

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BENYAHIA JIJEL
Faculté des sciences et de la technologie
Département d'automatique

N° :...../2022

MEMOIRE DE MASTER

DOMAINE: Sciences et Technologies

FILIERE: Automatique

SPECIALITE: Automatique et Systèmes

Thème

**Sur la commande en temps fixe des systèmes non
linéaires avec contraintes**

Présenté Par : BOUMIMEZ Moussab

Encadré Par : - KHEBBACHE Hicham

MERICHE Abdelaziz

- SOUKKOU Yassine

Date de soutenance: 13/07/2022

Jury de Soutenance

Président :	SAIFIA Dounia	Grade	MCA	Univ MSB Jijel
Encadreur :	KHEBBACHE Hicham	Grade	MCA	Univ MSB Jijel
Co-encadreur :	SOUKKOU Yassine	Grade	MRB	CRTI Alger
Examineur :	BOULKROUNE Abdesselem	Grade	Prof	Univ MSB Jijel

Promotion : 2021 /2022

Remerciement

Nous remercions Allah, le tout puissant de nous avoir donné la volonté, la patience et la santé durant toutes ces longues années d'études. En préambule à ce mémoire, nous souhaitons adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apportés leur aide et qui ont contribués à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

*Nous tenons à remercier sincèrement monsieur **Dr. KHEBBACHE HICHAM** pour sa générosité et sa grande patience, en tant que l'encadreur de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu nous consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour. Enfin, nous adressons notre plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours soutenus et encouragés au cours de la réalisation de ce mémoire. Merci à tous et à toutes.*

Dédicaces

Tout d'abord, nous remercions le Dieu d'avoir donné le pouvoir de raisonner, la santé et le courage, pour terminer ce travail.

A ma famille spécialement aux personnes les plus

Chères au monde :

Mon père et ma mère

Pour leur patience illimitée, leur encouragement continu, leur aide, en témoignage de mon profond amour et respect des sacrifices.

Tous mes frères et mes Sœurs, mais beaucoup plus Hamza, qu'ils m'ont toujours donné, leur encouragement, sacrifice et toute l'aide qu'ils m'ont apportée durant mes études.

A mon binôme Abdelaziz

A mes amies, qui m'a toujours encouragé durant mes études.

A mes Amis de fac, j'ai passé des années honneur grâce à vous tous.

Et enfin, A toutes les mains qui m'ont été tendue....

MOUSSAB

Dédicaces

A ma très chère mère

Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter le différent obstacle.

A mon très cher père

Tu as toujours été à mes côtés pour à me soutenir et m'encourager.

Que ce travail traduit ma gratitude et mon affection.

Tous mes frères, mais beaucoup plus Mouhamed Radji, qu'ils m'ont toujours donné, leur encouragement, sacrifice et toute l'aide qu'ils m'ont apportée durant mes études.

A mon binôme MOUSSAB

ABDELAZIZ

Résumé : Sur la commande en temps fixe des systèmes non linéaires avec contraintes.

Notre étude a pour objectif de présenter des techniques de commande en temps fixe pour une classe des systèmes non linéaires avec contraintes. En se basant sur la théorie de stabilité de Lyapunov, nous avons proposés deux techniques de commande par backstepping pour une classe des systèmes non linéaires avec contraintes. Le principal inconvénient de ces deux approches est le problème d'explosion de complexité inhérent dans le backstepping, qui résulte des dérivations successives des commandes virtuelles à chaque étape de conception. Afin de résoudre ce problème, nous avons développés deux techniques de commande par surface dynamique, ou un filtre non linéaire par mode de glissement a été également introduit à chaque étape de design. Le premier algorithme assure une stabilité en temps fixe avec des contraintes sur la sortie, tandis que le deuxième est conçu avec contraintes sur le vecteur d'état. Toutes les techniques de commande présentées dans ce mémoire sont validées en simulation à travers un exemple numérique du deuxième ordre. Des comparaisons entre ces approches de commande ont été également effectuées. Les résultats correspondants sont présentés et commentés.

Mots clés : Backstepping (BS), Contraintes, Commande par surface dynamique (DSC), Filtre par mode de glissement, Stabilité en temps fixe (FxTS), Système non linéaire.

Abstract: On fixed-time control of constrained nonlinear systems.

The goal behind our study is to present fixed-time control techniques for a class of constrained nonlinear systems. Based on Lyapunov stability theory, two backstepping-based control strategies have been proposed for a class of constrained nonlinear systems. The main drawback of these control approaches is the “explosion of complexity” problem inherent in backstepping design, which arises from the repeated differentiations of virtual controls at each step of the design. In order to solve this problem, two dynamic surface control techniques has been investigated, where the complexity was removed by introducing a nonlinear sliding mode filter at each step. The first control algorithm ensure a fixed-time stability with output constraints, while the second one is designed with full-state constraints. All control techniques presented in this thesis are validated in simulation through a second-order numerical example. Some comparisons have been also performed between the proposed control approaches. The corresponding results are presented and commented.

Key words: Backstepping (BS), Constraints, Dynamic Surface Control (DSC), Sliding mode filter, Fixed-time stability (FxTS), Nonlinear system.

ملخص: التحكم أثناء وقت ثابت في الأنظمة غير الخطية ذات قيود.

تهدف دراستنا إلى تقديم تقنيات التحكم في وقت ثابت للأنظمة غير الخطية ذات قيود. استنادًا إلى نظرية الاستقرار "ليابونوف" ، قمنا باقتراح طريقتين للتحكم عن طريق تقنية الرجوع المرحلي لفئة من الأنظمة غير الخطية المقيدة. العيب الرئيسي لهذين الطريقتين هو مشكلة انفجار التعقيد في تقنية الرجوع المرحلي، والتي تنتج من الاشتقاقات المتتالية لعناصر التحكم الافتراضية في كل مرحلة من مراحل التصميم. لحل هذه المشكلة، استخدمنا تقنية التحكم عن طريق السطح الديناميكي حيث تم إدخال مرشح غير خطي عن طريق النمط الانزلاقي في كل مرحلة من مراحل التصميم. تضمن الخوارزمية الأولى استقرار في وقت ثابت مع قيود على المخرج، بينما تم تصميم الثانية مع قيود على الحالة. تم التحقق من صحة جميع تقنيات التحكم المقدمة في هذه الأطروحة من خلال مثال رقمي من الدرجة الثانية. حيث يتم إجراء مقارنة بين طرق التحكم هذه في المحاكاة. وقد تم عرض النتائج المقابلة لها والتعليق عليها.

كلمات مفتاحية: الرجوع المرحلي، قيود، التحكم عن طريق السطح الديناميكي، مرشح عن طريق النمط الانزلاقي، الاستقرار في وقت ثابت، نظام غير خطي .

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : NOTIONS SUR LES SYSTEMES NON LINEAIRE	
I.1 INTRODUCTION :.....	3
I.2 SYSTEMES LINEAIRES :	3
I.3 SYSTEMES NON LINEAIRES :.....	3
I.4 STABILITE DES SYSTEMES NON LINEAIRE :.....	4
I.4.1 Stabilité eu sens de Lyapunov :.....	4
I.4.2 Stabilité locale et globale :	4
I.4.3 Stabilité simple :.....	4
I.4.4 Stabilité asymptotique :	5
I.4.5 Stabilité exponentielle :	5
I.4.6 L'inégalité de Young :.....	5
I.5 METHODE D'ANALYSE DE LA STABILITE DES SYSTEMES NON LINEAIRES :	6
I.5.1 La méthode indirecte de Lyapunov (la première méthode) :	6
I.5.2 La méthode directe de Lyapunov (la deuxième méthode) :	6
I.6 BACKSTEPPING :.....	6
I.7 OUTILS DE CONCEPTION ET PRELIMINAIRES :.....	7
I.7.1 Introduction :	7
I.7.2 Préliminaires Mathématiques :.....	7
I.7.3 Définition 1 :.....	7
I.8 ANALYSE DE STABILITE DE LYAPUNOV :	8
I.8.1 Définition 2 :.....	8
I.8.2 Définition 3 :.....	8
I.9 FONCTION BARRIERE DE LYAPUNOV :.....	9
I.9.1 Système de deuxième ordre :.....	10
I.10 NOTIONS DE STABILITE EN TEMPS FINI/FIXE :.....	12
I.10.1 Lemme 1 :.....	13
I.10.2 Lemme 2 :.....	13
I.11 CONCLUSION :	14

CHAPITRE II : COMMANDE PAR BACKSTEPPING EN TEMPS FIXE D'UNE CLASSE DES SYSTEMES NON LINEAIRES AVEC CONTRAINTES

II.1 INTRODUCTION :.....	15
II.2 COMMANDE PAR BACKSTEPPING EN TEMPS FIXE AVEC CONTRAINTE SUR LA SORTIE :	15
II.2.1 Résultat de simulation :	20
II.2.2 Interprétation des résultats :.....	23
II.3 COMMANDE PAR BACKSTEPPING EN TEMPS FIXE AVEC CONTRAINTE SUR L'ETAT :	23
II.3.1 Résultat de simulation :	28
II.3.2 Interprétation des résultats :	30
II.4 CONCLUSION :	30

CHAPITRE III: COMMANDE PAR SURFACE DYNAMIQUE EN TEMPS FIXE D'UNE CLASSE DES SYSTEMES NON LINEAIRES AVEC CONTRAINTES

III.1 INTRODUCTION :.....	31
III.2 COMMANDE PAR SURFACE DYNAMIQUE EN TEMPS FIXE AVEC CONTRAINTE SUR LA SORTIE :	31
III.2.1 Analyse de stabilité :	34
III.2.2 Résultat de simulation :	38
III.2.3 Interprétation des résultats :.....	41
III.3 COMMANDE PAR SURFACE DYNAMIQUE EN TEMPS FIXE AVEC CONTRAINTES SUR L'ETAT :.....	41
III.3.1 Analyse de stabilité :	44
III.3.2 Résultat de simulation :	48
III.3.3 Interprétation des résultats :.....	51
III.4 REMARQUE :.....	51
III.5 CONCLUSION	52

CONCLUSION GENERALE.....53

BIBLIOGRAPHIE :54

LISTE DES SYMBOLES

Notations :

- \mathbf{R} : Ensemble des nombres réels
- \mathbf{R}_+ : Ensemble des nombres réels positifs
- \mathbf{R}^n : Ensemble des vecteurs réels de dimension n
- \mathbf{N} : Ensemble des nombres naturels
- \mathbf{x} : Variable d'état
- \mathbf{x}_e : Point d'équilibre
- $f(\cdot), g(\cdot)$: Fonctions non linéaires
- $v(\cdot)$: Fonction de Lyapunov
- $\mathbf{x}_{Id}, \mathbf{y}_d$: Trajectoire désirée
- $\mathbf{x}_{id}, \mathbf{x}_{ic}$: Commande virtuelle (ou fonction stabilisante)
- e_i : Variable d'erreur
- k_c : Contrainte imposée sur la sortie
- k_b : Contrainte imposée sur l'erreur de poursuite
- τ : Temps de stabilisation
- $sign(\cdot)$: Fonction de signe

Abréviations :

- BS** : Backstepping
- LBF** : Lyapunov barrier Function (Fonction barrière de Lyapunov)
- DSC** : Dynamic Surface Control (Commande par surface dynamique)
- FxTS** : Fixed-time Stability (Stabilité en temps fixe)

LISTE DES FIGURES

Figure I.1 : Illustration schématique d'une fonction barrière symétrique (gauche) et asymétrique (droite).....	9
Figure II.1 : Evolution de x_1	22
Figure II.2 : Evolution de x_2	22
Figure II.3 : Evolution de e_1	22
Figure II.4 : Evolution de e_2	22
Figure II.5 : Signal de commande u	22
Figure II.6 : Evolution de x_1	29
Figure II.7 : Evolution de x_2	29
Figure II.8 : Evolution de e_1	29
Figure II.9 : Evolution de e_2	29
Figure II.10 : Signal de commande u	29
Figure III.1 : Evolution de x_1	39
Figure III.2 : Evolution de x_2	39
Figure III.3 : Evolution de e_1	39
Figure III.4 : Evolution de e_2	39
Figure III.5 : Signal de commande u	39
Figure III.6 : Evolution de x_1	40
Figure III.7 : Evolution de x_2	40
Figure III.8 : Evolution de e_1	40
Figure III.9 : Evolution de e_2	40
Figure III.10 : Signal de commande u	41
Figure III.11 : Evolution de x_1	49
Figure III.12 : Evolution de x_2	49
Figure III.13 : Evolution de e_1	49
Figure III.14 : Evolution de e_2	49
Figure III.15 : Signal de commande u	49
Figure III.16 : Evolution de x_1	50
Figure III.17 : Evolution de x_2	50
Figure III.18 : Evolution de e_1	50
Figure III.19 : Evolution de e_2	50
Figure III.20 : Signal de commande u	51

INTRODUCTION GENERALE

Les recherches sur la commande sont multipliées à la fin de ce siècle, les théories de l'automatique étant devenues l'un des champs de recherche les plus riches en termes d'algorithmes. Ces dernières années les stratégies de commande sont classées en deux catégories dites linéaires et non linéaires.

La commande linéaire repose sur une approximation du modèle du système autour d'un point de fonctionnement donné, de telle sorte que les outils d'analyse et de synthèse des systèmes linéaires puissent être exploités [1, 2]. Pourtant, cette approche ne garantit pas la stabilité du système bouclé sur toute la plage de fonctionnement et souffre, en général, d'un manque de robustesse. Par contre, la commande non linéaire permet d'assurer une stabilité sur une plus large plage de fonctionnement et peut avoir de bonnes propriétés de robustesse [3,4].

La technique de commande par backstepping est conçue sur la base de la théorie de stabilité de Lyapunov. Le principe de cette méthode est de synthétiser des lois de commande stables d'une façon réursive pour s'assurer que la dérivée d'une fonction de Lyapunov (définie positive) est toujours négative, ce qui permet de garantir la stabilité globale du système en boucle fermée [5]. Cependant, suite aux dérivations successives des lois de commande virtuelles à chaque étape de conception du backstepping, la synthèse d'une telle loi de commande devient plus difficile. Afin d'éviter ce problème, on introduit à chaque étape de conception une nouvelle variable obtenue par le filtrage de la commande virtuelle. Cette technique a abouti des nouvelles approches nommées : Commande par surface dynamique (DSC) [6, 7].

Ce mémoire concerne principalement la commande en temps fixe d'une classe des systèmes non linéaires avec contraintes. L'objectif principal est d'étudier la stabilité de certains systèmes non linéaires basés sur la l'approche backstepping. La présentation du mémoire s'articule autour de trois chapitres :

Le premier chapitre présente quelques notions sur la commande des systèmes non linéaires. Dans un premier temps, on donne quelques outils fondamentaux, ainsi que les principaux concepts relatifs à la stabilité des systèmes non linéaires. Ensuite, nous présenterons en détail les préliminaires mathématiques et les lemmes techniques utiles pour la commande des systèmes non linéaires avec contraintes, qui seront utilisés tout le long de ce travail de mémoire.

Le deuxième chapitre est consacré à la commande par backstepping pour une classe des systèmes non linéaires avec contraintes. Nous allons développer deux stratégies de commande

en temps fixe. La première stratégie considère des contraintes sur la sortie. Tandis que la deuxième technique suppose des contraintes sur le vecteur d'état. Nous utilisons notamment l'approche de Lyapunov pour étudier la stabilité du système en boucle fermée. Enfin, pour voir les performances de ces stratégies de commande, on présente des résultats de simulation avec les interprétations correspondantes.

Le dernier chapitre entame la commande par surface dynamique pour une classe des systèmes non linéaire avec contraintes. En utilisant des filtres non linéaires par mode glissant, deux stratégies de commande en temps fixe seront développées. La première approche considère des contraintes sur la sortie. La deuxième technique de commande traite des contraintes sur l'état. Les résultats de simulations sont présentés pour le même exemple d'application du chapitre précédent.

Enfin, une conclusion générale sur les résultats obtenus sera donnée à la fin de ce travail.

CHAPITRE I: NOTIONS SUR LES SYSTEMES NON LINEAIRES

I.1 Introduction :

Le but de ce chapitre est d'exposer quelques rappels indispensables à la bonne compréhension de ce mémoire. Dans un premier temps, nous allons donner des généralités sur les systèmes non linéaires. Ensuite, nous allons rappeler un ensemble de définitions relatives à la stabilité des systèmes dynamiques. De plus, nous allons exposer un rappel sur la commande par backstepping avec fonction barrière de Lyapunov. Un exemple de motivation de deuxième ordre est également donné. A la fin de ce premier chapitre, nous allons évoquer deux lemmes de stabilité, où le premier lemme est relatif à la stabilité en temps fixe, et le deuxième concerne la stabilité basée sur la fonction barrière de Lyapunov.

I.2 Systèmes linéaires :

Les systèmes linéaires sont des objets du monde physique qui peuvent être décrits par des différentes équations linéaires. Par contre, les systèmes non linéaires sont plus difficiles à étudier. Cependant, en linéarisant un système non linéaire autour d'un point d'équilibre ou d'une trajectoire, on obtient un système linéaire qui représente correctement le système non linéaire près du point d'équilibre ou de la trajectoire. La linéarisation d'un système non linéaire autour d'une trajectoire non réduite à un point d'équilibre génère un système linéaire à coefficients variables (en fonction du temps) [8].

I.3 Systèmes non linéaires :

Un système non linéaire est un système qui ne peut pas être décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Cette définition, ou plutôt cette non-définition, explique la complexité et la diversité des méthodes de commande qui s'appliquent à de tels systèmes. La théorie générale de ces systèmes a plusieurs méthodes applicables à certaines classes des systèmes [9].

I.4 Stabilité des systèmes non linéaire :

I.4.1 Stabilité au sens de Lyapunov :

Le point d'équilibre ($x = 0$) est considéré comme stable au sens de Lyapunov, si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0, \exists Q(\varepsilon) > 0, si |x(0)| < \varepsilon$ alors : $|x(t)| < Q(\varepsilon), \forall t > 0$

La stabilité au sens de Lyapunov traduit le fait que, si l'on met un système dans un état proche d'un point d'équilibre stable au sens de Lyapunov, la trajectoire résultante de cet état reste tout entière dans un voisinage de point d'équilibre [10].

I.4.2 Stabilité locale et globale :

I.4.2.1 Stabilité locale :

Pour un système linéaire, on peut prédire son comportement à partir de l'analyse de son point d'équilibre. Puisqu'un système peut avoir plusieurs positions d'équilibre, la stabilité de l'une de ces positions d'équilibre ne suffit à elle seule à prédire la stabilité du système [9].

I.4.2.2 Stabilité globale :

Dans le cas où le système est stable pour toutes les valeurs possibles des variables du système, on parle de la stabilité globale. Elle possède notamment un intérêt pratique beaucoup plus considérable que la stabilité locale. La stabilité globale ne dépend pas seulement du système lui-même, mais aussi des valeurs possibles que peuvent prendre les variables dans le problème considéré. Ainsi, suivant le domaine de définition de variables auquel on s'intéresse, le même système peut être globalement stable ou globalement instable.

I.4.3 Stabilité simple :

Etant donné un domaine de définition \mathbf{D} , s'il est possible de trouver une fonction $v(x)$ définie positive et sa dérivée temporelle $\dot{v}(x)$ est définie semi-négative et de signe opposé dans le même domaine, alors, on dit que l'équilibre est (simplement) stable dans ce domaine.

Il est à noter, qu'on peut prouver la stabilité asymptotique en utilisant le lemme de Barbalat, qui complète le théorème de Lyapunov de la stabilité simple [11, 7].

I.4.4 Stabilité asymptotique :

Le point d'équilibre $x = 0$ est dit asymptotiquement stable, si et seulement si :

- Il est stable au sens de Lyapunov.
- Il existe $\alpha \geq 0$ tel que :

$$\|x(0)\| \leq \alpha \quad (1.1)$$

$$\text{Donc } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

La stabilité asymptotique traduit le fait, qu'il existe un voisinage du point d'équilibre de système, pour lequel toute trajectoire issue d'un état situé dans ce voisinage non seulement ne s'écarte jamais trop du point d'équilibre, mais finit toujours par le rejoindre [10].

I.4.5 Stabilité exponentielle :

Le point d'équilibre $x = 0$ est dit exponentiellement stable, si et seulement si :

- Il est asymptotiquement stable.
- Il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tel que si :

$$|x(t)| \leq \alpha |x(0)| e^{-\beta t}, \quad \forall t > 0. \quad (1.2)$$

La stabilité exponentielle traduit le fait que la vitesse de convergence vers l'état l'équilibre est bornée par une exponentielle [10].

I.4.6 L'inégalité de Young :

La forme standard de l'inégalité de Young porte le nom William Henry Young, approuver que pour tous réels x et y positifs ou nuls et tous réels α et β strictement positifs tels que : $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$,

on a [12] :

$$xy \leq \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{y^\beta}{\beta} \quad (1.3)$$

Lorsque $\alpha = \beta = 2$, on a :

$$xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \quad (1.4)$$

I.5 Méthode d'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires :

L'étude de la stabilité des systèmes non linéaires est très complexe. L'approche de Lyapunov est l'approche la plus utilisée pour étudier ce problème. On distingue deux méthodes de Lyapunov pour l'analyse de la stabilité [7].

I.5.1 Méthode indirecte de Lyapunov (première méthode) :

La méthode indirecte de Lyapunov concerne la stabilité locale autour d'un point d'équilibre [13].

I.5.2 Méthode directe de Lyapunov (deuxième méthode) :

La méthode directe de Lyapunov est basée sur l'aspect physique fondamental de l'énergie. Si l'énergie totale du système est dissipée en permanence (système dissipatif), alors le système doit converger vers un point d'équilibre. Ensuite, la philosophie de Lyapunov concerne l'étude de la stabilité d'un système, et l'analyse de la variation d'une seule fonction scalaire (fonction de Lyapunov) dépend de l'énergie totale du système. Autrement dit, nous définissons cette fonction de Lyapunov décroissante le long de la trajectoire du système dans le domaine d'attraction [14].

I.6 Backstepping :

Le Backstepping est une technique développée vers 1990 par Petar V. Kokotovic et d'autres pour concevoir des contrôleurs stabilisateurs pour une classe spéciale des systèmes dynamiques non linéaires [15]. Elle permet, de manière séquentielle, par le choix d'une fonction de Lyapunov, de déterminer la loi de commande du système. Son principe est d'établir d'une manière constructive la loi de commande du système non linéaire en

considérant quelques variables d'état comme étant des commandes virtuelles et leurs concevoir des lois de commande intermédiaires.

L'idée de base du Backstepping est de stabiliser au départ le premier sous-système par une fonction stabilisante connue via une fonction de Lyapunov choisie.

Ensuite d'ajouter à son entrée un intégrateur. On procède de même pour le prochain sous-système augmenté et ainsi de suite pour les sous-systèmes successifs pour aboutir enfin à une fonction de Lyapunov globale donnant la loi de commande globale qui stabilise le système [21].

I.7 Outils de conception et préliminaires :

I.7.1 Introduction :

Dans cette partie, nous décrivons en détail les préliminaires mathématiques, les lemmes techniques utiles et les outils de conception pour la commande des systèmes non linéaires avec contraintes, qui seront utilisés tout le long de ce mémoire. Nous introduisons encore la notion de fonctions barrières de Lyapunov et motivons, à travers un exemple pour les systèmes d'ordre inférieur, leur utilisation dans la conception d'une loi de commande qui assure la non-transgression des contraintes de sortie et d'état [16].

I.7.2 Préliminaires Mathématiques :

Cette section propose un bref rappel des notions de continuité, dérivabilité, régularité, une description des classes de systèmes, la forme triangulaire stricte, Les éléments couverts dans cette section sont largement empruntés aux références [13,17].

I.7.3 Définition 1 :

Il existe une fonction $f : R^n \rightarrow R^m$ est dite continue en un point x si :

$$f(x + \alpha x) \rightarrow f(x) \text{ chaque fois que } \|\alpha x\| \rightarrow 0$$

De manière équivalente, f est continue en x si, étant donné $\lambda > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si :

$$\|x - y\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \lambda \quad (1.5)$$

Une fonction f est continue dans un ensemble E , si elle est continue en tout point de E , et elle est uniformément continue dans E , si $\lambda > 0$, il existe $\alpha(\lambda) > 0$ (dépendant uniquement de λ), tel que dans l'équation $\|x - y\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \lambda$ s'applique pour tout $x, y \in E$, [16].

I.8 Analyse de stabilité de Lyapunov :

La méthode directe de Lyapunov est un outil important dans l'analyse des systèmes non linéaires. Elle fournit un moyen qui détermine la stabilité d'un équilibre sans avoir besoin d'une connaissance explicite des solutions du système avec une création d'une fonction de Lyapunov, puis une analyse des propriétés de sa dérivée temporelle. Nous allons passer brièvement en revue ci-dessous quelques notions et outils bien connus dans l'analyse de stabilité de Lyapunov [16].

I.8.1 Définition 2 :

On dit qu'une fonction continue $f : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}_+$ appartient à la classe B si elle est strictement croissante et $f(0) \rightarrow 0$, On dit qu'il appartient à la classe B_∞ si $a = \infty$.

Et $f(x) \rightarrow \infty$ avec $x \rightarrow \infty$ [13].

I.8.2 Définition 3 :

Il existe une fonction $f(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est :

- Localement définie positive s'il existe une fonction α de classe k telle que :

$$f(x, t) \geq \alpha \|x\| \quad (1.6)$$

Pour tous $t \geq 0$ et pour tout x au voisinage N de l'origine de \mathbb{R}^n

- Définie positive si $N = \mathbb{R}^n$
- (Localement) définie négative si $-f$ (localement) définie positive
- (Localement) décroissante si f est (localement) définie positive et il existe une fonction β de classe k telle que :

$$f(x, t) \leq \beta \|x\| \quad (1.7)$$

Pour tout $t \geq 0$ et pour tout x dans $x \in R^n$ (dans un voisinage N de l'origine de R^n) [17].

I.9 Fonction barrière de Lyapunov :

L'idée des fonctions barrières, comme moyen pour éviter les excursions de variables à partir d'une région d'intérêt n'est pas nouvelle, a été un outil très utile dans les problèmes d'optimisation sous contraintes, où elles sont utilisées dans la fonction de coût pour pénaliser la proximité avec la frontière de la région faisable. De plus, cette idée a également été adoptée dans le domaine de la robotique, notamment pour le problème de l'évitement des collisions, sous la forme de fonctions de champ de potentiel artificiel qui croissent en singularités lorsque la distance inter-objet est inférieure à une distance de valeur prescrite.

Motivés par ces approches, l'utilisation des fonctions barrières de Lyapunov (BLF) nous aideront à développer une méthode de conception d'un algorithme de commande systématique pour les systèmes non linéaires avec contraintes. Le principe est assuré par la limitation des BLF dans la boucle fermée afin d'assurer que les contraintes ne sont pas transgressées [16].

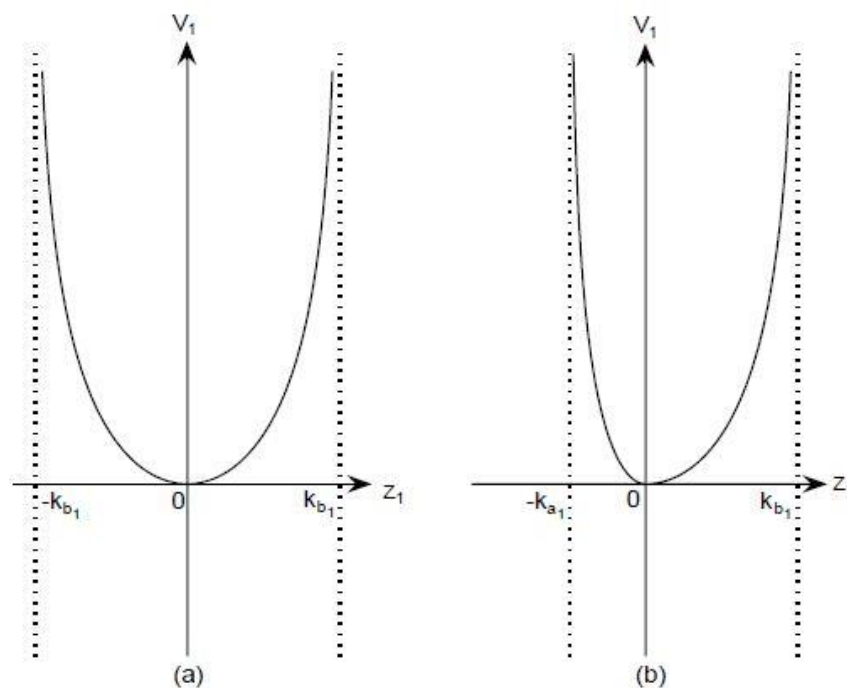


Figure I.1 : Illustration schématique d'une fonction barrière symétrique (gauche) et asymétrique (droite).

I.9.1 Système de deuxième ordre :

On considère le système du second ordre suivant [16] :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Avec : $u \in R$ l'entrée de commande, $y \in R$ la sortie à contrôler, $f_1(x_1)$, $g_1(x_1)$, $f_2(x_1, x_2)$ et $g_2(x_1, x_2)$ sont des fonctions non linéaires connues, et x_1, x_2 sont des états, avec $y(t)$ requis pour satisfaire

$$|y(t)| < k_{c1}, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.9)$$

où k_{c1} étant une constante positive.

Nous utilisons la conception par Backstepping comme suit :

Etape 1 :

La première variable d'erreur est défini par :

$$e_1 = x_1 - x_{1d} \quad (1.10)$$

Où $e_2 = x_2 - x_{2d}$ est la deuxième variable d'erreur.

Afin de concevoir une loi de commande x_{2d} qui ne fait pas sortir x_1 de l'intervalle $|x_1| < k_c$, on considère la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$v_1 = \frac{1}{2} \log \frac{k_{b1}^2}{k_{b1}^2 - e_1^2} \quad (1.11)$$

$$k_{b1} = k_{c1} - A_0 \quad (1.12)$$

où A_0 est la borne supérieur de la trajectoire désirée.

Une illustration schématique de $v_1(e_1)$ est présentée par la figure I. La dérivé de v_1 est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \frac{e_1 \dot{e}_1}{k_{b1}^2 - e_1^2} \\ &= \frac{e_1 (f_1 + g_1(e_2 + x_{2d}) - x_{1d})}{k_{b1}^2 - e_1^2} \end{aligned} \quad (1.13)$$

La première commande virtuelle x_{2d} est donnée comme suit :

$$x_{2d} = \frac{1}{g_1} \left(-f_1 - k_1 e_1 (k_{b1}^2 - e_1^2) + x_{1d} \right) \quad (1.14)$$

Où $k_1 > 0$ est une constante de conception.

La dynamique de e_1 est écrite comme suit:

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1 (k_{b_1}^2 - e_1^2) + g_1 e_2 \quad (1.15)$$

En remplaçant (1.15) dans (1.13), on obtient :

$$\dot{v}_1 = -k_1 e_1^2 + \frac{g_1 e_1 e_2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \quad (1.16)$$

Le terme de couplage $\frac{g_1 e_1 e_2}{k_{b_1}^2 - e_1^2}$ s'annule dans l'étape suivante.

Nous observons que le second terme de l'équation (1.14) (i.e. $(k_{b_1}^2 - e_1^2)k_1 e_1$) est conçu pour annuler le dénominateur $k_{b_1}^2 - e_1^2$ dans l'équation (1.13) afin d'obtenir le terme $-k_1 e_1^2$ dans l'équation (1.16), ce qui est crucial puisqu'il est semi-défini négatif pour tout $e_1 \in \mathbb{R}$, indépendant de toute condition sur e_1 .

Si nous choisissons x_{2d} comme suit :

$$\overline{x}_{2d} = \frac{1}{g_1} (-f_1 - k_1 e_1 + x_{1d}) \quad (1.17)$$

Alors ça donnerait

$$\dot{v}_1|_{x_{2d}=\overline{x}_{2d}} = \frac{-k_1 e_1^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} + \frac{g_1 e_1 e_2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \quad (1.18)$$

Où le terme $\frac{-k_1 e_1^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2}$ est négative seulement si $|e_1| < k_{b_1}$.

Etape 2 :

La deuxième variable d'erreur est définie par :

$$e_2 = x_2 - x_{2d} \quad (1.19)$$

avec x_{2d} est la valeur désirée. Puisque x_2 n'a pas besoin d'être contraint, nous choisissons la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$v_2 = v_1 + \frac{1}{2} e_2^2 \quad (1.20)$$

La dérivée de v_2 peut s'écrire comme suit :

$$\dot{v}_2 = -k_1 e_1^2 + \frac{g_1 e_1 e_2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} + e_2 (f_2 + g_2 u - \dot{x}_{2d}) \quad (1.21)$$

Où:

$$\dot{x}_{2d} = \frac{\partial x_{2d}}{\partial x_1} (f_1 + x_2) + \sum_{j=0}^1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_d^{(j)}} y_d^{(j+1)} \quad (1.22)$$

La commande est conçue comme suit :

$$u = \frac{1}{g_2} \left(-f_2 + \dot{x}_{2d} - k_2 e_2 - \frac{g_1 e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \quad (1.23)$$

où $k_2 > 0$ est un paramètre de conception, et le dernier terme du côté droit (i.e. $\frac{g_1 e_1 e_2}{k_{b_1}^2 - e_1^2}$) est

conçu pour annuler le terme de couplage restant de la première étape.

Par conséquent, il peut être obtenu que :

$$\dot{e}_2 = -k_2 e_2 - \frac{g_1 e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \quad (1.24)$$

Alors, la dérivée de v_2 peut-être réécrite comme suit :

$$\dot{v}_2 = -\sum_{i=1}^2 k_i e_i^2 \quad (1.25)$$

I.10 Notions de stabilité :

On considère un système dynamique autonome :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (1.26)$$

Où $x \in R^n$, $f : D \rightarrow R^n$ est continue sur un voisinage ouvert D de l'origine et $f(0) = 0$. Le résultat ici est présenté uniquement sous l'hypothèse qu'une solution stable existe $x(0) \in R^n$ [14].

L'origine est :

- **Lyapunov stable (LS)** ou simplement, **stable**, si pour tout $r_1 > 0$, il existe $g(t) > 0$ tel que, si : $\|x(0)\| < g$, alors $\|x(t)\| < r_1$ pour tout $t \geq 0$.
- **Asymptotiquement Stable (AS)** (respectivement, **globalement AS**), s'il est stable, et qu'il existe : $r_2 > 0$, tel que pour tout $\|x(0)\| < r_2$ (respectivement, pour tout $x(0) \in R^n$) la solution de stabilité satisfait : $\lim_{x \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

- **Exponentiellement stable (ES)** (respectivement, **globalement ES**), s'il existe $\alpha, \beta, \gamma > 0$, tel que pour tout $\|x(0)\| < \alpha$ (respectivement, pour tout $x(0) \in \mathbb{R}^n$), $\|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\gamma t}$ et $t \geq 0$.
- **Stable en temps fini (STF)**, s'il est asymptotiquement stable et qu'il existe un voisinage ouvert N de l'origine tel que pour tout $x(0) \in N \setminus \{0\}$, $\lim_{t \rightarrow T} x(t) = 0$, ou $T = T(x(0)) < \infty$.
- **Globalement stable en temps fini (GSTF)**, s'il est stable en temps fini avec $N = \mathbb{R}^n$
- **Globalement stable en temps fixe (GSTFx)**, s'il globalement stable en temps fini et la fonction de temps de stabilisation satisfait :

$$T \leq T_{\max} < \infty, \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n$$

I.10.1 Lemme 1 :

Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov dérivable, définie positive et radialement non bornée $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, telle que :

$$\dot{v}(x) - \lambda_1 v(x) - \lambda_2 v^p(x) - \lambda_3 v^q(x) \leq 0 \quad (1.27)$$

est valable pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, avec $\alpha_1, \alpha_2 > 0, 0 < \gamma_1 < 1$ et $\gamma_2 > 1$. Alors l'origine est dite stable en temps fixe avec une fonction de temps de stabilisation continue τ qui satisfait :

$$\tau = \frac{1}{\lambda_3(1-p)} \ln \left(1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) - \frac{1}{\lambda_3(1-q)} \ln \left(1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right) \quad (1.28)$$

Notez que dans ce cas (en temps fixe), le temps de stabilisation τ est fixe, c'est-à-dire, il est indépendant des conditions initiales [18].

I.10.2 Lemme 2 :

Pour toute constante positive $k_{b_i}, i=1,2,\dots,n$, soit $Z := \{z \in \mathbb{R}^n : |z_i| < k_{b_i}, i=1,2,\dots,n\} \subset \mathbb{R}^n$ et

$N := \mathbb{R}^l \times Z \subset \mathbb{R}^{n+1}$ comme des ensembles ouverts.

Considérons le système suivant :

$$\dot{r} = h(t, r) \quad (1.29)$$

où $r := [w, z]^T \in N$ est le vecteur d'état, et la fonction $h : R_+ \times N \rightarrow R^{n+1}$ satisfait les conditions d'existence et d'unicité de la solution.

Soit $Z_i := \{z_i \in R : |z_i| < k_{b_i}\} \subset R$. Supposons qu'il existe des fonctions continues dérivables et définies positives $U : R^l \rightarrow R_+$ et $V_i : Z_i \rightarrow R_+$; $i = 1, \dots, n$, telles que :

$$\begin{aligned} v_i(z_i) &\rightarrow \infty \text{ lorsque } |z_i| \rightarrow k_{b_i} \\ \gamma_1(\|w\|) &\leq U(w) \leq \gamma_2(\|w\|) \end{aligned} \quad (1.30)$$

Où : γ_1, γ_2 sont des fonctions de classe k_∞ . Soit $v(r) := \sum_{i=1}^n v_i(z_i) + U(w)$, et $z(0) \in Z$. Si

l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial r} h \leq 0 \quad (1.31)$$

Dans l'ensemble $z \in Z$, μ et λ sont des constantes positives, donc w reste borné et $z(t) \in Z_i, \forall t \in [0, \infty)$.

On peut facilement démontrer que ce Lemme reste valable aussi, si les contraintes sont variant dans le temps [16].

I.11 Conclusion :

Dans ce chapitre, notre principal objectif était d'introduire la notion de la commande en temps fixe des systèmes non linéaires, de présenter quelques rappels sur les propriétés générales des systèmes non linéaires, les principes fondamentaux de la théorie de stabilité de ces systèmes, et de donner quelques lemmes utilisées dans les prochaines chapitres. Dans le chapitre suivant, nous synthétiserons deux approches de commande par backstepping en temps fixe pour une classe de systèmes non linéaires avec contraintes. Les performances de ces deux approches seront examinées à travers un exemple de simulation.

CHAPITRE II: COMMANDE PAR BACKSTEPPING EN TEMPS FIXE D'UNE CLASSE DES SYSTEMES NON LINEAIRES AVEC CONTRAINTES

II.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons proposer deux stratégies de commande par backstepping pour une classe des systèmes non linéaires avec contraintes. La première stratégie de commande considère des contraintes sur la sortie. Tandis que la deuxième technique suppose des contraintes sur le vecteur d'état. Le traitement de ces contraintes se fait à l'aide des fonctions barrières de Lyapunov (BLF) de type logarithme. L'approche de Lyapunov est utilisée pour démontrer la stabilité en temps fixe du système bouclé. Les performances de ces techniques de commande sont illustrées à travers un exemple numérique du deuxième ordre.

II.2 Commande par backstepping en temps fixe avec contrainte sur la sortie :

Soit un système d'ordre n :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\
 \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_i &= f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= f_n(x) + g_n(x)u \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Où, f_i et $g_i, i=1, \dots, n$ sont des fonctions non linéaires connues tels que : $f_i(0)=0$ et $g_i(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. $\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T$ est le vecteur d'état partiel, $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ est le vecteur d'état total, u est l'entrée de commande, y est la sortie du système.

On désire faire suivre en temps fixe la sortie $y = x_1$ à un signal de référence y_r supposé connu et uniformément borné, tout en imposant la contrainte $|y| < k_c$, où k_c est une constante positive définie a priori.

L'algorithme de commande est détaillé ci-dessous :

Etape 1 :

La première variable d'erreur est définie comme :

$$e_1 = x_1 - x_{1d} \quad (2.2)$$

La dynamique de la première erreur est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_{1d} \\ &= f_1 + g_1 x_2 - \dot{x}_{1d} \\ &= f_1 + g_1 (e_2 + x_{2d}) - \dot{x}_{1d} \end{aligned} \quad (2.3)$$

où $e_2 = x_2 - x_{2d}$ est la deuxième variable d'erreur.

Afin de concevoir une loi de commande x_{2d} qui ne fait pas sortir x_1 de l'intervalle $|x_1| < k_c$, on considère la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$v_1 = \frac{1}{2} \log \frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \quad (2.4)$$

$$k_{b_1} = k_c - A_0 \quad (2.5)$$

Où $A_0 = \max |y_r|$ et k_{b_1} est la contrainte imposée sur l'erreur de poursuite e_1 de façon que $|e_1| < k_{b_1}$.

Le dérivé de v_1 est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \dot{e}_1 \\ &= \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} (f_1 + g_1 x_2 - \dot{x}_{1d}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

La première commande virtuelle x_{2d} se donne comme suit :

$$x_{2d} = \frac{1}{g_1} \left((-k_1 e_1 - c_1 e_1^{2p-1} - l_1 e_1^{2q-1}) (k_{b_1}^2 - e_1^2) - f_1 + \dot{x}_{1d} \right) \quad (2.7)$$

où $k_1 > 0$, $c_1 > 0$, $l_1 > 0$, $\frac{1}{2} < p < 1$, $q > 1$ sont des constantes de conception.

En remplaçant (2.7) dans (2.3), on obtient :

$$\dot{e}_1 = \left(-k_1 e_1 - c_1 e_1^{2p-1} - l_1 e_1^{2q-1} \right) (k_{b_1}^2 - e_1^2) + g_1 e_2 \quad (2.8)$$

La dérivée de v_1 devient :

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \left[(-k_1 e_1 - c_1 e_1^{2p-1} - l_1 e_1^{2q-1}) (k_{b_1}^2 - e_1^2) + g_1 e_2 \right] \\ &= -k_1 e_1^2 - c_1 e_1^{2p} - l_1 e_1^{2q} + g_1 \frac{e_1 e_2}{k_{b_1}^2 - e_1^2}\end{aligned}\quad (2.9)$$

Étape 2 :

Considérons la deuxième variable d'erreur $e_2 = x_2 - x_{2d}$, la dynamique correspondante se donne par :

$$\begin{aligned}\dot{e}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{x}_{2d} \\ &= f_2 + g_2 x_3 - \dot{x}_{2d}\end{aligned}\quad (2.10)$$

On utilise la fonction de Lyapunov augmentée suivante :

$$v_2 = v_1 + \frac{1}{2} e_2^2 \quad (2.11)$$

Le dérivé de v_2 peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{v}_2 &= \dot{v}_1 + e_2 \dot{e}_2 \\ &= -k_1 e_1^2 - c_1 e_1^{2p} - l_1 e_1^{2q} + g_1 \frac{e_1 e_2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} + e_2 (f_2 + g_2 (x_{3d} + e_3) - \dot{x}_{2d})\end{aligned}\quad (2.12)$$

Où $e_3 = x_3 - x_{3d}$ est la troisième variable d'erreur.

La deuxième commande virtuelle x_{3d} s'écrit comme suit :

$$x_{3d} = \frac{1}{g_2} \left(-k_2 e_2 - c_2 e_2^{2p-1} - l_2 e_2^{2q-1} - g_1 \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} - f_2 + \dot{x}_{2d} \right) \quad (2.13)$$

Où $k_2 > 0$, $c_2 > 0$, $l_2 > 0$ sont des constantes de conception.

On remplace (2.13) dans (2.12), on trouve :

$$\begin{aligned}\dot{v}_2 &= -k_1 e_1^2 - c_1 e_1^{2p} - l_1 e_1^{2q} + g_1 \frac{e_1 e_2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} + e_2 \left(-k_2 e_2 - c_2 e_2^{2p-1} - l_2 e_2^{2q-1} - g_1 \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} + g_2 e_3 \right) \\ &= -\sum_{j=1}^2 (k_j e_j^2 + c_j e_j^{2p} + l_j e_j^{2q}) + g_2 e_2 e_3\end{aligned}\quad (2.14)$$

Étape i (i=3 ; ..., n-1) :

Dans l'étape i , la variable d'erreur est définie par :

$$e_i = x_i - x_{id} \quad (2.15)$$

La dynamique d'erreur correspondante est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{e}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{id} \\ &= f_i + g_i x_{i+1} - \dot{x}_{id} \\ &= f_i + g_i (e_{i+1} + x_{(i+1)d}) - \dot{x}_{id}\end{aligned}\quad (2.16)$$

Où $e_{i+1} = x_{i+1} - x_{(i+1)d}$ est la $(i + 1)$ variable d'erreur.

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$v_i = v_{i-1} + \frac{1}{2} e_i^2 \quad (2.17)$$

Alors, la dérivée de v_i peut écrire :

$$\begin{aligned}\dot{v}_i &= -\sum_{j=1}^{i-1} (k_j e_j^2 + c_j e_j^{2p} + l_j e_j^{2q}) + g_{i-1} e_{i-1} e_i + e_i \dot{e}_i \\ &= -\sum_{j=1}^{i-1} (k_j e_j^2 + c_j e_j^{2p} + l_j e_j^{2q}) + e_i (f_i + g_{i-1} e_{i-1} + g_i (e_{i+1} + x_{(i+1)d}) - \dot{x}_{id})\end{aligned}\quad (2.18)$$

La $i^{\text{ème}}$ commande virtuelle $x_{(i+1)d}$ de est donnée par :

$$x_{(i+1)d} = \frac{1}{g_i} (-k_i e_i - c_i e_i^{2p-1} - l_i e_i^{2q-1} - g_{i-1} e_{i-1} - f_i + \dot{x}_{id}) \quad (2.19)$$

Où $k_i > 0, c_i > 0, l_i > 0$ sont des constantes de conception.

La dérivée de v_i devient :

$$\dot{v}_i = -\sum_{j=1}^i (k_j e_j^2 + c_j e_j^{2p} + l_j e_j^{2q}) + g_i e_i e_{i+1} \quad (2.20)$$

Étape n :

Dans l'étape finale, la variable d'erreur est définie comme suit :

$$e_n = x_n - x_{nd} \quad (2.21)$$

La dynamique d'erreur est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{e}_n &= \dot{x}_n - \dot{x}_{nd} \\ &= f_n + g_n u - \dot{x}_{nd}\end{aligned}\quad (2.22)$$

Considérons la fonction de Lyapunov finale suivante :

$$v_n = v_{n-1} + \frac{1}{2} e_n^2 \quad (2.23)$$

Alors, la dérivée de v_n peut s'écrire comme suit :

$$\dot{v}_n = -\sum_{j=1}^{n-1} k_j e_j^2 - \sum_{j=1}^{n-1} c_j e_j^{2p} - \sum_{j=1}^{n-1} l_j e_j^{2q} + g_{n-1} e_{n-1} e_n + e_n (f_n + g_n u - \dot{x}_{nd}) \quad (2.24)$$

La loi de commande est conçue comme suit :

$$u = \frac{1}{g_n} (-k_n e_n - c_n e_n^{2p-1} - l_n e_n^{2q-1} - g_{n-1} e_{n-1} - f_n + \dot{x}_{nd}) \quad (2.25)$$

Où $k_n > 0$, $c_n > 0$, $l_n > 0$ sont des constantes de conception.

On remplace (2.25) dans (2.24), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{v}_n &= -\sum_{j=1}^n (k_j e_j^2) - \sum_{j=1}^n (c_j e_j^{2p}) - \sum_{j=1}^n (l_j e_j^{2q}) \\ &= -k_1 e_1^2 - c_1 e_1^{2p} - l_1 e_1^{2q} - \sum_{j=2}^n (k_j e_j^2) - \sum_{j=2}^n c_j (e_j^2)^p - \sum_{j=2}^n l_j (e_j^2)^q \\ &\leq -k_1 e_1^2 - c_1 e_1^{2p} - l_1 e_1^{2q} - \sum_{j=2}^n 2k_j \left(\frac{e_j^2}{2}\right) - \sum_{j=2}^n 2^p c_j \left(\frac{e_j^2}{2}\right)^p - \sum_{j=2}^n 2^q l_j \left(\frac{e_j^2}{2}\right)^q \\ &\leq -(k_{b_1}^2 - e_1^2) \frac{(k_1 e_1^2)}{(k_{b_1}^2 - e_1^2)} - (k_{b_1}^2 - e_1^2)^p \frac{(c_1 e_1^2)^p}{(k_{b_1}^2 - e_1^2)^p} - (k_{b_1}^2 - e_1^2)^q \frac{(l_1 e_1^2)^q}{(k_{b_1}^2 - e_1^2)^q} \\ &\quad - \sum_{j=2}^n 2k_j \left(\frac{e_j^2}{2}\right) - \sum_{j=2}^n 2^p c_j \left(\frac{e_j^2}{2}\right)^p - \sum_{j=2}^n 2^q l_j \left(\frac{e_j^2}{2}\right)^q \end{aligned} \quad (2.26)$$

Pour $|e_1| < k_{b_1}^2$, il a été prouvé dans [22] que :

$$\log\left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2}\right) < \frac{e_1^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \quad (2.27)$$

Ce qui implique encore que :

$$\left(\log\left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2}\right)\right)^p < \left(\frac{e_1^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2}\right)^p \quad \text{et} \quad \left(\log\left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2}\right)\right)^q < \left(\frac{e_1^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2}\right)^q \quad (2.28)$$

L'inégalité (2.26) devient :

$$\begin{aligned} \dot{v}_n &\leq -k_1 (k_{b_1}^2 - e_1^2) \log\left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2}\right) - c_1 (k_{b_1}^2 - e_1^2)^p \left(\log\left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2}\right)\right)^p \\ &\quad - l_1 (k_{b_1}^2 - e_1^2)^q \left(\log\left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2}\right)\right)^q - \sum_{j=2}^n 2k_j \left(\frac{e_j^2}{2}\right) - \sum_{j=2}^n 2^p c_j \left(\frac{e_j^2}{2}\right)^p - \sum_{j=2}^n 2^q l_j \left(\frac{e_j^2}{2}\right)^q \end{aligned} \quad (2.29)$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\dot{v}_n &\leq -2k_1(k_{b_1}^2 - e_1^2) \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{e_1^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \right) - 2^p c_i (k_{b_1}^2 - e_1^2)^p \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{e_1^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \right)^p \\
&\quad - 2^q l_1 (k_{b_1}^2 - e_1^2)^q \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{e_1^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \right)^q - \sum_{j=2}^n 2k_j \left(\frac{e_j^2}{2} \right) - \sum_{j=2}^n 2^p c_j \left(\frac{e_j^2}{2} \right)^p - \sum_{j=2}^n 2^q l_j \left(\frac{e_j^2}{2} \right)^q \\
&\leq -2k_1 \rho_1 \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{e_1^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \right) - 2^p c_1 \rho_1^p \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{e_1^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \right)^p - 2^q l_1 \rho_1^q \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{e_1^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \right)^q \\
&\quad - \sum_{j=2}^n 2k_j \left(\frac{e_j^2}{2} \right) - \sum_{j=2}^n 2^p c_j \left(\frac{e_j^2}{2} \right)^p - \sum_{j=2}^n 2^q l_j \left(\frac{e_j^2}{2} \right)^q
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Avec $\rho_1 = \min_{\tau \in [0, t]} [k_{b_1}^2 - e_1(\tau)^2] > 0$ est une constante positive.

Supposons que $\lambda_1 = \min [2k_1 \rho_1, 2k_2, \dots, 2k_n] > 0$, $\lambda_2 = \min [2^p c_1 \rho_1^p, 2^p c_2, \dots, 2^p c_n] > 0$ et

$\lambda_3 = \min [2^q l_1 \rho_1^q, 2^q l_2, \dots, 2^q l_n] > 0$, il en résulte que :

$$\begin{aligned}
\dot{v}_n &\leq -\lambda_1 \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \right] - \lambda_2 \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \right]^p - \lambda_3 \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \right]^q \\
&\quad - \lambda_1 \sum_{j=2}^n \left(\frac{e_j^2}{2} \right) - \lambda_2 \sum_{j=2}^n \left(\frac{e_j^2}{2} \right)^p - \lambda_3 \sum_{j=2}^n \left(\frac{e_j^2}{2} \right)^q \\
&= -\lambda_1 v_n - \lambda_2 v_n^p - \lambda_3 v_n^q
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Ce qui implique la stabilité en temps fixe du système en boucle fermée.

II.2.1 Résultat de simulation :

Afin de montrer les performances de l'algorithme de commande proposé dans cette section, on considère le système non linéaire de deuxième ordre suivant [16] :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u \\
y &= x_1
\end{aligned} \tag{2.32}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1) &= 0.1x_1^2 \\
 f_2(x_1, x_2) &= 0.1x_1x_2 - 0.2x_1 \\
 g_1(x_1) &= 1 \\
 g_2(x_1, x_2) &= 1 + x_1^2
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Où x_1, x_2 et u sont, respectivement, les états et l'entrée de commande du système. La trajectoire désirée est : $x_d = 0.2 + 0.3\sin(t)$. On choisit les conditions initiales comme suit :

$x(0) = [0.25 \ 1]$. Les paramètres de conception sont :

$k_1 = 1, k_2 = 1, c_1 = 2, c_2 = 2, l_1 = 2, l_2 = 2, p = \frac{97}{101}, q = \frac{197}{101}$, L'objectif de la commande est

de forcer la sortie de système à suivre la trajectoire de référence au cours d'un temps fixe tout en imposant une contrainte sur le premier état (la sortie) $|x_1| < 0.75$.

L'algorithme de commande par backstepping en temps fixe avec contrainte sur la sortie se donne par :

$$\left. \begin{aligned}
 e_1 &= x_1 - x_{1d} \\
 x_{2d} &= \frac{1}{g_1} \left((-k_1 e_1 - c_1 e_1^{2p-1} - l_1 e_1^{2q-1}) (k_{b_1}^2 - e_1^2) - f_1 + \dot{x}_{1d} \right) \\
 e_2 &= x_2 - x_{2d} \\
 u &= \frac{1}{g_2} \left(-k_2 e_2 - c_2 e_2^{2p-1} - l_2 e_2^{2q-1} - g_1 \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} - f_2 + \dot{x}_{2d} \right)
 \end{aligned} \right\} \tag{2.34}$$

Les résultats de simulation sont donnés dans les figures (II.1)-(II.5).

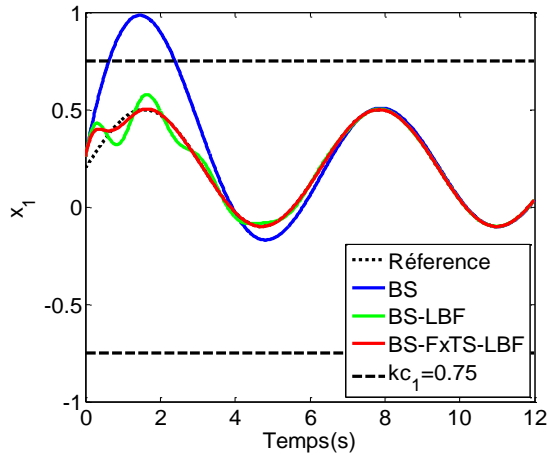


Figure II.1 : Evolution de x_1

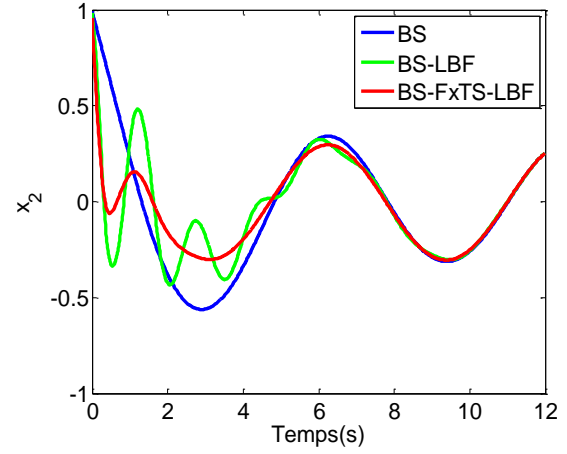


Figure II.2 : Evolution de x_2

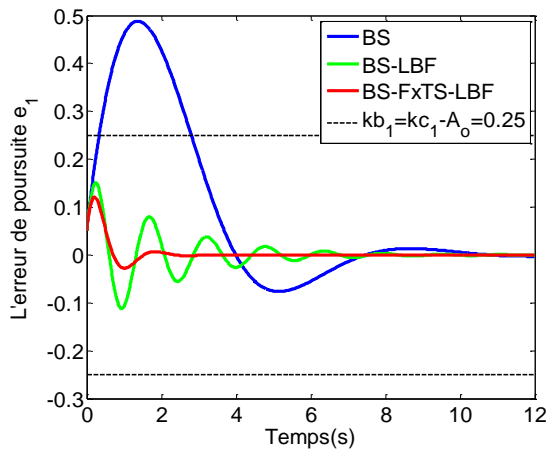


Figure II.3 : Evolution de e_1

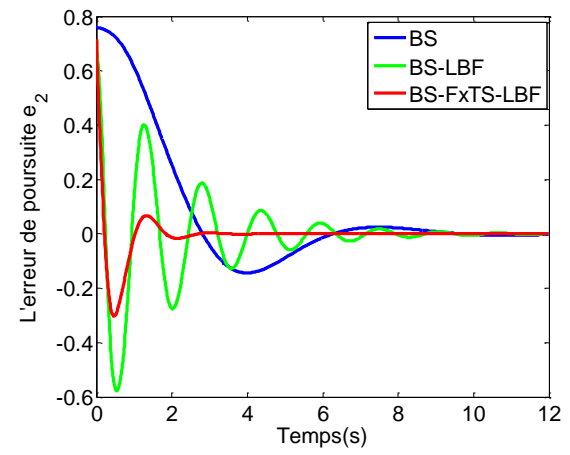


Figure II.4 : Evolution de e_2

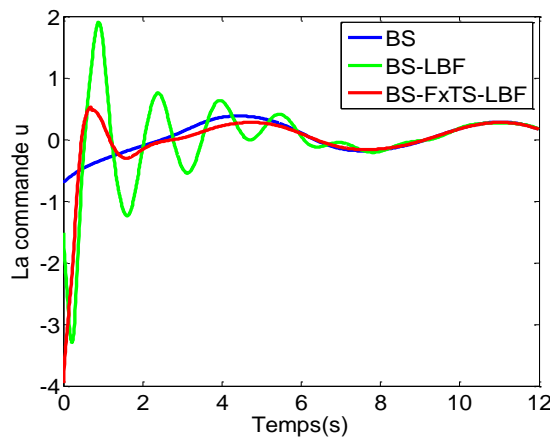


Figure II.5 : Signal de commande u

II.2.2 Interprétation des résultats :

D'après les résultats de simulation obtenus, on remarque que :

- La technique de commande par backstepping conventionnel (BS) ne convient pas, parce que sa réponse dépasse la contrainte imposée sur la sortie k_c .
- L'allure de la commande u qui correspond à l'approche backstepping *en temps fixe* avec fonction barrière de Lyapunov (BS-FxTS-LBF) est plus stable par rapport à l'approche backstepping avec fonction barrière de Lyapunov (BS-LBF).
- L'approche BS-FxTS-LBF est plus efficace en termes de rapidité et de poursuite par rapport aux autres techniques de commande (BS et BS-LBF).

II.3 Commande par backstepping en temps fixe avec contrainte sur l'état :

L'algorithme de la commande est conçu comme suit :

Etape 1 :

La première variable d'erreur est définie comme :

$$e_1 = x_1 - x_{1d} \quad (2.35)$$

La dynamique de la première erreur peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_{1d} \\ &= f_1 + g_1 x_2 - \dot{x}_{1d} \\ &= f_1 + g_1 (e_2 + x_{2d}) - \dot{x}_{1d} \end{aligned} \quad (2.36)$$

où $e_2 = x_2 - x_{2d}$ est la deuxième variable d'erreur.

Afin de concevoir une loi de commande x_{2d} qui ne fait pas sortir x_1 de l'intervalle $|x_1| < k_c$,

on considère la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$v_1 = \frac{1}{2} \log \frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \quad (2.37)$$

$$k_{b_1} = k_{c_1} - A_0 \quad (2.38)$$

Où $A_0 = \max |y_r|$ et k_{b_1} est la contrainte imposée sur l'erreur de poursuite e_1 de façon que $|e_1| < k_{b_1}$.

La dérivé de v_1 est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \dot{e}_1 \\ &= \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} (f_1 + g_1 x_2 - \dot{x}_{1d}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

La première commande virtuelle x_{2d} se donne comme suit :

$$x_{2d} = \frac{1}{g_1} ((-k_1 e_1 - c_1 e_1^{2p-1} - l_1 e_1^{2q-1})(k_{b_1}^2 - e_1^2) - f_1 + \dot{x}_{1d}) \quad (2.40)$$

Où $k_1 > 0$, $c_1 > 0$, $l_1 > 0$, $\frac{1}{2} < p < 1$, $q > 1$ sont des constantes de conception.

En remplaçant (2.40) dans (2.36), on obtient :

$$\dot{e}_1 = (-k_1 e_1^2 - c_1 e_1^{2p} - l_1 e_1^{2q})(k_{b_1}^2 - e_1^2) + g_1 e_2 \quad (2.41)$$

Donc l'équation (2.39) devient :

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \left[(-k_1 e_1^2 - c_1 e_1^{2p} - l_1 e_1^{2q})(k_{b_1}^2 - e_1^2) + g_1 e_2 \right] \\ &= (-k_1 e_1^2 - c_1 e_1^{2p} - l_1 e_1^{2q}) + g_1 \frac{e_1 e_2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Étape 2 :

Considérons la deuxième variable d'erreur $e_2 = x_2 - x_{2d}$, la dynamique correspondante se donne par :

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{x}_{2d} \\ &= f_2 + g_2 x_3 - \dot{x}_{2d} \end{aligned} \quad (2.43)$$

On utilise la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$v_2 = v_1 + \frac{1}{2} \log \frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_2^2} \quad (2.44)$$

Le dérivé de v_2 peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{v}_2 &= \dot{v}_1 + \frac{e_2}{k_{b_1}^2 - e_2^2} \dot{e}_2 \\ &= -k_1 e_1^2 - c_1 e_1^{2p} - l_1 e_1^{2q} + g_1 \frac{e_1 e_2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} + \frac{e_2}{k_{b_1}^2 - e_2^2} (f_2 + g_2 (x_{3d} + e_3) - \dot{x}_{2d}) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Où $e_3 = x_3 - x_{3d}$ est la troisième variable d'erreur.

La deuxième commande virtuelle x_{3d} s'écrit comme suit :

$$x_{3d} = \frac{1}{g_2} \left((-k_2 e_2 - c_2 e_2^{2p-1} - l_2 e_2^{2q-1})(k_{b_1}^2 - e_2^2) - g_1 \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} (k_{b_1}^2 - e_2^2) - f_2 + \dot{x}_{2d} \right) \quad (2.46)$$

Où $k_2 > 0$, $c_2 > 0$, $l_2 > 0$ sont des constantes de conception.

On remplace (2.46) dans (2.45), on trouve :

$$\dot{v}_2 = -\sum_{j=1}^2 (k_j e_j^2 - c_j e_j^{2p} - l_j e_j^{2q}) + g_2 \frac{e_2 e_3}{k_{b_1}^2 - e_2^2} \quad (2.47)$$

Etape i (i=3,...,n-1) :

Dans l'étape i , la variable d'erreur est définie par :

$$e_i = x_i - x_{id} \quad (2.48)$$

La dynamique d'erreur correspondante s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{id} \\ &= f_i + g_i x_{i+1} - \dot{x}_{id} \\ &= f_i + g_i (e_{i+1} + x_{(i+1)d}) - \dot{x}_{id} \end{aligned} \quad (2.49)$$

où $e_{i+1} = x_{i+1} - x_{(i+1)d}$ est la $(i+1)$ variable d'erreur.

Considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$v_i = v_{i-1} + \frac{1}{2} \log \frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_i^2} \quad (2.50)$$

Alors, la dérivée de v_i peut écrire :

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= -\sum_{j=1}^{i-1} (k_j e_j^2 + c_j e_j^{2p} + l_j e_j^{2q}) + g_{i-1} \frac{e_{i-1} e_i}{k_{b_1}^2 - e_i^2} + e_i \dot{e}_i \\ &= -\sum_{j=1}^{i-1} k_j e_j^2 - \sum_{j=1}^{i-1} c_j e_j^{2p} - \sum_{j=1}^{i-1} l_j e_j^{2q} + g_{i-1} \frac{e_{i-1} e_i}{k_{b_1}^2 - e_i^2} + \frac{e_i}{k_{b_1}^2 - e_i^2} (f_i + g_i e_{i+1} + g_i x_{(i+1)d} - \dot{x}_{id}) \end{aligned} \quad (2.51)$$

avec :

$$\dot{x}_{(i-1)d} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial x_{(i-1)d}}{\partial x_j} (f_j + g_j x_{j+1}) + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\partial x_{(i-1)d}}{\partial x_{1d}^{(j)}} x_{1d}^{(j+1)} \quad (2.52)$$

La $i^{\text{ème}}$ commande virtuelle $x_{(i+1)d}$ de est donnée par :

$$x_{(i+1)d} = \frac{1}{g_i} \left(-f_i + (-k_i e_i - c_i e_i^{2p-1} - l_i e_i^{2q-1})(k_{b_1}^2 - e_i^2) - \frac{k_{b_1}^2 - e_i^2}{k_{b_1}^2 - e_{i-1}^2} g_{i-1} e_{i-1} + \dot{x}_{id} \right) \quad (2.53)$$

Où $k_i > 0$, $c_i > 0$, $l_i > 0$ sont des constantes de conception.

On remplace (2.53) dans (2.49), on obtient :

$$\dot{e}_i = \left(-k_i e_i - c_i e_i^{2p-1} - l_i e_i^{2q-1}\right) \left(k_{b_i}^2 - e_i^2\right) - \frac{k_{b_i}^2 - e_i^2}{k_{b_i}^2 - e_{i-1}^2} g_{i-1} e_{i-1} + g_i e_{i+1} \quad (2.54)$$

La dérivée de v_i peut-être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= \dot{v}_{i-1} + \frac{e_i}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \dot{e}_i \\ &= \dot{v}_{i-1} + \frac{e_i}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \left(\left(k_{b_i}^2 - e_i^2\right) \left(-k_i e_i - c_i e_i^{2p-1} - l_i e_i^{2q-1}\right) - \frac{k_{b_i}^2 - e_i^2}{k_{b_i}^2 - e_{i-1}^2} g_{i-1} e_{i-1} + g_i e_{i+1} \right) \\ &= -\sum_{j=1}^{n-1} \left(k_j e_j^2 + c_j e_j^{2p} + l_j e_j^{2q}\right) + \frac{g_i e_i e_{i+1}}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Étape n :

Dans l'étape finale, la variable d'erreur est définie par :

$$e_n = x_n - x_{nd} \quad (2.56)$$

La dynamique d'erreur est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{e}_n &= \dot{x}_n - \dot{x}_{nd} \\ &= f_n + g_n u - \dot{x}_{nd} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Considérons la fonction de Lyapunov finale suivante :

$$v_n = v_{n-1} + \frac{1}{2} \log \frac{k_{b_n}^2}{k_{b_n}^2 - e_n^2} \quad (2.58)$$

Alors, la dérivée de v_n peut s'écrire comme suit :

$$\dot{v}_n = -\sum_{j=1}^{n-1} k_j e_j^2 - \sum_{j=1}^{n-1} c_j e_j^{2p} - \sum_{j=1}^{n-1} l_j e_j^{2q} + g_{n-1} \frac{e_{n-1} e_n}{k_{b_{n-1}}^2 - e_{n-1}^2} + \frac{e_n}{k_{b_n}^2 - e_n^2} (f_n + g_n u - \dot{x}_{nd}) \quad (2.59)$$

On choisit la commande réelle u comme suit :

$$u = \frac{1}{g_n} \left(-f_n + \left(k_{b_n}^2 - e_n^2\right) \left(-k_n e_n - c_n e_n^{2p-1} - l_n e_n^{2q-1}\right) - \frac{k_{b_n}^2 - e_n^2}{k_{b_n}^2 - e_{n-1}^2} g_{n-1} e_{n-1} + \dot{x}_{nd} \right) \quad (2.60)$$

Où $k_n > 0$, $c_n > 0$, $l_n > 0$ sont des constantes de conception.

En remplaçant (2.60) dans (2.57), on trouve :

$$\dot{e}_n = \left(-k_n e_n - c_n e_n^{2p-1} - l_n e_n^{2q-1}\right) \left(k_{b_n}^2 - e_n^2\right) - \frac{k_{b_n}^2 - e_n^2}{k_{b_n}^2 - e_{n-1}^2} g_{n-1} e_{n-1} \quad (2.61)$$

L'équation (2.59) devient :

$$\begin{aligned}
\dot{v}_n &= -\sum_{j=1}^{n-1} (k_j e_j^2) - \sum_{j=1}^{n-1} (c_j e_j^{2p}) - \sum_{j=1}^{n-1} (l_j e_j^{2q}) - k_n e_n^2 - c_n e_n^{2p} - l_n e_n^{2q} \\
&= -\sum_{j=1}^n (k_j e_j^2) - \sum_{j=1}^n (c_j e_j^{2p}) - \sum_{j=1}^n (l_j e_j^{2q}) \\
&= -\sum_{j=1}^n k_j (k_{b_1}^2 - e_j^2) \left(\frac{e_j^2}{k_{b_1}^2 - e_j^2} \right) - \sum_{j=1}^n c_j (k_{b_1}^2 - e_j^2)^p \left(\frac{e_j^2}{k_{b_1}^2 - e_j^2} \right)^p - \sum_{j=1}^n l_j (k_{b_1}^2 - e_j^2)^q \left(\frac{e_j^2}{k_{b_1}^2 - e_j^2} \right)^q
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Pour $|e_j| < k_{b_1}^2$, il a été prouvé dans [22] que :

$$\log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_j^2} \right) < \frac{e_j^2}{k_{b_1}^2 - e_j^2} \tag{2.63}$$

Ce qui implique aussi que :

$$\left(\log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_j^2} \right) \right)^p < \left(\frac{e_j^2}{k_{b_1}^2 - e_j^2} \right)^p \text{ et } \left(\log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_j^2} \right) \right)^q < \left(\frac{e_j^2}{k_{b_1}^2 - e_j^2} \right)^q \tag{2.64}$$

L'inégalité (2.63) devient :

$$\begin{aligned}
\dot{v}_n &\leq -\sum_{j=1}^n k_j (k_{b_1}^2 - e_j^2) \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_j^2} \right) - \sum_{j=1}^n c_j (k_{b_1}^2 - e_j^2)^p \left(\log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_j^2} \right) \right)^p \\
&\quad - \sum_{j=1}^n l_j (k_{b_1}^2 - e_j^2)^q \left(\log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_j^2} \right) \right)^q
\end{aligned} \tag{2.65}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\dot{v}_n &\leq -\sum_{j=1}^n 2k_j (k_{b_1}^2 - e_j^2) \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_j^2} \right) \right) - \sum_{j=1}^n 2^p c_j (k_{b_1}^2 - e_j^2)^p \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_j^2} \right) \right)^p \\
&\quad - \sum_{j=1}^n 2^q l_j (k_{b_1}^2 - e_j^2)^q \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_j^2} \right) \right)^q \\
&\leq -\sum_{j=1}^n 2k_j \rho_j (k_{b_1}^2 - e_j^2) \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_j^2} \right) \right) - \sum_{j=1}^n 2^p c_j \rho_j^p (k_{b_1}^2 - e_j^2)^p \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_j^2} \right) \right)^p \\
&\quad - \sum_{j=1}^n 2^q l_j \rho_j^q (k_{b_1}^2 - e_j^2)^q \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_j^2} \right) \right)^q
\end{aligned} \tag{2.66}$$

avec : $\rho_j = \min_{\tau \in [0, \tau]} [k_{b_1}^2 - e_j(\tau)^2] > 0$ est une constante positive.

Si on suppose que : $\lambda_1 = \min[2k_1\rho_1, \dots, 2k_n\rho_n] > 0$, $\lambda_2 = \min[2^p c_1\rho_1^p, \dots, 2^p c_n\rho_n^p] > 0$ et $\lambda_3 = \min[2^q l_1\rho_1^q, \dots, 2^q l_n\rho_n^q] > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{v}_n &\leq -\lambda_1 \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_j^2} \right) \right] - \lambda_2 \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_j^2} \right) \right]^p - \lambda_3 \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_j^2} \right) \right]^q \\ &= -\lambda_1 v_n - \lambda_2 v_n^p - \lambda_3 v_n^q \end{aligned} \quad (2.67)$$

D'où la stabilité en temps fixe du système en boucle fermée.

II.3.1 Résultat de simulation :

L'algorithme de commande par backstepping en temps fixe avec contraintes sur l'état se donne par :

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= x_1 - x_{1d} \\ x_{2d} &= \frac{1}{g_1} \left((-k_1 e_1 - c_1 e_1^{2p-1} - l_1 e_1^{2q-1}) (k_{b_1}^2 - e_1^2) - f_1 + \dot{x}_{1d} \right) \\ e_2 &= x_2 - x_{2d} \\ u &= \frac{1}{g_2} \left((-k_2 e_2 - c_2 e_2^{2p-1} - l_2 e_2^{2q-1}) (k_{b_1}^2 - e_2^2) - g_1 e_1 \frac{(k_{b_1}^2 - e_2^2)}{(k_{b_1}^2 - e_1^2)} - f_2 + \dot{x}_{2d} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

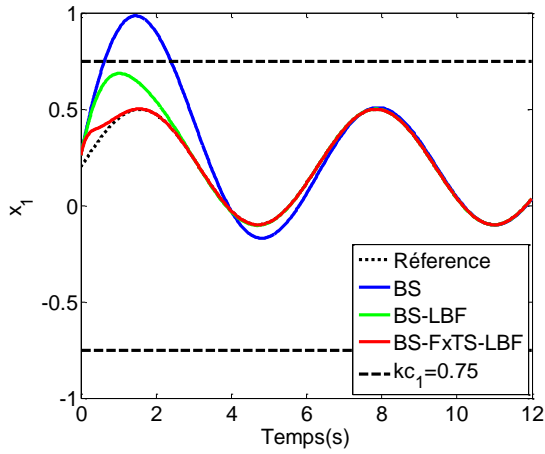


Figure II.6 : Evolution de x_1

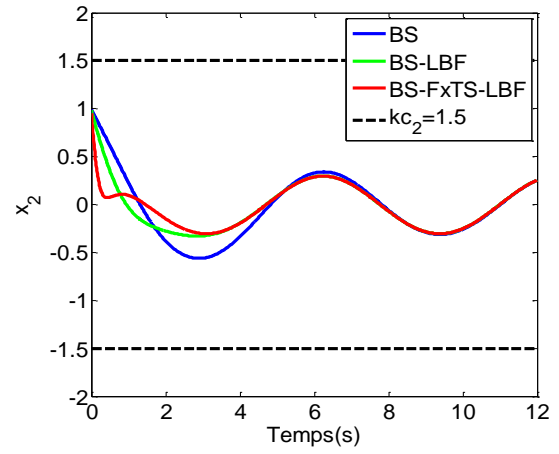


Figure II.7 : Evolution de x_2

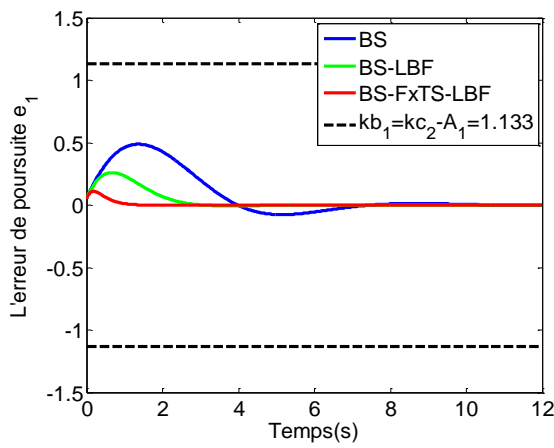


Figure II.8 : Evolution de e_1

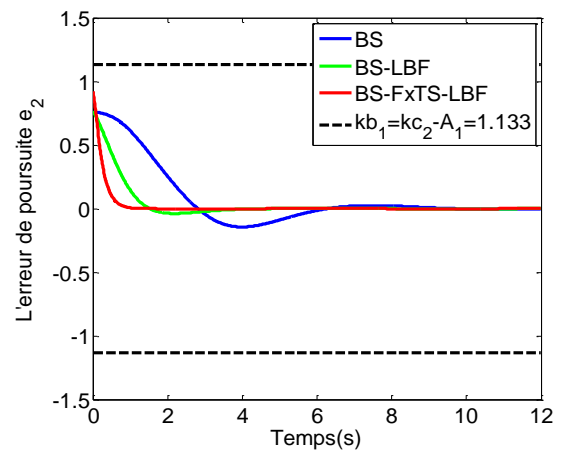


Figure II.9 : Evolution de e_2

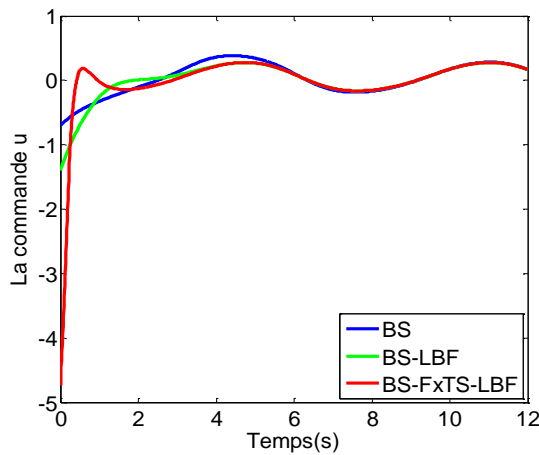


Figure II.10 : Signal de commande u

II.3.2 Interprétation des résultats :

D'après les résultats de simulation ci-dessus, on remarque que :

- Le backstepping simple (BS) ne convient pas, car sa réponse dépasse la contrainte imposée sur l'état $x_1(k_{c_1})$.
- L'approche backstepping en temps fixe avec fonction barrière de Lyapunov (BS-FxTS-LBF) présente des performances meilleurs en termes de rapidité et de poursuite par rapport aux autres techniques de commande (BS et BS-LBF).

II.4 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux stratégies de commande en temps fixe pour une classe des systèmes non linéaires avec contraintes. La conception est basée sur des fonctions barrières de Lyapunov de type logarithme. La première approche c'est une commande par backstepping avec contraintes sur la sortie. La deuxième stratégie de commande considère des contraintes sur le vecteur d'état.

L'efficacité de ces deux techniques de commande a été démontrée à travers un exemple de simulation. En présence des contraintes soit sur la sortie ou sur l'état, il est clair de voir une supériorité des performances de la technique de commande par backstepping en temps fixe avec fonction barrière de Lyapunov par rapport aux autres approches de commande.

CHAPITRE III: COMMANDE PAR SURFACE DYNAMIQUE EN TEMPS FIXE D'UNE CLASSE DES SYSTEMES NON LINEAIRES AVEC CONTRAINTES

III.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons présenter deux approches de commande par surface dynamique en temps fixe pour une classe des systèmes non linéaires avec contraintes. La première stratégie de commande pris en compte des contraintes sur la sortie. La deuxième technique de commande implique des contraintes sur le vecteur d'état. Nous utilisons des fonctions barrières de Lyapunov (BLF) de type logarithme pour traiter ces contraintes. La stabilité en temps fixe du système bouclé sera prouvée rigoureusement en utilisant l'approche de Lyapunov. Afin d'éviter le problème d'explosion de complexité inhérent dans le backstepping, un filtre non linéaire par mode glissant est utilisé à chaque étape de conception. Les résultats de simulation sont présentés pour un exemple numérique du deuxième ordre.

III.2 Commande par surface dynamique en temps fixe avec contrainte sur la sortie :

Considérons le système non linéaire (2.1) du chapitre précédent. L'algorithme de commande s'effectue en n étapes comme suit :

Etape 1 :

On définit la première surface :

$$e_1 = x_1 - x_{1d} \quad (3.1)$$

Sa dérivée temporelle se donne par :

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_{1d} \\ &= f_1 + g_1 x_2 - \dot{x}_{1d} \end{aligned} \quad (3.2)$$

On choisit x_{2c} comme suit :

$$x_{2c} = \frac{1}{g_1} \left((-k_1 e_1 - c_1 e_1^{2p-1} - l_1 e_1^{2q-1}) (k_b^2 - e_1^2) - \frac{g_1^2}{2} \frac{e_1}{k_b^2 - e_1^2} - f_1 + \dot{x}_{1d} \right) \quad (3.3)$$

Avec $k_1 > 0$, $c_1 > 0$, $l_1 > 0$, $\frac{1}{2} < p < 1$, $q > 1$ sont des constantes de conception.

Afin d'éviter la dérivation de la commande virtuelle x_{2c} , on introduit une nouvelle variable x_{2d} , obtenue par le filtrage de x_{2c} . Dans cette section, on utilise un filtre non linéaire par mode glissant comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{2d} &= -\alpha_2(x_{2d} - x_{2c}) - \beta_2(x_{2d} - x_{2c})^{2p-1} - \gamma_2(x_{2d} - x_{2c})^{2q-1} - \mu_2 \text{sign}(x_{2d} - x_{2c}) \\ x_{2d}(0) &= x_{2c}(0) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Avec $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \mu_2$ sont des constantes positives.

L'erreur de filtre est donnée par :

$$E_2 = x_{2d} - x_{2c} \quad (3.5)$$

Prenant en compte la deuxième surface :

$$e_2 = x_2 - x_{2d} \quad (3.6)$$

L'équation (3.2) devient :

$$\dot{e}_1 = (-k_1 e_1 - c_1 e_1^{2p-1} - l_1 e_1^{2q-1}) \left(k_{b_1}^2 - e_1^2 \right) - \frac{g_1^2}{2} \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} + g_1 e_2 + g_1 E_2 \quad (3.7)$$

Etape 2 :

On définit la 2^{ème} surface :

$$e_2 = x_2 - x_{2d} \quad (3.8)$$

La dérivée temporelle correspondante peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{x}_{2d} \\ &= f_2 + g_2 x_3 - \dot{x}_{2d} \end{aligned} \quad (3.9)$$

On choisit x_{3c} comme suit :

$$x_{3c} = \frac{1}{g_2} \left(-k_2 e_2 - c_2 e_2^{2p-1} - l_2 e_2^{2q-1} - \frac{g_1 e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} - \frac{g_2^2}{2} e_2 - f_2 + \dot{x}_{2d} \right) \quad (3.10)$$

Avec $k_2 > 0, c_2 > 0, l_2 > 0$ sont des constantes de conception.

Dans cette section, on utilise un filtre non linéaire par mode glissant pour éliminer le problème d'explosion de complexité du backstepping :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{3d} &= -\alpha_3(x_{3d} - x_{3c}) - \beta_3(x_{3d} - x_{3c})^{2p-1} - \gamma_3(x_{3d} - x_{3c})^{2q-1} - \mu_3 \text{sign}(x_{3d} - x_{3c}) \\ x_{3d}(0) &= x_{3c}(0) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Avec $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \mu_3$ sont des constantes positives.

L'erreur de filtre est donnée par :

$$E_3 = x_{3d} - x_{3c} \quad (3.12)$$

Prenant en compte la troisième surface :

$$e_3 = x_3 - x_{3d} \quad (3.13)$$

L'équation (3.9) devient :

$$\dot{e}_2 = -k_2 e_2 - c_2 e_2^{2p-1} - l_2 e_2^{2q-1} - \frac{g_1 e_1}{k_b^2 - e_1^2} - \frac{g_2^2}{2} e_2 + g_2 e_3 + g_2 E_3 \quad (3.14)$$

Etape i (i=3,..., n-1) :

On définit la $i^{ème}$ surface :

$$e_i = x_i - x_{id} \quad (3.15)$$

La dérivée temporelle de (3.15) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{id} \\ &= f_i + g_i x_{i+1} - \dot{x}_{id} \end{aligned} \quad (3.16)$$

On choisit $x_{(i+1)c}$ comme suit :

$$x_{(i+1)c} = \frac{1}{g_i} \left(-k_i e_i - c_i e_i^{2p-1} - l_i e_i^{2q-1} - g_{i-1} e_{i-1} - \frac{g_i^2}{2} e_i - f_i + \dot{x}_{id} \right) \quad (3.17)$$

Avec $k_i > 0$, $c_i > 0$, $l_i > 0$ sont des constantes positives.

Dans cette section, on utilise aussi un filtre non linéaire par mode glissant pour éliminer le problème d'explosion de complexité :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{(i+1)d} &= -\alpha_{i+1} (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c}) - \beta_{i+1} (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c})^{2p-1} - \gamma_{i+1} (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c})^{2q-1} \\ &\quad - \mu_{i+1} \text{sign}(x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$x_{(i+1)d}(0) = x_{(i+1)c}(0).$$

Avec α_{i+1} , β_{i+1} , γ_{i+1} , μ_{i+1} sont des constantes positives.

L'erreur de filtre est donnée par :

$$E_{i+1} = x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c} \quad (3.19)$$

La dérivée temporelle correspondante est décrit par :

$$\begin{aligned} \dot{E}_{(i+1)} &= \dot{x}_{(i+1)d} - \dot{x}_{(i+1)c} \\ &= -\alpha_{(i+1)} E_{(i+1)} - \beta_{(i+1)} E_{(i+1)}^{2p-1} - \gamma_{(i+1)} E_{(i+1)}^{2q-1} - \eta_{(i+1)} \text{sign}(E_{(i+1)}) - \dot{x}_{(i+1)c} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Prenant en compte la $i^{ème}$ surface $e_{i+1} = x_{i+1} - x_{(i+1)d}$, l'équation (3.16) devient :

$$\dot{e}_i = -k_i e_i - c_i e_i^{2p-1} - l_i e_i^{2q-1} - g_{i-1} e_{i-1} - \frac{g_i^2}{2} e_i + g_i e_{i+1} + g_i E_{i+1} \quad (3.21)$$

Etape n :

On définit la $n^{ième}$ surface comme suit :

$$e_n = x_n - x_{nd} \quad (3.22)$$

La dérivée temporelle de (3.22) se donne par :

$$\begin{aligned} \dot{e}_n &= \dot{x}_n - \dot{x}_{nd} \\ &= f_n + g_n u - \dot{x}_{nd} \end{aligned} \quad (3.23)$$

On choisit u comme :

$$u = \frac{1}{g_n} \left(-k_n e_n - c_n e_n^{2p-1} - l_n e_n^{2q-1} - g_{n-1} e_{n-1} - f_n + \dot{x}_{nd} \right) \quad (3.24)$$

L'équation (3.23) devient :

$$\dot{e}_n = -k_n e_n - c_n e_n^{2p-1} - l_n e_n^{2q-1} - g_{n-1} e_{n-1} \quad (3.25)$$

III.2.1 Analyse de stabilité :

Les fonctions candidats de Lyapunov sont données par :

$$v = v_{e_1} + \sum_{i=2}^n v_{e_i} + \sum_{i=2}^n v_{E_i} \quad (3.26)$$

Avec :

$$v_{e_1} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{e_1^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right), v_{e_i} = \frac{1}{2} e_i^2, v_{E_i} = \frac{1}{2} E_i^2 \quad (3.27)$$

Etape 1 :

$$\dot{v}_{e_1} = \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \dot{e}_1 \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_{e_1} &= \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \left[\left(-k_1 e_1 - c_1 e_1^{2p-1} - l_1 e_1^{2q-1} \right) \left(k_{b_1}^2 - e_1^2 \right) - \frac{g_1^2}{2} \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} + g_1 e_2 + g_1 E_2 \right] \\ &= -k_1 e_1^2 - c_1 e_1^{2p} - l_1 e_1^{2q} - \frac{g_1^2}{2} \left(\frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right)^2 + g_1 \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} e_2 + g_1 \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} E_2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

En utilisant l'inégalité de Young :

$$g_1 \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} E_2 \leq \frac{g_1^2}{2} \left(\frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right)^2 + \frac{E_2^2}{2} \quad (3.30)$$

on obtient :

$$\dot{v}_{e_1} \leq -k_1 e_1^2 - c_1 e_1^{2p} - l_1 e_1^{2q} + \frac{g_1 e_1 e_2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} + \frac{E_2^2}{2} \quad (3.31)$$

Etape 2 :

$$\dot{v}_{e_2} = e_2 \dot{e}_2 \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_{e_2} &= e_2 \left[-k_2 e_2 - c_2 e_2^{2p-1} - l_2 e_2^{2q-1} - \frac{g_1 e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} - \frac{g_2^2}{2} e_2 + g_2 e_3 + g_2 E_3 \right] \\ &= -k_2 e_2^2 - c_2 e_2^{2p} - l_2 e_2^{2q} - \frac{g_1 e_1 e_2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} - \frac{g_2^2}{2} e_2^2 + g_2 e_2 e_3 + g_2 e_2 E_3 \end{aligned} \quad (3.33)$$

En utilisant l'inégalité de Young :

$$g_2 e_2 E_3 \leq \frac{g_2^2 e_2^2}{2} + \frac{E_3^2}{2} \quad (3.34)$$

on trouve :

$$\dot{v}_{e_2} \leq -k_2 e_2^2 - c_2 e_2^{2p} - l_2 e_2^{2q} - \frac{g_1 e_1 e_2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} + g_2 e_2 e_3 + \frac{E_3^2}{2} \quad (3.35)$$

Etape i (i=3,..., n-1) :

$$\dot{v}_{e_i} = e_i \dot{e}_i \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_{e_i} &= e_i \left[-k_i e_i - c_i e_i^{2p-1} - l_i e_i^{2q-1} - g_{i-1} e_{i-1} - \frac{g_i^2}{2} e_i + g_i e_{i+1} + g_i E_{i+1} \right] \\ &= -k_i e_i^2 - c_i e_i^{2p} - l_i e_i^{2q} - g_{i-1} e_i e_{i-1} - \frac{g_i^2}{2} e_i^2 + g_i e_i e_{i+1} + g_i e_i E_{i+1} \end{aligned} \quad (3.37)$$

En utilisant l'inégalité de Young :

$$g_i e_i E_{i+1} \leq \frac{g_i^2}{2} e_i^2 + \frac{E_{i+1}^2}{2} \quad (3.38)$$

on obtient :

$$\dot{v}_{e_i} \leq -k_i e_i^2 - c_i e_i^{2p} - l_i e_i^{2q} - g_{i-1} e_i e_{i-1} + g_i e_i e_{i+1} + \frac{E_{i+1}^2}{2} \quad (3.39)$$

Etape n :

$$\begin{aligned} \dot{v}_{e_n} &= e_n \dot{e}_n \\ &= e_n \left[-k_n e_n - c_n e_n^{2p-1} - l_n e_n^{2q-1} - g_{n-1} e_{n-1} \right] \\ &= -k_n e_n^2 - c_n e_n^{2p} - l_n e_n^{2q} - g_{n-1} e_n e_{n-1} \end{aligned} \quad (3.40)$$

En utilisant (3.20), la dynamique de v_{E_i} s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{v}_{E_i} &= E_i \dot{E}_i \\ &= E_i \left[-\alpha_i E_i - \beta_i E_i^{2p-1} - \gamma_i E_i^{2q-1} - \mu_i \operatorname{sign}(E_i) - \dot{x}_{ic} \right] \\ &= -\alpha_i E_i^2 - \beta_i E_i^{2p} - \gamma_i E_i^{2q} - \mu_i E_i \operatorname{sign}(E_i) - E_i \dot{x}_{ic} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Si on suppose que $|\dot{x}_{ic}| \leq M_i \leq \mu_i$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{v}_{E_i} &\leq -\alpha_i E_i^2 - \beta_i E_i^{2p} - \gamma_i E_i^{2q} - |E_i|(\mu_i - M_i) \\ &\leq -\alpha_i E_i^2 - \beta_i E_i^{2p} - \gamma_i E_i^{2q} \end{aligned} \quad (3.42)$$

La dérivée de (3.26) est donnée par :

$$\dot{v} = \sum_{i=1}^n \dot{v}_{e_i} + \sum_{i=2}^n \dot{v}_{E_i} \quad (3.43)$$

En remplaçant (3.31), (3.35), (3.39), (3.40) et (3.42) dans (3.43), on trouve :

$$\begin{aligned} \dot{v} &\leq \left(-k_1 e_1^2 - c_1 e_1^{2p} - l_1 e_1^{2q} + \frac{E_2^2}{2} \right) + \sum_{i=2}^{n-1} \left(-k_i e_i^2 - c_i e_i^{2p} - l_i e_i^{2q} + \frac{E_{i+1}^2}{2} \right) \\ &\quad + \left(-k_n e_n^2 - c_n e_n^{2p} - l_n e_n^{2q} \right) + \sum_{i=2}^n \left(-\alpha_i E_i^2 - \beta_i E_i^{2p} - \gamma_i E_i^{2q} \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} &\leq -\sum_{i=1}^n k_i e_i^2 - \sum_{i=1}^n c_i e_i^{2p} - \sum_{i=1}^n l_i e_i^{2q} - \sum_{i=2}^n \left(\alpha_i - \frac{1}{2} \right) E_i^2 - \sum_{i=2}^n \beta_i E_i^{2p} - \sum_{i=2}^n \gamma_i E_i^{2q} \\ \dot{v} &\leq -\left(k_{b_1}^2 - e_1^2 \right) \frac{(k_1 e_1^2)}{\left(k_{b_1}^2 - e_1^2 \right)} - \sum_{i=2}^n (k_i e_i^2) - \left(k_{b_1}^2 - e_1^2 \right)^p \frac{(c_1 e_1^{2p})}{\left(k_{b_1}^2 - e_1^2 \right)^p} - \sum_{i=2}^n (c_i e_i^{2p}) \\ &\quad - \left(k_{b_1}^2 - e_1^2 \right)^q \frac{(l_1 e_1^{2q})}{\left(k_{b_1}^2 - e_1^2 \right)^q} - \sum_{i=2}^n (l_i e_i^{2q}) - \sum_{i=2}^n \left(\alpha_i - \frac{1}{2} \right) E_i^2 - \sum_{i=2}^n \beta_i E_i^{2p} - \sum_{i=2}^n \gamma_i E_i^{2q} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Pour $|e_1| < k_{b_1}$ il a été prouvé dans [22] que :

$$\log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) < \frac{e_1^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \quad (3.46)$$

Ce qui implique encore que : $\left(\log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \right)^p < \left(\frac{e_1^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right)^p$ et $\left(\log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \right)^q < \left(\frac{e_1^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right)^q$.

Alors, (3.45) devient :

$$\begin{aligned}
 \dot{v} \leq & -k_1(k_{b_1}^2 - e_1^2) \left(\log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \right) - \sum_{i=2}^n (k_i e_i^2) - c_1 (k_{b_1}^2 - e_1^2)^p \left(\log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \right)^p \\
 & - \sum_{i=2}^n (c_i e_i^{2p}) - l_1 (k_{b_1}^2 - e_1^2)^q \left(\log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \right)^q - \sum_{i=2}^n (l_i e_i^{2q}) \\
 & - \sum_{i=2}^n \left(\alpha_i - \frac{1}{2} \right) E_i^2 - \sum_{i=2}^n \beta_i E_i^{2p} - \sum_{i=2}^n \gamma_i E_i^{2q}
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
 \dot{v} \leq & -2k_1(k_{b_1}^2 - e_1^2) \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \right) - \sum_{i=2}^n (k_i e_i^2) - 2^p c_1 (k_{b_1}^2 - e_1^2)^p \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \right)^p \\
 & - \sum_{i=2}^n (c_i e_i^{2p}) - 2^q l_1 (k_{b_1}^2 - e_1^2)^q \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \right)^q - \sum_{i=2}^n (l_i e_i^{2q}) \\
 & - \sum_{i=2}^n \left(\alpha_i - \frac{1}{2} \right) E_i^2 - \sum_{i=2}^n \beta_i E_i^{2p} - \sum_{i=2}^n \gamma_i E_i^{2q}
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Supposons que : $\rho_1 = \min_{\tau \in [0, t]} [k_{b_1}^2 - e_1(\tau)^2]$ est une constante positive, il vient que :

$$\begin{aligned}
 \dot{v} \leq & -2k_1 \rho_1 \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \right) - \sum_{i=2}^n (k_i e_i^2) - 2^p c_1 \rho_1^p \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \right)^p \\
 & - \sum_{i=2}^n (c_i e_i^{2p}) - 2^q l_1 \rho_1^q \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \right)^q - \sum_{i=2}^n (l_i e_i^{2q}) \\
 & - \sum_{i=2}^n \left(\alpha_i - \frac{1}{2} \right) E_i^2 - \sum_{i=2}^n \beta_i E_i^{2p} - \sum_{i=2}^n \gamma_i E_i^{2q} \\
 \leq & -\bar{\lambda}_1 \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) + \sum_{i=2}^n \frac{1}{2} e_i^2 \right] - \bar{\lambda}_2 \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) + \sum_{i=2}^n \frac{1}{2} e_i^2 \right]^p \\
 & - \bar{\lambda}_3 \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) + \sum_{i=2}^n \frac{1}{2} e_i^2 \right]^q - \sum_{i=2}^n \left(\alpha_i - \frac{1}{2} \right) E_i^2 - \sum_{i=2}^n \beta_i E_i^{2p} - \sum_{i=2}^n \gamma_i E_i^{2q}
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Avec : $\bar{\lambda}_1 = \min [2k_1 \rho_1, 2k_2, \dots, 2k_n] > 0$, $\bar{\lambda}_2 = \min [2^p c_1 \rho_1^p, 2^p c_2, \dots, \dots, 2^p c_n] > 0$

et $\bar{\lambda}_3 = \min [2^q l_1 \rho_1^q, 2^q l_2, \dots, 2^q l_n] > 0$.

Si on pose $\alpha_i > \frac{1}{2}$, il en résulte que :

$$\dot{v} \leq -\lambda_1 v - \lambda_2 v^p - \lambda_3 v^q \quad (3.50)$$

Où $\lambda_1 = \min[\bar{\lambda}_1, (2\alpha_2 - 1), \dots, (2\alpha_n - 1)] > 0$, $\lambda_2 = \min[\bar{\lambda}_2, 2^p \beta_2, \dots, 2^p \beta_n] > 0$ et

$$\lambda_3 = \min[\bar{\lambda}_3, 2^q \gamma_2, \dots, 2^q \gamma_n] > 0.$$

Le temps de stabilisation est estimé de la manière suivante :

$$T_r = \frac{1}{\lambda_3(1-p)} \ln\left(1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right) + \frac{1}{\lambda_3(q-1)} \ln\left(1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right) \quad (3.51)$$

III.2.2 Résultat de simulation :

Dans ce chapitre, nous avons simulé le système non linéaire de deuxième ordre considéré dans le chapitre 2.

L'algorithme de commande par surface dynamique en temps fixe avec contrainte sur la sortie se donne par :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = x_1 - x_{1d} \\ x_{2c} = \frac{1}{g_1} \left((-k_1 e_1 - c_1 e_1^{2p-1} - l_1 e_1^{2q-1}) (k_{b_1}^2 - e_1^2) - \frac{g_1^2}{2} \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} - f_1 + \dot{x}_{1d} \right) \\ \dot{x}_{2d} = -\alpha_2 (x_{2d} - x_{2c}) - \beta_2 (x_{2d} - x_{2c})^{2p-1} - \gamma_2 (x_{2d} - x_{2c})^{2q-1} - \mu_2 \text{sign}(x_{2d} - x_{2c}), x_{2d}(0) = x_{2c}(0) \\ E_2 = x_{2d} - x_{2c} \\ e_2 = x_2 - x_{2d} \\ u = \frac{1}{g_2} \left(-k_2 e_2 - c_2 e_2^{2p-1} - l_2 e_2^{2q-1} - \frac{g_1 e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} - \frac{g_2^2}{2} e_2 - f_2 + \dot{x}_{2d} \right) \end{array} \right. \quad (3.52)$$

III.2.2.1 Test 1 :

Dans ce test, on fait une comparaison entre trois approches, DSC en temps fixe avec LBF, proposée dans ce chapitre, DSC avec LBF et DSC simple, Les résultats de simulation correspondants sont donnés respectivement par les figures (III.1)- (III.5).

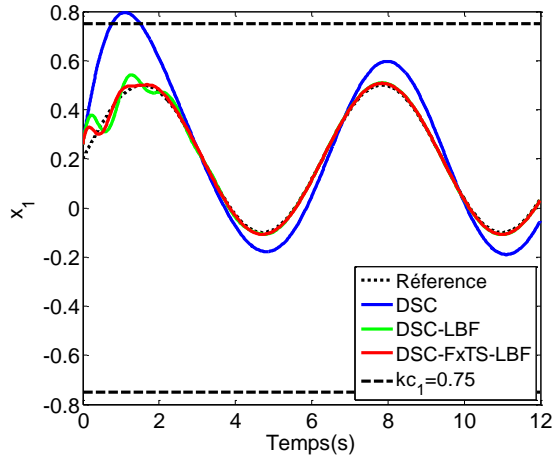


Figure III.1 : Evolution de x_1

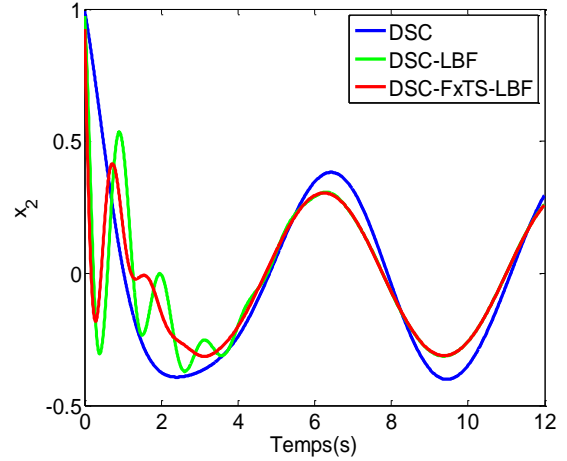


Figure III.2 : Evolution de x_2

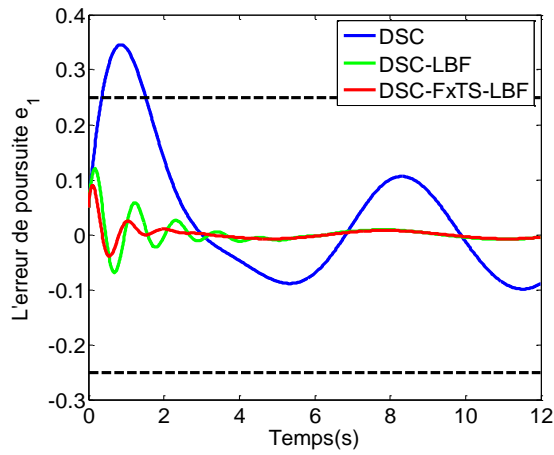


Figure III.3 : Evolution de e_1

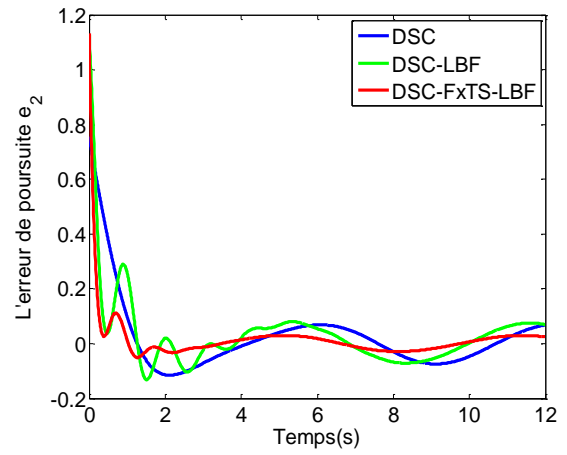


Figure III.4 : Evolution de e_2

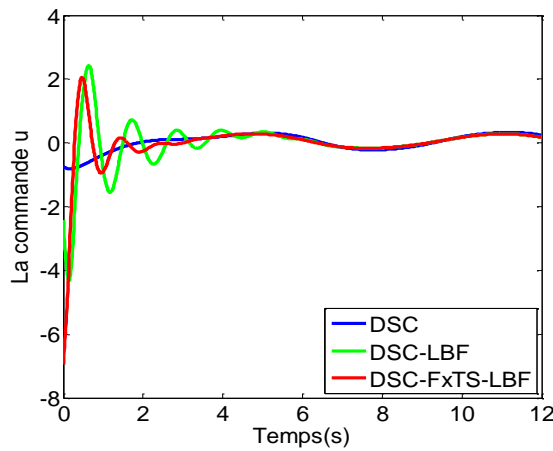


Figure III.5 : Signal de commande u

III.2.2.2 Test 2 :

Maintenant, on effectue une comparaison entre deux approches de commande en temps fixe avec contrainte sur la sortie. La première approche est celle par backstepping proposée dans le chapitre précédant. La deuxième approche est la commande par surface dynamique proposée dans ce chapitre. Les résultats de simulation correspondants sont donnés respectivement par les figures (III.6)- (III.10).

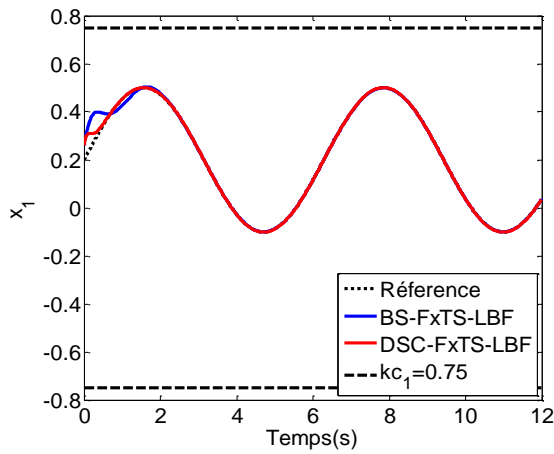


Figure III.6 : Evolution de x_1

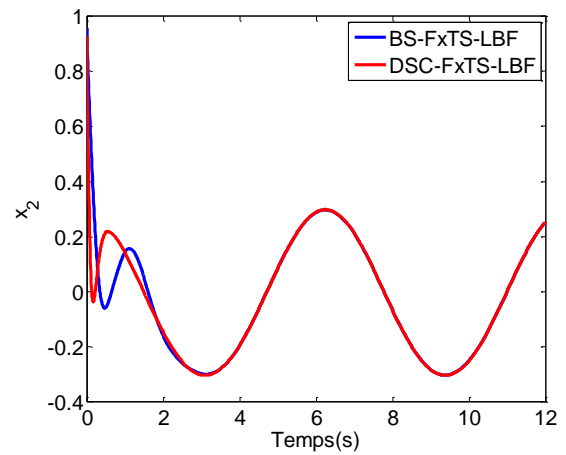


Figure III.7 : Evolution de x_2

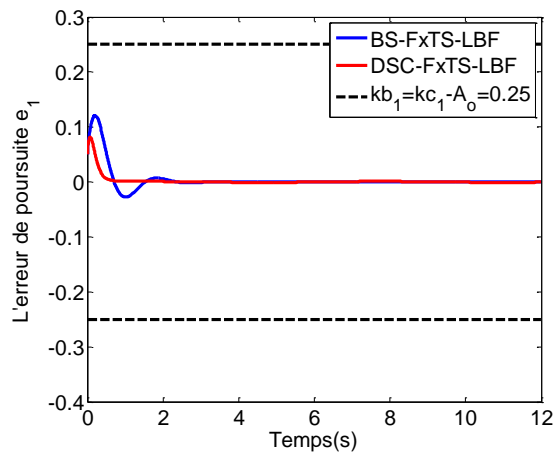


Figure III.8 : Evolution de e_1

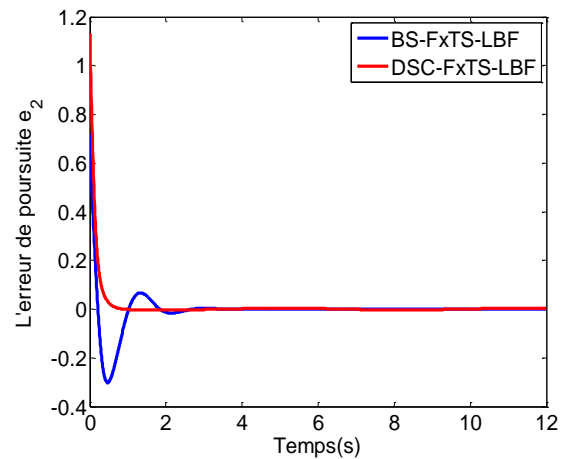


Figure III.9 : Evolution de e_2

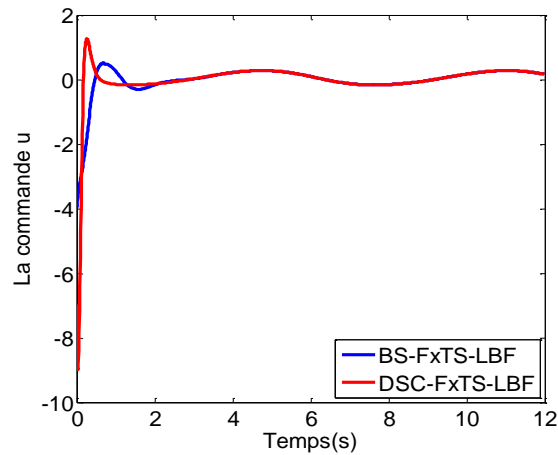


Figure III.10 : Signal de commande u

III.2.3 Interprétation des résultats :

D'après les résultats de simulation obtenus, on remarque que :

- Dans le premier test, les deux techniques de commande par surface dynamique avec fonction barrière de Lyapunov (DSC-FxTS-LBF) et (DSC-BLF) sont meilleurs que la DSC simple.
- Dans le deuxième test, les deux techniques de commande : par surface dynamique proposé dans ce chapitre et par backstepping du chapitre précédent, présentent de bonnes performances avec une supériorité en terme de poursuite de la technique DSC en temps fixe avec fonction barrière de Lyapunov (DSC-BLF-FxTS) par rapport à celle par backstepping en temps fixe avec fonction barrière de Lyapunov (BS-BLF-FxTS).

III.3 Commande par surface dynamique en temps fixe avec contraintes sur

l'état :

L'algorithme de commande par DSC s'effectue en n étapes comme suit :

Etape 1 :

On définit la première surface :

$$e_1 = x_1 - x_{1d} \quad (3.53)$$

Sa dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_{1d} \\ &= f_1 + g_1 x_2 - \dot{x}_{1d}\end{aligned}\quad (3.54)$$

On choisit x_{2c} comme suit :

$$x_{2c} = \frac{1}{g_1} \left((-k_1 e_1 - c_1 e_1^{2p-1} - l_1 e_1^{2q-1}) (k_{b_1}^2 - e_1^2) - \frac{g_1^2}{2} \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} - f_1 + \dot{x}_{1d} \right) \quad (3.55)$$

Avec $k_1 > 0$, $c_1 > 0$, $l_1 > 0$, $\frac{1}{2} < p < 1$, $q > 1$ sont des paramètres de design.

Pour éviter la dérivation de la commande virtuelle x_{2c} , on introduit une nouvelle variable x_{2d} , obtenue par le filtrage de x_{2c} . Ici, on utilise le même filtre de la section précédente :

$$\begin{aligned}\dot{x}_{2d} &= -\alpha_2 (x_{2d} - x_{2c}) - \beta_2 (x_{2d} - x_{2c})^{2p-1} - \gamma_2 (x_{2d} - x_{2c})^{2q-1} - \mu_2 \text{sign}(x_{2d} - x_{2c}) \\ x_{2d}(0) &= x_{2c}(0)\end{aligned}\quad (3.56)$$

Avec $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \mu_2$ sont des constantes positives.

L'erreur de filtre est donnée par :

$$E_2 = x_{2d} - x_{2c} \quad (3.57)$$

Prenant en compte de la deuxième surface :

$$e_2 = x_2 - x_{2d} \quad (3.58)$$

Donc :

$$\dot{e}_1 = (-k_1 e_1 - c_1 e_1^{2p-1} - l_1 e_1^{2q-1}) (k_{b_1}^2 - e_1^2) - \frac{g_1^2}{2} \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} + g_1 e_2 + g_1 E_2 \quad (3.59)$$

Etape 2 :

On définit la 2^{ème} surface :

$$e_2 = x_2 - x_{2d} \quad (3.60)$$

La dérivée temporelle correspondante s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{e}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{x}_{2d} \\ &= f_2 + g_2 x_3 - \dot{x}_{2d}\end{aligned}\quad (3.61)$$

Nous choisissons x_{3c} sous la forme suivante :

$$x_{3c} = \frac{1}{g_2} \left((-k_2 e_2 - c_2 e_2^{2p-1} - l_2 e_2^{2q-1}) (k_{b_1}^2 - e_2^2) - \frac{k_{b_1}^2 - e_2^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} g_1 e_1 - \frac{g_2^2}{2} \frac{e_2}{k_{b_2}^2 - e_2^2} - f_2 + \dot{x}_{2d} \right) \quad (3.62)$$

Avec $k_2 > 0$, $c_2 > 0$, $l_2 > 0$ sont des constantes de conception.

Le même filtre non linéaire par mode glissant de la section précédente est utilisé :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{3d} &= -\alpha_3(x_{3d} - x_{3c}) - \beta_3(x_{3d} - x_{3c})^{2p-1} - \gamma_3(x_{3d} - x_{3c})^{2q-1} - \mu_3 \text{sign}(x_{3d} - x_{3c}) \\ x_{3d}(0) &= x_{3c}(0) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Avec $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \mu_3$ sont des constantes positives

L'erreur de filtre est donnée par :

$$E_3 = x_{3d} - x_{3c} \quad (3.64)$$

La dérivée temporelle de E_3 peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{E}_3 &= \dot{x}_{3d} - \dot{x}_{3c} \\ &= -\alpha_3 E_3 - \beta_3 E_3^{2p-1} - \gamma_3 E_3^{2q-1} - \mu_3 \text{sign}(E_3) - \dot{x}_{3c} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Prenant en compte la troisième surface :

$$e_3 = x_3 - x_{3d} \quad (3.66)$$

Donc :

$$\dot{e}_2 = \left(-k_2 e_2 - c_2 e_2^{2p-1} - l_2 e_2^{2q-1} \right) \left(k_{b_2}^2 - e_2^2 \right) - \frac{k_{b_1}^2 - e_2^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} g_1 e_1 - \frac{g_2^2}{2} \frac{e_2}{k_{b_1}^2 - e_2^2} + g_2 e_3 + g_2 E_3 \quad (3.67)$$

Etape i (i=3,..., n-1) :

On définit la $i^{\text{ème}}$ surface :

$$e_i = x_i - x_{id} \quad (3.68)$$

Sa dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{id} \\ &= f_i + g_i x_{i+1} - \dot{x}_{id} \end{aligned} \quad (3.69)$$

La commande virtuelle $x_{(i+1)c}$ est choisie comme suit :

$$x_{(i+1)c} = \frac{1}{g_i} \left(\left(-k_i e_i - c_i e_i^{2p-1} - l_i e_i^{2q-1} \right) \left(k_{b_i}^2 - e_i^2 \right) - f_i - \frac{k_{b_{i-1}}^2 - e_i^2}{k_{b_{i-1}}^2 - e_{i-1}^2} g_{i-1} e_{i-1} - \frac{g_i^2}{2} \frac{e_i}{k_{b_i}^2 - e_i^2} + \dot{x}_{id} \right) \quad (3.70)$$

Avec $k_i > 0, c_i > 0, l_i > 0$ sont des constantes de conception.

Maintenant, on utilise le même filtre non linéaire par mode glissant de la section précédente :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{(i+1)d} &= -\alpha_{i+1} \left(x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c} \right) - \beta_{i+1} \left(x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c} \right)^{2p-1} - \gamma_{i+1} \left(x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c} \right)^{2q-1} \\ &\quad - \mu_{i+1} \text{sign} \left(x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c} \right) \\ x_{(i+1)d}(0) &= x_{(i+1)c}(0) \end{aligned} \quad (3.71)$$

Avec $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}, \gamma_{i+1}, \mu_{i+1}$ sont des constantes positives.

L'erreur de filtre est donnée par :

$$E_{i+1} = x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c} \quad (3.72)$$

La dérivée temporelle correspondante peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{E}_{(i+1)} &= \dot{x}_{(i+1)d} - \dot{x}_{(i+1)c} \\ &= -\alpha_{(i+1)} E_{(i+1)} - \beta_{(i+1)} E_{(i+1)}^{2p-1} - \gamma_{(i+1)} E_{(i+1)}^{2q-1} - \alpha_{(i+1)} \text{sign}(E_{(i+1)}) - \dot{x}_{(i+1)c} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Prenant en compte de (i+1)^{ème} surface :

$$e_{i+1} = x_{i+1} - x_{(i+1)d} \quad (3.74)$$

Donc :

$$\dot{e}_i = \left(-k_i e_i - c_i e_i^{2p-1} - l_i e_i^{2q-1} \right) \left(k_{b_i}^2 - e_i^2 \right) - \frac{k_{b_i}^2 - e_i^2}{k_{b_i}^2 - e_{i-1}^2} g_{i-1} e_{i-1} - \frac{g_i^2}{2} \frac{e_i}{k_{b_i}^2 - e_i^2} + g_i e_{i+1} + g_i E_{i+1} \quad (3.75)$$

Etape n :

On définit la n^{ème} surface :

$$e_n = x_n - x_{nd} \quad (3.76)$$

Sa dériver temporelle se donne par :

$$\begin{aligned} \dot{e}_n &= \dot{x}_n - \dot{x}_{nd} \\ &= f_n + g_n u - \dot{x}_{nd} \end{aligned} \quad (3.77)$$

On choisit u comme suit :

$$u = \frac{1}{g_n} \left(\left(-k_n e_n - c_n e_n^{2p-1} - l_n e_n^{2q-1} \right) \left(k_{b_n}^2 - e_n^2 \right) - \frac{k_{b_n}^2 - e_n^2}{k_{b_n}^2 - e_{n-1}^2} g_{n-1} e_{n-1} - f_n + \dot{x}_{nd} \right) \quad (3.78)$$

Ce qui conduit à :

$$\dot{e}_n = \left(-k_n e_n - c_n e_n^{2p-1} - l_n e_n^{2q-1} \right) \left(k_{b_n}^2 - e_n^2 \right) - \frac{k_{b_n}^2 - e_n^2}{k_{b_n}^2 - e_{n-1}^2} g_{n-1} e_{n-1} \quad (3.79)$$

III.3.1 Analyse de stabilité :

Les fonctions candidats de Lyapunov sont données par :

$$v = \sum_{i=1}^n v_{e_i} + \sum_{i=2}^n v_{E_i} \quad (3.80)$$

Avec :

$$v_{e_i} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_i}^2}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \right), v_{E_i} = \frac{1}{2} E_i^2 \quad (3.81)$$

Etape 1 :

$$\begin{aligned} \dot{v}_{e_1} &= \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \dot{e}_1 \\ &= \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \left[(-k_1 e_1 - c_1 e_1^{2p-1} - l_1 e_1^{2q-1}) (k_{b_1}^2 - e_1^2) - \frac{g_1^2}{2} \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} + g_1 e_2 + g_1 E_2 \right] \\ &= -k_1 e_1^2 - c_1 e_1^{2p} - l_1 e_1^{2q} + g_1 \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} e_2 + g_1 \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} E_2 - \frac{g_1^2}{2} \left(\frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.82)$$

En utilisant l'inégalité de Young :

$$g_1 \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} E_2 \leq \frac{g_1^2}{2} \left(\frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right)^2 + \frac{E_2^2}{2} \quad (3.83)$$

on obtient :

$$\dot{v}_{e_1} \leq -k_1 e_1^2 - c_1 e_1^{2p} - l_1 e_1^{2q} + \frac{g_1 e_1 e_2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} + \frac{E_2^2}{2} \quad (3.84)$$

Etape 2 :

$$\begin{aligned} \dot{v}_{e_2} &= \frac{e_2}{k_{b_2}^2 - e_2^2} \dot{e}_2 \\ &= \frac{e_2}{k_{b_2}^2 - e_2^2} \left[(-k_2 e_2 - c_2 e_2^{2p-1} - l_2 e_2^{2q-1}) (k_{b_2}^2 - e_2^2) - \frac{k_{b_1}^2 - e_2^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} g_1 e_1 - \frac{g_2^2}{2} \frac{e_2}{k_{b_2}^2 - e_2^2} + g_2 e_3 + g_2 E_3 \right] \\ &= -k_2 e_2^2 - c_2 e_2^{2p} - l_2 e_2^{2q} - \frac{g_1 e_1 e_2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} + g_2 \frac{e_2}{k_{b_2}^2 - e_2^2} e_3 + g_2 \frac{e_2}{k_{b_2}^2 - e_2^2} E_3 - \frac{g_2^2}{2} \left(\frac{e_2}{k_{b_2}^2 - e_2^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.85)$$

En utilisant l'inégalité de Young :

$$g_2 \frac{e_2}{k_{b_2}^2 - e_2^2} E_3 \leq \frac{g_2^2}{2} \left(\frac{e_2}{k_{b_2}^2 - e_2^2} \right)^2 + \frac{E_3^2}{2} \quad (3.86)$$

on trouve :

$$\dot{v}_{e_2} \leq -k_2 e_2^2 - c_2 e_2^{2p} - l_2 e_2^{2q} - \frac{g_1 e_1 e_2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} + \frac{g_2 e_2 e_3}{k_{b_2}^2 - e_2^2} + \frac{E_3^2}{2} \quad (3.87)$$

Etape i (i=3,...,n-1) :

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_{e_i} &= \frac{e_i}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \dot{e}_i \\
 &= \frac{e_i}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \left[\left(-k_i e_i - c_i e_i^{2p-1} - l_i e_i^{2q-1} \right) (k_{b_i}^2 - e_i^2) - \frac{k_{b_i}^2 - e_i^2}{k_{b_i}^2 - e_{i-1}^2} g_{i-1} e_{i-1} - \frac{g_i^2}{2} \frac{e_i}{k_{b_i}^2 - e_i^2} + g_i e_{i+1} + g_i E_{i+1} \right] \\
 &= -k_i e_i^2 - c_i e_i^{2p} - l_i e_i^{2q} - \frac{g_{i-1} e_{i-1} e_i}{k_{b_i}^2 - e_{i-1}^2} + g_i \frac{e_i}{k_{b_i}^2 - e_i^2} e_{i+1} + g_i \frac{e_i}{k_{b_i}^2 - e_i^2} E_{i+1} - \frac{g_i^2}{2} \left(\frac{e_i}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \right)^2
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

En utilisant l'inégalité de Young :

$$g_i \frac{e_i}{k_{b_i}^2 - e_i^2} E_{i+1} \leq \frac{g_i^2}{2} \left(\frac{e_i}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \right)^2 + \frac{E_{i+1}^2}{2} \tag{3.89}$$

on obtient :

$$\dot{v}_{e_i} \leq -k_i e_i^2 - c_i e_i^{2p} - l_i e_i^{2q} - \frac{g_{i-1} e_{i-1} e_i}{k_{b_i}^2 - e_{i-1}^2} + \frac{g_i e_i e_{i+1}}{k_{b_i}^2 - e_i^2} + \frac{E_{i+1}^2}{2} \tag{3.90}$$

Etape n :

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_{e_n} &= \frac{e_n}{k_{b_n}^2 - e_n^2} \dot{e}_n \\
 &= \frac{e_n}{k_{b_n}^2 - e_n^2} \left[\left(-k_n e_n - c_n e_n^{2p-1} - l_n e_n^{2q-1} \right) (k_{b_n}^2 - e_n^2) - \frac{k_{b_n}^2 - e_n^2}{k_{b_n}^2 - e_{n-1}^2} g_{n-1} e_{n-1} \right] \\
 &\leq -k_n e_n^2 - c_n e_n^{2p} - l_n e_n^{2q} - \frac{g_{n-1} e_{n-1} e_n}{k_{b_n}^2 - e_{n-1}^2}
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

En utilisant (3.20) de la section précédente, la dynamique de v_{E_i} peut s'écrire :

$$\dot{v}_{E_i} \leq -\alpha_i E_i^2 - \beta_i E_i^{2p} - \gamma_i E_i^{2q} \tag{3.92}$$

En remplaçant (3.84), (3.87), (3.90) et (3.92) dans la dérivée de (3.80), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \dot{v} &= \sum_{i=1}^n \dot{v}_{e_i} + \sum_{i=1}^n \dot{v}_{E_i} \\
 &\leq \left(-k_1 e_1^2 - c_1 e_1^{2p} - l_1 e_1^{2q} + \frac{E_2^2}{2} \right) + \frac{E_2^2}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} \left(-k_i e_i^2 - c_i e_i^{2p} - l_i e_i^{2q} + \frac{E_{i+1}^2}{2} \right) \\
 &\quad + \left(-k_n e_n^2 - c_n e_n^{2p} - l_n e_n^{2q} \right) + \sum_{i=2}^n \left(-\alpha_i E_i^2 - \beta_i E_i^{2p} - \gamma_i E_i^{2q} \right) \\
 &\leq -\sum_{i=1}^n \left(k_i e_i^2 \right) - \sum_{i=1}^n \left(c_i e_i^{2p} \right) - \sum_{i=1}^n \left(l_i e_i^{2q} \right) - \sum_{i=2}^n \left(\alpha_i - \frac{1}{2} \right) E_i^2 - \sum_{i=2}^n \beta_i E_i^{2p} - \sum_{i=2}^n \gamma_i E_i^{2q}
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

$$\begin{aligned} \dot{v} \leq & -\sum_{i=1}^n (k_{b_i}^2 - e_i^2) \frac{(k_i e_i^2)}{(k_{b_i}^2 - e_i^2)} - \sum_{i=1}^n (k_{b_i}^2 - e_i^2)^p \frac{(c_i e_i^{2p})}{(k_{b_i}^2 - e_i^2)^p} - \sum_{i=1}^n (k_{b_i}^2 - e_i^2)^q \frac{(l_i e_i^{2q})}{(k_{b_i}^2 - e_i^2)^q} \\ & - \sum_{i=2}^n \left(\alpha_i - \frac{1}{2} \right) E_i^2 - \sum_{i=2}^n \beta_i E_i^{2p} - \sum_{i=2}^n \gamma_i E_i^{2q} \end{aligned} \quad (3.94)$$

Pour $|e_i| < k_{b_i}$ il a été prouvé dans [22] que :

$$\log \left(\frac{k_{b_i}^2}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \right) < \frac{e_i^2}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \quad (3.95)$$

Ce qui implique que : $\left(\log \left(\frac{k_{b_i}^2}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \right) \right)^p < \left(\frac{e_i^2}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \right)^p$ et $\left(\log \left(\frac{k_{b_i}^2}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \right) \right)^q < \left(\frac{e_i^2}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \right)^q$

Alors :

$$\begin{aligned} \dot{v} \leq & -\sum_{i=1}^n k_i (k_{b_i}^2 - e_i^2) \log \left(\frac{k_{b_i}^2}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \right) - \sum_{i=1}^n c_i (k_{b_i}^2 - e_i^2)^p \left(\log \left(\frac{k_{b_i}^2}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \right) \right)^p \\ & - \sum_{i=1}^n l_i (k_{b_i}^2 - e_i^2)^q \left(\log \left(\frac{k_{b_i}^2}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \right) \right)^q - \sum_{i=2}^n \left(\alpha_i - \frac{1}{2} \right) E_i^2 - \sum_{i=2}^n \beta_i E_i^{2p} - \sum_{i=2}^n \gamma_i E_i^{2q} \end{aligned} \quad (3.96)$$

D'où

$$\begin{aligned} \dot{v} \leq & -\sum_{i=1}^n 2k_i (k_{b_i}^2 - e_i^2) \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_i}^2}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \right) \right) - \sum_{i=1}^n 2^p c_i (k_{b_i}^2 - e_i^2)^p \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_i}^2}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \right) \right)^p \\ & - \sum_{i=1}^n 2^q l_i (k_{b_i}^2 - e_i^2)^q \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_i}^2}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \right) \right)^q - \sum_{i=2}^n \left(\alpha_i - \frac{1}{2} \right) E_i^2 - \sum_{i=2}^n \beta_i E_i^{2p} - \sum_{i=2}^n \gamma_i E_i^{2q} \end{aligned} \quad (3.97)$$

On définit $\rho_i = \min_{\tau \in [0, \tau]} [k_{b_i}^2 - e_i(\tau)^2] > 0$ comme une constante de conception, alors, (3.97)

devient :

$$\begin{aligned} \dot{v} \leq & -\sum_{i=1}^n 2k_i \rho_i \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_i}^2}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \right) \right) - \sum_{i=1}^n 2^p c_i \rho_i^p \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_i}^2}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \right) \right)^p - \sum_{i=1}^n 2^q l_i \rho_i^q \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{b_i}^2}{k_{b_i}^2 - e_i^2} \right) \right)^q \\ & - \sum_{i=2}^n \left(\alpha_i - \frac{1}{2} \right) E_i^2 - \sum_{i=2}^n \beta_i E_i^{2p} - \sum_{i=2}^n \gamma_i E_i^{2q} \end{aligned} \quad (3.98)$$

Si on considère que $\alpha_i > 1/2$, on obtient :

$$\dot{v} \leq -\lambda_1 v - \lambda_2 v^p - \lambda_3 v^q \quad (3.99)$$

Avec :

$$\lambda_1 = \min [2k_1\rho_1, \dots, 2k_n\rho_n, (2\alpha_2 - 1), \dots, (2\alpha_n - 1)] > 0$$

$$\lambda_2 = \min [2^p c_1\rho_1^p, \dots, 2^p c_n\rho_n^p, 2^p \beta_2, \dots, 2^p \beta_n] > 0$$

$$\lambda_3 = \min [2^q l_1\rho_1^q, \dots, 2^q l_n\rho_n^q, 2^q \gamma_2, \dots, 2^q \gamma_n] > 0$$

Le temps de stabilisation est estimé comme suit :

$$T_r = \frac{1}{\lambda_3(1-p)} \ln \left(1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) + \frac{1}{\lambda_3(q-1)} \ln \left(1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right) \quad (3.100)$$

III.3.2 Résultat de simulation :

Le même système non linéaire de deuxième ordre du chapitre précédent est considéré dans cette section.

L'algorithme de commande par la surface dynamique en temps fixe avec contraintes sur l'état peut s'écrire comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = x_1 - x_{1d} \\ x_{2c} = \frac{1}{g_1} \left((-k_1 e_1 - c_1 e_1^{2p-1} - l_1 e_1^{2q-1}) (k_{b_1}^2 - e_1^2) - f_1 + \dot{x}_{1d} - \frac{g_1^2}{2} \frac{e_1}{k_{b_1}^2 - e_1^2} \right) \\ \dot{x}_{2d} = -\alpha_2 (x_{2d} - x_{2c}) - \beta_2 (x_{2d} - x_{2c})^{2p-1} - \gamma_2 (x_{2d} - x_{2c})^{2q-1} - \mu_2 \text{sign}(x_{2d} - x_{2c}), (0) = x_{2c}(0) \\ E_2 = x_{2d} - x_{2c} \\ e_2 = x_2 - x_{2d} \\ u = \frac{1}{g_2} \left((-k_2 e_2 - c_2 e_2^{2p-1} - l_2 e_2^{2q-1}) (k_{b_1}^2 - e_2^2) - \frac{k_{b_1}^2 - e_2^2}{k_{b_1}^2 - e_1^2} g_1 e_1 - \frac{g_2^2}{2} \frac{e_2}{k_{b_2}^2 - e_2^2} - f_2 + \dot{x}_{2d} \right) \end{array} \right. \quad (3.101)$$

III.3.2.1 Test 1 :

Dans ce test, on effectue une comparaison entre trois approches, DSC-FxTS-LBF avec contraintes sur l'état proposée dans ce chapitre, DSC-LBF et la DSC simple, Les résultats de simulation correspondants sont donnés respectivement par les figures (III.11)- (III.15).

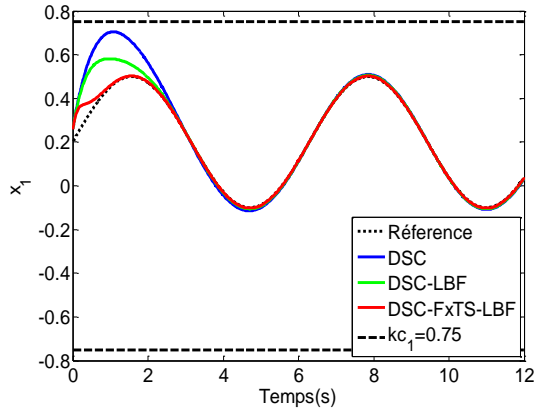


Figure III.11 : Evolution de x_1

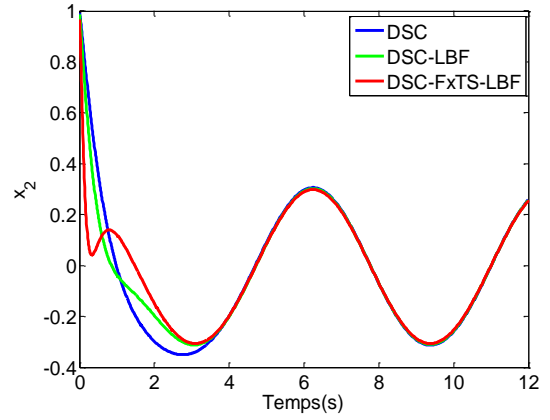


Figure III.12 : Evolution de x_2

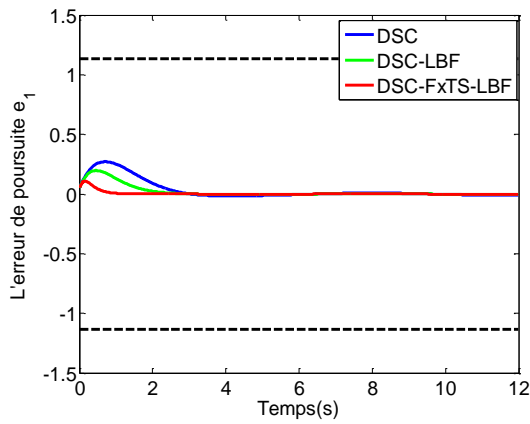


Figure III.13 : Evolution de e_1

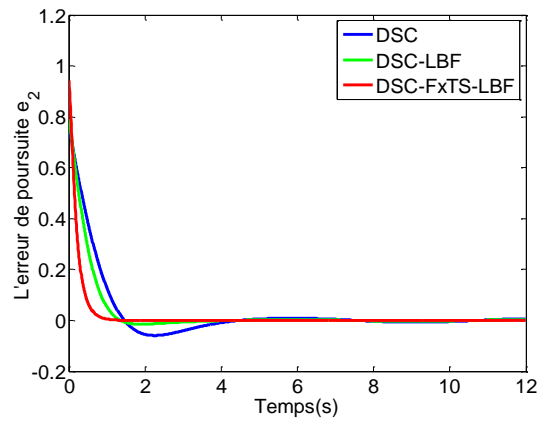


Figure III.14 : Evolution de e_2

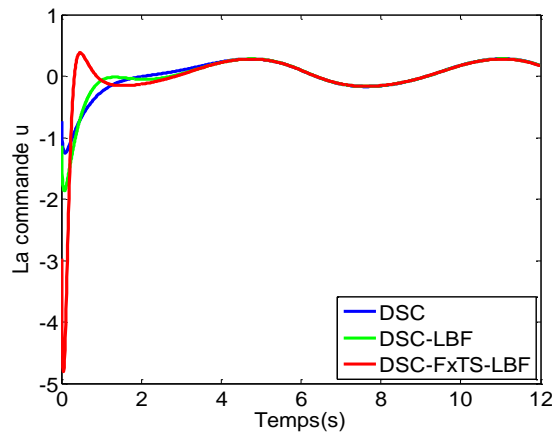


Figure III.15 : Signal de commande u

III.3.2.2 Test 2 :

Maintenant, on fait une comparaison entre deux approches de commande en temps fixe avec contraintes sur l'état, la première à base du backstepping proposée dans le chapitre précédant et la deuxième est celle de la DSC développée dans ce chapitre. Les résultats de simulation correspondants sont donnés respectivement par les figures (III.16)- (III.20).

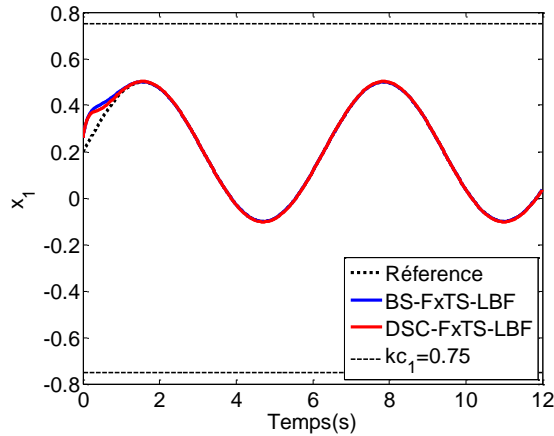


Figure III.16 : Evolution de x_1

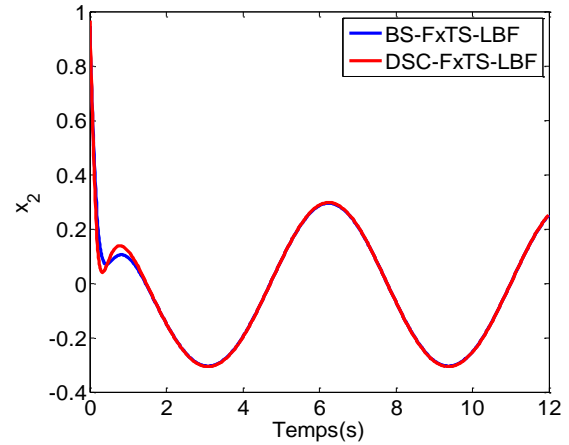


Figure III.17 : Evolution de x_2

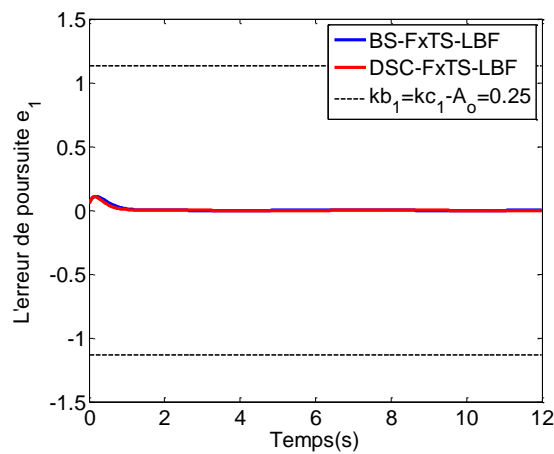


Figure III.18 : Evolution de e_1

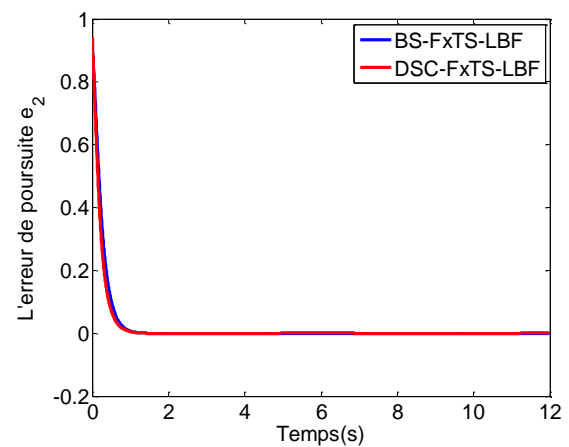


Figure III.19 : Evolution de e_2

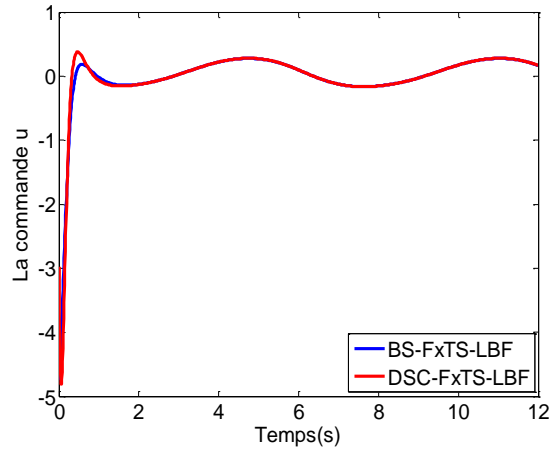


Figure III.20 : Signal de commande u

III.3.3 Interprétation des résultats :

D'après les résultats de simulation obtenus, on remarque que :

- Dans le premier test, la technique de commande par surface dynamique en temps fixe avec fonction barrière de Lyapunov (DSC-FxTS-LBF) présente une supériorité en termes de performances par rapport aux deux autres techniques de commande (DSC simple et DSC-BLF).
- Dans le deuxième test, lors de l'application de deux techniques (BS-FxTS-LBF et DSC-FxTS-LBF), on observe que les erreurs de poursuite tendent rapidement vers zéro. Ainsi, le temps de stabilisation qui correspond à la technique backstepping est un peu long par rapport à celui de l'approche DSC, ce qui explique bien que la DSC est plus performante que le backstepping en régime transitoire.

III.4 Remarque :

Il faut tenir en compte que la bornitude de la dérivée de la commande virtuelle \dot{x}_{ic} est nécessaire lors de l'emploi de la technique DSC. Prenant en considération le terme $-c_i e_i^{2p-1}$ dans la loi de commande virtuelle x_{ic} , la dérivée de ce terme est $-c_i (2p-1) |e_i|^{2p-2} \dot{e}_i$ avec : $\frac{1}{2} < p < 1$ et $2p-2 < 0$. Il est clair que lorsque $\dot{e}_i \neq 0$ et $e_i = 0$, alors $c_i (2p-1) |e_i|^{2p-2} \dot{e}_i \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que le système ne satisfait pas la condition de convergence, avec

$e_i(t) = e_i(0) + \int_0^t \dot{e}_i(t) dt$. Il existe deux différents cas, le premier cas lorsque $\dot{e}_i(t) < 0$, ça veut dire que $e_i(t)$ diminuera toujours d'une façon monotone. Dans le deuxième cas $\dot{e}_i(t) > 0$, i.e. $e_i(t)$ augmentera aussi d'une manière monotone. Par conséquent, l'erreur de poursuite $e_i(t)$ ne reste pas à zéro lorsque $\dot{e}_i(t) \neq 0$, donc, la borgegnitude de \dot{x}_{ic} peut être assurée [20].

III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux approches de commande par DSC en temps fixe pour une classe des systèmes non linaires avec contraintes. La première approche est sous contraintes sur la sortie, tandis que la deuxième stratégie considère des contraintes sur l'état. Les résultats de simulation obtenus montrent que les performances des algorithmes de commande par DSC proposés dans ce chapitre sont les meilleurs en régime transitoire, en rapidité et en poursuite par rapport aux approches DSC conventionnels et par rapport aux approches backstepping proposées dans le chapitre 2.

CONCLUSION GENERALE

Le travail effectué dans ce mémoire avait comme objectif de donner quelques applications possibles des algorithmes de commande en temps fixe basées sur la fonction barrière de Lyapunov. Les contraintes ont été mises en évidence, ainsi, un exemple illustratif spécifique a été présenté en conséquence. Le problème majeur de la conception d'une commande par backstepping, nommé : explosion de complexité, est résolu en exploitant la technique de commande par la surface dynamique, qui introduit un filtrage aux commandes virtuelles à chaque étape de conception.

Le travail présenté dans ce mémoire concerne l'étude et le développement des techniques de commande par backstepping et par DSC. Les deux techniques sont conçues en temps fixe pour une classe des systèmes non linéaires avec contraintes. En utilisant des fonctions barrières de Lyapunov, l'analyse de stabilité des approches proposées est basée sur l'approche de Lyapunov. Les résultats de simulation obtenus ont montrés que tous les algorithmes de commande par backstepping et par DSC offrent de bonnes performances en termes de rapidité et de poursuite.

Dans le premier chapitre, nous avons fait un rappel sur les systèmes non linéaires, les méthodes d'analyse de la stabilité de ces systèmes. Ainsi, nous avons donné les outils mathématiques de synthèse et d'analyse indispensables pour la conception des algorithmes de commande développées dans ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, deux techniques de commande par backstepping en temps fixe ont été présentées pour une classe des systèmes non linéaires avec contraintes. La première approche considère des contraintes sur la sortie, tandis que la deuxième approche traite des contraintes sur le vecteur d'état. Cependant, les deux techniques de commande proposées souffrent du problème d'explosion de complexité.

Dans le dernier chapitre, nous avons présenté deux techniques de commande par surface dynamique en temps fixe pour une classe des systèmes non linéaires avec contraintes. Afin d'éviter le problème d'explosion de complexité inhérent dans le backstepping, les approches de commande proposées ont été conçues à l'aide des filtres non linéaires par mode de glissement.

Les performances de toutes les stratégies de commande proposées dans ce mémoire ont été examinées en simulation à travers un exemple d'application de deuxième ordre. Des comparaisons entre les différentes approches de commande ont été effectuées et les interprétations correspondantes ont été fournies.

BIBLIOGRAPHIE :

- [1] P. de Larminat , “ Analysis and control of linear systems”, ISTE. Wiley, 2013.
- [2] S. P. Boyd et C. H. Barratt, “ Linear controller design : limits of performance”, Information and system sciences series. Prentice-Hall, 1991.
- [3] P. P. Yip, and J. K. Hedrick, “Adaptive dynamic surface control: a simplified algorithm for adaptive backstepping control of nonlinear systems,” *International Journal of Control*, vol. 71, no. 5, pp. 959-979, 1998.
- [4] D. Swaroop, J. K. Hedrick, P. P. Yip, and J. C. Gerdes, “Dynamic surface control for a class of nonlinear systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 10, pp. 1893-1899, 2000.
- [5] H. K. Khalil, “Nonlinear systems,” Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2nd edition, 1996.
- [6] A. Isidori, “Nonlinear control systems,” Springer, 1995.
- [7] A. R. Benaskeur, “Aspects de l’application du backstepping adaptatif à la commande décentralisée des systèmes non linéaires,” Thèse de Doctorat, Université du Laval, 2000.
- [8] https://fr.wikipedia.org/wiki/Syst%C3%A8me_lin%C3%A9aire.
- [9] N. Kias and N. Bouhadiche, “Commande adaptative par DSC pour une classe des systèmes non linéaires incertains”, Projet fin d’étude, Université Mohammed Seddik Benyahia, Jijel, 2016.
- [10] H. Raymond, “Commande des systèmes non linéaires ”, Paris, 2007.
- [11] M. Mokhtari, “Commande adaptative des systèmes non linéaires par l’approche backstepping neuronale”, Thèse de Doctorat, Université Université Hadj Lakhdar, Batna, 2015.
- [12] https://fr.wikipedia.org/wiki/Inégalité_de_Young.
- [13] M. Krstic, I. Kanellopoulos et P. V. Kokotovic, “Nonlinear and adaptive control design”, Wiley-Interscience Publication, New York, 1995.
- [14] Smail, Laarab et Hacene, Lamri, “Commande en temps fini des systèmes non linéaires triangulaires,” Project fin d’étude. Université Mohammed Seddik Benyahia, Jijel, 2021.
- [15] Khalil, H.K, “Nonlinear Systems (3rd ed) ,” Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall., 2002

- [16] K. P. Tee. “Adaptive control of uncertain constrained nonlinear systems”. PhD Thesis, National University of Singapore, 2008.
- [17] S. S. Ge, C. C. Hang, T. H. Lee, and T. Zhang, “Stable Adaptive Neural Network Control,” Kluwer Academic, Boston, MA, 2001.
- [18] C. Chen, L. Li, H. Peng et al, “A new fixed-time stability theorem and its application to the fixed-time synchronization of neural networks,” *Neural Networks*, 2020.
- [19] Yang, Yana & Hua, Changchun & Li, Junpeng. “Fixed-time Backstepping Control Design for High-order Strict-Feedback Nonlinear Systems via Terminal Sliding Mode”. *IET Control Theory & Applications*, 2016.
- [20] M. Haddad. “Contribution à la commande des systèmes non linéaires incertains avec contraintes”. Thèse de Doctorat, Université de Mohammed Seddik Benyahia, Jijel, 2021.
- [21] A. Chebbi. “Commande backstepping d’une machine asynchrone sans capteur”. Mémoire de magister, Université Hadj Lakhdar, Batna, 2011.
- [22] B. Ren, S. S. Ge, K. P. Tee, and T. H. Lee, “Adaptive neural control for output feedback nonlinear systems using a barrier Lyapunov function,” *IEEE Transactions on Neural Networks Control Systems Technology*, vol. 21, no. 8, pp. 1339-1345, 2010.