RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

N^0 d'ordre : ....

N^0 de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour obtenir le diplôme de

Master

Spécialité : *Mathématiques.*

Option : *Analyse fonctionnelle.*

Thème

Quelques théorèmes de point fixe dans un espace métrique généralisé

Présenté par : Bouchekrit kenza

Devant le jury :

Président	: Yarou Mustapha Fateh	Prof. Université de Jijel
Encadreur	: Fetouci Nora	M.C.B. Université de Jijel
Examinateur	: Affane Doria	M.C.A. Université de Jijel

Promotion 2021/2022

Remerciements

*Avant tous, je tiens à remercier de tout coeur mon dieu "**ALLAH**" le tout puissant de m'avoir donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.*

*En tout premier lieu, mes profonds remerciement, ma gratitude sont destinés à mon encadreur, M^{lle} **Fetouci Nora**. Je la remercie sincèrement pour ses encouragements, ses conseils précieux et pour le temps qu'elle m'a accordé.*

*Je tiens à remercier infiniment le professeur **Yarou Mustapha Fateh**, pour avoir accepté de présider le jury de cette soutenance.*
*Je souhaiterais exprimer ma gratitude à Mme **Affane Doria** qui a honoré de sa présence et qui a accepté d'examiner ce travail.*

sans oublier de remercier nos chers professeurs qui nous ont assurés une bonne formation.

Kenza

Dédicace

Je dédie ce travail :

A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable mère "Zahra".

A l'homme, mon précieux offre du dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect : mon cher père "Ferhat".

A mes belles soeurs et mes frères qui me donnent de l'amour et de la vivacité.

A tous ceux qui m'ont aidé - de près ou de loin - et ceux qui ont partagé avec moi les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail et qui m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.

A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé.

Merci !

Kenza ✍

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

L'objectif de notre travail est l'étude d'existence et d'unicité des points fixes et des points fixes communs pour diverses applications univoques définies sur des espaces métriques généralisés.

La théorie du point fixe joue un rôle crucial dans de nombreuses branches des mathématiques ainsi que leurs applications. Elle intervient dans la résolution de plusieurs équations différentielles non linéaires, où elle fournit les méthodes pour les problèmes d'existence et d'unicité. Son histoire a commencé par les travaux de S. Banach dans son papier [17], publié en 1922. Banach a établi l'existence et l'unicité du point fixe d'une contraction dans un espace métrique complet, il a appliqué son théorème à la résolution des équations intégrales.

En 2006, Z.Mustafa et B.Sims [11] ont introduit une importante généralisation pour les espaces métriques dont ils ont appelés les espaces métriques généralisés ou espaces G-métriques. Par suite, le théorème du point fixe de Banach a été étendu par ces mêmes auteurs à cette nouvelle structure d'espace.

Après ces travaux, plusieurs résultats d'existence et d'unicité du point fixe ont été obtenus, à ce sujet ont peut consulter [12, 14].

Un autre type de points fixes qui a connu des généralisations aux espaces G-métriques, c'est ce qu'on appelle point fixe commun pour une paire d'applications. Généralement pour établir un point fixe commun métrique, on a besoin d'une relation de commutativité entre les applications étudiées, la continuité et une condition contractive ainsi que la complétude ou la fermeture d'espace (ou sous espaces). En 1976, Jungck [8] a introduit et utilisé la commutativité de deux applications d'un espace métrique dans lui-même pour établir un point fixe commun. En 1986, dans son article [7] il a amélioré la propriété de commutativité à une nouvelle notion plus générale, c'est la propriété de compatibilité pour une paire d'applications. Plus tard Jungck et Rhoades [9] ont introduit un concept plus général de compatibilité qui est la compatibilité faible.

Ce mémoire est réparti en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux définitions, notions et résultats qui nous serviront tout au long de ce travail, plus particulièrement les espaces métriques.

Nous présentons dans le deuxième chapitre la notion d'espace G-métrique, commençant par les définitions et les propriétés, ainsi que tous les concepts de convergence de suites, continuité, topologie, compacité,…etc, liés à ces espaces.

Nous finissons notre travail par étudier quelques résultats d'existence et d'unicité de point fixe pour une application et de point fixe commun pour une paire d'applications.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Ce chapitre est consacré à quelques définitions et des éléments basiques qui sont indispensables pour le reste de notre travail.

1.1 Quelques notions et propriétés d'un espace métrique

Définition 1.1. (*Distance*) *Soit X un ensemble non vide. On appelle distance sur X, toute application $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les axiomes suivants :*

(1) *Séparation : Pour tous $x, y \in X \quad d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.*

(2) *Symétrie : Pour tous $x, y \in X \quad d(x,y) = d(y,x)$.*

(3) *Inégalité triangulaire : Pour tous $x, y, z \in X \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.*

Définition 1.2. (*Espace métrique*) *Un espace métrique est un couple (X, d) où X est un ensemble et d est une distance.*

Définition 1.3. (*Boule fermée - Boule ouverte - Sphère*) *Soit (X, d) un espace métrique, $x_0 \in X$ et $r > 0$.*

• *On appelle boule fermée de centre x_0 et de rayon r l'ensemble*

$$B_f(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}.$$

• *On appelle boule ouverte de centre x_0 et de rayon r l'ensemble*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}.$$

• *On appelle sphère de centre x_0 et de rayon r l'ensemble*

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) = r\}.$$

Remarque 1.1. $B_f(x_0, r) = B(x_0, r) \cup S(x_0, r)$

Définition 1.4. (*Ouverts - Fermés*) *Soit (X, d) un espace métrique et U, $F \subset X$. On dit que :*

• *U est ouvert dans X, si pour tout x dans U il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.*

• *F est fermé dans X, si son complément $X \backslash F$, est ouvert dans X.*

1.2 Convergence et continuité dans un espace métrique

Définition 1.5. (*Application continue*) *Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et soit $a \in X$. On dit qu'une application $f : X \to Y$ est continue au point a si :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : d(a, x) < \delta \Longrightarrow d'(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$

Définition 1.6. (*Continuité sur un ensemble*) *On dira que $f : (X, d) \to (Y, d')$ est continue sur (X, d) si elle est continue en tout point de X.*

Définition 1.7. (*Suite convergente*) *Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace métrique (X, d) converge ou tend vers un point $a \in X$ lorsque $n \to \infty$ si et seulement si $\lim_{n \to \infty} d(x_n, a) = 0$. C'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : d(x_n, a) < \varepsilon$.*
On dit aussi que a est la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on note $x_n \to a$ où $(\lim_{n \to \infty} x_n = a)$

Proposition 1.1. *Si la limite d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existe, alors cette limite est unique.*

Théorème 1.1. *Soit* (X, d) *un espace métrique, et* $F \subset X$, $a \in X$,

$$F \text{ est fermé } \Longleftrightarrow \left[\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F, \lim_{n\to\infty} x_n = a \Longrightarrow a \in F\right].$$

Définition 1.8. (*Suite extraite*) *On appelle suite extraite* (*ou sous suite*) *de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de la forme* $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *où* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est une application strictement croissante.*

Lemme 1.1. *Soit* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une application strictement croissante. Alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $\varphi(n) > n$.

Proposition 1.2. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. *On a* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers a si et seulement si toute sous suite* $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* a.

1.3 Complétude d'un espace métrique

Définition 1.9. (*Suite de Cauchy*) *On dit qu'une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'un espace métrique* (X, d) *est de Cauchy si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tel que pour tous* $m, n \geq N_\varepsilon$
on a $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$.
C'est-à-dire si dans $\mathbb{R}$, *on a* $\lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$.

Proposition 1.3. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Proposition 1.4. *Dans un espace métrique* (X, d) *on a :*

1. *Toute suite convergente est de Cauchy.*
2. *Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.*
3. *Toute suite de Cauchy admettant une sous suite convergente est convergente.*

Définition 1.10. *Un espace métrique* (X, d) *est dit complet si toute suite de Cauchy* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* X *converge dans* X.

Proposition 1.5. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $A \subset X$

- *Si* (A, d) *est complet, alors* A *est un fermé de* X.
- *Si* (X, d) *est complet et* A *est un fermé de* X, *alors* (A, d) *est complet.*

1.4 Compacité dans un espace métrique

Définition 1.11. (*Recouvrement*) *Soit (X, d) un espace métrique. Une famille d'ensemble $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de X si :*

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X$$

Définition 1.12. (*Ensemble compact*) *Soit (X, d) un espace métrique, $K \subset X$ est dit compact si pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X, on peut extraire un sous recouvrement fini. C'est à dire*

$$\left(X = \bigcup_{i \in I} U_i \right) \Longrightarrow \exists J \subset I; J \text{ fini}, \; X = \bigcup_{i \in J} U_i.$$

Définition 1.13. *Soient (X, d) un espace métrique, $A \subset X$.*
On dit que A est relativement compact si $\bar{A}$ est compact dans X.

Proposition 1.6. *Pour une partie K d'un espace métrique (X, d), les deux assertions suivantes sont équivalentes*

1. K *compacte.*
2. *De toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K, on peut extraire une sous suite convergente dans K.*

Proposition 1.7. *Tout espace métrique compact est complet.*

Théorème 1.2. *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$,*

1. *Si (A, d) est compact, alors A fermé dans X.*
2. *Si (X, d) est compact et A fermé, alors (A, d) est compact.*

1.5 Quelques théoremes de point fixe

Définition 1.14. *Soit (X, d) un espace métrique et $f : X \to X$ une application.f est dite contractante s'il existe $\theta \in [0, 1[$ tel que pour tout $x, y \in X$ on a*

$$d(fx, fy) \leq \theta d(x, y).$$

Théorème 1.3. (***Point fixe de Banach***) *[17] Soit* (X, d) *un espace métrique complet* (*ou bien un espace de Banach si* X *possède une norme*) *et* $f : X \to X$ *une contraction. Alors* f *admet un point fixe unique dans* X*, c-à-d il existe* $x \in X$ *tel que* $f(x) = x$ (*On utilise aussi la notation* $fx = x$).

Théorème 1.4. (***Point fixe de Reich***)*[16] Soit* (X, d) *un espace métrique complet, et* $T : X \to X$ *satisfait la condition suivante,*

$$d(T(x), T(y)) \leq ad(x, T(x)) + bd(y, T(y)) + cd(x, y), \forall x, y \in X$$

où a, b, c *sont des nombres non négatifs avec* $a + b + c < 1$.
Alors, T *à un point fixe unique (c'est à dire qu'il existe* $u \in X$ *;* $Tu = u$*).*

Théorème 1.5. (***Point fixe de Chatterjea***)*[5] Soit* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une application.*
Supposons qu'il existe $\lambda \in [0, \frac{1}{2}[$ *tel que pour tous* $x, y \in X$*, on a*

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda\Big(d(x, T(y)) + d(y, T(x))\Big)$$

Alors, T *admet un point fixe unique dans* X*.*

Pour plus de détails voir [4] et [18].

CHAPITRE 2

ESPACE MÉTRIQUE GÉNÉRALISÉ

Dans ce chapitre, nous présentons la notion d'espaces métriques généralisés. Nous commençons aux début par quelques définitions et propriétés concernant ces espaces, nous introduisons par la suite, d'autres concepts liés à ces espaces tels la convergence des suites, continuité, topologie,. . .etc.
les résultats de ce chapitre sont pris de l'article [13].

2.1 Quelques notions et propriétés d'un espace métrique généralisé

Définition 2.1. *Soit X un ensemble non vide. On appelle une métrique généralisée sur X ou une G-métrique toute application $G : X \times X \times X \longmapsto \mathbb{R}^+$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

(G1) séparation : $\forall x, y, z \in X$, $G(x, y, z) = 0$ *si* $x = y = z$,

(G2) $\forall x, y \in X$, *avec* $x \neq y$, $G(x, x, y) > 0$,

(G3) $\forall x, y, z \in X$, *avec* $z \neq y$, $G(x, y, z) \geq G(x, x, y)$,

(G4) symétrie : $\forall x, y, z \in X$, $G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, x, z) = G(y, z, x) = G(z, x, y) = G(z, y, x)$,

(G5) inégalité rectangulaire : $\forall x, y, z$ *et* $a \in X$, $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$.

Définition 2.2. (*Espace G-métrique*) *On appelle espace métrique généralisé ou espace G-métrique le couple* (X, G) *où* X *est un ensemble et* G *est une G-métrique.*

Exemple 2.1. *Soit* (X, d) *un espace métrique, alors les applications* $G_s, G_m : X \times X \times X \longmapsto \mathbb{R}^+$ *définies par :*

- $G_s(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(x, z), \forall x, y, z \in X$,
- $G_m(x, y, z) = \max\{d(x, y), d(y, z), d(x, z)\}, \forall x, y, z \in X$,

sont aussi des G-métriques.

Démonstration. • Nous allons vérifier que G_s satisfait les propriétés de la G-métrique.

(1) Si $x = y = z$:

$G_s(x, y, z) = d(x, x) + d(y, y) + d(z, z) = 0$

(2) $G_s(x, x, y) = d(x, x) + d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y) > 0$

(3) $G_s(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(x, z)$

En utilisant l'inégalité triangulaire et la symétrie, on obtient

$$\begin{aligned} d(x, z) + d(y, z) &= d(x, z) + d(z, y) \\ &\geq d(x, y) \\ G_s(x, y, z) &\geq 2d(x, y) \\ &= G_s(x, x, y). \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} G_s(x, y, z) &= d(x, y) + d(y, z) + d(x, z) \\ &= d(y, x) + d(x, z) + d(x, z) \\ &= G_s(y, x, z) \ldots \text{ etc} \end{aligned}$$

(5) Appliquant l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} G_s(x,a,a)+G_s(a,y,z) &= d(x,a)+d(a,a)+d(x,a)+d(a,y)+d(y,z)+d(a,z) \\ &= d(x,a)+d(a,y)+d(y,z)+d(x,a)+d(a,z) \\ &\geq d(x,y)+d(y,z)+d(x,z) \\ &= G_s(x,y,z). \end{aligned}$$

- Montrons que G_m satisfait les propriétés de la G-métrique.

(1) Si $x=y=z$

$$G_m(x,y,z) = \max\{d(x,x),d(y,y),d(z,z)\} = 0.$$

(2) $G_m(x,x,y) = \max\{d(x,x),d(x,y),d(x,y)\} = d(x,y) > 0$

(3) $G_m(x,x,y) = d(x,y)$
si $d(x,y) > d(y,z)$ et $d(x,y) > d(x,z)$, on trouve

$$G_m(x,y,z) = d(x,y) = G_m(x,x,y),$$

sinon

$$G_m(x,y,z) > d(x,y) = G_m(x,x,y).$$

(4)

$$\begin{aligned} G_m(x,y,z) &= \max\{d(x,y),d(y,z),d(x,z)\} \\ &= \max\{d(y,x),d(x,z),d(x,z)\} \\ &= G_m(y,x,z)\ldots \text{etc.} \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
G_m(x,a,a)+G_m(a,y,z) &= \max\{d(x,a),d(a,a),d(x,a)\}+\max\{d(a,y),d(y,z),d(a,z)\}\\
&= \max\{d(x,a),d(x,a)\}+\max\{d(y,a),d(a,z),d(y,z)\}\\
&= d(x,a)+\max\{d(a,y),d(y,z),d(a,z)\}\\
&= \max\{d(x,a)+d(a,y),d(x,a)+d(y,z),d(x,a)+d(a,z)\}\\
&\geq \max\{d(x,y),d(x,a)+d(y,z),d(x,z)\}\\
&\geq \max\{d(x,y),d(y,z),d(x,z)\}\\
&= G_m(x,y,z).
\end{aligned}$$

□

Exemple 2.2. *Soit (X,G) un espace G-métrique, alors les applications $G_1, G_2 : X\times X\times X \longmapsto \mathbb{R}^+$ définies par :*

$G_1(x,y,z)=\min\{k,G(x,y,z)\}$,

$G_2(x,y,z)=\frac{G(x,y,z)}{k+G(x,y,z)}$,

sont aussi des G-métriques.

Démonstration. • Nous allons vérifier que G_1 satisfait les propriétés de la G-métrique.

(1) Si $x=y=z$

$G_1(x,y,z)=\min\{k,G(x,y,z)\}=\min\{k,0\}=0.$

(2) On a $G(x,y,z)>0$ et $k>0$, donc $G_s(x,x,y)=\min\{k,G(x,y,z)\}>0$.

(3) On a $G(x,x,y)\leq G(x,y,z)$ alors, $\min\{k,G(x,x,y)\}\leq \min\{k,G(x,y,z)\}$, par conséquent

$$G_1(x,x,y)\leq G_1(x,y,z).$$

(4) Découle directement de $(G4)$:

$G_1(x,y,z)=\min\{k,G(x,y,z)\}=\min\{k,G(y,x,z)\}=G_1(y,x,z)\ \dots$ etc

(5) Utilisant ($G5$), on obtient

$$\begin{aligned} G_1(x,y,z) &= \min\{k, G(x,y,z)\} \\ &\leq \min\{k, G(x,a,a)+G(a,y,z)\} \\ &\leq min\{k, G(x,a,a)\} + min\{k, G(a,y,z)\} \\ &= G_1(x,a,a)+G_1(a,y,z). \end{aligned}$$

- Montrons que G_2 satisfait les propriétés de la G-métrique,

(1) si $x = y = z$

$G(x,y,z) = 0$ donc $G_2(x,y,z) = 0$.

(2) On a $G(x,y,z) > 0$ et $k > 0$ donc, $G_2(x,x,y) > 0$.

(3) On a

$$G_2(x,y,z) = \frac{G(x,y,z)}{k+G(x,y,z)} = 1 - \frac{k}{k+G(x,y,z)}$$

et G est une G-métrique, c'est à dire

$$\begin{aligned} G(x,x,y) &\leq G(x,y,z) \\ \frac{k}{k+G(x,x,y)} &\geq \frac{k}{k+G(x,y,z)} \\ 1-\frac{k}{k+G(x,x,y)} &\leq 1-\frac{k}{k+G(x,y,z)} \end{aligned}$$

et par suite

$$G_2(x,x,y) \leq G_2(x,y,z).$$

(4) $G_2(x,y,z) = \frac{G(x,y,z)}{k+G(x,y,z)} = \frac{G(z,x,y)}{k+G(z,x,y)} = G_2(z,x,y)$ ... etc.

(5) On a

$$G_2(x,y,z) = \frac{G(x,y,z)}{k+G(x,y,z)} = 1 - \frac{k}{k+G(x,y,z)}$$

et on sait que

$$G(x,y,z) \leq G(x,a,a)+G(a,y,z)$$

donc

$$1-\frac{k}{k+G(x,y,z)} \leq 1-\frac{k}{k+G(x,a,a)+G(a,y,z)}$$

d'où

$$\begin{aligned}
G_2(x,y,z) &\leq \frac{G(x,a,a)+G(a,y,z)}{k+G(x,a,a)+G(a,y,z)} \\
&= \frac{G(x,a,a)}{k+G(x,a,a)+G(a,y,z)} + \frac{G(a,y,z)}{k+G(x,a,a)+G(a,y,z)} \\
&\leq \frac{G(x,a,a)}{k+G(x,a,a)} + \frac{G(a,y,z)}{k+G(a,y,z)} \\
&= G_2(x,a,a)+G_2(a,y,z)
\end{aligned}$$

alors

$$G_2(x,y,z) \leq G_2(x,a,a)+G_2(a,y,z).$$

$\square$

Définition 2.3. (*Espace G-métrique symétrique*) *Un espace G-métrique* (X,G) *est dit symétrique si pour tous* $x,y \in X$ *on a :*

$$G(x,y,y) = G(y,x,x).$$

Proposition 2.1. *Soit* (X,G) *un espace G-métrique, alors pour tous* $x,y,z \in X$ *et* $a \in X$ *:*

(1) $G(x,y,z) \leq G(x,x,y)+G(x,x,z)$,

(2) $G(x,y,y) \leq 2G(y,x,x)$,

(3) $G(x,y,z) \leq G(x,a,z)+G(a,y,z)$,

(4) $G(x,y,z) \leq \frac{2}{3}(G(x,y,a)+G(x,a,z)+G(a,y,z))$,

(5) $G(x,y,z) \leq G(x,a,a)+G(y,a,a)+G(z,a,a)$,

(6) $|G(x,y,z)-G(x,y,a)| \leq max\{G(a,z,z),G(z,a,a)\}$,

(7) $|G(x,y,z)-G(x,y,a)| \leq G(x,a,z)$,

(8) $|G(x,y,z)-G(y,z,z)| \leq max\{G(x,z,z),G(z,x,x)\}$,

(9) $|G(x,y,y)-G(y,x,x)| \leq max\{G(y,x,x),G(x,y,y)\}$.

Démonstration. •(1) On a de $(G3)$ et $(G5)$,

$$G(x,y,z) = G(y,x,z) \leq G(y,a,a)+G(a,x,z)$$

en particulier pour $a = x$

$$G(x, y, z) \leq G(y, x, x) + G(x, x, z) = G(x, x, y) + G(x, x, z).$$

•(2) D'après (1) on a

$$G(x, y, z) \leq G(x, x, y) + G(x, x, z),$$

en particulier pour $z = y$

$$G(x, y, y) \leq G(x, x, y) + G(x, x, y),$$

et par suite

$$G(x, y, y) \leq 2G(x, x, y).$$

•(3) On a de $(G5)$

$$G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$$

et de $(G3)$

$$G(x, a, a) \leq G(x, a, z)$$

ceci implique que

$$G(x, y, z) \leq G(x, a, z) + G(a, y, z).$$

•(4) Utilisant $(G3)$ et $(G5)$ on a

$$G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z) \text{ et } G(x, a, a) \leq G(a, x, y),$$

on en déduit que

$$G(x, y, z) \leq G(a, x, y) + G(a, y, z),$$

d'autre part grâce à $(G4)$ et $(G5)$ on a

$$G(x, y, z) = G(y, x, z) \leq G(y, a, a) + G(a, x, z),$$

or de $(G3)$

$$G(y, a, a) \leq G(a, y, z),$$

on conclut que

$$G(x, y, z) \leq G(a, z, y) + G(a, x, z),$$

de la même manière, on trouve

$$G(x,y,z) \leq G(a,z,x) + G(a,x,y),$$

par l'addition on trouve

$$3G(x,y,z) \leq 2(G(x,y,a) + G(x,a,z) + G(a,y,z)),$$

d'où

$$G(x,y,z) \leq \frac{2}{3}(G(x,y,a) + G(x,a,z) + G(a,y,z)).$$

•(5) On a de $(G5)$

$$G(x,y,z) \leq G(x,a,a) + G(a,y,z),$$

de (1)

$$G(a,y,z) \leq G(a,a,y) + G(a,a,z),$$

par conséquent

$$G(x,y,z) \leq G(x,a,a) + G(y,a,a) + G(z,a,a).$$

•(6) Utilisant $(G3)$ et $(G5)$, on obtient

$$G(x,y,z) = G(z,x,y) \leq G(z,a,a) + G(a,x,y),$$

et par suite

$$\begin{aligned} G(x,y,z) - G(x,y,a) &\leq G(z,a,a) \\ &\leq max\{G(a,z,z), G(z,a,a)\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

d'autre part, d'après $(G5)$

$$G(x,y,a) = G(a,x,y) \leq G(a,z,z) + G(z,x,y),$$

d'où

$$-G(x,y,a) \geq -G(a,z,z) - G(z,x,y),$$

ce qui entraine

$$\begin{aligned} (x,y,z) - G(x,y,a) &\geq -G(a,z,z) \\ &\geq -max\{G(a,z,z), G(z,a,a)\}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

combinant (2.1) et (2.2) on aboutit à

$$|G(x,y,z) - G(x,y,a)| \leq \; max\{G(a,z,z), G(z,a,a)\}.$$

•(7) De (3) on a

$$G(z,y,x) \leq G(z,a,x) + G(a,y,x),$$

donc

$$G(x,y,z) - G(x,y,a) \leq G(z,a,x),$$

de même, il résulte de (3) que

$$G(a,y,x) \leq G(a,z,x) + G(z,y,x), \tag{2.3}$$

c'est à dire

$$-G(a,y,x) \geq -G(a,z,x) - G(z,y,x),$$

et par suite

$$G(x,y,z) - G(a,y,x) \geq -G(a,z,x), \tag{2.4}$$

on déduit de (2.3) et (2.4),

$$|G(x,y,z) - G(x,y,a)| \leq G(x,a,z).$$

•(8) Utilisant $(G5)$, on obtient

$$G(x,y,z) \leq G(x,z,z) + G(y,z,z),$$

c'est à dire

$$G(x,y,z) - G(y,z,z) \leq G(x,z,z),$$

d'où

$$G(x,y,z) - G(y,z,z) \leq \max\{G(x,z,z), G(z,x,x)\}, \tag{2.5}$$

d'autre part par application de $(G5)$, on a

$$G(y,z,z) \leq G(z,x,x) + G(x,y,z),$$

ce qui entraine

$$-G(y,z,z) \geq -G(z,x,x) - G(x,y,z),$$

d'où

$$\begin{aligned} G(x,y,z) - G(y,z,z) &\geq -G(z,x,x) \\ &\geq -max\{G(z,x,x), G(x,z,z)\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\tag{2.7}$$

On conclut de (2.5) et (2.6) que

$$|G(x,y,z) - G(y,z,z)| \leq max\{G(x,z,z), G(z,x,x)\}.$$

•(9) On a de (2)

$$G(y,x,x) \leq 2G(x,y,y),$$

ceci implique

$$G(x,y,y) - G(y,x,x) \leq G(y,x,x) \leq max\{G(z,x,x), G(x,y,y)\}, \tag{2.8}$$

et

$$-G(y,x,x) \geq -2G(x,y,y),$$

et par suite

$$G(x,y,y) - G(y,x,x) \geq -G(x,y,y) \geq -max\{G(x,y,y), G(y,x,x)\}, \tag{2.9}$$

il résulte des inégalités (2.8) et (2.9) que

$$|G(x,y,y) - G(y,x,x)| \leq max\{G(y,x,x), G(x,y,y)\}.$$

□

Proposition 2.2. *Soit (X,G) un espace G-métrique, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) (X,G) *est symétrique,*

(2) $G(x,y,y) \leq G(x,y,a)$, *pour tous* x, y *et* $a \in X$,

(3) $G(x, y, z) \leq G(x, y, a) + G(z, y, b)$, *pour tous* $x, y, z, a, b \in X$.

Démonstration. • (1) $\Longrightarrow$ (2)

Supposons que (X, G) est symétrique, c'est à dire $G(x, y, y) = G(x, x, y)$, et donc d'après $(G3)$

$$G(x, y, y) = G(y, x, x) \leq G(y, x, a), \forall x, y, a \in X \quad \text{avec } x \neq a.$$

Si $x = a$

$$G(x, y, y) = G(a, y, y)$$

et on a d'après (1)

$$G(a, y, y) = G(y, a, a) = G(a, a, y) \leq G(a, y, x) \text{ avec } x \neq y$$

si $x = y$ évidente.

• (2) $\Longrightarrow$ (3)

On a de (1) de la Proposition 2.1 et de (2) ci-dessus

$$G(x, y, z) \leq G(x, y, y) + G(z, y, y) \leq G(x, y, a) + G(z, y, b).$$

• (3) $\Longrightarrow$ (1)

On a

$$G(x, y, z) \leq G(x, y, a) + G(z, y, b),$$

d'où, en particulier pour $a = x$ et $b = y$

$$G(x, y, z) \leq G(x, y, x) + G(z, y, y),$$

d'autre part pour $z = y$

$$G(x, y, y) \leq G(y, x, x),$$

et

$$G(y, x, x) \leq G(x, y, y),$$

d'où

$$G(x, y, y) = G(y, x, x).$$

Par conséquent (X, G) est symétrique. $\square$

Corollaire 2.1. *Tout espace métrique est G-métrique.*

Définition 2.4. *Soit (X,G) un espace G-métrique. Soient d_{G_∞}, d_{G_1} et d_{G_p} des fonctions définies sur X^2 par :*

- $d_{G_\infty}(x,y) = max\{G(x,y,y), G(y,x,x)\}$.
- $d_{G_1}(x,y) = G(x,y,y) + G(y,x,x)$.
- $d_{G_p}(x,y) = (G(x,y,y)^p + G(y,x,x)^p)^{\frac{1}{p}}$, *pour* $p > 1$.

On a alors les resultats suivants :

Théorème 2.1. *La fonction d_{G_∞} définit une métrique sur X.*

Démonstration. Nous allons vérifier que d_{G_∞} satisfait les trois propriétés de la métrique.

(1) Il est clair que

$d_{G_\infty}(x,y) = max\{G(x,y,y), G(y,x,x)\} \geq 0$,

si $x = y$ alors $G(x,y,y) = 0$ et $G(y,x,x) = 0$,

par conséquent, $d_{G_\infty}(x,y) = 0$.

Inversement,

si $d_{G_\infty}(x,y) = 0$ alors $G(x,y,y) = 0$ et $G(y,x,x) = 0$, cela signifie $x = y$.

(2)

$$\begin{aligned} d_{G_\infty}(x,y) &= max\{G(x,y,y), G(y,x,x)\} \\ &= max\{G(y,x,x), G(x,y,y)\} \\ &= d_{G_\infty}(y,x). \end{aligned}$$

(3) Observer que

$$\begin{aligned} d_{G_\infty}(x,y) &= max\{G(x,y,y), G(y,x,x)\} \\ &\leq max\{G(x,z,z) + G(z,y,y), G(y,z,z) + G(z,x,x)\} \\ &\leq max\{G(x,z,z), G(z,x,x)\} + max\{G(z,y,y), G(y,z,z)\} \\ &= d_{G_\infty}(x,z) + d_{G_\infty}(z,y). \end{aligned}$$

□

Théorème 2.2. *La fonction d_{G_1} définit une métrique sur X.*

Démonstration. Nous allons vérifier que d_{G_1} satisfait les trois propriétés de la métrique.

(1) On vérifie aisément que

$d_{G_1}(x,y) = G(x,y,y) + G(y,x,x) \geq 0$,

si $x = y$ alors $G(x,y,y) = 0$ et $G(y,x,x) = 0$, par conséquent, $d_{G_1}(x,y) = 0$.

Inversement,

si $d_{G_1}(x,y) = 0$ alors $G(x,y,y) = 0$ et $G(y,x,x) = 0$, cela signifie $x = y$.

(2)

$$\begin{aligned} d_{G_1}(x,y) &= G(x,y,y) + G(y,x,x) \\ &= G(y,x,x) + G(x,y,y) \\ &= d_{G_1}(y,x). \end{aligned}$$

(3) Observer que

$$\begin{aligned} d_{G_1}(x,y) &= G(x,y,y) + G(y,x,x) \\ &\leq G(x,z,z) + G(z,y,y) + G(y,z,z) + G(z,x,x) \\ &\leq G(x,z,z) + G(z,x,x) + G(z,y,y) + G(y,z,z) \\ &= d_{G_1}(x,z) + d_{G_1}(z,y). \end{aligned}$$

□

Remarque 2.1. *Si (X,G) est symétrique. Alors pour tout $x, y \in X$ on a*

$$d_{G_1}(x,y) = 2G(x,y,y),$$

et si (X,G) n'est pas symétrique, on obtient

$$\tfrac{3}{2}G(x,y,y) \leq d_{G_1}(x,y) \leq 3G(x,y,y), \text{ pour tous } x, y \in X.$$

Théorème 2.3. *La fonction d_{G_p} définit une métrique sur X.*

Démonstration. Nous allons vérifier que d_{G_p} satisfait les trois propriétés de la métrique.

(1) Il est clair que

$$d_{G_p}(x,y) = (G(x,y,y)^p + G(y,x,x)^p)^{\frac{1}{p}} \geq 0,$$

si $x = y$ alors $G(x,y,y) = 0$ et $G(y,x,x) = 0$, par conséquent, $d_{G_p}(x,y) = 0$.

Inversement,

si $d_{G_p}(x,y) = 0$ alors $G(x,y,y) = 0$ et $G(y,x,x) = 0$, cela signifie que $x = y$.

(2)

$$\begin{aligned} d_{G_p}(x,y) &= (G(x,y,y)^p + G(y,x,x)^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= (G(y,x,x)^p + G(x,y,y)^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= d_{G_p}(y,x). \end{aligned}$$

(3) Utilisant l'inégalité de Minkowski, on trouve

$$\begin{aligned} d_{G_p}(x,y) &= (G(x,y,y)^p + G(y,x,x)^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq ((G(x,z,z) + G(z,y,y))^p + (G(y,z,z) + G(z,x,x))^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (G(x,z,z)^p + G(z,x,x)^p)^{\frac{1}{p}} + (G(z,y,y)^p + G(y,z,z)^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= d_{G_p}(x,z) + d_{G_p}(z,y). \end{aligned}$$

□

2.2 Topologie G-métrique

Définition 2.5. *Soit (X,G) un espace métrique généralisé, alors pour $x_0 \in X$, $r > 0$, la G-boule de centre x_0 et de rayon r est donnée par :*

$$B_G(x_0,r) = \{y \in X : G(x_0,y,y) < r\}.$$

Proposition 2.3. *Soit (X,G) un espace G-métrique, alors pour tout $x_0 \in X$ et $r > 0$, on a*

(1) *Si $G(x_0,x,y) < r$, alors $x, y \in B_G(x_0,r)$,*

(2) *Si $y \in B_G(x_0,r)$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $B_G(y,\delta) \subseteq B_G(x_0,r)$.*

Démonstration. (1) On a $G(x_0,x,y) < r$ et $G(x_0,x,x) \leq G(x_0,x,y)$, et par suite $G(x_0,x,x) < r$.

(2) Soit $y \in B_G(x_0,r)$ donc $G(x_0,y,y) < r$ et par suite $r - G(x_0,y,y) > 0$, et soit $x \in B_G(y,\delta)$, alors $G(y,x,x) < \delta$, prenons $\delta = r - G(x_0,y,y)$, donc $G(y,x,x) < r - G(x_0,y,y)$, ce qui entraine $G(y,x,x) + G(x_0,y,y) < r$, d'autre part d'après (G5)

$$G(x_0,x,x) \leq G(x_0,y,y) + G(y,x,x),$$

alors $G(x_0, x, x) < r$ d'où $x \in B_G(x_0, r)$,

donc

$$B_G(y, \delta) \subseteq B_G(x_0, r).$$

□

Remarque 2.2. *Il résulte de* (2) *de la proposition précédente que la famille des G-boules :*

$$F = \{B_G(x, r) : x \in X, r > 0\},$$

forme une base pour la topologie $\tau(G)$ *dans* X*, c'est ce qu'on appelle la topologie G-métrique.*

Proposition 2.4. *Soit* (X, G) *un espace G-métrique, alors pour tout* $x_0 \in X$ *et* $r > 0$*, on a :*

(i) $B_G(x_0, \frac{1}{2}r) \subset B_{d_{G_\infty}}(x_0, r) \subset B_G(x_0, r)$,

(ii) $B_G(x_0, \frac{1}{3}r) \subset B_{d_{G_1}}(x_0, r) \subset B_G(x_0, \frac{2}{3}r)$,

(iii) $B_G\Big(x_0, (\frac{1}{2^p+1})^{\frac{1}{p}} r\Big) \subset B_{d_{G_1}}(x_0, r) \subset B_G\Big(x_0, (\frac{2^p}{2^p+1})^{\frac{1}{p}} r\Big)$.

Démonstration. (i) Soit $x \in B_{G_1}(x_0, \frac{1}{2}r)$, alors $G(x_0, x, x) < \frac{r}{2}$,

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} d_{G_\infty}(x_0, x) &= \max\{G(x_0, x, x), G(x, x_0, x_0)\} \\ &\leq \max\{G(x_0, x, x), 2G(x_0, x, x))\} \\ &\leq 2G(x_0, x, x) < r. \end{aligned}$$

Cela implique, $x \in B_{d_{G_\infty}}(x_0, r)$. Soit maintenant $x \in B_{d_{G_\infty}}(x_0, r)$, alors

$$d_{G_\infty}(x_0, x) = \max\{G(x_0, x, x), G(x, x_0, x_0)\} < r,$$

et puisque $G(x_0, x, x) < 2G(x, x_0, x_0)$, donc

$$G(x_0, x, x) \leq \max\{G(x_0, x, x), G(x, x_0, x_0)\} < r,$$

c'est à dire, $G(x_0, x, x) < r$, d'où $x \in B_G(x_0, r)$.

(ii) Soit $x \in B_{G_1}(x_0, \frac{1}{3}r)$, alors $G(x_0, x, x) < \frac{r}{3}$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} d_{G_1}(x_0, x) &= G(x_0, x, x) + G(x, x_0, x_0) \\ &\leq G(x_0, x, x) + 2G(x_0, x, x) \\ &\leq 3G(x_0, x, x) < r, \end{aligned}$$

il résulte que, $x \in B_{d_{G_1}}(x_0, r)$.

Soit $x \in B_{d_{G_1}}(x_0, r)$, alors $d_{G_1}(x_0, x) = G(x_0, x, x) + G(x, x_0, x_0) < r$,

et puisque $G(x_0, x, x) < 2G(x, x_0, x_0)$, on obtient

$$\frac{3}{2}G(x_0, x, x) \leq G(x_0, x, x) + G(x, x_0, x_0) < r,$$

et par suite, $G(x_0, x, x) < \frac{2}{3}r$, on en déduit que $x \in B_G(x_0, \frac{2}{3}r)$.

(iii) Soit $x \in B_G\Big(x_0, \big(\frac{1}{2^p+1}\big)^{\frac{1}{p}} r\Big)$, alors $G(x_0, x, x) < \frac{r}{(2^p+1)^{\frac{1}{p}}}$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} d_{G_p}(x_0, x) &= \Big(G(x_0, x, x)^p + G(x, x_0, x_0)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \Big(G(x_0, x, x)^p + (2G(x_0, x, x))^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \Big(G(x_0, x, x)^p (2^p + 1)\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= (2^p + 1)^{\frac{1}{p}} G(x_0, x, x) < r, \end{aligned}$$

d'où, $x \in B_{d_{G_p}}(x_0, r)$,

et soit $x \in B_{d_{G_p}}(x_0, r)$, alors $d_{G_p}(x_0, x) = (G(x_0, x, x)^p + G(x, x_0, x_0)^p)^{\frac{1}{p}} < r$, et puisque $G(x_0, x, x) < 2G(x, x_0, x_0)$, donc

$$\Big(\frac{2^p + 1}{2^p}\Big)^{\frac{1}{p}} G(x_0, x, x) \leq \Big(G(x_0, x, x)^p + G(x, x_0, x_0)^p\Big)^{\frac{1}{p}} < r,$$

c'est à dire, $G(x_0, x, x) < \big(\frac{2^p+1}{2^p}\big)^{\frac{1}{p}} r$,

ce qui entraine

$$x \in B_G\Big(x_0, \Big(\frac{2^p}{2^p + 1}\Big)^{\frac{1}{p}} r\Big).$$

$\square$

Remarque 2.3. *La topologie G-métrique $\tau(G)$ coincide avec la topologie induite par la distance d_G. Cela a permis de transporter plusieurs concepts et résultats des espaces métriques aux espaces G-métriques.*

2.3 Convergence et Continuité dans un espace G-métrique

Définition 2.6. *Soit (X, G) un espace G-métrique, la suite $(x_n) \subseteq X$ est G-convergente vers x si elle converge vers x dans la topologie G-métrique $\tau(G)$.*

Définition 2.7. *Soit (X, G) un espace G-métrique et Soit (x_n) une suite de X. On dit que (x_n) est G-convergente vers x si $\lim\limits_{n,m\to\infty} G(x, x_n, x_m)$, c'est à dire :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geqslant N \text{ tel que } G(x, x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Proposition 2.5. *Soit (X, G) un espace G-métrique, alors pour une suite $(x_n) \subseteq X$ et $x \in X$ les assertions suivantes sont équivalantes :*

(1) *(x_n) est G-convergente vers x.*

(2) *$d_G(x_n, x) \to 0$, lorsque $n \to \infty$ (c-à-d (x_n) converge vers x par rapport à la métrique d_G).*

(3) *$G(x_n, x_n, x) \to 0$, lorsque $n \to \infty$.*

(4) *$G(x_n, x, x) \to 0$, lorsque $n \to \infty$.*

(5) *$G(x_m, x_n, x) \to 0$, lorsque $n, m \to \infty$.*

Démonstration. •(1) ⇒ (2)
On a (x_n) est G-convergente vers x, c'est à dire
$\lim_{n\to\infty} G(x, x_n, x_m) = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$ et on sait que

$$\begin{aligned} d_G(x_n, x) &= G(x_n, x, x) + G(x, x_n, x_n) \\ &\leq 2G(x_n, x_n, x) + G(x, x_n, x_n) \\ &= 3G(x, x_n, x_n) \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty \end{aligned}$$

comme $d_G(x_n, x) \geq 0$, alors $d_G(x_n, x) \to 0$

• (2) ⇒ (3) On a

$$G(x_n, x_n, x) \leq 2G(x, x, x_n),$$

c'est à dire

$$\frac{1}{2}G(x_n, x_n, x) \leq G(x, x, x_n),$$

d'où

$$-\frac{1}{2}G(x_n, x_n, x) \geq -G(x, x, x_n),$$

et par suite

$$G(x_n, x_n, x) + G(x, x, x_n) - \frac{1}{2}G(x_n, x_n, x) \geq G(x_n, x_n, x) + G(x, x, x_n) - G(x, x, x_n),$$

ce qui entraine

$$d_G(x_n, x) - \frac{1}{2}G(x_n, x_n, x) \geq G(x_n, x_n, x),$$

d'où

$$d_G(x_n, x) \geq \frac{3}{2}G(x_n, x_n, x) \geq 0,$$

il en résulte que,

$$d_G(x_n, x) \to 0,$$

par conséquent,

$$G(x_n, x_n, x) \to 0.$$

•(3) ⇒ (4)

D'après (2) de la Proposition 2.1, $0 \leq G(x_n, x, x) \leq 2G(x_n, x_n, x) \to 0$

donc

$$G(x_n, x, x) \to 0.$$

• (4) ⇒ (5)

Utilisant (1) de la Proposion 2.1 $G(x, x_n, x_m) \leq G(x, x, x_n) + G(x, x, x_m) \to 0$,

donc

$$G(x, x_n, x_m) \to 0.$$

• (5) ⇒ (1)

par définition comme $G(x, x_n, x_m) \to 0$, alors (x_n) est G-convergente vers x. □

Définition 2.8. *Soient (X, G) et (X', G') des espaces G-métriques. Une fonction $f : X \to X'$ est G-continue en un point $x_0 \in X$ si $f^{-1}(B'_G(f(x_0), r)) \in \tau(G)$, pour tout $r > 0$.*

On dit que f est G-continue sur X si elle est continue en tout point de X, c'est à dire continue en X muni de la topologie $\tau(G)$ à X' muni de la topologie $\tau(G')$.

Proposition 2.6. *Soient (X, G) et (X', G') deux espaces G-métriques, alors une fonction $f : X \to X'$ est G-continue en un point $x \in X$ si seulement si elle est G-séquentiellement continue en x, autrement dit chaque fois que (x_n) est G-convergente vers x, nous avons $f(x_n)$ est G-convergente vers $f(x)$.*

Proposition 2.7. *Soit (X, G) un espace G-métrique, alors la fonction G est continue en ses trois variables.*

Démonstration. Supposons (x_k), (y_m) et (z_n) sont G-convergentes vers x,y et z respectivement, alors d'après $(G5)$ On a

$$G(x, y, z) \leq G(y, y_m, y_m) + G(y_m, x, z),$$

$$G(x, y_m, z) \leq G(x, x_k, x_k) + G(x_k, y_m, z),$$

$$G(z, y_m, x_k) \leq G(z, z_n, z_n) + G(z_n, y_m, x_k),$$

de ces trois inégalités :

$$G(x, y, z) \leq G(y, y_m, y_m) + G(x, x_k, x_k) + G(x_k, y_m, z),$$

c'est à dire

$$G(x, y, z) \leq G(y, y_m, y_m) + G(x, x_k, x_k) + G(z, z_n, z_n) + G(z_n, y_m, x_k),$$

d'où

$$G(x, y, z) - G(x_k, y_m, z_n) \leq G(x, x_k, x_k) + G(y, y_m, y_m) + G(z, z_n, z_n),$$

de même, on obtient

$$G(x_k, y_m, z_n) - G(x, y, z) \leq G(x_k, x, x) + G(y_m, y, y) + G(z_n, z, z),$$

en vertu de (3) de la Proposition 2.1, on trouve

$$G(x_k, y_m, z_n) - G(x, y, z) \leq 2(G(x, x_k, x_k) + G(u, y_m, y_m) + G(z, z_n, z_n)),$$

et par suite

$$|G(x_k, y_m, z_n) - G(x, y, z)| \leq 2(G(x, x_k, x_k) + G(u, y_m, y_m) + G(z, z_n, z_n)),$$

et comme $G(x, x_k, x_k) + G(u, y_m, y_m) + G(z, z_n, z_n) \to 0$ quand $k, n, m \to \infty$
on en déduit que $\lim\limits_{n,m,k \to \infty} G(x_k, y_m, z_n) = G(x, y, z)$. □

2.4 Complétude d'un espace G-métrique

Définition 2.9. *Soit (X, G) un espace G-métrique. Une suite $(x_n) \subseteq X$ est dite G-Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon$, pour tous n, m et $l \geq N$.*

Proposition 2.8. *Soit (X, G) un espace G-métrique. les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *la suite (x_n) est G-Cauchy,*

(2) $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n, m \geq N$ *tel que* $G(x_n, x_m, x_m) < \varepsilon$,

(3) *(x_n) est une suite de Cauchy dans l'espace métrique (X, d_G).*

Démonstration. • (1) $\Rightarrow$ (2) Soit (x_n) une suite de Cauchy c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon, \forall n, m, l \geq N_0.$$

En particulier pour $l = m$

$$G(x_n, x_m, x_m) < \varepsilon, \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

• (2) $\Rightarrow$ (3) soit $\varepsilon > 0$, donc $\exists N \in \mathbb{N}$ telque $G(x_n, x_m, x_m) < \frac{\varepsilon}{3}$ et on a

$$\begin{aligned} d_G(x_n, x_m) &= G(x_n, x_m, x_m) + G(x_m, x_n, x_n) \\ &< 2G(x_n, x_m, x_m) + G(x_n, x_m, x_m) \\ &< 3G(x_n, x_m, x_m) < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

et par suite

$$d_G(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

par conséquent, (x_n) est de Cauchy dans l'espace (X, d_G).

• (3) $\Rightarrow$ (1) Supposons (x_n) une suite de Cauchy dans l'espace métrique (X, d_G), alors $\forall \varepsilon > 0, \forall n, m, l \geq N_0, \exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$d_G(x_n, x_m) < \tfrac{3\varepsilon}{4} \text{ et } d_G(x_n, x_l) < \tfrac{3\varepsilon}{4},$$

il s'ensuit

$$G(x_n, x_l, x_l) + (x_l, x_n, x_n) < \tfrac{3\varepsilon}{4} \text{ et } G(x_n, x_m, x_m) + (x_m, x_n, x_n) < \tfrac{3\varepsilon}{4},$$

donc

$$G(x_n, x_l, x_l) + (x_l, x_n, x_n) + G(x_n, x_m, x_m) + (x_m, x_n, x_n) < \frac{3\varepsilon}{2},$$

d'autre part, de la Proposition 2.1

$$\begin{aligned} G(x_n, x_l, x_l) + G(x_l, x_n, x_n) + G(x_n, x_m, x_m) + G(x_m, x_n, x_n) &> \frac{1}{2}G(x_l, x_n, x_n) + G(x_l, x_n, x_n) \\ &+ \frac{1}{2}G(x_m, x_n, x_n) + G(x_m, x_n, x_n) \\ &= \frac{1}{2}\Big(G(x_l, x_n, x_n) + G(x_m, x_n, x_n)\Big) \\ &+ G(x_l, x_n, x_n) + G(x_m, x_n, x_n), \end{aligned}$$

utilisant (1) de la Proposition 2.1, on obtient

$$\begin{aligned} G(x_n, x_l, x_l) + G(x_l, x_n, x_n) + G(x_n, x_m, x_m) + G(x_m, x_n, x_n) &> \frac{1}{2}G(x_n, x_m, x_l) + G(x_n, x_m, x_l) \\ &= \frac{3}{2}G(x_n, x_m, x_l), \end{aligned}$$

et par suite

$$\frac{3}{2}G(x_n, x_m, x_l) < d_G(x_n, x_m) + d_G(x_n, x_l) < 2\frac{3\varepsilon}{4},$$

d'où

$$\frac{3}{2}G(x_n, x_m, x_l) < d_G(x_n, x_m) + d_G(x_n, x_l) < \frac{3\varepsilon}{2},$$

il en résulte que

$$G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite (x_n) est G-Cauchy. □

Corollaire 2.2. *Toute suite G-convergente dans un espace G-métrique est G-Cauchy.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite G-convergente vers x dans un espace G-métrique (X, G), donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n, m \geq N_0$

$$G(x_n, x_m, x) < \tfrac{\varepsilon}{3} \;\text{ et }\; G(x_n, x_l, x) < \tfrac{\varepsilon}{3},$$

en appliquant l'inégalité rectangulaire,

$$\begin{aligned} G(x_n, x_m, x_l) &< G(x_n, x, x) + G(x, x_m, x_l) \\ &< 2G(x_n, x_n, x) + G(x, x_m, x_l) \\ &< 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite (x_n) est une suite G-Cauchy. □

Corollaire 2.3. *Soit (X, G) un espace G-métrique. Alors toute suite extraite d'une suite G-Cauchy est G-Cauchy.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite G-Cauchy et $(x_{\varphi(n)})$ une suite extraite avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, une application strictement croissante.
On sait d'après le Lemme 1.1 que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(n) \geq n$,
donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall m, n, l \in \mathbb{N} \geq N_\varepsilon \Rightarrow G(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(m)}, x_{\varphi(l)}) < \varepsilon,$$

ce qui montre $(x_{\varphi(n)})$ est G-Cauchy. □

Corollaire 2.4. *Soit (X, G) un espace G-métrique. Alors toute suite G-Cauchy admettant une sous-suite G-convergente est G-convergente.*

Définition 2.10. *Un espace G-métrique (X, G) est dit G-complet si toute suite G-Cauchy dans (X, G) est G-convergente dans (X, G).*

Proposition 2.9. *Un espace G-métrique est G-complet si et seulement si (X, d_G) est un espace métrique complet.*

Démonstration. • $\Rightarrow$
Soit (x_n) une suite de Cauchy dans (X, d_G) c'est à dire $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m > N$ tel que

$$d_G(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

d'après la Remarque 2.1

$$\frac{3}{2}G(x_n, x_m, x_m) \leq d_G(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

et par suite

$$G(x_n, x_m, x_m) \leq \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon',$$

on déduit de la Proposition 2.8 que (x_n) est G-Cauchy donc elle est G-convergente.

Maintenant Soit (x_n) est G-convergente, d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N,\ G(x, x_n, x_m) < \tfrac{\varepsilon}{2},$$

utilisant $(G3)$, on obtient

$$G(x_n, x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } G(x, x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2},$$

par l'addition on trouve

$$d_G(x_n, x) < \varepsilon,$$

donc (x_n) est convergente. Alors un espace métrique (d_G, X) est complet si l'espace G-métrique (X, G) est G-complet.

• $\Leftarrow$

Soit (x_n) une suite G-Cauchy c'est à dire $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \; et \; l \geq N$

$$G(x_n, x_m, x_l) < \frac{\varepsilon}{2},$$

en particulier pour $l = m$, on obtient

$$G(x_n, x_m, x_m) < \frac{\varepsilon}{2},$$

d'autre part si on prend $l = n$, on obtient

$$G(x_n, x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2},$$

par l'addition on trouve

$$d_G(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Alors (x_n) est de Cauchy donc elle est convergente.

Maintenant, Soit (x_n) converge vers x, et par suite $d_G(x_n, x) < \varepsilon$,

d'après (2) de la Proposition 2.5, on déduit que (x_n) est G-convergente.

Ceci implique qu'un espace G-métrique (X, G) est G-complet si l'espace métrique (X, d_G) est complet. $\square$

2.5 Compacité dans un espace G-métrique :

Définition 2.11. *Soit* (X, G) *un espace G-métrique, et soit* $\varepsilon > 0$.

• *Un ensemble* $A \subset X$ *est dit un* ε*-recouvrement de* (X, G) *si pour tout* x *dans* X*, il existe au moins un point* $a \in A$ *tel que* $x \in B_G(a, \varepsilon)$.

• *Si l'ensemble* A *est fini, alors* A *est appelé un* ε*-recouvrement fini de* (X, G).

• *Si* A *est un* ε*-recouvrement de* (X, G)*, donc*

$$X = \cup_{a \in A} B_G(a, \varepsilon).$$

Définition 2.12. *Un espace G-métrique* (X, G) *est dit G-totalement borné si pour tout* $\varepsilon > 0$*, Il existe un* ε*-recouvrement fini.*

Définition 2.13. *Un espace G-métrique* (X, G) *est dit compact s'il est G-complet et G-totalement borné.*

Proposition 2.10. *Pour un espace G-métrique* (X, G) *les éléments suivants sont équivalents :*

(1) (X, G) *est un espace G-métrique complet.*

(2) $(X, \tau(G))$ *est un espace topologique compact.*

(3) (X, d_G) *est un espace métrique compact.*

(4) (X, G) *est G-séquentiellement compact, autrement dit si la suite* $(x_n) \subseteq X$ *est tel que* $sup\{G(x_n, x_m, x_l) : n, m, l \in \mathbb{N}\} < \infty$*, alors* (x_n) *possède une sous-suite G-convergente.*

pour plus de détails voir [13].

CHAPITRE 3

QUELQUES TYPES DE THÉORÈMES DU POINT FIXE DANS UN ESPACE G-MÉTRIQUE

Le but de ce chapitre est l'étude d'existence et d'unicité de quelques théorèmes du point fixe dans un espace métrique généralisé. On commence par le théorème du point fixe d'une application contratante ainsi que d'autres théorèmes de point fixe plus général. En fin, nous terminons par les théorèmes du point fixe commun pour les applications compatibles et les applications faiblement compatibles.
Nous avons détaillé les articles [12, 14].

3.1 Point fixe d'une application G-contractante

Mustafa dans [11] a considéré le principe d'une application contractante dans le contexte des espaces G-métriques, ce principe assure l'existence et l'unicité du point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique généralisé complet dans lui même.

Définition 3.1. *Soit* (X, G) *un espace G-métrique et* $f : X \to X$ *une application.* f *est* *dite G-contractante s'il existe $\theta \in [0, 1[$ tel que pour tout $x, y \in X$ on a*

$$G(fx, fy, fz) \leq \theta G(x, y, z).$$

Théorème 3.1. *Soit (X, G) un espace G-métrique complet et $T : X \to X$ une application G-contractante, alors T admet un point fixe unique $u \in X$, et T est G-continue en u.*

Démonstration. • Supposons que T est G-contractante, alors pour tous $x, y \in X$, on a

$$G(Tx, Ty, Ty) \leq kG(x, y, y),$$

$$et$$

$$G(Ty, Tx, Tx) \leq kG(y, y, x),$$

par l'addition et la définition de la métrique d_G, on trouve

$$d_G(Tx, Ty) \leq kd_G(x, y).$$

Alors l'existence et l'unicité du point fixe découle du Théorème 1.3.

• Pour montrer que T est G-continue en u, soit $(y_n) \subseteq X$ une suite telle que $\lim_{n\to\infty} y_n = u$. Par hypothèse, on a

$$G(u, T(y_n), T(y_n)) \leq kG(u, y_n, y_n).$$

En prenant la limite quand $n \to \infty$, on trouve $G(u, T(y_n), T(y_n)) \to 0$,
donc, en vertu de la Proposition 2.6, on a $T(y_n) \to u = T(u)$ ce qui implique que T est G-continue en u. □

3.2 Version G-métrique de théorème du point fixe de Reich

Théorème 3.2. *Soit (X, G) un espace G-métrique complet, et soit $T : X \to X$ une application satisfaisant l'une des conditions suivantes :*

$$G(T(x), T(y), T(z)) \leq \{aG(x, y, z) + bG(x, T(x), T(x)) + cG(y, T(y), T(y)) + dG(z, T(z), T(z))\} \tag{3.1}$$

ou

$$G(T(x),T(y),T(z)) \leq \{aG(x,y,z)+bG(x,x,T(x))+cG(y,y,T(y))+dG(z,z,T(z))\} \tag{3.2}$$

pour tout $x,y,z \in X$ *et* $a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$ *où* $0 \leq a+b+c+d < 1$, *alors* T *admet un point fixe unique* $u \in X$, *et* T *est G-continue en* u.

Démonstration. • Supposons que T vérifie la condition (3.1), alors pour tout $x,y \in X$, on a

$$\begin{aligned} G(Tx,Ty,Ty) &\leq aG(x,y,y)+bG(x,Tx,Tx)+(c+d)G(y,Ty,Ty), \\ G(Ty,Tx,Tx) &\leq aG(y,x,x)+bG(y,Ty,Ty)+(c+d)G(x,Tx,Tx). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Par l'addition on trouve

$$G(Tx,Ty,Ty)+G(Ty,Tx,Tx) \leq a\Big(G(x,y,y)+G(y,x,x)\Big)+(b+c+d)\Big(G(x,Tx,Tx)+G(y,Ty,Ty)\Big).$$

Supposons que (X,G) est symétrique, alors par définition de la métrique d_G et la Remarque 2.1, on obtient

$$d_G(Tx,Ty) \leq ad_G(x,y)+\frac{c+d+b}{2}d_G(x,Tx)+\frac{c+d+b}{2}d_G(y,Ty), \forall y \in X. \tag{3.4}$$

Dans ce cas, puisque $0 < a+b+c+d < 1$, alors l'existence et l'unicité du point fixe découle du Théorème 1.4.

Cependant, si (X,G) n'est pas symétrique alors par définition de la métrique d_G et la Remarque 2.1, on a

$$G(x,Tx,Tx) \leq \frac{2}{3}\, d_G(x,Tx) \;\; et \;\; G(y,Ty,Ty) \leq \frac{2}{3}\, d_G(y,Ty)$$

ceci implique que

$$d_G(Tx,Ty) \leq ad_G(x,y)+\frac{2(c+d+b)}{3}d_G(x,Tx)+\frac{2(c+d+b)}{3}d_G(y,Ty), \tag{3.5}$$

pour tout $x,y \in X$, alors la condition (3.5) ne donne aucune information sur cette application puisque $0 < a+\frac{2(c+d+b)}{3}+\frac{2(c+d+b)}{3}$ n'est pas forcément inférieur à 1. Mais cela peut être prouvé grâce aux propriétés de la G-métrique.

Soit $x_0 \in X$ un point arbitraire, et définissons la suite (x_n) par $x_{n+1} = T(x_n)$. De (3.1), on a

$$G(T(x_{n-1}), T(x_n), T(x_n)) \leq aG(x_{n-1}, T(x_{n-1}), T(x_{n-1})) + bG(x_{n-1}, T(x_{n-1}), T(x_{n-1})) \\ +(c+d)G(x_n, T(x_n), T(x_n))$$

et par suite

$$\begin{aligned} G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) &\leq a\; G(x_{n-1}, x_n, x_n) + b\; G(x_{n-1}, x_n, x_n) \\ &+(c+d)\; G(x_n, x_{n+1}, x_{n-1}), \end{aligned} \tag{3.6}$$

d'où

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq \frac{a+b}{1-(c+d)} G(x_{n-1}, x_n, x_n). \tag{3.7}$$

Soit $r = \frac{a+b}{1-(c+d)}$, alors $0 \leq r < 1$ puisque $0 \leq a+b+c+d < 1$.
On obtient,

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq rG(x_{n-1}, x_n, x_n). \tag{3.8}$$

par récurrence, on trouve

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq r^n G(x_0, x_1, x_1). \tag{3.9}$$

De plus, pour tout $n, m \in N$ tel que $n < m$, on a par application de l'inégalité rectangulaire

$$\begin{aligned} G(x_n, x_m, x_m) &\leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \ldots + \\ &+ G(x_{m-1}, x_m, x_m) \\ &\leq (r^n + r^{n+1} + \ldots + r^{m-1}) G(x_0, x_1, x_1) \\ &\leq r^n \frac{1-r^{m-n}}{1-r} G(x_0, x_1, x_1) \\ &\leq \frac{r^n}{1-r} G(x_0, x_1, x_1), \end{aligned} \tag{3.10}$$

par passage à la limite dans l'inégalité précédente, quand $n, m \to \infty$ il vient que $\lim G(x_n, x_m, x_m) = 0$. Ainsi (x_n) est une suite G-Cauchy.
La complétude de (X, G) assure l'existence d'un certain $u \in X$ telle que (x_n) est G-convergente vers u.
Supposons que $Tu \neq u$, alors

$$G(x_n, T(u), T(u)) \leq aG(x_{n-1}, u, u) + bG(x_{n-1}, x_n, x_n) + (c+d)G(u, T(u), T(u)), \tag{3.11}$$

en prenant la limite quand $n \to \infty$, et en utilisant le fait que la fonction G est continue, on trouve $G(u, T(u), T(u)) \leq (c+d)G(u, T(u), T(u))$. ce qui aboutit à une contradiction d'où $u = T(u)$.

• Pour prouver l'unicité, supposons que $u \neq v$ telle que $T(v) = v$, alors

$$G(u, v, v) \leq aG(u, v, v) + bG(u, T(u), T(u)) + (c+d)G(v, T(v), T(v)) = aG(u, v, v), \tag{3.12}$$

ce qui implique que $u = v$.

• Pour montrer que T est G-continue en u, soit $(y_n) \subseteq X$ une suite telle que $\lim_{n\to\infty} y_n = u$. Par hypothèse

$$\begin{aligned} G(u, T(y_n), T(y_n)) &\leq aG(u, y_n, y_n) + bG(u, Tu, Tu) + (c+d)G(y_n, T(y_n), T(y_n)) \\ &= aG(u, y_n, y_n) + (c+d)G(y_n, T(y_n), T(y_n)), \end{aligned} \tag{3.13}$$

d'autre part, on a

$$G(y_n, T(y_n), T(y_n)) \leq G(y_n, u, u) + G(u, T(y_n), T(y_n)),$$

alors

$$G(u, T(y_n), T(y_n)) \leq \frac{a}{1-(c+d)} G(u, y_n, y_n) + \frac{c+d}{1-(c+d)} G(y_n, u, u).$$

En prenant la limite quand $n \to \infty$, il vient $G(u, T(y_n), T(y_n)) \to 0$ et donc, gràce à la Proposition 2.6, $T(y_n) \to u = Tu$. Ce qui prouve que T est G-continue en u.

Si T satisfaisant la condition (3.2), alors l'argument de démonstration est similaire à celui ci-dessus.

Cependant, pour montrer que la suite (x_n) est G-Cauchy, on commence par écrire

$$G(x_n, x_n, x_{n+1}) \leq aG(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n) + (b+c)G(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n) + dG(x_n, x_n, x_{n+1}), \tag{3.14}$$

alors

$$G(x_n, x_n, x_{n+1}) \leq \frac{a+b+c}{1-d} G(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n). \tag{3.15}$$

Soit $t = \frac{a+b+c}{1-d}$, donc $0 \leq t < 1$ puisque $0 \leq a+b+c+d < 1$. Par récurrence, on trouve que

$$G(x_n, x_n, x_{n+1}) \leq t^n G(x_0, x_0, x_1). \tag{3.16}$$

Alors pour tout $n, m \in N$ tel que $n < m$, en utilisant l'inégalité rectangulaire, on obtient

$$G(x_n, x_n, x_m) \leq \frac{t^n}{1-t} G(x_0, x_0, x_1).$$

□

Corollaire 3.1. *Soit (X, G) un espace G-métrique complet et soit $T : X \to X$ une application satisfaisant l'une des conditions suivantes :*

$$G(T^m(x), T^m(y), T^m(z)) \leq aG(x, y, y) + bG(x, T^m(x), T^m(x)) + cG(y, T^m(y), T^m(y)) \\ +d\, G(z, T^m(z), T^m(z)), \tag{3.17}$$

ou

$$G(T^m(x), T^m(y), T^m(z)) \leq aG(x, y, y) + bG(x, x, T^m(x)) + cG(y, y, T^m(y)) + dG(z, z, T^m(z)), \tag{3.18}$$

pour tout $x, y, z \in X$, où $0 \leq a + b + c + d < 1$. Alors T admet un unique point fixe $u \in X$, et T^m est G-continue en u.

Démonstration. En vertu du théorème précédent, T^m admet un point fixe unique $u \in X$, c'est à dire $T^m(u) = u$. De plus $T(u) = T(T^m(u)) = T^{m+1}(u) = T^m(T(u))$, donc $T(u)$ est un autre point fixe pour T^m et par conséquent $Tu = u$. □

Théorème 3.3. *Soit (X, G) un espace G-métrique complet, et soit $T : X \to X$ une application satisfaisant l'une des conditions suivantes :*

$$G(T(x), T(y), T(z)) \leq k \max \begin{Bmatrix} G(x, T(x), T(x)), \\ G(y, T(y), T(y)), \\ G(z, T(z), T(z)) \end{Bmatrix}, \tag{3.19}$$

ou

$$G(T(x), T(y), T(z)) \leq k \max \begin{Bmatrix} G(x, x, T(x)), \\ G(y, y, T(y)), \\ G(z, z, T(z)) \end{Bmatrix}, \tag{3.20}$$

pour tout $x, y, z \in X$, où $0 \leq k < 1$. Alors T possède un point fixe unique $u \in X$, et T est G-continue en u.

Démonstration. Supposons que T vérifie la condition (3.19), alors pour tout $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} G(Tx, Ty, Ty) &\leq k \max\{G(x, Tx, Tx), G(y, Ty, Ty)\}, \\ G(Ty, Tx, Tx) &\leq k \max\{G(y, Ty, Ty), G(x, Tx, Tx)\}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Supposons que (X, G) est symétrique, alors par définition de la métrique d_G et la Remarque 2.1, on obtient

$$d_G(Tx, Ty) \leq k \max\{d_G(x, Tx), d_G(y, Ty)\}, \quad \forall x, y \in X. \tag{3.22}$$

Puisque $k < 1$, alors l'existence et l'unicité du point fixe découle d'un théorème dans l'espace métrique (X, d_G) (voir [3]).

Si (X, G) n'est pas symétrique, alors par définition de la métrique d_G et la Remarque 2.1, on a

$$d_G(Tx, Ty) \leq \frac{4k}{3} \max\{d_G(x, Tx), d_G(y, Ty)\}, \forall x, y \in X. \tag{3.23}$$

Alors, l'espace métrique (X, d_G) ne donne aucune information sur cette application puisque $\frac{4k}{3}$ n'est pas forcément inférieur à 1, mais nous allons le prouver via les propriétés de l'espace G-métrique.

Soit $x_0 \in X$ un point arbitraire, et définissons la suite (x_n) par $x_{n+1} = T(x_n)$, grâce à (3.19), nous pouvons vérifier que

$$\begin{aligned} G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) &\leq k \max\{G(x_{n-1}, x_n, x_n), G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\} \\ &= kG(x_{n-1}, x_n, x_n) \quad \textit{puisque } 0 \leq k < 1, \end{aligned} \tag{3.24}$$

procédons de la même manière, nous trouverons

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k^n G(x_0, x_1, x_1). \tag{3.25}$$

Utilisant l'inégalité rectanglaire, on a pour tout $n, m \in N; n < m$,

$$\begin{aligned} G(x_n, x_m, x_m) &\leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) \ldots G(x_{m-1}, x_m, x_m) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + \ldots + k^{m-1}) G(x_0, x_1, x_1) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} G(x_0, x_1, x_1). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Alors, par passage à la limite, on trouve $\lim G(x_n, x_m, x_m) = 0$, quand $n, m \to \infty$, et donc (x_n) est une suite G-Cauchy.

Comme (X, G) est complet, il existe $u \in X$ tel que $(x_n) \to u$.

Supposons que $Tu \neq u$, alors $G(x_{n+1}, T(u), T(u)) \leq kmax\{G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}), G(u, T(u), T(u))\}$, en prenant la limite quand $n \to \infty$, et en utilisant le fait que la fonction G est continue, on obtient que $G(u, T(u), T(u)) \leq kG(u, T(u), T(u))$.

C'est une contradiction, d'où $u = T(u)$.

- Pour prouver l'unicité, supposons que $v \neq u$ est un autre point fixe de T c'est à dire $T(v) = v$, alors

$$G(u, v, v) \leq kmax\{G(v, v, v), G(u, u, u)\} = 0,$$

ce qui implique que $u = v$.

- Pour montrer que T est G-continue en u, soit $y_n \subseteq X$ une suite telle que $\lim_{n\to\infty} y_n = u$, alors

$$G(u, T(y_n), T(y_n)) \leq k \max\{G(u, T(u), T(u)), G(y_n, T(y_n), T(y_n))\} = kG(y_n, T(y_n), T(y_n)), \tag{3.27}$$

et

$$G(y_n, T(y_n), T(y_n)) \leq G(y_n, u, u) + G(u, T(y_n), T(y_n)),$$

alors

$$G(u, T(y_n), T(y_n)) \leq \frac{k}{1-k} G(y_n, u, u).$$

En prenant la limite quand $n \to \infty$, il résulte que $G(u, T(y_n), T(y_n)) \to 0$, et donc d'après la Proposition 2.6, $T(y_n) \to u = Tu$, par conséquent T est G-continue en u. □

Corollaire 3.2. *Soit (X, G) un espace G-métrique complet et soit $T : X \to X$ une application satisfaisant l'une des conditions suivantes pour un certain $m \in N$:*

$$G(T^m(x), T^m(y), T^m(z)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(x, T^m(x), T^m(x)), \\ G(y, T^m(y), T^m(y)), \\ G(z, T^m(z), T^m(z)) \end{array} \right\}, \tag{3.28}$$

ou

$$G(T^m()x, T^m(y), T^m(z)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(x, x, T^m(x)), \\ G(y, y, T^m(y)), \\ G(z, z, T^m(z)) \end{array} \right\}, \tag{3.29}$$

pour tout $x, y, z \in X$, alors T possède un unique point fixe $u \in X$ et T^m est G-continue en u.

Démonstration. Nous utilisons le même argument que de la démonstration du Corollaire 3.1. □

3.3 Analogue du théorème du point fixe de Chatterjea dans un espace G-métrique

Théorème 3.4. *Soit (X, G) un espace G-métrique complet, et soit $T : X \to X$, une application satisfaisant l'une de ces conditions*

$$G(T(x), T(y), T(y)) \leq a\{G(x, T(y), T(y)) + G(y, T(x), T(x))\} \tag{3.30}$$

ou

$$G(T(x), T(y), T(y)) \leq a\{G(x, x, T(y)) + G(y, y, T(x))\}, \tag{3.31}$$

pour tout $x, y \in X$, où $a \in [0, 1/2[$, alors T possède un unique point fixe $u \in X$, et T est G-continue en u.

Démonstration. Supposons que T vérifie la condition (3.30), alors

$$\begin{aligned} G(Tx, Ty, Ty) &\leq a\{G(y, Tx, Tx) + G(x, Ty, Ty)\}, \\ G(Ty, Tx, Tx) &\leq a\{G(x, Ty, Ty) + G(y, Tx, Tx)\}, \end{aligned} \tag{3.32}$$

pour tout $x, y \in X$.

Supposons que (X, G) est symétrique, alors par définition de la métrique d_G et la Remarque 2.1, on a

$$d_G(Tx, Ty) \leq a\{d_G(x, Ty) + d_G(y, Tx)\} \forall x, y \in X. \tag{3.33}$$

Puisque $0 \leq 2a < 1$, alors l'existence et l'unicité du point fixe découlent du Théorème 1.5 dans l'espace métrique (X, d_G).

Dans le cas où (X, G) n'est pas symétrique, alors par la définition de la métrique d_G et la Remarque 2.1,

on a

$$d_G(Tx, Ty) \leq \frac{4a}{3} d_G(x, Ty) + \frac{4a}{3} d_G(y, Tx) \ \ \forall x, y \in X \tag{3.34}$$

Ainsi, l'espace métrique (X, d_G) ne donne aucune information sur cette application puisque $\frac{8a}{3}$ n'est pas forcément inférieur à 1. Mais cela peut être prouver en utilisant les propriétés de l'espace G-métrique.
Soit $x_0 \in X$, nous avons

$$G(x_n, x_{n-1}, x_{n+1}) \leq a\{G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_n, x_n, x_n)\} = aG(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}), \tag{3.35}$$

de plus

$$G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq aG(x_{n-1}, x_n, x_n) + aG(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), \tag{3.36}$$

ainsi nous avons

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq \frac{a}{1-a} G(x_{n-1}, x_n, x_n). \tag{3.37}$$

Soit $k = \frac{a}{1-a}$, donc $0 \leq k < 1$ puis poursuivons cette procédure, on aura que

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k^n G(x_0, x_1, x_1).$$

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $n < m$, on a par l'inégalité rectangulaire

$$\begin{aligned} G(x_n, x_m, x_m) &\leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) \dots \\ &+ G(x_{m-1}, x_m, x_m) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} \dots k^{m-1}) G(x_0, x_1, x_1) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} G(x_0, x_1, x_1). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Alors, $\lim G(x_n, x_m, x_m) = 0$, quand $n, m \to \infty$, et donc, (x_n) est une suite G-Cauchy. La complétude de (X, G) assure l'existence d'un certain $u \in X$ tel que x_n est G-convergente vers u.
Supposons que $Tu \neq u$, alors

$$G(x_n, T(u), T(u)) \leq a\{G(x_{n-1}, T(u), T(u)) + G(u, x_n, x_n)\}. \tag{3.39}$$

par passage à la limite quand $n \to \infty$, et en utilisant le fait que la fonction G est continue, alors $G(u, T(u), T(u)) \leq aG(u, T(u), T(u))$, une contradiction, d'où $u = Tu$.

• Pour démontrer l'unicité, supposons que $v \neq u$ tel que $Tv = v$, alors

$$G(u, v, v) \leq a \max\{G(u, v, v) + G(v, u, u)\},$$

donc

$$G(u, v, v) \leq kG(v, u, u), \tag{3.40}$$

où $k = \frac{a}{1-a}$, de la même façon, on trouve $G(u, v, v) \leq k^2 G(u, v, v)$, ce qui implique que $u = v$.

• Pour montrer que T est G-continue en u, soit $(y_n) \subseteq X$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = u$, alors

$$G(u, T(y_n), T(y_n)) \leq a\{G(u, T(y_n), T(y_n)) + G(y_n, T(u), T(u))\}, \tag{3.41}$$

ce qui entraine $G(u, T(y_n), T(y_n)) \leq \frac{a}{1-a} G(y_n, T(u), T(u))$.
par passage à la limite quand $n \to \infty$, on trouve $G(u, T(y_n), T(y_n)) \to 0$. D'après la Proposition 2.6, on obtient $T(y_n) \to u = Tu$, ce qui implique que T est G-continue en u. □

3.4 Autres théorèmes du point fixe

Théorème 3.5. *Soit (X, G) un espace G-métrique complet et soit $T : X \to X$ une application satisfaisant la condition suivante pour tout $x, y, z \in X$,*

$$G(T(x), T(y), T(z)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(x, y, z), G(x, T(x), T(x)), G(y, T(y), T(y)), \\ G(z, T(z), T(z)), G(x, T(y), T(y)), \\ G(y, T(z), T(z)), G(z, T(x), T(x)) \end{array} \right\}, \tag{3.42}$$

où $k \in [0, \frac{1}{2}[$. Alors T admet un unique point fixe $u \in X$ et T est G-continue en u.

Démonstration. • Supposons que T vérifie la condition (3.42), soit $x_0 \in X$ un point arbitraire, et définissons la suite (x_n) par $x_{n+1} = T(x_n)$. En appliquant (3.42), on obtient

$$\begin{aligned} G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) &= G(x_n, T(x_n), T(x_n)) \\ &= G(T(x_{n-1}), T(x_n), T(x_n)) \\ &\leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(x_{n-1}, x_n, x_n), G(x_{n-1}, T(x_{n-1}), T(x_{n-1})), \\ G(x_n, T(x_n), T(x_n)), G(x_{n-1}, T(x_n), T(x_n)), \\ G(x_n, T(x_n), T(x_n)), G(x_n, T(x_{n-1}), T(x_{n-1})), \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

alors

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k \max\{G(x_{n-1}, x_n, x_n), G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}), G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\}, \tag{3.43}$$

donc

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k \max\{G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}), G(x_{n-1}, x_n, x_n)\}, \tag{3.44}$$

mais d'après (G5), on a

$$G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), \tag{3.45}$$

ainsi (3.44) devient

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k \max\{G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x, x_{n+1}, x_{n+1}), G(x_{n-1}, x_n, x_n)\}, \tag{3.46}$$

donc

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k\{G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\}, \tag{3.47}$$

et par suite

$$(1-k)G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq kG(x_{n-1}, x_n, x_n),$$

ce qui implique

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq \frac{k}{1-k} G(x_{n-1}, x_n, x_n), \tag{3.48}$$

soit $q = \frac{k}{1-k}$ alors $q < 1$. Par récurrence on trouve

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^n G(x_0, x_1, x_1), \tag{3.49}$$

alors, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, tel que $n < m$, d'après (3.49) et l'inégalité rectangulaire on obtient

$$\begin{aligned}
G(x_n, x_m, x_m) &\leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+2}, x_{n+3}) + \ldots \\
&\quad + G(x_{m-1}, x_m, x_m) \\
&\leq (q^n + q^{n+1} + \ldots + q^{m-1}) G(x_0, x_1, x_1) \\
&\leq q^n \frac{1 - q^{m-n}}{1-q} G(x_0, x_1, x_1) \\
&\leq \frac{q^n - q^m}{1-q} G(x_0, x_1, x_1) \\
&\leq \frac{q^n}{1-q} G(x_0, x_1, x_1). \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

Alors $\lim\limits_{n,m\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$ puisque $\lim\limits_{n,m\to\infty} \frac{q^n}{1-q} G(x_0, x_1, x_1) = 0$,
$(G5)$ implique que

$$G(x_n, x_m, x_l) \leq G(x_n, x_m, x_m) + G(x_l, x_m, x_m),$$

par passage à la limite quand n, m et $l \to \infty$ on trouve $G(x_n, x_m, x_m) + G(x_l, x_m, x_m) \to 0$, et par suite $G(x_n, x_m, x_l) \to 0$. D'où (x_n) est une suite G-cauchy.
La complétude de (X, G) implique que (x_n) est G-convergente vers $u \in X$.
supposons que $T(u) \neq u$, alors

$$G(x_n, T(u), T(u)) \leq kmax \left\{ \begin{array}{c} G(x_{n-1}, u, u), G(x_{n-1}, x_n, x_n), \\ G(u, T(u), T(u)), G(x_{n-1}, T(u), T(u)), \\ G(u, x_n, x_n) \end{array} \right\}, \tag{3.51}$$

lorsque $n \to \infty$ et en utilisant le fait que la fonction G est continue par rapport à ces trois variables, on a $G(u, T(u), T(u)) \leq kG(u, T(u), T(u))$, ce qui est une contradiction puisque $0 \leq k < \frac{1}{2}$. On en déduit que $u = T(u)$.

• Pour montrer l'unicité, supposons que $v \neq u$ et $T(v) = v$, alors (3.42) implique que

$$G(u, v, v) \leq kmax\{G(u, v, v), G(v, u, u)\},$$

et par suite

$$G(u, v, v) \leq kG(v, u, u)$$

encore par le même argument on trouvera

$$G(v, u, u) \leq kG(u, v, v),$$

d'où

$$G(u, v, v) \leq k^2 G(u, v, v), \tag{3.52}$$

ce qui implique que $G(u, v, v) = 0$ d'où $u = v$, puisque $0 \leq k < \frac{1}{2}$.

• Pour montrer que T est G-continue en u, soit $(y_n) \subseteq X$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = u$, alors

$$G(T(y_n), T(u), T(y_n)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(y_n, u, y_n), G(y_n, T(y_n), T(y_n)), \\ G(u, T(u), T(u)), G(y_n, T(u), T(u)), \\ G(u, T(y_n), T(y_n)) \end{array} \right\}, \tag{3.53}$$

il s'ensuit que

$$G(T(y_n), u, T(y_n)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(y_n, u, y_n), G(y_n, T(y_n), T(y_n)), \\ G(y_n, u, u) \end{array} \right\}, \tag{3.54}$$

$(G5)$ implique que

$$G(y_n, T(y_n), T(y_n)) \leq G(y_n, u, u) + G(u, T(y_n), T(y_n)), \tag{3.55}$$

et (3.54) conduit aux cas suivants

(1) $G(T(y_n), u, T(y_n)) \leq kG(y_n, y_n, u)$,

(2) $G(T(y_n), u, T(y_n)) \leq kG(y_n, u, u)$,

(3) $G(T(y_n), u, T(y_n)) \leq qG(y_n, u, u)$,

par passage à la limite dans les trois cas quand $n \to \infty$ on trouve que $G(u, T(yn), T(yn)) \to 0$. et donc par application de la Proposition 2.5, on déduit que la suite $(T(yn))$ est G-convergente en $u = Tu$, d'où La Proposition 2.6 assure que T est G-continue en u. □

Remarque 3.1. *Si l'espace G-métrique est borné (c'est-à-dire que pour certains $M > 0$ on a $G(x, y, z) \leq M$ pour tout $x, y, z \in X$), alors un argument similaire à celui utilisé ci-dessus établit le résultat pour $0 \leq k < 1$.*

Corollaire 3.3. *Soit (X, G) un espace G-métrique complet et soit $T : X \to X$ une application satisfaisant la condition suivante pour certain $m \in \mathbb{N}$ et pour tous $x, y, z \in X$:*

$$G(T^m(x), T^m(y), T^m(z)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(x, y, z), G(x, T^m(X), T^m(X)), \\ G(y, T^m(y), T^m(y)), G(z, T^m(z), T^m(z)), \\ G(x, T^m(y), T^m(y)), G(y, T^m(z), T^m(z)), \\ G(z, T^m(x), T^m(x)) \end{array} \right\}, \tag{3.56}$$

où $k = [0, \frac{1}{2}[$, alors T admet un unique point fixe $u \in X$, et T^m est G-continue en u.

Démonstration. D'après le théorème précédent, nous avons que T^m admet un unique point fixe $u \in X$, c'est à dire $T^m(u) = u$. Or $T(u) = T(T^m(u)) = T^{m+1}(u) = T^m(T(u))$, donc $T(u)$ est un autre point fixe de T et par l'unicité on obtient $Tu = u$. □

Théorème 3.6. *Soit (X, G) un espace G-métrique complet, et soit $T : X \to X$ une application satisfaisant la condition suivante pour tout $x, y, z \in X$:*

$$G(T(x), T(y), T(z)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(x, T(y), T(y)) + G(y, T(x), T(x)), \\ G(y, T(z), T(z)) + G(z, T(y), T(y)), \\ G(x, T(z), T(z)) + G(z, T(x), T(x)), \end{array} \right\}, \tag{3.57}$$

où $k = [0, \frac{1}{2}[$, alors T admet un unique point fixe $u \in X$, et T est G-continue en u.

Démonstration. • Supposons que T vérifie la condition (3.57), soit $x_0 \in X$ un point arbitraire, et définissons la suite (x_n) par $x_{n+1} = T(x_n)$, alors par (3.57) on obtient

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} \Big[G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_n, x_n, x_n)\Big], \\ \Big[G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\Big], \\ \Big[G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_n, x_n, x_n)\Big], \end{array} \right\} \tag{3.58}$$

$$= k \max\{G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}), 2G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\}$$

Puisque $0 \leq k < \frac{1}{2}$, alors il faut que

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq kG(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}), \tag{3.59}$$

or d'après $(G5)$, on a

$$G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), \tag{3.60}$$

donc (3.59) implique que

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq \frac{k}{1-k} G(x_{n-1}, x_n, x_n), \tag{3.61}$$

soit $q = \frac{k}{1-k}$, alors $q < 1$ et

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq qG(x_{n-1}, x_n, x_n),$$

par récurrence, on obtient

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^n G(x_0, x_1, x_1). \tag{3.62}$$

Alors, pour tout $n, m \in N$ tel que $n < m$, en utilisant l'inégalité rectangulaire, on trouve

$$\begin{aligned} G(x_n, x_m, x_m) &\leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \ldots \\ &\quad + G(x_{m-1}, x_m, x_m) \\ &\leq (q^n + q^{n+1} + \ldots + q^{m-1}) G(x_0, x_1, x_1) \\ &\leq \frac{q^n}{1-q} G(x_0, x_1, x_1). \end{aligned}$$

Donc $\lim G(x_n, x_m, x_m) = 0$, quand $n, m \to \infty$ ceci implique que (x_n) est une suite G-Cauchy.

Par la complétude de (X, G), il existe $u \in X$ telle que (x_n) est G-convergente vers u.

Supposons que $T(u) = u$, alors

$$G(x_n, T(u), T(u)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} \Big[G(x_{n-1}, T(u), T(u)) + G(u, x_n, x_n)\Big], \\ \Big[G(u, T(u), T(u)) + G(u, T(u), T(u))\Big], \\ \Big[G(x_{n-1}, T(u), T(u)) + G(u, x_n, x_n)\Big], \end{array} \right\}, \tag{3.63}$$

par passage à la limite quand $n \to \infty$, et en utilisant le fait que la fonction G est continue en ses trois variables, on obtient

$$\begin{aligned} G(u, T(u), T(u)) &\leq k \max\{2G(u, T(u), T(u)), G(u, T(u), T(u))\} \\ &= 2kG(u, T(u), T(u)), \end{aligned} \tag{3.64}$$

qui est une contradiction, puisque $0 \leq k < \frac{1}{2}$, d'où $u = T(u)$.

- Pour prouver l' unicité, supposons que $v \neq u$ tel que $T(v) = v$, alors par hypothèse

$$G(u, v, v) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} \Big[G(u, v, v) + G(v, u, u)\Big], \\ \Big[G(v, v, v) + G(v, v, v)\Big], \\ \Big[G(u, v, v) + G(v, u, u)\Big], \end{array} \right\}, \tag{3.65}$$

et par suite $G(u, v, v) \leq k[G(u, v, v) + G(v, u, u)]$. Cela implique que

$$G(u, v, v) \leq \frac{k}{1-k} G(v, u, u)$$

de même on trouvera

$$G(v, u, u) \leq \frac{k}{1-k} G(u, v, v)$$

soit $q = \frac{k}{1-k}$. On obtient donc $G(u, v, v) \leq q^2 G(u, v, v)$ qui est une contradiction, puisque $0 < q < 1$ par conséquent $u = v$.

- Pour montrer que T est G-continue en u soit $(y_n) \subseteq X$ une suite dans (X, G) telle que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = u$, alors par hypothèse

$$G(T(y_n), T(u), T(u)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} \Big[G(y_n, T(u), T(u)) + G(u, T(y_n), T(y_n))\Big], \\ \Big[G(u, T(u), T(u)), G(u, T(u), T(u))\Big], \\ \Big[G(y_n, T(u), T(u)) + G(u, T(y_n), T(y_n))\Big] \end{array} \right\}. \tag{3.66}$$

Ainsi, (3.66) devient

$$G(T(y_n), u, u) \leq k\Big[G(y_n, u, u) + G(u, T(y_n), T(y_n))\Big], \tag{3.67}$$

or gràce à la Remarque 2.1 on a $G(u, T(y_n), T(y_n)) \leq 2G(T(y_n), u, u)$, donc (3.67) implique que

$$G(T(y_n), u, u) \leq KG(y_n, u, u) + 2kG(T(y_n), u, u),$$

on en déduit que

$$kG(T(y_n), u, u) \leq \frac{k}{1-2k} G(y_n, u, u). \tag{3.68}$$

En prenant la limite dans (3.67) quand $n \to \infty$, on obtient $G(T(y_n), u, u) \to 0$ et donc, en vertu de la Proposition 2.6, on a $T(y_n) \to u = Tu$ ce qui implique que T est G-continue en u. □

Corollaire 3.4. *Soit (X, G) un espace G-métrique complet, et soit $T : X \to X$ une application qui satisfait la condition suivante pour un $m \in N$ et pour tout $x, y, z \in X$*

$$G(T^m(x), T^m(y), T^m(z)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} \Big[G(x, T^m(y), T^m(y)) + G(y, T^m(x), T^m(x))\Big], \\ \Big[G(y, T^m(z), T^m(z)) + G(z, T^m(y), T^m(y))\Big], \\ \Big[G(x, T^m(z), T^m(z)) + G(z, T^m(x), T^m(x))\Big] \end{array} \right\}, \tag{3.69}$$

où $k \in [0, \frac{1}{2}[$, alors T admet un unique point fixe $u \in X$, et T^m est G-continue en u.

Démonstration. La preuve découle du théorème précédent et par le même argument utilisé dans le Corollaire 3.3. □

Théorème 3.7. *Soit (X, G) un espace G-métrique complet, et soit $T : X \to X$ une application satisfaisant l'une des conditions suivantes :*

$$G(T(x), T(y), T(y)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} \Big[G(y, T(y), T(y)) + G(x, T(y), T(y))\Big], \\ \Big[2G(y, T(x), T(x))\Big] \end{array} \right\} \tag{3.70}$$

où $k \in [0, \frac{1}{3}[$, alors T admet un unique point fixe $u \in X$, et T est G-continue en u.

Démonstration. • Supposons que T vérifie la condition (3.70). Soit $x_0 \in X$ un point arbitraire, et définissons la suite (x_n) par $x_{n+1} = T(x_n)$, puis par (3.70), on obtient

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} \Big[G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1})\Big], \\ \Big[2G(x_n, x_n, x_n)\Big] \end{array} \right\}, \tag{3.71}$$

il s'ensuit que $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k\Big[G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + kG(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1})\Big]$
c'est à dire

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq \frac{k}{1-k} G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}), \tag{3.72}$$

d'après $(G5)$ on a

$$G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}). \tag{3.73}$$

Soit $p = \frac{k}{1-2k}$ alors (3.72) devient

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq pG(x_{n-1}, x_n, x_n), \tag{3.74}$$

par récurrence on obtient

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq p^n G(x_0, x_1, x_1).$$

Appliquant l'inégalité rectangulaire pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $n < m$

$$\begin{aligned} G(x_n, x_m, x_m) &\leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \ldots \\ &\quad + G(x_{m-1}, x_m, x_m) \\ &\leq (p^n + p^{n+1} + \ldots + p^{m-1}) G(x_0, x_1, x_1) \\ &\leq \frac{p^n}{1-p} G(x_0, x_1, x_1). \end{aligned}$$

On a $p \in [0, 1[$ il résulte $\lim\limits_{n,m \to \infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$, donc (x_n) est une suite G-Cauchy. La complétude de (X, G) implique que (x_n) soit G-convergente vers un certain $u \in X$. Supposons que $T(u) \neq u$, alors

$$G(x_n, T(u), T(u)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} \Big[G(u, T(u), T(u)) + G(x_{n-1}, T(u), T(u))\Big], \\ \Big[2G(u, x_n, x_n)\Big] \end{array} \right\}, \tag{3.75}$$

par passage à la limite quand $n \to \infty$, et en utilisant le fait que la fonction G est continue, on obtient

$$G(u, T(u), T(u)) \leq 2kG(u, T(u), T(u)),$$

ce qui est une contradiction d'où $u = T(u)$.

• Pour prouver l'unicité, supposons que $v \neq u$ tel que $T(v) = v$, alors

$$G(u,v,v) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} \Big[G(v,v,v) + G(u,v,v)\Big], \\ \Big[2G(v,u,u)\Big] \end{array} \right\}, \tag{3.76}$$

donc $G(u,v,v) \leq k \max\{G(u,v,v), 2G(v,u,u)\}$ et on en déduit que

$$G(u,v,v) \leq 2kG(v,u,u), \tag{3.77}$$

encore par le même argument, on obtient

$$G(v,u,u) \leq 2kG(u,v,v), \tag{3.78}$$

par conséquent, $G(u,v,v) \leq 4k^2G(u,v,v)$ ce qui implique que $u = v$

• Pour montrer que T est G-continue en u, soit $(y_n) \subseteq X$ une suite telle que $\lim y_n = u$, alors

$$G(T(u), T(y_n), T(y_n)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} \Big[G(y_n, T(y_n), T(y_n)) + G(u, T(y_n), T(y_n))\Big], \\ \Big[2G(y_n, T(u), T(u))\Big] \end{array} \right\}, \tag{3.79}$$

donc, (3.79) implique deux cas.

$Cas1$. $G(u, T(y_n), T(y_n)) \leq 2kG(y_n, u, u)$.

$Cas2$. $G(u, T(y_n), T(y_n)) \leq \frac{k}{1-k} G(y_n, T(y_n), T(y_n))$.

pour le $cas2$, d' après $(G5)$ on a $G(y_n, T(y_n), T(y_n)) \leq G(y_n, u, u) + G(u, T(y_n), T(y_n))$, ceci implique que $G(u, T(y_n), T(y_n)) < pG(y_n, u, u)$.

Dans chaque cas en prenant la limite quand $n \to \infty$, on trouve $G(u, T(y_n), T(y_n)) \to 0$ et grâce à la Proposition 2.6, on a $T(y_n) \to u = Tu$ ce qui implique que T est G-continue en u. □

Corollaire 3.5. *Soit (X, G) un espace G-métrique complet, et soit $T : X \to X$ une application satisfaisant la condition suivante pour $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $x, y \in X$:*

$$G(T^m(x), T^m(y), T^m(y)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} \Big[G(y, T^m(y), T^m(y)) + G(x, T^m(y), T^m(y))\Big], \\ \Big[2G(y, T^m(x), T^m(x))\Big] \end{array} \right\}, \tag{3.80}$$

où $k \in [0, \frac{1}{3}[$, alors T admet un unique point fixe u et T^m est G-continue en u.

Démonstration. La preuve découle du théorème précédent et du même argument utilisé dans le Corollaire 3.3. Le théorème suivant a été énoncé dans [11] sans preuve, mais cela peut être prouvé en utilisant le Théorème 3.7 comme suit. $\square$

Théorème 3.8. (*voir [11]*) *Soit* (X, G) *un espace G-métrique complet et soit* $T : X \to X$ *une application qui satisfait la condition suivante, pour tout* $x, y, z \in X$,

$$G(T(x), T(y), T(z)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} \Big[G(z, T(x), T(x)) + G(y, T(x), T(x))\Big], \\ \Big[G(y, T(z), T(z)) + G(x, T(z), T(z))\Big], \\ \Big[G(x, T(y), T(y)) + G(z, T(y), T(y))\Big] \end{array} \right\}, \tag{3.81}$$

où $k = [0, \frac{1}{3}[$, *alors* T *a un point fixe unique* u, *et* T *est G-continue en* u.

Démonstration. En posant $z = y$ dans la condition (3.81), puis il se réduit à la condition (3.70), et la preuve découle du Théorème 3.7. $\square$

3.5 Théorèmes du point fixe commun

Rappelons d'abord quelques définitions qui nous seront utiles par la suite.

Définition 3.2. (***Point fixe commun***) *Soient* f *et* g *deux applications d'un espace G-métrique* (X, G) *dans lui même. On appelle point fixe commun de* f *et* g *tout point* $x \in X$ *tel que* $f(x) = g(x) = x$.

Définition 3.3. *Soient* f *et* g *deux applications d'un espace G-métrique* (X, G) *dans lui même.* f *et* g *sont dites commutatives si* $fgx = gfx$, *pour tout* $x \in X$.

Définition 3.4. *[6] Soient* f *et* g *deux applications d'un espace G-métrique* (X, G) *dans lui même.* f *et* g *sont dites compatibles si et seulement si* $\lim_{n\to\infty} G(fgx_n, gfx_n, gfx_n) = 0$, *pour toute suite* (x_n) *dans* X *satisfaisant* $\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = t$, *pour un certain* $t \in X$.

Définition 3.5. *[7] Soient* f *et* g *deux applications d'un espace G-métrique* (X, G) *dans lui même.* f *et* g *sont dites faiblement compatibles si elles commutent aux points de coincidence, c'est à dire, pour tout* $x \in X$ *satisfaisant* $fx = gx$, *alors* $fgx = gfx$.

3.5.1 Point fixe commun des applications compatibles

Théorème 3.9. *Soit (X, G) un espace G-métrique complet. Soient f et g deux applications compatiles de X dans lui même satisfaisant les conditions suivantes :*

$(C1)$ $f(X) \subseteq g(X)$,

$(C2)$ f *ou* g *est continue,*

$$(C3)\ \ G(fx, fy, fz) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(gx, gy, gz), G(gx, fx, fx), G(gx, fy, fy), \\ G(gx, fz, fz), G(gy, fy, fy), G(gy, fx, fx), \\ G(gy, fz, fz), G(gz, fz, fz), G(gz, fx, fx), \\ G(gz, fy, fy) \end{array} \right\},$$

pour tout $x, y, z \in X$, tel que $0 \leq k < \frac{1}{4}$.
Alors f et g admettent un point fixe commun unique dans X.

Démonstration. Soit x_0 un point arbitraire de X. D'après $(C1)$ on peut choisir un point x_1 de X tel que $fx_0 = gx_1$.
En général on peut choisir x_{n+1} tel que $y_n = fx_n = gx_{n+1}, \ \ n = 0, 1, 2 \ldots$
de $(C3)$, on a

$$G(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}), G(gx_n, fx_n, fx_n), \\ G(gx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}), G(gx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}), \\ G(gx_{n+1}, fx_{n+1}, fx_{n+1}), G(gx_{n+1}, fx_n, fx_n), \\ G(gx_{n+1}, fx_{n+1}, fx_{n+1}), G(gx_{n+1}, fx_{n+1}, fx_{n+1}), \\ G(gx_{n+1}, fx_n, fx_n), G(gx_{n+1}, fx_{n+1}, fx_{n+1}) \end{array} \right\},$$

donc $G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) \leq k \max\{G(y_{n-1}, y_n, y_n), G(y_{n-1}, y_{n+1}, y_{n+1}), G(y_n, y_{n+1}, , y_{n+1})\}$, on distingue trois cas.

<u>Cas 1.</u> Si $\max\{G(y_{n-1}, y_n, y_n), G(y_{n-1}, y_{n+1}, y_{n+1}), G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1})\} = G(y_{n-1}, y_n, y_n)$, donc, en utilisant $(C3)$, on obtient

$$G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) \leq kG(y_{n-1}, y_n, y_n).$$

Par induction, on trouve

$$G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) \leq k^n G(y_0, y_1, y_1),$$

par suite, pour tous $n, m \in N$ tel que $n < m$ et d'après $(G5)$, on a

$$\begin{aligned} G(y_n, y_m, y_m) &\leq G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) + G(y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+2}) + \ldots + G(y_{n-1}, y_m, y_m), \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + \ldots + k^{m-1})G(y_0, y_1, y_1), \\ &\leq \frac{k^n}{1-k}G(y_0, y_1, y_1). \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on a $\lim\limits_{n,m\to\infty} G(y_n, y_m, y_m) = 0$. Ainsi (y_n) est une suite G-Cauchy dans X.

Cas 2. Si $\max\{G(y_{n-1}, y_n, y_n), G(y_{n-1}, y_{n+1}, y_{n+1}), G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1})\} = G(y_{n-1}, y_{n+1}, y_{n+1})$.
A partir de $(C3)$ et en utilisant $(G5)$, on obtient

$$G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) \leq kG(y_{n-1}, y_{n+1}, y_{n+1}) \leq k\Big(G(y_{n-1}, y_n, y_n) + G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1})\Big),$$

ce qui implique que $G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) \leq \frac{k}{1-k}G(y_{n-1}, y_n, y_n)$,
C'est à dire $G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) \leq qG(y_{n-1}, y_n, y_n)$, où $q = \frac{k}{1-k}$ observons que $q < 1$ puisque $0 \leq k < \frac{1}{4}$. Compte tenu du cas 1, nous avons (y_n) est une suite G-Cauchy dans X.

Cas 3. Si $\max\{G(y_{n-1}, y_n, y_n), G(y_{n-1}, y_{n+1}, y_{n+1}), G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1})\} = G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1})$.
Alors, à partir de $(C3)$, on obient $G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) \leq kG(y_n, y_{n+1}, y_{n+1})$ une contradiction puisque $k < \frac{1}{4}$.

• On déduit que dans tous les cas la suite (y_n) est une suite de G-Cauchy dans X.
La complétude de (X, G) assure l'existence d'un point $u \in X$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = u$, et on a

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_{n+1} = u.$$

Comme l'une des applications est continue, on peut supposer que g est continue, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} gfx_n = \lim\limits_{n\to\infty} ggx_n = gu$. De plus f et g sont compatibles, alors $\lim\limits_{n\to\infty} G(gfx_n, fgx_n, fgx_n) = 0$, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to\infty} fgx_n = gu$.
Maintenant nous affirmons que $gu = u$, d'après $(C3)$ nous avons

$$G(fgx_n, fx_n, fx_n) \leq k\max\left\{\begin{array}{c} G(ggx_n, gx_n, gx_n), G(ggx_n, fx_n, fgx_n), \\ G(ggx_n, fx_n, fx_n), G(ggx_n, fx_n, fx_n), \\ G(gx_n, fx_n, fx_n), G(ggx_n, fgx_n, fgx_n), \\ G(gx_n, fx_n, fx_n), G(gx_n, fx_n, gx_n) \end{array}\right\},$$

par passage à la limite quand $n \to \infty$, et en utilisant la Proposition 2.1 on a

$$\begin{aligned} G(gu,u,u) &\leq k\max\{G(gu,u,u),G(u,gu,gu)\} \\ &\leq k\max\{G(gu,u,u),2G(gu,u,u)\} \\ &= 2kG(gu,u,u), \end{aligned}$$

qui est une contradiction avec $k < \frac{1}{4}$. Par conséquent $gu = u$.

On montrera par la suite que $gu = fu = u$. Pour cela on met $x = x_n$, $y = z = u$ dans $(C3)$, on trouve

$$G(fx_n,fu,fu) \leq k\max\left\{\begin{array}{c} G(gx_n,gu,gu),G(gx_n,fx_n,fx_n),G(gx_n,fu,fu), \\ G(gx_n,fu,fu),G(gu,fu,fu),G(gu,fx_n,fx_n), \\ G(gu,fu,fu),G(gu,fu,fu),G(gu,fx_n,fx_n), \\ G(gu,fu,fu) \end{array}\right\},$$

par passage à la limite quand $n \to \infty$, on obtient $G(u,fu,fu) \leq kG(u,fu,fu)$, une contradiction avec $k < \frac{1}{4}$, donc $fu = gu = u$. Ob conclut que u est un point fixe commun de f et g.

• L'unicité

Supposons que $v \in X$ est un autre point fixe commun de f et g tel que $v \neq u$. Alors $G(v,u,u) > 0$ et

$$G(v,u,u) = G(fv,fu,fu) \leq k\max\left\{\begin{array}{c} G(gv,gu,gu),G(gv,fv,fv),G(gv,fu,fu), \\ G(gv,fu,fu),G(gu,fu,fu),G(gu,fv,fv), \\ G(gu,fu,fu),G(gu,fu,fu),G(gu,fv,fv), \\ G(gu,fu,fu) \end{array}\right\},$$

En utilisant la Proposition 2.1, on a

$$\begin{aligned} G(v,u,u) &\leq k\max\{G(v,u,u),G(u,v,v)\} \\ &\leq k\max\{G(v,u,u),2G(v,u,u)\} \\ &= 2KG(v,u,u), \end{aligned}$$

une contradiction avec $k < \frac{1}{4}$, cela exige que $v = u$, d'où l'unicité. □

Exemple 3.1. *Soit* $X = [-1,1]$ *et soit* G *la* G*-métrique sur* X *définie comme suit :*

$$G(x,y,z) = |x-y| + |y-z| + |z-x|$$

pour tous $x, y, z \in X$*. Alors* (X, G) *est un espace G-métrique.*

Définissons $fx = x$ *et* $gx = \frac{x}{4}$*. Considérons la suite* $x_n = \frac{1}{n}$*.*

Il est clair que $\lim_{n\to\infty} G(fgx_n, gfx_n, gfx_n) = 0$ *et* $\lim_{n\to\infty} fx_n = limgx_n = 0$ *implique que* f *et* g *sont des applications compatibles.*

D'autre part on a $f(X) \subseteq g(X)$*. Aussi, l'inégalité* $(C1)$ *est satisfaite pour tous* $x, y, z \in X$ *et* 0 *est l'unique point fixe commun de* f *et* g*.*

Corollaire 3.6. (X, G) *un espace G-métrique complet et soient* f *et* g *deux applications compatibles de* X *dans lui même vérifiant* $(C1)$ *et* $(C2)$ *et la condition suivante :*

$$G(fx, fy, fz) \leq qG(gx, gy, gz) \text{ pour tous } x, y, z \in X \text{ et } 0 < q < 1.$$

Alors f *et* g *possèdent un point fixe commun unique dans* X*.*

Démonstration. La preuve découle directement du Théorème 3.9. □

3.5.2 Point fixe commun des applications faiblement compatibles

Théorème 3.10. *Soient* f *et* g *deux applications faiblement compatibles d'un espace G-métrique* (X, G) *dans lui même satisfaisant* $(C1)$ *et* $(C3)$ *et la condition suivante :*
$(C4)$ *l'un des sous-espaces* $f(X)$ *ou* $g(X)$ *est complet alors* f *et* g *possèdent un unique point fixe commun dans* X*.*

Démonstration. Utilisant les mêmes arguments de démonstration du Théorème 3.9, on conclut que (y_n) est une suite G-Cauchy dans X. Comme $f(X)$ ou $g(X)$ est complet, on peut supposer pour la définition que $g(X)$ est un sous-espace complet de X et
$y_n = g(x_{n+1}) \in g(X)$, alors on peut extraire une sous-suite encore notée (y_n) qui converge vers $t \in g(X)$. Soit $u \in g^{-1}t$, alors $gu = t$ car (y_n) est une suite G-Cauchy admettant une sous-suite convergente, donc la suite (y_n) également convergente d'après le Corollaire 2.4. Montrons maintenant que $fu = t$. En posant $x = x_n$, $y = u$ et $z = u$, dans $(C3)$, on a

$$G(fx, fu, fu) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(gx_n, gu, gu), G(gx_n, fx_n, fx_n), G(gx_n, fu, fu), \\ G(gx_n, fu, fu), G(gu, fu, fu), G(gu, fx_n, fx_n), \\ G(gu, fu, fu), G(gu, fu, fu), G(gu, fx_n, fx_n), \\ G(gu, fu, fu) \end{array} \right\},$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$, on trouve $G(t, fu, fu) \leq kG(t, fu, fu)$, une contradiction avec $k < \frac{1}{4}$, d'où $fu = gu = t$.
Ainsi u est un point de coïncidence de f et g. Comme f et g sont faiblement compatibles, il s'ensuit que $fgu = gfu$, c'est à dire $ft = gt$.
Montrons maintenant que $ft = t$. Supposons que $ft \neq t$, donc $G(ft, t, t) > 0$. Maintenant mettez $x = t$, $y = u$, $z = u$, dans $(C3)$ on obtient

$$G(ft, fu, fu) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(gt, gu, gu), G(gt, ft, ft), G(gt, fu, fu), G(gt, fu, fu), \\ G(gu, fu, fu), G(gu, ft, ft), G(gu, fu, fu), \\ G(gu, fu, fu), G(gu, ft, ft), G(gu, fu, fu) \end{array} \right\},$$

En utilisant la Proposition 2.1, on a

$$\begin{aligned} G(ft, t, t) &\leq k \max\{G(ft, t, t), G(t, ft, ft)\} \\ &< k \max\{G(ft, t, t), 2G(ft, t, t)\} \\ &= 2kG(ft, t, t), \end{aligned}$$

une contradiction car $k < \frac{1}{4}$, cela exige que $ft = t = gt$, c'est à dire que t est un point fixe commun de f et g. L'unicité se démontre de la même façon que dans le Théorème 3.9. □

Exemple 3.2. *Soit* $X = [0, 3]$ *et soient* f *et* g *:* $[0, 3] \to [0, 3]$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x \in [0, 1[\\ 3 & si\ x \in [1, 3] \end{cases} \quad et \quad g(x) = \begin{cases} 3 - x & si\ x \in [0, 1[\\ 3 & si\ x \in [1, 3] \end{cases}$$

Alors pour tout $x \in [1, 3]$*,* x *est un point de coïncidence et* $fgx = gfx$*, montrant que* f *et* g *sont des applications faiblement compatibles sur* $[0, 3]$.

CONCLUSION

La théorie du point fixe est d'une importance capitale pour la résolution de nombreux problèmes émergeant dans divers domaines. Dans notre travail nous sommes intéressées à étudier l'existence et l'unicité du point fixe pour les applications définies sur des espaces métriques généralisés, et le point fixe pour une paire d'applications vérifiant certaines conditions de compatibilité et de commutativité. Ce type de problèmes qu'on a étudié à connu plusieurs généralisations, des auteurs ont introduit d'autres types d'applications comme

(1) Applications (ψ, φ) faiblement contractives.

(2) Applications contractives non linéaires.

(3) Multi-applications . . .etc.

D'autres résultats ont été obtenus dans diverses structures métriques citons entre autre

(1) Espaces b-métriques.

(2) Espace G-métriques partiellement ordonnés.

(3) Espaces métriques avec graphe.

voir [7, 2, 15, 10].

La théorie du point fixe est une théorie de laquelle découlent plusieurs applications qui constituent un domaine très actif de la recherche.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **R. P. Agarwal, E. Karapinar, D. O'regan, A. F. Roldan-lopez-de-Hierro**,*"Fixed Point Theory in Metric Type spaces"*, Spain, 2015.

[2] **S.M.A. Aleomraninejad , Sh. Rezapour, N. Shahzad**, *"Some fixed point results on a metric space with a graph"*, Topology and its Applications, Vol. 159,pp. 659–663, 2012.

[3] **R. M. T. Bianchini**, *"Su un problema di S. Reich riguardante la teoria dei punti tissi"*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Vol. 5, no. 4,pp. 103-108, 1972.

[4] **H. Brezis**, *"Analyse fonctionnelle théorie et application",* MASSON, 1993.

[5] **S. K. Chatterjea**, *"Fixed-point theorems",* Doklady Bolgarskoi Akademii Nauk. Comptes Rendus de l'Académie Bulgare des Sciences, Vol. 25,pp. 727-730, 1972.

[6] **B. S. Choudhury, S. Kumar, Asha and K, Das**, *"Some Fixed Point Theorems in G-Metric Spaces",* Nonlinear Science Letter, Vol. 1, No. 1, pp. 25-31, 2012.

[7] **G. Jungck**, *"Common fixed Point for Non-Continuous Non-Self Mappings on Non-Metric Spaces",* Far East Journal Mathematical Sciences, Vol. 4,No. 2,pp. 199-215, 1996.

[8] **G. Jungck,**,*"Commuting Mappings and Fixed Point",* American Mathematical Monthly, Vol. 83,pp. 261-363, 1976.

[9] **G. Jungck ,B. E. Rhoades**,*"Fixed point for set valued functions without continuity"*, Indian J. Pure Appl. Math., Vol. 29,No. 3,pp. 227-238, 1998.

[10] **H. Lakzian, B. Samet**, *"Fixed points for (ψ, φ)-weakly contractive mappings in generalized metric spaces"*,Applied Mathematics Letters, Vol. 25,pp. 902–906, 2012.

[11] **Z. Mustafa**, *"Anew structure for generalized metric spaces with application to fixed point theory",* Ph. D. thesis, The University of Newcastle, Australia 2005.

[12] **Z. Mustafa,H. Obiedat**, and **F. Awawdeh**, *"Some Fixed Point Theorem for Mapping on Complete G-Metric Spaces"*, Fixed Point Theory and Applications, 2008.

[13] **Z. Mustafa, B. Sims**,*"A new approach to generalized metric spaces"*, J.Nonlinear Convex Anal. Vol. 7, No. 2, 289-297, 2006.

[14] **Z. Mustafa, B. Sims**,*"Fixed Point Theorems for Contractive Mappings in Complete G-Metric Spaces"*, Fixed Point Theory and Applications, 2009.

[15] **D. Paesano, P. Vetro** *"Suzuki's type characterizations of completeness for partial metric spaces and fixed points for partially ordered metric spaces"*, Topology and its Applications,Vol. 159, pp. 911–920, 2012.

[16] **S. Reich** : *"Some remarks concerning contraction mappings"*, Canadian Mathematical Bulletin, Vol. 14, pp. 121-124, 1971.

[17] **D. R. Smart**, *"Fixed Point Theorems"*, Cambridge Univ. Press 1973.

[18] **Y. Sonntag**, *"Topologie et Analyse Fonctionnelle"*, Berlin 23-4-1880, 1997.