L'espace de toutes les applications continues définies sur I à valeurs dans H, muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|u(\cdot)\|_C = \sup_{t \in I} \|u(t)\|_H.$$

• Soit $u \in C(I, H)$ une fonction absolument continue, on note par $\dot{u}(t)$ la dérivée de u au point t, c'est à dire $\dot{u}(t) = \dfrac{du}{dt}(t)$.
• $W^{(1,p)}(I, H)$ L'espace de toutes les applications u définie sur I à valeurs dans H, absolument continues ayant une dérivée première $\dot{u} \in \mathbf{L}^p(I, H)$.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et résultats de base qui nous seront utiles pour la démonstration de nos théorèmes principaux.

1.1 Quelques notions d'analyse fonctionnelle

Pour les résultats ci dessous, on peut se référer à [20, 22, 29].

1.1.1 Continuité des applications

Définition 1.1.1.
Soit (E, Σ, μ) un espace mesuré positif. Soit Z un sous ensemble de E.
- *On dit que Z est μ-**négligeable**, s'il existe $A \in \Sigma$ tel que $Z \subset A$ et $\mu(A) = 0$.*
- *On dit que μ est complète (ou que (E, Σ, μ) est complet) si toutes les parties μ-négligeable sont mesurables i.e.,*

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ (A \subset B,\ B \in \Sigma,\ \mu(B) = 0) \Longrightarrow A \in \Sigma.$$

- *On dit qu'une propriété sur E est vraie μ-presque partout (μ.p.p.), si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est μ-négligeable.*

Définition 1.1.2. ***(Application continue)***
Soit $(X, d), (Y, d')$ deux espaces métriques et $f : X \to Y$, on dit que f est continue au point $x_0 \in X$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall x \in X : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

- *f est continue sur X ssi elle est continue en tout point $x \in X$.*

Remarque.
Si $(E, \|\cdot\|), (\tilde{E}, \|\cdot\|_{\tilde{E}})$ sont deux espaces vectoriels normés. On dit que $f : E \to \tilde{E}$ est continue au point $x_0 \in E$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : \|x - x_0\|_E < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_{\tilde{E}} < \varepsilon.$$

Proposition 1.1.3. • *Si f est continue au point x_0, alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Définition 1.1.4. ***(Application équicontinue)***
Soit $(X, d), (Y, d')$ deux espaces métrique. Une partie H de $\mathcal{F}(X, Y)$ (l'espace toutes les applications $f : X \to Y$) est dite équicontinue au point $x_0 \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0, \forall x \in X, \forall f \in H : d(x, x_0) < \gamma \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

- *H est dite équicontinue sur X si elle est équicontinue en tout point $x \in X$.*

Théorème 1.1.5. ***(Théorème de différentiation de Lebesgue)***
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour toute fonction intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, on a pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(\tau) d\tau = f(x).$$

Définition 1.1.6. ***(Application absolument continue)***
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une fonction $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to E$ est dite absolument continue si est seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant, $\sum\limits_k (b_k - a_k) < \delta$ on a $\sum\limits_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon$.

Théorème 1.1.7.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. une fonction $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to E$ est absolument continue, si et seulement si, il existe une fonction intégrable $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [a, b]$

$$f(t) - f(a) = \int_a^t v(s) ds,$$

dans ce cas f est dérivable presque partout (p.p.) et sa dérivée $\dot{f} = v$ p.p.

Remarque.
- *Toute fonction absolument continue est une fonction continue.*
- *Toute fonction absolument continue est dérivable presque partout.*

Définition 1.1.8.
Soit E un espace topologique séparé et μ une mesure Borélienne ($\mu : \mathcal{B}(E) \to \overline{\mathbb{R}}$).
- *On dit que μ est **régulière** si pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert C et un fermé G de E tel que $G \subset A \subset C$ et $\mu(C \backslash G) \leq \varepsilon$.*
- *Toute mesure Borélienne finie et régulière est appelée **mesure de Radon**.*

Théorème 1.1.9. ***(Théorème de Lusin)***
Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré de Radon avec μ positive. Soit X un espace de dimension finie.
Alors, pour toute fonction $\phi : T \to X$ μ-mesurable et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $T_\varepsilon \subset T$ tel que $\mu(T \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon$ et la restriction de ϕ à T_ε est continue.

Définition 1.1.10.

Soit $(x_n)_n$ *une suite de* $\overline{\mathbb{R}}$. *On définit les limites inférieure et supérieure de* $(x_n)_n$ *comme suit*

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} x_n := \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\inf_{k\geq n} x_k\Big), \quad \limsup_{n\longrightarrow\infty} x_n := \inf_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sup_{k\geq n} x_k\Big).$$

Ces deux semi-limites vérifient les inégalités suivantes

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} x_n \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n \leq \limsup_{n\longrightarrow\infty} x_n.$$

Définition 1.1.11.

Soit E *un espace topologique et* $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction à valeurs réelles étendues. Alors*

1) *La limite inférieure de* f *en* a *donnée par*

$$\liminf_{x\longrightarrow a} f(x) := \sup\inf\{f(V) : V \in \mathcal{V}(a)\} = \sup_{V\in\mathcal{V}(a)}\left(\inf_{x\in V} f(x)\right).$$

2) *La limite supérieure de* f *en* a *donnée par*

$$\limsup_{x\longrightarrow a} f(x) := \inf\sup\{f(V) : V \in \mathcal{V}(a)\} = \inf_{V\in\mathcal{V}(a)}\left(\sup_{x\in V} f(x)\right).$$

Où $\mathcal{V}(a)$ *désigne l'ensemble des voisinages de* a *dans* E.

1.1.2 La topologie faible et faible étoile

Définition 1.1.12. ***(La topologie faible)***

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espace vectoriel normé réel. On note* E' *son dual topologique, (l'espace des formes linéaires continues sur* E*).* E' *est aussi un espace vectoriel normé muni de la norme* $\|f\|_{E'} = \sup_{x\in\overline{B}_E} |f(x)|$.

• *Soit* $f \in E'$ *et soit*

$$\begin{aligned}\varphi_f : E &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \varphi_f(x) = \langle f, x\rangle = f(x).\end{aligned}$$

La topologie faible sur E *qu'on note par* $\sigma(E, E^{'})$ *est la topologie la moins fine sur* E *rendant continues les applications* $\varphi_f (f \in E')$.

• *L'espace* $(E, \sigma(E, E^{'}))$ *est un espace vectoriel topologique séparé.*

Proposition 1.1.13.

Soit $(x_n)_n$ *une suite de points de E. Alors,*

• $(x_n)_n$ *converge vers* x *pour* $\sigma(E, E')$ *(ou faiblement) si et seulement si* $(\langle f, x_n\rangle)_n$ *converge vers* $\langle f, x\rangle$ *pour tout* $f \in E'$;

• *Si* $(x_n)_n$ *converge fortement vers* x, *alors* $(x_n)_n$ *converge faiblement vers* x.

• *Si* $(x_n)_n$ *converge faiblement vers* x, *alors* $\|x_n\|_E$ *est bornée et nous avons*

$$\|x\|_E \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_E.$$

• *Si* $(x_n)_n$ *converge faiblement vers* x *et* $(f_n)_n$ *converge fortement vers* f *dans* E', *alors* $(\langle f_n, x_n\rangle)_n$ *converge vers* $\langle f, x\rangle$.

Définition 1.1.14. ***(La topologie faible étoile)***

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espace vectoriel normé,* E' *son dual et* E'' *son bidual* $\Big($*le dual de* E' $\Big)$ *muni de la norme*

$$\|\xi\|_{E''} = \sup_{f\in \overline{B}_{E'}} \|\langle \xi, f\rangle\|.$$

Sur l'espace $E^{'}$ *sont définies déjà deux topologies :*

La topologie forte associée à la norme de $E^{'}\Big(\|f\|_{E'} = \sup\limits_{f\in\overline{B}_{E'}} |\langle f, x\rangle| \Big)$.

La topologie faible $\sigma(E', E'')$.

On définit une troisième topologie sur E' *comme suit*

Pour chaque $x \in E$, *on considère l'application* $\varphi_x : E' \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\varphi_x(f) = \langle f, x\rangle.$$

• *La topologie faible* sur* $E^{'}$ *est la topologie la moins fine sur* $E^{'}$ *qui rende continue toutes* *les applications* $\varphi_x (x \in E)$*. On la note* $\sigma(E', E)$*.*

Proposition 1.1.15.

Soit $(f_n)_n$ *une suite de* E'*. Alors* $(f_n)_n$ *converge vers* f *pour* $\sigma(E', E)$ *(ou faiblement*) si et seulement si* $(\langle f_n, x\rangle)_n$ *converge vers* $\langle f, x\rangle$ *pour tout* $x \in E$*.*

Définition 1.1.16. ***(Inégalité de Cauchy-Schwartz)***

Soient H *un espace de Hilbert. Alors,*

$$\forall x, y \in H, \quad |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

1.1.3 Fonction à variation bornée

Définition 1.1.17.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. Étant donnée une fonction* $f : I = [0, T] \to E$*. On appelle variation totale de* f *sur* I *l'expression*

$$var(f, I) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} \|f(t_{k+1}) - f(t_k)\|, \quad \forall 0 < t_1 < \cdots < t_n = T \right\}.$$

• *Si* $var(f, I) < \infty$*, on dit que* f *est à variation bornée.*

Proposition 1.1.18.

Soit H *un espace de Hilbert. Soit* $u : I \subset \mathbb{R} \to H$ *une application continue à variation bornée et soient* $a, b, c \in I$ *tel que* $a \leq b \leq c$*. Alors, on a*

1) $\displaystyle\int_{[a,b]} du = \int \mathbf{1}_{[a,b]} du = du([a, b]) = u(b) - u(a).$

2) $\displaystyle\int_{[a,c]} du = \int_{[a,b]} du + \int_{[b,c]} du.$

Proposition 1.1.19. ***(Formule de Moreau)***

Soient H *un espace de Hilbert, et* $u : I \subset \mathbb{R} \to H$ *une application continue à variation bornée. Alors, la formule de Moreau est donnée par*

$$d\Big(\|u\|^2\Big) = 2\langle u, du\rangle.$$

Théorème 1.1.20.

Soit H un espace de Hilbert, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à variation bornée définies sur $I=[0,T]\subset\mathbb{R}$ à valeurs dans H. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée en variation et en norme, i.e., il existe deux constantes positives K et M telles que

$$\sup_{t\in I}\|u_n(t)\|\leq K \quad et \quad var(u_n,I)\leq M.$$

Alors, il existe une sous suite $(u_{n_k})_k$ de $(u_n)_n$ et une fonction $u:I\to H$ à variation bornée tel que pour tout $t\in I$

$$u_n(t)\rightharpoonup u(t) \quad et \quad var(u,I)\leq M.$$

1.2 Quelques notions de l'analyse convexe

Ces notions ont été pris des références [7, 13, 29].

Définition 1.2.1.

*Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et soit $B\subset E$. On dit que B est **convexe** si et seulement si*

$$\forall x,y\in B,\forall\lambda\in[0,1]:\lambda x+(1-\lambda)y\in B.$$

Autrement dit, pour tout $x,y\in B$, $[x,y]\subset B$,

$[x,y]$ est le segment de droite d'extrémités x et y défini par

$$[x,y]=\{\lambda x+(1-\lambda)y/\ \lambda\in[0,1]\}.$$

Définition 1.2.2.

*On appelle **simplexe** de $\mathbb{R}^n$ l'ensemble Δ_n défini par*

$$\Delta_n=\Big\{(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n/\lambda_i\geq 0 \quad et \quad \sum_{i=0}^{n}\lambda_i=1\Big\}.$$

Définition 1.2.3.

*Soit E un espace vectoriel et soient $x_1,x_2,...,x_n\in E$. On appelle **combinaison convexe*** *des éléments* $x_1, x_2, ..., x_n$ *tout élément de la forme*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \textit{tel que,} \quad (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \Delta_n.$$

Théorème 1.2.4.
Soit $B \subset E$ *un sous ensemble convexe, alors* B *est faiblement fermé (fermé pour* $\sigma(E, E')$*) si et seulement s'il est fortement fermé.*

Définition 1.2.5. *(Enveloppe Convexe)*
Soit A *un sous ensemble d'un espace vectoriel topologique* E*.*
• *On appelle* ***enveloppe convexe*** *de* B *qu'on note* $co(B)$*, l'intersection de tous les sous ensembles convexes de* E *contenant* B*, c'est en fait le plus petit convexe de* E *qui contient* B*.*
• ***L' enveloppe convexe*** *d'un sous ensemble fermé n'est pas nécessairement fermée. Pour cette raison, il est nécessaire de recourir à la notion d'enveloppe convexe fermée.*
• *On appelle* ***enveloppe convexe fermé*** *de* B *qu'on note* $\overline{co}(B)$ *l'intersection de tous les sous ensembles convexes fermés de* E *qui contenant* B*. C'est le plus petit convexe fermé de* E *qui contient* B*.*
• $\overline{co}(B) = \overline{co(B)}$.

Théorème 1.2.6.
Soit E *un espace vectoriel et* $B \subset E$*. Alors*

$$co(B) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_j x_j \ ; \ n \geq 1, (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \Delta_n, x_1, ..., x_n \in B \right\}.$$

Théorème 1.2.7.
Dans un espace vectoriel normé E *de dimension finie, si* $A \subset E$ *est borné (resp. compact) alors, l'enveloppe convexe de* A $(co(A))$ *est bornée (resp. compacte).*

Théorème 1.2.8. ***(Théorème de séparation)***
Soit E *un espace vectoriel normé, alors pour tout ensemble* $B \subset E$ *non vide*

$$\overline{co}(B) = \{x \in E : \quad \langle x', x \rangle \leq \delta^*(x', B) \quad \forall x' \in E'\}.$$

et $\delta^*(x', A) = \delta^*(x', co(A)) = \delta^*(x', \overline{co}(A)), \quad x' \in E'.$

Théorème 1.2.9.

Soient X un espace localement compact, μ une mesure positive sur X, E un espace de Banach réel, et S un sous ensemble convexe fermé de E. Soit f une application définie sur X telle que $f(X) \subset S$.
Pour toute fonction réelle strictement positive et intégrable g telle que fg soit intégrable, le point $\frac{\int_X fgd\mu}{\int_X gd\mu}$ appartient à S.

1.3 Rappels sur les multi-applications

Dans cette section, nous rassemblons quelques propriétés de base des multi-applications nécessaires pour notre présente étude. Les résultat qui suivent on été pris des références [2, 3, 13, 20, 22].

1.3.1 Définitions

Définition 1.3.1.

Soient X, Y deux ensembles non vides. On appelle multi-application ou application multivoque définie sur X à valeurs dans Y, toute application F qui associe à chaque élément $x \in X$ un sous ensemble $F(x)$ de Y, et on note $F : X \rightrightarrows P(Y)$ ou $F : X \rightrightarrows Y$.
*• On appelle **domaine** (effectif) de F, qu'on note $dom(F)$, le sous ensemble de X définie par*

$$dom(F) = \Big\{x \in X : F(x) \neq \emptyset\Big\}.$$

*• On appelle **image** de F, qu'on note $Im(F)$, le sous ensemble de Y défini par*

$$\mathcal{R}(F) = Im(F) = \Big\{y \in Y : \exists\, x \in dom(F), y \in F(x)\Big\} = \bigcup_{x \in dom(F)} F(x) \subset Y.$$

• *On appelle **graphe** de F, qu'on note $gph(F)$, le sous ensemble de $X \times Y$ définie par*

$$gph(F) = \Big\{(x, y) \in X \times Y : x \in dom(F), y \in F(x)\Big\}.$$

Définition 1.3.2.

Soient A, B deux sous ensembles non vide d'un espace métrique (X, d)

• *On appelle **l'écart** entre $A, B \subset X$, qu'on note $e(A, B)$, la quantité définie par*

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} \quad d(a, B),$$

avec

$$d(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b).$$

• *On appelle **la distance de Hausdorff** entre A et B qu'on note $d_H(A, B)$, la quantité définie par*

$$d_H(A, B) = \max\Big(e(A, B), e(B, A)\Big).$$

Remarquons que $d_H(A, B) = d_H(B, A)$.

1.3.2 Continuité des multi-applications

Définition 1.3.3. ***(Semi-continuité supérieure)***

Soient X ,Y deux espaces topologiques, et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.

• *On dit que F est semi-continue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de Y tel que $F(x_0) \subset U$, il existe un voisinage $\Omega \in V(x_0)$, tel que $F(\Omega) \subset U$, i.e., $F(x) \subset U$, $\forall x \in \Omega$.*

• *f est s.c.s sur X ssi f est s.c.s en tout point $x_0 \in X$.*

• *On dit que F est faiblement semi-continue supérieurement sur X si pour tout sous ensemble faiblement fermé $M \subset Y$, l'ensemble*

$$F^{-1}(M) = \{x \in X, F(x) \cap M \neq \emptyset\},$$

est séquentiellement faiblement fermé.

Théorème 1.3.4.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et $F : E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides. On suppose que $F(t_0)$ est convexe et faiblement compact. Alors, F est faiblement semi-continue supérieurement au point t_0 si et seulement si la fonction $\delta^*(x', F(\cdot))$ est semi-continue supérieurement en t_0.

Proposition 1.3.5.
Soient X, Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs fermées. Alors le graphe de F est fermé dans $X \times Y$.
• Le réciproque est donnée par le lemme suivant.

Lemme 1.3.6.
Soient X, Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides, avec Y un espace compact. Si le graphe de F est fermé alors F est s.c.s.

Théorème 1.3.7.
Soient X un espace topologique, Y un espace métrique et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides.
Si F est semi continue supérieurement (ou semi continue inférieurement) alors F est mesurable (avec respect de la tribu Borélienne).

Théorème 1.3.8.
Soit X un espace métrique, M un sous-ensemble compact de H et $F : X \rightrightarrows M$ une multi-application si F est s.c.s, alors la multi-application $co(F) : x \in X \rightrightarrows co(F(x)) \subset H$ est aussi s.c.s.

1.3.3 Mesurabilité des multi-applications

Définition 1.3.9.
Soit (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique et $F : X \rightrightarrows Y$.
On dit que F est Σ-mesurable où simplement mesurable si pour tout ouvert V de X

$$F^{-1}(V) = \{t \in X : \ F(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Proposition 1.3.10.
Soient (X, Σ) *un espace mesurable,* Y *un espace métrique séparable et soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*
(i) F *est* Σ*-mesurable ;*
(ii) *pour chaque* $y \in Y$*, la fonction*

$$\begin{aligned} g_x : X &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g_y(x) = d(y, F(x)), \end{aligned}$$

est Σ*-mesurable.*

Théorème 1.3.11.
Soit (X, Σ, μ) *un espace mesuré avec* μ σ*-finie et* Σ μ*-complète. Soit* E *un espace de Banach séparable et* $F : X \rightrightarrows E$ *une multi-application mesurable à valeurs non vides, convexes et faiblement compactes. Alors, l'application*

$$\begin{aligned} h : X &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto h(x) = Proj_{F(x)}(0), \end{aligned}$$

est une application mesurable.

Définition 1.3.12.
Soit (X, Σ) *un espace mesurable,* (Y, d) *un espace métrique et soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application. On appelle sélection de* F *toute application* $f : X \to Y$ *vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \ \ \forall\, x \in dom(F).$$

Théorème 1.3.13. ***(Théorème de sélection mesurable)***
Soient (X, Σ) *un espace mesurable,* Y *un espace métrique complet séparable et* $F : X \rightrightarrows Y$ *est une multi-application* Σ*-mesurable à valeurs fermées non vides. Alors* F *admet au moins une sélection* Σ*-mesurable.*

Théorème 1.3.14.
Soient (X, Σ) *un espace mesurable,* E *un espace de Banach séparable. Soient* $F : X \times E \rightrightarrows E$ *une multi-application mesurable et* $u : X \to E$ *une application mesurable. Alors la*

multi-application $F(\cdot, u(\cdot))$ *est mesurable.*

Définition 1.3.15.

Soit (X, Σ) *un espace mesurable et soit* E *un espace vectoriel normé. Soit* $F : X \rightrightarrows E$ *une multi-application. On dit que* F *est scalairement mesurable si pour tout* $x' \in E'$, *l'application* $t \longmapsto \delta^*(x', F(t))$ *est mesurable .*

Proposition 1.3.16.

Soient (X, Σ) *un espace mesurable,* E *un espace de Banach séparable. Si* $F : X \rightrightarrows E$ *est une multi-application à valeurs non vides convexes faiblement compactes, alors* $F(\cdot)$ *est mesurable si et seulement si elle est scalairement mesurable.*

Théorème 1.3.17.

Soit (X, Σ, μ) *un espace mesuré avec* μ σ*-finie et* Σ μ*-complète. Soit* E *un espace de Banach séparable et* $F : X \rightrightarrows E$ *une multi-application à valeurs non-vides, convexes compactes. On suppose que pour tout* $x' \in E'$, *la fonction* $\delta^*\Big(x', F(\cdot)\Big)$ *est intégrable i.e.,* $t \mapsto \delta^*\Big(x', F(t)\Big) \in L^1(X, E)$. *Soit pour toute application* $g \in L^\infty(X, E)$

$$\int_X gFd\mu = \Big\{ \int_X gfd\mu : \quad f \in S_F \Big\},$$

où S_F *l'ensemble des sélection mesurable de* Γ *défini par*

$$S_F = \Big\{ f : X \rightrightarrows E, \quad f(t) \in F(t), \quad \mu\text{-}p.p \Big\}.$$

Alors, $\int_X gFd\mu$ *est convexe,* $\sigma(E, E')$*-compact dans* E. *De plus, sa fonction d'appui est donnée par*

$$\delta^*\Big(x', \int_X g(t)F(t)d\mu(t)\Big) = \int_X \delta^*\Big(x', g(t)F(t)\Big)d\mu(t), \quad \forall x' \in E'.$$

En particulier, si F *est univoque, i.e.,* $F(\cdot) = h(\cdot) : X \to E$

$$\Big\langle x', \int_X g(t)h(t)d\mu(t) \Big\rangle = \int_X \langle x', g(t)h(t) \rangle d\mu(t).$$

Proposition 1.3.18.

Soit (X, Σ, μ) *un espace mesuré et soit* E *un espace de Banach séparable. Soit* $F : X \rightrightarrows E$

une multi-application à valeurs non-vides, convexes et faiblement compactes et soit ϕ : $X \rightrightarrows E$ *une multi-application à valeurs non-vides, convexes fermées. Si pour tout* $x' \in E'$

$$\delta^*\Big(x', \phi(t)\Big) \leq \delta^*\Big(x', F(t)\Big) \quad \mu\text{-}p.p.$$

alors,

$$\phi(t) \subset F(t) \quad \mu\text{-}p.p.$$

1.4 Quelques résultats de convergence et de compacité

Pour les résultats ci dessous, on peut se référer à [5, 9, 12, 22, 29]

Théorème 1.4.1. ***(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)***
Soient (X, Σ, μ) *un espace mesuré,* E *un espace de Banach, soit* $1 \leq p < +\infty$ *et* (f_n) *une suite de fonctions mesurables définies sur* X *à valeurs dans* E*, si la suite* (f_n) *vérifie*

(i) $f_n \to f$ $\mu.p.p$ *sur* X*,*

(ii) il existe une fonction positive $g \in \mathbf{L}^p(X, \mathbb{R})$ *telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*
$\|f_n(t)\| \leq g(t)$ $\mu.p.p.$

Alors $f_n \to f$ *dans* $\mathbf{L}^p(X, E)$*. En particulier, dans le cas* $p = 1$*,*

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu.$$

Théorème 1.4.2.
Soit $1 \leq p < \infty$ *et soit* $(f_n)_n \subset L^p([0,T], H)$ *une suite convergente vers une fonction* $f \in L^p([0,T], H)$ *pour la norme de* $L^p([0,T], H)$*. Alors, il existe une sous suite* $(f_{n_k})_k$ *convergeant vers* f *p.p. sur* $[0,T]$*.*

Définition 1.4.3.
Soit X *un espace vectoriel normé, et soit* $(w_n)_n$ *une suite de points de* X*. On dit que la*

suite $(w_n)_n$ *converge vers* $w \in X$ *au sens de* ***Komlos*** *si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} w_j = w.$$

Proposition 1.4.4.

Soient (X, Σ, μ) *un espace mesuré,* E *un espace vectoriel normé et soit* $(u_n)_n$ *une suite d'éléments de* $L^1(X, E)$*. Si* $(u_n)_n$ *est une suite bornée dans* $L^1(X, E)$*, alors il existe une sous suite* $(v_n)_n$ *de* $(u_n)_n$ *qui converge au sens de Komlos vers un élément* $x \in L^1(X, E)$ *presque partout i.e.,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} v_j(t) = x(t) \quad p.p.$$

Proposition 1.4.5.

Soient (X, Σ, μ) *un espace mesuré,* E *un espace vectoriel normé. Si* $(u_n)_n$ *est une suite de* E *qui converge vers un élément* $u \in E$*. Alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \|u_k - u\|_E = 0.$$

Théorème 1.4.6. ***(Théorème de Smûlian)***

Soit S *un sous ensemble d'un espace de Banach* E*, si* S *est relativement faiblement compact. Alors pour chaque* $x \in \overline{S}^w$ *(fermeture faible de* S*), il existe une suite* $(x_n)_n$ *d'éléments de* S *convergeant faiblement vers* X*.*

Théorème 1.4.7.

Soient X *et* Y *deux espaces métriques,* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application à valeurs compactes. Alors* F *est s.c.s sur* X *si et seulement si pour tout* $x \in X$ *et* $(x_n)_n \subset X$ *convergeant vers* x *et pour tout suite* $(y_n)_n \subset Y$*, telle que* $y_n \in F(x_n)$*, il existe une sous suite de* $(y_n)_n$ *convergente et sa limite dans* $F(x)$*, c-à-d,*

$$\exists\, y \in Y, \quad y_{n_k} \longrightarrow y \quad et \quad y \in F(x).$$

Théorème 1.4.8. ***(Banach-Mazur)***

Soit E *un espace de Banach et soit* $(x_n)_n$ *une suite d' éléments de* E *convergent faiblement vers* x*, alors il existe une suite* $(z_n)_n$ *telle que chaque* z_n *est une combinaison convexe des éléments* $x_n, x_{n+1}, \ldots$ *convergent fortement vers* x*.*

Lemme 1.4.9. ***(Lemme de Mazur)***

Soit E un espace de Banach. Soit $(x_n) \subset E$ et $x \in E$ si $(x_n)_n$ converge faiblement vers x dans E.
Alors, il existe une suite $(y_n)_n$ de combinaison convexe des $(x_k)_{k \geq n}$ (i.e. $y_n \in co\{x_k, k \geq n\}$) qui converge fortement vers x telle que

$$x \in \bigcap_n \overline{co}\{x_k, k \geq n\}.$$

Définition 1.4.10.

Soient X un espace topologique séparé, S une partie de X. On dit que S est relativement compacte si son adhérence dans X est compacte

Théorème 1.4.11. ***(Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki)***

Soit E un espace de Banach séparable, et soit $S \subset E'$. Si S est borné pour la norme de E' et fermé pour la topologie $\sigma(E', E)$. Alors , S est compact pour cette topologie.
En particulier la boule unité fermée de E' est compacte pour la topologie $\sigma(E', E)$.

Théorème 1.4.12. ***(Théorème d'Arzelà-Ascoli)***

Soit (K, d) un espace métrique compact, $(X, d^{'})$ un espace métrique complet, et $H \subset C(K, X)$ muni de la distance de la convergence uniforme. Alors H est relativement compact si et seulement si H est équicontinu et $H(x)$ est relativement compact pour tout $x \in K$, avec

$$H(x) = \{f(x)|f \in H\}.$$

Lemme 1.4.13. ***(Lemme de Gronwall)***

Soient $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des suites de nombre réels positifs vérifiant

$$a_{i+1} \leq \alpha_i + \beta_i(a_0 + ... + a_{i-1}) + (1 + \gamma_i)a_i \quad pour \quad i \in \mathbb{N}.$$

Alors,

$$a_i \leq \Big(a_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k\Big). \exp\Big(\sum_{k=0}^{i-1} \Big[k\beta_k + \gamma_k\Big]\Big) \quad pour \quad i \in \mathbb{N}^*. \tag{1.1}$$

1.5 Notions sur les opérateurs maximaux monotones

Cette section est consacrée aux définitions et propriétés des opérateurs maximaux monotones qui sont un outil important pour notre présente étude. Ces résultats qui suivent on été pris des références [6, 10, 27].

Dans cette section, $I := [0, T]$ $(T > 0)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, H est un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée notée par $\| \cdot \|$.

Définition 1.5.1.

On appelle opérateur multivoque de H tout multi-application $A : H \rightrightarrows H$. On définit le domaine de A est donné par

$$D(A) = \{x \in H : \; A(x) \neq \emptyset\}.$$

L'image de A (dit aussi le rang de A) est donné par

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in H : \; \textit{il existe } x \in \mathcal{D}(A) \textit{ tel que } y \in A(x)\}.$$

On note par I_H l'identité de H.

1.5.1 Opérateurs maximaux monotones

Définition 1.5.2. ***(Opérateurs monotones)***

Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ une multi-application (opérateur multivoque).

On dit que A est monotone si, pour tous $x_1, x_2 \in D(A)$, $y_1 \in Ax_1$, $y_2 \in Ax_2$, (on note $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in A$), nous avons

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Exemple.

Soit A un opérateur monotone de H alors, A^{-1}, $\lambda A (\lambda > 0)$ sont aussi monotones.

Définition 1.5.3. ***(Opérateur maximal monotone)***

Un opérateur monotone A de H est dit maximal monotone s'il est maximal par les opérateurs monotones, ordonnés par l'inclusion des graphes dans $H \times H$

Proposition 1.5.4.
Un opérateur monotone A est dit maximal si et seulement si

$$\forall (x,y) \in H \times H : \quad \langle y - y_1, x - x_1 \rangle \geq 0, \quad \forall [x_1, y_1] \in A \Longrightarrow [x,y] \in A. \tag{1.2}$$

Proposition 1.5.5.
Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur multivoque. Alors A est maximal monotone si et seulement si, A est monotone et pour tous $x, y \in H$ telle que $\langle y - \eta, x - \xi \rangle \geq 0$ pour tout $\xi \in D(A)$ et pour tout $\eta \in A\xi$, alors, $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.

Proposition 1.5.6.
Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur multivoque. Si A est maximal monotone, alors pour tout $x \in D(A)$, l'ensemble Ax est convexe fermé dans H.

Définition 1.5.7.
Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone. On sait que, pour tout $x \in D(A)$, Ax est un ensemble convexe fermé non vide de H (Proposition1.5.6).Par le Théorème de Projection, il existe un élément unique $x' \in Ax$ qui est la projection de 0 sur Ax ,i.e.,

$$x' = Proj_{Ax}(0), \quad \|x'\| = \inf_{y \in Ax} \|y\| = d(0, A(x)).$$

Dans toute la suite, cet élément sera notée, $A^0(x)$, i.e., $A^0(x)$ est l'élément de norme minimale de Ax.

Lemme 1.5.8.
Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n un opérateur maximal monotone tel que $dis(A_n, A) \longrightarrow 0$ pour un opérateur maximal monotone A. Supposons aussi que $x_n \in D(A_n)$ avec $x_n \longrightarrow x$ et que $y_n \in A_n x_n$ avec $y_n \rightharpoonup y$ faiblement pour $x, y \in H$. Alors $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.

Définition 1.5.9.
Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur monotone et $\lambda > 0$. Alors

1. *l'opérateur J_λ^A défini par*

$$J_\lambda^A := (I_H + \lambda A)^{-1},$$

est appelé la résolvante de A.

2. *L'opérateur A_λ défini par*
$$A_\lambda := \frac{1}{\lambda}(I_H - J_\lambda^A),$$
est appelé l'approximation Yosida de A.

Proposition 1.5.10.
Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur monotone et $\lambda > 0$. Alors

1. *la résolvante J_λ^A est univoque non-expansive, c'est à dire*
$$\|J_\lambda^A x - J_\lambda^A y\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in H.$$
De plus, $J_\lambda^A(x) \to x(\lambda \downarrow 0)$, pour chaque $x \in \overline{D(A)}$;
2. *$J_\lambda^A x \in D(A)$, et $A_\lambda(x) \in A(J_\lambda^A x)$, pour tout $x \in H$;*
3. *$\|A_\lambda(x)\| \leq \|A^0(x)\| = \inf\limits_{y \in A(x)} \|y\|$, pour chaque $x \in D(A)$.*

Définition 1.5.11.
Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$un opérateur maximal monotone. On appelle section principale de A, tout opérateur univoque $A' \subset A$ avec $D(A) = D(A')$ et tel que pour tout $(x, y) \in D(A) \times H$, l'inégalité
$$\langle A'(\xi) - y, \xi - x\rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in D(A),$$
implique que $x \in D(A)$ et $y \in Ax$, i.e., $[x, y] \in A$.

Proposition 1.5.12.
Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone, alors l'opérateur A^0 est une section principale de A.

1.5.2 Distance de Vladimirov entre des opérateurs maximaux monotones

Nous définissons la pseudo distance entre deux opérateurs maximaux monotones A et B dite de Vladimirov, se référer à [23, 30].

Définition 1.5.13.

Soient A et B deux opérateurs maximaux monotones définis sur un espace de Hilbert dans lui même. On définit la pseudo distance de Vladimirov entre A et B par

$$dis(A,B) := \sup\left\{\frac{\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1\rangle}{1+\|y_1\|+\|y_2\|},\ x_1 \in D(A),\ y_1 \in Ax_1,\ x_2 \in D(B), y_2 \in Bx_2\right\}.$$

Remarque.

• *La distance $dis(.,.)$ peut prendre la valeur $+\infty$.*

• *La distance $dis(.,.)$ n'est pas une métrique, car en général l'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite.*

Lemme 1.5.14.

Soient A, B deux opérateurs maximaux monotones définis sur un espace de Hilbert dans lui même. Alors

$$dis(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B,$$

et $dis(A,B) = dis(B,A)$.

Lemme 1.5.15.

Soient A, B deux opérateurs maximaux monotones. Alors pour tout $\lambda > 0$ et $x \in D(A)$

$$\|x - J_\lambda^B(x)\| \leq \lambda\|A^0(x)\| + dis(A,B) + \sqrt{\lambda(1+\|A^0(x)\|)dis(A,B)}.$$

Lemme 1.5.16.

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n un opérateur maximal monotone tel que $dis(A_n, A) \to 0$ pour un opérateur maximal monotone A. Supposons aussi que $\eta_n \in D(A_n)$ avec $\eta_n \to \eta$ pour $\eta \in D(A)$ et tel que $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|A_n^0\eta_n\| < +\infty$. Alors, il existe une suite (ξ_n) tel que

$$\xi_n \in D(A_n), \quad \xi_n \to \eta \quad et \quad A_n^0\xi_n \to A^0\eta. \tag{1.3}$$

Plus précisément, on peut prendre $\xi_n = J_{\lambda_n}^{A_n}$ avec

$$\lambda_n = \Big(|\eta_n - \eta|+dis(A_n,A)\Big)^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

En particulier, si $dis(A_n, A) \to 0$ et $\|A_n^0 x\| \leq c(1+\|x\|)$ pour $c > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et

$x \in D(A_n)$, alors pour tout $\eta \in D(A)$, il existe une suite (ξ_n) tel que (1.3) soit satisfaite.

1.6 Théorème de Lyapunov

Le résultat de cette section est pris de références [14] et [16].

Théorème 1.6.1.
Soient $f_1, f_2, ..., f_n$ des fonctions intégrables définies de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et $p_1, ..., p_n$ des fonctions mesurables vérifiant

$$0 \leq p_i(t) \leq 1 \quad et \quad \sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1, \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Alors, il existe une suite d'ensembles mesurables (A_i) formant une partition de $[\alpha, \beta]$, telle que

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{[\alpha,\beta]} \chi_{A_i}(t) f_i(t) dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{[\alpha,\beta]} p_i(t) f_i(t) dt.$$

Chapitre 2

Résultat d'existence de solution pour une inclusion différentielle avec perturbation à valeurs convexes

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente un résultat d'existence de solutions absolument continues pour une inclusion différentielle du premier ordre avec perturbation multivoque scalairement semi continue supérieurement à valeurs convexes et faiblement compactes de la forme suivante

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases}-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t, u(t)) & p.p.\ t \in I,\\ u(0) = u_0 \in D(A(0)).\end{cases}$$

Notre étude est menée dans H un espace de Hilbert séparable et $I = [0, T](T \in \mathbb{R}_+^*)$.

2.2 Le résultat principal du chapitre

On donne maintenant le résultat principale de ce chapitre qui est un cas particulier du Théorème 3.6 dans [5] (en prenant $f = 0$) .
Ce résultats est établi sous les hypothèses suivantes
• Hypothèse sur l'opérateur A
$\mathcal{A}_1$) Il existe une constante positive c telle que

$$\|A^0(t, x)\| \leq c(1 + \|x\|) \qquad t \in I, x \in D(A(t)). \tag{2.1}$$

$\mathcal{A}_2$) $t \longmapsto A(t)$ est à variation absolument continue, c-à-d il existe une fonction $\beta \in W^{1,1}(I, \mathbb{R})$ positive sur I et croissante avec $\beta(T) < +\infty$ et, $\beta(0) = 0$, tel que

$$dis(A(t), A(s)) \leq |\beta(t) - \beta(s)|, \qquad \forall t, s \in I. \tag{2.2}$$

$\mathcal{A}_3$) A est à valeurs coniques, c-à-d pour tout $t \in I$ et pour chaque $x \in D(A(t))$, $A(t)x$ est un cône.
• Hypothèse sur la multi-application F
$\mathcal{F}_1$) Pour tout $t \in I$, $F(t, \cdot)$ est scalairement semi-continue supérieurement sur H, c'est-à-dire, pour tout $t \in I$ et pour chaque $e \in H$, l'application d'appui $\delta^*(e, F(t, \cdot))$ est semi continue supérieurement (s.c.s) sur H.
$\mathcal{F}_2$) F est scalairement $(\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(H))$-mesurable, c'est-à-dire, pour tout $t \in I$ pour chaque $e \in H$, l'application d'appui $\delta^*(e, F(t, \cdot))$ est $(\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(H))$-mesurable.

$\mathcal{F}_3$) F satisfait la condition suivante

$$Proj_{F(t,x)}(0) \subset (1 + \|x\|)C, \qquad \forall (t,x) \in I \times H, \tag{2.3}$$

où C est un sous ensemble compact de H.

Théorème 2.2.1.

Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$, un opérateur maximal monotone vérifiant ($\mathcal{A}_1$), ($\mathcal{A}_2$) et ($\mathcal{A}_3$). Soit $F : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides, convexes faiblement compactes satisfaisant ($\mathcal{F}_1$), ($\mathcal{F}_2$) et ($\mathcal{F}_3$).
Alors, pour tout $u_0 \in D(A(0))$ le problème

$$(\mathcal{P}_F) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t, u(t)) & p.p.\ t \in I, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

admet une solution u absolument continue.
De plus,

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t)) \quad p.p.\ t \in I,$$

pour une certaine constante positive K dépendant $\|u_0\|, c, T$ et β.

Démonstration.

- En suivant l'idée de la preuve du Théorème 3.6 dans [5].
- La démonstration se base sur la construction de suites approximantes via un algorithme bien adapté, dont nous allons montré la convergence vers la solution recherchée.

Étape 1 : Algorithme

On choisit une suite quelconque $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]0,1]$ décroissante vers 0, lorsque $n \to \infty$, et on considère aussi une partition quelconque de l'intervalle $[0,T]$ comme suit

$$0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_k^n = T.$$

Comme la fonction $t \longmapsto \beta(t)$ est absolument continue alors : $t \to \beta(t) + t$ est aussi absolument continue, on peut supposer que

$$|t_{i+1}^n - t_i^n| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} |\, \dot{\beta}(t) \,|\, dt \leq \varepsilon_n, \quad \text{pour} \quad i = 0, ..., k_n - 1. \tag{2.4}$$

On pose,

$$\delta_{i+1}^n = t_{i+1}^n - t_i^n, \quad \eta_{i+1}^n = \beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n) \quad \text{pour} \quad i = 0, ..., k_n - 1, \tag{2.5}$$

alors, l'inégalité (2.4) s'écrit sous la forme

$$\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n \leq \varepsilon_n \leq 1.$$

Grâce à la compacité de C, on peut supposer qu'il existe un réel positif L tel que $C \subset L\overline{B}_H$. De plus, on peut supposer sans perte de généralité, que C est convexe et contient 0, quitte à le remplacer par $\overline{co}(C \cup \{0\})$ qui est compact.
On définit l'application $m : I \times H \longrightarrow H$ par $m(t,x) = Proj_{F(t,x)}(0)$, pour tout $(t,x) \in I \times H$, c'est à dire $m(t,x)$ l'élément de norme minimale de $F(t,x)$.
Alors par (2.3)

$$m(t,x) \in F(t,x) \quad \text{et} \quad \|m(t,x)\| \leq L(1 + \|x\|) \quad \forall (t,x) \in I \times H \tag{2.6}$$

De plus par le Théorème 1.3.11 pour tout $x \in H$, l'application $t \longmapsto m(t,x)$ est $\mathcal{L}(I)$-mesurable.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit une application en escalier $u_n : I \to H$ continue à droite, comme suit :

$$u_n(t) = \begin{cases} u_0^n = u_0 \quad \text{pour} \quad t \in [0, t_1^n[\\ u_i^n \quad \text{pour} \quad i = 1, ..., k_n, \; t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[\\ u_{k_n}^n \quad \text{pour } t = T, \end{cases} \tag{2.7}$$

où, pour tout $i = 0, 1, ..., k_n - 1$

$$u_{i+1}^n = J_{i+1}^n \left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} m(s, u_i^n) ds \right) \tag{2.8}$$

$$:= (I_H + (\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) A(t_{i+1}^n))^{-1} \left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} m(s, u_i^n) ds \right). \tag{2.9}$$

c-à-d, $J_{i+1}^n \left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} m(s, u_i^n) ds \right) = J_{(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)}^{A(t_{i+1}^n)} \left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} m(s, u_i^n) ds \right)$.
Par la définition de la résolvante (Proposition 1.5.10 (2)), observons que

$$u_{i+1}^n \in D(A(t_{i+1}^n)), \tag{2.10}$$

et par (2.9)

$$\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} m(s, u_i^n) ds \right) \in (I_H + (\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) A(t_{i+1}^n)) u_{i+1}^n.$$

Implique que

$$\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} m(s, u_i^n) ds \right) \in (u_{i+1}^n + (\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) A(t_{i+1}^n) u_{i+1}^n),$$

i.e,

$$-\frac{1}{(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)} \left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} m(s, u_i^n) ds \right) = A_{(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)} \left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} m(s, u_i^n) ds \right)$$
$$\in A(t_{i+1}^n) u_{i+1}^n. \tag{2.11}$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application $v_n : I \longrightarrow H$ par

$$v_n(t) = \frac{(\beta(t) - \beta(t_i^n)) + (t - t_i^n)}{\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n} \left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} m(s, u_i^n) ds \right) + u_i^n - \int_{t_i^n}^{t} m(s, u_i^n) ds, \tag{2.12}$$

pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, $i = 0, 1, ..., k_n - 1$ et $v_n(T) = u_{k_n}^n$.
Il est clair que l'application v_n est absolument continue avec $v_n(t_i^n) = u_i^n$, et

$$\dot{v}_n(t) = \frac{\dot{\beta}(t) + 1}{\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n} \left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} m(s, u_i^n) ds \right) - m(t, u_i^n), \tag{2.13}$$

pour $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$, $i = 0, 1, ..., k_n - 1$.

Par conséquent, si on définit $\theta_n : I \longrightarrow I$ par

$$\theta_n(t) = \begin{cases} t_{i+1}^n & \text{pour} \quad t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[, \ i = 0, 1, ..., k_n - 1, \\ 0 & \text{pour} \quad t = 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

et $\varphi_n : I \longrightarrow I$ par

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} t_i^n & \text{pour} \quad t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[, \ i = 0, 1, ..., k_n - 1, \\ 0 & \text{pour} \quad t = 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Par $(\mathcal{A}_3)$ et (2.13), l'inégalité (2.11) devient

$$\begin{aligned} -\dot{v}_n(t) - m(t, v_n(\varphi_n(t))) =& \frac{-(\dot{\beta}(t)+1)}{\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n}\left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} m(s, u_i^n) ds\right) \\ &\in A(\theta_n(t)) v_n(\theta_n(t)), \ p.p. \ t \in I. \end{aligned} \tag{2.16}$$

et pour tout $t \in I$,

$$z_n(t) = m(t, v_n(\varphi_n(t))) \in F(t, v_n(\varphi_n(t))). \tag{2.17}$$

Étape 2 : Estimations et convergence des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$

On montre dans cette étape que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées en norme et en variation. Nous avons, $dis(A(t_{i+1}^n), A(t_i^n)) \leq |\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)| \leq \eta_{i+1}^n$ pour $i = 0, 1, ..., k_n - 1$ (voir $(\mathcal{A}_2)$ et (2.5)) et par (2.8), (2.1), (2.6) , la Proposition 1.5.10 et le Lemme 1.5.15 nous avons

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &= \|J_{i+1}^n\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} m(s, u_i^n)ds\right) - u_i^n\| \\
&= \|J_{i+1}^n\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} m(s, u_i^n)ds\right) - J_{i+1}^n(u_i^n) + J_{i+1}^n(u_i^n) - u_i^n\| \\
&\leq \|J_{i+1}^n\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} m(s, u_i^n)ds\right) - J_{i+1}^n(u_i^n)\| + \|J_{i+1}^n(u_i^n) - u_i^n\| \\
&\leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|m(s, u_i^n)\|ds + (\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)\|A^0(t_i^n, u_i^n)\| + dis(A(t_{i+1}^n), A(t_i^n)) \\
&+ \sqrt{(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)(1 + \|A^0(t_i^n, u_i^n)\|)dis(A(t_{i+1}^n), A(t_i^n))} \\
&\leq L(1 + \|u_i^n\|)\delta_{i+1}^n + c(1 + \|u_i^n\|)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) + \eta_{i+1}^n \\
&+ \sqrt{(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)(1 + c(1 + \|u_i^n\|))\eta_{i+1}^n} \\
&\leq L(1 + \|u_i^n\|)\delta_{i+1}^n + c(1 + \|u_i^n\|)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) \\
&+ \eta_{i+1}^n + \sqrt{(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)(1 + c(1 + \|u_i^n\|))\eta_{i+1}^n} \\
&+ \delta_{i+1}^n + L(1 + \|u_i^n\|)\eta_{i+1}^n \\
&\leq (1 + c(1 + \|u_i^n\|))(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) + L(1 + \|u_i^n\|)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) \\
&+ \sqrt{(1 + c(1 + \|u_i^n\|))(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)^2} \\
&\leq (1 + c(1 + \|u_i^n\|))(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) + L(1 + \|u_i^n\|)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) \\
&+ \sqrt{(1 + c(1 + \|u_i^n\|))^2(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)^2} \\
&= 2\left(1 + c(1 + \|u_i^n\|)\right)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) + L(1 + \|u_i^n\|)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) \\
&= \left(2 + (2c + L)(1 + \|u_i^n\|)\right)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq \left((2 + 2c + L) + (2c + L)\|u_i^n\|\right)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n), \tag{2.18}$$

par suite,

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n\| &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \|u_i^n\| \\
&= \left(1 + (2c + L)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)\right)\|u_i^n\| + (2 + 2c + L)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n).
\end{aligned}$$

Par le Lemme 1.4.13, on trouve pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_i^n\| \leq \left(\|u_0\| + (2+L+2c)\sum_{k=0}^{i-1}(\delta_{k+1}^n + \eta_{k+1}^n)\right).\exp\left((2c+L)\sum_{k=0}^{i-1}(\delta_{k+1}^n + \eta_{k+1}^n)\right).$$

Comme

$$\sum_{k=0}^{i-1}\delta_{k+1}^n = t_i^n - t_0^n = t_i^n \leq T.$$

Et aussi,

$$\sum_{k=0}^{i-1}\eta_{k+1}^n = \beta(t_i^n) - \beta(t_0^n) = \beta(t_i^n) \leq \beta(T).$$

Alors,

$$\|u_i^n\| \leq \left(\|u_0\| + (2+L+2c)(T+\beta(T))\right)\exp\left((2c+L)(T+\beta(T))\right) =: K_1, \tag{2.19}$$

grâce à cette inégalité, l'estimation (2.18) sera

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq ((2+2c+L)+(2c+L)K_1)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) =: K_2(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n). \tag{2.20}$$

Posons $K = \max(K_1, K_2)$, on conclut que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{t\in I}\|u_n(t)\| \leq K \quad \text{et} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} var(u_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i=0}^{k_n-1}\|u_{i+1}^n - u_i^n\|\right) \leq K(T+\beta(T)). \tag{2.21}$$

Alors, la suite (u_n) est bornée en norme et en variation. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq K\Big((\beta(t)-\beta(s)) + (t-s) + \varepsilon_n\Big). \tag{2.22}$$

En effet, fixons $s \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$ et $t \in [t_j^n, t_{j+1}^n[$ avec $i < j$. Par (2.20), (2.21) et le fait que β est croissante i.e.,

$$s < t_{i+1}^n \text{ alors } \quad \beta(s) < \beta(t_{i+1}^n), \quad \text{et} \quad t > t_j^n \quad \text{alors} \quad \beta(t) > \beta(t_j^n)$$

On obtient ;

$$\begin{aligned}
\|u_n(t)-u_n(s)\| &= \|u_j^n - u_i^n\| \\
&= \|u_j^n - u_{j-1}^n + u_{j-1}^n + \ldots - u_{i+1}^n + u_{i+1}^n - u_i^n\| \\
&\leq \|u_j^n - u_{j-1}^n\| + \ldots + \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{j-i-1} \|u_{i+k+1}^n - u_{i+k}^n\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{j-i-1} K(\delta_{i+k+1}^n + \eta_{i+k+1}^n) \\
&\leq K \sum_{k=0}^{j-i-1} \Big(\beta(t_{i+k+1}^n) - \beta(t_{i+k}^n) + (t_{i+k+1}^n - t_{i+k}^n)\Big) \\
&= K\Big((\beta(t_j^n) - \beta(t_i^n)) + (t_j^n - t_i^n)\Big) \\
&\leq K\Big(\beta(t) - \beta(t_i^n)) + (t - t_i^n)\Big) \\
&\leq K\Big(\beta(t) - \beta(s)) + (\beta(s) - \beta(t_i^n)) + (t-s) + (s - t_i^n)\Big) \\
&\leq K\Big((\beta(t) - \beta(s)) + (t-s) + (\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)) + (t_{i+1}^n - t_i^n)\Big) \\
&\overset{(2.4)}{\leq} K\Big(\big(\beta(t) - \beta(s)\big) + (t-s) + \varepsilon_n\Big).
\end{aligned}$$

On conclut que, $(u_n)_n$ est uniformément bornée, en norme et en variation.
D'après le Théorème 1.1.20, par extraction d'une suite on peut supposer qu'il existe une sous suite (notée aussi $(u_n)_n$) telle que $(u_n(t))_n$ converge faiblement vers une application à variation bornée $u : I \longrightarrow H$ i.e.,

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad t \in I, \tag{2.23}$$

en particulier on a $u(0) = u_0$.
En effet, $(u_n(t))_n$ converge faiblement vers $u(t)$ pour tout $t \in I$, i.e., pour tout $x \in H$

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n(t) - u(t), x\rangle = 0,$$

en particulier pour $t = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n(0) - u(0), x\rangle = 0,$$

et par définition (2.7) on obtient,

$$\langle u_0 - u(0), x\rangle = 0.$$

Pour $x = u_0 - u(0)$, on obtient

$$\langle u_0 - u(0), u_0 - u(0)\rangle = 0.$$

On conclut $u(0) = u_0$.

De plus, en prenant la limite inférieure dans (2.22), on obtient pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$, grâce à la Proposition 1.1.13,

$$\|u(t) - u(s)\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n(t) - u_n(s)\| \leq K((t-s) + \beta(t) - \beta(s)). \tag{2.24}$$

Par conséquent, u est absolument continue, plus précisément $u \in W^{1,1}(I, H)$.

Maintenant, on peut prouver que la suite $(v_n)_n$ est aussi bornée en norme et en variation. En effet, par les inégalités (2.6), (2.12), (2.19), (2.20) et (2.21) nous avons pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, $\beta(t) < \beta(t_{i+1}^n)$ et $t < t_{i+1}^n$

$$|\beta(t) - \beta(t_i^n) + t - t_i^n| \leq |\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n) + t_{i+1}^n - t_i^n|$$

c-à-d,

$$\left|\frac{\beta(t) - \beta(t_i^n) + t - t_i^n}{\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n) + t_{i+1}^n - t_i^n}\right| \leq 1,$$

et

$$\int_{t_i^n}^{t} \|m(s, u_i^n)\| ds = \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|m(s, u_i^n)\| ds - \int_{t}^{t_{i+1}^n} \|m(s, u_i^n)\| ds \leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|m(s, u_i^n)\| ds.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
\|v_n(t)\| &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|m(s, u_i^n)\| ds + \|u_i^n\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|m(s, u_i^n)\| ds \\
&\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \|u_i^n\| + 2 \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|m(s, u_i^n)\| ds \qquad (2.25) \\
&\leq K_2(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) + K_1 + 2L(1 + K_1)(t_{i+1}^n - t_i^n) \\
&\leq K\varepsilon_n + K + 2L(1 + K)\delta_{i+1}^n \\
&\leq K + K + 2L(1 + K) \\
&\leq 2K + 2L(1 + K) := M_1. \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

De plus, par (2.20)

$$\|v_n(t_{i+1}^n) - v_n(t_i^n)\| = \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq K(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n). \qquad (2.27)$$

Posons $M' = max(M_1, K)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}} \|v_n\|_C \leq M' \quad \text{et} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} var(v_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} var(u_n) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{k_n-1} \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \right) \\
&\leq K(T + \beta(T)) \\
&\leq M'(T + \beta(T)). \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

De plus, on a pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\begin{aligned}
\|v_n(t) - u_n(t)\| = \|v_n(t) - u_i^n\| &\overset{(2.25)}{\leq} \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + 2 \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|m(s, u_i^n)\| ds \\
&\overset{(2.6)}{\leq} \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + 2L(1 + \|u_i^n\|)(t_{i+1}^n - t_i^n) \\
&\overset{(2.20)}{\leq} K(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) + 2L(1 + K)\varepsilon_n \\
&\leq (K + 2L(1 + K))\varepsilon_n =: N\varepsilon_n \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

Les inégalités (2.22), (2.29) donnent pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned}\|v_n(t) - v_n(s)\| &\leq \|v_n(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u_n(s)\| + \|u_n(s) - v_n(s)\| \\ &\leq 2N\varepsilon_n + K\Big((\beta(t) - \beta(s)) + (t-s) + \varepsilon_n\Big) \\ &= K\Big((\beta(t) - \beta(s)) + (t-s)\Big) + (2N+K)\varepsilon_n. \end{aligned} \tag{2.30}$$

De plus par (2.4), (2.30) on conclut que pour tout $t \in I$

$$\|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| \leq 2(N+K)\varepsilon_n \quad \text{et} \quad \|v_n(\varphi_n(t)) - v_n(t)\| \leq 2(N+K)\varepsilon_n. \tag{2.31}$$

D'autre part, comme la suite (v_n) est uniformément bornée en norme et en variation, alors par Théorème 1.1.20, on peut lui extraire une sous suite (notée aussi (v_n)) telle que (v_n) converge faiblement dans H.
Par (2.29), (2.23), pour tout $\eta \in H$ on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \Big|\langle v_n(t) - u(t), \eta\rangle\Big| &= \lim_{n\to\infty} \Big|\langle v_n(t) - u_n(t), \eta\rangle + \langle u_n(t) - u(t), \eta\rangle\Big| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} N\varepsilon_n\|\eta\| = 0\end{aligned}$$

D'où,

$$v_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad t \in I. \tag{2.32}$$

De plus, par (2.13) pour tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$ nous avons

$$\begin{aligned}\|\dot{v}_n(t)\| &= \left\| \frac{(\dot{\beta}(t)+1)}{\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n}\left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} m(s, u_i^n)ds\right) - m(t, u_i^n)\right\| \\ &\leq \frac{(\dot{\beta}(t)+1)}{\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n}\left(\|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|m(s, u_i^n)\|ds\right) + \|m(t, u_i^n)\|,\end{aligned}$$

et par (2.6), (2.20) on obtient

$$\begin{aligned}\|\dot{v}_n(t)\| &\leq \frac{(\dot{\beta}(t)+1)}{\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n}\left(K(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) + L(1 + \|u_i^n\|)\delta_{i+1}^n\right) + L(1 + \|u_i^n\|) \\ &\overset{(2.19)}{\leq} (\dot{\beta}(t)+1)\Big(K + L(1+K)\Big) + L(1+K) =: \beta_1(t).\end{aligned} \tag{2.33}$$

c'est-à-dire, la suite $(\dot{v}_n)$ est intégrablement bornée, i.e., il existe une fonction $\beta_1 \in L^1(I, H)$, telle que

$$\|\dot{v}_n(t)\| \leq \beta_1(t) \qquad p.p.\ t \in I, \tag{2.34}$$

et puisque $\beta_1(.)$ est une fonction strictement positive, on trouve

$$\frac{\|\dot{v}_n(t)\|}{\beta_1(t)} \leq 1 \qquad p.p.\ t \in I.$$

En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $t \in I$, $k_n(t) = \dfrac{\dot{v}_n(t)}{\beta_1(t)}$.
On a $k_n \in \overline{B}_{L^\infty}$. Donc, par le Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki (voir le Théorème 1.4.11), $\overline{B}_{L^\infty}$ est faiblement* compacte, on peut extraire à $(k_n(.))$ une sous suite, notée aussi $(k_n(.))$ qui converge faiblement* vers un élément $k(.) \in \overline{B}_{L^\infty}$.
D'où, pour tout $y(.) \in L^1(I, H)$, on obtient

$$\int_0^T \langle k_n(\tau), y(\tau)\rangle d\tau \longrightarrow \int_0^T \langle k(\tau), y(\tau)\rangle d\tau.$$

Pour tout $z(.) \in L^\infty(I, H)$, comme $\beta_1(.) \in L^1(I, \mathbb{R})$ l'application $\beta_1(.)z(.) \in L^1(I, H)$, donc

$$\int_0^T \langle k_n(\tau), \beta_1(\tau)z(\tau)\rangle d\tau \longrightarrow \int_0^T \langle k(\tau), \beta_1(\tau)z(\tau)\rangle d\tau,$$

par suite,

$$\int_0^T \langle \dot{v}_n(\tau), z(\tau)\rangle d\tau \longrightarrow \int_0^T \langle \beta_1(\tau)k(\tau), z(\tau)\rangle d\tau.$$

En posant $w(.) = \beta_1(.)k(.)$, la suite $(\dot{v}_n(.))$ converge faiblement dans $L^1(I, H)$ vers $w(.) \in L^1(I, H)$.
De plus, pour presque tout $t \in I$

$$\|w(t)\| = \beta_1(t)\|k(t)\| \leq \beta_1(t).$$

Donc, pour tout $\xi \in L^\infty(I, H)$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \dot{v}_n, \xi\rangle = \langle w, \xi\rangle,$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \langle \dot{v}_n(\tau), \xi(\tau)\rangle d\tau = \int_0^T \langle w(\tau), \xi(\tau)\rangle d\tau,$$

en prenant $\xi = x.\chi_{]0,t]}$ pour $x \in H$ et $t \in I$, il est bien clair que $\xi \in L^\infty(I, H)$ et

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \langle \dot{v}_n(\tau), x.\chi_{]0,t]}(\tau)\rangle d\tau = \int_0^T \langle w(\tau), x.\chi_{]0,t]}(\tau)\rangle d\tau,$$

donc, par Théorème 1.3.17

$$\lim_{n\to\infty}\Big\langle x, \int_0^t \dot{v}_n(\tau)d\tau\Big\rangle = \Big\langle x, \int_0^t w(\tau)d\tau\Big\rangle,$$

i.e.,

$$\lim_{n\to\infty}\Big\langle x, v_n(t) - v_n(0)\Big\rangle = \Big\langle x, \int_0^t w(\tau)d\tau\Big\rangle,$$

(2.32) implique

$$\Big\langle x, u(t) - u(0)\Big\rangle = \Big\langle x, \int_0^t w(\tau)d\tau\Big\rangle.$$

Par conséquent $u(t) - u(0) = \int_0^t \omega(\tau)d\tau$. On conclut que $\dot{u} = w$ p.p. sur I et donc, $(\dot{v}_n)$ converge faiblement vers $\dot{u}$ dans $L^1(I, H)$.

Montrons maintenant que (v_n) converge uniformément vers u dans I.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $t \in I$, $z_n(t) = m(t, v_n(\varphi_n(t))) \in F(t, v_n(\varphi_n(t)))$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application $Z_n : I \longrightarrow H$ par

$$Z_n(t) = \int_0^t z_n(\tau)d\tau. \tag{2.35}$$

Grâce à (2.3), (2.6) et le fait que $C \subset L\overline{B}$, pour $t \in I$, on trouve

$$\begin{aligned}\|z_n(t)\| &\leq L(1 + \|v_n(\varphi_n(t))\|) \\ &\overset{(2.15)}{=} L(1 + \|v_n(t_i^n)\|) \\ &\overset{(2.13)}{=} L(1 + \|u_i^n\|) \\ &\overset{(2.19)}{\leq} L(1 + K) =: L_1 \end{aligned}\tag{2.36}$$

donc,

$$\|Z_n(t)\| \leq \int_0^t \|z_n(\tau)\| d\tau \leq L_1 T. \tag{2.37}$$

Tout d'abord, nous allons prouver que $(Z_n(.))_n$ admet une sous suite qui converge uniformément dans $C(I, H)$.

En effet, on a

$$z_n(t) = m(t, v_n(\varphi_n(t))) \in F(t, v_n(\varphi_n(t))), \tag{2.38}$$

et nous avons d'après $(\mathcal{F}_3)$

$$z_n(t) \in (1 + \|v_n(\varphi_n(t))\|)C \Longrightarrow \frac{z_n(t)}{1 + \|v_n(\varphi_n(t))\|} \in C.$$

Comme $1 + \|v_n(\varphi_n(t))\| = 1 + \|u_i^n\| \overset{(2.19)}{\leq} 1 + K$, et comme C est un convexe contenant 0.

$$\frac{1 + \|v_n(\varphi_n(t))\|}{1 + K} \cdot \frac{z_n(t)}{1 + \|v_n(\varphi_n(t))\|} + \left(1 - \frac{1 + \|v_n(\varphi_n(t))\|}{1 + K}\right) 0 \in C$$

d'où,

$$z_n(t) \in (1 + K)C, \quad \forall t \in I, \tag{2.39}$$

par suite,

$$\frac{z_n(t)}{1 + K} \in C, \quad \forall t \in I,$$

alors, comme C est convexe fermé, par Théorème 1.2.9, on a

$$\frac{\int_0^t z_n(\tau) d\tau}{\int_0^t (1 + K) d\tau} \in C \Longrightarrow Z_n(t) \in ((1 + K)t)C, \quad \forall t \in I$$

c'est-à-dire,

$$\frac{Z_n(t)}{(1 + K)t} \in C, \quad \forall t \in I, \tag{2.40}$$

D'autre part, $(1+K)t \leq (1+K)T$, c-à-d, $\dfrac{(1 + K)t}{(1 + K)T} \leq 1$, et comme $0 \in C$, par la convexité de C et la inclusion de (2.40), on obtient

$$\frac{(1 + K)t}{(1 + K)T} \cdot \frac{Z_n(t)}{(1 + K)t} + \left(1 - \frac{(1 + K)t}{(1 + K)T}\right) 0 \in C,$$

alors,

$$\frac{Z_n(t)}{(1+K)T} \in C, \quad \forall t \in I,$$

i.e,

$$Z_n(t) \in ((1+K)T)C, \quad \forall t \in I.$$

L'ensemble $((1+K)T)C$ étant compact, par conséquent $(Z_n(t))_n$ est relativement compacte. D'autre part, pour tous $t, s \in I$ telle que $0 \leq s \leq t \leq T$, par les relations (2.35) et (2.36) on trouve,

$$\begin{aligned}\|Z_n(t) - Z_n(s)\| &= \left\| \int_0^t z_n(\tau) d\tau - \int_0^s z_n(\tau) d\tau \right\| \\ &= \left\| \int_s^t z_n(\tau) d\tau \right\| \\ &\leq \int_s^t \|z_n(\tau)\| d\tau \\ &\leq L_1(t-s), \end{aligned} \tag{2.41}$$

c'est-à-dire (Z_n) est équicontinue
D'où, d'après le Théorème d'Arzelà-Ascoli (Théorème 1.4.12) $(Z_n(\cdot))_n$ admet une sous suite notée aussi $(Z_n(\cdot))_n$ convergeant uniformément vers une application $Z(\cdot) \in C(I, H)$.
En suite, on conclut que $(v_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $C(I, H)$.
En effet, fixons $n, m \in \mathbb{N}$. Grâce à (2.16) nous avons

$$-\dot{v}_n(t) - z_n(t) \in A\Big(\theta_n(t)\Big) v_n\Big(\theta_n(t)\Big) \quad \text{et} \quad -\dot{v}_m(t) - z_m(t) \in A\Big(\theta_m(t)\Big) v_m\Big(\theta_m(t)\Big).$$

Par la définition de la distance de Vladimirov, (Définition (1.5.13))

$$\begin{aligned}&\Big\langle v_n(\theta_n(t)) - v_m(\theta_m(t)), \dot{v}_n(t) + z_n(t) - \dot{v}_m(t) - z_m(t) \Big\rangle \\ &\leq \Big(1 + \|\dot{v}_n(t) + z_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t) + z_m(t)\|\Big) dis(A(\theta_n(t)), A(\theta_m(t))) \\ &\overset{(2.2)}{\leq} \Big(1 + \|\dot{v}_n(t)\| + \|z_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t)\| + \|z_m(t)\|\Big)\Big(|\beta(\theta_n(t)) - \beta(\theta_m(t))|\Big) \\ &\overset{(2.36)}{\leq} \Big(1 + \|\dot{v}_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t)\| + 2L_1\Big)\Big(|\beta(\theta_n(t)) - \beta(t)| + |\beta(\theta_m(t)) - \beta(t)|\Big) \\ &\overset{(2.4)}{\leq} \Big(1 + \|\dot{v}_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t)\| + 2L_1\Big)(\varepsilon_n + \varepsilon_m). \end{aligned} \tag{2.42}$$

On pose $\gamma_n = \max\{\varepsilon_n, \|Z_n(\cdot) - Z(\cdot)\|_C\}$, on trouve pour presque tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}
\|Z_n(\theta_n(t)) - Z_m(\theta_m(t))\| &= \|Z_n(\theta_n(t)) - Z_n(t) + Z_n(t) - Z(t) + Z(t) - Z_m(t) \\
&\quad + Z_m(t) - Z_m(\theta_m(t))\| \\
&\leq \|Z_n(\theta_n(t)) - Z_n(t)\| + \|Z_n(t) - Z(t)\| + \|Z(t) - Z_m(t)\| \\
&\quad + \|Z_m(t) - Z_m(\theta_m(t)) \\
&\overset{(2.35)}{\leq} \left\| \int_0^{\theta_n(t)} z_n(\tau) d\tau - \int_0^t z_n(\tau) d\tau \right\| + \|Z_n(t) - Z(t)\| \\
&\quad + \|Z(t) - Z_m(t)\| + \left\| \int_0^{\theta_m(t)} z_m(\tau) d\tau - \int_0^t z_m(\tau) d\tau \right\| \\
&\leq \left\| \int_t^{\theta_n(t)} z_n(\tau) d\tau \right\| + \|Z_n(t) - Z(t)\| + \|Z(t) - Z_m(t)\| \\
&\quad + \left\| \int_t^{\theta_m(t)} z_m(\tau) d\tau \right\| \\
&\leq \int_t^{\theta_n(t)} \|z_n(\tau)\| d\tau + \gamma_n + \gamma_m + \int_t^{\theta_m(t)} \|z_n(\tau)\| d\tau \\
&\overset{(2.41)}{\leq} L_1(\theta_n(t) - t) + \gamma_n + \gamma_m + L_1(\theta_m(t) - t) \\
&\leq L_1 \varepsilon_n + \gamma_n + \gamma_m + L_1 \varepsilon_m \\
&\leq L_1 \gamma_n + \gamma_n + \gamma_m + L_1 \gamma_m \\
&\leq (L_1 + 1)(\gamma_n + \gamma_m). \qquad (2.43)
\end{aligned}$$

Maintenant, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $w_n = v_n + Z_n$, nous avons pour presque tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
\|w_n(\theta_n(t)) - w_n(t)\| &= \|v_n(\theta_n(t)) + Z_n(\theta_n(t)) - v_n(t) - Z_n(t)\| \\
&= \|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t) + Z_n(\theta_n(t)) - Z_n(t)\| \\
&\leq \|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| + \|Z_n(\theta_n(t)) - Z_n(t)\| \\
&\overset{(2.31)}{\leq} 2(N + K)\varepsilon_n + \left\| \int_0^{\theta_n(t)} z_n(\tau) d\tau - \int_0^t z_n(\tau) d\tau \right\| \\
&= 2(N + K)\varepsilon_n + \left\| \int_t^{\theta_n(t)} z_n(\tau) d\tau \right\| \\
&\leq 2(N + K)\varepsilon_n + \int_t^{\theta_n(t)} \|z_n(\tau)\| d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|w_n(\theta_n(t)) - w_n(t)\| &\overset{(2.41)}{\leq} 2(N+K)\varepsilon_n + L_1(\theta_n(t) - t) \\
&\leq 2(N+K)\varepsilon_n + L_1\varepsilon_n \\
&= (2(N+K) + L_1)\varepsilon_n, \qquad (2.44)
\end{aligned}$$

$\|w_n(\theta_n(t)) - w_n(t)\| \longrightarrow 0$, lorsque $n \longrightarrow \infty$.
De Plus, par (2.26), (2.37)

$$\begin{aligned}
\|w_n(t)\| &= \|v_n(t) + Z_n(t)\| \\
&\leq \|v_n(t)\| + \|Z_n(t)\| \\
&\leq M_1 + L_1 T. \qquad (2.45)
\end{aligned}$$

En utilisant les relations (2.42), (2.43) et (2.44) on peut écrire, pour $t \in]0, T]$,

$$\begin{aligned}
&\Big\langle w_n(t) - w_m(t), \dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t) \Big\rangle \\
&= \Big\langle w_n(t) - w_n(\theta_n(t)) + w_n(\theta_n(t)) - w_m(\theta_m(t) + w_m(\theta_m(t)) - w_m(t), \dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t) \Big\rangle \\
&= \Big\langle w_n(t) - w_n(\theta_n(t)), \dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t) \Big\rangle - \Big\langle w_m(t) - w_m(\theta_m(t)), \dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t) \Big\rangle \\
&+ \Big\langle w_n(\theta_n(t)) - w_m(\theta_m(t)), \dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t) \Big\rangle \\
&\leq \|\dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t)\| \Big(\|w_n(t) - w_n(\theta_n(t))\| + \|w_m(t) - w_m(\theta_m(t))\| \Big) \\
&+ \Big\langle v_n(\theta_n(t)) - v_m(\theta_m(t)), \dot{v}_n(t) + z_n(t) + \dot{v}_m(t) - z_m(t) \Big\rangle \\
&+ \Big\langle Z_n(\theta_n(t)) - Z_m(\theta_m(t)), \dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t) \Big\rangle \\
&\leq \Big(\|\dot{w}_n(t)\| + \|\dot{w}_m(t)\| \Big) \Big(2(N+K) + L_1 \Big) (\varepsilon_n + \varepsilon_m) \\
&+ \Big(1 + \|\dot{v}_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t)\| + 2L_1 \Big) (\varepsilon_n + \varepsilon_m) \\
&+ \|Z_n(\theta_n(t)) - Z_m(\theta_m(t))\| \|\dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t)\|
\end{aligned}$$

$$\Big\langle w_n(t)-w_m(t),\dot{w}_n(t)-\dot{w}_m(t)\Big\rangle \leq \Big(\|\dot{w}_n(t)\|+\|\dot{w}_m(t)\|\Big)\Big(2(N+K)+L_1\Big)(\varepsilon_n+\varepsilon_m) + \Big(1+\|\dot{v}_n(t)\|+\|\dot{v}_m(t)\|+2L_1\Big)(\varepsilon_n+\varepsilon_m) + \Big(\|\dot{w}_n(t)\|+\|\dot{w}_m(t)\|\Big)(L_1+1)(\gamma_n+\gamma_m). \tag{2.46}$$

On obtient,

$$\Big\langle w_n(t)-w_m(t),\dot{w}_n(t)-\dot{w}_m(t)\Big\rangle \leq \Theta_{n,m}(t). \tag{2.47}$$

Où,

$$\Theta_{n,m}(t) = \Big(\|\dot{w}_n(t)\|+\|\dot{w}_m(t)\|\Big)\Big(\|w_n(\theta_n(t))-w_n(t)\|+\|w_m(\theta_m(t))-w_m(t)\|\Big) + \Big(1+\|\dot{v}_n(t)\|+\|\dot{v}_m(t)\|+2L_1)(\varepsilon_n+\varepsilon_m) + \Big(\|\dot{w}_n(t)\|+\|\dot{w}_m(t)\|\Big)(L_1+1)(\gamma_n+\gamma_m). \tag{2.48}$$

Nous avons,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \Theta_{n,m}(\tau)d\tau &= \int_0^T \Big(\|\dot{w}_n(\tau)\|+\|\dot{w}_m(\tau)\|\Big)\Big(\|w_n(\theta_n(\tau))-w_n(\tau)\|+\|w_m(\theta_m(\tau))-w_m(\tau)\|\Big)d\tau \\
&+ \int_0^T \Big(1+\|\dot{v}_n(\tau)\|+\|\dot{v}_m(\tau)\|+2L_1\Big)(\varepsilon_n+\varepsilon_m)d\tau \\
&+ \int_0^T \Big(\|\dot{w}_n(\tau)\|+\|\dot{w}_m(\tau)\|\Big)\Big((L_1+1)(\gamma_n+\gamma_m)\Big)d\tau \\
&\overset{(2.44)}{\leq} \int_0^T \Big(\|\dot{w}_n(\tau)\|+\|\dot{w}_m(\tau)\|\Big)\Big((2(N+K)+L_1)(\varepsilon_n+\varepsilon_m)\Big)d\tau \\
&+ \int_0^T \Big(1+\|\dot{v}_n(\tau)\|+\|\dot{v}_m(\tau)\|+2L_1\Big)(\varepsilon_n+\varepsilon_m)d\tau \\
&+ \int_0^T \Big(\|\dot{w}_n(\tau)\|+\|\dot{w}_m(\tau)\|\Big)\Big((L_1+1)(\gamma_n+\gamma_m)\Big)d\tau \\
&= \Big((2(N+K)+L_1)(\varepsilon_n+\varepsilon_m)\Big)\Big(\|\dot{w}_n\|_{L_1}+\|\dot{w}_m\|_{L_1}\Big) \\
&+ (\varepsilon_n+\varepsilon_m)\Big(T+\|\dot{v}_n\|_{L_1}+\|\dot{v}_m\|_{L_1}+2L_1T\Big) \\
&+ \Big((L_1+1)(\gamma_n+\gamma_m)\Big)\Big(\|\dot{w}_n\|_{L_1}+\|\dot{w}_m\|_{L_1}\Big)
\end{aligned}$$

$$\int_0^T \Theta_{n,m}(\tau)d\tau = \Bigg((2(N+K)+L_1)(\varepsilon_n+\varepsilon_m)+(L_1+1)(\gamma_n+\gamma_m)\Bigg)\Bigg(\|\dot{w}_n\|_{L_1}+\|\dot{w}_m\|_{L_1}\Bigg)$$
$$+\Bigg((2L_1+1)T+\|\dot{v}_n\|_{L_1}+\|\dot{v}_m\|_{L_1}\Bigg)(\varepsilon_n+\varepsilon_m),$$

par (2.28), on trouve pour tout $t\in]t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\|\dot{v}_n\|_{L^1} = \int_0^T \|\dot{v}_n\|dt = \sum_{i=0}^{k_n-1}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\|\dot{v}_n\|dt = var(v_n, I) \leq M'(T+\beta(T)). \tag{2.49}$$

Par conséquent, la suite $(\dot{v}_n)$ est bornée dans $L^1(I,H)$.
Alors par (2.49),(2.36) Les suite $(\dot{v}_n)$, $(\dot{\omega}_n)$ sont bornées dans $L^1(I,H)$, on conclut que

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_0^T \Theta_{n,m}(\tau)d\tau = 0. \tag{2.50}$$

Alors, par (2.47) et en plus on applique la formule de Moreau $d\|\psi\|^2 = 2\langle\psi, d\psi\rangle$, avec $\psi = w_n - w_m$, $d\psi = dw_n - dw_m$ et $w_n(0) = w_m(0) = u_0$, pour presque tout $t\in I$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|w_n(t)-w_m(t)\|^2 &= \frac{1}{2}\Bigg(\|\psi(t)\|^2 - \|\psi(0)\|^2\Bigg)\\ &= \frac{1}{2}\int_0^t d\|\psi(\tau)\|^2 d\tau\\ &\leq \int_0^t \langle\psi(\tau), d\psi(\tau)\rangle\\ &= \int_0^t \Big\langle w_n(\tau)-w_m(\tau), \dot{w}_n(\tau)-\dot{w}_m(\tau)\Big\rangle d\tau\\ &\leq \int_0^T \Theta_{n,m}(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\|w_n(t)-w_m(t)\|^2 \leq 2\int_0^T \Theta_{n,m}(s)ds.$$

Alors,

$$\|w_n(t)-w_m(t)\|_C^2 \leq 2\int_0^T \Theta_{n,m}(s)ds.$$

D'où, grâce à (2.50), (w_n) est une suite de Cauchy dans $C(I,H)$, donc elle converge uniformément vers une application $w\in C(I,H)$. Par conséquent, (v_n) converge uniformément

et fortement vers l'application $w - Z$. Par la relation (2.32) $v_n(t) \rightharpoonup u(t)$ donc, $u = w - Z$, c'est-à-dire, (v_n) converge uniformément et fortement vers l'application absolument continue u, i.e. $\|v_n(.) - u(.)\|_C \longrightarrow 0$, lorsque $n \to \infty$.
Nous avons aussi par (2.29),

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u(t)\| &\leq \|u_n(t) - v_n(t)\| + \|v_n(t) - u(t)\| \\ &\leq N\varepsilon_n + \|v_n(t) - u(t)\| \\ &\longrightarrow 0, \quad \text{uniformement} \quad \text{sur} \quad I, \text{ lorsque} \quad n \longrightarrow \infty \end{aligned} \tag{2.51}$$

De plus, par (2.31) on obtient pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \|v_n(\theta_n(t)) - u(t)\| &\leq \|v_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\| \\ &\leq 2(N+K)\varepsilon_n + \|u_n(t) - u(t)\| \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque} \quad n \longrightarrow \infty, \end{aligned} \tag{2.52}$$

et

$$\begin{aligned} \|v_n(\varphi_n(t)) - u(t)\| &\leq \|v_n(\varphi_n(t)) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\| \\ &\leq 2(N+K)\varepsilon_n + \|u_n(t) - u(t)\| \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque} \quad n \longrightarrow \infty, \end{aligned} \tag{2.53}$$

De plus, il est clair que u est continue à variation bornée et $u(0) = u_0$.

Étape 3 : Existence de solution

Nous prouvons dans cette dernière étape que l'application u est une solution de notre problème $(\mathcal{P}_F)$.
Tout d'abord, prouvons que $u(t) \in D(A(t))$ pour tout $t \in I$.
En effet, soit pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : I \to I$ une application définie dans la page 34 par

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} t_i^n & \text{pour} \quad t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[, \\ T & \text{pour} \quad t = T, \\ 0 & \text{pour} \quad t = 0. \end{cases}$$

Nous avons par (2.10) ,$u_i^n \in D(A(t_i^n))$, D'autre part, on a par $(\mathcal{A}_2)$ pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} dis(A\Big(\varphi_n(t)\Big), A(t)) &= dis\Big(A(t_i^n) - A(t)\Big), \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\leq |\beta(t_i^n) - \beta(t)|, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\leq \varepsilon_n, \end{aligned}$$

i.e., $dis(A\Big(\varphi_n(t)\Big), A(t)) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$ pour tout $t \in I$.
Et par $(\mathcal{A}_1)$,

$$\begin{aligned} \|A^0\Big(\varphi_n(t), u_n(t)\Big)\| &\leq c(1 + \|u_n(t)\|) \\ &\overset{(2.21)}{\leq} c(1 + K), \quad \forall t \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

c'est à dire, la suite $(y_n)_n = \Big(A^0\Big(\varphi_n(t), u_n(t)\Big)\Big)_n$ est bornée, alors elle est faiblement relativement compact, on peut extraire une sous suite (notée aussi(y_n)) qui converge faiblement vers une application y.
De plus,

$$y_n = A^0(\varphi_n(t), u_n(t)) \in A(\varphi_n(t))u_n(t) = A_n x_n$$

donc par le Lemme 1.5.8 appliqué à $x_n = u_n(t) \longrightarrow u(t)$, on aura

$$u(t) \in D(A) = D(A(t)).$$

Maintenant, remarquons que la suite $(z_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1(I, H)$ par la relation (2.36) c-à-d (z_n) est équicontinue, par le Théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.4.12), (z_n) admet une sous suite notée aussi (z_n) converge uniformément vers une application $z(.)$.Donc, converge faiblement vers $z \in L^1(I, H)$.
Par le Théorème de Banach-Mazur (Théorème 1.4.8), il existe une suite $(\zeta_n(.))$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\zeta_n(.) \in co\{z_k(.); k \geq n\}$ et $(\zeta_n(.))$ converge fortement vers $z(.)$.
Ainsi, par le Théorème 1.4.2 on peut extraire une sous suite (ζ_{n_p}) de(ζ_n) convergeant vers z presque partout ,i.e., il existe un ensemble négligeable $N_0^{'}$ de I et une sous suite (n_p) de $\mathbb{N}$ tel que pour tout $t \in I \backslash N_0^{'}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_{n_p}(t) = z(t)$.

et, puisque $z_n(t) \in F(t, v_n(\varphi_n(t)))$ alors, pour tout $t \in I\backslash N_0^{'}$

$$z(t) \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{co}\{z_k(t); k \geq n_p\} \subset \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{co}\{F(t, v_k(\varphi_k(t))); k \geq n_p\} \tag{2.54}$$

Par le Théorème 1.2.8, on obtient pour tout $\xi \in H$,

$$\langle \xi, z(t)\rangle \leq \delta^*(\xi, F(t, v_k(\varphi_k(t)))). \quad \forall p \in \mathbb{N},\ \forall k \geq n_p.$$

i.e,

$$\langle \xi, z(t)\rangle \leq \limsup_{k\to\infty} \delta^*(\xi, F(t, v_k(\varphi_k(t)))) \leq \delta^*(\xi, F(t, u(t))),$$

où la deuxième inégalité est due grâce à l'hypothèse $(\mathcal{F}_1)$.
Puisque F une multi-application convexes à valeurs faiblement compactes et H est séparable, par la Proposition 1.3.18, on conclut que

$$z(t) \in F(t, u(t)) \quad p.p.\ t \in I.$$

D'autre part, on sait que $(\dot{v}_n)$ converge faiblement vers $\dot{u}$ dans $L^1(I, H)$. On suppose que $(\dot{v}_n)$ converge au sens de Komlos vers $\dot{u}$ et que (z_n) converge au sens de Komlos vers z. Par conséquent, il existe un ensemble N de I négligeable tel que pour tout $t \notin N$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \dot{v}_j(t) = \dot{u}(t) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} z_j(t) = z(t),\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.55}$$

Dans la suite, on va vérifier que

$$-\dot{u}(t) - z(t) \in A(t)u(t) \quad p.p.\ t \in I.$$

Posons, pour tout $t \in I$,

$$h_n(t) = \dot{v}_n(t) + z_n(t).$$

Il est clair que h_n converge faiblement vers h ($h_n \rightharpoonup h$) dans $L^1(I, H)$ avec $h(\cdot) = \dot{u}(\cdot) + z(\cdot)$. Par le Théorème de Banach-Mazur (Théorème 1.4.8), il existe une suite $(w_j)_j$ de $(h_j)_j$ avec pour tout j, $w_j \in co\{h_k; k \geq j\}$ telle que (w_j) converge fortement vers $h (w_j \longrightarrow h)$. Ainsi, par par le Théorème 1.4.2, on peut extraire une sous suite (w_{j_p}) de (w_j) convergeant vers h presque partout.

i.e., il existe un ensemble négligeable $N_0^{''}$ et une sous suite (j_p) de $\mathbb{N}$ satisfaisant

$$\forall t \in I \backslash N_0^{''}, \quad \lim_{p\to\infty} \omega_{j_p} = \dot{u}(t) + z(t) = h(t). \tag{2.56}$$

Posons $S_n = \{h_k(t) : \ k \geq j_n\}$, alors nous avons pour $t \in I \backslash N_0^{''}$

$$h(t) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co}(S_n).$$

Et par le Théorème de séparation (Théorème1.2.8), nous permet écrire pour tout $\xi \in H$

$$\langle \xi, h(t)\rangle \leq \delta^*(\xi, S_n) = \sup_{k\geq n}\langle \xi, h_k(t)\rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

i.e.,

$$\langle \xi, h(t)\rangle \leq \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geq n}\langle \xi, h_k(t)\rangle,$$

par suite,

$$\langle \dot{u}(t) + z(t), \xi\rangle = \langle h(t), \xi\rangle \leq \limsup_{n\to\infty}\langle h_n(t), \xi\rangle. \tag{2.57}$$

Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I \setminus N_n$ l'ensemble sur lequel l'inclusion (2.16) est vérifiée, i.e.,

$$-\dot{v}_n(t) - m(t, v_n(\varphi_n(t))) \in A(\theta_n(t))v_n(\theta_n(t)), \quad \forall t \in I \setminus N_n,$$

donc,

$$-h_n(t) \in A(\theta_n(t))v_n(\theta_n(t)) \quad \forall t \in I \setminus N_n. \tag{2.58}$$

Pour terminer notre preuve, nous devrons vérifier l'inclusion dans $(\mathcal{P}_F)$ presque partout sur I.

$$-\dot{u}(t) - z(t) \in A(t)u(t) \quad p.p.\ t \in I.$$

Comme $u(t) \in D(A(t))$ sur I, par la Définition 1.5.11 et la Proposition 1.5.12, il suffit prouver que pour tout $\eta \in D(A(t))$

$$\Big\langle h(t), u(t) - \eta \Big\rangle \leq \Big\langle A^0(t, \eta), \eta - u(t) \Big\rangle \quad p.p.\ t \in I.$$

En effet, Soit $\eta \in D\Big(A(t)\Big)$, en fixant $t \in I$, $A_n = A\Big(\theta_n(t)\Big)$ et $A = A(t)$.
Par $(\mathcal{A}_1)$

$$\|A_n^0 x\| = \|A^0\Big(\theta_n(t), x\Big)\| \leq c(1 + \|x\|), \quad \forall x \in D\Big(A(\theta_n(t))\Big).$$

Et par $(\mathcal{A}_2)$, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} dis(A_n, A) &= dis\Big(A\Big(\theta_n(t)\Big), A(t)\Big), \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\leq \Big|\beta\Big(\theta_n(t) - \beta(t)\Big)\Big|, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\leq \varepsilon_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

on obtient $dis(A_n, A) \to 0$.

Donc, on peut appliquer le cas particulier du Lemme1.5.16, on obtient pour tout $\eta \in D(A(t))$, l'existence d'une suite (ξ_n) tel que

$$\xi_n \in D(A(\theta_n(t))) \quad \xi_n \longrightarrow \eta \quad \text{et} \quad A^0(\theta_n(t), \xi_n) \longrightarrow A^0(t, \eta).$$

Comme chaque $A(t)$ est monotone, en particulier pour $t \in I \setminus N_n$

$$\Big\langle - h_n(t) - A^0(\theta_n(t), \xi_n), v_n(\theta_n(t)) - \xi_n \Big\rangle \geq 0,$$

ou alors,

$$\Big\langle h_n(t), v_n(\theta_n(t)) - \xi_n \Big\rangle \leq \Big\langle A^0(\theta_n(t), \xi_n), \xi_n - v_n(\theta_n(t)) \Big\rangle. \tag{2.59}$$

Par conséquent, pour $t \in I \setminus \left(N_0' \bigcup N_0'' \bigcup_{n=0}^{+\infty} N_n \right)$

$$\begin{aligned}
&\left\langle h_n(t), u(t) - \eta \right\rangle \\
&= \left\langle \dot{v}_n(t) + z_n(t), u(t) - \eta \right\rangle \\
&= \left\langle \dot{v}_n(t) + z_n(t), u(t) + v_n(\theta_n(t)) - v_n(\theta_n(t)) - \xi_n + \xi_n - \eta \right\rangle \\
&= \left\langle \dot{v}_n(t) + z_n(t), v_n(\theta_n(t)) - \xi_n \right\rangle + \left\langle \dot{v}_n(t) + z_n(t), u(t) - v_n(\theta_n(t)) \right\rangle \\
&+ \left\langle \dot{v}_n(t) + z_n(t), \xi_n - \eta \right\rangle.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left\langle \dot{v}_j(t) + z_j(t), u(t) - \eta \right\rangle &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left\langle \dot{v}_j(t) + z_j(t), v_j(\theta_j(t)) - \xi_j \right\rangle \\
&+ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left\langle \dot{v}_j(t) + z_j(t), u(t) - v_j(\theta_j(t)) \right\rangle \\
&+ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left\langle \dot{v}_j(t) + z_j(t), \xi_j - \eta \right\rangle,
\end{aligned}$$

alors, par (2.33), (2.36), et (2.59)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left\langle \dot{v}_j(t) + z_j(t), u(t) - \eta \right\rangle \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left\langle A^0(\theta_j(t), \xi_j), \xi_j - v_j(\theta_j(t)) \right\rangle + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \|\dot{v}_j(t) + z_j(t)\| \|u(t) - v_j(\theta_j(t))\| \\
&+ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \|\dot{v}_j(t) + z_j(t)\| \|\xi_j - \eta\| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left\langle A^0(\theta_j(t), \xi_j), \xi_j - v_j(\theta_j(t)) \right\rangle + \left(\beta_1(t) + L_1\right)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \|u(t) - v_j(\theta_j(t))\| \\
&+ \left(\beta_1(t) + L_1\right)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \|\xi_j - \eta\|, \qquad (2.60)
\end{aligned}$$

comme,

$$
\begin{aligned}
&\Big\langle A^0(\theta_j(t),\xi_j),\xi_j - v_j(\theta_j(t))\Big\rangle \\
&= \Big\langle A^0(\theta_j(t),\xi_j) - A^0(t,\eta), \xi_j - \eta + u(t) - v_j(\theta_j(t))\Big\rangle + \Big\langle A^0(\theta_j(t),\xi_j) - A^0(t,\eta), \eta - u(t)\Big\rangle \\
&+ \Big\langle A^0(t,\eta), \xi_j - \eta + u(t) - v_j(\theta_j(t))\Big\rangle + \Big\langle A^0(t,\eta), \eta - u(t)\Big\rangle \\
&\leq \|A^0(\theta_j(t),\xi_j) - A^0(t,\eta)\|\Big(\|\xi_j - \eta\| + \|u(t) - v_j(\theta_j(t))\|\Big) + \|A^0(\theta_j(t),\xi_j) - A^0(t,\eta)\|\|\eta - u(t)\| \\
&+ \|A^0(t,\eta)\|\Big(\|\xi_j - \eta\| + \|u(t) - v_j(\theta_j(t))\|\Big) + \Big\langle A^0(t,\eta), \eta - u(t)\Big\rangle,
\end{aligned}
$$

par conséquent, la relation (2.60) sera

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big\langle \dot{v}_j(t) + z_j(t), u(t) - \eta\Big\rangle \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|A^0(\theta_j(t),\xi_j) - A^0(t,\eta)\|\Big(\|\xi_j - \eta\| + \|u(t) - v_j(\theta_j(t))\|\Big) \\
&+ \|\eta - u(t)\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|A^0(\theta_j(t),\xi_j) - A^0(t,\eta)\| + \|A^0(t,\eta)\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\|\xi_j - \eta\| + \|u(t) - v_j(\theta_j(t))\|\Big) \\
&+ \Big\langle A^0(t,\eta), \eta - u(t)\Big\rangle + \Big(\beta_1(t) + L_1\Big)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|u(t) - v_j(\theta_j(t))\| \\
&+ \Big(\beta_1(t) + L_1\Big)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|\xi_j - \eta\|,
\end{aligned}
$$

Passons à la limite lorsque $n \to \infty$, dans cette inégalité, en utilisant la convergence au sens de Komlos de $(\dot{v})$ vers $(\dot{u})$, la convergence au sens de Komlos de (z_n) vers z, la Proposition 1.4.5, et la relation (2.52) on obtient

$$
\langle \dot{u}(t) + z(t), u(t) - \eta\rangle \leq \Big\langle A^0(t,\eta), \eta - u(t)\Big\rangle, \tag{2.61}
$$

d'où,

$$
-\dot{u}(t) - z(t) \in A(t)u(t) \quad p.p. \quad \text{sur } I,
$$

i.e.,

$$
-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + z(t) \quad p.p. \quad \text{sur } I,
$$

avec $u(0) = u_0$, et comme $z(t) \in F(t, u(t)) \quad p.p\ t \in I$, on aura

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) & \in A(t)u(t) + F(t, u(t)), \quad p.p.\ t \in I \\ u(0) & = u_0. \end{cases}$$

De plus, par (2.24) pour tout $0 \leq t \leq T$ on a

$$\|u(t) - u(s)\| \leq K((t - s) + \beta(t) - \beta(s))$$

par suite,

$$\frac{\|u(t) - u(s)\|}{t - s} \leq K\left(1 + \frac{\beta(t) - \beta(s)}{t - s}\right),$$

lorsque s tend vers t, on obtient

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t)), \quad p.p.\ t \in I.$$

Ceci achève la démonstration. ■

Chapitre 3

Résultat d'existence de solution pour une inclusion différentielle avec perturbation à valeurs presque convexes

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solution pour l'inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone et perturbée par une multi-application F de la forme

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases}-\dot{u}(t)\in Au(t)+F(u(t)) \qquad p.p.\ t\in I,\\ u(0)=u_0\in D(A).\end{cases}$$

Où on affaiblit la condition de la convexité des valeurs de F dans le chapitre 2, par la presque convexité et on obtient un résultat nouveau dans l'espace H de dimension finie où F est semi-continue supérieurement à valeurs compacte.
La méthode utilisée est inspirée de l'étude des inclusions différentielles, donnée par Cellina et Ornelas dans [15] et par Affane et Azzam dans [4].

3.2 La presque convexité

Il existe plusieurs définitions de la presque convexité, la définition qu'on a utilisée est celle introduite dans [15] et définie comme suit.

Définition 3.2.1. *[15]*
Le sous-ensemble C d'un espace vectoriel est dit presque convexe si pour tout $q\in co(C)$, il existe deux scalaires λ_1 et λ_2, $0\leq\lambda_1\leq 1\leq\lambda_2$, tels que

$$\lambda_1 q\in C \quad et \quad \lambda_2 q\in C.$$

Remarques.

1. *Si l'ensemble C est presque convexe et $0\in co(C)$, alors C contient l'origine 0.*
   En effet,
   d'après la définition de la presque convexité on a
   $0\in co(C)\Leftrightarrow\exists\ \lambda_1,\ \lambda_2\ (0\leq\lambda_1\leq 1\leq\lambda_2)$ *tels que* $\lambda_1 0\in C \quad et \quad \lambda_2 0\in C.$
   Donc $0\in C$.

2. *Tout ensemble convexe est presque convexe.*

   En effet,

   soit C un ensemble convexe. Donc, $co(C) = C$.

   Soit $q \in co(C)$ alors $q \in C$. Il suffit de prendre $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Donc C est presque convexe.

3. *L'inverse n'est pas nécessairement vrai.*

   C'est à dire, il existe des ensembles presque convexes mais non convexes.

   Exemple

   Considérons l'ensemble

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

   C est non convexe mais presque convexe.

   En effet,

   On a $co(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   Soit $q = (x, y) \in co(C)$ alors $x^2 + y^2 \leq 1$.

   Montrons l'existence de $\lambda_1,\ \lambda_2,\ 0 \leq \lambda_1 \leq 1 \leq \lambda_2$ tel que $\lambda_1 q \in C$ et $\lambda_2 q \in C$.

   • Si on prend $\lambda_1 = 0$, alors $\lambda_1 q = (0, 0) \in C$.

   Pour λ_2, on distingue deux cas

   1. *si $q = (x, y) \in C$ donc, il suffit de prendre $\lambda_2 = 1$*

      c-à-d , $\lambda_2 q = (x, y) \in C$.

   2. *si $q = (x, y) \notin C$ donc $y = 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

      D'autre part, $(x, y) \in co(C)$, c-à-d

$$x^2 \leq 1 \implies 0 <\mid x \mid\leq 1.$$

      Si on prend $\lambda_2 = \frac{1}{|x|} \geq 1$ alors $\lambda_2 q = (\frac{x}{|x|}, 0) \in C$.

      D'où, C est presque convexe.

3.3 Le résultat principal du chapitre

Avant de donner le résultat finale, on commence par le résultat suivant où on étudie la relation entre la solution du problème relaxé

$$(\mathcal{P}_{co_{(F)}})\begin{cases}-\dot{u}(t) \in Au(t) + co(F(u(t))) & p.p.\ t \in I,\\ u(0) = u_0 \in D(A).\end{cases}$$

et non relaxé

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases}-\dot{u}(t) \in Au(t) + F(u(t)) & p.p.\ t \in I,\\ u(0) = u_0 \in D(A).\end{cases}$$

Théorème 3.3.1.

Soit $H = \mathbb{R}^d$ un espace de Hilbert de dimension finie et soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone tel que pour chaque $x \in D(A)$, Ax est un cône, i.e.,
$\forall y \in Ax, \forall \lambda \geq 0, \lambda y \in Ax.$
Dans ce cas $Proj_{Ax}(0) = 0$, par suite la relation (2.1) *est évidente.*
Soit $F : H \rightrightarrows H$ une multi-application semi-continue supérieurement, à valeurs non vides, compactes et presque convexes. Supposons F que satisfaite

$$F(x) \subset (1 + \|x\|)\overline{B}, \quad \forall x \in H. \tag{3.1}$$

Soit $u_0 \in D(A)$ et $x : I \longrightarrow H$ une solution absolument continue du problème $(\mathcal{P}_{co_{(F)}})$.
Supposons qu'il existe deux fonctions intégrables λ_1 et λ_2 définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, satisfaisant $0 \leq \lambda_1(t) \leq 1 \leq \lambda_2(t)$, $\forall t \in I$, et telles que pour presque tout $t \in I$ nous avons
($\mathcal{H}$) $\quad \lambda_1(t)f(t) \in F(x(t)) \quad$ *et* $\quad \lambda_2(t)f(t) \in F(x(t))$.
où $f : I \longrightarrow H$ une application mesurable satisfaite

$$-\dot{x}(t) \in Ax(t) + f(t) \quad p.p.t \in I, \qquad et \qquad f(t) \in co(F(x(t))) \quad \forall t \in I.$$

Alors, il existe $t = t(\tau)$ une fonction croissante, absolument continue définie de l'intervalle I dans lui même, telle que l'application $\tilde{x}(\tau) = x(t(\tau))$ est une solution du problème $(\mathcal{P}_F)$. De plus, $\tilde{x}(0) = x(0) = u_0$.

Démonstration.

Étape 1

Soit un intervalle $[\alpha, \beta] \subset [0, T]$ et supposons sur cet intervalle l'existence de deux fonctions λ_1, λ_2 tels que

$$0 \leq \lambda_1(t) \leq 1 \leq \lambda_2(t) \quad \forall t \in [\alpha, \beta],$$

vérifiant l'hypothèse $(\mathcal{H})$, et supposons que $\lambda_1(t) > 0$, p.p.
Montrons qu'il existe deux sous ensembles mesurables de $[\alpha, \beta]$ admettant deux fonctions caractéristiques χ_1 et χ_2 telles que

$$\chi_1 + \chi_2 = \underset{[\alpha,\beta]}{\chi},$$

et qu'il existe une fonction absolument continue $s : [\alpha, \beta] \longrightarrow [\alpha, \beta]$ avec,

$$s(\alpha) - s(\beta) = \alpha - \beta$$

et

$$\dot{s}(t) = \chi_1(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2(t)\frac{1}{\lambda_2(t)}.$$

En effet, soit p une application définie sur $[\alpha, \beta]$ par

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \quad si \quad \lambda_1(t) = \lambda_2(t) = 1 \\ \dfrac{\lambda_2(t) - 1}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)} \quad sinon. \end{cases}$$

Nous avons $0 \leq p(t) \leq 1, \forall t \in [\alpha, \beta]$(Car, $\lambda_1(t) \leq 1$ et $\lambda_2(t) \geq 1$).
Alors, $-1 \leq -\lambda_1(t)$ donc, $0 \leq \lambda_2(t) - 1 \leq \lambda_2(t) - \lambda_1(t)$, d'où

$$0 \leq \frac{\lambda_2(t) - 1}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)} = p(t) \leq 1.$$

De plus, les deux égalités suivantes sont toujours vérifiées

$$p(t) + (1 - p(t)) = 1.$$

$$p(t)\lambda_1(t) + (1 - p(t))\lambda_2(t) = 1.$$

Car,

si $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = 1$, on obtient

$$p(t)\lambda_1(t) + (1 - p(t))\lambda_2(t) = \frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{2}) = 1.$$

Sinon

$$\begin{aligned} p(t)\lambda_1(t) + (1 - p(t))\lambda_2(t) &= \left(\frac{\lambda_2(t) - 1}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)}\right)\lambda_1(t) + \left(1 - \frac{\lambda_2(t) - 1}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)}\right)\lambda_2(t) \\ &= \frac{\lambda_1(t)\lambda_2(t) - \lambda_1(t) + \Big(\lambda_2(t) - \lambda_1(t) - \lambda_2(t) + 1\Big)\lambda_2(t)}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)} \\ &= \frac{\lambda_1(t)\lambda_2(t) - \lambda_1(t) - \lambda_1(t)\lambda_2(t) + \lambda_2(t)}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta 1dt &= \int_\alpha^\beta \left[p(t) + (1 - p(t))\right] dt \\ &= \int_\alpha^\beta \left[\frac{p(t)\lambda_1(t)}{\lambda_1(t)} + \frac{(1 - p(t))\lambda_2(t)}{\lambda_2(t)}\right] dt. \end{aligned}$$

On va appliquer le Théorème de Lyapunov (Théorème 1.6.1) pour assurer l'existence de deux sous ensembles mesurables de $[\alpha, \beta]$, admettant comme fonctions caractéristiques χ_1 et χ_2 tel que

$$\chi_1 + \chi_2 = \underset{[\alpha,\beta]}{\chi}$$

et

$$\int_\alpha^\beta 1dt = \int_\alpha^\beta \left(\chi_1(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2(t)\frac{1}{\lambda_2(t)}\right) dt.$$

Mais la fonction $\dfrac{1}{\lambda_1}$ n'est pas nécessairement intégrable, donc on considère une partition de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ par les ensembles disjoints définis comme suit,

$$E^n = \{t \in [\alpha, \beta] : \ n < \frac{1}{\lambda_1(t)} \leq n + 1\} \ \ n \in \mathbb{N},$$

et

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E^n = [\alpha, \beta].$$

En effet,

Par définition, $E^n \subset [\alpha, \beta]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donc $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E^n \subset [\alpha, \beta]$.

D'autre part, soit $t \in [\alpha, \beta]$, on a $0 < \lambda_1(t) \leq 1$ alors $\dfrac{1}{\lambda_1(t)} \geq 1$ est un nombre réel positif, il résulte de la propriété d'Archimède sur $\mathbb{R}$, l'existence d'un entier naturel $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n_0 < \frac{1}{\lambda_1(t)} \leq n_0 + 1,$$

donc $t \in E^{n_0}$, et par conséquent $t \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E^n$, c'est à dire $[\alpha, \beta] \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E^n$.

D'où $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E^n = [\alpha, \beta]$.

En appliquant le Théorème de Lyapunov (Théorème 1.6.1) sur chaque E^n, nous déduisons l'existence de deux suites de sous ensembles mesurables $(E_1^n)_n, (E_2^n)_n$ ayant comme fonctions caractéristiques $(\chi_1^n)_n, (\chi_2^n)_n$, telles que pour tout n,

$$\int_{E^n} 1dt = \int_{E^n} \left(\frac{p(t)\lambda_1(t)}{\lambda_1(t)} + \frac{(1-p(t))\lambda_2(t)}{\lambda_2(t)} \right) dt = \int_{E^n} \left(\chi_1^n(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2^n(t)\frac{1}{\lambda_2(t)} \right) dt.$$

On pose

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_1^n = E_1, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_2^n = E_2$$

et

$$\chi_1(.) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_1^n(.), \quad \chi_2(.) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_2^n(.).$$

Pour chaque k, la fonction

$$\sigma_k(t) = \sum_{n=0}^{k} \left(\chi_1^n(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2^n(t)\frac{1}{\lambda_2(t)} \right)$$

est positive, et la suite des fonctions $(\sigma_k(.))_k$ est croissante, simplement convergente vers la fonction

$$\sigma(t) = \chi_1(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2(t)\frac{1}{\lambda_2(t)}.$$

D'autre part, on considère la suite des ensembles $(V^k)_k$ où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $V^k = \bigcup\limits_{n=0}^{k} E^n$

qui est strictement croissante et converge vers l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Donc,

$$\int_{\alpha}^{\beta} 1dt = \int_{\bigcup_k V^k} 1dt = \int_{\bigcup_n E^n} 1dt,$$

avec,

$$\int_{\bigcup_k V^k} 1dt = \lim_{k\to\infty} \int_{V^k} 1dt.$$

Comme les ensembles (E^n) sont disjoints, on obtient

$$\int_{\alpha}^{\beta} 1dt = \lim_{k\to+\infty} \int_{V^k} 1dt = \lim_{k\to+\infty} \int_{\bigcup_{n=0}^{k} E^n} 1dt = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} \int_{E^n} 1dt.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\beta} 1dt &= \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} \int_{E^n} \left(\chi_1^n(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2^n(t)\frac{1}{\lambda_2(t)}\right) dt \\
&= \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} \int_{E^n} \sum_{n=0}^{k} \left(\chi_1^n(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2^n(t)\frac{1}{\lambda_2(t)}\right) dt \\
&= \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} \int_{E^n} \sigma_k(t)dt \\
&= \lim_{k\to+\infty} \int_{\bigcup_{n=0}^{k} E^n} \sigma_k(t)dt = \lim_{k\to+\infty} \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E^n} \sigma_k(t)dt
\end{aligned}$$

On applique le Théorème T.C.D (Théorème 1.4.1) on obtient,

$$\int_{\alpha}^{\beta} 1dt = \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E^n} \lim_{k\to+\infty} \sigma_k(t)dt = \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E^n} \sigma(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sigma(t)dt.$$

On conclut que $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} 1dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sigma(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\chi_1(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2(t)\frac{1}{\lambda_2(t)}\right) dt.$

Définissons

$$\dot{s}(t) = \sigma(t),$$

alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} \dot{s}(t)dt = \beta - \alpha.$$

Étape 2

Considérons l'ensemble

$$C = \Big\{ t \in I : \quad 0 \in F(x(t)) \Big\}.$$

C est fermé.

En effet, soit $(t_n)_n$ une suite d'éléments de C convergent vers $t \in I$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$0 \in F(x(t_n)).$$

D'après la Proposition 1.3.5, comme F est semi-continue supérieurement à valeurs fermées, le graphe de $F(x(\cdot))$ est fermé, donc $0 \in F(x(t))$.
D'où $t \in C$ et C est fermé.

a) Considérons le cas où C est vide.
   Dans ce cas $\lambda_1(t) \neq 0, \forall t \in I$, car si on considère le contraire, c'est à dire $\exists\, t_0 \in I$ tel que $\quad \lambda_1(t_0) = 0$, on obtient par l'hypothèse $(\mathcal{H})$,

$$\lambda_1(t_0) f(t_0) = 0 \in F(x(t_0))$$

   c'est à dire, $t_0 \in C$, contradiction avec $C = \emptyset$.
   Donc on peut appliquer l'étape 1 sur l'intervalle I, on pose

$$s(t) = \int_0^t \dot{s}(\tau) d\tau.$$

   s est strictement croissante et $s(0) = 0,\ s(T) = \int_0^T \dot{s}(\tau)d\tau = T - 0 = T.$

Donc, s est définie de I dans lui même. Soit la fonction

$$\begin{aligned} t : [0,T] &\to [0,T] \\ \tau &\mapsto t(\tau) = s^{-1}(\tau) \end{aligned}$$

où s^{-1} est la fonction inverse de s.

Donc,

$$t(0) = 0,\ t(T) = T$$

et

$$\frac{d}{d\tau} s(t(\tau)) = \dot{s}(t(\tau))\dot{t}(\tau) = 1.$$

D'où,

$$\dot{t}(\tau) = \frac{1}{\dot{s}(t(\tau))} = \frac{1}{\sigma(t(\tau))} = \lambda_1(t(\tau))\chi_1(t(\tau)) + \lambda_2(t(\tau))\chi_2(t(\tau)).$$

Considérons l'application $\tilde{x} : I \to H$ définie par

$$\tilde{x}(\tau) = x(t(\tau)),\ \forall \tau \in I.$$

On a

$$\begin{aligned} -\dot{\tilde{x}}(\tau) &= -\dot{x}(t(\tau))\dot{t}(\tau) \\ &= -\dot{x}(t(\tau))\frac{1}{\dot{s}(t(\tau))} \\ &= -\dot{x}(t(\tau))\Big(\lambda_1(t(\tau))\chi_1(t(\tau)) + \lambda_2(t(\tau))\chi_2(t(\tau))\Big) \\ &\in \Big(Ax(t(\tau)) + f(t(\tau))\Big)\Big(\lambda_1(t(\tau))\chi_1(t(\tau)) + \lambda_2(t(\tau))\chi_2(t(\tau))\Big). \end{aligned}$$

Comme l'opérateur A est à valeurs coniques on aura

$$-\dot{\tilde{x}}(\tau) \in Ax(t(\tau)) + f(t(\tau))\Big(\lambda_1(t(\tau))\chi_1(t(\tau)) + \lambda_2(t(\tau))\chi_2(t(\tau))\Big).$$

Utilisant l'hypothèse $(\mathcal{H})$, on obtient

$$-\dot{\tilde{x}}(\tau) \in Ax(t(\tau)) + F(x(t(\tau))),$$

substituant $x(t(\tau))$ par $\tilde{x}(\tau)$

$$-\dot{\tilde{x}}(\tau) \in A\tilde{x}(\tau) + F(\tilde{x}(\tau)).$$

D'où $\tilde{x}$ est une solution du problème $(\mathcal{P}_F)$.

b) Maintenant, on suppose que C est non vide.
Soit

$$l = \sup\{\tau \in I, \tau \in C\}.$$

Comme C est fermé alors $l \in C$.

En effet,

On a $l = \sup\{\tau \in I, \tau \in C\}$,

alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \tau_\varepsilon \in C : l - \varepsilon < \tau_\varepsilon \leq l < l + \varepsilon.$$

On peut écrire

$$\forall n > 0, \exists \tau_n \in C : l - \frac{1}{n} < \tau_n < l + \frac{1}{n},$$

c'est à dire,

$$\forall n > 0, \exists \tau_n \in C : |\tau_n - l| < \frac{1}{n}.$$

Donc, il existe une suite $(\tau_n) \subset C$ *telle que* $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = l$ et comme C est fermé, $l \in C$.

D'autre part, l'ensemble complémentaire de C dans I c-à-d $(I \backslash \mathrm{C})$ est un ouvert dans I.

Donc il est constitué d'une famille dénombrable d'intervalles ouverts de la forme $]a_i, b_i[$ disjoints deux à deux, avec la possibilité que deux intervalles prennent la forme $[0, b_i[$ et $]l, T]$.

Appliquons l'étape 1 sur chaque intervalle $]a_i, b_i[$ pour déduire l'existence de k_1^i et k_2^i, deux sous ensembles de $]a_i, b_i[$, ayant comme fonctions caractéristiques sont χ_1^i et χ_2^i respectivement, tel que

$$\chi_1^i + \chi_2^i = \chi_{]a_i, b_i[}.$$

On pose

$$\dot{s}(t) = \chi_1^i(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2^i(t)\frac{1}{\lambda_2(t)}, \quad \forall t \in]a_i, b_i[$$

on obtient
$$\int_{a_i}^{b_i} \dot{s}(\omega) d\omega = b_i - a_i.$$
• Sur l'intervalle $[0, l]$, on considère

$$\dot{s}(t) = \frac{1}{\lambda_2(t)}\chi_C(t) + \sum_i \Big(\chi_1^i(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2^i(t)\frac{1}{\lambda_2(t)}\Big)$$

où la somme est prise pour tous les intervalles inclus dans le complémentaire de C contenus dans $[0, T]$.

Donc, nous avons
$$\int_0^l \dot{s}(\tau) d\tau = k \leq l - 0,$$
puisque $\lambda_2(t) \geq 1$ et $\displaystyle\int_{a_i}^{b_i} \dot{s}(\tau) d\tau = b_i - a_i$.

Posons $s(t) = \displaystyle\int_0^t \dot{s}(\tau) d\tau$, alors s est une fonction inversible de $[0, l]$ vers $[0, k]$.

Soit $t : [0, k] \to [0, l]$ l'inverse de s.

Le prolongement absolument continue de $t(.)$ noté $\tilde{t}(.)$ est défini sur $[0, l]$ de la manière suivante

$$\tilde{t}(\tau) = \begin{cases} t(\tau) \quad si \quad \tau \in [0, k], \\ l \quad si \quad \tau \in]k, l]. \end{cases}$$

Donc $\dot{\tilde{t}} = 0$ Pour $\tau \in]k, l]$.

Démontrons que la fonction $\tilde{x}(\tau) = x(\tilde{t}(\tau))$ est une solution du problème $(\mathcal{P}_F)$ sur l'intervalle $[0, l]$ et que $\tilde{x}(l) = x(l)$.

En effet, nous avons pour τ dans $[0, k]$, $\tilde{t}(\tau) = t(\tau)$ est inversible et

$$\dot{t}(\tau) = \frac{1}{\dot{s}(t(\tau))} = \lambda_2\Big(t(\tau)\Big)\chi_C\Big(t(\tau)\Big) + \sum_i \Big(\chi_1^i\Big(t(\tau)\Big)\lambda_1\Big(t(\tau)\Big) + \chi_2^i\Big(t(\tau)\Big)\lambda_2\Big(t(\tau)\Big)\Big).$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
&-\dot{\tilde{x}}(\tau) = -\dot{x}(t(\tau))\dot{t}(\tau) \\
&= -\dot{x}(t(\tau))\Bigg(\lambda_2\Big(t(\tau)\Big)\chi_C\Big(t(\tau)\Big) + \sum_i \Big(\chi_1^i\Big(t(\tau)\Big)\lambda_1\Big(t(\tau)\Big) + \chi_2^i\Big(t(\tau)\Big)\lambda_2\Big(t(\tau)\Big)\Big)\Bigg) \\
&\in \Bigg(Ax(t(\tau)) + f(t(\tau))\Bigg)\Bigg(\lambda_2\Big(t(\tau)\Big)\chi_C\Big(t(\tau)\Big) + \sum_i \Big(\chi_1^i\Big(t(\tau)\Big)\lambda_1\Big(t(\tau)\Big) + \chi_2^i\Big(t(\tau)\Big)\lambda_2\Big(t(\tau)\Big)\Big)\Bigg) \\
&\in Ax(t(\tau)) + F(x(t(\tau))) = A\tilde{x}(\tau) + F(\tilde{x}(\tau)), \quad \forall \tau \in [0,k] \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

En particulier, on a $t(k) = l$ et $\dot{\tilde{t}}(\tau) = 0$ pour $\tau \in]k,l]$. On obtient

$$\tilde{t}(\tau) = \tilde{t}(k) = t(k), \qquad \forall \tau \in]k,l],$$

donc,

$$\tilde{x}(k) = x(\tilde{t}(k)) = x(t(k)) = x(\tilde{t}(\tau)) = \tilde{x}(\tau), \quad \forall \tau \in]k,l],$$

d'où $\tilde{x}(l) = x(l)$ et $\tilde{x}$ est constante sur $]k,l]$ et puisque $l \in C$, nous avons

$$-\dot{\tilde{x}}(\tau) = 0 \in F(x(l)) = F(\tilde{x}(\tau)), \quad \forall \tau \in]k,l]. \qquad (3.3)$$

D'autre part, $0 \in A\tilde{x}(\tau)$, on conclu que

$$-\dot{\tilde{x}}(\tau) = 0 \in A\tilde{x}(\tau) + F(\tilde{x}(\tau)), \qquad \forall \tau \in]k,l], \qquad (3.4)$$

de (3.2) et (3.4), $\tilde{x}(.)$ est une solution de problème $(\mathcal{P}_F)$ sur $[0,l]$.

• Il reste à définir la solution sur $[l,T]$.

Nous avons, C est vide et $\lambda_1(t) > 0$, donc on peut répéter les arguments de l'étape 1 et (a), pour obtenir une solution du problème $(\mathcal{P}_F)$.

Ceci complète la démonstration de notre théorème. ■

Présentons maintenant le Théorème essentiel de ce chapitre (le résultat d'existence) et donnons une propriété sur l'ensemble admissible du problème $(\mathcal{P}_F)$.

Théorème 3.3.2.

Soit H un espace de dimension fini et $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone *vérifiant* $(\mathcal{A}_1)$ *et* $(\mathcal{A}_3)$*. Soit* $F : H \rightrightarrows H$ *une multi-application semi continue supérieurement à valeurs non vides, compactes et presque convexes satisfait*

$$F(x) \subset (1 + \|x\|)\overline{B}, \qquad \forall x \in H.$$

Alors, pour tout $u_0 \in D(A)$

(1) *le problème*

$$(\mathcal{P}_F) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in Au(t) + F(u(t)) & p.p.\ t \in I, \\ u(0) = u_0 \in D(A). \end{cases}$$

admet une solution absolument continue définie sur I.

(2) *pour tout* $\tau \in I$*, l'ensemble admissible au point* τ*,* $A_{u_0}(\tau)$ *du problème* $(\mathcal{P}_F)$ *coïncide avec* $A^{co}_{u_0}(\tau)$ *l'ensemble admissible au point* τ *du problème*

$$(\mathcal{P}_{co(F)}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in Au(t) + co(F(u(t))) & p.p.\ t \in I, \\ u(0) = u_0 \in D(A). \end{cases}$$

où,

$A_{u_0}(\tau) = \{u(\tau) : u$ *est une solution absolument continue de* $(\mathcal{P}_F)$ *sur* $[0, \tau]\}$.

$A^{co}_{u_0}(\tau) = \{u(\tau) : u$ *est une solution absolument continue de* $(\mathcal{P}_{co(F)})$ *sur* $[0, \tau]\}$.

Démonstration.

1) On commence par démontrer $co(F) : H \rightrightarrows H$ est vérifie toutes les hypothèses du Théorème 2.2.1.

On a F est à valeurs non vides et pour chaque $x \in H$, $F(x) \in co(F(x))$, alors, $co(F)$ est à valeurs non vides. $co(F)$ à valeurs compactes d'après la Théorème 1.2.7.

Nous avons aussi $co(F)$ est semi continue supérieurement d'après le Théorème 1.3.8, et par le Théorème, 1.3.4 $co(F)$ est scalairement semi-continue supérieurement.

C-à-d, $co(F)$ satisfaite hypothèse $(\mathcal{F}_1)$.

Par le Théorème1.3.7, $co(F)$ est mesurable et par la proposition 1.3.16, $co(F)$ est scalairement mesurable, c-à-d $co(F(.))$ satisfaite hypothèse $(\mathcal{F}_2)$.

Pour $(\mathcal{F}_3)$, on a pour chaque $x \in H$,

$$F(x) \subset (1 + \|x\|)\overline{B},$$

alors,

$$co(F(x)) \subset (1 + \|x\|)co(\overline{B}) = (1 + \|x\|)\overline{B},$$

et comme $co(F(x))$ est fermé alors l'existence et l'unicité de $y \in co(F(x))$ telle que

$$y = Proj_{co(F(x(t)))}(0),$$

donc,

$$y \subset (1 + \|x\|)\overline{B},$$

$\overline{B}$ est un sous ensemble compact de H, donc $co(F)$ satisfait l'hypothèse $(\mathcal{F}_3)$.
C-à-d, $co(F)$ vérifie tout les hypothèses du Théorème 2.2.1 et donc le problème $(\mathcal{P}_{co(F)})$ admet une solution absolument continue $x : I \longrightarrow H$.
De plus, $\|\dot{x}(t)\| \leq K \quad p.p.\ t \in I$, donc ($K$ est un constante positive dépendant de $\|u_0\|, c, T$)

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_0^t K ds \leq \|x_0\| + TK,$$

Ce qui donne

$$co(F(x(t))) \subset (1 + \|x_0\| + TK)\overline{B} := m\overline{B}. \tag{3.5}$$

D'autre part, par le Théorème 1.3.13, $co(F(x(.)))$ admet une sélection mesurable.
i.e,

$$\exists f : I \to H \quad \text{tel que} \quad f(t) \in co(F(x(t))), \quad \forall t \in I,$$

et

$$-\dot{x}(t) \in Ax(t) + f(t), \quad p.p.\ t \in I.$$

Maintenant, on doit appliquer le Théorème 3.3.1 pour obtenir la solution du problème $(\mathcal{P}_F)$.
Pour cela, on doit montrer l'existence de deux fonctions intégrables λ_1 et λ_2 définies sur I vers $\mathbb{R}$ satisfaites

$$0 \leq \lambda_1(t) \leq 1 \leq \lambda_2(t)$$

et telles que

$$\lambda_1(t)f(t) \in F(x(t)) \quad \text{et} \quad \lambda_2(t)f(t) \in F(x(t)) \quad p.p.\ t \in I.$$

Comme F est à valeurs presque convexes, il existe deux multi-applications à valeurs non vides Λ_1 et Λ_2 où

$$\begin{aligned} \Lambda_1 : I &\rightrightarrows [0,1] \\ t &\mapsto \Lambda_1(t) = \Big\{\lambda_1 \in [0,1] : \ \lambda_1 f(t) \in F(x(t))\Big\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Lambda_2 : I &\rightrightarrows [1,+\infty[\\ t &\mapsto \Lambda_2(t) = \Big\{\lambda_2 \in [1,+\infty[: \ \lambda_2 f(t) \in F(x(t))\Big\}. \end{aligned}$$

Soit $Z = \{t \in I : \ f(t) = 0\}$.
Sans perte de généralité on peut assumer que pour $t \in Z, \ \Lambda_1(t) = \Lambda_2(t) = \{1\}$.
Pour montrer que la multi-application Λ_1 est mesurable, on applique le Théorème de Lusin 1.1.9 pour la fonction f sur $I \setminus Z$.
Alors, il existe un nombre dénombrable des ensembles compactes $B_i \subset I \setminus Z, \ \forall i \in I$ tel que

$$\mu\Bigg((I \setminus Z) \setminus (\underset{i\in I}{\cup} B_i)\Bigg) < \varepsilon.$$

C-à-d, on peut défini $I \setminus Z$ par $(\underset{i\in I}{\cup} B_i) \cup \mathcal{N}$ tel que la mesure de $\mathcal{N}$ est nulle et la restriction de f à B_i est une une fonction continue dans B_i.
On montre que le graphe de Λ_1 est fermé dans $B_i \times [0,1]$.
En effet,

$$gph(\Lambda_1) = \Big\{(t,\lambda_1) \in B_i \times [0,1] : \quad \lambda_1 f(t) \in F(x(t))\Big\}$$

Soit $(t_n, \lambda_1^n) \subset gph(\Lambda_1)$ converge vers $(t,\lambda_1) \in B_i \times [0,1]$ alors, pour chaque $n \in \mathbb{N}$

$$(t_n, \lambda_1^n) \in gph(\Lambda_1) \Longrightarrow \lambda_1^n \in F(x(t_n))$$

On a x est absolument continue donc elle est continue ce qui donne $x(t_n)$ converge vers $x(t)$.
De plus, f est continue donc $f(t_n)$ est convergente vers $f(t)$ et λ_1^n converge vers λ_1.
Donc, $y_n = \lambda_1^n f(t_n)$ converge vers $y = \lambda_1 f(t)$ et puisque F est s.c.s à valeurs com-

pactes alors d'après le Théorème 1.4.7,

$$\lambda 1 f(t) \in F(x(t)) \Longrightarrow (t, \lambda_1) \in gph(\Lambda_1).$$

c-à-d $gph(\Lambda_1)$ est fermé. De plus, Λ_1 à valeurs fermées dans $[0,1]$ car F est à valeurs fermées c-à-d Λ_1 à valeurs compactes, alors, d'après le Lemme 1.3.6, Λ_1 est s.c.s, et par Théorème 1.3.7, Λ_1 est mesurable sur I.

La démonstration de Λ_2 est mesurable et similaire, la différence est que les valeurs de Λ_2 ne sont pas bornées.

Donc ce cas, on défini $I \setminus Z$ par l'union dénombrable des ensembles
$M_n = \{t : \|f(t)\| \geq \frac{1}{n}\}$.

Pour chaque M_n, et pour tout $\lambda_2 \in \Lambda_2(t)$ et par (3.5) on a,

$$\lambda_2 f(t) \in F(x(t)) \subset m\overline{B},$$

$$\Longrightarrow \lambda_2 \leq mn.$$

C-à-d Λ_2 à une borne supérieure sur M_n.

Ce qui donne Λ_2 est mesurable dans I.

En conséquence, par le Théorème 1.3.13 on obtient l'existence de deux sélections mesurables $\lambda_1(.)$ et $\lambda_2(.)$ de Λ_1 et Λ_2 respectivement, satisfaisant pour tout $t \in I$

$$0 \leq \lambda_1(t) \leq 1 \leq \lambda_2(t),$$

et

$$\lambda_1(t)f(t) \in F(x(t)) \quad \text{et} \quad \lambda_2(t)f(t) \in F(x(t)).$$

Appliquant le Théorème 3.3.1, on conclut que le problème $(\mathcal{P}_F)$ admet une solution $\tilde{x}(.)$ tel que $\forall t \in I : \tilde{x}(t) = x(t)$.

2) Soit $\tau \in I$, $x(\tau) \in A^{co}_{u_0}(\tau)$ alors $x(.)$ est une solution absolument continue du problème ($\mathcal{P}_{co_{(F)}}$) sur I, et d'après l'étape 1 du Théorème 3.3.1, définie sur $[\alpha, \beta] = [0, \tau]$, il existe une solution $\tilde{x}(.)$ de $(\mathcal{P}_F)$ coïncide avec $x(.)$ sur les bornes de tous intervalles

compacts, c-à-d $\tilde{x}(\tau) = x(\tau)$, d'où $x(\tau) \in A_{u_0}(\tau)$ et par conséquent

$$A_{u_0}^{co}(\tau) \subset A_{u_0}(\tau).$$

Inversement, comme $F(x) \subset co(F(x)),\ \forall x \in H$, alors toute solution $\tilde{x}(.)$ de $(\mathcal{P}_F)$ satisfait l'inclusion suivante

$$-\dot{\tilde{x}} \in A\tilde{x}(t) + F(\tilde{x}(t)) \subset A\tilde{x}(t) + co(F(\tilde{x}(t))) \qquad p.p.\ t \in I,$$

c-à-d toute solution $\tilde{x}(.)$ de $(\mathcal{P}_F)$ est une solution de ($\mathcal{P}_{co_{(F)}}$), donc pour tous $\tau \in I$ et $\tilde{x}(\tau) \in A_{u_0}(\tau)$ on a $\tilde{x}(\tau) \in A_{u_0}^{co}(\tau)$
c-à-d

$$A_{u_0}(\tau) \subset A_{u_0}^{co}(\tau).$$

Ce qui achève la démonstration de notre Théorème. ∎

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressées à établir un résultat d'existence de solutions en dimension finie pour une inclusion différentielle du premier ordre dont le second membre est une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs presque convexes.

On remplace la convexité des valeurs de la multi-application dans le résultat donner dans [5] par une condition plus faible introduite la première fois par Cellina et Ornelas dans [15].

La méthode qu'on a utilisé est inspirée de l'étude donnée dans [4] et [15].

Bibliographie

[1] H. Attouch and A. Damlamian, **On multivalued evolution equations in Hilbert spaces**, *Israel Journal of Mathematics* 12.4 : 373-390, (1972).

[2] J.P. Aubin and A. Cellina, **Differential Inclusions, Set-Valued Maps and Viability Theory**, *Spring-verlag, Berlin, Germany*, (1984).

[3] J.P. Aubin and H. Frankowska, **Set-Valued Analysis**, *Birkhäser, Boston Basel Berlin*, (1990).

[4] D. Affane and D. Azzam-Laouir, **Almost convex valued perturbation to time optimal control sweeping processes**, Esaim : control, optimisation and calculus of variations, 23 1-12, (2017).

[5] D. Azzam-Laouir, W. Belhoula, C. Castaing and M. D. P. Monteiro Marques, **Multivalued perturbation to evolution problems involving time dependent maximal monotone operators**. Evolution Equations and Control Theory, V9N1, (2020).

[6] V. Barbu, **Nonlinear semigroups and differntial equations in Banach spaces**. *Noordhoff Int. Publ.leyden*, (1976).

[7] V. Barbu and T. Precupanu, **Convexity and optimisation in Banach space**, *fourth edition Springer, Romania* (2012).

[8] W. Belhoula, **Résultats d'existence de solutions pour des inclusions différentielles gouvernées par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps**, Thèse de Doctorant LMD, Université Mohammed Seddik Benyahia-jijel, (2019).

[9] H. Brèzis, **Analyse fonctionnelle theory et application**. *Masson, Paris,* (1983).

[10] H. Brèzis, **Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert**. *North Holland*, (1973).

[11] F. E. Browder, **Nonlinear maximal monotone operators in Banach space**, *Mathematische Annalen* 175.2 : 89-113, (1968).

[12] C. Castaing, P. Raynaud de Fitte and M. Valadier, **Young Measures on Topological Spaces with Applications in Control Theory and Probability Theory**, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,* (2004).

[13] C. Casting, M. Valadier, **Convex Analysis and Measurable multifunctions**, **Lectures Notes in mathematics**, *Springer-Verlag, Berlin.* 580, (1977).

[14] A. Cellina and G. Colombo, **On a Classical Problem of the Calculs of Variations Without Convexity Assumptions**, *Ann.Inst. Henri Poincaré,* Vol.7,n 2,(1990).

[15] A. Cellina and A. Ornelas, **Existence of Solutions to Differential Inclusion and to Time Optimal Control Problemes in the Autonomous cas**, *Siam J.control Optim.* Vol. 42, No.1, pp.260-265, (2003).

[16] L. Cesari, **Optimization-Theory and Applications,** *Springer-Verlag, Newyork,* (1983).

[17] G. Debreu. **Integration of correspondences**. **Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability**, Volume 2 : Contributions to Probability Theory, *Part 1. The Regents of the University of California,* (1967).

[18] K. Deimling, **Multivalued Differential Equations, Walter de Gruyter**, *Berlin, Newyork,* (1992).

[19] K. Deimling, **Ordinary Differential Equations in Banach Spaces**, *Lecture Notes in Math.*, vol. 596, *Springer-Verlag*, (1977).

[20] N. Dunford and J.T. Schwartz, **Linear operators. PART I : General theory**. *Wiley Classics Library Edition Published,* (1988).

[21] A. F. Filippov, **On certain questions in the theory of optimal control**. *J. SIAM Control Ser.* A, 1 :76–84, (1962).

[22] M. Kisielewicz, **Differential Inclusions and Optional Controle**, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London*, (1991).

[23] M. Kunze and M.D.P.M.Marques, **BV solutions to evolution problems with time-dependent domains**.*Set-Valued Analysis* 5.1 57-72, (1997).

[24] G. Minty, **Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space**, Duke Math. J., 29, 341-346, (1962).

[25] R. T. Rockafellar, **La théorie des sous-gradients et ses applications à l'optimisation : fonctions convexes et non convexes**. *L'Université de Montréal*, (1979).

[26] R. T. Rockafellar, **Convex analysis**. Vol. 28. *Princeton university press*, (1970).

[27] R. Rockafellar, **On the maximal monotonicity of subdifferential mappings**, *Pacific Journal of Mathematics* 33.1 : 209-216, (1970).

[28] G.V. Smirnov, **Introduction to the theory of differential inclusions**. Vol. 41. *American Mathematical* Soc., (2002).

[29] Y. Sonntag, **Topologie et Analyse fonctionnelle**. *ellipses, édition marketing S.A*, (1998).

[30] A. A. Vladimirov, **Nonstationary dissipative evolution equations in a Hilbert space** . *Nonlinear Analysis* : *Theory, Methods and Applications*, Vol 17, No.6, : 499-518, (1991).