REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Sientifique

UNIVERSITÉ MOHAMMED SEDDIK BEN YAHIA-JIJEL

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques
Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA)

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en Sciences

Spécialité Mathématiques
Option Equations Différentielles

Par

Amira MAKHLOUF

Thème

Existence de solutions pour certaines classes d'inclusions différentielles

Soutenue publiquement le

Devant le jury composé de

Président :	**Prof. T. ZERZAIHI**	Univ. Jijel
Directrice de Thèse :	**Prof. D. AZZAM-LAOUIR**	Univ. Jijel
Examinateurs :	**Prof. S. ADLY**	Univ. Limoges (France)
	Prof. A. AIBECHE	Univ. Setif 1
	Prof. B. ALLECHE	Univ. Médéa
	Prof. M. YAROU	Univ. Jijel

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie le bon Dieu, tout puisant, qui m'a donné la volonté et le courage pour mener au bout cette thèse. Ce travail n'aurait pas pu être réalisé sans l'intervention d'un certain nombre de personnes qui m'ont apporté une assistance précieuse.

je voudrais tout d'abord remercier grandement ma directrice de thèse, Madame le Professeur D. AZZAM LAOUIR, qui m'a accompagné tout au long de ma formation. Je suis ravie par le travail sous sa direction, car outre son appui scientifique, elle a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de cette thèse. Je lui suis reconnaissante pour sa disponibilité, pour les qualités qu'elle a su me transmettre : rigueur, clarté et précision. Toujours disponible dans les moments de doute, ses nombreux conseils et sa bonne humeur ont très largement contribué au bon déroulement de ce travail. Merci infiniment Madame.

Je souhaite remercier Monsieur T. ZERZAIHI, Professeur à l'université de Jijel, qui m'a fait l'honneur par la présidence du jury.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs les professeurs S. ADLY, A. AIBECHE, B. ALLECHE et M. YAROU pour avoir accepter la participation au jury et pour l'intérêt qu'ils vont porter à ma contribution dans cette thèse.

J'aimerais aussi remercier le Professeur L. Thibault pour son accueil chaleureux à l'université de Montpellier II, pour ses encouragements, sa participation dans cette thèse, ainsi que pour ses nombreuses remarques qui ont contribué au bon déroulement de cette recherche.

Bien évidemment, cette thèse n'aurait pas pu voir le jour sans l'enseignement de qualité dont j'ai bénéficié tout au long de ma formation. J'en profite pour remercier tous les enseignants du département de mathématiques de l'université de Jijel.

Enfin, je remercie du fond du cœur et avec grand amour mes parents qui n'ont jamais cessé de croire en moi pendant toutes mes années d'études. Merci pour les sacrifices consentis à mon éducation, pour le soutien et surtout pour la patience. Merci aussi à ma sœur et mes frères qui m'ont toujours encouragé.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale

L'objectif entrepris dans cette thèse est l'étude de l'existence de solutions pour certaines classes d'inclusions différentielles du premier et second ordre.

Dans une première partie de cette contribution, l'intérêt est porté sur l'existence de solutions pour une variante des processus de la rafle non convexes du premier ordre.

Les processus de la rafle («*sweeping process*» en anglais) jouent un rôle important en élastoplasticité et en dynamique.

Un processus de la rafle se compose de deux substances, l'une qui balaie et l'autre qui est balayée. Comme exemple, on considère un grand anneau qui contient une petite boule à l'intérieur, et l'anneau va commencer à ce déplacer au temps $t = 0$.
En fonction du mouvement de l'anneau, la boule reste juste où elle est (dans le cas où elle n'est pas touchée par l'anneau), sinon, elle est balayée vers l'intérieur de l'anneau. Dans ce dernier cas, la vitesse de la boule doit être orientée vers l'intérieur de l'anneau afin de ne pas le quitter.

En terme plus mathématiques, on obtient la formulation suivante

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N(C(t), u(t)) \qquad \text{p.p. sur } [0, T], \\ u(t) \in C(t) \;\; \text{pour tout} \;\; t \in [0, T], \;\text{et}\; u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases} \tag{0.0.1}$$

où $u(t)$ est la position de la boule au temps t, tandis que $C(t)$ est l'ensemble comprenant l'anneau au temps t. L'expression $N(C(t), u(t))$ désigne le cône normal extérieur de l'ensemble $C(t)$ à la position $u(t)$, donc (0.0.1) dit seulement que la vitesse $\dot{u}(t)$ de la boule doit être dirigée vers l'intérieur de l'anneau pour presque tout temps $t \in [0,T]$.

La limitation de «*presque partout*» est due au fait que, généralement nous ne trouvons pas de solution lisse $t \mapsto u(t)$ de (0.0.1), mais seulement des solutions qui sont différentiables partout en dehors d'un sous ensemble de $[0,T]$ de mesure nulle.

La condition initiale $u(0) \in C(0)$ indique que la boule dans le temps initial $t = 0$ est contenue dans l'anneau.

Le problème (0.0.1) a été introduit et étudié de manière approfondie par Moreau (voir [49, 50]) dans le cas où $C(t)$ est une multiapplication à valeurs convexes dans un espace de Hilbert et varie d'une manière absolument continue. Dans ce contexte, $N(C(t), u(t))$ est le cône normal de $C(t)$ au point $u(t)$ au sens de l'analyse convexe. Le problème (0.0.1) provient de la théorie des systèmes mécaniques élasto-plastiques (voir [48, 51]).

Dans [58, 59], Valadier démontre pour la première fois l'existence de solutions de (0.0.1) sans l'hypothèse de convexité sur les valeurs de C pour quelques cas particuliers en dimension finie.

Depuis, plusieurs auteurs ont mené des études d'existence de solutions pour les processus de la rafle non convexes.

Concernant le processus de la rafle perturbé de la forme

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N^C(S, u(t)) + F(t, u(t)) \qquad \text{p.p. sur } [0,T], \\ u(t) \in S \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T], \;\text{ et } u(0) = u_0 \in S, \end{cases} \tag{0.0.2}$$

il a été introduit par Henry [40] pour l'étude de quelques problèmes d'économie, dans le cas où F est une multiapplication semicontinue supérieurement et autonome (c'est à dire indépendante de t), il prouve le résultat d'existence du problème (0.0.2) sous l'hypothèse de convexité sur l'ensemble S et sur les valeurs de F.

Dans [55], Thibault établit dans le cas non autonome, un résultat d'existence de (0.0.2) pour n'importe quel ensemble fermé S, qui a également requis la convexité des valeurs de F et sa semicontinuité supérieure.

Après, beaucoup de travaux ont été réalisés en remplaçant S par les valeurs d'une multiapplication C, c'est à dire le problème

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N(C(t), u(t)) + F(t, u(t)) \qquad \text{p.p. sur } [0, T], \\ u(t) \in C(t) \ \text{ pour tout } \ t \in [0, T], \ \text{et } u(0) = u_0 \in C(0). \end{cases} \tag{0.0.3}$$

Cette multiapplication C est supposée être à valeurs convexes ou complémentaires d'ensembles convexes.

Les problèmes (0.0.1) et (0.0.3) ont été ensuite étudiés en remplaçant l'hypothèse de convexité par la «r-prox-régularité» (voir [13, 33, 34]). Comme exemple, Edmond et Thibault dans [34] établissent, pour une multiapplication C prenant des valeurs r-prox-régulières et une variation absolument continue, l'existence et l'unicité de solution du processus de la rafle perturbé

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N(C(t), u(t)) + f(t, u(t)) \quad \text{p.p. sur } [0, T]; \\ u(T_0) = x_0 \in C(0), \end{cases}$$

où f est une application univoque lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur chaque ensemble borné d'un espace de Hilbert H et satisfait la condition de croissance naturelle. Les mêmes auteurs ont montré dans [35] que le problème (0.0.3) est bien posé, avec la multiapplication C prenant des valeurs r-prox-régulières et variant d'une manière absolument continue.

Dans le chapitre 2 de cette thèse et comme continuité à ces deux derniers travaux ([34] et [35]), nous avons donné dans le contexte hilbertien un résultat d'existence pour le processus de la rafle perturbé suivant

$$(\mathcal{P}_{F,f}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N(C(t), u(t)) + F(t, u(t)) + f(t, u(t)) \qquad \text{p.p. sur } [T_0, T], \\ u(t) \in C(t) \quad \text{pour tout } t \in [T_0, T], \\ u(0) = u_0 \in C(T_0), \end{cases}$$

où $C : [T_0, T] \rightrightarrows H$ est une multiapplication à valeurs non vides fermées r-prox-régulières, $F : [T_0, T] \times H \rightrightarrows H$ est une multiapplication scalairement semicontinue supérieurement par rapport à la deuxième variable, à valeurs non vides compactes vérifiant une condition de croissance linéaire compacte et $f : [T_0, T] \times H \rightrightarrows H$ est une application mesurable sur

$[T_0, T]$ et lipschitzienne sur H vérifiant aussi une condition de croissance linéaire.

Notons que le résultat de cette partie a fait l'objet d'une publication dans le journal «*Applicable Analysis*» (voir [6]). Un résultat plus général, où la perturbation contient un retard, a été aussi traité.

Durant la dernière décennie, de nombreux auteurs ont étudié quelques types de problèmes avec conditions aux limites impliquant l'opérateur p-Laplacien ou un opérateur plus général qui remplace l'opérateur différentiel $u \mapsto \ddot{u}$ appelé opérateur semblable au p-Laplacien. Ce cadre est général, unificateur et intègre des systèmes gradients, des variationnelles evolutionnaires et des problèmes aux limites classiques, c'est à dire, des problèmes de Dirichlet, de Neumann, et périodiques.

Nous nous référons à des équations du type

$$\frac{d}{dt}a(\dot{u}(t)) = f(t, u(t), \dot{u}(t)),$$

qui trouvent beaucoup d'applications dans la théorie des fluides non Newtoniens, la diffusion des écoulement en milieux poreux, l'élasticité non-linéaire et la théorie des surfaces capillaires.

Différentes équations contenant ce genre d'opérateur ont été largement étudiées afin de prouver l'existence de solutions, nous pouvons citer les travaux de Manasevich et Mawhin [46], et Kyritsi et al. [45], dans lesquels les conditions aux limites sont de divers types.

Les problèmes de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}a(\dot{u}(t)) \in A(u(t)) + F(t, u(t), \dot{u}(t)) & \text{p.p. sur } [0, T], \\ (a(\dot{u}(0)), -a(\dot{u}(T))) \in \xi(u(0), u(T)), \end{cases} \tag{0.0.4}$$

et de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}a(\dot{u}(t)) \in A(u(t)) + F(t, u(t)) & \text{p.p. sur } [0, T], \\ (a(\dot{u}(0)), -a(\dot{u}(T))) \in \xi(u(0), u(T)), \end{cases} \tag{0.0.5}$$

ont été étudiés par plusieurs auteurs avec F une multiapplication semicontinue supérieurement à valeurs convexes, ou bien semicontinue inférieurement à valeurs non convexes.

A titre d'exemple, Gasiński et Papageorgiou dans [38] ont étudié le problème (0.0.5) avec $a(\cdot)$ le p-Laplacien et F vérifie la condition dite de "*Hartman*", qui permet la dérivation d'une majoration pour les solutions. Cette condition a d'abord été employée par Hartman pour le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t, u(t)) & \text{p.p. sur } [0, T], \\ u(0) = u(T) = 0, \end{cases}$$

où $f : [0, T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est continue.

Les auteurs dans [61] ont étudié le problème (0.0.4) avec $a(\cdot)$ l'opérateur semblable au p-Laplacien, et F vérifiant une condition dite de "*Hartman généralisée*".

Dans la deuxième partie de cette thèse, le chapitre 3, deux problèmes plus généraux ont été traité, et nous avons donné des réponses positives à l'existence de solutions pour, en premier lieu l'inclusion différentielle du second ordre avec conditions aux limites non linéaires de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} a(\dot{u}(t)) \in A(u(t)) + F_1(t, u(t), \dot{u}(t)) + F_2(t, u(t), \dot{u}(t)) & \text{p.p. sur } [0, T], \\ (a(\dot{u}(0)), -a(\dot{u}(T))) \in \xi(u(0), u(T)), \end{cases}$$

où $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une application continue et strictement monotone, $A : D(A) \subset \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N, \xi : D(\xi) \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ sont deux opérateurs maximaux monotones et $F_i : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N, i = 1, 2$ sont deux multiapplications semicontinue supérieurement et semicontinue inférieurement respectivement, et leur somme vérifie la condition de Hartman généralisée.

En combinant deux hypothèses de semicontinuité supérieure et de semicontinuité inférieure on démontre, dans un second lieu, un résultat d'existence avec une perturbation vérifiant une propriété plus faible dite "*semicontinuité mixte*", cette dernière perturbation dépend seulement de (t, x) (problème (0.0.5)) et vérifie la condition de Hartman. Les résultats de cette partie sont soumis pour publication dans une revue internationale (voir [5]).

La dernière partie, et exactement le chapitre 4, voit l'étude d'une classe d'inclusions différentielles du second ordre de la forme

$$\ddot{u}(t) \in A(u(t)) + f(t, u(t)) \quad 0 < t < T < +\infty,$$

avec des conditions aux limites de la forme

$$u(0) = x \in \mathcal{D}(A) \text{ et } u(T) = 0 \in A(0),$$

où $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateurs maximal monotone (H une espace de Hilbert), $x \in D(A), 0 \in A(0)$ et $f : I \times H \to H$ est une application lipschitzienne par rapport à la deuxième variable qui vérifie une condition de croissance linéaire, en se basant sur les études menées sur le problème

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in A(u(t)) + f(t) & \text{p.p. sur } [0, T], \\ u(0) = x, \ u(T) = 0, \end{cases}$$

dans [43, 16, 7] et [8].

CHAPITRE 1

Préliminaires

Sommaire

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions et résultats de base qui nous seront utiles pour la démonstration de nos résultats d'existence de solutions.

Après quelques notations utilisées dans cette thèse, nous présentons des définitions et concepts fondamentaux ainsi que quelques résultats sur la mesurabilité, les opérateurs maximaux monotones, l'analyse convexe, les multiapplications et les sélections et nous terminons par des résultats de compacité.

1.1 Notations

Soit X un espace de Banach, et soit X' son dual topologique. Pour I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $q \in [1, +\infty[$,

- $\mathrm{L}^q(I, X) = \{u(\cdot) : I \to X : \ u(\cdot)$ est mesurable et $\int_I \|u(t)\|^q dt < +\infty\}$ muni de la norme $\|u(\cdot)\|_q = (\int_I \|u(t)\|^q dt)^{\frac{1}{q}}$.
- $\mathcal{C}(I, X)$ est l'espace de Banach de toutes les applications continues muni de la norme $\|u(\cdot)\|_{\mathcal{C}} = \sup\limits_{t \in I} \|u(t)\|$, et si I est compact, $\|u(\cdot)\|_{\mathcal{C}} = \max\limits_{t \in I} \|u(t)\|$.
- $\mathcal{C}^1(I, X)$ est l'espace de Banach des applications continument différentiables muni de la norme $\|u(\cdot)\|_{\mathcal{C}^1} = \max\{\|u(\cdot)\|_{\mathcal{C}}, \|\dot{u}(\cdot)\|_{\mathcal{C}}\}$.
- $\mathcal{C}_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$ est l'espace des applications infiniment continument différentiables à support compact.
- $\mathrm{W}^{1,q}(I, X)$ désigne l'espace de Sobolev usuel, i.e. $\mathrm{W}^{1,q}(I, X) = \{u(\cdot) : I \to X : u(\cdot)$ est absolument continue et $\dot{u}(\cdot) \in \mathrm{L}^q(I, X)\}$ muni de la norme $\|u(\cdot)\|_{1,q} = (\|u(\cdot)\|_q^q + \|\dot{u}(\cdot)\|_q^q)^{\frac{1}{q}}$.
- $\mathrm{W}^{2,2}(I, X)$ désigne l'espace de toutes les applications de $\mathcal{C}(I, X)$ ayant une dérivée première absolument continue et une dérivée seconde faible dans $\mathrm{L}^2(I, X)$.
- Pour $I = [0, T]$, $\mathrm{W}^{2,2}_{loc}(I, X)$ est l'espace des applications appartenant à $\mathrm{W}^{2,2}([\varepsilon, T - \varepsilon], X)$ pour tout $\varepsilon > 0$.
- Pour tout $x \in X$, et $r > 0$ la boule fermée (resp. ouverte) centrée en x de rayon r va être notée par $\overline{\mathrm{B}}_X(x, r)$ (resp. $\mathrm{B}_X(x, r)$).
- Pour $x = 0$ et $r = 1$, elle est notée par $\overline{\mathrm{B}}_X$ (resp. B_X).

- $\mathcal{L}(I)$ est la tribu sur I des ensembles mesurables au sens de Lebesgue.
- mes est la mesure de Lebesgue.
- $\mathscr{B}(X)$ est la tribu de Borel sur X.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité entre X et X'.
- $\sigma(X, X')$ est la topologie faible sur X.
- $\rightharpoonup$ signifie la convergence faible dans X.
- $\sigma(X', X)$ est la topologie faible* sur X'.
- $\overset{*}{\rightharpoonup}$ signifie la convergence faible* dans X'.
- $co(S)$ est l'enveloppe convexe de $S \subset X$.
- $\overline{co}(S)$ est l'enveloppe convexe fermée de $S \subset X$.
- $\delta(., S)$ la fonction indicatrice de S, définie par

$$\delta(x, S) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in S; \\ +\infty, & \text{si } x \notin S. \end{cases}$$

- La fonction polaire associée à $\delta(., S)$, appelée aussi fonction d'appui de S, est la fonction $\delta^*(., S)$, définie sur X' par

$$\delta^*(S, \xi) = \sup_{x \in S} \langle \xi, x \rangle, \quad \forall \xi \in X'.$$

- $1\!\!\mathrm{I}_S$ la fonction caractéristique de S, définie par

$$1\!\!\mathrm{I}_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in S; \\ 0, & \text{si } x \notin S. \end{cases}$$

1.2 Quelques notions de mesurabilité

Les résultats suivants ont été pris des références [54, 32] et utilisés au chapitre 3.

Définition 1.1 (Fonction simple).

Soit (X, Σ) un espace mesurable et Y un espace de Banach.

Une fonction $f : X \to Y$ est dite simple si f est Σ-mesurable et $f(X)$ est fini.

Définition 1.2 (Fonction mesurable).

Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré fini et Y un espace de Banach.

Une application $f : X \to Y$ est dite μ-mesurable s'il existe une suite de fonctions simples (f_n) telle que $f_n \to f$ μ-p.p.

Lemme 1.1. *Si Y est séparable, toute application mesurable est μ-mesurable.*

Théorème 1.1. *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré fini et Y un espace de Banach séparable. Si $f : X \to Y$ est mesurable, il existe une suite (f_n) de fonctions simples telles que $f_n \to f$ μ-p.p., et pour μ-presque tout $x \in X$, $\|f_n(x)\| \leq \|f(x)\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

1.3 Quelques résultats de l'analyse fonctionnelle

Dans cette section, nous donnons quelques résultats de l'analyse fonctionnelle utilisés aux chapitre 2. Pour plus de détails sur cette section se référer à [55] et [29].

Définition 1.3. *Soit X un espace vectoriel normé.*
Un hyperplan est un ensemble de la forme

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\},$$

où f est une forme linéaire sur X, non identiquement nulle $[f \not\equiv 0]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On dit que H est l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$.
Si de plus f est continue, on dit que l'hyperplan H est fermé.

Théorème 1.2 (Théorème de séparation).
Soit X un espace vectoriel normé. Soit $E \subset X$ un sous ensemble convexe fermé et non vide et soit $a \in X$ tel que $a \notin E$, alors il existe un hyperplan fermé H qui sépare E et $\{a\}$ strictement i.e., il existe $x' \in X'$, et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle x', x\rangle < \alpha \leq \langle x', a\rangle, \quad \textit{pour tout } x \in E.$$

Théorème 1.3. *Soit T un espace localement compact, μ une mesure positive sur T, X un espace de Banach réel, E un sous ensemble convexe fermé de X, f une application sur T telle que $f(T) \subset E$.*

Pour toute fonction réelle strictement positive intégrable g telle que fg soit intégrable, le point $\dfrac{\int_T fgd\mu}{\int_T gd\mu}$ *appartient à E.*

Preuve.

Supposons que $\dfrac{\int_T fgd\mu}{\int_T gd\mu} \notin E$, alors, par le théorème précédent il existe $x' \in X'$ tel que

$$\left\langle x', \frac{\int_T fgd\mu}{\int_T gd\mu} \right\rangle > \langle x', x \rangle, \text{ pour tout } x \in E.$$

Puisque g est une fonction strictement positive, on obtient

$$\left\langle x', \int_T fgd\mu \right\rangle > \left\langle x', \Big(\int_T gd\mu \Big) x \right\rangle,$$

d'où

$$\left\langle x', \int_T fgd\mu \right\rangle > \left\langle x', \int_T gxd\mu \right\rangle,$$

pour tout $x \in E$. Mais $f(T) \subset E$ d'où la contradiction. $\square$

Corollaire 1.1. *Soit X un espace normé et soit E un sous ensemble convexe fermé de X et $x \in X$. Alors*

$$d(x, E) = \sup_{\xi \in \overline{\mathbb{B}}_{X'}} \big(\langle \xi, x \rangle - \delta^*(E, \xi) \big).$$

1.4 Quelques notions de continuité

Les résultats de cette section sont pris des référence [56] et [36].

Définition 1.4. *Soit X un espace topologique et soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors f est dite semicontinue inférieurement (s.c.i. en abréger) au point $x_0 \in X$ si et seulement si*

$$\forall\ h \in \mathbb{R},\ h < f(x_0),\ \exists\ V \in V(x_0)/h < f(x),\ \forall x \in V.$$

Définition 1.5. *Soit X un espace topologique et soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors f est dite semicontinue supérieurement (s.c.s. en abréger) au point $x_0 \in X$ si et seulement si*

$$\forall\ h \in \mathbb{R},\ h > f(x_0),\ \exists\ V \in V(x_0)/h > f(x)\ \ \forall x \in V.$$

Définition 1.6. *Soit* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *et soit* $x_0 \in X$ *alors*

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \sup_{V\in V(x_0)} \inf_{x\in V} f(x).$$

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \inf_{V\in V(x_0)} \sup_{x\in V} f(x).$$

Proposition 1.1. *Soit* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1. f *est s.c.s. sur* X *;*

2. *les ensembles* $\{x \in X : \ f(x) \geq \lambda\}, \ \ \lambda \in \mathbb{R}$ *sont fermés.*

Théorème 1.4 (Théorème de Rademacher).

Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *une fonction localement lipschitzienne sur* $\mathbb{R}^N$, *c'est-à-dire telle que, pour toute boule ouverte* B *incluse dans* $\mathbb{R}^N$, *il existe un nombre positif* C_B *telle que, pour tout* $x, y \in \mathrm{B}$,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C_B\|x - y\|.$$

Alors f *est différentiable presque partout sur* $\mathbb{R}^N$.

1.5 Quelques résultats d'analyse convexe

Pour plus de détails dans cette section, on peut se référer à [56].

Proposition 1.2 (Fonction indicatrice).

Soit H *un espace de Hilbert et soit* S *un ensemble convexe fermé non vide de* H.

La fonction δ_S *est convexe, propre et semicontinue inférieurement.*

Définition 1.7 (Sous-différentiel d'une fonction convexe).

Soit X *un espace normé,* X' *son dual topologique,* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *et* $x_0 \in \mathcal{D}(f)$.

On appelle sous-différentiel de f *au point* x_0 *qu'on note* $\partial f(x_0)$, *l'ensemble défini par*

$$\partial f(x_0) = \{x' \in X' : \ \langle x', x - x_0\rangle \leq f(x) - f(x_0), \ \textit{pour tout } x \in X\}.$$

Un point $x' \in \partial f(x_0)$ *est dit sous gradient à* f *au point* x_0.

On dit que f *est sous-différentiable au point* x_0 *si* $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.

Remarque 1.1. *Si $f(x_0) = +\infty$, alors $\partial f(x_0) = \emptyset$.*

Exemple 1.1. *Soit H un espace de Hilbert et soit S un ensemble convexe fermé non vide de H. Soit $x_0 \in H$, alors le sous-différentiel de la fonction δ_S au point x est l'ensemble*

$$\begin{aligned} \partial\delta_S(x_0) &= \{w \in H : \ \langle w, x - x_0\rangle \leq \delta_S(x) - \delta_S(x_0), \ \textit{pour tout } x \in H\} \\ &= \begin{cases} \{w \in H : \ \langle w, x - x_0\rangle \leq 0, \ \textit{pour tout } x \in S\} & \textit{si } x_0 \in S, \\ \emptyset & \textit{si } x_0 \notin S. \end{cases} \end{aligned}$$

Définition 1.8 (Cône normal).

Soient X un espace normé, S un sous ensemble convexe non vide de X.

On appelle cône normal à S au points x_0, qu'on note $N(S, x_0)$, l'ensemble défini par

$$N(S, x_0) = \{x' \in X' : \ \langle x', x - x_0\rangle \leq 0, \ \textit{pour tout } x \in S\}.$$

1.6 Multiapplications et sélections

Nous donnons dans cette section quelques définitions et résultats concernant les Multiapplications et leurs sélections. Pour une étude détaillée des multiapplications on peut se référer à [20].

Définition 1.9. *Soient X et Y deux ensembles non vides. Une multiapplication (ou fonction multivoque) F définie sur X à valeurs dans Y est une fonction qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous ensemble $F(x)$ de Y. On note $F : X \rightrightarrows Y$.*

Le domaine, le graphe et l'image de la multiapplication $F : X \rightrightarrows Y$ sont donnés par

$$\mathcal{D}(F) := dom(F) = \{x \in X : \ F(x) \neq \emptyset\}.$$

$$Gr(F) = \{(x, y) \in X \times Y : \ x \in D(F), y \in F(x)\}.$$

$$Im(F) = \bigcup_{x \in D(F)} F(x).$$

Définition 1.10. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication. On appelle sélection de F toute application $f : X \to Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \ \ \forall x \in X.$$

1.6.1 Mesurabilité des multiapplications

Définition 1.11. *Soit* (T, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace métrique et* $F : T \rightrightarrows X$*. On dit que* F *est* Σ*-mesurable où simplement mesurable si pour tout ouvert* V *de* X

$$F^{-1}(V) = \{t \in T :\ F(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Lemme 1.2. *Soient* (T, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace métrique complet séparable et* $F : T \rightrightarrows X$ *une multiapplication à valeurs non vides fermées.*
Considérons les propriétés suivantes

(i) $F^{-1}(B) \in \Sigma$ *pour tout Borélienne* B *de* X*.*

(ii) $F^{-1}(C) \in \Sigma$ *pour tout fermé* C *de* X*.*

(iii) $F^{-1}(V) \in \Sigma$ *pour tout ouvert* V *de* X*.*

(iv) *Il existe une suite* $(\sigma_n)_n$ *de sélections mesurables de* F *telle que*

$$\forall t \in T,\ F(t) = \overline{\{\sigma_n(t)\}}_{n \in \mathbb{N}}.$$

(v) $\forall\, x \in X,$ *la fonction distance* $d(x, F(\cdot))$ *est mesurable.*

(vi) *Le graphe de* F *appartient à* $\Sigma \otimes \mathscr{B}(X)$*.*

Alors $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Rightarrow (vi)$*.*
Si F *est à valeurs non vides complètes alors* $(iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi)$*.*
Si F *est à valeurs non vides compactes alors* $(iii) \Rightarrow (i)$*.*
Si X *est un espace de Banach séparable et* F *est à valeurs convexes compactes, alors la mesurabilité de* F *est équivalente à la mesurabilité de la fonction d'appui* $\delta^*(F(\cdot), x')$ *pour tout* $x' \in X'$*.*

Lemme 1.3. *Soit* (T, Σ, μ) *un espace mesuré avec* $\mu \geq 0$*,* σ*-finie et* Σ μ*-complète. Soient* X *un espace métrique complet,* $F : T \rightrightarrows X$ *une multiapplication à valeurs non vides fermées, alors* $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi)$*.*

Théorème 1.5. ***(Théorème d'existence de sélections mesurables)***
Soient (T, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace métrique complet séparable et* $F : T \rightrightarrows X$

une multiapplication mesurable à valeurs fermées. Alors F admet au moins une sélection mesurable.

Théorème 1.6. *Soient (T,Σ) un espace mesurable, X un espace de Banach séparable. Soient $F : T\times X \rightrightarrows X$ une multiapplication mesurable, $u : T \to X$ une application mesurable. Alors la multiapplication $F(\cdot, u(\cdot))$ est mesurable.*

Nous rappelons qu'une application φ définie de $T \times X$ dans un espace métrique Y est dite de Carathéodory si pour tout $x \in X$, $\varphi(.,x)$ est mesurable et pour tout $t \in T$, $\varphi(t,.)$ est continue.

Lemme 1.4. *Soient (T,Σ) un espace mesurable, X, Y deux espace métriques séparables complets. Soit $\varphi : T \times X \to Y$ une application de Carathéodory. Alors pour toute application mesurable $f : T \to X$ l'application $t \mapsto \varphi(t, f(t))$ est mesurable.*

Lemme 1.5. *Soient (T,Σ) un espace mesurable, X, Y deux espaces métriques séparables complets et soit $g : T \times X \to Y$ une application de Carathéodory. Alors g est $\Sigma \otimes \mathscr{B}(X)$-mesurable.*

1.6.2 Continuité des multiapplications

Définition 1.12. *Soit X, Y deux espaces topologiques, et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication.*

1. *On dit que F est semicontinue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de Y tel que $F(x_0) \subset U$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 dans X tel que $F(V_{x_0}) \subset U$.*

   Si cela est vrai pour tout $x_0 \in X$, on dit que F est s.c.s sur X.

2. *On dit que F est semicontinue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de Y tel que $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 dans X tel que $F(x) \cap U \neq \emptyset$, pour tout $x \in V_{x_0}$.*

   Si cela est vrai pour tout $x_0 \in X$, on dit que F est s.c.i sur X.

3. *Si X est un espace métrique et Y est un espace vectoriel normé, on dit que F est scalairement semicontinue supérieurement si, pour tout $y' \in Y'$, la fonction à valeurs réelles $x \mapsto \delta^*(F(x), y')$ est semicontinue supérieurement.*

Proposition 1.3. *Soient X, Y deux espaces topologiques. Une multiapplication $F : X \rightrightarrows Y$ à valeurs non vides est semicontinue supérieurement si et seulement si l'image inverse $F^{-1}(C) := \{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\}$ est fermé pour tout sous ensemble fermé C de Y, et elle est semicontinue inférieurement si et seulement si pour tout sous ensemble ouvert G de Y, $F^{-1}(G)$ est aussi ouvert dans X.*

Si $F : X \rightrightarrows Y$ à valeurs non vides fermées est s.c.s alors son graphe $Gr(F)$ est fermé dans $X \times Y$.

Proposition 1.4. *Soient X un espace de Banach et Y un espace de Banach compact. Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication à valeurs non vides. Si le graphe de F est fermé alors F est s.c.s.*

Proposition 1.5. *(Voir [30]) Soient X, Y deux espaces de Banach et $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication à valeurs non vides. Alors F est s.c.i si et seulement si $d(y, F(\cdot))$ est s.c.s pour tout $y \in Y$.*

Proposition 1.6. *Soit F une multiapplication définie sur un espace métrique X à valeurs dans un espace vectoriel normé Y s.c.s à valeurs compactes, alors la fonction*

$$(x, q) \in X \times Y' \mapsto \delta^*(F(x), q)$$

est s.c.s.

Définition 1.13. *(Voir [30]) Soient X, Y deux espaces de Banach. Alors la multiapplication $F : X \rightrightarrows Y$ à valeurs non vides est dite ε-s.c.s si pour tout $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tel que*

$$F(x) \subset F(x_0) + \mathrm{B}(0, \varepsilon) \quad \textit{pour tout } x \in \mathrm{B}(x_0, \delta).$$

Proposition 1.7. *(Voir [30]) Soient X, Y deux espaces de Banach et $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication à valeurs non vides.*
Si F est s.c.s alors F est ε-s.c.s. L'inverse est vrai si F est à valeurs compactes.

Proposition 1.8. *(Voir [30]) Soit X et Y deux espaces de Banach. Une multiapplication $F : X \rightrightarrows Y$ à valeurs non vides est dite compacte si elle est s.c.s et l'image des sous ensembles bornés de X par F sont des sous ensembles relativement compacts de Y.*

Le résultat suivant est une version multivoque du théorème de Scorza-Dragoni due à Castaing-Marques (voir [22] et [10]).

Théorème 1.7. *Soient I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, X un espace métrique séparable complet et Y un espace métrique convexe compact. Soit $F : I \times X \rightrightarrows Y$ une multiapplication de Carathéodory à valeurs non vides fermées et convexes, i.e.,*

i) pour tout $t \in I$, la multiapplication $F(t, \cdot)$ est de graphe fermé dans $X \times Y$ ($F(t, \cdot)$ est s.c.s),

ii) pour tout $x \in X$, la multiapplication $F(\cdot, x)$ est mesurable (admet une sélection mesurable).

Alors, il existe une multiapplication $F_0 : I \times X \rightrightarrows Y$ à valeurs convexes fermées (possiblement vides) dont le graphe appartient à $\mathcal{L}(I) \otimes \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$ qui possède les propriétés suivantes.

1. *Il existe un ensemble négligeable $N \subset I$ tel que*
$$F_0(t, x) \subset F(t, x),$$
pour tout $t \notin N$ et tout $x \in X$.

2. *Si $u : I \to X$ et $v : I \to Y$ sont deux applications mesurables telles que $v(t) \in F(t, u(t))$ p.p. sur I, alors $v(t) \in F_0(t, u(t))$ p.p. sur I.*

3. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $I_\varepsilon \subset I$, tel que $\lambda(I \backslash I_\varepsilon) < \varepsilon$ et tel que la restriction $F_{0|(I_\varepsilon \times X)}$ soit de graphe fermé et vérifie*
$$\emptyset \neq F_0(t, x) \subset F(t, x),$$
pour tout $(t, x) \in I_\varepsilon \times X$.

Avant d'énoncer le théorème suivant, rappelons deux notions classiques connues.

Définition 1.14. *Soient X un espace topologique et U une partie de X.*

1. *On appelle recouvrement localement fini de U, tout recouvrement ouvert $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de U vérifiant pour tout $x \in U$, il existe un voisinage ouvert V de x tel que l'ensemble $\{\lambda \in \Lambda :\ V_\lambda \cap V \neq \emptyset\}$ soit fini.*
2. *Une famille de fonctions continues $(\psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ définies sur X à valeurs dans $[0,1]$ est dite une partition continue de l'unité subordonnée au recouvrement $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ si pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\mathrm{supp}(\psi_\lambda) \subset V_\lambda$ et pour tout $x \in V$ on a $\sum_{\lambda\in\Lambda}\psi_\lambda(x) = 1$. On désigne ici par $\mathrm{supp}(\psi_\lambda)$ le support de la fonction ψ_λ.*

Le résultat suivant est une version multivoque du théorème classique de Dugundji (voir [29]).

Théorème 1.8. *Soient X et Y deux espaces de Banach. Soient $K \subset X$, $D \subset Y$ deux fermés non vides et $F : K \times D \rightrightarrows X$ une multiapplication semicontinue supérieurement à valeurs convexes et faiblement compactes telle que*

$$\forall (t,x) \in (K \times D),\ F(t,x) \subset c(t)(1 + \|x\|)\overline{B}_Y,$$

où $c(\cdot)$ est une fonction positive définie sur K. Soit $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un recouvrement ouvert localement fini de $(X \setminus K)$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$

$$0 < \mathrm{diam} U_\lambda \leq d(U_\lambda, K).$$

Soit $(\psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une partition continue de l'unité relativement au recouvrement $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, soit $t_\lambda \in K$ tel que

$$d(t_\lambda, U_\lambda) < 2d(U_\lambda, K).$$

Alors, la multiapplication $\tilde{F}$ définie sur $X \times D$, par

$$\tilde{F}(t,x) = \begin{cases} F(t,x), & si\ t \in K, x \in D, \\ \sum_\lambda \psi_\lambda(t) F(t_\lambda, x), & si\ t \in X \setminus K, x \in D, \end{cases}$$

est une extension semicontinue supérieurement de F à $X \times D$ à valeurs convexes faiblement compactes. De plus on a $\tilde{F}(X \times D) \subset \mathrm{co}(F(K \times D))$ et si c est constante, on a $\tilde{F}(t,x) \subset c(1+\|x\|)\overline{B}_Y$. En particulier, si pour tout (t,x), $F(t,x) \subset C$ où C est un convexe de Y, alors $\tilde{F}(t,x) \subset C$.

1.7 Opérateurs maximaux monotones

Les résultats suivants sont pris des références [8, 15].

Soit X un espace de Banach, X' son dual topologique. Soit $A : X \rightrightarrows X'$ une multiapplication. Alors, le domaine de A est donné par

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in X : \ A(x) \neq \emptyset\},$$

et l'image de A par

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in X' : \text{ il existe } x \in \mathcal{D}(A) \text{ tel que } y \in A(x)\}.$$

Définition 1.15. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightrightarrows X'$ une multiapplication (opérateur multivoque). On dit que A est un opérateur monotone, si $\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0$ pour tous $x_i \in \mathcal{D}(A)$, et $y_i \in A(x_i)$, $i = 1, 2$.*
Si $\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle = 0$ implique que $x_1 = x_2$, on dit que A est strictement monotone.

Remarque 1.2. *Si A est un opérateur univoque alors, on dit qu'il est monotone si*

$$\langle A(x) - A(y), x - y\rangle \geq 0, \quad \textit{pour tous } x, y \in \mathcal{D}(A),$$

et est strictement monotone si

$$\langle A(x) - A(y), x - y\rangle > 0, \quad \textit{pour tous } x, y \in \mathcal{D}(A).$$

Définition 1.16. *Un opérateur $A : X \rightrightarrows X'$ est dit coercif si, soit $\mathcal{D}(A)$ est borné ou bien $\mathcal{D}(A)$ n'est pas borné et*

$$\frac{\inf\{\langle y, x\rangle : \ y \in A(x)\}}{\|x\|} \to +\infty, \ \textit{si } \|x\| \to +\infty.$$

Si A est univoque, on dit qu'il est coercif si, soit $\mathcal{D}(A)$ est borné ou bien $\mathcal{D}(A)$ n'est pas borné et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\langle y_n, x_n\rangle}{\|x_n\|} = +\infty \textit{ pour } (x_n, y_n) \in Gr(A) \textit{ avec } \lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = +\infty.$$

Théorème 1.9. *Soit H une espace de Hilbert et soit $A : H \to H$ un opérateur univoque monotone continu tel que $\|A(x)\| \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$. Alors A est surjectif.*
Si de plus A est strictement monotone alors A est un homéomorphisme.

L'ensemble des opérateurs est ordonné par l'inclusion des graphes, i.e., $A \subset B$ est équivalent à, pour tout $x \in H$, $A(x) \subset B(x)$.

Définition 1.17. *Un opérateur monotone A est dit maximal si A ne peut pas être proprement contenu dans d'autres opérateurs monotones.*

En Explicitant cette définition, nous aurons la proposition suivante.

Proposition 1.9. *Un opérateur monotone $A : X \rightrightarrows X'$ est dit maximal monotone si et seulement si pour tout $(x, y) \in X \times X'$ tel que*

$$\langle y - v, x - u\rangle \geq 0, \textit{ pour tout } (u, v) \in Gr(A),$$

on a $y \in A(x)$.

Théorème 1.10. *Si f est une fonction propre convexe s.c.i. définie sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors ∂f est un opérateur maximal monotone sur X à valeurs dans X'.*

Proposition 1.10. *Soit A un opérateur maximal monotone défini sur X à valeurs dans X', alors*
(i) *$Gr(A)$ est faiblement-fortement fermé dans $X \times X'$.*
(ii) *A esi demi-fermé, i.e. $Gr(A)$ est fortement-faiblement* fermé dans $X \times X'$.*
(iii) *A^{-1} est maximal monotone de X dans X';*
(iv) *pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, $A(x)$ est un sous ensemble non vide convexe faiblement* compact de X'.*

Théorème 1.11. *Soit X un espace de Banach réflexif et soit $B : X \to X'$ un opérateur univoque monotone et continu alors B est maximal monotone.*

Théorème 1.12. *Si $A,\ B : X \rightrightarrows X'$ sont maximaux monotones et $int(\mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{D}(B) \neq \emptyset$, alors $A + B$ est aussi un opérateur maximal monotone.*

Théorème 1.13. *Si $A : X \rightrightarrows X'$ est un opérateur maximal monotone, $y' \in X'$, C un sous ensemble convexe faiblement compact de X avec $0 \in int(C)$ et si pour tout $x \in \partial C$ (la frontière de C) et tout $x' \in A(x)$, $0 \leq \langle x' - y', x\rangle$, alors l'ensemble*

$$S(y') = \{x \in C : \ y' \in A(x)\}$$

est non vide.

Soit $X = H$ un espace de Hilbert et $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone. On sait que pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, $A(x)$ est un ensemble non vide fermé et convexe. Donc l'ensemble $A(x)$ contient un élément de norme minimale (la projection de l'origine sur l'ensemble $A(x)$). Cet élément unique est noté $A^0(x)$. Aussi, $A^0(x) \in A(x)$ et $\|A^0(x)\| = \inf_{y \in A(x)} \|y\|$. De plus l'ensemble $\overline{\mathcal{D}(A)}$ est convexe.

Maintenant pour $\lambda > 0$ on définit les opérateurs bien connus suivants

$$J_\lambda = (Id_H + \lambda A)^{-1} \ \text{(opérateur résolvent de}\, A),$$

et

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(Id_H - J_\lambda)\, (\text{ approximation de Yosida de } A).$$

Donc les opérateurs J_λ et A_λ sont définis sur H tout entier. On rappelle ici quelques propriétés de ces opérateurs (voir [9]).

Proposition 1.11.

1. *J_λ et A_λ sont univoques,*
2. *J_λ est non expansive, c'est à dire lipschitzien de rapport 1, et $J_\lambda(x) \to x$ $(\lambda \downarrow 0)$, pour chaque $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$,*
3. *A_λ est monotone lipschitzien de rapport $\frac{1}{\lambda}$,*

4. $J_\lambda x \in \mathcal{D}(A)$, et $A_\lambda(x) \in A(J_\lambda x)$, pour tout $x \in H$,

5. $\|A_\lambda(x)\| \leq \|A^0(x)\|$ pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$.

1.8 Quelques résultats de Compacité

Les résultats suivants sont pris des références [2, 44, 31].

Théorème 1.14 (Théorème de Banach Dieudonné).
Soit X un espace de Banach et $\overline{\mathrm{B}}_{X'}$ la boule unité fermée de X'. Alors sur $\overline{\mathrm{B}}_{X'}$ la topologie de la convergence faible coïncide avec la topologie de la convergence compacte et $(\overline{\mathrm{B}}_{X'}, \sigma(X', X))$ est métrisable.

Proposition 1.12. *Soit S un sous ensemble borné convexe de X. Alors S est compact si et seulement si la fonction $x' \mapsto \delta^*(S, x')$ est continue sur $\overline{\mathrm{B}}_{X'}$ muni de la topologie de convergence uniforme.*

Théorème 1.15 (Théorème de Banach-Alaouglu-Bourbaki).
Soit X un espace de Banach. Alors la boule unité fermée de X' est compacte pour la topologie faible étoile.

Théorème 1.16 (Théorème d'Alaoglu). *Soit X un espace de Banach séparable et soit $S' \subset X'$, si S' est borné pour la norme de X' et fermé pour la topologie $\sigma(X', X)$. Alors S' est compact pour cette topologie.*

Théorème 1.17 (Théorème d'Eberlin-Smũlian).
Soit S un sous ensemble d'un espace de Banach. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes

1. S est faiblement (relativement) séquentiellement compact.

2. S est faiblement (relativement) compact.

Théorème 1.18 (Théorème de Mazur).
Soient X un espace de Banach et S un sous ensemble compact de X. Alors $\overline{\mathrm{co}}(A)$ est compact.

Lemme 1.6 (Lemme de Mazur).

Soit X un espace de Banach, et soit (x_n) une suite d'éléments de X convergeant faiblement vers x. Alors il existe une suite (z_n) (où z_n est une combinaison convexe des éléments $x_n, x_{n+1}, \ldots$) convergeant fortement vers x.

Théorème 1.19. *Soit X un espace de Banach et soit S un sous ensemble convexe de X. Alors S est faiblement fermé si et seulement si S est fortement fermé.*

Théorème 1.20 (Théorème d'Ascoli-Arzelà).

Soit X un espace métrique compact, Y un espace métrique complet, et K un sous ensemble de $\mathcal{C}(X, Y)$, l'espace des applications continues définies sur X à valeurs dans Y, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors K est relativement compact si et seulement si S est équicontinu et $K(x)$ est relativement compact, avec $K(x) = \{f(x) : \ f \in S\}$.

Proposition 1.13 (Principe d'angle aigu).

Si H est un espace de Hilbert, $S \subset H$ est un sous ensemble borné ouvert avec $0 \notin \partial S$, $\varphi : \overline{S} \to H$ est une application compacte et $\langle \varphi(x), x \rangle \leq \|x\|^2$ pour tout $x \in \partial S$, alors il existe $x \in \overline{S}$ tel que $\varphi(x) = x$.

CHAPITRE 2

Processus de la rafle perturbé

Sommaire

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude du processus de la rafle du premier ordre perturbé dans un espace de Hilbert séparable. La perturbation se présente par la somme d'une application univoque satisfaisant une condition de lipschitziété et d'une multiapplication semicontinue supérieurement.

Soit H un espace de Hilbert réel et $I = [T_0, T]$ $(T > T_0)$. On s'intéresse ici à l'étude du processus de la rafle perturbé

$$(\mathcal{P}_{F,f}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N(C(t), u(t)) + F(t, u(t)) + f(t, u(t)) & \text{p.p sur } I, \\ u(T_0) = x_0 \in C(T_0), \end{cases}$$

où $C : I \rightrightarrows H$ est une multiapplication à valeurs non vides fermées r-prox-régulières, $N(C(t), \cdot)$ désigne le cône normal de $C(t)$, $F : I \times H \rightrightarrows H$ est une multiapplication à valeurs non vides convexes compactes vérifiant une condition de croissance linéaire par rapport à un sous ensemble compact invariant, et $f : I \times H \to H$ est une application mesurable sur I et lipschitzienne sur H vérifiant aussi une condition de croissance linéaire.

Il est bien connu que le processus de la rafle non perturbé dans un espace de Hilbert H

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N(C(t), u(t)) & \text{p.p. sur } [0, T], \\ u(T_0) = x_0 \in C(0), \end{cases}$$

a été introduit dans les années 70 par Moreau et largement étudié par lui-même lorsque les ensembles $C(t)$ sont supposés être convexes (voir [49, 50]). Un nombre considérable de travaux ont fait l'objet de plusieurs contributions qui se trouvent actuellement dans la littérature, en affaiblissant les hypothèses afin d'obtenir des résultats plus généraux concernant l'existence de solutions pour ces processus de la rafle (voir par exemple [28, 9, 55] et [12]).

Concernant le problème perturbé, il a été aussi largement étudié par plusieurs auteurs, voir par exemple [13, 23, 55, 33] et [34].

Dans [34], Edmond et Thibault établissent, pour une multiapplication C prenant des valeurs r-prox-régulières et une variation absolument continue, l'existence et l'unicité de solution du processus de la rafle perturbé

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N(C(t), u(t)) + f(t, u(t)) \quad \text{p.p. sur } [0, T], \\ u(T_0) = x_0 \in C(0), \end{cases}$$

où f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur chaque ensemble borné de H et satisfait la condition de croissance naturelle

$$\|f(t, x)\| \leq \beta(t)(1 + \|x\|) \ \forall (t, x) \in [0, T] \times H.$$

Les mêmes auteurs ont montré dans [33] que le problème

$$\begin{cases} -du(t) \in N(C(t), u(t)) + F(t, u(t)) \quad \lambda - \text{p.p. sur } [T_0, T], \\ u(T_0) = x_0 \in C(0), \end{cases}$$

est bien posé, avec la multiapplication C prenant des valeurs r-prox régulières et telle que

$$|d_{C(t)}(y) - d_{C(s)}(y)| \leq \mu(]s, t]), \ \forall y \in H, \ \forall s, t \in [T_0, T], \ s \leq t,$$

où μ est une mesure positive vérifiant

$$\sup_{s \in [T_0, T]} \mu(\{s\}) < \frac{r}{2}.$$

Notre objectif ici est de combiner les deux derniers résultats et établir un théorème concernant l'existence de solutions pour le problème $(\mathcal{P}_{F,f})$.

2.2 Préliminaires

Dans tout ce chapitre $I := [T_0, T]$ $(T_0 < T)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et H est un espace de Hilbert réel muni d'un produit scalaire noté par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme qui lui est associée et qu'on note par $\| \cdot \|$.

2.2.1 Cône normal

Soit S un sous ensemble fermé non vide de H et $x \in H$. La distance de x à S, notée par $d_S(x)$ ou $d(x, S)$, est définie par

$$d_S(x) := \inf\{\|x - u\| : u \in S\}.$$

On définit l'ensemble (possiblement vide) des points de S dont la distance à S est minimale par

$$\text{proj}_S(x) := \{u \in S : d_S(x) = \|x-u\|\},$$

quand $\text{proj}_S(x)$ contient un et un seul point u_0, on ne va pas faire la distinction entre u_0 et $\text{proj}_S(x)$, c'est à dire, on va écrire $u_0 = \text{proj}_S(x)$.

Si $u \in \text{proj}_S(x)$ et $\alpha \geq 0$, alors le vecteur $\alpha(x-u)$ est appelé le normal proximal à S en u. L'ensemble de tous les vecteurs normaux proximaux est un cône appelé le cône normal proximal à S au point u. Il est noté par $N^P(S,u)$, i.e.,

$$\begin{aligned} N^P(S,u) &= \{\zeta \in H : \ \exists\ \alpha \geq 0 \text{ et } \exists\ x \in H \text{ t.q. } \zeta = \alpha(x-u) \text{ et } u \in \text{proj}_S(x)\}. \\ &= \{\zeta \in H : \ \exists\, \alpha > 0 \text{ t.q. } \langle \zeta, x-u\rangle \leq \frac{1}{2\alpha}\|x-u\|^2, \text{ pour tout } x \in S\}. \end{aligned}$$

Pour $u \notin S$, on définit $N^p(S,u)$ en posant $N^P(S,u) := \emptyset$. D'un autre côté, il est évident que $N^P(S,u) = \{0\}$ si $u \in \text{int}(S)$, où $\text{int}(S)$ est l'intérieur de S.

On définit également le cône normal limite et le cône normal de Clarke respectivement par

$$N^L(S,u) := \{\zeta \in H : \zeta_n \rightharpoonup \zeta,\ \zeta_n \in N^P(S,u_n),\ u_n \xrightarrow{S} u\}$$

et

$$N^C(S,u) := \overline{co} N^L(S,u).$$

Ici, $u_n \xrightarrow{S} u$ signifie que $u_n \to u$ avec $u_n \in S$ pour tout n.

2.2.2 Ensemble r-prox-régulier

Pour un nombre fixé $r > 0$, l'ensemble S est dit r-prox-régulier (ou uniformément prox-régulier de constante r) (voir [53]) si, pour tout $u \in S$ et tout $\zeta \in N^L(S,u)$ tel que $\|\zeta\| < 1$, on a $u = \text{proj}_S(u + r\zeta)$. Par équivalence, S est r-prox-régulier si et seulement si tout normal proximal non nul $\zeta \in N^P(S,u)$ à S en tout point $u \in S$ peut être réalisé par une r-boule, c'est à dire, $S \cap \mathrm{B}_H(u + \frac{r}{\|\zeta\|}\zeta, r) = \emptyset$, ce qui est équivalent dans le contexte hilbertien à

$$\langle \zeta, y-u\rangle \leq \frac{\|\zeta\|}{2r}\|y-u\|^2 \quad \forall\, y \in S. \tag{2.2.1}$$

Une autre caractérisation est la propriété d'hypomonotonie suivante : pour tout $u_i \in S(i = 1, 2)$, l'inégalité

$$\langle \zeta_1 - \zeta_2, u_1 - u_2 \rangle \geq -\frac{1}{r} \|u_1 - u_2\|^2$$

est obtenue quand $\zeta_i \in N^L(S, u_i) \cap \mathrm{B}_H(0, r)$.

2.2.3 Sous-différentiels

Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de rapport k au voisinage de $x \in H$. On définit (voir [27]) la dérivée directionnelle de f au point $x \in H$ dans la direction $u \in H$ par

$$f^\circ(x; u) := \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y + tu) - f(y)}{t}.$$

Le sous-différentiel de Clarke de f en x est alors défini par

$$\partial^C f(x) := \{\zeta \in H : \langle \zeta, u \rangle \leq f^\circ(x; u) \ \forall u \in H\}.$$

Il est bien connu que, pour tout $x \in H$, $\partial^C f(x)$ est un sous ensemble non vide convexe et faiblement compact dans H et $\|\zeta\| \leq k$ pour tout $\zeta \in \partial^C f(x)$.

Nous rappelons également la définition du sous-différentiel proximal $\partial^P f(x)$ de f au point $x \in H$ (voir [26] et [25]). On dit que $\zeta \in H$ appartient à $\partial^P f(x)$ s'il existe des nombres réels $\alpha, M > 0$ tels que

$$f(y) - f(x) + M\|y - x\|^2 \geq \langle \zeta, y - x \rangle \quad \forall y \in \mathrm{B}(x, \alpha).$$

Bien entendu, l'inclusion $\partial^P f(x) \subset \partial^C f(x)$ est vérifiée pour tout $x \in H$.

Il existe des liens entre les cônes et les sous-différentiels définis ci-dessus. Pour tout sous ensemble non vide fermé S de H et $x \in S$, les relations suivantes sont vérifiées

$$\partial^P d_S(x) = N_S^P(x) \cap \overline{\mathrm{B}}_H \tag{2.2.2}$$

et

$$\partial^C d_S(x) \subset N_S^C(x) \cap \overline{\mathrm{B}}_H. \tag{2.2.3}$$

Désormais, le nombre réel $r > 0$ est fixé. Dans tout le chapitre une multiapplication $C(\cdot)$ de I dans H va être introduite. Elle vérifie les hypothèses suivantes.

(A_1) Pour tout $t \in I$, $C(t)$ est un sous ensemble non vide fermé r-prox-régulier de H ;

(A_2) $C(t)$ est à variation absolument continue, c'est à dire, il existe une fonction absolument continue $v(\cdot) : I \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $y \in H$ et $s, t \in I$,

$$|d(y, C(t)) - d(y, C(s))| \leq |v(t) - v(s)|.$$

La proposition suivante donne quelques propriétés des sous-différentiels proximal et au sens de Clarke de la fonction distance $d(\cdot, S)$ quand l'ensemble S est r-prox-régulier (voir [53]).

Proposition 2.1. *Soit S un sous ensemble non vide et fermé de H et soit $r > 0$. Si le sous ensemble S est r-prox-régulier, alors on a*

i) pour tout $u \in S$, tous les cônes normaux définis ci-dessus coïncident. Dans ce cas, ils seront désignés par $N_S(u)$ ou $N(S, u)$;

ii) pour tout $x \in H$ avec $d_S(x) < r$, $\mathrm{proj}_S(x)$ *existe et est un singleton ;*

ii) les sous-différentiels proximal et au sens de Clarke de $d(\cdot, S)$ coïncident en tout point $x \in H$ avec $d_S(x) < r$.

Remarque 2.1. *Si S est un ensemble r-prox-régulier, par* (2.2.2) *et* (2.2.3)*, et l'égalité entre le cône normal de Clarke et le cône normal proximal, on a*

$$\partial^P d_S(x) = \partial^C d_S(x),$$

pour tout $x \in S$.

La proposition suivante est fondamentale pour démontrer les résultats principaux de ce chapitre. Elle exprime une propriété de semicontinuité supérieure scalaire (voir [33]).

Proposition 2.2. *Soit $C(\cdot)$ une multiapplication vérifiant (A_1) et (A_2). Soit (t_n) une suite dans $[T_0, T]$ convergeant vers $t \in [T_0, T]$ et soit (x_n) une suite qui converge vers $x \in C(t)$ avec $x_n \in C(t_n)$ pour tout n. Alors, pour tout $z \in H$,*

$$\limsup_{n\to\infty} \delta^*\big(\partial^P d_{C(t_n)}(x_n), z\big) \leq \delta^*\big(\partial^p d_{C(t)}(x), z\big).$$

Pour la preuve on a besoin du lemme suivant.

Lemme 2.1. *Soit $S \subset H$ un sous ensemble non vide fermé et r-prox-régulier. Soit $x \in S$ et $\xi \in \partial^P d_S(x)$. Alors, pour tout $z \in H$ tel que $d_S(z) < r$, on a*

$$\langle \xi, z - x \rangle \leq \frac{2}{r} \|z - x\|^2 + d_S(z).$$

Preuve.

Fixons $z \in H$ tel que $d_S(z) < r$. Puisque S est r-prox-régulier, soit y_z l'unique point de S tel que

$$d_S(z) = \|z - y_z\|.$$

Alors

$$\|x - y_z\| \leq \|z - y_z\| + \|z - x\| \leq 2\|z - x\|. \tag{2.2.4}$$

D'un autre côté,

$$\langle \xi, z - x \rangle = \langle \xi, y_z - x \rangle + \langle \xi, z - y_z \rangle \leq \langle \xi, y_z - x \rangle + \|\xi\| d_S(z).$$

Puisque $\xi \in \partial^P d_S(x)$, et donc $\|\xi\| \leq 1$, il découle de (2.2.2), (2.2.1) et (2.2.4) que

$$\langle \xi, z - x \rangle \leq \frac{1}{2r} \|y_z - x\|^2 + d_S(z) \leq \frac{2}{r} \|z - x\|^2 + d_S(z).$$

$\square$

Preuve de la Proposition 2.2.

Soit $z \in H$. Par l'extraction d'une sous suite, on peut supposer, sans perdre de généralités, que $\delta^*\big(\partial^P d_{C(t_n)}(x_n), z\big)$ converge et donc

$$\limsup_{n \to \infty} \delta^*\big(\partial^P d_{C(t_n)}(x_n), z\big) = \lim_{n \to \infty} \delta^*\big(\partial^P d_{C(t_n)}(x_n), z\big).$$

Puisque $C(t_n)$ est r-prox-régulier, par la Remarque 2.1, on a $\partial^P d_{C(t_n)}(x_n) = \partial^C d_{C(t_n)}(x_n)$ et alors $\partial^P d_{C(t_n)}(x_n)$ est faiblement compact. Donc, pour tout n, il existe $\xi_n \in \partial^P d_{C(t_n)}(x_n)$ tel que

$$\delta^*\big(\partial^P d_{C(t_n)}(x_n), z\big) = \langle \xi_n, z \rangle.$$

Puisque $\|\xi_n\| \leq 1$ pour tout n, on peut supposer, sans perdre de généralités, que (ξ_n) converge faiblement vers un certain élément $\xi \in H$. On va montrer que $\xi \in \partial^C d_{C(t)}(x)$.

Fixons $y \in H$. Puisque $x_n \in C(t_n)$, pour s assez petit, $d_{C(t_n)}(x_n + sy) \leq s\|y\| < r$ pour tout n. Alors, pour $s > 0$ assez petit, on a par le Lemme 2.1,

$$\langle \xi_n, sy \rangle \leq \frac{2}{r} s^2 \|y\|^2 + d_{C(t_n)}(x_n + sy), \ \forall n.$$

Quand n tends vers l'infini, puisque $d_{C(t_n)}(x_n + sy) \to d_{C(t)}(x + sy)$ par (A_2), on obtient

$$\langle \xi, sy \rangle \leq \frac{2}{r} \|y\|^2 + d_{C(t)}(x + sy).$$

Comme résultat, puisque $d_{C(t)}(x) = 0$,

$$\langle \xi, y \rangle \leq \liminf_{s \downarrow 0} \frac{1}{s} \Big(d_{C(t)}(x + sy) - d_{C(t)}(x) \Big) \leq d^{\circ}{}_{C(t)}(x, y).$$

Comme y est arbitraire, il s'ensuit que $\xi \in \partial^C d_{C(t)}(x) = \partial^P d_{C(t)}(x)$. Par conséquent,

$$\lim_{n \to \infty} \delta^* \big(\partial^P d_{C(t_n)}(x_n), z \big) = \lim_{n \to \infty} \langle \xi_n, z \rangle = \langle \xi, z \rangle \leq \delta^* \big(\partial^P d_{C(t)}(x), z \big).$$

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant qui est une conséquence directe du lemme de Gronwall (voir [34] et [35]).

Lemme 2.2. *Soit $I = [T_0, T]$ et soit $(x_n(\cdot))$ une suite d'applications absolument continues de I dans H. Supposons que pour tout n,*

$$\frac{d}{dt}(\|x_n(t)\|^2) \leq \beta_n(t)\|x_n(t)\|^2 + \alpha_n(t), \ p.p. \ sur I,$$

où $\alpha_n(\cdot), \beta_n(\cdot)$ sont des fonctions intégrables réelles positives. Supposons également que la suite $(\beta_n(\cdot))$ est bornée dans $\mathrm{L}^1(I, \mathbb{R})$, $\lim_{n \to \infty} \int_{T_0}^{T} \alpha_n(t)dt = 0$, et $\lim_{n \to \infty} x_n(T_0) = 0$. Alors,

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n(\cdot)\|_{\mathcal{C}} = 0.$$

Preuve.

Par le lemme de Gronwall, pour tout $t \in I$,

$$\|x_n(t)\|^2 \leq \int_{T_0}^{t} \left(\alpha_n(s) \exp \left(\int_{s}^{t} \beta_n(\tau)d\tau \right) \right) ds + \|x_n(T_0)\|^2 \exp \left(\int_{T_0}^{t} \beta_n(\tau)d\tau \right).$$

Il résulte que, pour tout $t \in [T_0, T]$,

$$\|x_n(t)\|^2 \leq \exp \left(\int_{T_0}^{T} \beta_n(\tau)d\tau \right) \int_{T_0}^{T} \alpha_n(s)ds + \|x_n(T_0)\|^2 \exp \left(\int_{T_0}^{T} \beta_n(\tau)d\tau \right).$$

La conclusion est évidente. □

2.3 Processus de la rafle avec somme d'une perturbation multivoque scalairement semicontinue supérieurement et une perturbation univoque lipschitzienne

Cette section est consacrée à l'étude d'un processus de la rafle avec somme de deux perturbations l'une multivoque globalement scalairement semicontinue supérieurement, et l'autre une perturbation univoque localement lipschitzienne.

Théorème 2.1. *Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $C(\cdot)$ vérifiant (A_1) et (A_2). Soit $F : I \times H \rightrightarrows H$ une multiapplication à valeurs non vides convexes compactes telle que*

(i) *$F(\cdot,\cdot)$ est globalement scalairement semicontinue supérieurement sur $I \times H$;*

(ii) *pour un sous ensemble compact $K \subset \overline{\mathrm{B}}_H$ et une fonction positive $\beta(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I,\mathbb{R})$, pour tout $t \in I$ et $x \in \bigcup\limits_{s\in I} C(s)$, on a l'inclusion*

$$F(t,x) \subset \beta(t)(1+\|x\|)K.$$

Soit $f : I \times H \to H$ une application mesurable sur I telle que

(a_1) *pour tout $\eta > 0$ il existe une fonction positive $k_\eta(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I,\mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in I$ et pour tout $(x,y) \in \mathrm{B}_H(0,\eta) \times \mathrm{B}_H(0,\eta)$,*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k_\eta(t)\|x-y\|;$$

(a_2) *il existe une fonction positive $\alpha(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I,\mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in I$ et pour tout $x \in \bigcup\limits_{s\in I} C(s)$, $\|f(t,x)\| \leq \alpha(t)(1+\|x\|)$.*

Alors, pour chaque $x_0 \in C(T_0)$, le processus de la rafle perturbé suivant

$$(\mathcal{P}_{F,f}) \quad \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N(C(t),u(t)) + F(t,u(t)) + f(t,u(t)) \quad \text{p.p. sur } I, \\ u(T_0) = x_0, \end{cases}$$

admet au moins une solution absolument continue $u(\cdot)$, et si

$$\int_{T_0}^{T} (\beta(s)+1)ds \leq \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \int_{T_0}^{T} \alpha(s)ds \leq \frac{1}{8}$$

alors il existe une application intégrable $z(\cdot) : I \to H$ telle que, pour presque tout $t \in I$,

$$z(t) \in F(t, u(t)),\ \dot{u}(t) + z(t) + f(t, u(t)) \in -N(C(t), u(t)),$$

$$z(t) \in l(\beta(t) + 1)\overline{co}(K \cup \{0\}),$$

$$\|\dot{u}(t) + z(t) + f(t, u(t))\| \leq (l + 1)\Big(|\dot{v}(t)| + \beta(t) + 1 + \alpha(t)\Big),$$

et

$$\|f(t, u(t))\| \leq l\alpha(t),$$

où

$$l = 2\left(\|x_0\| + \frac{3}{2} + \int_{T_0}^{T} |\dot{v}(s)|ds\right).$$

Preuve.

On suppose, sans perdre de généralités, que K est convexe et contient 0 quitte à le remplacer par $\overline{co}(K \cup \{0\})$ qui est compact.

Notons que par (A_2), pour $t \leq t'$ et $y \in H$,

$$|d(y, C(t)) - d(y, C(t'))| \leq \int_{t}^{t'} |\dot{v}(s)|ds. \tag{2.3.1}$$

Ainsi, en remplaçant, si nécessaire $v(\cdot)$ par $t \mapsto \int_{T_0}^{t} |\dot{v}(s)|ds$, on peut supposer que $\dot{v}(\cdot) \geq 0$. Dans un premier lieu on suppose que

$$\int_{T_0}^{T} (\beta(s) + 1)ds \leq \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \int_{T_0}^{T} \alpha(s)ds \leq \frac{1}{8}. \tag{2.3.2}$$

Nous allons construire une suite d'applications $(u_n(\cdot))$ dans $\mathcal{C}(I, H)$ admettant une sous suite uniformément convergente vers une solution de $(\mathcal{P}_{F,f})$.

Mettons

$$l := 2\left(\|x_0\| + \frac{3}{2} + \int_{T_0}^{T} \dot{v}(s)ds\right).$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère la partition de I donnée par

$$t_i^n := T_0 + \frac{i(T - T_0)}{2^n},\ \ i \in \{0, ..., 2^n\}.$$

Posons

$$\mu_n := \frac{T - T_0}{2^n},$$

$$\epsilon_i^n := \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \dot{v}(s)ds,\ \beta_i^n := \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (\beta(s)+1)ds,\ \alpha_i^n = \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \alpha(s)ds, \tag{2.3.3}$$

et

$$\epsilon_n := \max_{0 \le i \le 2^n - 1} \{\beta_i^n + \alpha_i^n + \epsilon_i^n\}.$$

Notons que la suite (ϵ_n) converge vers 0 puisque $|t_{i+1}^n - t_i^n| = \mu_n \to 0$ quand $n \to \infty$ et les fonctions $\dot{v}$, β et α sont intégrables. Fixons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \ge n_0$,

$$\epsilon_n < \frac{r}{l+1}.$$

Pour chaque $i \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$, on fixe un certain $s_i^n \in]t_i^n, t_{i+1}^n]$ tel que

$$\beta(s_i^n) \le \inf_{s \in]t_i^n, t_{i+1}^n]} \beta(s) + 1, \tag{2.3.4}$$

et on définit $\kappa_n(\cdot) : I \to I$ par

$$\begin{cases} \kappa_n(t) := s_i^n \quad \forall\, t \in]t_i^n, t_{i+1}^n]\ (0 \le i \le 2^n - 1), \\ \kappa_n(T_0) := \kappa_n(t_1^n) = s_1^n. \end{cases} \tag{2.3.5}$$

Afin de construire la suite d'applications $(u_n(\cdot))$, nous allons commencer par la construction, pour chaque $n \ge n_0$, de deux suites finies $\{u_i^n : i = 0, \ldots, 2^n\}$ et $\{z_i^n : i = 0, \ldots, 2^n - 1\}$ telles que $u_0^n = x_0$ et, pour chaque i,

$$z_i^n \in F(\kappa_n(t_{i+1}^n), u_i^n), \tag{2.3.6}$$

$$d_{C(t_{i+1}^n)}\left(u_i^n - \mu_n z_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds\right) \le (l+1)(\epsilon_i^n + \beta_i^n + \alpha_i^n) \le (l+1)\epsilon_n < r, \tag{2.3.7}$$

$$u_{i+1}^n := \operatorname{proj}_{C(t_{i+1}^n)}\Big(u_i^n - \mu_n z_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds\Big), \tag{2.3.8}$$

et

$$1 + \|u_i^n\| < l. \tag{2.3.9}$$

Étape 1. Construction des suites finies.

Nous procédons par récurrence. On pose $u_0^n = x_0$ et on choisit $z_0^n \in F(\kappa_n(t_1^n), u_0^n)$. Par l'hypothèse (ii) et la définition de l on a

$$\|z_0^n\| \leq \beta(\kappa_n(t_1^n))(1 + \|x_0\|) \leq l\beta(\kappa_n(t_1^n)),$$

et alors

$$\mu_n\|z_0^n\| \leq l \int_{t_0^n}^{t_1^n} \beta(\kappa_n(t_1^n))ds \leq l \int_{t_0^n}^{t_1^n} (\beta(s) + 1)ds = l\beta_0^n.$$

Aussi

$$\|f(s, u_0^n)\| \leq \alpha(s)(1 + \|x_0\|) \leq l\alpha(s),$$

donc,

$$\left\| \int_{t_0^n}^{t_1^n} f(s, u_0^n)ds \right\| \leq l\alpha_0^n.$$

Il résulte de (2.3.1), (2.3.3) et le fait que $x_0 \in C(T_0)$ que

$$\begin{aligned}
d_{C(t_1^n)}\Big(u_0^n - \mu_n z_0^n - \int_{t_0^n}^{t_1^n} f(s, u_0^n)ds\Big) &\leq \left\|u_0^n - \mu_n z_0^n - \int_{t_0^n}^{t_1^n} f(s, u_0^n)ds - u_0^n\right\| + \big(v(t_1^n) - v(t_0^n)\big) \\
&\leq \mu_n\|z_0^n\| + \left\| \int_{t_0^n}^{t_1^n} f(s, u_0^n)ds \right\| + \epsilon_0^n \\
&\leq (l + 1)\big(\alpha_0^n + \beta_0^n + \epsilon_0^n\big) \\
&\leq (l + 1)\epsilon_n < r.
\end{aligned}$$

Puisque $C(t_1^n)$ est r-prox-régulier, on pose

$$u_1^n := \mathrm{proj}_{C(t_1^n)}\Big(u_0^n - \mu_n z_0^n - \int_{t_0^n}^{t_1^n} f(s, u_0^n)ds\Big),$$

qui est bien définie d'après la Proposition 2.1. Ainsi, toutes les conditions de récurrence sont satisfaites à l'étape $i = 0$.

Maintenant, supposons que, pour $i \in \{1, \ldots, 2^n - 1\}$, $\{u_j^n : j = 0, \ldots, i\}$ et $\{z_j^n : j = 0, \ldots, i-1\}$ sont bien définies avec les propriétés (2.3.6) et (2.3.8). Nous allons définir z_i^n et u_{i+1}^n comme suit : on choisit $z_i^n \in F(\kappa_n(t_{i+1}^n), u_i^n)$. D'après (2.3.8), (2.3.1) et (2.3.3), pour tout $q \in \{0, \ldots, i-1\}$,

$$\begin{aligned}
\left\|u_{q+1}^n - u_q^n + \mu_n z_q^n + \int_{t_q^n}^{t_{q+1}^n} f(s, u_q^n)ds\right\| &= d_{C(t_{q+1}^n)}\Big(u_q^n - \mu_n z_q^n - \int_{t_q^n}^{t_{q+1}^n} f(s, u_q^n)ds\Big) - d_{C(t_q^n)}(u_q^n) \\
&\leq \epsilon_q^n + \mu_n\|z_q^n\| + \left\| \int_{t_q^n}^{t_{q+1}^n} f(s, u_q^n)ds \right\|,
\end{aligned}$$

et alors

$$\|u_{q+1}^n\| \leq \|u_q^n\| + \epsilon_q^n + 2\mu_n\|z_q^n\| + 2\left\| \int_{t_q^n}^{t_{q+1}^n} f(s, u_q^n)ds \right\|.$$

On déduit que

$$\|u_{q+1}^n\| \leq \|u_0^n\| + \sum_{p=0}^{q} \left(\epsilon_p^n + 2\mu_n\|z_p^n\| + 2\left\| \int_{t_p^n}^{t_{p+1}^n} f(s, u_p^n)ds \right\| \right). \tag{2.3.10}$$

D'autre part, par (2.3.6), on a pour tout $p \in \{0, \ldots, q\}$,

$$\|z_p^n\| \leq \beta(\kappa_n(t_{p+1}^n))(1 + \|u_p^n\|) \leq \beta\left(\kappa_n(t_{p+1}^n)\right)\left(1 + \max_{0\leq j\leq i}\|u_j^n\|\right), \tag{2.3.11}$$

et

$$\|f(s, u_p^n)\| \leq \alpha(s)(1 + \|u_p^n\|) \leq \alpha(s)\left(1 + \max_{0\leq j\leq i}\|u_j^n\|\right). \tag{2.3.12}$$

Il s'ensuit de (2.3.10), (2.3.11) et (2.3.12) que pour tout $q \in \{0, \ldots, i-1\}$,

$$\|u_{q+1}^n\| \leq \|u_0^n\| + \sum_{p=0}^{q} \epsilon_p^n + 2\left(1 + \max_{0\leq j\leq i}\|u_j^n\|\right)\left(\sum_{p=0}^{q} \mu_n\beta\left(\kappa_n(t_{p+1}^n)\right) + \sum_{p=0}^{q}\int_{t_p^n}^{t_{p+1}^n} \alpha(s)ds\right).$$

Puisque

$$\sum_{p=0}^{q} \mu_n\beta\left(\kappa(t_{p+1}^n)\right) = \sum_{p=0}^{q}\int_{t_p^n}^{t_{p+1}^n} \beta\left(\kappa_n(t_{p+1}^n)\right)ds \leq \int_{T_0}^{t_{q+1}^n}(\beta(s)+1)ds,$$

on obtient

$$\|u_{q+1}^n\| \leq \|u_0^n\| + \int_{T_0}^{T} \dot{v}(s)ds + 2\left(1 + \max_{0\leq j\leq i}\|u_j^n\|\right)\left(\int_{T_0}^{T}(\beta(s)+1)ds + \int_{T_0}^{T}\alpha(s)ds\right).$$

Ceci étant vrai pour tout $q \in \{0, \ldots, i-1\}$, il en résulte, grâce à (2.3.2), que

$$\max_{0\leq j\leq i}\|u_j^n\| \leq \|u_0^n\| + \int_{T_0}^{T}\dot{v}(s)ds + \frac{1}{2}\left(1 + \max_{0\leq j\leq i}\|u_j^n\|\right).$$

Par conséquent,

$$\max_{0\leq j\leq i}\|u_j^n\| \leq 2\left(\|x_0\| + \frac{1}{2} + \int_{T_0}^{T}\dot{v}(s)ds\right) = l - 2, \tag{2.3.13}$$

la seconde égalité est due grâce à la définition de l. On obtient de (2.3.3), (2.3.4) et (2.3.13)

$$\mu_n\|z_i^n\| \leq \mu_n\beta\left(\kappa_n(t_{i+1}^n)\right)(1 + \|u_i^n\|) \leq l\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}(\beta(s)+1)ds \leq l\beta_i^n,$$

et, par (2.3.3), (2.3.13) et (a_2)

$$\left\|\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds\right\| \leq (1 + \|u_i^n\|)\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\alpha(s)ds \leq l\alpha_i^n.$$

Donc, comme

$$d_{C(t_{i+1}^n)}\left(u_i^n - \mu_n z_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s,u_i^n)ds\right) \leq \epsilon_i^n + \mu_n\|z_i^n\| + \left\|\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s,u_i^n)ds\right\|,$$

on obtient

$$d_{C(t_{i+1}^n)}\left(u_i^n - \mu_n z_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s,u_i^n)ds\right) \leq (l+1)\big(\epsilon_i^n + \beta_i^n + \alpha_i^n\big) \leq (l+1)\epsilon_n < r. \quad (2.3.14)$$

Puisque $C(t_{i+1}^n)$ est r-prox-régulier, on obtient

$$u_{i+1}^n := \mathrm{proj}_{C(t_{i+1}^n)}\left(u_i^n - \mu_n z_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s,u_i^n)ds\right),$$

qui est bien définie, donc toutes les conditions de la récurrence sont satisfaites à l'étape i. La construction des suites finies $\{u_i^n : i = 0,\dots,2^n\}$ et $\{z_i^n, i = 0,\dots,2^n-1\}$ est alors complète.

Notons que par (2.3.8) et (2.3.14), pour tout $i \in \{0,\dots,2^n-1\}$,

$$\left\|u_{i+1}^n - u_i^n + \mu_n z_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s,u_i^n)ds\right\| \leq (l+1)\big(\epsilon_i^n + \beta_i^n + \alpha_i^n\big) \quad (2.3.15)$$

et, de (2.3.6), (2.3.13), et le fait que K est convexe avec $0 \in K$,

$$z_i^n \in l\beta(\kappa_n(t_{i+1}^n))K. \quad (2.3.16)$$

En effet, par (2.3.6), on a

$$z_i^n \in \beta\left(\kappa_n(t_{i+1}^n)\right)(1+\|u_i^n\|)\,K.$$

Comme $\big(1+\|u_i^n\|\big) < l$, alors

$$\frac{l}{\big(1+\|u_i^n\|\big)} z_i^n \in l\beta(\kappa_n(t_{i+1}^n))K,$$

et $0 \in K$, on obtient

$$\frac{(1+\|u_i^n\|)}{l}\left(\frac{l}{\big(1+\|u_i^n\|\big)} z_i^n\right) + \left(1 - \frac{(1+\|u_i^n\|)}{l}\right)0 \in l\beta(\kappa_n(t_{i+1}^n))K,$$

c'est à dire, $z_i^n \in l\beta(\kappa_n(t_{i+1}^n))K$, donc $\|z_i^n\| \leq l\beta(\kappa_n(t_{i+1}^n))$ puisque, par l'hypothèse (ii), $K \subset \overline{\mathrm{B}}_H$.

Étape 2. Définition de la suite $(u_n(\cdot))$.

Nous définissons deux applications $u_n(\cdot)$, $z_n(\cdot) : I \to H$ comme suit.

On pose $z_n(T_0) := z_0^n$ et $u_n(T_0) := x_0$. Pour $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n]$ $(0 \leq i \leq 2^n - 1)$, on pose

$$z_n(t) := z_i^n$$

et

$$u_n(t) := u_i^n + \frac{a(t) - a(t_i^n)}{\epsilon_i^n + \beta_i^n + \alpha_i^n} \left(u_{i+1}^n - u_i^n + \mu_n z_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n) ds \right) - (t - t_i^n) z_i^n - \int_{t_i^n}^{t} f(s, u_i^n) ds, \tag{2.3.17}$$

avec

$$a(t) := v(t) + \int_{T_0}^{t} (\beta(s) + 1) ds + \int_{T_0}^{t} \alpha(s) ds.$$

Observons que $u_n(\cdot)$ est absolument continue sur chaque intervalle $]t_i^n, t_{i+1}^n]$ et donc elle est absolument continue sur tout l'intervalle I. De plus, (2.3.17) donne, pour tout $i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$,

$$\dot{u}_n(t) = \frac{\dot{a}(t)}{\epsilon_i^n + \beta_i^n + \alpha_i^n} \left(u_{i+1}^n - u_i^n + \mu_n z_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n) ds \right) - z_i^n - f(t, u_i^n), \text{ p.p. sur}]t_i^n, t_{i+1}^n]. \tag{2.3.18}$$

D'un autre côté, en utilisant (2.3.4), (2.3.5), (2.3.15) et (2.3.16), et le fait que pour presque tout $t \in I$, $\dot{a}(t) = \dot{v}(t) + \beta(t) + 1 + \alpha(t)$ avec $\dot{v}(t) \geq 0$, on obtient pour presque tout $t \in]t_1^n, t_{i+1}^n]$,

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_n(t)\| &= \left\| \frac{\dot{a}(t)}{\epsilon_i^n + \beta_i^n + \alpha_i^n} \left(u_{i+1}^n - u_i^n + \mu_n z_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n) ds \right) - z_i^n - f(t, u_i^n) \right\| \\
&\leq (l+1)\dot{a}(t) + l\beta(\kappa_n(t_{i+1}^n)) + l\alpha(t) \\
&\leq (l+1)\dot{a}(t) + l\big(\beta(t) + 1 + \alpha(t)\big) \\
&\leq (l+1)\dot{a}(t) + l\dot{a}(t) \\
&= (2l+1)\dot{a}(t),
\end{aligned}$$

et donc,

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq (2l+1)\dot{a}(t), \text{ p.p. } t \in I. \tag{2.3.19}$$

De plus, par (2.3.15), (2.3.18) et la définition de $z_n(\cdot)$, pour tout $i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ et pour presque tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n]$

$$\big\|\dot{u}_n(t) + z_n(t) + f(t, u_i^n)\big\| \leq (l+1)\dot{a}(t). \tag{2.3.20}$$

Maintenant, soient $\theta_n(\cdot), \rho_n(\cdot) : I \to I$ deux fonctions définies par

$$\begin{cases} \theta_n(T_0) := t_1^n,\ \rho_n(T_0) := T_0; \\ \theta_n(t) := t_{i+1}^n,\ \rho_n(t) := t_i^n \text{ si } t \in]t_i^n, t_{i+1}^n](0 \leq i \leq 2^n - 1). \end{cases} \tag{2.3.21}$$

De (2.3.20), on a

$$\left\| \dot{u}_n(t) + z_n(t) + f\Big(t, u_n(\rho_n(t))\Big) \right\| \leq (l+1)\dot{a}(t) \text{ p.p. sur } I, \tag{2.3.22}$$

et par (2.3.3) et (2.3.17), on a pour tout $i \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ et pour presque tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n]$

$$u_n(\rho_n(t)) = u_i^n \text{ et } u_n(\theta_n(t)) = u_{i+1}^n.$$

Par (2.3.6), (2.3.8), la définition de $u_n(\cdot)$ et de $z_n(\cdot)$, et les propriétés du cône normal proximal, on peut écrire, pour presque tout $t \in I$,

$$z_n(t) \in F\Big(\kappa_n\big(\theta_n(t)\big), u_n(\rho_n(t))\Big), \tag{2.3.23}$$

et

$$\dot{u}_n(t) + z_n(t) + f\Big(t, u_n(\rho_n(t))\Big) \in -N\Big(C(\theta_n(t)), u_n(\theta_n(t))\Big). \tag{2.3.24}$$

En effet, de (2.3.8) et (2.3.18), en posant

$$x = u_n(\rho_n(t)) - \mu_n z_n(t) - \int_{\rho_n(t)}^{\theta_n(t)} f\Big(s, u_n(\rho_n(t))\Big) ds$$

on obtient

$$u_n(\theta_n(t)) = \text{proj}_{C(\theta_n(t))}(x),$$

et

$$\dot{u}_n(t) + z_n(t) + f\Big(t, u_n(\rho_n(t))\Big) = r(t)\Big(u_n(\theta_n(t)) - x\Big),$$

où $r(\cdot) : I \to \mathbb{R}_+$ est définie par

$$r(t) = \frac{\dot{a}(t)}{\epsilon_i^n + \beta_i^n + \alpha_i^n}, \quad \forall t \in]t_i^n, t_{i+1}^n](0 \leq i \leq 2^n - 1).$$

D'où, l'inclusion (2.3.24).

Notons également que, grâce à (2.3.4), (2.3.5), (2.3.16), et le fait que K est convexe et $0 \in K$,

$$z_n(t) \in l(\beta(t) + 1)K,\ \forall\, t \in I, \tag{2.3.25}$$

et donc

$$\|z_n(t)\| \leq l(\beta(t)+1),\ \forall\, t \in I. \tag{2.3.26}$$

De plus, par (a_2) et (2.3.13) on a

$$\left\| f\Big(t, u_n(\rho_n(t))\Big) \right\| \leq l\alpha(t) \leq l\dot{a}(t),\ \forall\, t \in I, \tag{2.3.27}$$

et donc, par (2.3.22), pour presque tout $t \in I$.

$$\|\dot{u}_n(t) + z_n(t)\| \leq (2l+1)\dot{a}(t). \tag{2.3.28}$$

Étape 3. Convergence de de la suite $(u_n(\cdot))$.

Dans la suite, nous allons prouver que $(u_n(\cdot))$ admet une sous suite qui converge uniformément dans $\mathcal{C}(I,H)$ vers une application $u(\cdot)$. On définit $Z_n(\cdot) : I \to H$ par

$$Z_n(t) := \int_{T_0}^{t} z_n(s)ds,$$

et on considère $t \mapsto u_n(t) + Z_n(t)$. Tout d'abord, nous allons prouver que $(Z_n(\cdot))$ admet une sous suite uniformément convergente dans $\mathcal{C}(I,H)$ et après, en remplaçant $(Z_n(\cdot))$ par cette sous suite, on montrera que $u_n(\cdot) + Z_n(\cdot)$ est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}(I,H), \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$.

En vertu de Théorème 1.3, (2.3.25) et le fait que K est un ensemble convexe fermé, pour tout $t \in I$

$$Z_n(t) \in l\left(\int_{T_0}^{t} (\beta(s)+1)ds\right) K, \tag{2.3.29}$$

et donc, comme $0 \in K$, pour tout $t \in I$, l'ensemble $\{Z_n(t) : n \geq n_0\}$ est contenue dans l'ensemble fortement compact $l\Big(\int_{T_0}^{T} \big(\beta(s)+1\big)ds\Big)K$, puisque

$$\int_{T_0}^{t} (\beta(s)+1)ds \leq \int_{T_0}^{T} (\beta(s)+1)ds.$$

En effet, de (2.3.29) pour tout $t \in I$ il existe $x_t \in K$ tel que

$$Z_n(t) = l\left(\int_{T_0}^{t} (\beta(s)+1)ds\right) x_t = l\int_{T_0}^{T} (\beta(s)+1)ds \frac{\int_{T_0}^{t} (\beta(s)+1)ds}{\int_{T_0}^{T} (\beta(s)+1)ds} x_t,$$

$(x_{T_0} = 0 \in K)$ et puisque $\frac{\int_{T_0}^{t} (\beta(s)+1)ds}{\int_{T_0}^{T} (\beta(s)+1)ds} \in [0,1]$ et $0 \in K$, de la convexité de K on obtient

$$\frac{\int_{T_0}^{t} (\beta(s)+1)ds}{\int_{T_0}^{T} (\beta(s)+1)ds} x_t \in K,$$

d'où

$$Z_n(t) \in l\left(\int_{T_0}^{T} (\beta(s)+1)ds\right) K.$$

Ceci, avec (2.3.26), implique, via le théorème d'Arzelà-Ascoli, que $(Z_n(\cdot))$ admet une sous suite (pour laquelle on garde la même notation) qui converge uniformément vers une application $Z(\cdot) \in \mathcal{C}(I, H)$.

Maintenant, on considère la suite $(w_n(\cdot))$ définie par

$$w_n(t) := u_n(t) + Z_n(t),$$

où $(Z_n(\cdot))$ est la sous suite qui converge uniformément vers $Z(\cdot)$ dans $\mathcal{C}(I, H)$. Fixons $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m > n \geq n_0$. Notons que, par (2.3.17), on a, pour tout $t \in I$ et pour tout $n \geq n_0$,

$$u_n(\theta_n(t)) \in C(\theta_n(t)). \tag{2.3.30}$$

Ainsi, par (2.3.1), (2.3.19), et (2.3.3), pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}
d_{C(\theta_n(t))}(u_m(t)) &= \left|d_{C(\theta_n(t))}(u_m(t)) - d_{C(\theta_m(t))}(u_m(\theta_m(t)))\right| \\
&\leq \left|d_{C(\theta_n(t))}(u_m(t)) - d_{C(\theta_m(t))}(u_m(t))\right| + \left|d_{C(\theta_m(t))}(u_m(t)) - d_{C(\theta_m(t))}(u_m(\theta_m(t)))\right| \\
&\leq |v(\theta_n(t)) - v(\theta_m(t))| + \|u_m(\theta_m(t)) - u_m(t)\| \\
&= \left|\int_{\theta_m(t)}^{\theta_n(t)} \dot{v}(s)ds\right| + \|u_m(\theta_m(t)) - u_m(t)\|.
\end{aligned}$$

Pour tout $t \in I$, il existe $i \in \{1, \cdots, 2^n\}$ et $j \in \{1, \cdots, 2^m\}$ tels que $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n]$ et $t \in]t_j^m, t_{j+1}^m]$, i.e.,

$$|t - t_{i+1}^n| \leq \mu_n \text{ et } |t - t_{j+1}^m| \leq \mu_m.$$

donc $|t_{i+1}^n - t_{j+1}^m| \leq \mu_n + \mu_m$. Par conséquent,

$$\left|\int_{\theta_m(t)}^{\theta_n(t)} \dot{v}(s)ds\right| = \left|\int_{t_{j+1}^m}^{t_{i+1}^n} \dot{v}(s)ds\right| \leq \left|\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \dot{v}(s)ds\right| + \left|\int_{t_j^m}^{t_{j+1}^m} \dot{v}(s)ds\right| \leq \epsilon_n + \epsilon_m.$$

D'autre part, on a par (2.3.19)

$$\|u_m(\theta_m(t)) - u_m(t)\| \leq \int_t^{\theta_m(t)} \|\dot{u}_m(s)\|ds \leq (2l+1)\int_t^{\theta_m(t)} (\dot{v}(s) + \beta(s) + 1 + \alpha(s))ds.$$

Alors

$$d_{C(\theta_n(t))}(u_m(t)) \leq \epsilon_n + \epsilon_m + (2l+1)\epsilon_m \leq \epsilon_n + (2l+2)\epsilon_m.$$

Donc, pour m, n assez grands $d_{C(\theta_n(t))}(u_m(t)) < r$, pour tout $t \in I$ puisque la suite (ε_n) converge vers 0.

Posons

$$\delta(t) := (l+1)\dot{a}(t) = (l+1)\big(\dot{v}(t) + \beta(t) + 1 + \alpha(t)\big) \tag{2.3.31}$$

et

$$\gamma(t) = (2l+1)\dot{a}(t) = (2l+1)\big(\dot{v}(t) + \beta(t) + 1 + \alpha(t)\big). \tag{2.3.32}$$

De (2.3.22), (2.3.24) et (2.2.2), on a

$$\dot{u}_n(t) + z_n(t) + f\Big(t, u_n(\rho_n(t))\Big) \in -\delta(t)\partial^P d_{C(\theta_n(t))}\big(u_n(\theta_n(t))\big), \text{ p.p. sur } I. \tag{2.3.33}$$

En appliquant le Lemme 2.1, il s'ensuit que, pour presque tout $t \in I$ et pour n, m assez grands

$$\Big\langle \dot{u}(t)+z_n(t)+f\Big(t, u_n(\rho_n(t))\Big), u_n(\theta_n(t))-u_m(t)\Big\rangle \leq \frac{2\delta(t)}{r}\|u_n(\theta_n(t))-u_m(t)\|^2+\delta(t)d_{C(\theta_n(t))}\big(u_m(t)\big)$$
$$\leq \frac{2\delta(t)}{r}\big(\|u_n(t) - u_m(t)\| + \|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\|\big)^2 + \delta(t)(\epsilon_n + (2l+2)\epsilon_m),$$

et par (2.3.19),

$$\Big\langle \dot{u}_n(t) + z_n(t) + f\Big(t, u_n(\rho_n(t))\Big), u_n(\theta_n(t)) - u_m(t)\Big\rangle \leq$$
$$\frac{2\delta(t)}{r}\big(\|u_n(t) - u_m(t)\| + (2l+1)\epsilon_n\big)^2 + 2\delta(t)(l+1)(\epsilon_n + \epsilon_m). \tag{2.3.34}$$

Maintenant, on pose $\varrho_n := \max\{\epsilon_n, \|Z_n(\cdot) - Z(\cdot)\|_{\mathcal{C}}\}$. Par (2.3.3) et (2.3.26), pour presque tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\|Z_n(\theta_n(t)) - Z_m(t)\| &\leq \|Z_n(\theta_n(t)) - Z_n(t)\| + \|Z_n(t) - Z(t)\| + \|Z(t) - Z_m(t)\| \\ &\leq l\epsilon_n + \varrho_n + \varrho_m \leq (l+1)(\varrho_n + \varrho_m).\end{aligned} \tag{2.3.35}$$

En utilisant (2.3.20), (2.3.31), (2.3.34) and (2.3.35), on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \dot{w}_n(t) + f\Big(t, u_n(\rho_n(t))\Big), w_n(\theta_n(t)) - w_m(t)\Big\rangle \\
= &\Big\langle \dot{w}_n(t) + f\Big(t, u_n(\rho_n(t))\Big), u_n(\theta_n(t)) - u_m(t)\Big\rangle + \Big\langle \dot{w}_n(t) + f\Big(t, u_n(\rho_n(t))\Big), Z_n(\theta_n(t)) - Z_m(t)\Big\rangle \\
\leq &\frac{2\delta(t)}{r}\Big(\|w_n(t) - w_m(t)\| + \|Z_n(t) - Z_m(t)\| + (2l+1)\epsilon_n\Big)^2 + 2\delta(t)(l+1)(\epsilon_n + \epsilon_m) \\
+ &\delta(t)\|Z_n(\theta_n(t)) - Z_m(t)\| \\
\leq &\frac{2\delta(t)}{r}\Big(\|w_n(t) - w_m(t)\| + (\varrho_n + \varrho_m) + (2l+1)\varrho_n\Big)^2 + 3\delta(t)(l+1)(\varrho_n + \varrho_m).
\end{aligned}$$

Notons que, par (2.3.28) et (2.3.3), pour presque tout $t \in I$,

$$\|w_n(\theta_n(t)) - w_n(t)\| \leq (2l+1)\epsilon_n \leq (2l+1)\varrho_n.$$

Ces deux dernières inégalités, ainsi que (2.3.20), (2.3.31) et (2.3.32), donnent

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \dot{w}_n(t) + f\Big(t, u_n(\rho_n(t))\Big), w_n(t) - w_m(t)\Big\rangle \\
&= \Big\langle \dot{w}_n(t) + f\Big(t, u_n(\rho_n(t))\Big), w_n(t) - w_n(\theta_n(t))\Big\rangle + \Big\langle \dot{w}_n(t) + f\Big(t, u_n(\rho_n(t))\Big), w_n(\theta_n(t)) - w_m(t)\Big\rangle \\
&\leq \delta(t)(2l+1)\varrho_n + 3\delta(t)(l+1)(\varrho_n + \varrho_m) + \frac{2\delta(t)}{r}\big(\|w_n(t) - w_m(t)\| + (\varrho_n + \varrho_m) + (2l+1)\varrho_n\big)^2. \\
&\leq 4\delta(t)(2l+1)(\varrho_n + \varrho_m) + \frac{2\delta(t)}{r}\big(\|w_n(t) - w_m(t)\| + (2l+2)(\varrho_n + \varrho_m)\big)^2.
\end{aligned}$$

De la même manière, nous avons, en interchangeant m et n,

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \dot{w}_m(t) + f\Big(t, u_m(\rho_m(t))\Big), w_m(t) - w_n(t)\Big\rangle \leq \\
&\qquad 4\delta(t)(2l+1)(\varrho_n + \varrho_m) + \frac{2\delta(t)}{r}\big(\|w_n(t) - w_m(t)\| + (2l+2)(\varrho_n + \varrho_m)\big)^2.
\end{aligned}$$

Due à (2.3.28), la suite $(w_n(\cdot))$ est uniformément bornée dans $\mathcal{C}(I, H)$ ($\|w_n(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \leq \|x_0\| + \int_{T_0}^{T} \gamma(s)ds$), et puisque la suite (ϱ_n) converge vers 0, elle est bornée dans $\mathbb{R}$ alors il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $n \geq n_0$ on a $\varrho_n \leq c$. Donc, en ajoutant les deux dernières inégalités, on trouve

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \dot{w}_n(t) + f\Big(t, u_n(\rho_n(t))\Big) - \dot{w}_m(t) - f\Big(t, u_m(\rho_m(t))\Big), w_n(t) - w_m(t)\Big\rangle \\
&\leq 8\delta(t)(2l+2)(\varrho_n + \varrho_m) + \frac{4\delta(t)}{r}\big(\|w_n(t) - w_m(t)\| + (2l+2)(\varrho_n + \varrho_m)\big)^2. \\
&\leq \Big(8\delta(t)(2l+2) + \frac{8\delta(t)}{r}(2l+2)\|w_n(t) - w_m(t)\| + (2l+2)^2\frac{4\delta(t)}{r}(\varrho_n + \varrho_m)\Big)(\varrho_n + \varrho_m) \\
&+ \frac{4\delta(t)}{r}\|w_n(t) - w_m(t)\|^2 \\
&\leq \Big(8\delta(t)(2l+2) + \frac{16\delta(t)}{r}(2l+2)\Big(\|x_0\| + \int_{T_0}^{T} \gamma(s)ds\Big) + (2l+2)^2\frac{8c\delta(t)}{r}\Big)(\varrho_n + \varrho_m) \\
&+ \frac{4\delta(t)}{r}\|w_n(t) - w_m(t)\|^2 \\
&= \frac{16\delta(t)}{r}(l+1)\Big(r + 2\|x_0\| + 2\int_{T_0}^{T} \gamma(s)ds + 2c(l+1)\Big)(\varrho_n + \varrho_m) + \frac{4\delta(t)}{r}\|w_n(t) - w_m(t)\|^2.
\end{aligned}$$

On en déduit que, pour le nombre positif

$$A = \frac{32}{r}(l+1)\Big(r + 2\|x_0\| + 2\int_{T_0}^{T} \gamma(s)ds + 2c(l+1)\Big),$$

on a

$$\Big\langle \dot{w}_n(t) + f\Big(t, u_n(\rho_n(t))\Big) - \dot{w}_m(t) - f\Big(t, u_m(\rho_m(t))\Big), w_n(t) - w_m(t)\Big\rangle \leq \frac{A}{2}\delta(t)(\varrho_n + \varrho_m) + \frac{4\delta(t)}{r}\|w_n(t) - w_m(t)\|^2,$$

qui implique que

$$\Big\langle \dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t), w_n(t) - w_m(t)\Big\rangle \leq \frac{A}{2}\delta(t)(\varrho_n + \varrho_m) + \frac{4\delta(t)}{r}\|w_n(t) - w_m(t)\|^2 + \Big\langle f\Big(t, u_n(\rho_n(t))\Big) - f\Big(t, u_m(\rho_m(t))\Big), w_m(t) - w_n(t)\Big\rangle,$$

Par (2.3.19) on a $\|u_n(t)\| \leq \|x_0\| + (2l+1)\int_{T_0}^{T} \dot{a}(t)dt$ pour tout $n \geq n_0$. Donc, pour un certain $\eta > \|x_0\| + (2l+1)\int_{T_0}^{T} \dot{a}(t)dt$, pour tout $t \in I$ et pour tout $n \geq n_0$,

$$u_n(t) \in \mathrm{B}_H(0, \eta). \tag{2.3.36}$$

Donc, par hypothèse, il existe une fonction positive $k_\eta(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I, \mathbb{R})$ telle que $f(t, \cdot)$ est $k_\eta(t)$-lipschitzienne sur $\mathrm{B}_H(0, \eta)$. D'où

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t), w_n(t) - w_m(t)\Big\rangle \\
\leq\ & \frac{A}{2}\delta(t)(\varrho_n + \varrho_m) + \frac{4\delta(t)}{r}\|w_n(t) - w_m(t)\|^2 + \Big\langle f\Big(t, u_m(\rho_m(t))\Big) - f\Big(t, u_n(\rho_n(t))\Big), w_n(t) - w_m(t)\Big\rangle \\
\leq\ & \frac{A}{2}\delta(t)(\varrho_n + \varrho_m) + \frac{4\delta(t)}{r}\|w_n(t) - w_m(t)\|^2 + k_\eta(t)\|u_n(\rho_n(t)) - u_m(\rho_m(t))\|.\|w_n(t) - w_m(t)\| \\
\leq\ & \Big(k_\eta(t) + \frac{4\delta(t)}{r}\Big)\|w_n(t) - w_m(t)\|^2 + \frac{A}{2}\delta(t)(\varrho_n + \varrho_m) \\
+\ & k_\eta(t)\Bigg(\|u_n(t) - u_n(\rho_n(t))\| + \|u_m(t) - u_m(\rho_m(t))\| + (\varrho_n + \varrho_m)\Bigg)\|w_n(t) - w_m(t)\|.
\end{aligned}$$

Par (2.3.19), pour chaque $n \geq n_0$ et pour tout t, on a

$$\|u_n(t) - u_n(\rho_n(t))\| \leq \int_{\rho_n(t)}^{t} \gamma(s)ds.$$

Comme ci-dessus, pour le nombre positif $B = 4\Big(\|x_0\| + \int_{T_0}^{T}\gamma(s)ds\Big)$ dépendent de l mais indépendant de n, m et t,

$$\Big\langle \dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t), w_n(t) - w_m(t)\Big\rangle \leq \Big(k_\eta(t) + \frac{4\delta(t)}{r}\Big)\|w_n(t) - w_m(t)\|^2 + \Big(\frac{B}{2}k_\eta(t) + \frac{A}{2}\delta(t)\Big)\Big(\int_{\rho_n(t)}^{t}\gamma(s)ds + \int_{\rho_m(t)}^{t}\gamma(s)ds + (\varrho_n + \varrho_m)\Big)$$

ou, de manière équivalente,

$$\frac{d}{dt}\left(\|w_n(t)-w_m(t)\|^2\right)\leq 2\left(k_\eta(t)+\frac{4\delta(t)}{r}\right)\|w_n(t)-w_m(t)\|^2+$$
$$(Bk_\eta(t)+A\delta(t))\left(\int_{\rho_n(t)}^t\gamma(s)ds+\int_{\rho_m(t)}^t\gamma(s)ds+(\varrho_n+\varrho_m)\right).$$

Posons

$$H_{n,m}(t)=(Bk_\eta(t)+A\delta(t))\left(\int_{\rho_n(t)}^t\gamma(s)ds+\int_{\rho_m(t)}^t\gamma(s)ds\right)$$

et

$$G_{n,m}(t):=H_{n,m}(t)+\big(Bk_\eta(t)+A\delta(t)\big)(\varrho_n+\rho_m).$$

Puisque $\gamma(\cdot)\in\mathrm{L}^1(I,\mathbb{R})$, $\rho_n(t)\to t$ pour tout $t\in I$, et $\varrho_n\to 0$, on obtient

$$\lim_{n,m\to\infty}H_{n,m}(t)=0 \text{ p.p. } t\in I,$$

et

$$\lim_{n,m\to\infty}G_{n,m}(t)=0 \text{ p.p. } t\in I.$$

Comme, de plus, $k_\eta(\cdot)\in\mathrm{L}^1(I,\mathbb{R})$ et

$$|H_{n,m}(t)|\leq 2\big(Bk_\eta(t)+A\delta(t)\big)\int_{T_0}^T\gamma(s)ds,$$

pour tout $t\in I$, il résulte du théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_{T_0}^T G_{n,m}(s)ds=\lim_{n,m\to\infty}\int_{T_0}^T H_{n,m}(s)ds+\left(B\int_{T_0}^T k_\eta(s)ds+A\int_{T_0}^T\delta(s)ds\right)\lim_{n,m\to\infty}(\varrho_n+\varrho_m)=0.$$

Ceci, avec le fait que $\|w_n(T_0)-w_m(T_0)\|=0$, implique, via le Lemme 2.2,

$$\lim_{n,m\to\infty}\|w_n(\cdot)-w_m(\cdot)\|_{\mathcal{C}}=0.$$

Donc, $(w_n(\cdot))$ est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}(I,H),\|\cdot\|_{\mathcal{C}})$. Alors, il existe une application $w(\cdot)$ telle que la suite $(u_n(\cdot))$ converge uniformément dans $(\mathcal{C}(I,H),\|\cdot\|_{\mathcal{C}})$ vers $u(\cdot):=w(\cdot)-Z(\cdot)$. Par ailleurs, grâce à (2.3.19), pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a

$$\|\dot{u}_n(t)\|\leq\gamma(t)\quad\text{pour tout }\ t\in I,$$

et puisque $\gamma(\cdot)$ est une fonction strictement positive, on trouve

$$\frac{\|\dot{u}_n(t)\|}{\gamma(t)}\leq 1\quad\text{pour tout }\ t\in I,$$

En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$, $h_n(t) = \dfrac{\dot{u}_n(t)}{\gamma(t)}$, on a $(h_n(\cdot)) \subset \overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{L}^\infty}$. Mais par le théorème d'Alaoglu, $\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{L}^\infty}$ est faiblement* compacte, donc, on peut extraire de $(h_n(\cdot))$ une sous suite, qu'on lui garde la même notation, qui converge faiblement* dans $\mathrm{L}^\infty(I, H)$ vers une certaine application $h(\cdot) \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{L}^\infty}$.

D'où, pour tout $y(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I, H)$, on obtient

$$\int_{T_0}^{T} \langle h_n(s), y(s)\rangle ds \to \int_{T_0}^{T} \langle h(s), y(s)\rangle ds.$$

Pour tout $y(\cdot) \in \mathrm{L}^\infty(I, H)$, comme $\gamma(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I, \mathbb{R})$ l'application $\gamma(\cdot)y(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I, H)$, donc

$$\int_{T_0}^{T} \langle h_n(s), \gamma(s)y(s)\rangle ds \to \int_{T_0}^{T} \langle h(s), \gamma(s)y(s)\rangle ds.$$

D'où

$$\int_{T_0}^{T} \langle \dot{u}_n(s), y(s)\rangle ds \to \int_{T_0}^{T} \langle \gamma(s)h(s), y(s)\rangle ds.$$

En posant $g(\cdot) = \gamma(\cdot)h(\cdot)$, la suite $(\dot{u}_n(\cdot))$ converge faiblement dans $\mathrm{L}^1(I, H)$ vers $g(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I, H)$. De plus, pour tout $t \in I$

$$\|g(t)\| = \gamma(t)\|h(t)\| \leq \gamma(t).$$

Puisque H est séparable, considérons (e_j) une famille d'éléments de H, partout dense dans H. Pour tout j et tout $t \in I$ on a $1\!\!\mathrm{I}_{[T_0,t]}e_j \in \mathrm{L}^\infty(I, H)$. Alors

$$\int_{T_0}^{T} \langle \dot{u}_n(s), 1\!\!\mathrm{I}_{[T_0,t]}(s)e_j\rangle ds \to \int_{T_0}^{T} \langle g(s), 1\!\!\mathrm{I}_{[T_0,t]}(s)e_j\rangle ds.$$

D'où

$$\int_{T_0}^{t} \langle \dot{u}_n(s), e_j\rangle ds \to \int_{T_0}^{t} \langle g(s), e_j\rangle ds.$$

Et par les propriétés de l'intégrale de Bochner, on trouve

$$\left\langle \int_{T_0}^{t} \dot{u}_n(s)ds, e_j \right\rangle \to \left\langle \int_{T_0}^{t} g(s)ds, e_j \right\rangle.$$

Ainsi, pour tout $t \in I$,

$$\int_{T_0}^{t} \dot{u}_n(s)ds \rightharpoonup \int_{T_0}^{t} g(s)ds \ \text{ dans } H.$$

Puisque, pour tout $t \in I$, $(u_n(t))$ converge fortement dans H vers $u(t)$, il suit que $u(t) = x_0 + \int_{T_0}^{t} g(s)ds$ et donc $u(\cdot)$ est absolument continue avec $\dot{u}(t) = g(t)$ p.p. $t \in I$. Par conséquent,

$$\dot{u}_n(\cdot) \rightharpoonup \dot{u}(\cdot) \text{ dans } \mathrm{L}^1(I, H). \tag{2.3.37}$$

Étape 4. L'application $u(\cdot)$ est une solution de $(\mathcal{P}_{F,f})$.

Il nous reste à prouver que $u(\cdot)$ est une solution de $(\mathcal{P}_{F,f})$. Il est clair que

$$|\theta_n(t) - t| \leq \frac{T - T_0}{2^n}, \;\; |\rho_n(t) - t| \leq \frac{T - T_0}{2^n},$$

et par (2.3.19), pour tout $t \in I$

$$\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| \leq \|u_n(t) - u(t)\| + (2l+1)\big(a(\theta_n(t)) - a(t)\big),$$

et

$$\|u_n(\rho_n(t)) - u(t)\| \leq \|u_n(t) - u(t)\| + (2l+1)\big(a(\rho_n(t)) - a(t)\big).$$

Ainsi, pour tout $t \in I$,

$$\theta_n(t) \to t, \;\; \rho_n(t) \to t, \;\; u_n(\theta_n(t)) \to u(t) \text{ et } u_n(\rho_n(t)) \to u(t). \tag{2.3.38}$$

La continuité de l'application $f(t, \cdot)$ implique que, pour tout $t \in I$,

$$f\Big(t, u_n(\rho_n(t))\Big) \to f(t, u(t)) \text{ et } f\Big(t, u_n(\theta_n(t))\Big) \to f(t, u(t)), \tag{2.3.39}$$

et alors, par (2.3.27),

$$\|f(t, u(t))\| \leq l\alpha(t) \text{ p.p. sur } I.$$

D'après (2.3.30) et (2.3.1), on a

$$d_{C(t)}\Big(u_n(\theta_n(t))\Big) \leq \int_t^{\theta_n(t)} \dot{v}(s)ds.$$

Grâce à (2.3.38) et le fait que $C(t)$ est fermé, la dernière inégalité implique que

$$u(t) \in C(t), \quad \forall t \in I. \tag{2.3.40}$$

Notons que, par (2.3.26), on peut supposer que $(z_n(\cdot))$ converge faiblement dans $\mathrm{L}^1(I, H)$ vers une certaine application $z(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I, H)$. Maintenant, nous procédons à prouver que

$$\dot{u}(t) + z(t) + f\big(t, u(t)\big) \in -N(C(t), u(t)) \text{ p.p. sur } I.$$

Nous pouvons appliquer des techniques de Castaing ([22]). Par la convergence faible des deux suites $(\dot{u}_n(\cdot))$ et $(z_n(\cdot))$ dans $\mathrm{L}^1(I,H)$, par le lemme de Mazur, il existe une suite $(\zeta_n(\cdot))$ qui converge fortement dans $\mathrm{L}^1(I,H)$ vers $\dot{u}(\cdot)+z(\cdot)$ telle que pour tout n

$$\zeta_n(\cdot) \in co\{\dot{u}_k(\cdot)+z_k(\cdot):\ k \geq n\}.$$

Par extraction d'une sous suite, on suppose que $(\zeta_n(\cdot))$ converge presque partout vers $\dot{u}(\cdot)+z(\cdot)$. Alors, en utilisant (2.3.39),

$$\zeta_n(t)+f\Big(t,u_n(\theta_n(t))\Big) \to \dot{u}(t)+z(t)+f(t,u(t)), \quad \text{p.p. sur } I.$$

Par conséquent, pour presque tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\dot{u}(t)+z(t)+f(t,u(t)) \;&\in\; \bigcap_n \overline{\Big\{\zeta_n(t)+f\Big(t,u_n(\theta_n(t))\Big)\Big\}}\\ &\subset\; \bigcap_n \overline{co}\Big\{\dot{u}_k(t)+z_k(t)+f\Big(t,u_k(\theta_k(t))\Big):\ k\geq n\Big\}.\end{aligned}$$

Il en résulte que, pour presque tout $t \in I$, pour tout $\xi \in H$,

$$\Big\langle \xi, \dot{u}(t)+z(t)+f(t,u(t))\Big\rangle \leq \inf_n \sup_{k\geq n} \Big\langle \xi, \dot{u}_k(t)+z_k(t)+f\Big(t,u_k(\theta_k(t))\Big)\Big\rangle.$$

Ainsi, par (2.3.33), pour presque tout $t \in I$, pour tout $\xi \in H$,

$$\langle \xi, \dot{u}(t)+z(t)+f(t,u(t))\rangle \leq \limsup_{n\to\infty} \delta^*\Big(-\delta(t)\partial^P d_{C(\theta_n(t))}(u_n(\theta_n(t))),\xi\Big).$$

Par (2.3.38), (2.3.30) et (2.3.40), et la Proposition 2.2

$$\Big\langle \xi, \dot{u}(t)+z(t)+f(t,u(t))\Big\rangle \leq \delta^*\Big(-\delta(t)\partial^P d_{C(t)}(u(t)),\xi\Big) = \delta^*\Big(-\delta(t)\partial^C d_{C(t)}(u(t)),\xi\Big).$$

Donc

$$\Big\langle \xi, \dot{u}(t)+z(t)+f(t,u(t))\Big\rangle - \delta^*\Big(-\delta(t)\partial^C d_{C(t)}(u(t)),\xi\Big) \leq 0.$$

Comme ξ est arbitraire, on obtient

$$\sup_{\xi\in H}\left(\langle \xi, \dot{u}(t)+z(t)+f(t,u(t))\rangle - \delta^*\Big(-\delta(t)\partial^C d_{C(t)}(u(t)),\xi\Big)\right) \leq 0.$$

Puisque le sous-différentiel de Clarke est toujours fermé et convexe, par le Corollaire 1.1 pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned}
& d\Big(\dot{u}(t) + z(t) + f(t, u(t)), -\delta(t)\partial^C d_{C(t)}(u(t))\Big) \\
= & \sup_{\xi \in \overline{\mathbb{B}}_H} \Big(\Big\langle \xi, \dot{u}(t) + z(t) + f(t, u(t))\Big\rangle - \delta^*\Big(- \delta(t)\partial^C d_{C(t)}(u(t)), \xi\Big)\Big) \\
\leq & \sup_{\xi \in H} \Big(\Big\langle \xi, \dot{u}(t) + z(t) + f(t, u(t))\Big\rangle - \delta^*\Big(- \delta(t)\partial^C d_{C(t)}(u(t)), \xi\Big)\Big) \\
\leq & \; 0,
\end{aligned}$$

c'est à dire,

$$d\Big(\dot{u}(t) + z(t) + f(t, u(t)), -\delta(t)\partial^C d_{C(t)}(u(t))\Big) = 0.$$

Cette égalité donne, pour presque tout $t \in I$,

$$\dot{u}(t) + z(t) + f(t, u(t)) \in -\delta(t)\partial^C d_{C(t)}(u(t), \xi) \subset -N(C(t), u(t)), \tag{2.3.41}$$

la dernière inclusion venant de (2.2.3).

Maintenant, nous allons prouver que $z(t) \in F(t, u(t))$ pour presque tout $t \in I$. Fixons $t \in I$ et observons d'abord que

$$|\kappa_n(\theta_n(t)) - t| \leq \frac{T - T_0}{2^n},$$

et que

$$\kappa_n(\theta_n(t)) \to t.$$

Par le lemme de Mazur, on peut écrire pour presque tout $t \in I$,

$$z(t) \in \bigcap_n \overline{co}\{z_i(t) : i \geq n\}. \tag{2.3.42}$$

Donc, par (2.3.23), pour presque tout $t \in I$, pour tout $\xi \in H$,

$$\langle \xi, z(t)\rangle \leq \limsup_n \delta^*\Big(F\Big(\kappa_n(\theta_n(t)), u_n(\rho_n(t))\Big), \xi\Big).$$

En raison de la semicontinuité supérieure de $(t, x) \mapsto \delta^*(F(t, x), \xi)$ (voir Proposition 1.6), nous avons, pour presque tout $t \in I$, pour tout $\xi \in H$,

$$\langle \xi, z(t)\rangle \leq \delta^*\Big(F(t, u(t)), \xi\Big).$$

ou bien,

$$\sup_{\xi \in H} \left(\langle \xi, z(t) \rangle - \delta^* \Big(F(t, u(t)), \xi \Big) \right) \leq 0.$$

Puisque $F(t, u(t))$ est fermé et convexe, par le Corollaire 1.1 on obtient

$$d\big(z(t), F(t, u(t))\big) \leq 0,$$

et nous concluons que, pour presque tout $t \in I$,

$$z(t) \in F(t, u(t)).$$

Ceci, avec (2.3.41), implique que

$$-\dot{u}(t) \in N(C(t), u(t)) + F(t, u(t)) + f(t, u(t)) \text{ p.p. sur } I.$$

En outre,

$$u(T_0) = \lim_{n \to \infty} u_n(T_0) = x_0.$$

Donc, $u(\cdot)$ est une solution de $(\mathcal{P}_{F,f})$.

Notons que, par (2.3.41), pour presque tout $t \in I$,

$$\|\dot{u}(t) + z(t) + f(t, u(t))\| \leq (l+1)\Big(\dot{v}(t) + \beta(t) + 1 + \alpha(t)\Big).$$

En outre, à partir de (2.3.25) et (2.3.42), on trouve, pour presque tout $t \in I$,

$$z(t) \in l(\beta(t) + 1)K.$$

Dans le cas où

$$\int_{T_0}^{T} (\beta(s) + 1) ds > \frac{1}{8} \quad \text{ou} \quad \int_{T_0}^{T} \alpha(s) ds > \frac{1}{8},$$

considérons une subdivision de $[T_0, T]$ donnée par $T_0, T_1, ..., T_k = T$ telle que, pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$,

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} (\beta(s) + 1) ds \leq \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \int_{T_i}^{T_{i+1}} \alpha(s) ds \leq \frac{1}{8}.$$

Alors, il existe une application absolument continue $u_0(\cdot) : [T_0, T_1] \to H$ et une application intégrable $z_0 : [T_0, T_1] \to H$ telles que $u_0(T_0) = x_0$, $u_0(t) \in C(t)$ pour tout $t \in [T_0, T_1]$,

$$z_0(t) \in F(t, u_0(t)) \text{ p.p. sur } [T_0, T_1],$$

et

$$\dot{u}_0(t) + z_0(t) + f(t, u_0(t)) \in -N(C(t), u_0(t)) \text{ p.p. sur } [T_0, T_1].$$

De la même manière, par la première partie à nouveau, il existe une application absolument continue $u_1(\cdot) : [T_1, T_2] \to H$ et une application intégrable $z_1(\cdot) : [T_1, T_2] \to H$ telle que $u_1(T_1) = u_0(T_1)$, $u_1(t) \in C(t)$ pour tout $t \in [T_1, T_2]$,

$$z_1(t) \in F(t, u_1(t)) \text{ p.p. sur } [T_1, T_2],$$

et

$$\dot{u}_1(t) + z_1(t) + f(t, u_1(t)) \in -N(C(t), u_1(t)) \text{ p.p. sur } [T_1, T_2].$$

Inductivement, il existe une suite finie d'applications absolument continues $u_i(\cdot) : [T_i, T_{i+1}] \to H$ $(0 \leq i \leq k-1)$ et une suite finie d'applications intégrables $z_i(\cdot) : [T_i, T_{i+1}] \to H$ $(0 \leq i \leq k-1)$ telles que pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, $u_i(T_i) = u_{i-1}(T_i)$, $u_i(t) \in C(t)$ pour tout $t \in [T_i, T_{i+1}]$ et

$$\begin{cases} z_i(t) \in F(t, u_i(t)) & \text{p.p. sur } [T_i, T_{i+1}], \\ \dot{u}_i(t) + z_i(t) + f(t, u_i(t)) \in -N(C(t), u_i(t)) & \text{p.p. sur } [T_i, T_{i+1}], \end{cases} \tag{2.3.43}$$

avec $u_{-1}(T_0) = x_0$.

Maintenant, soit $u(\cdot)$, $z(\cdot)$, $h(\cdot) : [T_0, T] \to H$ les applications définies par

$$u(t) = u_i(t) \quad \text{si} \quad t \in [T_i, T_{i+1}] \ (0 \leq i \leq k-1),$$

$$z(t) = \begin{cases} z_0(t) & \text{si} \quad t \in [T_0, T_1], \\ z_i(t) & \text{si} \quad t \in]T_i, T_{i+1}] (1 \leq i \leq k-1), \end{cases}$$

et

$$h(t) = \mathbb{1}_{[T_0, T_1]}(t)\dot{u}_0(t) + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{1}_{]T_i, T_{i+1}]}(t)\dot{u}_i(t).$$

Évidemment, $z(\cdot)$ est intégrable et $u(\cdot)$ est une application continue vérifiant $u(T_0) = x_0$ et pour tout $t \in I$,

$$u(t) \in C(t) \quad \text{et} \quad u(t) = u(T_0) + \int_{T_0}^{t} h(s) ds,$$

alors $u(\cdot)$ est une application absolument continue. De (2.3.43), on obtient

$$\begin{cases} z(t) \in F(t, u(t)) & \text{p.p. sur } I, \\ \dot{u}(t) + z(t) + f(t, u(t)) \in -N(C(t), u(t)) & \text{p.p. sur } I, \\ u(t) \in C(t) & \forall t \in I, u(0) = x_0. \end{cases}$$

La preuve est alors terminée. □

2.4 Processus de la rafle avec somme d'une perturbation multivoque séparément scalairement semicontinue supérieurement et une perturbation univoque lipschitzienne

Dans cette section, on va affaiblir l'hypothèse (i) du Théorème 2.1. On va supposer que la multiapplication F est séparément scalairement semicontinue supérieurement sur H et mesurable par rapport à la première variable.

On commence par le cas où $\beta(\cdot)$ est constante.

Théorème 2.2. *Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $C(\cdot)$ vérifiant (A_1) et (A_2). Soit $F : I \times H \rightrightarrows H$ une multiapplication à valeurs non vides convexes compactes telle que*

(i) pour tout $x \in H$, $F(\cdot, x)$ est $\mathcal{L}(I)$-mesurable ;

(ii) pour tout $t \in I$, $F(t, \cdot)$ est scalairement semicontinue supérieurement sur H ;

(iii) pour un sous ensemble compact $K \subset \overline{\mathrm{B}}_H$ et un nombre réel $\beta > 0$, pour tout $t \in I$ et $x \in I$, on a

$$F(t, x) \subset \beta(1 + \|x\|)K.$$

Soit $f : I \times H \to H$ une application mesurable sur I telle que

(a_1) pour tout $\eta > 0$ il existe une fonction positive $k_\eta(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I, \mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in I$ et pour tout $(x, y) \in \mathrm{B}_H(0, \eta) \times \mathrm{B}_H(0, \eta)$,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \le k_\eta(t)\|x - y\|;$$

(a_2) *il existe une fonction positive* $\alpha(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I, \mathbb{R})$ *telle que, pour tout* $t \in I$ *et pour tout* $x \in \bigcup\limits_{s \in I} C(s)$*,* $\|f(t,x)\| \leq \alpha(t)(1 + \|x\|)$*.*

Alors, pour tout $x_0 \in C(T_0)$*, le processus de la rafle perturbé suivant*

$$(\mathcal{P}_{F,f}) \quad \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N(C(t), u(t)) + F(t, u(t)) + f(t, u(t)) & p.p. \ sur \ I, \\ u(T_0) = x_0, \end{cases}$$

admet au moins une solution absolument continue $u(\cdot)$*, et si*

$$(T - T_0)\beta + 1 \leq \frac{1}{8} \quad et \quad \int_{T_0}^{T} \alpha(s)ds \leq \frac{1}{8},$$

alors il existe une application absolument continue $u(\cdot) : I \to H$ *et une application intégrable* $z(\cdot) : I \to H$ *telles que,* $u(T_0) = x_0$ *et, pour presque tout* $t \in I$*,*

$$z(t) \in F(t, u(t)), \ \dot{u}(t) + z(t) + f(t, u(t)) \in -N(C(t), u(t)),$$

$$z(t) \in (l + 1)(\beta + 1)\overline{co}(K \cup \{0\}),$$

$$\|\dot{u}(t) + z(t) + f(t, u(t))\| \leq (l + 1)\Big(|\dot{v}(t)| + \beta + 1 + \alpha(t)\Big),$$

et

$$\|f(t, u(t))\| \leq l\alpha(t),$$

avec

$$l = 2\left(\|x_0\| + \frac{3}{2} + \int_{T_0}^{T} |\dot{v}(s)|ds\right).$$

Preuve.

On va réduire le problème au cas précédent, en utilisant les versions multivoques du théorème de Scorza-Dragoni et le théorème de prolongement de Dugundji. L'idée de la preuve est inspirée de [23] et [35].

On suppose sans perdre de généralités, que K est convexe et $0 \in K$.

En devisant, si nécessaire, I en intervalles de même longueur, on peut supposer aussi que

$$(T - T_0)(\beta + 1) \leq \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \int_{T_0}^{T} \alpha(t)dt \leq \frac{1}{8}. \tag{2.4.1}$$

Étape 1. L'existence de la suite $(u_n(\cdot))$.

On pose

$$l = 2\left(\|x_0\| + \frac{3}{2} + \int_{T_0}^{T} |\dot{v}(s)|ds\right),$$

$$M = \|x_0\| + (l+1)\left(1 + \int_{T_0}^{T} |\dot{v}(s)|ds\right),$$

et fixons une fonction continue $\varphi : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ telle que

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \tau \leq M \\ 0 & \text{si} \quad \tau \geq M+1. \end{cases} \tag{2.4.2}$$

Par exemple, on peut prendre $\varphi(\tau) = M + 1 - \tau$ si $\tau \in [M, M+1]$.

Considérons l'espace métrique compact convexe, $Y = \beta(2+M)K$, qui est un ensemble borélien de H, et on définit la multiapplication $\hat{F} : I \times H \rightrightarrows Y$ par

$$\hat{F}(t,x) = \varphi(\|x\|)F(t,x).$$

Évidemment, $\hat{F}(\cdot, x)$ est mesurable pour tout $x \in H$ et, pour tout $t \in [T_0, T]$, le graphe de $\hat{F}(t,\cdot)$ est fermé dans $H \times Y$. En effet, soit $((x_n, y_n)) \subset Gr\hat{F}(t,\cdot)$ telle que $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $y'_n \in F(t, x_n)$ tel que $y_n = \varphi(\|x_n\|)y'_n$. De plus, on a

$$y'_n \in \beta(1 + \|x_n\|)K, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Puisque (x_n) est convergente dans H alors la suite $(\|x_n\|)$ est bornée dans $\mathbb{R}_+$ par une constante c. Et comme K est convexe et contient le 0, on obtient

$$y'_n \in \beta(1+c)K, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc, on peut extraire de (y'_n) une sous suite, qu'on lui garde la même notation, qui converge dans H vers un certain élément y'.

De la continuité de φ, on obtient

$$y_n \to \varphi(\|x\|)y' \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

et par l'unicité de la limite, $y = \varphi(\|x\|)y'$. Comme $F(t,\cdot)$ est à valeurs non vides fermées et s.c.s, son graphe est fermé. Il s'ensuit que $y' \in F(t,x)$, i.e., $y \in \varphi(\|x\|)F(t,x)$. D'où la fermeture du graphe de $\hat{F}(t,\cdot)$.

Donc, par le Théorème 1.7, il existe une multiapplication $\tilde{F} : I \times H \rightrightarrows Y$ à valeurs convexes compactes (possiblement vides) telle que

a) pour un certain sous ensemble négligeable $N_0 \subset I$, pour tout $t \in I \setminus N_0$ et pour tout $x \in H$

$$\tilde{F}(t,x) \subset \hat{F}(t,x), \tag{2.4.3}$$

b) il existe une suite croissante $(I_n)_{\geq 1}$ de sous ensembles compacts de I telle que pour tout $n \geq 1$

$$mes(I \setminus I_n) \leq \frac{1}{n},$$

et la restriction de $\tilde{F}$ sur $I_n \times H$, notée par $\tilde{F}_{|I_n \times H}$ est (globalement) s.c.s à valeurs non vides convexes compactes.

Par le Théorème 1.8, pour tout $n \geq 1$, il existe une certaine extension s.c.s $\tilde{F}_n$ de $\tilde{F}_{|I_n \times H}$ à $I \times H$ qui prend des valeurs non vides convexes compactes et vérifie

$$\tilde{F}_n(t,x) \subset \beta(1 + \|x\|)K \text{ pour tout } (t,x) \in I \times H.$$

Puisque $(\beta + 1)(T - T_0) \leq \dfrac{1}{8}$ et $\int_{T_0}^{T} \alpha(t)dt \leq \dfrac{1}{8}$, par le Théorème 2.1, pour tout $n \geq 1$, il existe une application absolument continue $u_n(\cdot) : T \to H$ et une application intégrable $z_n(\cdot) : I \to H$ telles que $u_n(T_0) = x_0$, et pour presque tout $t \in I$,

$$z_n(t) \in \tilde{F}_n(t, u_n(t)) \text{ et } \ z_n(t) \in l(\beta + 1)K; \tag{2.4.4}$$

$$\dot{u}_n(t) + z_n(t) + f(t, u_n(t)) \in -N(C(t), u_n(t)) \tag{2.4.5}$$

$$\|\dot{u}_n(t) + z_n(t) + f(t, u_n(t))\| \leq (l+1)\Big(|\dot{v}(t)| + \beta + 1 + \alpha(t)\Big) \tag{2.4.6}$$

et

$$\|f(t, u_n(t))\| \leq l\alpha(t). \tag{2.4.7}$$

Étape 2. On va prouver que $(u_n(\cdot))$ admet une sous suite qui converge uniformément vers une application $u(\cdot)$.

Pour ce but, considérons l'application

$$Z_n(t) = \int_{T_0}^{t} z_n(s)ds.$$

Comme dans la preuve du théorème précédent, grâce à (2.4.4), par le théorème d'Arzelà-Ascoli, on peut supposer que la suite $(Z_n(\cdot))$ converge uniformément dans $\mathcal{C}(I,H)$ vers une certaine application $Z(\cdot) : I \to H$. Posons

$$w_n(t) = u_n(t) + Z_n(t).$$

Nous allons montrer que $(w_n(\cdot))$ est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}(I,H), \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$. Soit $m,n \in \mathbb{N}$. Grâce à la propriété d'hypomonotonie du cône normal, il découle de (2.4.5) et (2.4.6) que, pour presque tout $t \in I$,

$$\Big\langle \dot{w}_n(t) + f(t,u_n(t)) - \dot{w}_m(t) - f(t,u_m(t)), u_n(t) - u_m(t) \Big\rangle \leq \frac{1}{r}\delta(t)\|u_n(t) - u_m(t)\|^2,$$

où $\delta(t) = (l+1)\Big(|\dot{v}(t)| + \beta + 1 + \alpha(t)\Big)$.

D'où

$$\begin{aligned}
& \Big\langle \dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t), u_n(t) - u_m(t) \Big\rangle \\
\leq\ & \Big\langle f(t,u_m(t)) - f(t,u_n(t)), u_n(t) - u_m(t) \Big\rangle + \frac{1}{r}\delta(t)\|u_n(t) - u_m(t)\|^2 \\
\leq\ & \Big\langle f(t,u_m(t)) - f(t,u_n(t)), u_n(t) - u_m(t) \Big\rangle \\
+\ & \frac{1}{r}\delta(t)\Big(\|w_n(t) - w_m(t)\| + \|Z_n(t) - Z_m(t)\|\Big)^2.
\end{aligned}$$

Notons que, par (2.4.4), (2.4.6) et (2.4.7), pour presque tout $t \in I$, on a

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq (l+1)\Big(|\dot{v}(t)| + 2\beta + 2 + 2\alpha(t)\Big),$$

alors, en prenant (2.4.1) en considération, on a , pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t \in I$

$$\|u_n(t)\| \leq \|x_0\| + (l+1)\left(\int_{T_0}^{T} |\dot{v}(s)|ds + \frac{1}{2}\right) \leq M. \tag{2.4.8}$$

Donc, pour un certain $\eta > M$, pour tout $t \in I$ et pour tout $n \geq n_0$,

$$u_n(t) \in \mathrm{B}_H(0,\eta). \tag{2.4.9}$$

D'où, par hypothèse, il existe une fonction positive $k_\eta(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I,\mathbb{R})$ telle que $f(t,\cdot)$ est $k_\eta(t)$-lipschitzienne sur $\mathrm{B}_H(0,\eta)$. Par suite

$$\begin{aligned}
\Big\langle \dot{w}_n(t)-\dot{w}_m(t), w_n(t)-w_m(t)\Big\rangle &\leq \Big(k_\eta(t)+\frac{1}{r}\delta(t)\Big)\|u_n(t)-u_m(t)\|^2 \\
&+ \Big\langle \dot{w}_n(t)-\dot{w}_m(t), Z_n(t)-Z_m(t)\Big\rangle \\
&\leq \Big(k_\eta(t)+\frac{1}{r}\delta(t)\Big)\Big(\|w_n(t)-w_m(t)\|+\|Z_n(t)-Z_m(t)\|\Big)^2 \\
&+ \Big\langle \dot{w}_n(t)-\dot{w}_m(t), Z_n(t)-Z_m(t)\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\Big\langle \dot{w}_n(t)-\dot{w}_m(t), w_n(t)-w_m(t)\Big\rangle &\leq \Big(k_\eta(t)+\frac{1}{r}\delta(t)\Big)\|w_n(t)-w_m(t)\|^2+\Big(k_\eta(t)+\frac{1}{r}\delta(t)\Big)\|Z_n(t)-Z_m(t)\|^2 \\
&+2\Big(k_\eta(t)+\frac{1}{r}\delta(t)\Big)(\|w_n(t)\|+\|w_m(t)\|)\|Z_n(t)-Z_m(t)\|+(\|\dot{w}_n(t)\|+\|\dot{w}_m(t)\|)\|Z_n(t)-Z_m(t)\|.
\end{aligned}$$

En utilisant (2.4.6) et (2.4.7), on trouve

$$\|\dot{w}_n(t)\| \leq (l+1)\big(|\dot{v}(t)|+\beta+1+2\alpha(t)\big) \leq 2\delta(t).$$

D'où

$$\|w_n(t)\| \leq \|x_0\| + (l+1)\left(\int_{T_0}^{T} |\dot{v}(s)|ds + \frac{3}{8}\right) \leq M.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\Big\langle \dot{w}_n(t)-\dot{w}_m(t), w_n(t)-w_m(t)\Big\rangle &\leq \Big(k_\eta(t)+\frac{1}{r}\delta(t)\Big)\|w_n(t)-w_m(t)\|^2+\Big(k_\eta(t)+\frac{1}{r}\delta(t)\Big)\|Z_n(t)-Z_m(t)\|^2 \\
&+4\Big(\Big(k_\eta(t)+\frac{1}{r}\delta(t)\Big)M+\delta(t)\Big)\|Z_n(t)-Z_m(t)\|.
\end{aligned}$$

En posant $a(t) = 4\Big(M\Big(k_\eta(t)+\frac{1}{r}\delta(t)\Big)+\delta(t)\Big)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Big\langle \dot{w}_n(t)-\dot{w}_m(t), w_n(t)-w_m(t)\Big\rangle &\leq \Big(k_\eta(t)+\frac{1}{r}\delta(t)\Big)\|w_n(t)-w_m(t)\|^2 \\
&+ \Big(k_\eta(t)+\frac{1}{r}\delta(t)\Big)\|Z_n(t)-Z_m(t)\|^2 + a(t)\|Z_n(t)-Z_m(t)\|.
\end{aligned}$$

Alors, pour presque tout $t \in I$,

$$\frac{d}{dt}\Big(\|w_n(t)-w_m(t)\|^2\Big) \leq 2(k_\eta(t)+\frac{1}{r}\delta(t))\|w_n(t)-w_m(t)\|^2+\gamma_{nm}(t),$$

où

$$\gamma_{nm}(t) = \Big(k_\eta(t) + \frac{1}{r}\delta(t)\Big)\|Z_n(\cdot) - Z_m(\cdot)\|_{\mathcal{C}}^2 + a(t)\|Z_n(\cdot) - Z_m(\cdot)\|_{\mathcal{C}}.$$

Puisque

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_{T_0}^{T}\gamma_{nm}(s)ds = \Big(\int_{T_0}^{T}\Big(k_\eta(s) + \frac{1}{r}\delta(s)\Big)ds\Big)\lim_{n,m\to\infty}\|Z_n(\cdot) - Z_m(\cdot)\|_{\mathcal{C}}^2 + \Big(\int_{T_0}^{T}a(s)ds\Big)\lim_{n,m\to\infty}\|Z_n(\cdot) - Z_m(\cdot)\| = 0$$

et $w_n(T_0) = w_m(T_0)$, le Lemme 2.2 donne

$$\lim_{n,m\to\infty}\|w_n(\cdot) - w_m(\cdot)\|_{\mathcal{C}} = 0.$$

On conclut que $(w_n(\cdot))$ est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}(I,H), \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$ et donc il existe une application $w(\cdot)$ telle que la suite $(u_n(\cdot))$ converge uniformément dans $(\mathcal{C}(I,H), \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$ vers $u(\cdot) = w(\cdot) + Z(\cdot)$. Par ailleurs, grâce à (2.4.4), (2.4.6) et (2.4.7), on peut supposer que la suite $(\dot{u}_n(\cdot))$ converge faiblement vers une certaine application $g(\cdot)$ dans $\mathrm{L}^1(I,H)$. Alors $u(t) = x_0 + \int_{T_0}^{t} g(s)ds$ pour tout $t \in I$. Donc, $u(\cdot)$ est absolument continue avec $\dot{u}(t) = g(t)$ pour presque tout $t \in I$ et

$$\dot{u}_n(\cdot) \rightharpoonup \dot{u}(\cdot) \quad \text{dans} \quad \mathrm{L}^1(I,H). \tag{2.4.10}$$

D'autre part, par (2.4.4), on peut aussi supposer qu'il existe une application $z(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I,H)$ telle que

$$z_n(\cdot) \rightharpoonup z(\cdot) \quad \text{dans} \quad \mathrm{L}^1(I,H). \tag{2.4.11}$$

La continuité de l'application $f(t,\cdot)$ implique que, pour tout $t \in I$,

$$f(t,u_n(t)) \to f(t,u(t)). \tag{2.4.12}$$

Donc, par (2.4.7) on obtient

$$\|f(t,u(t))\| \leq l\alpha(t), \qquad \forall t \in I.$$

Étape 3. On doit Montrer que $u(\cdot)$ est une solution de $(\mathcal{P}_{F,f})$.

Prouvons que

$$\dot{u}(t) + z(t) + f(t,u(t)) \in -N(C(t),u(t)) \text{ p.p. } t \in I.$$

En prenant (2.4.10), (2.4.11) et (2.4.12) en considération, comme dans la preuve du Théorème 2.1, on a par le lemme de Mazur, pour tout $t \in I$

$$\dot{u}(t) + z(t) + f(t, u(t)) \in \bigcap_n \overline{co}\Big\{\dot{u}_k(t) + z_k(t) + f(t, u_k(t)),\ k \geq n\Big\}.$$

On déduit par (2.4.5), (2.4.6) et (2.2.2) que, pour presque tout $t \in I$, pour tout $\xi \in H$

$$\begin{aligned}\Big\langle \xi, \dot{u}(t) + z(t) + f(t, u(t))\Big\rangle &\leq \limsup_{n\to\infty} \delta^*\Big(-\delta(t)\partial^P d_{C(t)}(u_n(t)), \xi\Big)\\ &= \delta^*\Big(-\delta(t)\partial^C d_{C(t)}(u(t)), \xi\Big).\end{aligned}$$

Le sous-différentiel de Clarke $\partial^C d_{C(t)}(u(t))$ étant fermé et convexe, on déduit que, pour presque tout $t \in I$,

$$\dot{u}(t) + z(t) + f(t, u(t)) \in -\delta(t)\partial^C d_{C(t)}(u(t)) \subset -N(C(t), u(t)). \tag{2.4.13}$$

Il reste à prouver que $z(t) \in F(t, u(t))$ p.p. $t \in I$.

Par (2.4.11), et par le lemme de Mazur, il existe une suite $(\zeta_n(\cdot))$ dans $\mathrm{L}^1(I, H)$ telle que

$$\zeta_n(\cdot) \in co\{z_k(\cdot);\ k \geq n\}, \forall n \geq 1 \tag{2.4.14}$$

qui converge fortement dans $\mathrm{L}^1(I, H)$ vers $z(\cdot)$. Donc par l'extraction d'une sous suite, on peut supposer que

$$\zeta_n(t) \to z(t) \text{ p.p. } t \in I.$$

Cela avec (2.4.14) implique que, pour un certain ensemble négligeable $N_1 \subset I$,

$$z(t) \in \bigcap_n \overline{co}\{z_k(t) : k \geq n\} \quad \forall t \in T \setminus N_1. \tag{2.4.15}$$

En prenant (2.4.4) en considération, on peut supposer que, pour tout $n \geq 1$, pour tout $t \in I \setminus N_1$,

$$z_n(t) \in \tilde{F}_n(t, u_n(t)). \tag{2.4.16}$$

Considérons le sous ensemble négligeable

$$N = (I \setminus \cup_n I_n) \cup N_0 \cup N_1.$$

On va prouver que $z(t) \in F(t, u(t))$ pour tout $t \in I \setminus N$. Fixons $\tau \in I \setminus N$. De (2.4.15) et (2.4.16), on a, pour tout $\xi \in H$

$$\langle \xi, z(\tau) \rangle \leq \limsup_{n \to \infty} \delta^* \Big(\tilde{F}_n(\tau, u_n(\tau)), \xi \Big). \tag{2.4.17}$$

D'autre part, par la définition de N, il existe un entier $n(\tau)$ tel que $\tau \in I_{n(\tau)} \setminus N_0$ et, (I_n) étant décroissante, on a $\tau \in I_n$ pour tout $n \geq n(\tau)$. Par conséquent, pour tout $n \geq n(\tau)$,

$$\tilde{F}_n(\tau, u_n(\tau)) = \tilde{F}(\tau, u_n(\tau)) \subset \hat{F}(\tau, u_n(\tau)), \tag{2.4.18}$$

l'inclusion suit de (2.4.3).

Grâce à (2.4.8) et (2.4.2), pour tout $n \geq 1$

$$\hat{F}(\tau, u_n(\tau)) = F(\tau, u_n(\tau)). \tag{2.4.19}$$

D'où par (2.4.17), (2.4.18), (2.4.19) et le fait que $F(\tau, \cdot)$ est scalairement semicontinue supérieurement, on a

$$\langle \xi, z(\tau) \rangle \leq \delta^*(F(\tau, u(\tau)), \xi).$$

Ceci étant vrai pour tout $\xi \in H$, et $F(\tau, u(\tau))$ étant fermé et convexe, on conclut que $z(\tau) \in F(\tau, u(\tau))$. Puisque la dernière inclusion est vraie pour tout $\tau \in I \setminus N$, on a

$$z(t) \in F(t, u(t)) \text{ p.p. } t \in I.$$

Cela avec (2.4.13) et le fait que $u(T_0) = \lim\limits_{n \to \infty} u_n(T_0) = x_0$, montrent que $u(\cdot)$ est une solution de $(\mathcal{P}_{F,f})$.

Finalement, (2.4.15) et (2.4.4) donnent

$$z(t) \in (l+1)(\beta+1)K \quad \text{p.p. } t \in I,$$

et de la relation (2.4.13), il est clair que

$$\|\dot{u}(t) + z(t) + f(t, u(t))\| \leq \delta(t) = (l+1)\Big(|\dot{v}(t)| + \beta + 1 + \alpha(t) \Big).$$

□

Nous allons dans la suite exposer le même résultat avec $\beta(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I, \mathbb{R})$ une fonction positive.

Théorème 2.3. *Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $C(\cdot)$ vérifiant (A_1) et (A_2). Soit $F : I \times H \rightrightarrows H$ une multiapplication à valeurs non vides convexes compactes telle que*

(i) pour tout $x \in H$, $F(\cdot, x)$ est $\mathcal{L}(I)$-mesurable ;

(ii) pour tout $t \in I$, $F(t, \cdot)$ est scalairement semicontinue supérieurement sur H ;

(iii) pour un sous ensemble compact $K \subset \overline{\mathrm{B}}_H$ et pour une fonction positive $\beta(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I, \mathbb{R})$ on a, pour tout $t \in I$ et $x \in H$

$$F(t, x) \subset \beta(t)(1 + \|x\|)K.$$

Soit $f : I \times H \to H$ une application mesurable sur I telle que

(a_1) pour tout $\eta > 0$ il existe une fonction positive $k_\eta(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I, \mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in I$ et pour tout $(x, y) \in \mathrm{B}_H(0, \eta) \times \mathrm{B}_H(0, \eta)$,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k_\eta(t)\|x - y\|;$$

(a_2) il existe une fonction positive $\alpha(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $t \in I$ et pour tout $x \in \bigcup_{s \in I} C(s)$,

$$\|f(t, x)\| \leq \alpha(t)(1 + \|x\|).$$

Alors, pour tout $x_0 \in C(T_0)$, le processus de la rafle perturbé suivant

$$(\mathcal{P}_{F,f}) \quad \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N(C(t), u(t)) + F(t, u(t)) + f(t, u(t)) \quad \text{p.p. sur } I, \\ u(T_0) = x_0, \end{cases}$$

admet au moins une solution absolument continue $u(\cdot)$, et si $\int_{T_0}^{T} (\alpha(t) + \beta(t) + 1)dt \leq \dfrac{1}{8}$ alors il existe une application absolument continue $u(\cdot) : I \to H$ et une application intégrable $z(\cdot) : I \to H$ telles que, $u(T_0) = x_0$ et, pour presque tout $t \in I$,

$$z(t) \in F(t, u(t)), \ \dot{u}(t) + z(t) + f(t, u(t)) \in -N(C(t), u(t)),$$

$$z(t) \in 2(l + 1)(\alpha(t) + \beta(t) + 1)\overline{co}(K \cup \{0\}),$$

$$\|\dot{u}(t) + z(t) + f(t, u(t))\| \leq (l + 1)\Big(|\dot{v}(t)| + 3\big(\alpha(t) + \beta(t) + 1\big)\Big),$$

et

$$\|f(t,u(t)\| \leq l\Big(|\dot v(t)| + 3\big(\alpha(t)+\beta(t)+1\big)\Big),$$

où

$$l = 2\Big(\|x_0\| + \frac{3}{2} + \int_{T_0}^{T} |\dot v(s)|ds\Big).$$

Preuve.

Sans perdre de généralités, on peut supposer que K est un sous ensemble convexe qui contient 0, et de plus,

$$\int_{T_0}^{T} \big(\alpha(t)+\beta(t)+1\big)dt \leq \frac{1}{8}. \tag{2.4.20}$$

La démonstration est similaire à celle donnée dans [35], où on utilise une idée due à Deimling [30].

Étape 1. On pose $\hat T = \int_{T_0}^{T} \big(\alpha(s)+\beta(s)+1\big)ds$ et on définit une fonction absolument continue $\gamma : [T_0, T] \to [0, \hat T]$ par

$$\gamma(t) = \int_{T_0}^{t} \big(\alpha(s)+\beta(s)+1\big)ds. \tag{2.4.21}$$

Grâce au fait que $\alpha(t)+\beta(t)+1 > 0$ pour tout $t \in I$, la fonction absolument continue $\gamma(\cdot)$ et strictement croissante et donc admet une fonction inverse continue $\gamma^{-1}(\cdot) : [0,\hat T] \to [T_0, T]$.

Considérons la multiapplication $\hat F : [0,\hat T] \times H \rightrightarrows H$ définie par

$$\hat F(t,x) = \frac{1}{(\alpha+\beta)(\gamma^{-1}(t))+1} F(\gamma^{-1}(t),x). \tag{2.4.22}$$

Soit $x \in H$. De l'hypothèse $i)$ il existe une application mesurable $h : I \to H$ telle que, pour tout $t \in I$

$$h(t) \in F(t,x),$$

d'où, pour tout $t \in [0,\hat T]$

$$h(\gamma^{-1}(t)) \in F(\gamma^{-1}(t),x).$$

Ceci donne

$$\frac{1}{(\alpha+\beta)(\gamma^{-1}(t))+1} h(\gamma^{-1}(t)) \in \hat F(t,x).$$

On définit $g : [0, \hat{T}] \to H$ par

$$g(t) = \frac{1}{(\alpha+\beta)(\gamma^{-1}(t))+1} h(\gamma^{-1}(t)).$$

Puisque les applications $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$, $\gamma^{-1}(\cdot)$ et $h(\cdot)$ sont mesurables et comme, pour tout $t \in [0, \hat{T}]$, $(\alpha+\beta)(\gamma^{-1}(t)) + 1 \neq 0$, $g(\cdot)$ est aussi mesurable et vérifie

$$g(t) \in \hat{F}(t, x).$$

D'où $\hat{F}$ vérifie l'hypothèse $i)$ du Théorème 2.2.

De plus, par l'hypothèse $ii)$, pour tout $t \in [0, \hat{T}]$, $F(\gamma^{-1}(t), \cdot)$ est s.c.s. Par conséquent $\hat{F}$ est aussi s.c.s.. Aussi par (iii), pour tout $(t, x) \in [0, \hat{T}] \times H$

$$\hat{F}(t, x) \subset \frac{\beta(\gamma^{-1}(t))}{(\alpha+\beta)(\gamma^{-1}(t))+1}(1 + \|x\|)K.$$

Puisque K est convexe, $\frac{\beta(\gamma^{-1}(t))}{(\alpha+\beta)(\gamma^{-1}(t))+1} < 1$ et $0 \in K$, on obtient (comme dans la preuve du Théorème 2.1)

$$\hat{F}(t, x) \subset (1 + \|x\|)K.$$

On considère aussi la multiapplication $\hat{C} : [0, \hat{T}] \rightrightarrows H$ définie par

$$\hat{C}(t) = C(\gamma^{-1}(t)).$$

L'hypothèse (A_2) donne, pour tout $y \in H$ et pour tout $t, s \in [0, \hat{T}]$,

$$|d(y, \hat{C}(t)) - d(y, \hat{C}(s))| \leq |v \circ \gamma^{-1}(t) - v \circ \gamma^{-1}(s)|. \tag{2.4.23}$$

Pour voir que $t \mapsto V(t) = v \circ \gamma^{-1}(t)$ est absolument continue sur $[0, \hat{T}]$, et puisque $v(\cdot)$ est absolument continue, il suffit de montrer que $\gamma^{-1}(\cdot)$ est lipschitzienne sur $[0, \hat{T}]$. En effet, pour $\hat{t}, \hat{s} \in [0, \hat{T}]$ avec $\hat{s} \leq \hat{t}$, il existe $t, s \in [T_0, T]$ avec $s \leq t$ tel que $\hat{t} = \gamma(t)$ et $\hat{s} = \gamma(s)$, et alors, en utilisant (2.4.21), on a

$$\gamma^{-1}(\hat{t}) - \gamma^{-1}(\hat{s}) = t - s = \int_s^t ds \leq \int_s^t \big(\alpha(\tau) + \beta(\tau) + 1\big) d\tau = \gamma(t) - \gamma(s) = |\hat{t} - \hat{s}|.$$

Donc $\gamma^{-1}(\cdot$ est lipschitzienne sur $[0, \hat{T}]$, donc absolument continue. On en déduit que la fonction $V(\cdot)$ est absolument continue, et donc par (2.4.23), la multiapplication $\hat{C}(\cdot)$ vérifie (A_2) avec $V(\cdot)$ à la place de $v(\cdot)$.

On définit l'application $\hat{f} : [0, \hat{T}] \times H \to H$ par

$$\hat{f}(t,x) = \frac{1}{(\beta+\alpha)(\gamma^{-1}(t))+1} f(\gamma^{-1}(t), x). \tag{2.4.24}$$

Puisque les applications $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$, $\gamma^{-1}(\cdot)$ et $f(\cdot, x)$ sont mesurables pour tout $x \in H$, $\hat{f}$ est aussi mesurable sur $[0, \hat{T}]$. Montrons que, comme f, $\hat{f}$ vérifie les hypothèses (a_1) et (a_2). Soit $\eta > 0$, alors par (2.4.20), il existe une fonction positive $k_\eta(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I, \mathbb{R})$ telle que pour tout $(x,y) \in \mathrm{B}_H(0,\eta) \times \mathrm{B}_H(0,\eta)$ et pour tout $t \in [0, \hat{T}]$, on a

$$\|\hat{f}(t,x) - \hat{f}(t,y)\| \leq \frac{1}{(\alpha+\beta)(\gamma^{-1}(t))+1} k_\eta(\gamma^{-1}(t))\|x-y\|.$$

On pose $\kappa_\eta(t) = \frac{1}{(\alpha+\beta)(\gamma^{-1}(t))+1} k_\eta(\gamma^{-1}(t))$, donc $\kappa_\eta(\cdot) \in \mathrm{L}^1([0,\hat{T}], \mathbb{R})$. En effet, en posant $s = \gamma^{-1}(t)$, on trouve $t = \gamma(s)$, d'où $dt = ((\alpha+\beta)(s)+1)ds$. Donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\hat{T}} \kappa_\eta(t) &= \int_{T_0}^{T} \frac{k_\eta(s)}{(\alpha+\beta)(s)+1}((\alpha+\beta)(s)+1)ds \\ &= \int_{T_0}^{T} k_\eta(s)ds < +\infty \end{aligned}$$

De, par (2.4.21), $\gamma^{-1}(\cdot)$ est bijective de $[0, \hat{T}]$ dans $[T_0, T]$, alors pour tout $s \in [T_0, T]$ il existe un unique $t \in [0, \hat{T}]$ tel que $s = \gamma^{-1}(t)$. Par conséquent, $\bigcup_{s \in I} C(s) = \bigcup_{t \in [0,\hat{T}]} \hat{C}(t)$.

De plus, pour tout $(t,x) \in [0,\hat{T}] \times \bigcup_{s\in[0,\hat{T}]} \hat{C}(s)$, on a

$$\hat{f}(t,x) \in \frac{\alpha(\gamma^{-1}(t))}{(\alpha+\beta)(\gamma^{-1}(t))+1}(1+\|x\|)K.$$

Puisque K est convexe, $\frac{\alpha(\gamma^{-1}(t))}{(\alpha+\beta)(\gamma^{-1}(t))+1} < 1$ et $0 \in K$, il résulte, comme précédemment

$$\hat{f}(t,x) \in (1+\|x\|)K.$$

Par conséquent, en prenant (2.4.20) en considération, par le Théorème 2.2, pour $l = 2\left(\|x_0\| + \frac{3}{2} + \int_0^{\hat{T}} |\dot{V}(s)|ds\right)$, il existe une application absolument continue $w(\cdot) : [0, \hat{T}] \to H$ et une application intégrable $\hat{z}(\cdot) : [0, \hat{T}] \to H$ tel que $w(0) = x_0$ et, pour presque tout $t \in [0, \hat{T}]$

$$\hat{z}(t) \in 2(l+1)\, K, \tag{2.4.25}$$

$$\|\dot{w}(t) + \hat{z}(t) + \hat{f}(t, w(t))\| \leq (l+1)(|\dot{V}(t)|+3), \tag{2.4.26}$$

$$\|\hat{f}(t, w(t))\| \leq l \tag{2.4.27}$$

et

$$\begin{cases} \hat{z}(t) \in \hat{F}(t, w(t)) \\ -\dot{w}(t) \in N(\hat{C}(t), w(t)) + \hat{z}(t) + \hat{f}(t, w(t)). \end{cases} \tag{2.4.28}$$

Étape 2. Montrons que l'application absolument continue $u : [T_0, T] \to H$ définie par, $u(t) = w(\gamma(t))$ est une solution de $(\mathcal{P}_{F,f})$.

On pose $I_1 = \{t \in [T_0, T] : \ \dot{\gamma}(t) \text{ existe}\}$ et

$$I_2 = \{\hat{t} \in [0, \hat{T}] : \ \dot{w}(\hat{t}) \text{ existe et (2.4.28) est obtenue en } \ \hat{t}\}.$$

On considère les sous ensembles $N_1 = [T_0, T] \setminus I_1$ et $\hat{N}_2 = [0, \hat{T}] \setminus I_2$, qui sont négligeables, et on pose $N_2 = \{t \in [T_0, T] : \ \gamma(t) \in \hat{N}_2\} = \gamma^{-1}(\hat{N}_2)$.
Puisque $\gamma^{-1}(\cdot)$ est lipschitzienne sur $[0, \hat{T}]$, l'ensemble N_2 est aussi négligeable. Donc $N = N_1 \cup N_2$ est aussi négligeable et, pour tout $t \in [T_0, T] \setminus N$,

$$\dot{u}(t) = \dot{\gamma}(t)\dot{w}(\gamma(t)) = (\alpha(t) + \beta(t) + 1)\dot{w}(\gamma(t)). \tag{2.4.29}$$

Les définitions des ensembles négligeables ci-dessus, avec (2.4.22) et (2.4.28), entrainent que, pour tout $t \in [T_0, T] \setminus N$,

$$\begin{cases} \hat{z}(\gamma(t)) \in \dfrac{1}{(\alpha + \beta)(t) + 1} F(t, u(t)) \\ -\dot{w}(\gamma(t)) \in N\big(C(t), u(t)\big) + \hat{z}(\gamma(t)) + \dfrac{1}{(\alpha + \beta)(t) + 1} f(t, u(t)). \end{cases}$$

Donc, en définissant $z(\cdot) : [T_0, T] \to H$ par

$$z(t) = (\alpha(t) + \beta(t) + 1)\hat{z}(\gamma(t)),$$

on obtient, par (2.4.11), pour tout $t \in [T_0, T] \setminus N$

$$\begin{cases} z(t) \in F(t, u(t)) \\ -\dot{u}(t) \in N(C(t), u(t)) + z(t) + f(t, u(t)). \end{cases} \tag{2.4.30}$$

Maintenant, notons que pour presque tout $t \in [0, \hat{T}]$

$$\dot{V}(t) = \frac{d}{dt}(\gamma^{-1}(t)).\dot{v}(\gamma^{-1}(t)).$$

Puisque $t = \gamma \circ \gamma^{-1}(t)$ on obtient $1 = \dfrac{d}{dt}(\gamma^{-1}(t))\dot{\gamma}(\gamma^{-1}(t))$, mais $\dot{\gamma}(t) = \alpha(t) + \beta(t) + 1$, d'où

$$\frac{d}{dt}(\gamma^{-1}(t)) = \frac{1}{(\alpha+\beta)(\gamma^{-1}(t)) + 1}.$$

On en déduit que

$$\dot{V}(t) = \frac{1}{(\alpha+\beta)(\gamma^{-1}(t)) + 1}\dot{v}(\gamma^{-1}(t)). \tag{2.4.31}$$

De plus, de (2.4.25), (2.4.26) et (2.4.27), on obtient pour presque tout $t \in [T_0, T]$,

$$z(t) \in 2(l+1)\Big(\alpha(t) + \beta(t) + 1\Big)K,$$

$$\|\dot{u}(t) + z(t) + f(t, u(t))\| \leq (l+1)\Big(|\dot{v}(t)| + 3(\alpha(t) + \beta(t) + 1)\Big),$$

$$\|f(t, u(t))\| \leq l\Big(\alpha(t) + \beta(t) + 1\Big).$$

D'où

$$\|\dot{u}(t)\| \leq 2(l+1)\Big(|\dot{v}(t)| + 3\big(\alpha(t) + \beta(t) + 1\big)\Big).$$

Finalement, (2.4.31) donne

$$\int_0^{\hat{T}} |\dot{V}(s)|ds = \int_0^{\hat{T}} \frac{1}{(\alpha+\beta)(\gamma^{-1}(s)) + 1}\dot{v}(\gamma^{-1}(s))ds = \int_{T_0}^{T} |\dot{v}(s)|ds,$$

et donc $l = 2\left(\|x_0\| + \frac{3}{2} + \int_{T_0}^T |\dot{v}(s)|ds\right)$.

Ceci complète la preuve. □

Remarque 2.2. *Soient F, f et C définis dans le Théorème 2.3. Supposons que pour un certain $M > 0$, $\bigcup_{s \in I} C(s) \subset M\mathrm{B}_H$ et on pose*

$$l = 2\left(M + \frac{3}{2} + \int_{T_0}^T |\dot{v}(s)|ds\right).$$

Alors, pour tout $I' = [T_0', T'] \subset I$ et tout $x_0' \in C(T_0')$, il existe une application absolument continue $u : I' \to H$ et une application intégrable $z(\cdot) : I' \to H$ telles que $u(T_0') = x_0'$ et, pour presque tout $t \in I'$,

$$z(t) \in F(t, u(t)), \quad -\dot{u}(t) \in N(C(t), u(t)) + z(t) + f(t, u(t)),$$

et

$$\|\dot{u}(t)\| \leq 2(l+1)\Big(|\dot{v}(t)| + 3\big(\alpha(t) + \beta(t) + 1\big)\Big).$$

2.5 Perturbation avec retard

Dans cette section, on va étudier le processus de la rafle perturbé avec retard, en utilisant les résultats du Théorème 2.3 et de la Remarque 2.2.

On suppose que I est l'intervalle $[0,T]$, en prenant $T_0 = 0$.

Soit $\rho > 0$ un retard fini. A chaque $t \in I$, on associe une application

$$\tau(t) : \mathcal{C}([-\rho, T], H) \to \mathcal{C}([-\rho, 0], H)$$

définie, pour tout $u(\cdot) \in \mathcal{C}([-\rho, T], H)$ par

$$(\tau(t)u(\cdot))(s) = u(t+s), \text{ pour tout } s \in [-\rho, 0].$$

Soient $C : [0,T] \rightrightarrows H$ et $F : I \times \mathcal{C}([-\rho, 0], H) \rightrightarrows H$ deux multiapplications, $f : I \times \mathcal{C}([-\rho, 0], H) \to H$ une application et soit φ un élément fixé de $\mathcal{C}([-\rho, 0], H)$ vérifiant $\varphi(0) \in C(0)$.

On va étudier l'existence de solutions pour le problème suivant

$$(P_\rho) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N(C(t), u(t)) + F(t, \tau(t)u(\cdot)) + f(t, \tau(t)u(\cdot)) \text{ p.p. } t \in I, \\ u(s) = \varphi(s) \quad \forall s \in [-\rho, 0], \\ u(t) \in C(t), \quad \forall t \in I. \end{cases}$$

On appelle solution de (P_ρ) toute application $u(\cdot) : [-\rho, T] \to H$ telle que la restriction $u_{|I}(\cdot)$ est absolument continue et $u(\cdot)$ vérifie (P_ρ).

Théorème 2.4. *Soit H un espace de Hilbert séparable. Supposons que $C(\cdot)$ vérifie (A_1) et (A_2) et que $C(t)$ est borné pour tout $t \in I$. Soit $F : I \times \mathcal{C}([-\rho, 0], H) \rightrightarrows H$ une multiapplication à valeurs non vides convexes compactes, vérifiant*

(i) pour tout $\phi \in \mathcal{C}([-\rho, 0], H)$, $F(\cdot, \phi)$ est $\mathcal{L}(I)$-mesurable ;

(ii) pour tout $t \in I$, $F(t, \cdot)$ est semicontinue supérieurement sur $\mathcal{C}([-\rho, 0], H)$;

(iii) pour un sous ensemble compact $K \subset \overline{\mathrm{B}}_H$ et pour une fonction positive $\beta(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I, \mathbb{R})$ on a, pour tout $t \in I$ et tout $\phi \in \mathcal{C}([-\rho, 0], H)$ l'inclusion

$$F(t, \phi) \subset \beta(t)(1 + \|\phi(0)\|)K.$$

Soit $f : I \times \mathcal{C}([-\rho, 0], H) \to H$ une application mesurable sur I satisfaisant les hypothèses suivantes

(a_1) *pour tout $\eta > 0$ il existe une fonction positive $k_\eta(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I, \mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in I$ et pour tous $\phi, \psi \in B_{\mathcal{C}([-\rho,0],H)}(0, \eta)$,*

$$\|f(t, \phi) - f(t, \psi)\| \leq k_\eta(t)\|\phi - \psi\|_{\mathcal{C}};$$

(a_2) *il existe une fonction positive $\alpha(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $t \in I$ et pour tout $\phi \in \mathcal{C}([-\rho, 0], H)$,*

$$\|f(t, \phi)\| \leq \alpha(t)(1 + \|\phi(0)\|).$$

Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}([-\rho, 0], H))$ avec $\varphi(0) \in C(0)$, le problème (P_ρ) admet au moins une solution continue $u(\cdot)$ qui est absolument continue sur $[0, T]$.

Preuve.

On suppose sans perdre de généralités que K est convexe et contient 0.

On va utiliser une discrétisation donnée par Castaing et Ibrahim [21] (voir aussi [24]).

On commence par remarquer que, puisque $C(t)$ est bornée pour tout $t \in I$, la fonction $t \mapsto \sup\{\|x\| : \ x \in C(t)\}$ prend des valeurs finies et grâce à (A_2), elle est semicontinue supérieurement sur I. En effet, pour tous $t, s \in I$ et tout $y \in C(t)$, (A_2) devient

$$d(y, C(s)) = \inf_{x \in C(s)} \|y - x\| \leq |v(t) - v(s)|,$$

d'où

$$\|y\| - \sup_{x \in C(s)} \|x\| \leq |v(t) - v(s)|.$$

La relation étant vraie pour tout $y \in C(t)$, on obtient

$$\sup_{y \in C(t)} \|y\| - \sup_{x \in C(s)} \|x\| \leq |v(t) - v(s)|.$$

Puisque $v(\cdot)$ est absolument continue, quand $t \to s$ on trouve

$$\limsup_{t \to s} \sup_{y \in C(t)} \|y\| \leq \sup_{x \in C(s)} \|x\|,$$

d'où la semicontinuité supérieure de la fonction $t \mapsto \sup\{\|x\| :\ x \in C(t)\}$. Alors elle atteint son supremum sur I.

Comme résultat, pour un certain $M > 0$, on aura

$$\bigcup_{s\in I} C(s) \subset M\mathrm{B}_H.$$

Posons

$$l = 2\left(M + \frac{3}{2} + \int_0^T |\dot{v}(s)|ds\right).$$

Pour tout $n \geq 1$, on considère la partition de $[0, T]$ définie par les points $t_j^n = \frac{jT}{n}$ ($j \in \{0, \ldots, n\}$).

On va construire une suite d'applications $(u_n(\cdot))$ dans $\mathcal{C}([-\rho, T], H))$ qui admet une sous suite uniformément convergente sur $[-\rho, T]$ vers la solution cherchée.

Étape 1. Construction de la suite $(u_n(\cdot))$.

On définit sur $[-\rho, t_1^n] \times H$ l'application $g_0^n(\cdot, \cdot)$ par

$$g_0^n(t, x) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in [-\rho, 0] \\ \varphi(0) + \frac{n}{T}t(x - \varphi(0)) & \text{si } t \in [0, t_1^n]. \end{cases}$$

On considère la multiapplication $F_0^n : [0, t_1^n] \times H \rightrightarrows H$ définit par

$$F_0^n(t, x) = F\Big(t, \tau(t_1^n)g_0^n(\cdot, x)\Big).$$

On a pour tout $x, y \in H$,

$$\begin{aligned} \|\tau(t_1^n)g_0^n(\cdot, x) - \tau(t_1^n)g_0^n(\cdot, y))\|_{\mathcal{C}} &= \sup_{s\in[-\rho,0]} \|g_0^n(t_1^n + s, x) - g_0^n(t_1^n + s, y)\| \\ &= \sup_{s\in[-\rho+t_1^n, t_1^n]} \|g_0^n(s, x) - g_0^n(s, y)\| \\ &\leq \sup_{s\in[0,t_1^n]} \|g_0^n(s, x) - g_0^n(s, y)\| \\ &\leq \sup_{s\in[0,t_1^n]} \frac{n}{T} s\|x - y\| \\ &\leq \|x - y\|. \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Donc, l'application $x \mapsto \tau(t_1^n)g_0^n(\cdot, x)$ est lipschitzienne de H dans $\mathcal{C}([-\rho, 0], H))$. Par suite, pour tout $t \in I$, $F_0^n(t, \cdot)$ est semicontinue supérieurement sur H comme composition de multiapplication semicontinue supérieurement et fonction continue. De plus, pour tout $x \in$

H, $F_0^n(\cdot,x)$ est mesurable sur $[0,t_1^n]$ grâce à la mesurabilité de $F(\cdot,x)$, et par (iii), du fait que $g_0^n(t_1^n,x)=x$, on a

$$F_0^n(t,x)\subset \beta(t)(1+\|x\|)K,$$

pour tout $(t,x)\in I\times H$.

On définit maintenant l'application $f_0^n:[0,t_0^n]\times H\to H$ par

$$f_0^n(t,x)=f\Big(t,\tau(t_1^n)g_0^n(\cdot,x)\Big).$$

Soit $\eta>0$ et soit $x\in \mathrm{B}_H(0,\eta)$, alors on a

$$\begin{aligned}
\|\tau(t_1^n)g_0^n(\cdot,x)\|_{\mathcal{C}} &= \sup_{s\in[-\rho,0]}\|g_0^n(t_1^n+s,x)\|\\
&\le \max\Big\{\sup_{s\in[0,t_1^n]}\|g_0^n(s,x)\|,\|\varphi\|_{\mathcal{C}}\Big\}\\
&\le \max\Big\{\sup_{s\in[0,t_1^n]}\frac{n}{T}s\|x\|+(1-\frac{n}{T}s)\|\varphi(0)\|,\|\varphi\|_{\mathcal{C}}\Big\}\\
&\le \|x\|+\|\varphi\|_{\mathcal{C}}<\eta+\|\varphi\|_{\mathcal{C}}.
\end{aligned}$$

Donc, par (a_1) et (2.5.1), il existe une fonction positive $k_{\eta+\|\varphi\|_{\mathcal{C}}}(\cdot)\in \mathrm{L}^1([0,t_1^n],\mathbb{R})$ telle que pour tout $x,y\in \mathrm{B}_H(0,\eta)$, on a

$$\|f_0^n(t,x)-f_0^n(t,y)\|\le k_{\eta+\|\varphi\|_{\mathcal{C}}}(t)\|x-y\|.$$

De plus, comme précédemment, par (a_2) et le fait que $g_0^n(t_1^n,x)=x$, on a

$$\|f_0^n(t,x)\|\le \alpha(t)(1+\|x\|),$$

pour tout $t\in I$ et $x\in \bigcup\limits_{s\in I}C(s)$. Par conséquent, par le Théorème 2.3 et la Remarque 2.2, il existe deux applications $u_0^n(\cdot),z_0^n(\cdot):[0,t_1^n]\to H$ telles que u_0^n est absolument continue, $u_0^n(0)=\varphi(0)$, $z_0^n(\cdot)$ est intégrable et, pour presque tout $t\in[0,t_1^n]$

$$z_0^n(t)\in F_0^n\big(t,u_0^n(t)\big),\quad \dot u_0^n(t)+z_0^n(t)+f_0^n\big(t,u_0^n(t)\big)\in -N\big(C(t),u_0^n(t)\big),$$

et

$$\|\dot u_0^n(t)\|\le 2(l+1)\Big(|\dot v(t)|+3\big(\alpha(t)+\beta(t)+1\big)\Big). \tag{2.5.2}$$

Maintenant, on définit $g_1^n : [-\rho, t_2^n] \times H \to H$ par

$$g_1^n(t,x) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in [-\rho, 0] \\ u_0^n(t) & \text{si } t \in [0, t_1^n] \\ u_0^n(t_1^n) + \frac{n}{T}(t - t_1^n)(x - u_0^n(t_1^n)) & \text{si } t \in [t_1^n, t_2^n]. \end{cases}$$

On a, pour tout $x, y \in H$

$$\begin{aligned} \|\tau(t_2^n)g_1^n(\cdot,x) - \tau(t_2^n)g_1^n(\cdot,y)\|_{\mathcal{C}} &= \sup_{s\in[-\rho,0]} \|g_1^n(t_2^n + s, x) - g_0^n(t_2^n + s, y)\| \\ &= \sup_{s\in[-\rho+t_2^n, t_2^n]} \|g_1^n(s,x) - g_1^n(s,y)\| \\ &\leq \sup_{s\in[t_1^n,t_2^n]} \|g_1^n(s,x) - g_1^n(s,y)\| \\ &\leq \sup_{s\in[t_1^n,t_2^n]} \frac{n}{T}(s - t_1^n)\|x - y\| \\ &\leq \|x - y\|. \end{aligned}$$

Ceci montre que l'application $x \mapsto \tau(t_2^n)g_1^n(\cdot, x)$ est continue de H dans $\mathcal{C}([-\rho, 0], H)$. Alors comme précédemment, la multiapplication $F_1^n : [t_1^n, t_2^n] \times H \rightrightarrows H$ définie par

$$F_1^n(t,x) = F\Big(t, \tau(t_2^n)g_1^n(\cdot,x)\Big)$$

vérifie les hypothèses (i)-(iii) dans le Théorème 2.3.

D'autre part, pour $\eta > 0$ et $x \in \mathrm{B}_H(0,\eta)$, on a

$$\begin{aligned} \|\tau(t_2^n)g_1^n(\cdot,x)\|_{\mathcal{C}} &= \sup_{s\in[-\rho,0]} \|g_1^n(t_2^n + s, x)\| \\ &\leq \max\Big\{ \sup_{s\in[t_1^n,t_2^n]} \|g_1^n(s,x)\|, \sup_{s\in[0,t_1^n]} \|u_0^n(s)\|, \|\varphi\|_{\mathcal{C}} \Big\} \\ &\leq \max\Big\{ \sup_{s\in[t_1^n,t_2^n]} \frac{n}{T}(s - t_1^n)\|x\| + (1 - \frac{n}{T}(s - t_1^n))\|u_0^n(t_1^n)\|, \sup_{s\in[0,t_1^n]} \|u_0^n(s)\|, \|\varphi\|_{\mathcal{C}} \Big\} \\ &\leq \max\Big\{ \|x\| + \sup_{s\in[0,t_1^n]} \|u_0^n(s)\|, \|\varphi\|_{\mathcal{C}} \Big\}. \end{aligned}$$

Mais, de (2.5.2), on a pour tout $s \in [0, t_1^n]$

$$\begin{aligned} \|u_0^n(s)\| &\leq \|\varphi(0)\| + 2(l+1)\int_0^{t_1^n} \Big(|\dot{v}(t)| + 3\big(\alpha(t) + \beta(t) + 1\big)\Big)dt \\ &\leq \|\varphi(0)\| + 2(l+1)\int_0^{T} \Big(|\dot{v}(t)| + 3\big(\alpha(t) + \beta(t) + 1\big)\Big)dt = \|\varphi(0)\| + \varrho, \end{aligned}$$

où $\varrho = 2(l+1)\int_0^T \Big(|\dot{v}(t)| + 3\big(\alpha(t) + \beta(t) + 1\big)\Big)dt$. Donc

$$\|\tau(t_2^n)g_1^n(\cdot,x))\|_{\mathcal{C}} \leq \|x\| + \|\varphi\|_{\mathcal{C}} + \varrho < \eta + \|\varphi\|_{\mathcal{C}} + \varrho = \eta'.$$

Donc, en utilisant les mêmes arguments utilisés pour $f_0^n(\cdot,\cdot)$, la fonction $f_1^n(t,x) : [t_1^n, t_2^n] \times H \to H$ définie par

$$f_1^n(t,x) = f\Big(t, \tau(t_2^n) g_1^n(\cdot, x)\Big)$$

vérifie les hypothèses sur f dans le Théorème 2.3. Par conséquent, il existe deux applications $u_1^n(\cdot), z_1^n(\cdot) : [t_1^n, t_2^n] \to H$ telles que $u_1^n(\cdot)$ est absolument continue, $u_1^n(t_1^n) = u_0^n(t_1^n)$, $z_1^n(\cdot)$ est intégrable et pour tout $t \in [t_1^n, t_2^n]$,

$$z_1^n(t) \in F_1^n(t, u_1^n(t)), \quad \dot{u}_1^n(t) + z_1^n(t) + f_1^n(t, u_1^n(t)) \in -N(C(t), u_1^n(t)),$$

et

$$\|\dot{u}_1^n(t)\| \le 2(l+1)\Big(|\dot{v}(t)| + 3\big(\alpha(t) + \beta(t) + 1\big)\Big).$$

Maintenant, on suppose que $(u_0^n(\cdot), z_0^n(\cdot)), \dots, (u_{j-1}^n(\cdot), z_{j-1}^n(\cdot))(1 \le j \le n-1)$ sont définies de manière similaire.

On définit $g_j^n : [-\rho, t_{j+1}^n] \times H \to H$ par

$$g_j^n(t,x) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in [-\rho, 0] \\ u_i^n(t) & \text{si } t \in [t_i^n, t_{i+1}^n], i \in \{0, \dots, j-1\} \\ u_{j-1}^n(t_j^n) + \frac{n}{T}(t - t_j^n)(x - u_{j-1}^n(t_j^n)) & \text{si } t \in [t_j^n, t_{j+1}^n]. \end{cases}$$

Alors, pour tout $x, y \in H$, on a

$$\|\tau(t_{j+1}^n) g_j^n(\cdot, x) - \tau(t_{j+1}^n) g_j^n(\cdot, y)\|_{\mathcal{C}} \le \|x - y\|,$$

et pour tout $\eta > 0$ et $x \in \mathrm{B}_H(0, \eta)$, on a

$$\begin{aligned} \|\tau(t_{j+1}^n) g_j^n(\cdot, x)\|_{\mathcal{C}} &\le \max\Big\{ \sup_{s \in [t_j^n, t_{j+1}^n]} \frac{n}{T}(s - t_j^n)\|x\| + (1 - \frac{n}{T}(s - t_j^n))\|u_i^n(t_{j-1}^n)\|, \\ &\qquad \max_{i \in \{0, \dots, j-1\}} \big\{ \sup_{s \in [t_i^n, t_{i+1}^n]} \|u_i^n(s)\| \big\}, \|\varphi\|_{\mathcal{C}} \Big\} \\ &\le \max\Big\{ \|x\| + \max_{i \in \{0, \dots, j-1\}} \big\{ \sup_{s \in [t_i^n, t_{i+1}^n]} \|u_i^n(s)\| \big\}, \|\varphi\|_{\mathcal{C}} \Big\}. \end{aligned}$$

Mais, on a pour tout $s \in [t_i^n, t_{i+1}^n],\ i \in \{0, \dots, j-1\}$

$$\begin{aligned}
\|u_i^n(s)\| &\leq \|u_{i-1}^n(t_i^n)\| + (4l+2)\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\Big(|\dot{v}(t)| + 3\big(\alpha(t)+\beta(t)+1\big)\Big)dt \\
&\leq \|u_{i-2}^n(t_{i-1}^n)\| + (4l+2)\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}\Big(|\dot{v}(t)| + 3\big(\alpha(t)+\beta(t)+1\big)\Big)dt \\
&+ (4l+2)\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\Big(|\dot{v}(t)| + 3\big(\alpha(t)+\beta(t)+1\big)\Big)dt \\
&\leq \|\varphi(0)\| + (4l+2)\int_0^{t_{i+1}^n}\Big(|\dot{v}(t)| + 3\big(\alpha(t)+\beta(t)+1\big)\Big)dt \\
&\leq \|\varphi\|_{\mathcal{C}} + \varrho.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|\tau(t_{j+1}^n)g_j^n(\cdot,x)\|_{\mathcal{C}} \leq \|x\| + \|\varphi\|_{\mathcal{C}} + \varrho < \eta + \|\varphi\|_{\mathcal{C}} + \varrho \tag{2.5.3}$$

Donc, comme ci-dessus, en considérant la multiapplication $F_j^n(t,x) : [t_j^n, t_{j+1}^n] \times H \rightrightarrows H$ définie par

$$F_j^n(t,x) = F\Big(t, \tau(t_{j+1}^n g_j^n(\cdot,x))\Big),$$

et l'application $f_j^n(t,x) : [t_j^n, t_{j+1}^n] \times H \to H$ définie par

$$(t,x) \mapsto f_j^n(t,x) = f\Big(t, \tau(t_{j+1}^n)g_j^n(\cdot,x))\Big),$$

du Théorème 2.3, il existe deux applications $u_j^n(\cdot), z_j^n(\cdot) : [t_j^n, t_{j+1}^n] \to H$ telles que $u_j^n(\cdot)$ est absolument continue, $u_j^n(t_j^n) = u_{j-1}^n(t_j^n)$, $z_j^n(\cdot)$ est intégrable et, pour presque tout $t \in [t_j^n, t_{j+i}^n]$,

$$z_j^n(t) \in F_j^n(t, u_j^n(t)), \quad \dot{u}_j^n(t) + z_j^n(t) + f_j^n(t, u_j^n(t)) \in -N(C(t), u_j^n(t)),$$

et

$$\|\dot{u}_j^n(t)\| \leq 2(l+1)\Big(|\dot{v}(t)| + 3\big(\alpha(t)+\beta(t)+1\big)\Big).$$

On définit l'application $u_n(\cdot) : [-\rho, T] \to H$ par

$$u_n(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in [-\rho, 0], \\ u_j^n(t) & \text{si } t \in [t_j^n, t_{j+1}^n] (j \in \{0,\ldots,n-1\}). \end{cases}$$

Alors, pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$

$$g_j^n(t,x) = \begin{cases} u_n(t) & \text{si } t \in [-\rho, t_j^n], \\ u_n(t_j^n) + \frac{n}{T}(t - t_j^n)(x - u_n(t_j^n)) & \text{si } t \in [t_j^n, t_{j+1}^n]. \end{cases}$$

Ponsons $\theta_n(t) = t_{j+1}^n$ et $z_n(t) = z_j^n(t)$ si $t \in]t_j^n, t_{j+1}^n]$ pour $j \in \{0, \dots, n-1\}$.

Avec ces notations, on a par construction, $u_n(0) = \varphi(0)$ et pour presque tout $t \in I$,

$$z_n(t) \in F\Big(t, \tau(\theta_n(t)) g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t))\Big), \tag{2.5.4}$$

$$\dot{u}_n(t) + z_n(t) + f\Big(t, \tau(\theta_n(t)) g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t))\Big) \in -N(C(t), u_n(t)), \tag{2.5.5}$$

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq a(t) = 2(l+1)\Big(|\dot{v}(t)| + 3\big(\alpha(t) + \beta(t) + 1\big)\Big), \tag{2.5.6}$$

et $u_n(s) = \varphi(s)$ pour tout $s \in [-\rho, 0]$.

Pour tout $t \in I$, il existe $j \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $t \in [t_j^n, t_{j+1}^n]$, et puisque pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$ $u_n(\cdot)$ est absolument continue sur $[t_j^n, t_{j+1}^n]$ on a

$$u_n(t) = u_n(t_j^n) + \int_{t_j^n}^t \dot{u}_n(s) ds = u_n(t_{j-1}^n) + \int_{t_{j-1}^n}^t \dot{u}_n(s) ds.$$

D'où, en procédant par récurrence, on obtient

$$u_n(t) = u_n(0) + \int_0^t \dot{u}_n(s) ds = \varphi(0) + \int_0^t \dot{u}_n(s) ds, \tag{2.5.7}$$

c'est à dire que $u_n(\cdot)$ est absolument continue sur I.

Grâce à (2.5.4), (2.5.6) et (iii), pour tout $t \in I$

$$z_n(t) \in \beta(t)\Big(1 + \Big\|\Big(\tau(\theta_n(t)) g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t))\Big)(0)\Big\|\Big)K,$$

et par (2.5.7) on a

$$\|u_n(t)\| \leq \|\varphi(0)\| + \int_0^T a(s) ds \leq \|\varphi\|_{\mathcal{C}} + \varrho.$$

Puisque, de (2.5.3),

$$\begin{aligned} \Big\|\Big(\tau(\theta_n(t)) g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t))\Big)(0)\Big\| &\leq \|\tau(\theta_n(t)) g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t))\|_{\mathcal{C}} \\ &= \Big\|g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(\theta_n(t), u_n(t))\Big\| \\ &\leq \|u_n(t)\| + \|\varphi\|_{\mathcal{C}} + \varrho \\ &\leq 2(\varrho + \|\varphi\|_{\mathcal{C}}), \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

K convexe et $0 \in K$ on obtient

$$z_n(t) \in \beta(t)\Big(1 + 2\varrho + 2\|\varphi\|_{\mathcal{C}}\Big)K. \tag{2.5.9}$$

De plus, par (a_2) on a

$$\begin{aligned} \|f(t, \tau(\theta_n(t))g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t)))\| &\leq \alpha(t)\Big(1 + \Big\|\Big(\tau(\theta_n(t))g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t))\Big)(0)\Big\|\Big) \\ &\leq \alpha(t)\Big(1 + 2\varrho + 2\|\varphi\|_{\mathcal{C}}\Big). \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

et donc, en posant $A = 1 + 2\varrho + 2\|\varphi\|_{\mathcal{C}}$

$$\|\dot{u}_n(t) + z_n(t)\| \leq \gamma(t) = a(t) + A\beta(t), \tag{2.5.11}$$

et

$$\Big\|\dot{u}_n(t) + z_n(t) + f\Big(t, \tau(\theta_n(t))g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t))\Big)\Big\| \leq a(t) + A\big(\beta(t) + \alpha(t)\big). \tag{2.5.12}$$

Étape 2. Nous allons montrer dans cette étape que $(u_n(\cdot))$ admet une sous suite convergente dans $\mathcal{C}([-\rho, T], H)$.

Pour cela, considérons l'application $Z_n(\cdot) : I \to H$ définie par

$$Z_n(t) = \int_0^t z_n(s)ds,$$

et prouvons que la suite $(Z_n(\cdot))$ admet une sous suite uniformément convergente.

Par (2.5.11) et le fait que K est fermé convexe, pour tout $t \in I$,

$$Z_n(t) \in A\left(\int_0^t \beta(s)ds\right)K,$$

et donc, puisque $0 \in K$, pour tout $t \in I$, l'ensemble $\{Z_n(t),\ n \geq n_0\}$ est contenu dans l'ensemble fortement compact $A\left(\int_0^T \beta(s)ds\right)K$. Cela avec (2.5.10) entraine, par le théorème d'Ascoli-Arzelà, que la suite $(Z_n(\cdot))$ admet une sous suite (aussi notée $(Z_n(\cdot))$) qui converge uniformément dans $\mathcal{C}([-\rho, T], H)$ vers une certaine application $Z(\cdot) \in \mathcal{C}(I, H)$. Par (2.5.10), on a pour tout $t \in I$

$$\|z_n(t)\| \leq A\beta(t),$$

on peut donc supposer de plus que, pour une certaine application $z(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I, H)$,

$$z_n(\cdot) \rightharpoonup z(\cdot) \ \text{ dans } \mathrm{L}^1(I, H). \tag{2.5.13}$$

Maintenant, $(Z_n(\cdot))$ étant une sous suite qui converge uniformément vers $Z(\cdot)$, on pose $w_n(t) = u_n(t) + Z_n(t)$. On cherche à prouver que $(w_n(\cdot))$ est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}(I, H), \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$.

Grâce à la propriété d'hypomonotonie du cône normal, il découle de (2.5.5) et de (2.5.12) que pour $n, m \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $t \in I$,

$$\Big\langle \dot{w}_n(t) + f\Big(t, \tau(\theta_n(t)) g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t))\Big) - \dot{w}_m(t) - f\Big(t, \tau(\theta_m(t)) g^m_{\frac{m}{T}\theta_m(t)-1}(\cdot, u_m(t))\Big), u_n(t) - u_m(t)\Big\rangle \\ \leq \frac{1}{r}\delta(t)\|u_n(t) - u_m(t)\|^2. \tag{2.5.14}$$

Donc

$$\Big\langle \dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t), u_n(t) - u_m(t)\Big\rangle \leq \frac{1}{r}\delta(t)\Big(\|w_n(t) - w_m(t)\| + \|Z_n(t) - Z_m(t)\|\Big)^2 + \\ \Big\langle f\Big(t, \tau(\theta_m(t)) g^m_{\frac{m}{T}\theta_m(t)-1}(\cdot, u_m(t))\Big) - f\Big(t, \tau(\theta_n(t)) g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t))\Big), u_n(t) - u_m(t)\Big\rangle. \tag{2.5.15}$$

Soit $\eta > 2(\|\varphi\|_{\mathcal{C}} + \varrho)$. Par (2.5.8), pour tout $t \in I$ on a

$$\|\tau(\theta_n(t)) g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t))\|_{\mathcal{C}} < \eta.$$

Donc, par hypothèse (a_1), il existe une fonction $k_\eta(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I, \mathbb{R})$ telle que $f(t, \cdot)$ est $k_\eta(t)$-lipschitzienne sur $\mathrm{B}_H(0, \eta)$. On obtient alors

$$\Big\langle f\Big(t, \tau(\theta_m(t)) g^m_{\frac{m}{T}\theta_m(t)-1}(\cdot, u_m(t))\Big) - f\Big(t, \tau(\theta_n(t)) g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t))\Big), u_n(t) - u_m(t)\Big\rangle \\ \leq k_\eta(t)\|\tau(\theta_m(t)) g^m_{\frac{m}{T}\theta_m(t)-1}(\cdot, u_m(t)) - \tau(\theta_n(t)) g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t))\|_{\mathcal{C}} \cdot \|u_n(t) - u_m(t)\| \tag{2.5.16}$$

Pour tout $t \in]0, T]$ et pour tous $n, m \geq 1$, il existe $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ et $k \in \{0, \ldots, m-1\}$ tels que $t \in]t^n_j, t^n_{j+1}] \cap]t^m_k, t^m_{k+1}]$. Donc $\theta_n(t) = t^n_{j+1}$ et $\theta_m(t) = t^m_{k+1}$. Par suite

$$\|\tau(\theta_m(t)) g^m_{\frac{m}{T}\theta_m(t)-1}(\cdot, u_m(t)) - \tau(\theta_n(t)) g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t))\|_{\mathcal{C}} \\ = \sup_{s \in [-\rho, 0]} \|g^m_k(t^m_{k+1} + s, u_m(t)) - g^n_j(t^n_{j+1} + s, u_n(t))\|. \tag{2.5.17}$$

Soit $s \in [-\rho, 0]$, on distingue 4 cas.

Si $t_{k+1}^m + s \in [-\rho, t_k^m]$ et $t_{j+1}^n + s \in [-\rho, t_j^n]$ alors

$$\|g_k^m(t_{k+1}^m + s, u_m(t)) - g_j^n(t_{j+1}^n + s, u_n(t))\| = \|u_m(t) - u_n(t)\|.$$

Si $t_{k+1}^m + s \in [t_k^m, t_{k+1}^m]$ et $t_{j+1}^n + s \in [-\rho, t_j^n]$

$$\begin{aligned}
\|g_k^m(t_{k+1}^m + s, u_m(t)) - g_j^n(t_{j+1}^n + s, u_n(t))\| &= \|u_m(t_k^m) - u_n(t) + \frac{m}{T}(t_{k+1}^m + s - t_k^m)(u_m(t) - u_n(t_j^n))\| \\
&\leq \|u_m(t_k^m) - u_n(t)\| + \frac{m}{T}(t_{k+1}^m + s - t_k^m)\|u_m(t) - u_n(t_j^n)\| \\
&\leq \|u_m(t_k^m) - u_n(t)\| + \|u_m(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u_n(t_j^n)\|
\end{aligned}$$

Si $t_{k+1}^m + s \in [-\rho, t_k^m]$ et $t_{j+1}^n + s \in [t_j^n, t_{j+1}^n]$

$$\|g_k^m(t_{k+1}^m+s, u_m(t)) - g_j^n(t_{j+1}^n+s, u_n(t))\| \leq \|u_m(t) - u_n(t_j^n)\| + \|u_n(t) - u_m(t)\| + \|u_n(t) - u_m(t_k^m)\|.$$

Si $t_{k+1}^m + s \in [t_k^m, t_{k+1}^m]$ et $t_{j+1}^n + s \in [t_j^n, t_{j+1}^n]$

$$\begin{aligned}
&\|g_k^m(t_{k+1}^m + s, u_m(t)) - g_j^n(t_{j+1}^n + s, u_n(t))\| \\
\leq\ & \|u_m(t_k^m) - u_n(t_j^n)\| + \frac{m}{T}(t_{k+1}^m + s - t_k^m)\|(u_m(t) - u_m(t_k^m))\| \\
&+ \frac{n}{T}(t_{j+1}^n + s - t_j^n)\|(u_n(t) - u_n(t_j^n))\| \\
\leq\ & 2\big(\|u_m(t_k^m) - u_m(t)\| + \|u_n(t) - u_n(t_j^n)\|\big) + \|u_m(t) - u_n(t)\|.
\end{aligned}$$

De (2.5.16) et en posant

$$\begin{cases} \rho_n(0) = 0 \\ \rho_n(t) = t_j^n \text{ si } t \in]t_j^n, t_{j+1}^n],\ j \in \{0, \cdots, n-1\}, \end{cases}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
&\Big\langle f(t, \tau(\theta_m(t)) g^m_{\frac{m}{T}\theta_m(t)-1}(\cdot, u_m(t))) - f(t, \tau(\theta_n(t)) g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t))), u_n(t) - u_m(t) \Big\rangle \\
&\leq k_\eta(t)\Big(2\big(\|u_m(\rho_m(t)) - u_m(t)\| + \|u_n(t) - u_n(\rho_n(t))\|\big) + \|u_m(t) - u_n(t)\|\Big) \cdot \|u_n(t) - u_m(t)\|.
\end{aligned} \tag{2.5.18}$$

Par (2.5.6), pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$, on a

$$\|u_n(t) - u_n(\rho_n(t))\| \leq \int_{\rho_n(t)}^t a(s)ds.$$

Donc, par (2.5.15), (2.5.16) et (2.5.18) on trouve

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t), w_n(t) - w_m(t)\Big\rangle \\
\leq\ & \Big(\frac{1}{r}\delta(t) + k_\eta(t)\Big)\Big(\|w_n(t) - w_m(t)\| + \|Z_n(t) - Z_m(t)\|\Big)^2 \\
+\ & 2(\varrho + \|\varphi\|_{\mathcal{C}})k_\eta(t)\left(\int_{\rho_n(t)}^t a(s)ds + \int_{\rho_m(t)}^t a(s)ds\right) + 2\gamma(t)\|Z_n(t) - Z_m(t)\|. \\
\leq\ & \Big(\frac{1}{r}\delta(t) + k_\eta(t)\Big)\|w_n(t) - w_m(t)\|^2 + \Big(\frac{1}{r}\delta(t) + k_\eta(t)\Big)\|Z_n(t) - Z_m(t)\|^2 \\
+\ & \Big(2\Big(\frac{1}{r}\delta(t) + k_\eta(t)\Big)\|w_n(t) - w_m(t)\| + 2\gamma(t)\Big)\|Z_n(t) - Z_m(t)\| \\
+\ & 2(\varrho + \|\varphi\|_{\mathcal{C}})k_\eta(t)\left(\int_{\rho_n(t)}^t a(s)ds + \int_{\rho_m(t)}^t a(s)ds\right).
\end{aligned}$$

En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varrho_n = \|Z_n(\cdot) - Z(\cdot)\|_{\mathcal{C}}$, on a $\varrho_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc la suite (ϱ_n) est borné dans $\mathbb{R}_+$ par une certaine constante qu'on note c, et par (2.5.11), $(w_n(\cdot))$ est uniformément bornée dans $\mathcal{C}(I, H)$ ($\|w_n(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \leq \|\varphi(0)\| + \int_0^T \gamma(s)ds$).

Alors on a

$$\begin{aligned}
\langle \dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t), w_n(t) - w_m(t)\rangle \leq \Big(\frac{1}{r}\delta(t) + k_\eta(t)\Big)\|w_n(t) - w_m(t)\|^2 + \\
\left(\Big(2c + 4\big(\|\varphi(0)\| + \int_0^T \gamma(s)ds\big)\Big)\Big(\frac{1}{r}\delta(t) + k_\eta(t)\Big) + 2\gamma(t)\right)(\varrho_n + \varrho_m) \\
+ 2(\varrho + \|\varphi\|_{\mathcal{C}})k_\eta(t)\left(\int_{\rho_n(t)}^t a(s)ds + \int_{\rho_m(t)}^t a(s)ds\right).
\end{aligned}$$

En posant

$$B = \max\left\{\frac{1}{r}\left(\Big(2c+4\big(\|\varphi(0)\|+\int_0^T \gamma(s)ds\big)\Big)\right)+2, \Big(2c+4\big(\|\varphi(0)\|+\int_0^T \gamma(s)ds\big)\Big)+2, 2(\varrho+\|\varphi\|_{\mathcal{C}})\right\},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\Big\langle \dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t), w_n(t) - w_m(t)\Big\rangle \leq \Big(\frac{1}{r}\delta(t) + k_\eta(t)\Big)\|w_n(t) - w_m(t)\|^2 + \\
B\big(k_\eta(t) + \delta(t)\big)\left(\int_{\rho_n(t)}^t a(s)ds + \int_{\rho_m(t)}^t a(s)ds + \varrho_n + \varrho_m\right).
\end{aligned}$$

Puisque $a(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I, \mathbb{R})$, $\rho_n(t) \to t$ pour tout t et $\varrho_n \to 0$ quand $n \to \infty$, et en posant

$$G_{nm}(t) = B(k_\eta(t) + \delta(t))\left(\int_{\rho_n(t)}^t a(s)ds + \int_{\rho_m(t)}^t a(s)ds + \varrho_n + \varrho_m\right),$$

on trouve

$$\lim_{n,m\to\infty} G_{nm}(t) = 0 \quad \text{p.p. } t \in I.$$

Alors par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue on conclut

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_0^T G_{nm}(s)ds = 0.$$

Ceci avec le fait que $\|w_n(0) - w_m(0)\| = 0$ implique, par le Lemme 2.2 que

$$\lim_{n,m\to\infty} \|w_n(\cdot) - w_m(\cdot)\|_{\mathcal{C}} = 0.$$

On en déduit que la suite $(w_n(\cdot))$ est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}(I,H), \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$ et donc elle converge uniformément dans $\mathcal{C}(I,H)$. Comme résultat, la suite $(u_n(\cdot))$ converge uniformément dans $\mathcal{C}(I,H)$ vers une certaine application $w(\cdot) \in \mathcal{C}(I,H)$. De plus, grâce à (2.5.6), la suite $(\dot{u}_n(\cdot))$ est faiblement relativement compact dans $\mathrm{L}^1(I,H)$, et donc on peut supposer que $(\dot{u}_n(\cdot))$ converge faiblement dans $\mathrm{L}^1(I,H)$ vers une certaine application $h(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I,H)$. Alors $w(\cdot)$ est absolument continue avec $\dot{w}(t) = h(t)$ pour presque tout $t \in I$ et donc

$$\dot{u}_n(\cdot) \rightharpoonup \dot{w}(\cdot) \text{ dans } \mathrm{L}^1(I,H). \tag{2.5.19}$$

Considérons l'application

$$u(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in [-\rho, 0] \\ w(t) & \text{si } t \in [0,t]. \end{cases}$$

Évidemment, la suite $(u_n(\cdot))$ converge uniformément vers $u(\cdot)$ dans $\mathcal{C}(I,H)$.

Étape 3. Maintenant, on vas prouver que $u(\cdot)$ est une solution du problème $(\mathcal{P}_\rho)$.

On commence par prouver que, pour tout $t \in [0,T]$ la suite $\Big(\tau(\theta_n(t)) g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t))\Big)_n$ converge vers $\tau(t)u(\cdot)$ dans l'espace des applications définies sur $[0,T]$ à valeurs dans l'espace $(\mathcal{C}([-\rho,0],H), \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$.

Fixons $t \in [0,T]$. Pour tout $n \geq 1$, il existe $j \in \{0, \cdots, n-1\}$ tel que $t^n_j \leq t \leq t^n_{j+1}$ et donc $\theta_n(t) = t^n_{j+1}$.

Alors

$$
\begin{aligned}
& \|\tau(\theta_n(t))g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(\cdot,u_n(t))-\tau(t)u(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \\
= & \sup_{s\in[-\rho,0]}\|g^n_j(t^n_{j+1}+s,u_n(t))-u(t+s)\| \\
= & \sup_{s\in[-\rho+t^n_{j+1},t^n_{j+1}]}\|g^n_j(s,u_n(t))-u(t+s-t^n_{j+1})\| \\
\leq & \sup_{s\in[-\rho+t^n_{j+1},t^n_{j+1}]}\|g^n_j(s,u_n(t))-u(s)\|+\sup_{s\in[-\rho+t^n_{j+1},t^n_{j+1}]}\|u(s)-u(t+s-t^n_{j+1})\| \\
\leq & \sup_{s\in[-\rho,t^n_j]}\|u_n(s)-u(s)\|+\sup_{s\in[t^n_{j+1},t^n_{j+1}]}\|g^n_j(s,u_n(t))-u(s)\| \\
+ & \sup_{s\in[-\rho+t^n_{j+1},t^n_{j+1}]}\|u(s)-u(t+s-t^n_{j+1})\|,
\end{aligned}
$$

il est clair que ,

$$\sup_{s\in[-\rho,t^n_j]}\|u_n(s)-u(s)\|\leq\|u_n(\cdot)-u(\cdot)\|_{\mathcal{C}},$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{s\in[-\rho,t^n_j]}\|u_n(s)-u(s)\|=0.$$

D'autre part

$$\sup_{s\in[t^n_{j+1},t^n_{j+1}]}\|g^n_j(s,u_n(t))-u(s)\|\leq\sup_{s\in[t^n_{j+1},t^n_{j+1}]}\|u_n(t^n_j)-u(s)\|+\|u_n(t^n_j)-u_n(t)\|.$$

Donc de la convergence uniforme de $(u_n(\cdot))$ vers $u(\cdot)$ et de la continuité uniforme de $u(\cdot)$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{s\in[t^n_{j+1},t^n_{j+1}]}\|g^n_j(s,u_n(t))-u(s)\|=0$$

Finalement, en utilisant une seconde fois la continuité uniforme de $u(\cdot)$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{s\in[-\rho+t^n_{j+1},t^n_{j+1}]}\|u(s)-u(t+s-t^n_{j+1})\|=0.$$

donc pour tout $t\in[0,T]$

$$\lim_{n\to\infty}\|\tau(\theta_n(t))g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(\cdot,u_n(t))-\tau(t)u(t)\|_{\mathcal{C}}=0.$$

La continuité de l'application $f(t,\cdot)$ implique que, pour tout $t\in I$,

$$f\Big(t,\tau(\theta_n(t))g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(\cdot,u_n(t))\Big)\to f\big(t,\tau(t)u(t)\big)\big). \tag{2.5.20}$$

Donc, comme dans la preuve du Théorème 2.1, grâce à (2.5.20), (2.5.19) et (2.5.13), par le lemme de Mazur et l'hypothèse (ii),

$$\dot{u}(t) + z(t) + f\big(t, \tau(t)u(\cdot)\big) \in -N(C(t), u(t)) \text{ p.p. } t \in I, \tag{2.5.21}$$

et grâce à (2.5.4), (2.5.13) et le fait que $F(t,\cdot)$ est semicontinue supérieurement, on obtient, par le lemme de Mazur

$$z(t) \in F\big(t, \tau(t)u(\cdot)\big) \quad \text{p.p. sur } \; I.$$

Ceci avec (2.5.21), implique que

$$-\dot{u}(t) \in N(C(t), u(t)) + F\big(t, \tau(t)u(\cdot)\big) + f\big(t, \tau(t)u(\cdot)\big).$$

Par conséquent, $u(\cdot)$ est une solution de $(\mathcal{P}_\rho)$. $\square$

CHAPITRE 3

Problèmes non linéaires pour des inclusions différentielles du second ordre

Sommaire

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions une classe de problèmes aux limites pour des inclusions différentielles du second ordre gouvernées par un opérateur maximal monotone et une perturbation non linéaire, qui est soit semicontinue mixte vérifiant la condition de Hartman, soit somme de deux multiapplications une semicontinue supérieurement et l'autre semicontinue inférieurement vérifiant la condition de Hartman généralisée. En utilisant des théorèmes de point fixe multivoque et la théorie des opérateurs monotones, deux théorèmes d'existence de solutions sont établis.

Notre but donc est l'étude des inclusions différentielles du second ordre avec conditions aux limites non linéaires de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}a(\dot{u}(t)) \in A(u(t)) + F(t, u(t)) \text{ p.p. sur } \ I = [0, T]; \\ (a(\dot{u}(0)), -a(\dot{u}(T))) \in \xi(u(0), u(T)), \end{cases} \tag{3.1.1}$$

et de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}a(\dot{u}(t)) \in A(u(t)) + F_1(t, u(t), \dot{u}(t)) + F_2(t, u(t), \dot{u}(t)) \text{ p.p. sur } \ I = [0, T]; \\ (a(\dot{u}(0)), -a(\dot{u}(T))) \in \xi(u(0), u(T)), \end{cases} \tag{3.1.2}$$

où $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une application continue et strictement monotone, $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ et $\xi : \mathcal{D}(\xi) \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ sont des opérateurs maximaux monotones, et $F : I \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ est une multiapplication semicontinue mixte vérifiant la condition de Hartman, $F_i : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N,\ i = 1, 2$ sont deux multiapplications semicontinue supérieurement et semicontinue inférieurement, respectivement leur somme vérifie la condition de Hartman généralisée.

Dans la littérature récente, nous trouvons divers résultats concernant les inclusions différentielles avec des conditions aux limites.

Dans [38], les auteurs mènent une étude détaillée du problème (3.1.1), où $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction définie par $a(x) = \|x\|^{p-2}x,\ p \geq 2$ et $F : I \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ est une multiapplications à valeurs convexes et de graphe fermé, ou bien à valeurs non convexes et est semicontinue inférieurement satisfaisant à la condition de Hartman suivante

H : il existe $M > 0$, tel que pour presque tout $t \in I$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ avec $\|x\| = M$ et tout $v \in F(t, x)$, on a $\langle v, x \rangle \geq 0$.

L'auteur dans [52] a étudié la même équation du problème (3.1.1), mais F à trois variables et avec d'autres conditions aux limites

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} a(\dot{u}(t)) \in A(u(t)) + F(t, u(t), \dot{u}(t)) \text{ p.p. sur } \; I = [0, T], \\ L(u(0), u(T), \dot{u}(0), \dot{u}(T)) = 0. \end{cases}$$

Les conditions aux limites exprimées par $L(u(0), u(T), \dot{u}(0), \dot{u}(T)) = 0$ peuvent être comme suit : $u(0) = u(T) = 0$ (problème de Dirichlet), $\dot{u}(0) = \dot{u}(b) = 0$ (problème de Neumann), ou $u(0) = \dot{u}(T) = 0$ (problème mixte).

Le problème (3.1.1) a été étudié dans [61] avec $a(\cdot)$ une application continue et strictement monotone vérifiant certaines hypothèses et F vérifie la condition de Hartman généralisée suivante

H' : il existe $M > 0$ et $\beta > 0$, tels que pour presque tout $t \in I$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}^N$ avec $\|x\| = M$, $\langle x, y \rangle = 0$, on a $\langle v, x \rangle + \beta \|y\|^p \geq 0$ pour tout $v \in F(t, x, y)$.

Les auteurs ont donné des théorèmes d'existence dans les deux cas « convexe » et « non convexe ». Dans le cas convexe, la multiapplication F est semicontinue supérieurement et dans le cas non convexe F est semicontinue inférieurement.

Ici, et dans la première section on s'intéresse au problème (3.1.2) avec somme de deux multiapplications, F_1 semicontinue supérieurement et F_2 semicontinue inférieurement. Dans la deuxième section nous étudions le cas « mixte », c'est à dire le problème (3.1.1) où F est une multiapplication semicontinue mixte, i.e., $F(\cdot, \cdot)$ est mesurable et pour tout $t \in I$, et chaque $x \in \mathbb{R}^N$ avec $F(t, x)$ est convexe, la multiapplication $F(t, \cdot)$ est semicontinue supérieurement, et quand $F(t, x)$ n'est pas convexe $F(t, \cdot)$ est semicontinue inférieurement sur un voisinage de x.

En transformant l'opérateur de Nemytskii de F (resp. F_i, $i = 1, 2$), on obtient un autre problème, pour lequel les solutions sont dans un sous ensemble compact (resp. borné) de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$ et donc résolvent le problème original. Ensuite, nous passons à l'étude du problème transformé. En combinant avec les techniques de l'analyse multivoque et la théorie des points fixes, et en utilisant, dans le problème (3.1.1), le Théorème 2.1 dans [55], certains théorèmes d'existence sont obtenus.

3.2 Préliminaires

Dans tout ce chapitre, $I := [0, T]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

On se donne une multiapplication $F : I \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ à valeurs non vides et $1 \leq p \leq \infty$. Par Σ_F^p on note l'ensemble des sélections de F qui appartiennent à l'espace de Lebesgue-Bochner $L^p(I, \mathbb{R}^N)$, i.e., $\Sigma_F^p = \{f \in L^p(I, \mathbb{R}^N) : f(t) \in F(t) \text{ p.p. sur } I\}$. En générale, cet espace peut être vide. Cependant, une application directe du théorème de sélection de d'Aumann (voir Wagner [60, Theorem 5.10]) affirme que, pour F à graphe mesurable, Σ_F^p est non vide si et seulement si $t \mapsto \inf\{\|v\| : v \in F(t)\} \in L^p(I, \mathbb{R}_+)$.

Proposition 3.1. *Supposons que X est un espace métrique séparable, Y est un espace de Banach, et $F : X \rightrightarrows \mathrm{L}^p(I, Y)$ est une multiapplication s.c.i à valeurs non vides fermées et décomposables. Alors F admet une sélection continue.*

Soient X, Y deux espaces de Banach. Un opérateur $f : X \to Y$ est complètement continu si $x_n \rightharpoonup x$ dans X implique $f(x_n) \to f(x)$ dans Y, et f est compact s'il est continu et l'image des ensembles bornés par f sont des ensembles relativement compacts. Évidemment, si X est réflexif, f est compact quand il est complètement continu.

Voici une conséquence du Théorème 2.2 dans [41] qui va être utilisée ultérieurement.

Théorème 3.1. *Soit X une espace métrique séparable. Soit $F : I \rightrightarrows X$ une multiapplication mesurable à valeurs non vides fermées et $\phi : I \times X \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{L}(I) \otimes \mathscr{B}(X)$-mesurable vérifiant*

i) $\phi(t, \cdot)$ est s.c.s pour tout $t \in I$;

ii) il existe $f_0 \in \Sigma_F^p$ telle que

$$\int_0^T \phi(t, f_0(t))dt < +\infty.$$

Alors

$$\inf_{f \in \Sigma_F^p} \int_0^T \phi(t, f(t))dt = \int_0^T \inf_{x \in F(t)} \phi(t, x)dt.$$

Dans le théorème qui suit, on donne le principe alternative de Leray-Schauder (voir [39]).

Théorème 3.2. *Soient X, Y deux espaces de Banach. Soient $\psi : X \to Y$ une fonction complètement continue et*

$$S = \{x \in X : \; x = \mu\psi(x), \; \mu \in]0, 1[\}.$$

Alors, soit S est non borné, ou bien ψ admet un point fixe.

Dans ce travail, on a besoin de la généralisation multivoque suivante de l'alternative du théorème de Leray-Schauder.

Théorème 3.3. *(Voir [37]) Soient X, Y deux espaces de Banach, $C \subset X$ et $D \subset Y$ deux ensembles fermés convexes tels que $0 \in C$. Soit $W : C \rightrightarrows D$ une multiapplication à valeurs convexes faiblement compactes, et s.c.s de C, muni de la topologie forte, dans D, muni de la topologie faible. Soit $\psi : D \to C$ une application complètement continue. Si $\Psi = \psi \circ W : C \rightrightarrows C$ est compacte, alors soit*

(i) l'ensemble $S = \{x \in C : x \in \mu\Psi(x), \; 0 < \mu < 1\}$ est non borné, soit

(ii) Ψ admet un point fixe, i.e., il existe $x \in C$, tel que $x \in \Psi(x)$.

Proposition 3.2. *(Voir [61]) Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction absolument continue, et $E = \{t \in I : \; \varphi(t) = 0\}$. Alors $mes(\{t \in E : \; \dot{\varphi}(t) \neq 0\}) = 0$, i.e., $\dot{\varphi}(t) = 0$ p.p sur E.*

3.3 Problèmes non linéaires pour des inclusions différentielles du second ordre avec somme de deux perturbations s.c.s et s.c.i

Dans cette section, nous étudions une classe de problèmes aux limites non linéaires pour des inclusions différentielles avec somme de deux perturbations, une semicontinue supérieurement et l'autre semicontinue inférieurement et qui vérifient la condition de Hartman généralisée.

On considère le problème

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}a(\dot{u}(t)) \in A(u(t)) + F_1(t, u(t), \dot{u}(t)) + F_2(t, u(t), \dot{u}(t)) \text{ p.p. sur } I; \\ (a(\dot{u}(0)), -a(\dot{u}(T))) \in \xi(u(0), u(T)), \end{cases} \tag{3.3.1}$$

où $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ et $\xi : \mathcal{D}(\xi) \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ sont deux opérateurs maximaux monotones, $F_1 : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ est une multiapplication s.c.s et $F_2 : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ est une multiapplication s.c.i, qui vérifient certaines conditions.

Par solution $u(\cdot)$ de (3.3.1), on veut dire que $u(\cdot) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^N)$ avec $a(\dot{u}(\cdot))$ est absolument continue, et il existe $y(\cdot)$, $f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$ ($p \geq 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$), vérifiant $y(t) \in A(u(t))$, $f_i(t) \in F_i(t, u(t), \dot{u}(t))$, $i = 1, 2$ et $\dfrac{d}{dt}a(\dot{u}(t)) = y(t) + f_1(t) + f_2(t)$ pour presque tout $t \in I$, et la condition aux limites est également satisfaite.

Maintenant, nous donnons l'énoncé du théorème principal de cette section.

Théorème 3.4. *Soit $p \geq 2$.*

$H(F_1)$ *Soit $F_1 : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ une multiapplication à valeurs non vides compactes convexes vérifiant*

(i) *pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$, $F_1(\cdot, x, y)$ est $\mathcal{L}(I)$-mesurable ;*

(ii) *pour presque tout $t \in I$, $F_1(t, \cdot, \cdot)$ est semicontinue supérieurement ;*

(iii) *il existe un nombre réel $M_1 > 0$, tel que, si $\|x\| \leq M_1$, alors pour presque tout $t \in I$, pour tout $y \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $v \in F_1(t, x, y)$, on a*

$$\|v\| \leq \eta_1(t) + \eta_2(t)\|y\|^{p-1},$$

où $\eta_1(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I, \mathbb{R}_+)$ et $\eta_2(\cdot) \in \mathrm{L}^\infty(I, \mathbb{R}_+)$.

$H(F_2)$ *Soit $F_2 : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ une multiapplication à valeurs non vides compactes vérifiant*

(i) *$Gr(F_2) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^N) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^N) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^N)$;*

(ii) *pour presque tout $t \in I$, $F_2(t, \cdot, \cdot)$ est semicontinue inférieurement ;*

(iii) *il existe un nombre réel $M_2 > 0$, tel que, si $\|x\| \leq M_2$, alors pour presque tout $t \in I$, pour tout $y \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $v \in F_2(t, x, y)$, on a*

$$\|v\| \leq \eta_3(t) + \eta_4(t)\|y\|^{p-1},$$

où $\eta_3(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I, \mathbb{R}_+)$ *et* $\eta_4(\cdot) \in \mathrm{L}^\infty(I, \mathbb{R}_+)$.

F_1 *et* F_2 *vérifient aussi l'hypothèse suivante*

H(F_1, F_2) *il existe un nombre réel strictement positif* β *tel que pour presque tout* $t \in I$, *et pour tous* $x, y \in \mathbb{R}^N$ *avec* $\|x\| = M = \min\{M_1, M_2\}$, $\langle x, y\rangle = 0$, *on a*

$$\langle v, x\rangle + \beta\|y\|^p \geq 0,$$

pour tout $v \in F_1(t, x, y) + F_2(t, x, y)$.

H(a) Soit $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *une application continue et strictement monotone, vérifiant*

(i) $\langle a(x), x\rangle \geq \beta\|x\|^p$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}^N$;

(ii) il existe $c > 0$ *tel que* $\|a(x)\| \leq c(\|x\|^{p-1} + 1)$;

(iii) il existe une fonction continue $\kappa : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ *telle que* $a(x) = \kappa(x)x$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}^N$.

H(A) Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ *un opérateur maximal monotone avec* $0 \in A(0)$

H(ξ) $\xi : \mathcal{D}(\xi) \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ *un autre opérateur maximal monotone, avec* $(0, 0) \in \xi(0, 0)$, *vérifiant*

(i) si $(w_1, w_2) \in \xi(v_1, v_2)$, *alors* $\langle w_1, v_1\rangle \geq 0$ *et* $\langle w_2, v_2\rangle \geq 0$, *ou bien*

(ii) $\mathcal{D}(\xi) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : \ x = y\}$;

A *et* ξ *vérifient aussi l'hypothèse suivante*

H(ξ, *A*) *si* $(w_1, w_2) \in \xi(v_1, v_2)$, *alors* $\langle w_1, A_\lambda(v_1)\rangle + \langle w_2, A_\lambda(v_2)\rangle \geq 0$, $\forall\lambda > 0$.

Alors le problème (3.3.1) *admet au moins une solution.*

Remarque 3.1. $a(\cdot)$ *est appelé l'opérateur semblable à p-Laplacien, qui est la généralisation de J, l'opérateur p-Laplacien où* $J(x) = \|x\|^{p-2}x$, *pour* $x \in \mathbb{R}^N$. *Sous les hypothèses de* $a(\cdot)$, *par le Théorème 1.9, on sait que* $a(\cdot)$ *est un homéomorphisme de* $\mathbb{R}^N$, *et l'opérateur inverse* a^{-1} *est aussi strictement monotone, et que* $\|a^{-1}(y)\| \to +\infty$, *quand* $\|y\| \to +\infty$ *(voir [45, 46, 52]). On donne un exemple d'un opérateur* $a(\cdot)$ *vérifiant les hypothèses de notre théorème. L'opérateur* $a(\cdot) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *est défini par*

$$a(x) = \rho(\|x\|)\|x\|^{p-1}x, \quad pour \ \ x \in \mathbb{R}^N,$$

avec $\rho : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ *est une fonction continue et strictement décroissante telle que* $\beta \leq \rho(r) \leq \beta'$, *où* β *est le nombre donné dans notre théorème et* β' *est un autre nombre strictement positif, par exemple, si on prend*

$$\rho(r) = \beta + \frac{1}{(1+r)^p},$$

alors $\rho(\cdot)$ *est continue et strictement décroissante. En effet*

$$\dot{\rho}(r) = -\frac{r^{p-1}}{(1+r)^{2p}} < 0.$$

Donc $a(\cdot)$ *est continue et strictement monotone. En effet, pour tous* $x, y \in \mathbb{R}^N$ *tels que* $x \neq y$, *si on suppose que* $\|x\| \leq \|y\|$ *alors*

$$\begin{aligned}
& \langle a(x) - a(y), x - y \rangle \\
= \; & \Big\langle \rho(\|x\|)\|x\|^{p-2}x - \rho(\|y\|)\|y\|^{p-2}y, x - y \Big\rangle \\
= \; & \rho(\|x\|)\Big\langle \|x\|^{p-2}x - \|y\|^{p-2}y, x - y \Big\rangle + \Big\langle \big(\rho(\|x\|) - \rho(\|y\|)\big)\|y\|^{p-2}y, x - y \Big\rangle \\
\geq \; & \beta\Big\langle \|x\|^{p-2}x - \|y\|^{p-2}y, x - y \Big\rangle + \big(\rho(\|x\|) - \rho(\|y\|)\big)\langle \|y\|^{p-2}y, x - y \rangle \\
\geq \; & \beta\|x\|^{p-2}\|x - y\|^2 + \beta(\|x\|^{p-2} - \|y\|^{p-2})\langle y, x - y \rangle \\
+ \; & \big(\rho(\|x\|) - \rho(\|y\|)\big)\big(\|y\|^p - \|y\|^{p-2}\langle y, x \rangle\big) \\
\geq \; & \beta\|x\|^{p-2}\|x - y\|^2 + \beta(\|x\|^{p-2} - \|y\|^{p-2})(\langle x, y \rangle - \|y\|^2) \\
+ \; & \big(\rho(\|x\|) - \rho(\|y\|)\big)\big(\|y\|^p(\|y\| - \|x\|)\big) \\
\geq \; & \min\{\beta, 1\}\Bigg(\|x\|^{p-2}\|x - y\|^2 + (\|x\|^{p-2} - \|y\|^{p-2})\Big(\frac{1}{2}\big(\|y\|^2 + \|x\|^2 - \|y - x\|^2\big) - \|y\|^2\Big)\Bigg).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
& \langle a(x) - a(y), x - y \rangle \\
\geq \; & \frac{1}{2}\min\{\beta, 1\}\Big(\big(\|x\|^{p-2} + \|y\|^{p-2}\big)\|x - y\|^2 + \big(\|x\|^{p-2} - \|y\|^{p-2}\big)(\|x\|^2 - \|y\|^2)\Big) \\
\geq \; & \frac{1}{2}\min\{\beta, 1\}\big(\|x\|^{p-2} + \|y\|^{p-2}\big)\|x - y\|^2 \\
> \; & 0.
\end{aligned}$$

On peut aussi montrer que $a(\cdot)$ *vérifie les hypothèses* $H(a)$.

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\langle a(x), x\rangle = \rho(\|x\|)\|x\|^p \geq \beta\|x\|^p.$$

2. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\|a(x)\| \leq \rho(\|x\|)\|x\|^{p-1} \leq (\beta+1)\|x\|^{p-1} \leq (\beta+1)(\|x\|^{p-1}+1).$$

3. *En posant* $\kappa : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ *définie par*

$$\kappa(x) = \rho(\|x\|)\|x\|^{p-2},$$

$\kappa(\cdot)$ *est continue de plus*

$$a(x) = \kappa(x)x, \qquad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^N.$$

3.3.1 Problème transformé

Considérons les multiapplications $N_{F_i} : W^{1,p}(I, \mathbb{R}^N) \rightrightarrows \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^n)$, définies par

$$N_{F_i}(u(\cdot))(t) = F_i(t, \hat{u}(t), \tilde{\dot{u}}(t)),\ i = 1, 2,$$

pour tout $t \in I$ et $u \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$, où

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } \|u(t)\| \leq M, \\ \dfrac{M}{\|u(t)\|}u(t) & \text{si } \|u(t)\| > M, \end{cases} \tag{3.3.2}$$

et

$$\tilde{\dot{u}}(t) = \begin{cases} \dot{u}(t) & \text{si } t \in \mathrm{Q} \text{ et } \|u(t)\| \leq M, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{M}{\|u(t)\|}u(t)\right) & \text{si } t \in \mathrm{Q} \text{ et } \|u(t)\| > M, \end{cases} \tag{3.3.3}$$

avec $\mathrm{Q} = \{t \in I : \ \dot{u}(t) \text{ existe}\}$.

Évidemment, Q est un sous ensemble mesurable de I avec $mes(I\backslash \mathrm{Q}) = 0$. En effet, si $u(\cdot) \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$ alors $u(\cdot)$ est absolument continue et différentiable presque partout, donc $mes(I\backslash \mathrm{Q}) = 0$. De (3.3.2), nous pouvons facilement vérifier que, si $\|u(t)\| > M$, alors $\|\hat{u}(t)\| = M$. Si $t \in \mathrm{Q}$ et $\|u(t)\| > M$ nous avons $\|\hat{u}(t)\| = M$, alors $\dfrac{d}{dt}\|\hat{u}(t)\|^2 =$

$2\langle \hat{u}(t), \tilde{\dot{u}}(t)\rangle = 0$, d'où $\langle \hat{u}(t), \tilde{\dot{u}}(t)\rangle = 0$. De plus,

$$\begin{aligned}\tilde{\dot{u}}(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{M}{\|u(t)\|}u(t)\right)\\ &= \frac{M}{\|u(t)\|}\dot{u}(t) + \frac{d}{dt}\left(\frac{M}{\|u(t)\|}\right)u(t).\end{aligned}$$

Mais

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{M}{\|u(t)\|}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{M}{\sqrt{\langle u(t), u(t)\rangle}}\right) = -\frac{M\langle u(t), \dot{u}(t)\rangle}{\|u(t)\|^3}.$$

Donc

$$\tilde{\dot{u}}(t) = \frac{M}{\|u(t)\|}\Big(\dot{u}(t) - \frac{\langle u(t), \dot{u}(t)\rangle}{\|u(t)\|^2}u(t)\Big). \tag{3.3.4}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}\|\tilde{\dot{u}}(t)\|^2 &= \frac{M^2}{\|u(t)\|^2}\Big\|\dot{u}(t) - \frac{\langle u(t), \dot{u}(t)\rangle}{\|u(t)\|^2}u(t)\Big\|^2\\ &= \frac{M^2}{\|u(t)\|^2}\Big\langle \dot{u}(t) - \frac{\langle u(t), \dot{u}(t)\rangle}{\|u(t)\|^2}u(t), \dot{u}(t) - \frac{\langle u(t), \dot{u}(t)\rangle}{\|u(t)\|^2}u(t)\Big\rangle\\ &= \frac{M^2}{\|u(t)\|^2}\Big(\|\dot{u}(t)\|^2 + \frac{\langle u(t), \dot{u}(t)\rangle}{\|u(t)\|^2} - \frac{2\langle u(t), \dot{u}(t)\rangle}{\|u(t)\|^2}\Big)\\ &= \frac{M^2}{\|u(t)\|^2}\Big(\|\dot{u}(t)\|^2 - \frac{\langle u(t), \dot{u}(t)\rangle^2}{\|u(t)\|^2}\Big). \end{aligned}\tag{3.3.5}$$

De (3.3.5) nous pouvons déduire que

$$\|\tilde{\dot{u}}(t)\| \leq \frac{M}{\|u(t)\|}\|\dot{u}(t)\| \leq \|\dot{u}(t)\|. \tag{3.3.6}$$

Supposons que $u_n(\cdot) \to u(\cdot)$ dans $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$, utilisant le théorème d'injection compacte, $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$, nous avons $u_n(\cdot) \to u(\cdot)$ dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$. De plus, puisque $\dot{u}_n(\cdot) \to \dot{u}(\cdot)$ dans $\mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N)$, il existe une sous suite de $(\dot{u}_n(\cdot))$ convergeant vers $\dot{u}(\cdot)$ presque partout. Sans perdres de généralités, on peut supposer que $\dot{u}_n(t) \to \dot{u}(t)$ presque partout sur I. Ainsi, en vertu de (3.3.2) et (3.3.3), nous pouvons vérifier que $\hat{u}_n(t) \to \hat{u}(t)$ pour tout $t \in I$, et $\tilde{\dot{u}}_n(t) \to \tilde{\dot{u}}(t)$ presque partout sur I.

En effet, la première convergence est évidente car, pour $t \in I$, si $\|u(t)\| < M$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ nous avons $\|u(t) - u_n(t)\| < \varepsilon$, cela donne $\|u_n(t)\| < \varepsilon + \|u(t)\|$. Donc pour ε assez petit et n assez grand, $\|u_n(t)\| \leq M$ et

$\hat{u}_n(t) = u_n(t) \to u(t) = \hat{u}(t)$.

De la même manière, si $\|u(t)\| > M$, alors pour n assez grand $u_n(t) \geq M$ et

$$\hat{u}_n(t) = \frac{M}{\|u_n(t)\|} u_n(t) \to \frac{M}{\|u(t)\|} u(t) = \hat{u}(t).$$

Maintenant, si $\|u(t)\| = M$, nous divisons la suite $(u_n(t))$ en deux sous suites $(u_{\varphi(n)}(t))$ et $(u_{\psi(n)}(t))$, où $\|u_{\varphi(n)}(t)\| \leq M$ et $\|u_{\psi(n)}(t)\| > M$ et on suppose que ces deux sous suites ne sont pas finies car sinon, on revient aux deux cas précédents. Alors

$$\hat{u}_{\varphi(n)}(t) = u_{\varphi(n)}(t) \to u(t) = \hat{u}(t),$$

et

$$\hat{u}_{\psi(n)}(t) = \frac{M}{\|u_{\psi(n)}(t)\|} u_{\psi(n)}(t) \to \frac{M}{\|u(t)\|} u(t) = \hat{u}(t) = u(t).$$

Donc $u_n(t) \to u(t)$.

De (3.3.4), d'une manière similaire à la précédente, on peut obtenir $\tilde{\dot{u}}_n(t) \to \tilde{\dot{u}}(t)$ presque partout sur $I \backslash E_0$, où $E_0 = \{t \in I / \|u(t)\| = M\}$ est un sous ensemble fermé de I (puisque $u(\cdot)$ est continue).

En effet, pour presque tout $t \in I \backslash E_0$, si $\|u(t)\| < M$, alors pour n assez grand, $\|u_n(t)\| \leq M$ et donc

$$\tilde{\dot{u}}_n(t) = \dot{u}_n(t) \to u(t),$$

et si $\|u(t)\| > M$, pour n assez grand, $\|u_n(t)\| > M$ et donc, par la continuité de la norme et la continuité du produit scalaire

$$\tilde{\dot{u}}_n(t) = \frac{M}{\|u_n(t)\|}\Big(\dot{u}_n(t) - \frac{\langle u_n(t), \dot{u}_n(t)\rangle}{\|u_n(t)\|^2} u_n(t)\Big) \to \frac{M}{\|u(t)\|}\Big(\dot{u}(t) - \frac{\langle u(t), \dot{u}(t)\rangle}{\|u(t)\|^2} u(t)\Big) = \tilde{\dot{u}}(t).$$

Par la Proposition 3.2, en posant $\varphi(t) = \|u(t)\|^2 - M^2$, nous avons $\langle u(t), \dot{u}(t)\rangle = 0$, d'où $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{M}{\|u(t)\|} u(t)\right) = \dot{u}(t)$ p.p. sur E_0, alors on déduit que $\tilde{\dot{u}}_n(t) \to \tilde{\dot{u}}(t)$ p.p. sur E_0, et donc $\tilde{\dot{u}}_n(t) \to \tilde{\dot{u}}(t)$ p.p. sur I.

Un autre résultat utile, qui peut être dérivé à partir de l'inégalité (3.3.6) et de la Proposition 3.2, est que pour chaque $u(\cdot) \in \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$, $\tilde{\dot{u}}(\cdot) \in \mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N)$ et $\tilde{\dot{u}}(t) = \dot{\hat{u}}(t)$ presque partout sur I. Donc, puisque $\hat{u}(\cdot)$ est continue, on peut dire que $\hat{u}(\cdot) \in \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$, avec $\dot{\hat{u}}(\cdot) = \tilde{\dot{u}}(\cdot)$. Alors $N_{F_i}(u(\cdot))(t) = F_i(t, \hat{u}(t), \dot{\hat{u}}(t))$, $i = 1, 2$ p.p. sur I.

Maintenant, on va étudier les multiapplications N_{F_1} et N_{F_2}, en voici deux propositions.

Proposition 3.3. *Supposons que toutes les hypothèses dans $H(F_1)$ sont vérifiées. Alors N_{F_1} est h-s.c.s (c'est à dire, s.c.s de $\mathrm{W}^{1,p}(I,\mathbb{R}^N)$ dans $\mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$ muni de la topologie faible) à valeurs non vides fermées convexes, et bornée sur les ensembles bornés.*

Preuve.

Soit $u(\cdot) \in \mathrm{W}^{1,p}(I,\mathbb{R}^N)$. Montrons que $N_{F_1}(u(\cdot))$ est fermé et convexe dans $\mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$. Soit $f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in N_{F_1}(u(\cdot))$ et $\lambda \in [0,1]$ et soit $t \in I$. Alors, pour presque tout $t \in I$, $f_1(t), f_2(t) \in F_1(t, \hat{u}(t), \tilde{\hat{u}}(t))$ qui est convexe, d'où

$$\lambda f_1(t) + (1-\lambda) f_2(t) \in N_{F_1}(u(\cdot))(t),$$

ce qui implique la convexité de $N_{F_1}(u(\cdot))$.

D'autre part, si $(f_n(\cdot)) \subset N_{F_1}(u(\cdot))$ et $f_n(\cdot) \to f(\cdot)$ dans $\mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$. Alors il existe une sous suite, aussi notée $(f_n(\cdot))$, qui converge vers f presque partout, i.e., il existe un sous ensemble $I_0 \subset I$ tel que $mes(I_0) = 0$ et, pour tout $t \in I \setminus I_0$, on a

$$f_n(t) \to f(t) \text{ dans } \mathbb{R}^N,$$

et puisque $(f_n(t)) \subset F_1(t, \hat{u}(t), \tilde{\hat{u}}(t))$ presque partout, et $F_1(t, \hat{u}(t), \tilde{\hat{u}}(t))$ est fermé, on obtient

$$f(t) \in F_1(t, \hat{u}(t), \tilde{\hat{u}}(t)) \text{ p.p. sur } I,$$

d'où $f(\cdot) \in N_{F_1}(u(\cdot))$. Ce qui montre la fermeture de $N_{F_1}(u(\cdot))$.

Pour vérifier que $N_{F_1}(u(\cdot)) \neq \emptyset$, on sélectionne (voir le Théorème 1.1) deux suites de fonctions simples $\{r_n(\cdot)\}$ et $\{s_n(\cdot)\}$ telles que $r_n(t) \to \hat{u}(t)$, $s_n(t) \to \tilde{\hat{u}}(t)$ p.p. $t \in I$ quand $n \to \infty$, et $\|r_n(t)\| \leq \|\hat{u}(t)\|$, $\|s_n(t)\| \leq \|\tilde{\hat{u}}(t)\|$ p.p. $t \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $K_n(t) = F_1(t, r_n(t), s_n(t))$. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n(\cdot)$ est une multiapplication mesurable à valeurs fermées, donc elle admet une sélection mesurable notée $v_n(\cdot)$.

De $H(F_1)$ (iii) et (3.3.6) on a

$$\begin{aligned}\|v_n(t)\| &\leq \eta_1(t)+\eta_2(t)\|s_n(t)\|^{p-1}\\ &\leq \eta_1(t)+\eta_2(t)\|\tilde{\dot{u}}_n(t)\|^{p-1}.\\ &\leq \eta_1(t)+\eta_2(t)\|\dot{u}_n(t)\|^{p-1}\end{aligned}$$

Ainsi $(v_n(\cdot))$ est bornée dans $\mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$, et donc, on peut lui extraire une sous suite faiblement convergente.

Sans perdre de généralités, supposons que $v_n(\cdot) \rightharpoonup v(\cdot)$ dans $\mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$. Par le lemme de Mazur, il existe une autre suite $(w_n(\cdot))$ fortement convergente vers $v(\cdot)$ dans $\mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$, où $w_n(\cdot) \in co\{v_i(\cdot):\ i \geq n\}$, pour tout $n \geq 1$. Soit

$$E_1 = \{t \in \mathrm{Q}:\ r_n(t) \to \hat{u}(t),\ s_n(t) \to \tilde{\dot{u}}(t),\ \text{et } w_n(t) \to v(t)\},$$

alors E_1 est un ensemble mesurable de I et $I \backslash E_1$ est négligeable.

Pour chaque $\varepsilon > 0$ et $t \in E_1$, par la ε-s.c.s de $F_1(t,\cdot,\cdot)$ (voir la Proposition 1.7), il existe $\delta > 0$ tel que

$$F_1(t,x,y) \subset F_1(t,\hat{u}(t),\tilde{\dot{u}}(t)) + B(0,\varepsilon) \text{ pour tout } (x,y) \in B((\hat{u}(t),\tilde{\dot{u}}(t)),\delta).$$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand on obtient

$$F_1(t,r_n(t),s_n(t)) \subset F_1(t,\hat{u}(t),\tilde{\dot{u}}(t)) + B(0,\varepsilon),$$

d'où

$$v_n(t) \in F_1(t,\hat{u}(t),\tilde{\dot{u}}(t)) + B(0,\varepsilon).$$

Par la convexité de $F_1(t,\hat{u}(t),\tilde{\dot{u}}(t))$ et de $B(0,\varepsilon)$, on obtient aussi

$$w_n(t) \in F_1(t,\hat{u}(t),\tilde{\dot{u}}(t)) + B(0,\varepsilon)$$

pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand. Pour ε arbitraire et puisque $w_n(t) \to v(t)$, on aura $v(t) \in \overline{F_1(t,\hat{u}(t),\tilde{\dot{u}}(t))} = F_1(t,\hat{u}(t),\tilde{\dot{u}}(t))$ pour tout $t \in E_1$, qui signifie que $N_{F_1}(u(\cdot))$ est non vide.

On va montrer maintenant que N_{F_1} est h-s.c.s.

Supposons que $E \subset \mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$ est faiblement fermé, $u_n(\cdot) \to u(\cdot)$ dans $\mathrm{W}^{1,p}(I,\mathbb{R}^N)$ et

$(u_n(\cdot)) \subset N_{F_1}^{-1}(E)$, i.e., il existe $v_n(\cdot) \in \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$ telle que $v_n(\cdot) \in N_{F_1}(u_n(\cdot)) \cap E$. Alors, pour presque tout $t \in I$, on a $v_n(t) \in F_1(t, \hat{u}_n(t), \tilde{\dot{u}}_n(t))$, et donc

$$\begin{aligned} \|v_n(t)\| &\leq \eta_1(t) + \eta_2(t)\|\tilde{\dot{u}}_n(t)\|^{p-1} \\ &\leq \eta_1(t) + \eta_2(t)\|\dot{u}_n(t)\|^{p-1}. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est due à (3.3.6). Puisque $\dot{u}_n(\cdot) \to \dot{u}(\cdot)$ dans $\mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N)$, la suite $(\|u_n(\cdot)\|_p)$ est bornée dans $\mathbb{R}$. Ainsi $(v_n(\cdot))$ est bornée dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$, et par le même argument que dans le paragraphe précédent, on peut trouver $v(\cdot) \in \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$ telle que $v(\cdot) \in N_{F_1}(u(\cdot)) \cap E$. Alors $u(\cdot) \in N_{F_1}^{-1}(E)$ qui veut dire que $N_{F_1}^{-1}(E)$ est fermé dans $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$ et donc N_{F_1} est h-s.c.s.

La dernière conclusion de la Proposition 3.3 peut être dérivée immédiatement de $H(F_1)(iii)$ et (3.3.6). En effet, pour tout $u(\cdot) \in \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$ et $v(\cdot) \in N_{F_1}(u(\cdot))$, et pour presque tout $t \in I$ on a

$$\|v(t)\| \leq \eta_1(t) + \eta_2(t)\|\dot{u}(t)\|^{p-1}.$$

d'où

$$\|v(\cdot)\|_q \leq \|\eta_1(\cdot)\|_q + \|\eta_2(\cdot)\|_\infty \|\dot{u}(\cdot)\|_p^{p-1}.$$

□

Proposition 3.4. *Sous les hypothèses données dans $H(F_2)$, N_{F_2} est une multiapplication s.c.i. à valeurs non vides décomposables fermées dans* $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$.

Preuve.

La fermeture des valeurs de N_{F_2} se montre de la même manière que dans la proposition précédente. La décomposabilité des valeurs est facile à voir. Pour tout $u(\cdot) \in \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$, soit $K : I \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ définie par $K(t) = F(t, \hat{u}(t), \tilde{\dot{u}}(t))$, et $\mu : I \times \mathbb{R}^N \to I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ définie par $\mu(t, v) = (t, \hat{u}(t), \tilde{\dot{u}}(t), v)$. Évidemment, $\mu(\cdot, \cdot)$ est une application mesurable et K est à valeurs fermées.

De $H(F_2)(ii)$, on peut déduire que $Gr(K) = \mu^{-1}(GrF) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^N)$, ce qui signifie que K est aussi mesurable. En utilisant le Théorème 1.5, on obtient une fonction mesurable

$v : I \to \mathbb{R}^N$ telle que $v(t) \in K(t)$ p.p. sur I. En vertu de $H(F_2)(iii)$, $v(\cdot) \in \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$. Par conséquent, $N_{F_2}(u(\cdot)) \neq \emptyset$ pour tout $u(\cdot) \in \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$.

Pour la semicontinuité inférieure de N_{F_2}, par la Proposition 1.5, il suffit de montrer que, pour tout $w(\cdot) \in \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$ la fonction $u(\cdot) \mapsto d\Big(w(\cdot), N_{F_2}(u(\cdot))\Big) \in \mathbb{R}_+$ est s.c.s sur $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$.

Fixons $\lambda \geq 0$, et considérons l'ensemble

$$\Delta_\lambda = \Big\{ u \in \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N) : \ d\Big(w(\cdot), N_{F_2}(u(\cdot))\Big) \geq \lambda \Big\}.$$

Supposons que $(u_n(\cdot)) \subset \Delta_\lambda$ et $u_n(\cdot) \to u(\cdot)$ dans $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$, alors $\hat{u}_n(t) \to \hat{u}(t)$ et $\tilde{\hat{u}}_n(t) \to \tilde{\hat{u}}(t)$ p.p. sur I. Notons que, sous l'hypothèse $H(F_2)(ii)$, la fonction positive $(x, y) \mapsto d\Big(w(t), F(t, x, y)\Big)$ est s.c.s.. Donc en utilisant le Théorème 3.1, on peut déduire ce qui suit

$$\begin{aligned}
\lambda &\leq \limsup_{n\to\infty} d\Big(w(\cdot), N_{F_2}(u_n(\cdot))\Big) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \inf \Big\{ \|w(\cdot) - v(\cdot)\|_q : \ v(\cdot) \in N_{F_2}(u_n(\cdot)) \Big\} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \inf \Big\{ \Big(\int_0^T \|w(t) - v(t)\|^q dt \Big)^{\frac{1}{q}} : \ v(\cdot) \in N_{F_2}(u_n(\cdot)) \Big\} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \Big(\int_0^T \inf \Big\{ \|w(t) - \bar{w}\|^q : \ \bar{w} \in F_2(t, \hat{u}_n(t), \tilde{\hat{u}}_n(t)) \Big\} dt \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \Big(\int_0^T d\Big(w(t), F_2(t, \hat{u}_n(t), \tilde{\hat{u}}_n(t))\Big)^q dt \Big)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

et par le lemme de Fatou, on trouve

$$\begin{aligned}
\lambda &\leq \Big(\int_0^T \limsup_{n\to\infty} d\Big(w(t), F_2(t, \hat{u}_n(t), \tilde{\hat{u}}_n(t))\Big)^q dt \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \Big(\int_0^T d(w(t), F_2(t, \hat{u}(t), \tilde{\hat{u}}(t)))^q dt \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \Big(\int_0^T \inf \Big\{ \|w(t) - \bar{w}\|^q : \ \bar{w} \in F_2(t, \hat{u}(t), \tilde{\hat{u}}(t)) \Big\} dt \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \inf \Big\{ \Big(\int_0^T \|w(t) - v(t)\|^q dt \Big)^{\frac{1}{q}} : \ v(\cdot) \in N_{F_2}(u(\cdot)) \Big\} \\
&= \inf \Big\{ \|w(\cdot) - v(\cdot)\|_q : \ v(\cdot) \in N_{F_2}(u(\cdot)) \Big\} \\
&= d\Big(w(\cdot), N_{F_2}(u(\cdot))\Big),
\end{aligned}$$

de sorte que $u(\cdot) \in \Delta_\lambda$, et ceci prouve que l'ensemble Δ_λ est fermé. Donc par la Proposition 1.1 on obtient la semicontinuité inférieure de N_{F_2}. $\square$

Dans la suite, nous allons étudier le problème transformé

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}a(\dot{u}(t)) - \|u(t)\|^{p-2}u(t) \in A(u(t)) + F_1(t,\hat{u}(t),\tilde{\hat{u}}(t)) + F_2(t,\hat{u}(t),\tilde{\hat{u}}(t)) + \|\hat{u}(t)\|^{p-2}\hat{u}(t) \text{ p.p. sur } I; \\ (a(\dot{u}(0)), -a(\dot{u}(T))) \in \xi(u(0),u(T)). \end{cases} \tag{3.3.7}$$

Evidemment, toute solution $u(\cdot)$ de (3.3.7) avec $\|u(t)\| \leq M$ pour tout $t \in I$ est une solution de (3.3.1). Donc, le problème de trouver une solution de (3.3.1) peut être remplacé par deux problèmes, l'un est de trouver une solution de (3.3.7), et l'autre est de montrer que chaque solution de (3.3.7) est dans la boule fermée $\overline{B}_{\mathcal{C}}(0,M)$ de $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^N)$.

Proposition 3.5. *Supposons que les hypothèses supposées sur a, A, F_1, F_2 et ξ dans le Théorème 3.4 sont vérifiées, et $u(\cdot)$ est une solution de* (3.3.7)*, alors $\|u(t)\| \leq M$ pour tout $t \in I$.*

Preuve.

Supposons que $u(\cdot)$ est une solution de (3.3.7), alors on peut trouver $y(\cdot)$ et $f_i(\cdot)$, $i = 1, 2$ dans $\mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$, telles que $y(t) \in A(u(t))$, $f_i(t) \in F_i(t,\hat{u}(t),\tilde{\hat{u}}(t))$, $i = 1, 2$, et

$$\frac{d}{dt}a(\dot{u}(t)) - \|u(t)\|^{p-2}u(t) = y(t) + f_1(t) + f_2(t) - \|\hat{u}(t)\|^{p-2}\hat{u}(t) \text{ p.p. sur } I. \tag{3.3.8}$$

Si la conclusion de la Proposition 3.5 n'est pas vérifiée, alors il existe $t_0 \in I$, telle que

$$\|u(t_0)\| = \max_{t\in I} \|u(t)\| > M. \tag{3.3.9}$$

Nous commençons par supposer que $0 < t_0 < T$. Soit $\varrho(t) = \|u(t)\|^p$, alors

$$\dot{\varrho}(t_0) = p\|u(t_0)\|^{p-2}\langle u(t_0), \dot{u}(t_0)\rangle = 0, \tag{3.3.10}$$

et il existe $\delta > 0$, tel que $\|u(t)\| > M$ et $\dot{\varrho}(t) \leq 0$, pour tout $t \in]t_0, t_0 + \delta[$, en utilisant la continuité de $u(\cdot)$.

En multipliant (3.3.8) par $u(t)$, et en intégrant sur $[t_0, t]$ ($t \in]t_0, t_0 + \delta[$), on trouve

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^t \Big\langle \frac{d}{dt}a(\dot{u}(\tau)), u(\tau)\Big\rangle d\tau - \int_{t_0}^t \|u(\tau)\|^p d\tau \\ &\qquad = \int_{t_0}^t \langle y(\tau), u(\tau)\rangle d\tau + \int_{t_0}^t \Big\langle f_1(\tau) + f_2(\tau), u(\tau)\Big\rangle d\tau - \int_{t_0}^t \|\hat{u}(\tau)\|^{p-1}\langle \hat{u}(\tau), u(\tau)\rangle d\tau. \end{aligned}$$

En utilisant (3.3.2), la monotonie de A et le fait que $0 \in A(0)$, on obtient

$$\int_{t_0}^{t} \Big\langle \frac{d}{dt} a(\dot{u}(\tau)), u(\tau) \Big\rangle d\tau - \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\|^p d\tau \geq \int_{t_0}^{t} \Big\langle f_1(\tau) + f_2(\tau), u(\tau) \Big\rangle d\tau - \int_{t_0}^{t} M^{p-1} \|u(\tau)\| d\tau.$$

Une intégration par partie donne

$$\Big\langle a(\dot{u}(t)), u(t) \Big\rangle - \Big\langle a(\dot{u}(t_0)), u(t_0) \Big\rangle - \int_{t_0}^{t} \Big\langle a(\dot{u}(\tau)), \dot{u}(\tau) \Big\rangle d\tau - \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\|^p d\tau \geq \int_{t_0}^{t} \Big\langle f_1(\tau) + f_2(\tau), u(\tau) \Big\rangle d\tau - \int_{t_0}^{t} M^{p-1} \|u(\tau)\| d\tau. \quad (3.3.11)$$

En combinant $H(a)(i)$ et $H(a)(iii)$ avec (3.3.2), (3.3.6), (3.3.10) et (3.3.11), on a

$$\begin{aligned} \kappa(\dot{u}(t)) \big\langle \dot{u}(t), u(t) \big\rangle & \geq \beta \int_{t_0}^{t} \|\dot{u}(\tau)\|^p d\tau + \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\|u(\tau)\|}{M} \right) \Big\langle f_1(\tau) + f_2(\tau), \hat{u}(\tau) \Big\rangle d\tau \\ & \quad + \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\| \big(\|u(\tau)\|^{p-1} - M^{p-1} \big) d\tau \\ & \geq \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\|u(\tau)\|}{M} \right) \Big(\Big\langle f_1(\tau) + f_2(\tau), \hat{u}(\tau) \Big\rangle + \beta \|\tilde{\dot{u}}(\tau)\|^p \Big) d\tau \\ & \quad + \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\| \big(\|u(\tau)\|^{p-1} - M^{p-1} \big) d\tau. \end{aligned}$$

En utilisant la condition de Hartman généralisée $H(F_1, F_2)$, on obtient, puisque $\|\hat{u}(t)\| = M$ et $\Big\langle \hat{u}(t), \tilde{\dot{u}}(t) \Big\rangle = 0$,

$$\Big\langle f_1(\tau) + f_2(\tau), \hat{u}(\tau) \Big\rangle + \beta \|\tilde{\dot{u}}(\tau)\|^p \geq 0, \ \forall \tau \in [t_0, t].$$

Ainsi

$$\kappa(\dot{u}(t)) \big\langle \dot{u}(t), u(t) \big\rangle \geq \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\| \big(\|u(\tau)\|^{p-1} - M^{p-1} \big) d\tau > 0.$$

Cela donne $\langle \dot{u}(t), u(t) \rangle > 0$, pour tout $t \in]t_0, t_0 + \delta[$, contradiction avec le fait que $\dot{\varrho}(t) \leq 0$ pour tout $t \in]t_0, t_0 + \delta[$.

Maintenant, soit $t_0 = 0$, dans ce cas, $\dot{\varrho}(0) \leq 0$, d'où $\Big\langle u(0), \dot{u}(0) \Big\rangle \leq 0$, et donc $\Big\langle a(\dot{u}(0)), u(0) \Big\rangle \leq 0$.

Si $H(\xi)(i)$ est vérifiée, alors $\Big\langle a(\dot{u}(0)), u(0) \Big\rangle \geq 0$. Donc $\Big\langle a(\dot{u}(0)), u(0) \Big\rangle = 0$, et la même contradiction peut être obtenue.

Si $H(\xi)(ii)$ est vérifiée, alors $\varrho(0) = \varrho(T)$. Donc $\dot{\varrho}(0) \leq 0$ et $\dot{\varrho}(T) \geq 0$ d'où $\Big\langle u(0), \dot{u}(0) \Big\rangle \leq$

$0 \leq \big\langle u(T), \dot{u}(T)\big\rangle$, qui à son tour donne $\Big\langle a(\dot{u}(0)), u(0)\Big\rangle \leq 0 \leq \Big\langle a(\dot{u}(T)), u(T)\Big\rangle$. Mais $\Big\langle a(\dot{u}(0)), u(0)\Big\rangle - \Big\langle a(\dot{u}(T)), u(T)\Big\rangle \geq 0$, puisque ξ est monotone et $(0,0) \in \xi(0,0)$. Ainsi $\Big\langle a(\dot{u}(0)), u(0)\Big\rangle = \Big\langle a(\dot{u}(T)), u(T)\Big\rangle = 0$, et nous pouvons arriver à la même conclusion.

Dans le cas $t_0 = T$, la preuve est la même que celle dessus. □

3.3.2 Certains opérateurs non linéaires

Avant de donner les principaux résultats, nous étudions certains opérateurs non linéaires (voir [61, 52]).

1. $\hat{J} : \mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N) \to \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$, qui est l'opérateur de Nemytskii de J, c'est à dire, pour tout $t \in I$, $\hat{J}(u(\cdot))(t) = J(u(t)) = \|u(t)\|^{p-2}u(t)$, pour $u(\cdot) \in \mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N)$.

$\hat{J}$ est une opérateur continu.

<u>$\hat{J}$ est partout défini.</u>

Pour tout $u \in \mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N)$ on a

$$\begin{aligned} \|\hat{J}(u(\cdot))\|_q^p &= \int_0^T (\|u(t)\|^{p-1})^q dt \\ &= \int_0^T \|u(t)\|^p dt < +\infty. \end{aligned}$$

<u>$\hat{J}$ est coercif.</u>

Pour tout $u \in \mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N)$ on a

$$\langle \hat{J}(u(\cdot)), u(\cdot)\rangle_{p,q} = \int_0^T \langle \|u(t)\|^{p-2}u(t), u(t)\rangle dt = \int_0^T \|u(t)\|^p dt = \|u\|_p^p.$$

Donc

$$\frac{\langle \hat{J}(u(\cdot)), u(\cdot)\rangle_{p,q}}{\|u(\cdot)\|_p} = \|u(\cdot)\|_p^{p-1} \to +\infty \quad \text{quand} \quad \|u(\cdot)\|_p \to +\infty.$$

<u>$\hat{J}$ est strictement monotone.</u>

Cela ce montre par les inégalités suivantes.

$$\begin{aligned} \langle \hat{J}(u_1) - \hat{J}(u_2), u_1 - u_2\rangle_{p,q} &= \int_0^T \Big\langle \|u_1(t)\|^{p-2}u_1(t) - \|u_2(t)\|^{p-2}u_2(t), u_1(t) - u_2(t)\Big\rangle dt \\ &= \int_0^T \|u_1(t)\|^{p-2}\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 dt \\ &\quad + \int_0^T \Big(\|u_1(t)\|^{p-2} - \|u_2(t)\|^{p-2}\Big)\langle u_2(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle dt, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\langle \hat{J}(u_1) - \hat{J}(u_2), u_1 - u_2 \rangle_{p,q} &= \int_0^T \|u_1(t)\|^{p-2} \|u_1(t) - u_2(t)\|^2 dt \\
&\quad + \int_0^T \Big(\|u_1(t)\|^{p-2} - \|u_2(t)\|^{p-2} \Big) \Big(\big\langle u_2(t), u_1(t) \big\rangle - \|u_2(t)\|^2 \Big) dt \\
&= \int_0^T \|u_1(t)\|^{p-2} \|u_1(t) - u_2(t)\|^2 dt \\
+ \int_0^T \Big(\|u_1(t)\|^{p-2} - \|u_2(t)\|^{p-2} \Big) &\left(\frac{1}{2} \Big(\|u_1(t)\|^2 + \|u_2(t)\|^2 - \|u_2(t) - u_1(t)\|^2 \Big) - \|u_2(t)\|^2 \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \Big(\|u_1(t)\|^{p-2} + \|u_2(t)\|^{p-2} \Big) \|u_1(t) - u_2(t)\|^2 dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \Big(\|u_1(t)\|^{p-2} - \|u_2(t)\|^{p-2} \Big) \Big(\|u_1(t)\|^2 - \|u_2(t)\|^2 \Big) dt \\
&\geq \frac{1}{2} \int_0^T \Big(\|u_1(t)\|^{p-2} + \|u_2(t)\|^{p-2} \Big) \|u_1(t) - u_2(t)\|^2 dt > 0,
\end{aligned}$$

si $u_1(\cdot) \neq u_2(\cdot)$.

2. $\hat{A} : \mathcal{D}(\hat{A}) \subseteq \mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N) \rightrightarrows \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$,

   $\mathcal{D}(\hat{A}) = \{u(\cdot) \in \mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N) :\ u(t) \in \mathcal{D}(A)$ p.p. sur I, et $\exists y(\cdot) \in \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$ tel que $y(t) \in A(u(t))$ p.p. sur $I\}$, et

   $\hat{A}(u(\cdot)) = \{y(\cdot) \in \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N) :\ y(t) \in A(u(t))$ p.p. sur $I\}$, pour $u(\cdot) \in \mathcal{D}(\hat{A})$.

Proposition 3.6. *Si $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ est un opérateur maximal monotone avec $0 \in A(0)$, alors $\hat{A}$ est un opérateur maximal monotone avec $0 \in \hat{A}(0)$.*

Preuve.

Commençons par prouver la monotonie de $\hat{A}$. Soit $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in \mathcal{D}(\hat{A})$ et soit $y_i(\cdot) \in \hat{A}(u_i(\cdot))$, alors

$$\langle y_1(\cdot) - y_2(\cdot), u_1(\cdot) - u_2(\cdot) \rangle = \int_0^T \big\langle y_1(t) - y_2(t), u_1(t) - u_2(t) \big\rangle dt \geq 0,$$

par la monotonie de A. De plus, puisque $0 \in A(0)$, on a $0 \in \hat{A}(0)$.

Pour prouver la maximalité de $\hat{A}$ on prouve premièrement que $R(\hat{A} + \hat{J}) = \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$. Ainsi fixons $y(\cdot) \in \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$, soit $\Theta : I \rightrightarrows \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ la multiapplication définie par

$$\Theta(t) = \big\{ (x, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N :\ \ v \in A(x),\ v + J(x) = y(t) \big\}.$$

De la monotonie maximale de A et J, on a que $A+J$ est maximal monotone (voir Théorème 1.12). Par le Théorème 1.13, on a $\Theta(t) \neq \emptyset$, pour tout $t \in I$.

En effet, si pour tout $t \in I$ on prend $C_{y(t)} = \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^N}(0, r)$ tel que $r > 0$ vérifie

$$\|y(t)\| \leq r^{p-1},$$

alors $C_{y(t)}$ est un ensemble convexe compact avec $0 \in int(C_{y(t)}) = \mathrm{B}_{\mathbb{R}^N}(0, r)$. De plus, pour tout $x \in \partial C_{y(t)}$ et tout $v \in A(x)$, et puisque $0 \in A(0)$

$$\langle y(t), x\rangle \leq \|y(t)\|\|x\| \leq r^p = \|x\|^p \leq \|x\|^p + \langle v, x\rangle = \langle v + J(x), x\rangle.$$

Donc les hypothèses du Théorème 1.13 sont vérifiées avec $C_{y(t)}$ et $A + J$ au lieu de C et A. Par conséquent, l'ensemble

$$\begin{aligned} S(y(t)) &= \{x \in C_{y(t)} :\ y(t) \in (A + J)(x)\} \\ &= \{x \in C_{y(t)} :\ \exists v \in A(x),\ v + J(x) = y(t)\} \end{aligned}$$

est non vide, d'où l'ensemble $\Theta(t)$ est non vide.

En désignant par $\psi : I\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ la fonction définie par, $\psi(t, x, v) = v+J(x)-y(t)$, on a

$$Gr(\Theta) = \{(t, x, v) \in I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N :\ \psi(t, x, v) = 0\} \cap (I \times Gr(A)).$$

Puisque ψ est une fonction de Carathéodory et A est maximal monotone, on obtient que $Gr(\Theta) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^N) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^N)$. Du Théorème 1.5 il existe deux fonctions mesurables $x(\cdot), v(\cdot) : I \to \mathbb{R}^N$ telles que $(x(t), v(t)) \in \Theta(t)$ et ainsi $v(t) \in A(x(t))$ et

$$v(t) + J(x(t)) = y(t), \tag{3.3.12}$$

pour presque tout $t \in I$. En multipliant (3.3.12) par $x(t)$, puisque A est monotone et $0 \in A(0)$, on a

$$\|x(t)\|^p \leq \big\langle v(t) + J(x(t)), x(t)\big\rangle = \langle y(t), x(t)\rangle \leq \|y(t)\|\|x(t)\|,$$

d'où $\|x(t)\|^{p-1} \leq \|y(t)\|$. Cela donne

$$\|x(\cdot)\|_p^{p-1} \leq \|y(\cdot)\|_q,$$

et puisque $y(\cdot) \in \mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$, $x(\cdot) \in \mathrm{L}^p(I,\mathbb{R}^N)$ et donc $v(\cdot) \in \mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$. Puisque $v(t) + \|x(t)\|^{p-2}x(t) = y(t)$ on déduit que $y(\cdot) \in R(\hat{A}+\hat{J})$, i.e. $R(\hat{A}+\hat{J}) = \mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$.

Maintenant, supposons que pour certains $x_1(\cdot) \in \mathrm{L}^p(I,\mathbb{R}^N)$ et $v_1(\cdot) \in \mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$ on a $\langle v(\cdot) - v_1(\cdot), x(\cdot) - x_1(\cdot)\rangle_{p,q} \geq 0$ pour tout $(x,v) \in Gr(\hat{A})$.

Soit $x_2(\cdot) \in \mathcal{D}(\hat{A})$ tel que $v_1(\cdot) + \hat{J}(x_1(\cdot)) = v_2(\cdot) + \hat{J}(x_2(\cdot))$, $v_2(\cdot) \in \hat{A}(x_2(\cdot))$ (il existe en raison de la surjectivité de $\hat{A}+\hat{J}$). Alors

$$\left\langle v(\cdot) - v_2(\cdot) - \hat{J}(x_2(\cdot)) + \hat{J}(x_1(\cdot)), x(\cdot) - x_1(\cdot)\right\rangle_{p,q} \geq 0,$$

pour tout $(x,v) \in Gr(\hat{A})$. En particulier, en posant $x(\cdot) = x_2(\cdot)$ et $v(\cdot) = v_2(\cdot)$, on trouve

$$0 \leq \left\langle v_2(\cdot) - v_2(\cdot) - \hat{J}(x_2(\cdot)) + \hat{J}(x_1(\cdot)), x_2(\cdot) - x_1(\cdot)\right\rangle_{p,q} = \left\langle \hat{J}(x_1(\cdot)) - \hat{J}(x_2(\cdot)), x_2(\cdot) - x_1(\cdot)\right\rangle_{p,q} \leq 0,$$

i.e., $x_2(\cdot) = x_1(\cdot)$ (de la monotonie stricte de $\hat{J}$). Donc $x_1(\cdot) \in \mathcal{D}(\hat{A})$ et $v_1(\cdot) = v_2(\cdot) \in \hat{A}(x_2(\cdot))$. Cela prouve la maximalité de $\hat{A}$. □

3. $\hat{a} : \mathcal{D}(\hat{a}) \subset \mathrm{L}^p(I,\mathbb{R}^N) \rightrightarrows \mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$,
   $\mathcal{D}(\hat{a}) = \{u(\cdot) \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}^N) : \ a(\dot{u}(\cdot)) \in \mathrm{W}^{1,q}(I,\mathbb{R}^N), \ \text{ et } (a(\dot{u}(0)), -a(\dot{u}(T))) \in \xi(u(0),u(T))\}$,
   $\hat{a}(u(\cdot))(t) = -\dfrac{d}{dt}a(\dot{u}(t))$, $t \in I$, pour $u(\cdot) \in \mathcal{D}(\hat{a})$.

Proposition 3.7. *Supposons que toutes les hypothèses sur $a(\cdot)$ sont vérifiées. Alors*

$$\hat{a} : \mathcal{D}(\hat{a}) \subset \mathrm{L}^p(I,\mathbb{R}^N) \to \mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$$

est maximal monotone.

Premièrement, nous vérifions la monotonie de $\hat{a}$ en utilisant l'intégration par parties et la monotonie de ξ et a.

$$\begin{aligned}
\Big\langle \hat{a}(u_1(\cdot)) - \hat{a}(u_2(\cdot)), u_1(\cdot) - u_2(\cdot)\Big\rangle_{p,q} &= \int_0^T \Big\langle -\frac{d}{dt}a(\dot{u}_1(t)) + \frac{d}{dt}a(\dot{u}_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\Big\rangle dt \\
&= \Big\langle a(\dot{u}_1(0)) - a(\dot{u}_2(0)), u_1(0) - u_2(0)\Big\rangle \\
&\quad -\Big\langle a(\dot{u}_1(T)) - a(\dot{u}_2(T)), u_1(T) - u_2(T)\Big\rangle \\
&\quad + \int_0^T \Big\langle a(\dot{u}_1(t)) - a(\dot{u}_2(t)), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\Big\rangle dt \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

pour tout $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in \mathcal{D}(\hat{a})$.

Afin de prouver le reste de la proposition, nous donnons quelques lemmes utiles.

Lemme 3.1. *Pour chaque* $h \in \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$, $v, w \in \mathbb{R}^N$, *l'équation*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} a(\dot{u}(t)) = h(t) \\ u(0) = v,\ u(T) = w \end{cases} \tag{3.3.13}$$

admet une solution unique $u(\cdot) \in \mathrm{W}^{1,q}(I, \mathbb{R}^N)$.

Preuve.

Pour tout $v, w \in \mathbb{R}^N$ et $l(\cdot) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$, on définit l'opérateur $P : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ par

$$P(x) = \int_0^T a^{-1}(x + l(t))dt - y,$$

où $y = w - v$. Évidemment, P est continu (puisque $a^{-1}(\cdot)$ est continue), et

$$\begin{aligned} \langle P(x), x \rangle &= \int_0^T \big\langle a^{-1}(x + l(t)), x \big\rangle dt - \langle y, x \rangle \\ &= \int_0^T \Big(\big\langle a^{-1}(x + l(t)), x + l(t) \big\rangle - \big\langle a^{-1}(x + l(t)), l(t) \big\rangle \Big) dt - \langle y, x \rangle \\ &\geq \int_0^T \Big(\beta \|a^{-1}(x + l(t))\|^p - \|a^{-1}(x + l(t))\| \|l(t)\| - T^{-1}\big(\langle y, x + l(t) \rangle - \langle y, l(t) \rangle \big) \Big) dt \\ &\geq \int_0^T \Big(\|a^{-1}(x + l(t))\| \big(\beta \|a^{-1}(x + l(t))\|^{p-1} - \|l(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \big) - T^{-1}\|y\| \|x + l(t)\| + T^{-1}\langle y, l(t) \rangle \Big) dt. \end{aligned}$$

De $H(a)(ii)$ en remplaçant x par $a^{-1}(x + l(t))$, on obtient

$$\|x + l(t)\| \leq c(\|a^{-1}(x + l(t))\|^{p-1} + 1), \quad \text{pour tout } t \in I. \tag{3.3.14}$$

D'où

$$\begin{aligned} &\langle P(x), x \rangle \\ \geq\ & \int_0^T \Big(\|a^{-1}(x + l(t))\| \big(\beta \|a^{-1}(x + l(t))\|^{p-1} - \|l(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \big) - cT^{-1}\|y\| \big(\|a^{-1}(x + l(t))\|^{p-1} + 1 \big) \\ & + T^{-1}\langle y, l(t) \rangle \Big) dt \\ \geq\ & \int_0^T \Big(\|a^{-1}(x + l(t))\| \big(\beta \|a^{-1}(x + l(t))\|^{p-1} - \|l(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \big) - cT^{-1}\|y\| \big(\|a^{-1}(x + l(t))\|^{p-1} + 1 \big) \Big) dt \\ & - \|y\| \|l(\cdot)\|_{\mathcal{C}}. \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

De (3.3.14) on a

$$\frac{1}{c}(\|x\| - \|l(t)\|) - 1 \leq \|a^{-1}(x + l(t))\|^{p-1}.$$

Alors, $\|x\| \to \infty$ implique $\|a^{-1}(x + l(t))\| \to \infty$, uniformément pour $t \in I$.

Donc, par (3.3.15), il existe un nombre positif r, tel que $\langle P(x), x\rangle \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ avec $\|x\| = r$. Par le principe de l'angle aigu, $P(x) = 0$ admet une solution. L'unicité de la solution résulte de la monotonie stricte de $a^{-1}(\cdot)$. En effet, si x_1 et x_2 sont deux solutions de $P(x) = 0$ alors $P(x_1) = 0$ et $P(x_2) = 0$. Donc

$$\begin{aligned}\langle P(x_1) - P(x_2), x_1 - x_2\rangle &= \int_0^T \big\langle a^{-1}(x_1 + l(t)) - a^{-1}(x_2 + l(t)), (x_1 + l(t)) - (x_2 + l(t))\big\rangle dt \\ &= 0.\end{aligned}$$

D'où

$$\big\langle a^{-1}(x_1 + l(t)) - a^{-1}(x_2 + l(t)), (x_1 + l(t)) - (x_2 + l(t))\big\rangle = 0, \quad \text{p.p. sur } I.$$

Par la stricte monotonie de $a^{-1}(\cdot)$ on obtient $x_1 = x_2$.

Considérons l'opérateur $\zeta : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$, avec pour tout $l(\cdot) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$, $\zeta(l(\cdot))$ est la solution unique de $Px = 0$, i.e., $\int_0^T a^{-1}(\zeta(l(\cdot)) + l(t))dt = y$, où $y = w - v$ est fixé.

En examinant la preuve ci-dessus, nous pouvons facilement vérifier que $\zeta(\cdot)$ envoie les ensembles bornés en ensembles bornés. En effet, soit Λ un sous ensemble borné de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$ et soit $l(\cdot) \in \Lambda$. Alors, de (3.3.15)

$$\begin{aligned}\int_0^T \Big(\|a^{-1}(\zeta(l(\cdot))+l(t))\|\big(\beta\|a^{-1}(\zeta(l(\cdot))+l(t))\|^{p-1} - \|l(\cdot)\|_{\mathcal{C}}\big) - cT^{-1}\|y\|\big(\|a^{-1}(\zeta(l(\cdot))+l(t))\|^{p-1}+1\big)\Big)dt \\ - \|y\|\|l(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \leq 0,\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\beta\int_0^T \|a^{-1}(\zeta(l(\cdot)) + l(t))\|^p dt \leq \|l(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \int_0^T \|a^{-1}(\zeta(l(\cdot)) + l(t))\|dt \\ + cT^{-1}\int_0^T \|y\|\big(\|a^{-1}(\zeta(l(\cdot)) + l(t))\|^{p-1} + 1\big)dt + \|y\|\|l(\cdot)\|_{\mathcal{C}}. \quad (3.3.16)\end{aligned}$$

En utilisant (3.3.16), on obtient

$$\beta T\|a^{-1}(\zeta(l(\cdot))+l(\cdot))\|_{\mathcal{C}}^p \leq T\|l(\cdot)\|_{\mathcal{C}}\|a^{-1}(\zeta(l(\cdot))+l(\cdot))\|_{\mathcal{C}} + c\|y\|\big(\|a^{-1}(\zeta(l(\cdot))+l(\cdot))\|_{\mathcal{C}}^{p-1}+1\big) + \|y\|\|l(\cdot)\|_{\mathcal{C}}.$$

En posant $M_l = \|a^{-1}(\zeta(l(\cdot)) + l(\cdot))\|_{\mathcal{C}}$, on obtient

$$\beta T M_l^p \leq T\|l(\cdot)\|_{\mathcal{C}} M_l + c\|y\| M_l^{p-1} + \|y\|(c + \|l(\cdot)\|_{\mathcal{C}}).$$

Puisque Λ est borné dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$, il existe $r > 0$ tel que

$$\|l(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \leq r, \quad \text{pour tout } l(\cdot) \in \Lambda.$$

d'où,

$$M_l^p \leq \frac{r}{\beta} M_l + \frac{c\|y\|}{\beta T} M_l^{p-1} + \frac{(c+r)}{\beta T}\|y\|, \text{ pour tout } l(\cdot) \in \Lambda. \tag{3.3.17}$$

Pour tout $l(\cdot) \in \Lambda$, soit $M_l \leq 1$ ou bien $M_l > 1$. Si on suppose que $M_l > 1$ alors (3.3.17) devient

$$M_l^p \leq \left(\frac{r}{\beta} + \frac{(2c+r)}{\beta T}\|y\|\right) M_l^{p-1},$$

d'où

$$M_l \leq \frac{r}{\beta} + \frac{(2c+r)}{\beta T}\|y\|,$$

si $\frac{r}{\beta} + \frac{(2c+r)}{\beta T}\|y\| \leq 1$ alors on obtient une contradiction et $M_l \leq 1$. Donc

$$M_l \leq \max\left\{\frac{r}{\beta} + \frac{(2c+r)}{\beta T}\|y\|, 1\right\}.$$

Alors, l'ensemble $\{a^{-1}(\zeta(l(\cdot)) + l(\cdot)), l \in \Lambda\}$ est borné dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$.

D'autre part, à partir de (3.3.14) et pour tout $t \in I$, on a

$$\|\zeta(l(\cdot)) + l(t)\| \leq c\big(\|a^{-1}(\zeta(l(\cdot)) + l(t))\|^{p-1} + 1\big),$$

cela donne

$$\|\zeta(l(\cdot))\| \leq c(\|a^{-1}(\zeta(l(\cdot)) + l(t))\|^{p-1} + 1) + \|l(t)\| \leq c(\|a^{-1}(\zeta(l(\cdot)) + l(\cdot))\|_{\mathcal{C}}^{p-1} + 1) + \|l(\cdot)\|_{\mathcal{C}},$$

et donc l'ensemble $\{\zeta(l(\cdot)), l(\cdot) \in \Lambda\}$ est borné dans $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$.

Pour montrer la continuité de ζ, soit $(l_n(\cdot))$ une suite convergente dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$. Puisque $(\zeta(l_n(\cdot)))$ est une suite bornée, elle contient une sous suite convergente, aussi notée par $(\zeta(l_n(\cdot)))$. Supposons que $\zeta(l_n(\cdot)) \to \tilde{\zeta}$ dans $\mathbb{R}^N$. Quand $n \to \infty$ dans

$$\int_0^T a^{-1}(\zeta(l_n(\cdot)) + l_n(t))dt = y,$$

on trouve que

$$\int_0^T a^{-1}(\tilde{\zeta} + l(t))dt = y,$$

et donc $\zeta(l(\cdot)) = \tilde{\zeta}$, qui montre la continuité de ζ.

Pour tout $h(\cdot) \in \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$, soit

$$H(h(\cdot))(t) = \int_0^t h(s)ds, \quad t \in I,$$

$$w = v + \int_0^T a^{-1}\big(\zeta(H(h(\cdot))) + H(h(\cdot))(s)\big)ds,$$

et

$$u(t) = v + \int_0^t a^{-1}\big(\zeta(H(h(\cdot))) + H(h(\cdot))(s)\big)ds, \; \forall t \in I. \tag{3.3.18}$$

Évidemment, $H : \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N) \to \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$ est un opérateur linéaire compact, et $u(\cdot)$ est la solution unique de (3.3.13), notée par $\sigma(h(\cdot))$. □

Remarque 3.2. *Ici, nous donnons un résultat plus fort que celui dans la preuve du Lemme 3.1, c'est à dire, si (y_n) est bornée dans $\mathbb{R}^N$, $(l_n(\cdot))$ est bornée dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$, et (v_n) est une suite de $\mathbb{R}^N$ vérifiant*

$$y_n = \int_0^T a^{-1}(v_n + l_n(t))dt = 0, \; \forall n \in \mathbb{N},$$

alors (v_n) est aussi bornée.

Lemme 3.2. *L'opérateur $\sigma : \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N) \to \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$ est complètement continu.*

Preuve.

Supposons que $h_n(\cdot) \rightharpoonup h(\cdot)$ dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$, $u_n(\cdot) = \sigma(h_n(\cdot))$. Alors

$$u_n(t) = v + \int_0^t a^{-1}\Big(\zeta(H(h_n(\cdot))) + H(h_n(\cdot))(s)\Big)ds, \; \forall t \in I, \tag{3.3.19}$$

ou de façon équivalente

$$\frac{d}{dt}a(\dot{u}_n(t)) = h_n(t) \quad \text{p.p. sur } I, \tag{3.3.20}$$

et $u_n(0) = v, \; u_n(b) = w$.

La convergence faible de $(h_n(\cdot))$ implique sa bornitude dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$, qui à son tour implique que $(u_n(\cdot))$ est bornée dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$, puisque H et ζ sont continues et bornées.

Soit $k(t) = tT^{-1}w + (1 - tT^{-1})v$, alors $k(\cdot) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^N)$, avec $k(0) = v$, $k(T) = w$ et $\dot{k}(t) = \frac{1}{T}(w - v)$.

En multipliant (3.3.20) par $u_n(t) - k(t)$ et en intégrant sur I, on obtient

$$\int_0^T \Big\langle \frac{d}{dt} a(\dot{u}_n(t)), u_n(t) - k(t) \Big\rangle dt = \int_0^T \Big\langle h_n(t), u_n(t) - k(t) \Big\rangle dt.$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \Big\langle a(\dot{u}_n(T)), u_n(T) - k(T) \Big\rangle - \Big\langle a(\dot{u}_n(0)), u_n(0) - k(0) \Big\rangle - \int_0^T \Big\langle a(\dot{u}_n(t)), \dot{u}_n(t) - \dot{k}(t) \Big\rangle dt \\ = \int_0^T \Big\langle h_n(t), u_n(t) - k(t) \Big\rangle dt \quad (3.3.21) \end{aligned}$$

Par (3.3.20), $H(a)(i)$, et $H(a)(ii)$, on obtient

$$\begin{aligned} \beta \|\dot{u}_n(\cdot)\|_p^p &\leq \int_0^T \Big\langle a(\dot{u}_n(t)), \dot{k}(t) \Big\rangle dt - \int_0^T \langle h_n(t), u_n(t) \rangle dt + \int_0^T \langle h_n(t), k(t) \rangle dt \\ &\leq \int_0^T c\big(\|\dot{u}_n(t)\|^{p-1} + 1\big) \|\dot{k}(t)\| dt + \int_0^T \|h_n(t)\| \|u_n(t)\| dt + \int_0^T \|h_n(t)\| \|k(t)\| dt \\ &\leq cT^{-\frac{1}{q}} \|w - v\| \|\dot{u}_n(\cdot)\|_p^{p-1} + c\|w - v\| + T^{\frac{1}{p}} \|h_n(\cdot)\|_q \|u_n(\cdot)\|_\infty + \|h_n(\cdot)\|_q \|k(\cdot)\|_p. \end{aligned}$$

Des inégalités ci-dessus, nous pouvons déduire que $(\|\dot{u}_n(\cdot)\|_p)$ est bornée. Donc $(u_n(\cdot))$ est bornée dans $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$. Par le théorème d'injection compacte, la compacité relative de $(u_n(\cdot))$ dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$ peut être obtenue.

De (3.3.20), on sait aussi que $\Big(\dfrac{d}{dt} a(\dot{u}_n(\cdot))\Big)$ est bornée dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$, et

$$a(\dot{u}_n(t)) = \zeta(H(h_n(\cdot))) + H(h_n(\cdot))(t), \ \forall t \in I,$$

ce qui donne que $(a(\dot{u}_n(\cdot)))$ est bornée dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$. Donc $(a(\dot{u}_n(\cdot)))$ est bornée dans $\mathrm{W}^{1,q}(I, \mathbb{R}^N)$, et donc elle est relativement compacte dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$. Puisque $a(\cdot)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^N$, nous pouvons vérifier que $(\dot{u}_n(\cdot))$ est aussi relativement compacte dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$. Donc, $(u_n(\cdot))$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^N)$. Sans perdre de généralités, on peut supposer que $u_n(\cdot) \to u(\cdot)$ dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^N)$, qui vérifie que $u_n(t) \to u(t)$ et $\dot{u}_n(t) \to \dot{u}(t)$ uniformément pour t dans I.

Comme nous le savons, un opérateur linéaire compact est complètement continu, ainsi $H(h_n(\cdot)) \to H(h(\cdot))$ dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$ qui à son tour donne que $\zeta(H(h_n(\cdot))) \to \zeta(H(h(\cdot)))$

dans $\mathbb{R}^N$. Par passage à la limite quand $n \to \infty$ dans (3.3.19), on a (3.3.18). De plus $\sigma(h_n(\cdot)) \to \sigma(h(\cdot))$ dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^N)$ (bien sûr dans $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$), et donc σ est complètement continu. $\square$

Lemme 3.3. *Pour tout $h \in \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$, l'équation*

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}a(\dot{u}(t)) + \|u(t)\|^{p-2}u(t) = -h(t) \quad p.p.\ sur\ I; \\ u(0) = v;\ u(T) = w, \end{cases} \tag{3.3.22}$$

admet une solution unique dans $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$.

Preuve.

Soit $U(u(\cdot)) = \big(\sigma \circ (\hat{J} + \hat{h})\big)(u(\cdot))$, où $\hat{h}(u(\cdot)) = h(\cdot)$, pour tout $u(\cdot) \in \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$. En tant que fonction multiple, nous savons que, puisque σ est complètement continue et $\hat{J}$ ansi que $\hat{h}$ sont continues, $U : \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N) \to \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$ est continue, de plus, puisque σ est complètement continue et $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$ est réflexif, σ est compacte et comme $\hat{h}$ est constante et $\hat{J}$ est borné, on obtient que U et aussi compacte.

Évidemment, $u(\cdot)$ résout le problème (3.3.22) si et seulement si $u(\cdot) = U(u(\cdot))$.

Soit

$$S = \{u(\cdot) \in \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N) :\ u(\cdot) = \mu U(u(\cdot)),\ 0 < \mu < 1\}.$$

Si $u(\cdot) \in S$, alors $u(\cdot) = \mu U(u(\cdot))$, donc $\mu^{-1}u(\cdot) = \sigma\Big(\|u(\cdot)\|^{p-2}u(\cdot) + h(\cdot)\Big)$. Ainsi

$$-\frac{d}{dt}a(\mu^{-1}\dot{u}(t)) + \|u(t)\|^{p-2}u(t) = -h(t). \tag{3.3.23}$$

avec $\mu^{-1}u(0) = v$ et $\mu^{-1}u(T) = w$.

En multipliant (3.3.23) par $(\mu^{-1}u(t) - k(t))$, on obtient

$$\Big\langle -\frac{d}{dt}a(\mu^{-1}\dot{u}(t)), \mu^{-1}u(t) - k(t)\Big\rangle + \Big\langle \|u(t)\|^{p-2}u(t), \mu^{-1}u(t) - k(t)\Big\rangle = -\Big\langle h(t), \mu^{-1}u(t) - k(t)\Big\rangle.$$

En intégrant par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^T \Big\langle a(\mu^{-1}\dot{u}(t)), \mu^{-1}\dot{u}(t) - \dot{k}(t)\Big\rangle dt + \mu^{-1}\int_0^T \|u(t)\|^p dt + \int_0^T \|u(t)\|^{p-2}\big\langle u(t), k(t)\big\rangle dt \\ = \mu^{-1}\int_0^T \big\langle -h(t), u(t)\big\rangle dt + \int_0^T \big\langle h(t), k(t)\big\rangle dt,\end{aligned}$$

et en combinant avec $H(a)(i)$ et $H(a)(ii)$, et en multipliant par μ, puisque $\mu < 1$ nous trouvons

$$\beta\mu^{-(p-1)}\int_0^T \|\dot{u}(t)\|^p dt + \int_0^T \|u(t)\|^p dt \leq \int_0^T c\big(\mu^{-(p-1)}\|\dot{u}(t)\|^{p-1}+1\big)\|\dot{k}(t)\|dt$$
$$+\int_0^T \|u(t)\|^{p-1}\|\|k(t)\|dt + \int_0^T \|u(t)\|\|h(t)\|dt + \int_0^T \|h(t)\|\|k(t)\|dt,$$

et alors

$$\beta\|\dot{u}(\cdot)\|_p^p + \mu^{p-1}\|u(\cdot)\|_p^p \leq cT^{\frac{-1}{q}}\|w-v\|\|\dot{u}(\cdot)\|_p^{p-1} + c\mu^{p-1}\|w-v\|$$
$$+\mu^{p-1}\|u(\cdot)\|_p^{p-1}\|k(\cdot)\|_q + \mu^{p-1}\|u(\cdot)\|_p\|h(\cdot)\|_q + \mu^{p-1}\|h(\cdot)\|_q\|k(\cdot)\|_p. \quad (3.3.24)$$

Par l'inégalité de Young

$$AB \leq \frac{A^p}{\epsilon^p p} + \frac{\epsilon^q B^q}{q},\ A \geq 0,\ B \geq 0, \epsilon > 0,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
\beta\|\dot{u}(\cdot)\|_p^p + \mu^{p-1}\|u(\cdot)\|_p^p &\leq cT^{\frac{-1}{q}}\|w-v\|\|\dot{u}(\cdot)\|_p^{p-1} + c\mu^{p-1}\|w-v\| + \mu^{p-1}\left(\frac{\|u(\cdot)\|_p^p}{2q} + \frac{2^{p-1}\|k(\cdot)\|_q^p}{p}\right) \\
&+ \mu^{p-1}\left(\frac{\|u(\cdot)\|_p^p}{p} + \frac{\|h(\cdot)\|_q^q}{q}\right) + \mu^{p-1}\|h(\cdot)\|_q\|k(\cdot)\|_p. \\
&\leq cT^{\frac{-1}{q}}\|w-v\|\|\dot{u}(\cdot)\|_p^{p-1} + c\mu^{p-1}\|w-v\| + \frac{(2\mu)^{p-1}}{2}\|k(\cdot)\|_q^p \\
&+ \mu^{p-1}\|h(\cdot)\|_q^q + \mu^{p-1}\|h(\cdot)\|_q\|k(\cdot)\|_p + \mu^{p-1}\|u(\cdot)\|_p^p.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|\dot{u}(\cdot)\|_p^p \leq \frac{cT^{-\frac{1}{q}}}{\beta}\|w-v\|\|\dot{u}(\cdot)\|_p^{p-1} + \frac{c}{\beta}\|w-v\| + \frac{2^{p-2}}{\beta}\|k(\cdot)\|_q^p + \frac{(1+\|k(\cdot)\|_p)}{\beta}\|h(\cdot)\|_q^q. \quad (3.3.25)$$

Alors, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que $\|\dot{u}(\cdot)\|_p \leq C_1$.

D'autre part, on a

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \dot{u}(\tau)d\tau,$$

d'où

$$\|u(t)\| \leq \|v\| + T^{\frac{1}{q}}\|\dot{u}(\cdot)\|_p \leq \|v\| + T^{\frac{1}{q}}C_1, \quad \text{pour tout } \ t \in I.$$

Donc

$$\|u(\cdot)\|_p \leq T^{\frac{1}{p}}\|v\| + C_1,$$

alors, on trouve une constante $C = T^{\frac{1}{p}}\|v\| + C_1$, telle que $\|u(\cdot)\|_p \le C$ et $\|\dot{u}(\cdot)\|_p \le C$, ce qui signifie que S est borné dans $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$. En utilisant le principe alternatif de Leray-Schauder, U a un point fixe qui résout (3.3.22), ceci achève la démonstration. $\square$

Pour tout $(v, w) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, soit $\theta(v, w) = (-a(\dot{u}(0)), a(\dot{u}(T)))$, où $u(\cdot) \in \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$ est la solution unique de (3.3.22).

Lemme 3.4. *L'application $\theta : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ est continue monotone et définie partout, donc elle est maximale monotone.*

Preuve.

Tout d'abord, nous vérifions la monotonie de θ en utilisant la monotonie de $a(\cdot)$ et $\hat{J}(\cdot)$. Pour tout $v_i, w_i \in \mathbb{R}^N$ $(i = 1, 2)$,

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \theta(v_1, w_1) - \theta(v_2, w_2), (v_1, w_1) - (v_2, w_2) \Big\rangle \\
&= \; -\Big\langle a(\dot{u}_1(0)) + a(\dot{u}_2(0)), v_1 - v_2 \Big\rangle + \Big\langle a(\dot{u}_1(T)) - a(\dot{u}_2(T)), w_1 - w_2 \Big\rangle \\
&= \; \int_0^T \Big(\frac{d}{dt}\Big\langle a(\dot{u}_1(t)) - a(\dot{u}_2(t)), u_1(t) - u_2(t) \rangle \Big) dt \\
&= \; \int_0^T \Big\langle \frac{d}{dt} a(\dot{u}_1(t)) - \frac{d}{dt} a(\dot{u}_2(t)), u_1(t) - u_2(t) \Big\rangle dt + \int_0^T \Big\langle a(\dot{u}_1(t)) - a(\dot{u}_2(t)), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) \Big\rangle dt \\
&\ge \; \int_0^T \Big\langle \frac{d}{dt} a(\dot{u}_1(t)) - \frac{d}{dt} a(\dot{u}_2(t)), u_1(t) - u_2(t) \Big\rangle dt \\
&= \; \int_0^T \Big\langle \|u_1(t)\|^{p-2} u_1(t) - \|u_2(t)\|^{p-2} u_2(t), u_1(t) - u_2(t) \Big\rangle dt \\
&= \; \int_0^T \Big\langle \hat{J}(u_1(\cdot))(t) - \hat{J}(u_2(\cdot))(t), u_1(t) - u_2(t) \Big\rangle dt \\
&= \; \big\langle \hat{J}(u_1(\cdot)) - \hat{J}(u_2(\cdot)), u_1(\cdot) - u_2(\cdot) \big\rangle_{p,q} \\
&\ge \; 0.
\end{aligned}$$

Supposons que, $(v_n, w_n) \to (v, w)$. Soit $u_n = q(v_n, w_n)$ les solutions de (3.3.22) avec des valeurs limites $u_n(0) = v_n$, $u_n(T) = w_n$. Alors

$$-\frac{d}{dt} a(\dot{u}_n(t)) + \|u_n(t)\|^{p-2} u_n(t) = -h(t), \text{ p.p. sur } I. \tag{3.3.26}$$

Soit $k_n(t) = \frac{t}{T}w_n + (1 - \frac{t}{T})v_n$. Par le même argument de la démonstration du Lemme 3.3, on a

$$\beta\|\dot{u}_n(\cdot)\|_p^p + \|u_n(\cdot)\|_p^p \leq \int_0^T c\big(\|\dot{u}_n(t)\|^{p-1} + 1\big)\|\dot{k}_n(t)\|dt + \int_0^T \|u_n(t)\|^{p-1}\|k_n(t)\|dt$$
$$+ \int_0^T \|u_n(t)\|\|h(t)\| + \int_0^T \|h(t)\|\|k_n(t)\|dt. \quad (3.3.27)$$

En utilisant les mêmes calculs qu'on a fait pour obtenir (3.3.24) avec $\mu = 1$, on trouve

$$\beta\|\dot{u}_n(\cdot)\|_p^p + \|u_n(\cdot)\|_p^p \leq cT^{\frac{-1}{q}}\|w_n - v_n\|\|\dot{u}_n(\cdot)\|_p^{p-1} + c\|w_n - v_n\|$$
$$+ \|u_n(\cdot)\|_p^{p-1}\|k(\cdot)\|_q + \mu^{p-1}\|u_n(\cdot)\|_p\|h(\cdot)\|_q + \mu^{p-1}\|h(\cdot)\|_q\|k(\cdot)\|_p. \quad (3.3.28)$$

D'où, en utilisant l'inégalité de Young de la même façon qu'on l'a fait pour obtenir (3.3.25)

$$\beta\|\dot{u}_n(\cdot)\|_p^p \leq \frac{cT^{-\frac{1}{q}}}{\beta}\|w_n - v_n\|\|\dot{u}_n(\cdot)\|_p^{p-1} + \frac{c}{\beta}\|w_n - v_n\| + \frac{2^{p-2}}{\beta}\|k(\cdot)\|_q^p + \frac{(1 + \|k(\cdot)\|_p)}{\beta}\|h(\cdot)\|_q^q.$$

Puisque $(v_n, w_n) \to (v, w)$, la suite $(\|w_n - v_n\|)$ est bornée dans $\mathbb{R}$. Donc la suite $(\dot{u}_n(\cdot))$ est bornée dans $\mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N)$.

Par (3.3.28) on obtient

$$\|u_n(\cdot)\|_p^p \leq cT^{\frac{-1}{q}}\|w_n - v_n\|\|\dot{u}_n(\cdot)\|_p^{p-1} + c\|w_n - v_n\|$$
$$+ \|u_n(\cdot)\|_p^{p-1}\|k(\cdot)\|_q + \mu^{p-1}\|u_n(\cdot)\|_p\|h(\cdot)\|_q + \mu^{p-1}\|h(\cdot)\|_q\|k(\cdot)\|_p,$$

d'où $(u_n(\cdot))$ est bornée dans $\mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N)$. Ainsi, $(u_n(\cdot))$ est bornée dans $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$, et donc elle est relativement compacte dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$.

De (3.3.26), on a

$$\left\|\frac{d}{dt}a(\dot{u}_n(\cdot))\right\|_q \leq \|u_n(\cdot)\|_p^{p-1} + \|h(\cdot)\|_q,$$

et comme $(u_n(\cdot))$ est bornée dans $\mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N)$ (puisque elle est bornée dans $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$), ainsi l'est $\left(\frac{d}{dt}a(\dot{u}_n(\cdot))\right)$ dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$.

Par $H(a)(ii)$, on a

$$\|a(\dot{u}_n(\cdot))\|_q \leq c\left(\|\dot{u}_n(\cdot)\|_p^{p-1} + T^{\frac{1}{q}}\right),$$

et comme $(\dot{u}_n(\cdot))$ (puisque $(u_n(\cdot))$ est bornée dans $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$) est bornée dans $\mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N)$, on déduit que $(a(\dot{u}_n(\cdot)))$ est bornée dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$. Donc $(a(\dot{u}_n(\cdot)))$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^N)$, et ainsi l'est $(\dot{u}_n(\cdot))$. Ces faits nous disent que $(u_n(\cdot))$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}^N)$. Supposons que $u_n(\cdot)\to u(\cdot)$ dans $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}^N)$, alors $a(\dot{u}_n(0))\to a(\dot{u}(0))$, et $a(\dot{u}_n(T))\to a(\dot{u}(T))$. D'autre part, (3.3.26) montre que

$$-a(\dot{u}_n(t))+a(\dot{u}_n(0))+\int_0^t \|u_n(\tau)\|^{p-2}u_n(\tau)d\tau = H(h)(t), \forall t\in I.$$

Quand $n\to\infty$, on obtient

$$-a(\dot{u}(t))+a(\dot{u}(0))+\int_0^t \|u(\tau)\|^{p-2}u(\tau)d\tau = H(h)(t), \forall t\in I,$$

et $u(0)=v$, $u(T)=w$, qui nous affirment que $u(\cdot)$ est une solution de (3.3.22), i.e., $u(\cdot)=q(v,w)$. Donc $\theta(v_n,w_n)=(-a(\dot{u}_n(0)),a(\dot{u}_n(T)))\to(-(a(\dot{u}(0))),a(\dot{u}(T)))=\theta(v,w)$, et la continuité de θ est alors prouver. □

Remarque 3.3. *En consultant la preuve du Lemme 3.4, nous pouvons voir que la solution de* (3.3.22) *dépend continument des valeurs aux limites.*

Maintenant, on étudie l'opérateur $\theta+\xi$, qui est évidemment maximal monotone. On peut aussi vérifier qu'il est coercif. En effet, pour chaque $(v,w)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$, et $u(\cdot)=q(v,w)$,

$$\begin{aligned}
\Big\langle \theta(v,w)+\xi(v,w),(v,w)\Big\rangle &\geq \Big\langle -a(\dot{u}(0)),u(0)\Big\rangle+\Big\langle a(\dot{u}(T)),u(T)\Big\rangle\\
&= \int_0^T \frac{d}{dt}\Big\langle a(\dot{u}(t)),u(t)\Big\rangle dt\\
&= \int_0^T \Big\langle \frac{d}{dt}a(\dot{u}(t)),u(t)\Big\rangle dt+\int_0^T \Big\langle a(\dot{u}(t)),\dot{u}(t)\Big\rangle dt\\
&\geq \int_0^T \|u(t)\|^p dt+\int_0^T \langle h(t),u(t)\rangle dt+\beta\int_0^T \|\dot{u}(t)\|^p dt\\
&\geq \|u(\cdot)\|_p^p+\beta\|\dot{u}(\cdot)\|_p^p-\|h\|_q\|u(\cdot)\|_p\\
&= \beta\|\dot{u}(\cdot)\|_p^p+\|u(\cdot)\|_p\Big(\|u(\cdot)\|_p^{p-1}-\|h(\cdot)\|_q\Big).
\end{aligned} \tag{3.3.29}$$

D'autre part, étant donné que $t\mapsto\|u(t)\|$ est continue, il existe $t_0\in]0,T[$, tel que

$$\|u(t_0)\|=\frac{1}{T}\int_0^T \|u(t)\|dt$$

et

$$u(t)=u(t_0)+\int_{t_0}^t \dot{u}(\tau)d\tau$$

pour tout $t \in I$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &\leq T^{-1}\int_0^T \|u(\tau)\|d\tau + \int_{t_0}^t \|\dot{u}(\tau)\|d\tau \\
&\leq T^{-1}\int_0^T \|u(\tau)\|d\tau + \int_0^T \|\dot{u}(\tau)\|d\tau \\
&\leq T^{\frac{1}{p}}\|u(\cdot)\|_p + T^{\frac{1}{q}}\|\dot{u}(\cdot)\|_p.
\end{aligned}$$

Donc, il existe $c_1 > 0$, tel que

$$\|(v,w)\| = \|(u(0),u(T))\| \leq c_1(\|u(\cdot)\|_p + \|\dot{u}(\cdot)\|_p). \tag{3.3.30}$$

De (3.3.29) et (3.3.30), on obtient

$$\frac{\big\langle \theta(v,w)+\xi(v,w),(v,w)\big\rangle}{\|(v,w)\|} \leq \frac{\beta\|\dot{u}(\cdot)\|_p^p + \|u(\cdot)\|_p\Big(\|u(\cdot)\|_p^{p-1} - \|h(\cdot)\|_q\Big)}{c_1(\|u(\cdot)\|_p + \|\dot{u}(\cdot)\|_p).}$$

En combinant avec (3.3.30) on trouve

$$\frac{\big\langle \theta(v,w)+\xi(v,w),(v,w)\big\rangle}{\|(v,w)\|} \to +\infty, \quad \text{quand} \quad \|(v,w)\| \to \infty.$$

Cela signifie la coercivité de $\theta + \xi$.

Rappelons qu'une application maximale monotone et coercive est surjective, donc l'image de $\theta + \xi$ est $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Ainsi $\exists (v,w) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, tel que $(0,0) \in \theta(v,w) + \xi(v,w)$, i.e., il existe $u(\cdot) \in \mathrm{W}^{1,p}(I,\mathbb{R}^N)$, vérifiant (3.3.22), et

$$(a(\dot{u}(0)), -a(\dot{u}(T))) \in \xi(u(0),u(T)).$$

Donc, on a

Lemme 3.5. *Pour tout* $h \in \mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$, *l'équation*

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}a(\dot{u}(t)) + \|u(t)\|^{p-2}u(t) = h(t) \ \textit{p.p. sur } I; \\ (a(\dot{u}(0)), -a(\dot{u}(T))) \in \xi(u(0),u(T)) \end{cases} \tag{3.3.31}$$

admet une solution unique dans $\mathrm{W}^{1,p}(I,\mathbb{R}^N)$.

L'unicité de la solution de (3.3.31) est due à la monotonie stricte de $\hat{J}$. En effet, si on suppose que $u_1(\cdot)$ et $u_2(\cdot)$ sont deux solutions de (3.3.31), alors

$$\hat{a}(u_1(\cdot)) + \hat{J}(u_1(\cdot)) = h(\cdot) \quad \text{et} \quad \hat{a}(u_2(\cdot)) + \hat{J}(u_2(\cdot)) = h(\cdot),$$

d'où

$$\big\langle \hat{a}(u_1(\cdot)) + \hat{J}(u_1(\cdot)) - \hat{a}(u_2(\cdot)) - \hat{J}(u_2(\cdot)), u_1(\cdot) - u_2(\cdot)\big\rangle = 0.$$

Ceci implique, par la monotonie de $\hat{a}$ et $\hat{J}$, que

$$0 \leq \big\langle \hat{J}(u_1(\cdot)) - \hat{J}(u_2(\cdot)), u_1(\cdot) - u_2(\cdot)\big\rangle = -\big\langle \hat{a}(u_1(\cdot)) - \hat{a}(u_2(\cdot)), u_1(\cdot) - u_2(\cdot)\big\rangle \leq 0.$$

Donc

$$\big\langle \hat{J}(u_1(\cdot)) - \hat{J}(u_2(\cdot)), u_1(\cdot) - u_2(\cdot)\big\rangle = 0,$$

et par la monotonie stricte de $\hat{J}$, on obtient $u_1 = u_2$.

A la fin de cette sous section, nous complétons la preuve de la Proposition 3.7.

Preuve.

Supposons que, pour tout $(u_0(\cdot), v_0(\cdot)) \in \mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N) \times L^q(I, \mathbb{R}^N)$ on a

$$\langle \hat{a}(u(\cdot)) - v_0(\cdot), u(\cdot) - u_0(\cdot)\rangle_{p,q} \geq 0,\ \forall u(\cdot) \in \mathcal{D}(\hat{a}). \tag{3.3.32}$$

Le Lemme 3.5 nous dit que $\hat{a} + \hat{J}$ est surjective, donc il existe $u_1(\cdot) \in \mathcal{D}(\hat{a})$, tel que $\hat{a}(u_1(\cdot)) + \hat{J}(u_1(\cdot)) = v_0(\cdot) + \hat{J}(u_0(\cdot))$. Donc (3.3.32) devient

$$\langle \hat{a}(u(\cdot)) - \hat{a}(u_1(\cdot)) + \hat{J}(u_0(\cdot)) - \hat{J}(u_1(\cdot)), u(\cdot) - u_0(\cdot)\rangle_{p,q} \geq 0,\ \forall u(\cdot) \in \mathcal{D}(\hat{a}).$$

En particulier, on choisit $u(\cdot) = u_1(\cdot)$, alors $\langle \hat{J}(u_0(\cdot)) - \hat{J}(u_1(\cdot)), u_1(\cdot) - u_0(\cdot)\rangle_{p,q} \geq 0$, et donc $u_0(\cdot) = u_1(\cdot) \in \mathcal{D}(\hat{a})$, et $v_0(\cdot) = \hat{a}(u_0(\cdot))$. Par définition, $\hat{a}$ est maximal monotone. $\square$

3.3.3 Problème approximé

Maintenant, nous allons étudier les problèmes approximés de (3.3.7), c'est à dire,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}a(\dot{u}(t)) - \|u(t)\|^{p-2}u(t) \in A_\lambda(u(t)) + F_1(t, \hat{u}(t), \tilde{\hat{u}}(t)) + F_2(t, \hat{u}(t), \tilde{\hat{u}}(t)) - \|\hat{u}(t)\|^{p-2}\hat{u}(t) \text{ p.p. sur } I; \\ (a(\dot{u}(0)), -a(\dot{u}(T))) \in \xi(u(0), u(T)). \end{cases} \tag{3.3.33}$$

Soit $\hat{A}_\lambda(u(\cdot))(t) = A_\lambda(u(t))$, pour tout $u(\cdot) \in \mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N)$ et tout $t \in I$. Évidemment, $\hat{A}_\lambda : \mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N) \to \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$ est partout définie, monotone et continue, de sorte qu'il est maximal monotone. Sous l'hypothèse $0 \in A(0)$, on a $\hat{A}_\lambda(0) = 0$.

Soit $U_\lambda = \hat{a} + \hat{J} + \hat{A}_\lambda$, alors U_λ est maximal monotone dans $\mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N) \times \mathrm{L}^q(I, \mathrm{R}^N)$, avec $\mathcal{D}(U_\lambda) = \mathcal{D}(\hat{a})$. Puisque $\langle U_\lambda(u(\cdot)), u(\cdot)\rangle_{p,q} \geq \langle \hat{J}(u(\cdot)), u(\cdot)\rangle_{p,q} = \|u(\cdot)\|_p^p$, $\forall u(\cdot) \in \mathcal{D}(U_\lambda)$, U_λ est aussi coercif, donc il est surjectif. En outre, la monotonie stricte de $\hat{J}$ signifie que U_λ est bijectif, ainsi l'opérateur inverse U_λ^{-1} existe.

Lemme 3.6. *$U_\lambda^{-1} : \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N) \to \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$ est complètement continu.*

Preuve.

Supposons que $h_n(\cdot) \rightharpoonup h(\cdot)$ dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$, et $u_n(\cdot) = U_\lambda^{-1}(h_n(\cdot))$, $u(\cdot) = U_\lambda^{-1}(h(\cdot))$. Alors

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt} a(\dot{u}_n(t)) + \|u_n(t)\|^{p-2} u_n(t) + A_\lambda(u_n(t)) = h_n(t) \text{ p.p. sur } I; \\ (a(\dot{u}_n(0)), -a(\dot{u}_n(T))) \in \xi(u_n(0), u_n(T)). \end{cases} \tag{3.3.34}$$

En multipliant (3.3.34) par $u_n(t)$ on trouve

$$-\Big\langle \frac{d}{dt} a(\dot{u}_n(t)), u_n(t) \Big\rangle + \|u_n(t)\|^p + \Big\langle A_\lambda(u_n(t)), u_n(t) \Big\rangle = \big\langle h_n(t), u_n(t) \big\rangle.$$

En intégrant sur $[0, T]$ on obtient

$$-\int_0^T \Big\langle \frac{d}{dt} a(\dot{u}_n(t)), u_n(t) \Big\rangle dt + \int_0^T \|u_n(t)\|^p dt + \int_0^T \Big\langle A_\lambda(u_n(t)), u_n(t) \Big\rangle dt = \int_0^T \big\langle h_n(t), u_n(t) \big\rangle dt,$$

et en intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned} -\Big\langle a(\dot{u}_n(T)), u_n(T) \Big\rangle + \Big\langle a(\dot{u}_n(0)), u_n(0) \Big\rangle + \int_0^T \Big\langle a(\dot{u}_n(t)), \dot{u}_n(t) \Big\rangle dt + \int_0^T \|u_n(t)\|^p dt \\ + \int_0^T \Big\langle A_\lambda(u_n(t)), u_n(t) \Big\rangle dt = \int_0^T \Big\langle h_n(t), u_n(t) \Big\rangle dt. \end{aligned}$$

Par la monotonie de ξ avec $(0, 0) \in \xi(0, 0)$ et la monotonie de A_λ avec $A_\lambda(0) = 0$, on trouve

$$\int_0^T \Big\langle a(\dot{u}_n(t)), \dot{u}_n(t) \Big\rangle dt + \int_0^T \|u_n(t)\|^p dt \leq \int_0^T \Big\langle h_n(t), u_n(t) \Big\rangle dt.$$

De $H(a)(i)$ on obtient

$$\beta \|\dot{u}_n(\cdot)\|_p^p + \|u_n(\cdot)\|_p^p \leq \|h_n(\cdot)\|_q \|u_n(\cdot)\|_p. \tag{3.3.35}$$

Comme $(h_n(\cdot))$ est bornée dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$, on peut voir de (3.3.35) que $(u_n(\cdot))$ est aussi bornée dans $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$, donc elle est relativement compacte dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$.

Pour tout $p > 2$ on a

$$\begin{aligned} \|A_\lambda(u_n(\cdot))\|_q &= \Big(\int_0^T \|A_\lambda(u_n(t))\|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \bigg(\Big(\int_0^T 1^{\frac{p-1}{p-2}} dt\Big)^{\frac{p-2}{p-1}} \Big(\int_0^T (\|A_\lambda(u_n(t))\|^q)^{\frac{p}{q}} dt\Big)^{\frac{q}{p}}\bigg)^{\frac{1}{q}} \\ &= T^{\frac{p-2}{p}} \|A_\lambda(u_n(\cdot))\|_p. \end{aligned}$$

Mais, puisque A_λ est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{\lambda}$ et $A_\lambda(0) = 0$, pour tout $p \geq 2$ on a

$$\|A_\lambda(u_n(\cdot))\|_p \leq \frac{1}{\lambda}\|u_n(\cdot)\|_p,$$

d'où, pour tout $p > 2$, on trouve

$$\|A_\lambda(u_n(\cdot))\|_q \leq \frac{T^{\frac{p-2}{p}}}{\lambda}\|u_n(\cdot)\|_p.$$

En outre, de la première ligne de (3.3.34), on peut trouver que $\Big(\dfrac{d}{dt}a(\dot{u}_n(\cdot))\Big)$ est bornée dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$. De plus,

$$y_n + \int_0^T a^{-1}(a(\dot{u}_n(0)) + H(\tilde{h}_n(\cdot))(t))dt = 0, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

où $y_n = u_n(0) - u_n(T)$ est bornée dans $\mathbb{R}^N$ (puisque $(u_n(\cdot))$ est bornée dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$) et $\tilde{h}_n(\cdot) = \dfrac{d}{dt}a(\dot{u}_n(\cdot))$ est bornée dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a(\dot{u}_n(\cdot))$ est absolument continue, pout pout $t \in I$ on a

$$a(\dot{u}_n(t)) = a(\dot{u}_n(0)) + \int_0^t \frac{d}{dt}a(\dot{u}_n(\cdot))dt.$$

De la Remarque 3.2, il s'ensuit que $(a(\dot{u}_n(0)))$ est bornée, qui à son tour implique la bornitude de $(a(\dot{u}_n(\cdot)))$ dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$ (Évidemment dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$). Par suite $(a(\dot{u}_n(\cdot)))$ est une suite bornée dans $\mathrm{W}^{1,q}(I, \mathbb{R}^N)$, donc elle est relativement compacte dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$. Par la continuité de $a^{-1}(\cdot)$, $(\dot{u}_n(\cdot))$ est aussi relativement compacte dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$. Donc, on obtient la compacité relative de $(u_n(\cdot))$ dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^N)$.

Sans perdre de généralités, on peut supposer que $u_n(\cdot) \to \bar{u}(\cdot)$ dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^N)$. Alors $u_n(0) \to \bar{u}(0), u_n(T) \to \bar{u}(T)$, et $\dot{u}_n(0) \to \dot{\bar{u}}(0)$, $\dot{u}_n(T) \to \dot{\bar{u}}(T)$.

Supposons que $a(\dot{u}_n(\cdot)) \rightharpoonup z(\cdot)$ dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$. Pour tout $\varphi(\cdot) \in \mathcal{C}_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$, d'un côté,

$$-\int_0^T \Big\langle \frac{d}{dt}a(\dot{u}_n(t)), \varphi(t)\Big\rangle dt + \int_0^T \langle \|u_n(t)\|^{p-2}u_n(t), \varphi(t)\rangle dt + \int_0^T \langle A_\lambda(u_n(t)), \varphi(t)\rangle dt = \int_0^T \langle h_n(t), \varphi(t)\rangle dt,$$

et d'un autre côté,

$$-\int_0^T \Big\langle \frac{d}{dt}a(\dot{u}_n(t)), \varphi(t)\Big\rangle dt = \int_0^T \langle a(\dot{u}_n(t)), \dot{\varphi}(t)\rangle dt.$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^T \Big\langle a(\dot{\bar{u}}(t)), \dot{\varphi}(t)\Big\rangle dt &= -\int_0^T \Big\langle \|\bar{u}(t)\|^{p-2}\bar{u}(t), \varphi(t)\Big\rangle dt - \int_0^T \Big\langle A_\lambda(\bar{u}(t)), \varphi(t)\Big\rangle dt + \int_0^T \langle h(t), \varphi(t)\rangle dt \\ &= -\int_0^T \big\langle z(t), \varphi(t)\big\rangle dt.\end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^T \Big\langle \frac{d}{dt}a(\dot{\bar{u}}(t)), \varphi(t)\Big\rangle dt = \int_0^T \big\langle z(t), \varphi(t)\big\rangle dt.$$

Puisque $\varphi(\cdot)$ est arbitraire et $\mathcal{C}_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$ est partout dense dans $\mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N)$, on a

$$z(t) = \frac{d}{dt}a(\dot{\bar{u}}(t)) = \|\bar{u}(t)\|^{p-2}\bar{u}(t) + A_\lambda(\bar{u}(t)) + h(t) \text{ p.p. sur } I.$$

Cela signifie que $\bar{u}$ vérifie (3.3.34), i.e., $\bar{u}(\cdot) = U_\lambda^{-1}(h(\cdot)) = u(\cdot)$. Ainsi $U_\lambda^{-1}(h_n(\cdot)) \to U_\lambda^{-1}(h(\cdot))$ dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^N)$, et bien sûr dans $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$. Donc U_λ^{-1} est complètement continu. □

Proposition 3.8. *Supposons que $H(a)$, $H(A)$, $H(\xi)$, $H(F_1)$, $H(F_2)$ et $H(F_1, F_2)$ sont vérifiées. Alors pour chaque $\lambda > 0$ le problème approximé* (3.3.33) *admet une solution.*

Preuve.

En combinant la Proposition 3.1 avec la Proposition 3.4, on obtient une application continue $g : \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N) \to \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$, vérifiant $g(u(\cdot)) \in N_{F_2}(u(\cdot))$, pour tout $u \in \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$. De $H(F_2)(iii)$, on sait que g fait correspondre les ensembles bornés aux ensembles bornés.

Pour tout $u \in \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$, on pose $V(u(\cdot))(t) = -N_{F_1}(u(\cdot))(t) - g(u(\cdot))(t) + \hat{J}(\hat{u}(\cdot))(t)$ p.p. sur I. Par la Proposition 3.3, on peut dériver que $V : \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N) \rightrightarrows \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$ a les mêmes propriétés que N_{F_1}. En effet, puisque N_{F_1} est à valeurs non vides fermées et convexes dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$, et fait correspondre les ensembles bornés aux ensembles bornés et puisque g et $\hat{J}$ sont univoques alors V est aussi à valeurs non vides fermées et convexes dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$, et fait correspondre les ensembles bornés aux ensembles bornés.

Montrons que V est h-s.c.s. Supposons que $E \subset \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$ est faiblement fermé, $u_n(\cdot) \to u(\cdot)$ dans $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$, et $u_n(\cdot) \in V^{-1}(E)$, i.e., il existe $v_n(\cdot) \in \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$ telle que $v_n(\cdot) \in$

$V(u_n(\cdot))\cap E$. Alors $v_n(\cdot) \in E$ et $v_n(\cdot) \in -N_{F_1}(u_n(\cdot))-g(u_n(\cdot))+\hat{J}(\hat{u}_n(\cdot))$, et donc $\hat{J}(\hat{u}_n(\cdot))-g(u_n(\cdot))-v_n(\cdot) \in N_{F_1}(u_n(\cdot))$.

Puisque $u_n(\cdot) \to u(\cdot)$ dans $\mathrm{W}^{1,p}(I,\mathbb{R}^N)$, par l'étude menée sur $\hat{u}(\cdot)$ dans la Section 3.3.1, on a $\hat{u}_n(t) \to \hat{u}(t)$ pour tout $t \in I$ et $\|\hat{u}_n(t)\| \leq M$ pour tout $t \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$, alors par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue dans $\mathrm{L}^p(I,\mathbb{R}^N)$, on a $\hat{u}_n(\cdot) \to \hat{u}(\cdot)$ dans $\mathrm{L}^p(I,\mathbb{R}^N)$, donc, par la continuité de $\hat{J}$ on trouve $\hat{J}(\hat{u}_n(\cdot)) \to \hat{J}(\hat{u}(\cdot))$ dans $\mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$, d'où $\hat{J}(\hat{u}_n(\cdot)) \rightharpoonup \hat{J}(\hat{u}(\cdot))$ dans $\mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$. Et puisque g est continue de $\mathrm{W}^{1,p}(I,\mathbb{R}^N)$ dans $\mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$, on obtient $g(u_n(\cdot)) \to g(u(\cdot))$ dans $\mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$, d'où $g(u_n(\cdot)) \rightharpoonup g(u(\cdot))$ dans $\mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $w_n(\cdot) \in N_{F_1}(u_n(\cdot))$ tel que

$$v_n(\cdot) = -w_n(\cdot) + g(u_n(\cdot)) + \hat{J}(\hat{u}_n(\cdot)).$$

D'où, par $H(F_1)(iii)$, $H(F_2)(iii)$ et (3.3.6), pour tout $t \in I$, on aura

$$\|v_n(t)\| \leq (\eta_1(t)+\eta_3(t)) + (\eta_2(t)+\eta_4(t))\|\dot{u}_n(t)\|^{p-1} + M^p.$$

La convergence de la suite $(u_n(\cdot))$ dans $\mathrm{W}^{1,p}(I,\mathbb{R}^N)$, implique la convergence de la suite $(\dot{u}_n(\cdot))$ dans $\mathrm{L}^p(I,\mathbb{R}^N)$, donc la suite $(\|\dot{u}_n(\cdot)\|_p)$ est bornée. On en déduit que la suite $(v_n(\cdot))$ est bornée dans $\mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$, alors $(v_n(\cdot))$ admet une sous suite faiblement convergente. Sans perdre de généralités, on suppose que $v_n(\cdot) \rightharpoonup v(\cdot)$ dans $\mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$. Alors, en utilisant la h-s.c.s de N_{F_1}, on obtient $\hat{J}(\hat{u}(\cdot)) - g(u(\cdot)) - v(\cdot) \in N_{F_1}(u(\cdot))$, i.e., $v(\cdot) \in V(u(\cdot))$ et puisque E est faiblement fermé $v(\cdot) \in E$ alors, $v(\cdot) \in V(u(\cdot))\cap E$. Ainsi $u(\cdot) \in V^{-1}(E)$, ceci implique que $V^{-1}(E)$ est fermé dans $\mathrm{W}^{1,p}(I,\mathbb{R}^N)$ et donc V est h-s.c.s.

Soit $G = U_\lambda^{-1} \circ V$. Alors $G : \mathrm{W}^{1,p}(I,\mathbb{R}^N) \rightrightarrows \mathrm{W}^{1,p}(I,\mathbb{R}^N)$ satisfait toutes les conditions mentionnées dans le Théorème 3.3. Soit

$$S = \{u(\cdot) \in \mathrm{W}^{1,p}(I,\mathbb{R}^N) :\ u(\cdot) \in \mu G(u(\cdot)), 0 < \mu < 1\}.$$

Dans la suite de la démonstration, nous allons estimer les bornes de S.

Si $u(\cdot) \in S$, il existe $f \in \Sigma^q_{N_{F_1}(u(\cdot))}$, tel que

$$\frac{d}{dt}a(\mu^{-1}\dot{u}(t))-\mu^{-(p-1)}\|u(t)\|^{p-2}u(t) = A_\lambda(\mu^{-1}u(t))+f(t)+g(u(\cdot))(t)-\|\hat{u}(t)\|^{p-2}\hat{u}(t), \text{ p.p. sur } I, \tag{3.3.36}$$

et $(a(\mu^{-1}\dot{u}(0)), -a(\mu^{-1}\dot{u}(T))) \in \xi(\mu^{-1}u(0), \mu^{-1}u(T))$.

En multipliant (3.3.36) par $\hat{u}(t)$, et en intégrant par parties, nous avons

$$\begin{aligned}&\Big\langle a(\mu^{-1}\dot{u}(T)), \hat{u}(T)\Big\rangle - \Big\langle a(\mu^{-1}\dot{u}(0)), \hat{u}(0)\Big\rangle\\ &\qquad - \int_0^T \Big\langle a(\mu^{-1}\dot{u}(t)), \dot{\tilde{u}}(t)\Big\rangle dt - \mu^{-(p-1)} \int_0^T \Big\langle \|u(t)\|^{p-2}u(t), \hat{u}(t)\Big\rangle dt\\ &= \int_0^T \Big\langle A_\lambda(\mu^{-1}u(t)), \hat{u}(t)\Big\rangle dt + \int_0^T \langle f(t), \hat{u}(t)\rangle dt + \int_0^T \langle g(u(\cdot))(t), \hat{u}(t)\rangle dt - \int_0^T \|\hat{u}(t)\|^p dt.\end{aligned} \tag{3.3.37}$$

Si $\|u(t)\| \leq M$, alors

$$\Big\langle a(\mu^{-1}\dot{u}(t)), \dot{\tilde{u}}(t)\Big\rangle = \Big\langle a(\mu^{-1}\dot{u}(t)), \dot{u}(t)\Big\rangle \geq \beta\mu^{-(p-1)}\|\dot{u}(t)\|^p.$$

Si $\|u(t)\| > M$, alors par $H(a)(iii)$, (3.3.2) et (3.3.6), on trouve

$$\begin{aligned}\Big\langle a(\mu^{-1}\dot{u}(t)), \dot{\tilde{u}}(t)\Big\rangle &= \Big\langle \kappa(\mu^{-1}\dot{u}(t))\mu^{-1}\dot{u}(t), \Big(\frac{M}{\|u(t)\|}\Big)\dot{u}(t)\Big\rangle\\ &\quad - \Big\langle \kappa(\mu^{-1}\dot{u}(t))\mu^{-1}\dot{u}(t), \Big(M\frac{\langle u(t), \dot{u}(t)\rangle}{\|u(t)\|^3}\Big)u(t)\Big\rangle\\ &= \Big(\mu^{-1}M\frac{\kappa(\mu^{-1}\dot{u}(t))}{\|u(t)\|}\Big)\Big(\|\dot{u}(t)\|^2 - \frac{\langle u(t), \dot{u}(t)\rangle^2}{\|u(t)\|^2}\Big)\\ &\geq \mu^{-1}\kappa(\mu^{-1}\dot{u}(t))\Big(\frac{\|u(t)\|}{M}\Big)\|\dot{\tilde{u}}(t)\|^2\\ &\geq \beta\mu^{-(p-1)}\|\dot{\tilde{u}}(t)\|^p.\end{aligned} \tag{3.3.38}$$

Ainsi,

$$\int_0^T \Big\langle a(\mu^{-1}\dot{u}(t)), \dot{\tilde{u}}(t)\Big\rangle dt \geq \beta\mu^{-(p-1)}\|\dot{\tilde{u}}(\cdot)\|_p^p.$$

En notant que

$$\Big\langle a(\mu^{-1}\dot{u}(T)), \hat{u}(T)\Big\rangle - \Big\langle a(\mu^{-1}\dot{u}(0)), \hat{u}(0)\Big\rangle \leq 0$$

(par $H(\xi)(ii)$ ou (iii)), $\Big\langle A_\lambda(\mu^{-1}u(t)), \hat{u}(t)\Big\rangle \geq 0$,

$$\Big|\int_0^T \langle f(t), \hat{u}(t)\rangle dt\Big| \leq \int_0^T \Big(\eta_1(t) + \eta_2(t)\|\dot{\tilde{u}}(t)\|^{p-1}\Big)dt$$

et

$$\Big|\int_0^T \langle g(u(\cdot))(t), \hat{u}(t)\rangle dt\Big| \leq \int_0^T \Big(\eta_3(t) + \eta_4(t)\|\dot{\tilde{u}}(t)\|^{p-1}\Big)dt,$$

on déduit de (3.3.38) et (3.3.37) que

$$\begin{aligned}\beta\|\tilde{\hat{u}}(\cdot)\|_p^p \leq \beta\mu^{-(p-1)}\|\tilde{\hat{u}}(\cdot)\|_p^p &\leq \left|\int_0^T \langle f(t), \hat{u}(t)\rangle dt\right| + \left|\int_0^T \langle g(u(\cdot))(t), \hat{u}(t)\rangle dt\right| + TM^p \\ &\leq \|\eta_1(\cdot)\|_1 + \|\eta_3(\cdot)\|_1 + (\|\eta_2(\cdot)\|_\infty + \|\eta_4(\cdot)\|_\infty)\|\tilde{\hat{u}}(\cdot)\|_p^{p-1} + TM^p,\end{aligned}$$

d'où

$$\|\tilde{\hat{u}}(\cdot)\|_p^p \leq c_1$$

où $c_1 > 0$, est une constante indépendante de λ, μ et de x.

Similairement, en multipliant (3.3.36) par $u(t)$, et en intégrant par parties, nous avons

$$\begin{aligned}\Big\langle a(\mu^{-1}\dot{u}(T)), u(T)\Big\rangle - \Big\langle a(\mu^{-1}\dot{u}(0)), u(0)\Big\rangle - \int_0^T \Big\langle a(\mu^{-1}\dot{u}(t)), \dot{u}(t)\Big\rangle dt - \mu^{-(p-1)}\int_0^T \|u(t)\|^p dt \\ = \int_0^T \Big\langle A_\lambda(\mu^{-1}u(t)), u(t)\Big\rangle dt + \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle dt + \\ \int_0^T \langle g(u(\cdot))(t), u(t)\rangle dt - \int_0^T \Big\langle \|\hat{u}(t)\|^{p-2}\hat{u}(t), u(t)\Big\rangle dt. \quad (3.3.39)\end{aligned}$$

Par $H(a)(i)$, on a

$$\langle a(\mu^{-1}\dot{u}(t)), \dot{u}(t)\rangle \geq \mu^{-(p-1)}\beta\|\dot{u}(t)\|^p.$$

De plus, on a

$$\left|\int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle dt\right| \leq M\int_0^T \Big(\eta_1(t) + \eta_2(t)\|\tilde{\hat{u}}(t)\|^{p-1}\Big)\|u(t)\|dt$$

et

$$\left|\int_0^T \langle g(u(\cdot))(t), \hat{u}(t)\rangle dt\right| \leq M\int_0^T \Big(\eta_3(t) + \eta_4(t)\|\tilde{\hat{u}}(t)\|^{p-1}\Big)\|u(t)\|dt,$$

Et par l'inégalité de Young, on trouve

$$\int_0^T \eta_i(t)\|\tilde{\hat{u}}(t)\|^{p-1}\|u(t)\|dt \leq 2^{-(p-1)}p^{-1}\|u(\cdot)\|_p^p + c_j\|\tilde{\hat{u}}(\cdot)\|_p^p,\ i = 2,4,\ \ j = 2,3.$$

Par (3.3.39) on trouve

$$\beta\|\dot{u}(\cdot)\|_p^p + \|u(\cdot)\|_p^p \leq 2^{2-p}p^{-1}\|u(\cdot)\|_p^p + c_4\|\tilde{\hat{u}}(\cdot)\|_p^p + c_5\|u(\cdot)\|_p$$

et donc

$$\|u(\cdot)\|_{1,p}^p \leq c_6,$$

où $c_i > 0$, $i = \overline{2,6}$ sont des constantes indépendantes de λ, μ et de x.

Comme $u(\cdot)$ est arbitraire, S est borné dans $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$. En vertu du Théorème 3.3, la multiapplication G admet un point fixe $u(\cdot)$ qui résout (3.3.33). $\square$

3.3.4 Résultat d'existence

Théorème 3.5. *Si toutes les hypothèses supposées sur a, A, ξ, F_1 et F_2 dans le Théorème 3.4 sont vérifiées, alors le problème*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}a(\dot{u}(t)) - \|u(t)\|^{p-2}u(t) \in A(u(t)) + F_1(t, \hat{u}(t), \tilde{\dot{u}}(t)) + F_2(t, \hat{u}(t), \tilde{\dot{u}}(t)) - \|\hat{u}(t)\|^{p-2}\hat{u}(t) \text{ p.p. sur } I; \\ (a(\dot{u}(0)), -a(\dot{u}(T))) \in \xi(u(0), u(T)). \end{cases} \tag{3.3.40}$$

admet au moins une solution dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^N)$.

Preuve.

On prend $\lambda_n \downarrow 0$, et $u_n(\cdot)$ solution de (3.3.33). Comme dans la preuve de la Proposition 3.5, nous remarquons d'abord que $\|u_n(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, il existe $f_n(\cdot) \in \Sigma^q_{N_{F_1}(u_n(\cdot))}$, vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}a(\dot{u}_n(t)) = A_{\lambda_n}(u_n(t)) + f_n(t) + g(u_n)(t) \text{ p.p. sur } I; \\ (a(\dot{u}_n(0)), -a(\dot{u}_n(T))) \in \xi(u_n(0), u_n(T)). \end{cases} \tag{3.3.41}$$

En multipliant l'équation (3.3.41) par $u_n(t)$, et en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} &\Big\langle a(\dot{u}_n(T)), u(T)\Big\rangle - \Big\langle a(\dot{u}_n(0)), u(0)\Big\rangle - \int_0^T \Big\langle a(\dot{u}_n(t)), \dot{u}_n(t)\Big\rangle dt \\ &\quad = \int_0^T \Big\langle A_{\lambda_n}(u_n(t)), u_n(t)\Big\rangle dt + \int_0^T \big\langle f_n(t), u_n(t)\big\rangle dt + \int_0^T \big\langle g(u_n(\cdot))(t), u_n(t)\big\rangle dt. \end{aligned}$$

Donc, une autre fois, par la monotonie de ξ et de A, le fait que $(0,0) \in \xi(0,0)$ et $A_\lambda(0) = 0$, on a

$$\begin{aligned} \beta\|\dot{u}_n(\cdot)\|_p^p &\leq -\int_0^T \big\langle f_n(t), u_n(t)\big\rangle dt - \int_0^T \big\langle g(u_n(\cdot))(t), u_n(t)\big\rangle dt \\ &\leq M\int_0^T \Big(\eta_1(t) + \eta_2(t)\|\dot{u}_n(t)\|^{p-1}\Big)dt + M\int_0^T \Big(\eta_3(t) + \eta_4(t)\|\dot{u}_n(t)\|^{p-1}\Big)dt \\ &\leq d_1 + d_2\|\dot{u}_n(\cdot)\|_p^{p-1}, \end{aligned} \tag{3.3.42}$$

où $d_i > 0$, $i = 1, 2$ sont des constantes indépendantes de n.

De (3.3.42), on peut déduire que $(\|\dot{u}_n(\cdot)\|_p)$ est bornée, et ainsi l'est $(\|u_n(\cdot)\|_{1,p})$. Une autre fois, par le théorème d'injection compacte, $(u_n(\cdot))$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$.

En multipliant (3.3.41) par $A_{\lambda_n}(u_n(t))$, et en intégrant sur I, on obtient

$$\begin{aligned}
-\int_0^T \Big\langle \frac{d}{dt}a(\dot{u}_n(t)), A_{\lambda_n}(u_n(t))\Big\rangle dt + \int_0^T \|A_{\lambda_n}(u_n(t))\|^2 dt \\
= -\int_0^T \Big\langle f_n(t), A_{\lambda_n}(u_n(t))\Big\rangle - \int_0^T \Big\langle g(u_n(\cdot))(t), A_{\lambda_n}(u_n(t))\Big\rangle dt. \quad (3.3.43)
\end{aligned}$$

Puisque $A_{\lambda_n}(\cdot)$ est lipschitzien, par le théorème de Rademacher (Voir Théorème 1.4), $A_{\lambda_n}(\cdot)$ est différentiable en chaque $x \in \mathbb{R}^N \backslash S_1$, où S_1 est de mesure de Lebesgue nulle, et il est connu que l'on peut intégrer par parties $\Big\langle \frac{d}{dt}a(\dot{u}_n(t)), A_{\lambda_n}(u_n(t))\Big\rangle$ puisque $(a(\dot{u}_n(\cdot))$ est absolument continue. On a alors

$$\begin{aligned}
-\int_0^T \Big\langle \frac{d}{dt}a(\dot{u}_n(t)), A_{\lambda_n}(u_n(t))\Big\rangle dt = -\Big\langle a(\dot{u}_n(T)), A_{\lambda_n}(u_n(T))\Big\rangle + \Big\langle a(\dot{u}_n(0)), A_{\lambda_n}(u_n(0))\Big\rangle \\
+ \int_0^T \Big\langle a(\dot{u}_n(t)), \frac{d}{dt}A_{\lambda_n}(u_n(t))\Big\rangle dt.
\end{aligned}$$

L'hypothèse $H(\xi, A)$ donne

$$-\langle a(\dot{u}_n(T)), A_{\lambda_n}(u_n(T))\rangle + \langle a(\dot{u}_n(0)), A_{\lambda_n}(\dot{u}_n(0))\rangle \geq 0,$$

donc

$$-\int_0^T \Big\langle \frac{d}{dt}a(\dot{u}_n(t)), A_{\lambda_n}(u_n(t))\Big\rangle dt \geq \int_0^T \Big\langle a(\dot{u}_n(t)), \frac{d}{dt}A_{\lambda_n}(u_n(t))\Big\rangle dt. \quad (3.3.44)$$

Maintenant si $x \in \mathbb{R}^N \backslash S_1$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}^N$ et tout $t > 0$, de la monotonie de A_{λ_n}, on a $\Big\langle y, \dfrac{A_{\lambda_n}(x+ty) - A_{\lambda_n}(x)}{t}\Big\rangle \geq 0$, et donc, par la limite, $\langle y, DA_{\lambda_n}(x)y\rangle \geq 0$. En outre, on a

$$\frac{d}{dt}A_{\lambda_n}(u_n(t)) = DA_{\lambda_n}(u_n(t))\dot{u}_n(t), \text{ p.p. sur } I.$$

De plus, de $H(a)(iv)$, on déduit que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \Big\langle a(\dot{u}_n(t)), \frac{d}{dt}A_{\lambda_n}(u_n(t))\Big\rangle dt &= \int_0^T \kappa(\dot{u}_n(t))\Big\langle \dot{u}_n(t), \frac{d}{dt}A_{\lambda_n}(u_n(t))\Big\rangle dt \\
&= \int_0^T \kappa(\dot{u}_n(t))\Big\langle \dot{u}_n(t), DA_{\lambda_n}(u_n(t))\dot{u}_n(t)\Big\rangle dt \\
&\geq 0. \quad (3.3.45)
\end{aligned}$$

Les formules (3.3.43)-(3.3.45) donnent

$$\int_0^T \|A_{\lambda_n}(u_n(t))\|^2 dt \leq -\int_0^T \langle f_n(t), A_{\lambda_n}(u_n(t))\rangle dt - \int_0^T \langle g(u_n(\cdot))(t), A_{\lambda_n}(u_n(t))\rangle dt. \quad (3.3.46)$$

Par $H(F_1)(iii)$, on a

$$\|f_n(t)\| \leq \eta_1(t) + \eta_2(t)\|\dot{u}_n(t)\|^{p-1},$$

ce qui montre que (f_n) est bornée dans $\mathrm{L}^2(I, \mathbb{R}^N)$ et par $H(F_2)(iii)$, on a

$$\|g(u_n(\cdot))(t)\| \leq \eta_3(t) + \eta_4(t)\|\dot{u}_n(t)\|^{p-1},$$

qui donne que $(g(u_n(\cdot)))$ est bornée dans $\mathrm{L}^2(I, \mathbb{R}^N)$. Par (3.3.46), $(\hat{A}_{\lambda_n}(u_n(\cdot)))$ est aussi bornée dans $\mathrm{L}^2(I, \mathbb{R}^N)$, aussi elle l'est dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$. Donc, on peut conclure par (3.3.41) que $\left(\dfrac{d}{dt}\, a(\dot{u}_n(\cdot))\right)$ est bornée dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$.

D'un autre côté, par $H(a)(ii)$, on a

$$\|a(\dot{u}_n(t))\| \leq c\Big(\|\dot{u}_n(t)\|^{p-1} + 1\Big) \text{ p.p. sur } I,$$

ce qui implique que $(a(\dot{u}_n(\cdot)))$ est bornée dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$. Ainsi, on obtient la bornitude de $(a(\dot{u}_n(\cdot)))$ dans $\mathrm{W}^{1,q}(I, \mathbb{R}^N)$. De l'injection compacte $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$, on déduit que $(a(\dot{u}_n(\cdot)))$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$, qui à son tour implique la compacité relative de $(\dot{u}_n(\cdot))$.

Nous avons montrer que $(u_n(\cdot))$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^N)$. Pour plus de simplicité, supposons que $u_n(\cdot) \to u(\cdot)$ dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^N)$, alors $u_n(0) \to u(0)$, $u_n(T) \to u(T)$, et $a(\dot{u}_n(0)) \to a(\dot{u}(0))$, $a(\dot{u}_n(T)) \to a(\dot{u}(T))$, et par la continuité de la fonction g on obtient $g(u_n(\cdot)) \to g(u(\cdot))$.

Supposons que $\hat{A}_{\lambda_n}(u_n(\cdot)) \rightharpoonup y(\cdot)$, et $f_n(\cdot) \rightharpoonup f(\cdot)$ dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$. Puisque N_{F_1} est h-s.c.s, elle est de graphe faiblement-fortement fermé, d'où $f(\cdot) \in N_{F_1}(u(\cdot))$, i.e., $f(\cdot) \in \Sigma^q_{N_{F_1}(u(\cdot))}$.

De plus, pour tout $\varphi(\cdot) \in \mathcal{C}^1_0(I, \mathbb{R}^N)$, les égalités suivantes sont vérifiées,

$$\begin{aligned} -\int_0^T \langle a(\dot{u}_n(t)), \dot{\varphi}(t)\rangle dt &= \int_0^T \Big\langle \frac{d}{dt} a(\dot{u}_n(t)), \varphi(t)\Big\rangle dt \\ &= \int_0^T \langle A_{\lambda_n}(u_n(t)), \varphi(t)\rangle dt + \int_0^T \langle f_n(t) + g(u_n(\cdot))(t), \varphi(t)\rangle dt. \end{aligned} \tag{3.3.47}$$

Passant à la limite quand $n \to \infty$, (3.3.41) devient

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} a(\dot{u}(t)) = y(t) + f(t) + g(u(\cdot))(t) \text{ p.p. sur } I, \\ (a(\dot{u}(0)), -a(\dot{u}(T))) \in \xi(u(0), u(T)). \end{cases} \tag{3.3.48}$$

La deuxième ligne de (3.3.48) est obtenue en raison de la fermeture de ξ.

Il reste à montrer que $u(\cdot) \in \mathcal{D}(\hat{A})$ et $y(\cdot) \in \hat{A}(u(\cdot))$, qui est organisé comme suit.

Tout d'abord, $(\hat{J}_{\lambda_n}(u_n(\cdot))) \subseteq \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$, puisque $J_{\lambda_n} = (I + \lambda_n A)^{-1}$ est non expansive sur $\mathbb{R}^N$ et donc différentiable presque partout, la norme de son gradient DJ_{λ_n} est inférieure à 1. Donc il existe $x(\cdot) \in \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$, tel que $(\hat{J}_{\lambda_n}(u_n(\cdot)))$ converge vers $x(\cdot)$ faiblement dans $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$ et fortement dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$. Puisque $J_{\lambda_n}(u_n(t)) - u_n(t) = -\lambda_n A_{\lambda_n}(u_n(t))$, et $(\hat{A}_{\lambda_n}(u_n(\cdot)))$ est bornée dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$, on a $\hat{J}_{\lambda_n}(u_n(\cdot)) - u_n(\cdot) \to 0$ dans $\mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N)$. Mais $u_n(\cdot) \to u(\cdot)$ dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$, ainsi $x(\cdot) = u(\cdot)$, et $\hat{J}_{\lambda_n}(u_n(\cdot)) \to u(\cdot)$ dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$ (évidemment dans $\mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N)$). D'autre part, par la définition de $\hat{A}$, on obtient $\hat{A}_{\lambda_n}(u_n(\cdot)) \in \hat{A}(\hat{J}_{\lambda_n}(u_n(\cdot)))$. Donc, par la demi fermeture de $\hat{A}$, il suit que $(u(\cdot), y(\cdot)) \in Gr(\hat{A})$, i.e., $\dfrac{d}{dt}\, a(\dot{u}(\cdot)) - f(\cdot) \in \hat{A}(u(\cdot))$, ce qui signifie que $u(\cdot)$ est une solution de (3.4.8). Cela complète la preuve. □

Le théorème d'existence pour le problème initial est un corollaire direct du Théorème 3.5.

3.4 Problèmes non linéaires pour des inclusions différentielles du second ordre avec perturbation semicontinue mixte

Dans cette section, nous étudions une classe de problèmes aux limites non linéaires pour les inclusions différentielles du second ordre gouvernées par un opérateur maximal monotone et une perturbation non linéaire, qui est semicontinue mixte et qui vérifie la condition de Hartman. Comme dans la section précédente, en utilisant des théorèmes de point fixe multivoque et les propriétés des opérateurs multivoques monotones, un théorème d'existence de solutions est démontré.

Le problème est le suivant

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}a(\dot{u}(t)) \in A(u(t)) + F(t, u(t)) \text{ p.p. sur } I; \\ (a(\dot{u}(0)), -a(\dot{u}(T))) \in \xi(u(0), u(T)), \end{cases} \tag{3.4.1}$$

où $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ et $\xi : \mathcal{D}(\xi) \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ sont des opérateurs maximaux monotones, et $F : I \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ une multiapplication qui vérifiant certaines hypothèses.

Par solution $u(\cdot)$ de (3.4.1), on veut dire que $u(\cdot) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^N)$ avec $a(\dot{u}(\cdot))$ est absolument continue, et il existe $y(\cdot)$, $f(\cdot) \in L^q(I, \mathbb{R}^N)$, vérifiant $y(t) \in A(u(t))$, $f(t) \in F(t, u(t))$ et $\dfrac{d}{dt}a(\dot{u}(t)) = y(t) + f(t)$ pour presque tout $t \in I$, et la condition aux limites est également satisfaite.

Nous commençons par donner l'énoncé du théorème principal de cette section, qui est un corollaire direct du Théorème 3.8.

Théorème 3.6. *Soit $p \geq 2$.*

$H(F)$ *Soit $F : I \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ une multiapplication à valeurs non vides compactes telle que*

(i) *F est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^N)$-mesurable ;*

(ii) *pour tout $t \in I$, en chaque $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $F(t, x)$ est convexe, $F(t, \cdot)$ est semicontinue supérieurement, et quand $F(t, x)$ n'est pas convexe, $F(t, \cdot)$ est semicontinue inférieurement sur un certain voisinage de x ;*

(iii) *il existe un nombre réel strictement positif M, tel que pour presque tout $t \in I$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, si $\|x\| \leq M$, on a*

$$F(t, x) \subset \overline{B}_{\mathbb{R}^N}(0, \gamma(t, \|x\|)),$$

et si $\|x\| > M$, on a

$$F(t, x) \cap \overline{B}_{\mathbb{R}^N}(0, \gamma(t, \|x\|)) \neq \emptyset,$$

où $\gamma(t, \cdot)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ avec $\sup\limits_{r \leq M} \gamma(t, r) \leq \eta(t)$ et $\eta(\cdot) \in L^2(I, \mathbb{R}_+)$;

(iv) F vérifie la condition de Hartman, i.e., pour presque tout $t \in I$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ avec $\|x\| = M$, on a

$$\langle v, x \rangle \geq 0$$

pour tout $v \in F(t, x)$.

$H(a)$ *Soit $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une application continue et strictement monotone, vérifiant*

(i) il existe un nombre réel positif β tel que $\langle a(x), x \rangle \geq \beta \|x\|^p$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$;

(ii) il existe $c > 0$ telle que $\|a(x)\| \leq c(\|x\|^{p-1} + 1)$;

(iii) il existe une fonction continue $\kappa : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ telle que $a(x) = \kappa(x)x$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

$H(A)$ *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ un opérateur maximal monotone avec $0 \in A(0)$.*

$H(\xi)$ *Soit $\xi : \mathcal{D}(\xi) \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ un autre opérateur maximal monotone, avec $(0, 0) \in \xi(0, 0)$ vérifiant, soit*

(i) si $(w_1, w_2) \in \xi(v_1, v_2)$, alors $\langle w_1, v_1 \rangle \geq 0$ et $\langle w_2, v_2 \rangle \geq 0$, ou bien

(ii) $\mathcal{D}(\xi) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : \; x = y\}$.

A et ξ vérifient aussi

$H(\xi,\, A)$ *si $(w_1, w_2) \in \xi(v_1, v_2)$, alors $\langle w_1, A_\lambda(v_1) \rangle + \langle w_2, A_\lambda(v_2) \rangle \geq 0$, $\forall \lambda > 0$.*

Alors le problème (3.4.1) admet au moins une solution dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^N)$.

3.4.1 Problème transformé

Considérons la multiapplication $N_F : W^{1,p}(I, \mathbb{R}^N) \rightrightarrows \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^n)$, définie par

$$N_F(u)(t) = F(t, \hat{u}(t)), \text{ pour tout } t \in I \text{ et } u \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^N),$$

où $\hat{u}(\cdot)$ est donnée par (3.3.2).

Pour la preuve de notre théorème principal de cette section, nous aurons besoin du théorème de Tolstonogov (Théorème 2.1 dans [57]).

Théorème 3.7. *Soit H un espace de dimension finie et soit $L : I \times H \rightrightarrows H$ une multiapplication à valeurs fermées vérifiant les hypothèses suivantes.*

(i) L est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathscr{B}(H)$-mesurable ;

(ii) pour tout $t \in I$, en chaque $x \in H$ tel que $L(t,x)$ est convexe, $L(t,\cdot)$ est s.c.s, et quand $L(t,x)$ n'est pas convexe, $L(t,\cdot)$ est s.c.i sur un certain voisinage de x ;

(iii) il existe une fonction de Carathéodory $\rho : I \times H \to \mathbb{R}_+$ qui est intégralement bornée sur les sous ensembles bornés de H et telle que $L(t,x) \cap \overline{B}_H(0,\rho(t,x)) \neq \emptyset$, pour tout $(t,x) \in I \times H$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tout ensemble compact $K \subset \mathcal{C}(I,H)$ il existe une multiapplication $\Phi : K \rightrightarrows \mathrm{L}^1(I,H)$ à valeurs non vides fermées convexes qui a un graphe fortement-faiblement séquentiellement fermé, telle que pour tout $u(\cdot) \in K$ et $\phi(\cdot) \in \Phi(u(\cdot))$ on a

$$\phi(t) \in L(t,u(t));$$

$$\|\phi(t)\| \leq \rho(t,u(t)) + \varepsilon,$$

pour presque tout $t \in I$.

Pour un certain réel fixé $c' > 0$, on pose

$$K = \{u(\cdot) \in \mathrm{W}^{1,p}(I,\mathbb{R}^N) : \ \|u(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \leq M \text{ et } \|\dot{u}(\cdot)\|_p \leq c'\}.$$

L'ensemble K est borné dans $\mathrm{W}^{1,p}(I,\mathbb{R}^N)$, donc par le théorème d'injection compacte, K est relativement compact dans $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^N)$.

Proposition 3.9. *Sous les hypothèses supposées sur F dans le Théorème 3.6, il existe une multiapplication $\Phi : \overline{K} \rightrightarrows \mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$ à valeurs non vides fermées convexes qui a un graphe fortement-faiblement séquentiellement fermé, telle que pour tout $u(\cdot) \in \overline{K}$ et $\phi(\cdot) \in \Phi(u(\cdot))$ on a*

$$\phi(t) \in F(t,u(t)),$$

et

$$\phi(t) \leq \eta(t),$$

pour presque tout $t \in I$.

Preuve.

En utilisant le théorème précédent avec la multiapplication F et $\rho(t,x) = \gamma(t, \|x\|)$, il existe une multiapplication $\Phi : \overline{K} \rightrightarrows \mathrm{L}^1(I, \mathbb{R}^N)$ à valeurs non vides fermées convexes qui a un graphe fortement-faiblement séquentiellement fermé telle que pour tout $u(\cdot) \in \overline{K}$ et $\phi(\cdot) \in \Phi(u(\cdot))$ on a

$$\phi(t) \in F(t, u(t)),$$

pour presque tout $t \in I$. De plus, pour tout $u(\cdot) \in \overline{K}$, il existe une suite $(u_n(\cdot)) \subset K$ telle que $u_n(\cdot) \to u(\cdot)$ dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \leq M$. Mais

$$\|u(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \leq \|u_n(\cdot) - u(\cdot)\|_{\mathcal{C}} + \|u_n(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \leq \|u_n(\cdot) - u(\cdot)\|_{\mathcal{C}} + M.$$

Quand $n \to \infty$ on obtient

$$\|u(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \leq M.$$

Par conséquent

$$F(t, u(t)) \subset \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^N}(0, \eta(t));$$

pour presque tout $t \in I$.

Puisque $\eta(\cdot) \in \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$, Φ prend ces valeurs dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$.
De plus, $\Phi(u(\cdot))$ est fermé dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$. En effet, supposons que $(v_n(\cdot)) \subset \Phi(u(\cdot))$ et $v_n(\cdot) \to v(\cdot)$ dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$. On a

$$\|v_n - v\|_1 \leq T^{\frac{1}{p}} \|v_n - v\|_q,$$

donc, $v_n(\cdot) \to v(\cdot)$ dans $\mathrm{L}^1(I, \mathbb{R}^N)$. Mais $\Phi(u(\cdot))$ est fermé dans $\mathrm{L}^1(I, \mathbb{R}^N)$, donc $v(\cdot) \in \Phi(u(\cdot))$, c'est à dire $\Phi(u(\cdot))$ est fermé dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$.

Considérons la suite $((u_n(\cdot), v_n(\cdot))) \subset \overline{K} \times \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$ telle que $u_n(\cdot) \to u(\cdot)$ dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$, $v_n(\cdot) \rightharpoonup v(\cdot)$ dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$ et pour tout n, $v_n(\cdot) \in \Phi(u_n(\cdot))$.
Puisque $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N) \subset \mathrm{L}^1(I, \mathbb{R}^N)$, $(v_n(\cdot)) \subset \mathrm{L}^1(I, \mathbb{R}^N)$. De plus, pour tout $z(\cdot) \in \mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N)$ on a

$$\langle v_n(\cdot), z(\cdot) \rangle \to \langle v(\cdot), z(\cdot) \rangle.$$

Mais $\mathrm{L}^\infty(I,\mathbb{R}^N) \subset \mathrm{L}^p(I,\mathbb{R}^N)$, alors pour tout $z(\cdot) \in \mathrm{L}^\infty(I,\mathbb{R}^N)$ on a

$$\langle v_n(\cdot), z(\cdot)\rangle \to \langle v(\cdot), z(\cdot)\rangle.$$

D'où $v_n(\cdot) \rightharpoonup v(\cdot)$ dans $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{R}^N)$.

Comme le graphe de $\Phi(\cdot)$ est fortement-faiblement séquentiellement fermé dans $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^N) \times \mathrm{L}^1(I,\mathbb{R}^N)$, on obtient $(u(\cdot), v(\cdot)) \in Gr(\Phi)$. Donc Φ a un graphe fortement-faiblement séquentiellement fermé dans $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^N) \times \mathrm{L}^q(I,\mathbb{R}^N)$. $\square$

Dans ce qui suit, nous étudions le problème transformé

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}a(\dot{u}(t)) - \|u(t)\|^{p-2}u(t) \in A(u(t)) + F(t,\hat{u}(t)) - \|\hat{u}(t)\|^{p-2}\hat{u}(t) \text{ p.p. sur } I; \\ (a(\dot{u}(0)), -a(\dot{u}(T))) \in \xi(u(0), u(T)). \end{cases} \tag{3.4.2}$$

On remarque que, chaque solution $u(\cdot)$ de (3.4.2) avec $\|u(t)\| \leq M$ pour tout $t \in I$ est une solution de (3.4.1). Donc, le problème de trouver une solution de (3.4.1) va être remplacé par deux problèmes, le premier est de trouver une solution pour (3.4.2), et le deuxième est de montrer que chaque solution de (3.4.2) est dans la boule fermée $\overline{\mathrm{B}}_{\mathcal{C}}(0,M)$. De plus, les solutions sont contenues dans l'ensemble relativement compact K de $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^N)$ avec $c' \geq (\frac{M}{\beta}\sqrt{T}\|\eta\|_2)^{\frac{1}{p}}$.

La proposition suivante donne une réponse positive à ce dernier.

Proposition 3.10. *Supposons que les hypothèses supposées sur a, A et ξ dans le Théorème 3.6 ainsi que $H(F)(iii)$, $H(F)(iv)$ sont vérifiées, et supposons que $u(\cdot)$ est une solution de* (3.4.2). *Alors $\|u(t)\| \leq M$ pour tout $t \in I$, et donc $\|\dot{u}(\cdot)\|_p \leq (\frac{M}{\beta}\sqrt{T}\|\eta\|_2)^{\frac{1}{p}} \leq c'$.*

Preuve.

Supposons que $u(\cdot)$ est une solution de (3.4.2), alors on peut trouver $y(\cdot)$ et $f(\cdot)$ dans $\mathrm{L}^q(T,\mathbb{R}^N)$, telles que $y(t) \in A(u(t))$, $f(t) \in F(t,\hat{u}(t))$, et

$$\frac{d}{dt}a(\dot{u}(t)) - \|u(t)\|^{p-2}u(t) = y(t) + f(t) - \|\hat{u}(t)\|^{p-2}\hat{u}(t) \text{ p.p. sur } I. \tag{3.4.3}$$

En remplaçant, dans la Proposition 3.5, $f_1 + f_2$ par f et en procédant de la même manière, on trouve que la première partie de la Proposition 3.10 est vérifiée, c'est à dire, nous pouvons conclure que $\|u(t)\| \leq M$ pour tout $t \in I$. Dans ce cas $\hat{u}(t) = u(t)$, pour tout $t \in I$. Donc, par (3.4.3) on a

$$\frac{d}{dt}a(\dot{u}(t)) = y(t) + f(t) \text{ p.p. sur } I.$$

En multipliant par $u(t)$, et en intégrant sur $[0, T]$, on a

$$\int_0^T \Big\langle \frac{d}{dt}a(\dot{u}(t)), u(t)\Big\rangle = \int_0^T \big\langle y(t), u(t)\big\rangle dt + \int_0^T \big\langle f(t), u(t)\big\rangle dt.$$

De la monotonie de A et du fait que $0 \in A(0)$ on obtient

$$\int_0^T \Big\langle \frac{d}{dt}a(\dot{u}(t)), u(t)\Big\rangle \geq \int_0^T \big\langle f(t), u(t)\big\rangle dt.$$

Par intégration par parties, on trouve

$$\big\langle a(\dot{u}(T)), u(T)\big\rangle - \big\langle a(\dot{u}(0)), u(0)\big\rangle - \int_0^T \big\langle a(\dot{u}(t)), \dot{u}(t)\big\rangle dt \geq \int_0^T \big\langle f(t), u(t)\big\rangle dt.$$

Ainsi, par la monotonie maximale de ξ et $H(a)(i)$, et le fait que $(0,0) \in \xi(0,0)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\beta\|\dot{u}(\cdot)\|_p^p &\leq -\int_0^T \big\langle f(t), u(t)\big\rangle dt \\
&\leq \int_0^T \|f(t)\|\|u(t)\| dt \\
&\leq M\int_0^T \eta(t) dt \\
&\leq M\sqrt{T}\|\eta\|_2.
\end{aligned}$$

On peut déduire que $\|\dot{u}(\cdot)\|_p \leq (\frac{M}{\beta}\sqrt{T}\|\eta\|_2)^{\frac{1}{p}}$. $\square$

3.4.2 Problème approximé

Maintenant, nous allons étudier les problèmes approximés de (3.4.2), c'est à dire,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}a(\dot{u}(t)) - \|u(t)\|^{p-2}u(t) \in A_\lambda(u(t)) + F(t, \hat{u}(t)) - \|\hat{u}(t)\|^{p-2}\hat{u}(t) \text{ p.p. sur } I; \\ (a(\dot{u}(0)), -a(\dot{u}(T))) \in \xi(u(0), u(T)). \end{cases} \tag{3.4.4}$$

Lemme 3.7. *Soit $D = \{h \in \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N) : \ \|h\|_q \leq r_1\}$ et $C_1 = \{u \in \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N) : \ \|\dot{u}(\cdot)\|_p \leq r_2\}$, où $r_1 > 0$ et $r_2 = \beta^{-\frac{1}{p}}(r_1)^{\frac{q}{p}}$. Alors ${U_\lambda^{-1}}_{|D} : D \to C_1$ est complètement continue.*

Preuve.

Par le Lemme 3.6, il suffit de montrer que $U_\lambda^{-1}{}_{|D}$ prend ces valeurs dans C_1. Soit $h(\cdot) \in D$ et $u = U_\lambda^{-1}h$. Comme dans la preuve du Lemme 3.6, on obtient

$$\beta\|\dot{u}(\cdot)\|_p^p + \|u(\cdot)\|_p^p \leq \|h(\cdot)\|_q\|u(\cdot)\|_p,$$

donc

$$\|u(\cdot)\|_p^p \leq \|h(\cdot)\|_q\|u(\cdot)\|_p,$$

qui donne $\|u(\cdot)\|_p \leq (r_1)^{\frac{q}{p}}$. De plus,

$$\beta\|\dot{u}(\cdot)\|_p^p \leq \|h(\cdot)\|_q\|u(\cdot)\|_p \leq (r_1)^{1+\frac{q}{p}} = r_1^q,$$

alors $\|\dot{u}(\cdot)\|_p \leq \beta^{-\frac{1}{p}}(r_1)^{\frac{q}{p}}$ et donc $u(\cdot) \in C_1$. $\square$

Proposition 3.11. *On suppose que $H(a)$, $H(A)$, $H(\xi)$ et $H(F)$ données dans le Théorème 3.6 sont vérifiées. Alors pour chaque $\lambda > 0$ le problème approximé* (3.4.4) *admet une solution.*

On considère la multiapplication $N : C \subset \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N) \rightrightarrows \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$ définie par $N(u(\cdot)) = \Phi(\hat{u}(\cdot))$, où $C = \{u(\cdot) \in \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N) : \ \|\dot{u}(\cdot)\|_p \leq c'\}$.
En utilisant la définition de $\hat{u}(\cdot)$, on a pour tout $u(\cdot) \in C$, $\|\dot{\hat{u}}(\cdot)\|_p \leq \|\dot{u}(\cdot)\|_p$, donc $\hat{u}(\cdot) \in K$ et N est bien définie.

Lemme 3.8. *Pour tout $u(\cdot) \in C$, $N(u(\cdot)) \subset \overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{L}^q}(0, \|\eta\|_q)$ est un sous ensemble non vide fermé convexe de $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$, et N est h-s.c.s (ceci signifie que N est s.c.s de C dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$ muni de la topologie faible).*

Preuve.

Par les hypothèses supposées sur F et la Proposition 3.9, on peut facilement voir que $N(u(\cdot))$ est un sous ensemble non vide fermé convexe de $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R})$ pour tout $u(\cdot) \in C$, et que $N(u(\cdot)) \subset \overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{L}^q}(0, \|\eta\|_q)$.

Supposons que $E \subset \mathrm{L}^q(I, \mathrm{R}^N)$ est faiblement fermé, $u_n(\cdot) \to u(\cdot)$ dans $C \subset \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$, et $u_n(\cdot) \in N^{-1}(E)$, i.e., il existe $v_n(\cdot) \in \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$ tel que $v_n(\cdot) \in N(u_n(\cdot)) \cap E$ ou de façon équivalente, $v_n(\cdot) \in \Phi(\hat{u}_n(\cdot)) \cap E$. Donc, $\hat{u}_n(\cdot) \in \Phi^{-1}(E)$.

On a $(\hat{u}_n(\cdot)) \subset K$ et K est relativement compact dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$, donc $(\hat{u}_n(\cdot))$ admet une sous suite (notée identiquement) qui converge. On peut supposer que $\hat{u}_n(\cdot) \to \bar{u}(\cdot) \in \overline{K}$, ce qui donne $\hat{u}_n(t) \to \bar{u}(t),\ \forall t \in I$.

D'un autre côté, $u_n(\cdot) \to u(\cdot)$ dans $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$ implique que $\hat{u}_n(t) \to \hat{u}(t),\ \forall t \in I$, d'où $\bar{u}(t) = \hat{u}(t),\ \forall t \in I$. Donc $\hat{u}_n(\cdot) \to \hat{u}(\cdot)$ dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$. De plus, puisque

$$\|\dot{\hat{u}}(\cdot)\|_p \leq \|\dot{u}(\cdot)\|_p \leq \|\dot{u}_n(\cdot) - \dot{u}(\cdot)\|_p + \|\dot{u}_n(\cdot)\|_p \leq \|\dot{u}_n(\cdot) - \dot{u}(\cdot)\|_p + c',$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite quand $n \to \infty$ on obtient $\|\dot{\hat{u}}(\cdot)\|p \leq c'$ et donc $\hat{u}(\cdot) \in K$.

De plus, $v_n \in \Phi(\hat{u}_n(\cdot)) \subset \overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{L}^q}(0, \|\eta\|_q)$, alors $(v_n(\cdot))$ est bornée dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$ et admet une sous suite qui converge faiblement. Sans perdre de généralités, on peut supposer que $v_n(\cdot) \rightharpoonup v(\cdot) \in \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$ et $v(\cdot) \in E$, puisque E est faiblement fermé dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$. Comme Φ a un graphe fortement faiblement séquentiellement fermé, on a $v(\cdot) \in \Phi(\hat{u}(\cdot)) \cap E = N(u(\cdot)) \cap E$. Ainsi $u(\cdot) \in N^{-1}(E)$, i.e., $N^{-1}(E)$ est fermé dans $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$ et donc N est h-s.c.s. □

Maintenant, nous sommes en mesure de donner la preuve de la Proposition 3.11.

Preuve de la Proposition 3.11.

On pose $r_1 = \|\eta\|_q + T^{\frac{1}{q}} M^{p-1}$, $c' = \max\{(\frac{M}{\beta}\sqrt{T}\|\eta\|_2)^{\frac{1}{p}}, r_2\}$ et on considère D l'ensemble donné dans le Lemme 3.7.

Nous allons montrer que le problème

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} a(\dot{u}(t)) - \|u(t)\|^{p-2} u(t) \in A_\lambda(u(t)) + \Phi(\hat{u}(\cdot))(t) - \|\hat{u}(t)\|^{p-2} \hat{u}(t) \text{ p.p. sur } I, \\ (a(\dot{u}(0)), -a(\dot{u}(T))) \in \xi(u(0), u(T)). \end{cases} \tag{3.4.5}$$

admet une solution $u(\cdot) \in C$.

Pour tout $u(\cdot) \in C$, soit $V(u(\cdot)) = -N(u(\cdot)) + \hat{J}(\hat{u}(\cdot))$, i.e., pour tout $t \in I$

$$V(u(\cdot))(t) = -\Phi(\hat{u}(\cdot))(t) + \|\hat{u}(t)\|^{p-2} \hat{u}(t).$$

Par le Lemme 3.8, $V(u(\cdot))$ est un sous ensemble non vide convexe fermé et borné de $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$. Pour tout $u(\cdot) \in C$, et pour tout $h(\cdot) \in V(u(\cdot))$

$$\|h(\cdot)\|_q \leq \|\eta(\cdot)\|_q + T^{\frac{1}{q}} M^{p-1} = r_1,$$

alors V prend ses valeurs dans D.

Montrons que $V : C \rightrightarrows D$ est h-s.c.s. Supposons que $E \subset D$ est faiblement fermé, $u_n(\cdot) \to u(\cdot)$ dans C, et $u_n(\cdot) \in V^{-1}(E)$, i.e. il existe $v_n(\cdot) \in D$ telle que $v_n(\cdot) \in V(u_n(\cdot)) \cap E$. Alors $v_n(\cdot) \in E$ et $v_n(\cdot) \in -N(u_n(\cdot)) + \hat{J}(\hat{u}_n(\cdot))$, et donc $\hat{J}(\hat{u}_n(\cdot)) - v_n(\cdot) \in N(u_n(\cdot))$. Puisque $u_n(\cdot) \to u(\cdot)$ dans $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$, par le même argument utilisé dans la preuve du Lemme 3.8, $\hat{u}_n(\cdot) \to \hat{u}(\cdot)$ dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$, donc dans $\mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N)$ (car $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$ s'injecte continument dans $\mathrm{L}^p(I, \mathbb{R}^N)$). Alors, comme $\hat{J}$ est continue, $\hat{J}(\hat{u}_n(\cdot)) \to \hat{J}(\hat{u}(\cdot))$ dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$, d'où $\hat{J}(\hat{u}_n(\cdot)) \rightharpoonup \hat{J}(\hat{u}(\cdot))$ dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$.

De plus, $(v_n(\cdot)) \subset D$ et D est un sous ensemble faiblement compact dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$, alors $(v_n(\cdot))$ admet une sous suite faiblement convergente. Sans perde de généralités, on suppose que $v_n(\cdot) \rightharpoonup v(\cdot)$ dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$. Donc, puisque N est de graphe séquentiellement fortement faiblement fermé, on en déduit que $\hat{J}(\hat{u}(\cdot)) - v \in N(u(\cdot))$, i.e., $v(\cdot) \in V(u(\cdot))$ et comme $v(\cdot) \in E$ alors, $v(\cdot) \in V(u(\cdot)) \cap E$. Ainsi $u(\cdot) \in V^{-1}(E)$, ceci signifie que $V^{-1}(E)$ est fermé dans C et donc V est h-s.c.s.

Soit $G = U_\lambda^{-1}{}_{|D} \circ V$. Puisque $C \subset \mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$ et $D \subset \mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$ sont deux sous ensembles convexes fermés avec $0 \in C$ et comme $V : C \rightrightarrows D$ est à valeurs convexes faiblement compactes et h-s.c.s et $U_\lambda^{-1} : D \to C$ est complètement continue, $G : C \rightrightarrows C$ vérifie toutes les conditions mentionnées dans le Théorème 3.3. Soit

$$S = \{u(\cdot) \in C : u(\cdot) \in \mu G(u(\cdot)), 0 < \mu < 1\}.$$

Dans la suite de la démonstration, nous allons estimer les bornes de S.

Si $u(\cdot) \in S$, il existe $f(\cdot) \in \Sigma^q_{N(u(\cdot))}$, telle que

$$\frac{d}{dt} a(\mu^{-1}\dot{u}(t)) - \mu^{-(p-1)}\|u(t)\|^{p-2}u(t) = A_\lambda(\mu^{-1}u(t)) + f(t) - \|\hat{u}(t)\|^{p-2}\hat{u}(t), \text{ p.p. sur } I, \tag{3.4.6}$$

et $(a(\mu^{-1}\dot{u}(0)), -a(\mu^{-1}\dot{u}(T))) \in \xi(\mu^{-1}u(0), \mu^{-1}u(T))$.

En multipliant (3.4.6) par $u(t)$, et en intégrant par parties, nous avons

$$\begin{aligned} &\Big\langle a(\mu^{-1}\dot{u}(T)), u(T)\Big\rangle - \Big\langle a(\mu^{-1}\dot{u}(0)), u(0)\Big\rangle - \int_0^T \Big\langle a(\mu^{-1}\dot{u}(t)), \dot{u}(t)\Big\rangle dt - \mu^{-(p-1)} \int_0^T \|u(t)\|^p dt \\ &= \int_0^T \Big\langle A_\lambda(\mu^{-1}u(t)), u(t)\Big\rangle dt + \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle dt - \int_0^T \Big\langle \|\hat{u}(t)\|^{p-2}\hat{u}(t), u(t)\Big\rangle dt. \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Par $H(a)(i)$, on a

$$\Big\langle a(\mu^{-1}\dot{u}(t)), \dot{u}(t)\Big\rangle \geq \mu^{-(p-1)}\beta\|\dot{u}(t)\|^p.$$

Notons que

$$\Big\langle a(\mu^{-1}\dot{u}(T)), \mu^{-1}u(T)\Big\rangle - \Big\langle a(\mu^{-1}\dot{u}(0)), \mu^{-1}u(0)\Big\rangle \leq 0$$

(par $H(\xi)(ii)$ ou bien $H(\xi)(iii)$), $\Big\langle A_\lambda(\mu^{-1}u(t)), u(t)\Big\rangle \geq 0$, et

$$\left|\int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle dt\right| \leq \int_0^T \eta(t)\|u(t)\|dt \leq \|\eta(\cdot)\|_q\|u(\cdot)\|_p,$$

(rappelons que $f(\cdot) \in N(u(\cdot))$ alors $\|f(t)\| \leq \eta(t)$ presque pour tout $t \in I$).

On déduit de (3.4.7) que

$$\begin{aligned}
\mu^{-(p-1)}\beta\|\dot{u}(\cdot)\|_p^p + \mu^{-(p-1)}\|u(\cdot)\|_p^p &\leq \int_0^T \Big\langle a(\mu^{-1}\dot{u}(t)), \dot{u}(t)\Big\rangle dt - \mu^{-(p-1)}\int_0^T \|u(t)\|^p dt \\
&\leq -\int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle dt + \int_0^T \Big\langle \|\hat{u}(t)\|^{p-2}\hat{u}(t), u(t)\Big\rangle dt \\
&\leq \Big(\|\eta(\cdot)\|_q + M^{p-1}T^{\frac{1}{q}}\Big)\|u(\cdot)\|_p,
\end{aligned}$$

et puisque $\mu < 1$ on obtient

$$\beta\|\dot{u}(\cdot)\|_p^p + \|u(\cdot)\|_p^p \leq \Big(\|\eta(\cdot)\|_q + M^{p-1}T^{\frac{1}{q}}\Big)\|u(\cdot)\|_p.$$

D'où

$$\|u(\cdot)\|_p \leq \left(\Big(\|\eta(\cdot)\|_q + M^{p-1}T^{\frac{1}{q}}\Big)\|u(\cdot)\|_p\right)^{q-1}.$$

Mais, puisque $u(\cdot) \in C$, on a $\|\dot{u}(\cdot)\|_p \leq c'$. Par conséquent

$$\|u\|_{1,p}^p \leq d,$$

où d est une constante indépendante de λ, μ et $u(\cdot)$.

Puisque $u(\cdot)$ est arbitraire, S est borné dans $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$. En vertu du Théorème 3.3, la multiapplication G admet un point fixe $u(\cdot)$ qui résout (3.4.5), et donc (3.4.4) aussi.

□

3.4.3 Résultat d'existence

Théorème 3.8. *Si toutes les hypothèses supposées sur a, A, ξ et F dans le Théorème 3.6 sont vérifiées, alors le problème*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}a(\dot{u}(t)) - \|u(t)\|^{p-2}u(t) \in A(u(t)) + F(t, \hat{u}(t)) - \|\hat{u}(t)\|^{p-2}\hat{u}(t) \text{ p.p. sur } I; \\ (a(\dot{u}(0)), -a(\dot{u}(T))) \in \xi(u(0), u(T)). \end{cases} \tag{3.4.8}$$

admet au moins une solution.

Preuve.

On prend $\lambda_n \downarrow 0$, et $u_n(\cdot)$ solution de (3.4.5). Comme dans la preuve de la Proposition 3.10, nous affirmons d'abord que $\|u_n(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, il existe $f_n \in \Sigma^q_{\Phi(u(\cdot))}$, vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}a(\dot{u}_n(t)) = A_{\lambda_n}(u_n(t)) + f_n(t) \text{ p.p. sur } I; \\ (a(\dot{u}_n(0)), -a(\dot{u}_n(T))) \in \xi(u_n(0), u_n(T)). \end{cases} \tag{3.4.9}$$

En multipliant l'équation (3.4.9) par $u_n(t)$, et en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} \Big\langle a(\dot{u}_n(T)), u(T)\Big\rangle - \Big\langle a(\dot{u}_n(0)), u(0)\Big\rangle - \int_0^T \Big\langle a(\dot{u}_n(t)), \dot{u}_n(t)\Big\rangle dt \\ = \int_0^T \Big\langle A_{\lambda_n}(u_n(t)), u_n(t)\Big\rangle dt + \int_0^T \big\langle f_n(t), u_n(t)\big\rangle dt. \end{aligned}$$

Donc, comme déjà vu dans les preuves précédentes, en utilisant la monotonie de A et ξ, le fait que $0 \in A(0)$ et $(0,0) \in \xi(0,0)$, $H(a)(i)$ et $H(F)(ii)$, on obtient

$$\begin{aligned} \beta\|\dot{u}_n(\cdot)\|_p^p &\leq -\int_0^T \big\langle f_n(t), u_n(t)\big\rangle dt \\ &\leq M\int_0^T \eta(t)dt \\ &\leq M\sqrt{T}\|\eta\|_2. \end{aligned}$$

Alors, on peut déduire que $(\|\dot{u}_n(\cdot)\|_p)$ est bornée, et ainsi l'est $(\|u_n(\cdot)\|_{1,p})$. Une autre fois, par le théorème d'injection compacte, $(u_n(\cdot))$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$.

En multipliant (3.4.9) par $A_{\lambda_n}(u_n(t))$, et en intégrant sur I, on obtient

$$-\int_0^T \Big\langle \frac{d}{dt}a(\dot{u}_n(t)), A_{\lambda_n}(u_n(t))\Big\rangle dt + \int_0^T \|A_{\lambda_n}(u_n(t))\|^2 dt = -\int_0^T \Big\langle f_n(t), A_{\lambda_n}(u_n(t))\Big\rangle dt. \tag{3.4.10}$$

Par la Proposition 3.10 et $H(F)(iii)$, on a $\|f_n(t)\| \leq \eta(t)$, qui donne que $(f_n(\cdot))$ est bornée dans $\mathrm{L}^2(I, \mathbb{R}^N)$. Par (3.4.10), et en utilisant les même arguments que dans la preuve du Théorème 3.5, $(\hat{A}_{\lambda_n}(u_n))$ est aussi bornée dans $\mathrm{L}^2(I, \mathbb{R}^N)$, et donc dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$. Alors, on peut conclure par (3.4.9) que $\left(\dfrac{d}{dt}\, a(\dot{u}_n(\cdot))\right)$ est bornée dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$.

D'un autre côté, par $H(a)(ii)$, on a

$$\|a(\dot{u}_n(t))\| \leq c(\|\dot{u}_n(t)\|^{p-1} + 1) \text{ p.p. sur } I,$$

ce qui implique que $(a(\dot{u}_n(\cdot)))$ est bornée dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$. Ainsi, nous avons obtenu la bornitude de $(a(\dot{u}_n(\cdot)))$ dans $\mathrm{W}^{1,q}(I, \mathbb{R}^N)$. De l'injection compacte $\mathrm{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}^N) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$, on en déduit que $(a(\dot{u}_n(\cdot)))$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$, qui à son tour implique la compacité relative de $(\dot{u}_n(\cdot))$ puisque $a(\cdot)$ est un homéomorphisme. D'où la relative compacité de $(u_n(\cdot))$ dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^N)$. Pour plus de simplicité, supposons que $u_n(\cdot) \to u(\cdot)$ dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^N)$ (et $u(\cdot) \in C$), alors $u_n(0) \to u(0)$, $u_n(T) \to u(T)$, et $a(\dot{u}_n(0)) \to a(\dot{u}(0))$, $a(\dot{u}_n(T)) \to a(\dot{u}(T))$.

Supposons que $\hat{A}_{\lambda_n}(u_n(\cdot)) \rightharpoonup y(\cdot)$, et $f_n(\cdot) \rightharpoonup f(\cdot)$ dans $\mathrm{L}^q(I, \mathbb{R}^N)$. Puisque Φ a un graphe fortement faiblement séquentiellement fermé, on a $f(\cdot) \in \Phi(u(\cdot))$, alors $f(t) \in F(t, u(t))$ p.p sur I, .i.e. $f(\cdot) \in \Sigma^q_{F(\cdot, u(\cdot))}$.

De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_0(I, \mathbb{R}^N)$, les égalités suivantes sont vérifiées,

$$\begin{aligned} -\int_0^T \Big\langle a(\dot{u}_n(t)), \dot{\varphi}(t)\Big\rangle dt &= \int_0^T \Big\langle \frac{d}{dt} a(\dot{u}_n(t)), \varphi(t)\Big\rangle dt \\ &= \int_0^T \Big\langle A_{\lambda_n}(u_n(t)), \varphi(t)\Big\rangle dt + \int_0^T \Big\langle f_n(t), \varphi(t)\Big\rangle dt. \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

D'où

$$\int_0^T \Big\langle \frac{d}{dt} a(\dot{u}_n(t)), \varphi(t)\Big\rangle dt = \int_0^T \Big\langle A_{\lambda_n}(u_n(t)) + f_n(t), \varphi(t)\Big\rangle dt.$$

Passant à la limite quand $n \to \infty$, (3.4.9) devient

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} a(\dot{u}(t)) = y(t) + f(t) \text{ p.p. sur } I, \\ (a(\dot{u}(0)), -a(\dot{u}(T))) \in \xi(u(0), u(T)). \end{cases} \tag{3.4.12}$$

La deuxième ligne de (3.4.12) est obtenue en raison de la fermeture de ξ.

Finalement, On montre que $u \in \mathcal{D}(\hat{A})$ et $y \in \hat{A}(u)$ de la même manière que dans le Théorème 3.5. Cela complète la preuve. $\square$

A la fin de cette section, donnons un exemple qui illustre notre conclusion.

Exemple 3.1. *Soient* $K_1,\ K_2 \subseteq \mathbb{R}$ *deux sous ensembles non vides fermés convexes avec* $0 \in K_1 \cap K_2$.

Soit $\delta_{K_1 \times K_2}$ *la fonction indicatrice de* $K_1 \times K_2$, *i.e.,*

$$\delta_{K_1 \times K_2}(v, w) = \begin{cases} 0 & si\ (v, w) \in K_1 \times K_2 \\ +\infty & sinon. \end{cases}$$

Alors on sait que $\delta_{K_1 \times K_2}$ *est une fonction propre positive convexe et semicontinue inférieurement sur* $\mathbb{R}^2$ *et pour tout* $(v_1, v_2) \in K_1 \times K_2$

$$\begin{aligned} \partial\delta_{K_1 \times K_2}(v_1, v_2) &= \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 :\ (v_1 - u_1)w_1 + (v_2 - u_2)w_2 \geq 0,\ \forall (u_1, u_2) \in K_1 \times K_2\} \\ &= N_{K_1 \times K_2}(v_1, v_2) = N_{K_1}(v_1) \times N_{K_2}(v_2); \end{aligned}$$

et si $(v_1, v_2) \notin K_1 \times K_2$ *alors* $\partial\delta_{K_1 \times K_2}(v_1, v_2) = \emptyset$.

Soit $\xi = \partial\delta_{K_1 \times K_2}$, *alors* ξ *est un opérateur maximal monotone.*

On a $(0, 0) \in \xi(0, 0)$ *et comme* $0 \in K_1 \cap K_2$, *si* $(w_1, w_2) \in \xi(v_1, v_2)$, *alors* $w_1 v_1 \geq 0$ *et* $w_2 v_2 \geq 0$, *donc l'hypothèse* $H(\xi)(i)$ *est vérifiée.*

De plus, si $J_\lambda(v_i) \in K_i$, *pour tout* $\lambda > 0$, *quand* $v_i \in K_i$, $i = 1, 2$ *l'hypothèse* $H(A, \xi)$ *est satisfaite. En effet, si* $(v_1, v_2) \in \xi(v_1, v_2)$ $((v_1, v_2) \in K_1 \times K_2)$, *et puisque* $J_\lambda(v_i) \in K_i$, *on obtient*

$$(v_1 - J_\lambda(v_1))w_1 + (v_2 - J_\lambda(v_2))w_2 \geq 0.$$

Pour tout $\lambda > 0$, *en multipliant par* $\frac{1}{\lambda}$ *on trouve*

$$A_\lambda(v_1)w_1 + A_\lambda(v_2)w_2 \geq 0.$$

Soit $U : [0, \frac{\pi}{2}] \rightrightarrows \mathbb{R}$ *une multiapplication à valeurs ouvertes et de graphe* $\mathcal{L}([0, \frac{\pi}{2}]) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$-*mesurable, et soit* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue qui satisfait, pour* $k > 0$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leq k|x|$ *et* $g(x)x \geq 0$.

Considérons la multiapplication $F : [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$*, définie par*

$$F(t,x) = \begin{cases} [0,1] & si\, t = 0,\ x \notin U(0) \\ \{0,1\} & si\, t = 0,\ x \in U(0) \\ g(x)(\sin t + 1)\,[0,1] & si\, t \in]0, \frac{\pi}{2}],\ x \notin U(t) \\ g(x)(\sin t + 1)\,E & si\, t \in]0, \frac{\pi}{2}],\ x \in U(t), \end{cases}$$

où $E \subset]0,1]$ *est un sous ensemble fini. On va montrer que* F *vérifie les conditions du Théorème 3.6. En posant* $f(t,x) = g(x)(\sin t + 1)$*,* f *est continue de* $[0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *comme produit de deux fonctions continues. Alors, il est facile de voir que* F *est à valeurs non vides compactes.*

F $\mathcal{L}([0, \frac{\pi}{2}]) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$-mesurable.

Soit V *un sous ensemble fermé de* $\mathbb{R}$ *alors*

$$\begin{aligned} F^{-1}(V) &= \Big\{(t,x) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R} :\ F(t,x) \cap V \neq \emptyset\Big\} \\ &= \Big\{(t,x) \in Gr(U) :\ F(t,x) \cap V \neq \emptyset\Big\} \\ &\bigcup \Big\{(t,x) \in ([0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R})\backslash Gr(U) :\ F(t,x) \cap V \neq \emptyset\Big\}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} W_1 &= \Big\{(t,x) \in GrU :\ F(t,x) \cap V \neq \emptyset\Big\} \\ &= \Big\{(0,x) \in Gr(U) :\ \{0,1\} \cap V \neq \emptyset\Big\} \bigcup \Big\{(t,x) \in Gr(U) :\ t \neq 0\ et\ f(t,x)E \cap V \neq \emptyset\Big\}, \end{aligned}$$

où

$$\Big\{(0,x) \in Gr(U) :\ \{0,1\} \cap V \neq \emptyset\Big\} = \begin{cases} (\{0\} \times \mathbb{R}) \bigcap Gr(U) & si\ \{0,1\} \cap V \neq \emptyset \\ \emptyset & sinon, \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} &\Big\{(t,x) \in Gr(U) :\ t \neq 0\ et\ f(t,x)E \cap V \neq \emptyset\Big\} \\ = &\Big\{(t,x) \in Gr(U) :\ t \neq 0\ et\ il\ existe\ v \in E\ tel\ que\ f(t,x)v \in V\Big\} \\ = &\Big\{(t,x) \in Gr(U) :\ t \neq 0\ et\ il\ existe\ v \in E\ tel\ que\ (t,x) \in f^{-1}(\frac{1}{v}V)\Big\} \\ = &\Big(]0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}\Big) \bigcap Gr(U) \bigcap \Big(\bigcup_{v \in E} f^{-1}(\frac{1}{v}V)\Big) \in \mathcal{L}([0, \frac{\pi}{2}]) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

D'où $W_1 \in \mathcal{L}([0,\frac{\pi}{2}]) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$. *De même*

$$\begin{aligned} W_2 &= \Big\{(t,x) \in ([0,\frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R})\backslash Gr(U): \ F(t,x) \cap V \neq \emptyset\Big\} \\ &= \Big\{(0,x) \in ([0,\frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R})\backslash Gr(U): \ [0,1] \cap V \neq \emptyset\Big\} \\ &\cup \ \Big\{(t,x) \in ([0,\frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R})\backslash Gr(U): \ t \neq 0 \ \textit{et} \ f(t,x)[0,1] \cap V \neq \emptyset\Big\}, \end{aligned}$$

où

$$\Big\{(0,x) \in ([0,\frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R})\backslash Gr(U): \ [0,1] \cap V \neq \emptyset\Big\} \\ = \begin{cases} (\{0\} \times \mathbb{R}) \cap \Big(([0,\frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R})\backslash Gr(U)\Big) & \textit{si } [0,1] \cap V \neq \emptyset \\ \emptyset & \textit{sinon.} \end{cases}$$

De plus, en posant $\Delta = \{r \in \mathbb{R}: \ V \cap r[0,1] \neq \emptyset\}$, Δ *et fermé. En effet, soit une suite* $(r_n) \subset \Delta$ *telle que* $r_n \to r$. *Alors pour tout* n, $V \cap r_n[0,1] \neq \emptyset$. *Donc, ils existent* $x_n \in V$ *et* $c_n \in [0,1]$ *tels que* $x_n = r_n c_n$. *Comme* $[0,1]$ *est compact on peut extraire de* (c_n) *une sous suite (qu'on lui garde la même notation) qui converge vers un certain* $c \in [0,1]$. *D'où*

$$x_n = r_n c_n \to rc \in V$$

puisque V *est fermé. Ceci donne* $V \cap r[0,1] \neq \emptyset$, *c'est à dire que* Δ *est fermé. Il s'ensuit que*

$$\begin{aligned} &\Big\{(t,x) \in ([0,\frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R})\backslash Gr(U): \ t \neq 0 \ \textit{et} \ f(t,x)[0,1] \cap V \neq \emptyset\Big\} \\ =& \Big\{(t,x) \in ([0,\frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R})\backslash Gr(U): \ t \neq 0 \ \textit{et} \ f(t,x) \in \Delta\Big\} \\ =& \Big(]0,\frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}\Big) \cap ([0,\frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R})\backslash Gr(U) \cap f^{-1}(\Delta) \in \mathcal{L}([0,\frac{\pi}{2}]) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

D'où $W_2 \in \mathcal{L}([0,\frac{\pi}{2}]) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$. *Par conséquent,* F *est* $\mathcal{L}([0,\frac{\pi}{2}]) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$*-mesurable.*

F semicontinue mixte.

Soit $t \in]0,\frac{\pi}{2}]$, *et* $x \in \mathbb{R}$ *tels que* $x \in U(t)$. *Soit* V *un sous ensemble ouvert de* $\mathbb{R}$ *tel que* $F(t,x,y) \cap V \neq \emptyset$, *i.e.,* $g(x)(\sin t+1)E \cap V \neq \emptyset$. *Alors, il existe* $v \in E$ *tel que* $g(x)(\sin t+1)v \in V$. *Donc,* $g(x) \in \dfrac{1}{(\sin t+1)v}V$. *D'où,* $x \in g^{-1}\Big(\dfrac{1}{(\sin t+1)v}V\Big)$. *Mais* g *est continue d'où* $g^{-1}\Big(\dfrac{1}{(\sin t+1)v}V\Big)$ *est un voisinage de* x. *Alors il existe* $r > 0$ *tel que*

$$\mathrm{B}(x,r) \subset g^{-1}\Big(\frac{1}{(\sin t+1)v}V\Big)$$

et

$$\mathrm{B}(x,r) \subset U(t).$$

On a

$$g(B(x,r))(\sin t+1).v \subset V,$$

alors pour tout $y \in \mathrm{B}(x,r)$, $F(t,y) \cap V \neq \emptyset$. *Donc* $F(t,\cdot)$ *est s.c.i au voisinage de* x.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R} \backslash U(t)$, *alors* $F(t,x)$ *est convexe.*

Soit V *un ouvert de* $\mathbb{R}$ *tel que* $F(t,x) \subset V$, *i.e.,* $g(x)(\sin t+1)[0,1] \subset V$.

Soit $r>0$ *assez petit pour que*

$$\mathrm{B}(g(x),r)(\sin t+1)[0,1] \subset V.$$

Alors $\mathrm{B}(g(x),r)$ *est un voisinage de* $g(x)$ *et comme* g *est continue, il existe un voisinage* Ω *de* x *tel que*

$$g(\Omega) \subset \mathrm{B}(g(x),r).$$

Si $y \in \Omega \backslash U(t)$ *alors*

$$F(t,y) = g(y)(\sin t+1)[0,1] \subset \mathrm{B}(g(x),r)(\sin t+1)[0,1] \subset V,$$

et si $y \in \Omega \cap U(t)$ *alors*

$$F(t,y) = g(y)(\sin t+1)E \subset \mathrm{B}(g(x),r)(\sin t+1)[0,1] \subset V.$$

Par conséquent $F(t,\cdot)$ *est s.c.s en* x.

<u>F bornée.</u>

Pour tous $t \in]0,\frac{\pi}{2}]$, $x \in \mathbb{R}$ *et* $v \in F(t,x)$ *on a*

$$|v| \leq (\sin t+1)|g(x)| \leq k(\sin t+1)|x|.$$

En choisissant un M *assez grand, on obtient pour tout* $|x| \geq M$

$$F(t,x) \cap \overline{\mathrm{B}}(0,k(\sin t+1)|x|) \neq \emptyset.$$

<u>F vérifie la condition de Hartmann.</u>

Pour tous $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $x \in \mathbb{R}$ *et tout* $v \in F(t,x)$ *on a*

$$xv = g(x)(\sin t + 1)x \geq 0.$$

Les Hypothèses supposées sur F *dans le Théorème 3.6 sont toutes vérifiées.*

Supposons que $H(a)$ *et* $H(A)$ *sont vérifiées, alors le problème*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(a(\dot{u}(t))) \in A(u(t)) + F(t,u(t)) \ p.p. \ sur \ [0, \dfrac{\pi}{2}] \\ (a(\dot{u}(0)), -a(\dot{u}(\frac{\pi}{2}))) \in N_{K_1 \times K_2}(u(0), u(\frac{\pi}{2})), \end{cases}$$

admet une solution $u(\cdot)$ *dans* $\mathcal{C}^1([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ *telle que* $a(\dot{u}(\cdot))$ *est absolument continue.*

CHAPITRE 4

Solutions faibles pour des inclusions différentielles du second ordre gouvernées par un opérateur maximal monotone et perturbées par une application lipschitzienne

Sommaire

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on introduit un concept de solution faible pour des inclusions différentielles du second ordre de la forme $\ddot{u}(t) \in A(u(t)) + f(t, u(t))$ où A est un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H et $f : [0, T] \times H \to H$ est une application qui vérifie certaines conditions. On prouve l'existence de solutions faibles pour les problèmes à deux conditions aux limites associés à ce genre d'inclusion.

Soit H un espace de Hilbert et $I = [0, T]$ $(T > 0)$. Considérons l'inclusion différentielle du second ordree suivante

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in A(u(t)) + f(t, u(t)) & \text{p.p. sur }]0, T[, \\ u(0) = x, \quad u(T) = 0, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où A est un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H avec $0 \in A(0)$, $x \in \mathcal{D}(A)$ et $f : I \times H \to H$ une application qui vérifie certaines conditions.

L'inclusion différentielle du second ordre avec conditions aux limites suivante

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in A(u(t)) + f(t) & \text{p.p. sur }]0, T[, \\ u(0) = x, \quad u(T) = y, \end{cases} \tag{4.1.2}$$

où A est un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H et $f : I \to H$ est une application, a été étudiée par plusieurs auteurs.

Barbu (voir [7] et [8]) a prouvé l'existence d'une solution unique $u \in \mathrm{W}^{2,2}(I, H)$ de (4.1.2) sous les conditions $x, y \in \mathcal{D}(A)$ et $f \in \mathrm{L}^2(I, H)$.

Bruck dans [16] à étudié le résultat de Barbu dans le cas où $x, y \in \overline{\mathcal{D}(A)}$.

Dans [43], les auteurs ont introduit le concept d'une solution faible pour le problème (4.1.2) afin de couvrir des conditions plus générales sur f qui ne garantissent pas l'existence de solutions fortes.

Dans ce chapitre, on va montrer que sous certaines hypothèses supposées sur f, il existe une suite $(u_n(\cdot)) \subset \mathrm{W}^{1,2}(I, H)$, avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dot{u}_n(\cdot)$ est continue par morceaux et absolument continue sur chaque morceau, et $\ddot{u}_n(\cdot) \in \mathrm{L}^2(I, H)$, et une suite $(g_n(\cdot))$ de $\mathrm{L}^2(I, H)$, telles que

(i) $u_n(\cdot)$ vérifie (4.1.2) avec $f = g_n$ pour presque tout $t \in I$;

(ii) $(u_n(\cdot))$ converge vers $u(\cdot)$ dans $\mathcal{C}(I, H)$;

(iii) $(g_n(\cdot))$ converge vers $f(\cdot, u(\cdot))$ dans X'_T (voir section 4.2) ;

(iv) $u(0) = x$ et $u(T) = 0$.

4.2 Préliminaires

Il est connu que pour $x, y \in \mathcal{D}(A)$ et $f \in \mathrm{L}^2(I, H)$, il existe une unique solution $u \in \mathrm{W}^{2,2}(I, H)$ du problème (4.1.2) (voir [7] et [8]). De plus, pour $x, y \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ et $f \in \mathrm{L}^2(I, H)$, ce problème admet une solution unique $u \in \mathcal{C}(I, H) \cap \mathrm{W}^{2,2}_{loc}(I, H)$ (voir [16]), qu'on appelle solution forte.

On considère l'espace $X_T = \mathrm{L}^1(I, H; tdt)$, i.e.,

$$X_T = \left\{ f : [0, T] \to H \ : \ \int_0^T t\|f(t)\|dt < \infty \right\}.$$

Alors $\mathrm{L}^2(I, H)$ est dense dans X_T.

On considère aussi l'espace $X'_T = \mathrm{L}^1([0, T], H, \sqrt{t}dt)$, i.e.,

$$X'_T = \left\{ f : [0, T] \to H \ : \ \int_0^T \sqrt{t}\|f(t)\|dt < \infty \right\}.$$

Il est clair que $\mathrm{L}^1(I, H) \subset X'_T$, de plus $X'_T \subset X_T$. En effet, pour tout $f \in X'_T$, en utilisant l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^T t\|f(t)\|dt &= \int_O^T \sqrt{\sqrt{t}\|f(t)\|} \cdot \sqrt{\sqrt{t}\|f(t)\|}\sqrt{t}dt \\
&\leq \Big(\int_0^T \sqrt{t}\|f(t)\|dt \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(T \int_0^T \sqrt{t}\|f(t)\|dt \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{T} \int_0^T \sqrt{t}\|f(t)\|dt < +\infty,
\end{aligned}$$

d'où $f \in X_T$.

On donne maintenant un théorème d'existence de solutions fortes établi par Barbu (voir [8]).

Théorème 4.1. *Supposons que A est un opérateur maximal monotone. Alors, pour tout $f \in \mathrm{L}^2(I,H)$ et tous x, $y \in \mathcal{D}(A)$ il existe une unique solution $u(\cdot) \in \mathrm{W}^{2,2}(I,H)$ pour le problème* (4.1.2).

Voici une définition de solution faible donnée par Khatibzadeh et Moroşanu dans [43].

Définition 4.1. *Soient $x, y \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, et soit $f \in X_T$. Une fonction $u \in \mathcal{C}(I,H)$ est dite, solution faible du problème* (4.1.2)*, s'il existe une suite $(u_n(\cdot)) \subset \mathrm{W}^{2,2}(I,H)$ et une suite $(f_n(\cdot))$ de $\mathrm{L}^2(I,H)$, telles que*

(i) $u_n(\cdot)$ *vérifie* (4.1.2) *avec $f = f_n$ pour presque tout $t \in I$;*

(ii) $(u_n(\cdot))$ *converge vers $u(\cdot)$ dans $\mathcal{C}(I,H)$;*

(iii) $(f_n(\cdot))$ *converge vers $f(\cdot)$ dans X_T ;*

(iv) $u(0) = x$ *et* $u(T) = y$.

On donne maintenant un théorème d'existence de solutions faibles démontré dans [43].

Théorème 4.2. *Supposons que A est un opérateur maximal monotone. Alors, pour tout $f \in X_T$, $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ et $y \in \mathcal{D}(A)$ il existe une unique solution faible $u(\cdot)$ pour le problème* (4.1.2).

Preuve.

On commence par prouver la première partie du Théorème 4.2. On suppose que $f \in X_T$, $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ et $y \in \mathcal{D}(A)$. Soit $(f_n(\cdot))$ une suite dans $L^2(I,H)$ telle que $(f_n(\cdot))$ converge vers $f(\cdot)$ dans X_T (elle existe puisque $L^2(I,H)$ est dense dans X_T).

Soit $(x_n) \subset \mathcal{D}(A)$ une suite convergeant vers $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. On note par $u_n(\cdot)$ la solution forte du problème

$$\ddot{u}_n(t) \in A(u_n(t)) + f_n(t) \qquad \text{p.p. sur }]0,T[, \tag{4.2.1}$$

$$u_n(0) = x_n, \quad u_n(T) = y. \tag{4.2.2}$$

De (4.2.1), pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $t \in]0,T[$, il existe $y_t^{(n)} \in A(u_n(t))$ tel que

$$\ddot{u}_n(t) = y_t^{(n)} + f_n(t).$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, en multipliant par $u_n(t) - u_m(t)$, on trouve

$$\Big\langle \ddot{u}_n(t), u_n(t) - u_m(t) \Big\rangle = \Big\langle y_t^{(n)}, u_n(t) - u_m(t) \Big\rangle + \Big\langle f_n(t), u_n(t) - u_m(t) \Big\rangle,$$

et

$$\Big\langle \ddot{u}_m(t), u_n(t) - u_m(t) \Big\rangle = \Big\langle y_t^{(m)}, u_n(t) - u_m(t) \Big\rangle + \Big\langle f_m(t), u_n(t) - u_m(t) \Big\rangle,$$

et par soustraction on obtient

$$\Big\langle \ddot{u}_n(t) - \ddot{u}_m(t), u_n(t) - u_m(t) \Big\rangle = \Big\langle y_t^{(m)} - y_t^{(m)}, u_n(t) - u_m(t) \Big\rangle + \Big\langle f_n(t) - f_m(t), u_n(t) - u_m(t) \Big\rangle,$$

pour presque tout $t \in]0, T[$.

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \|u_n(t) - u_m(t)\|^2 &= \frac{d}{dt} \Big\langle \dot{u}_n(t) - \dot{u}_m(t), u_n(t) - u_m(t) \Big\rangle \\ &= \Big\langle \ddot{u}_n(t) - \ddot{u}_m(t), u_n(t) - u_m(t) \Big\rangle + \|\dot{u}_n(t) - \dot{u}_m(t)\|^2. \end{aligned}$$

En utilisant la monotonie de A, il s'ensuit que

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \|u_n(t) - u_m(t)\|^2 \geq \Big\langle f_n(t) - f_m(t), u_n(t) - u_m(t) \Big\rangle + \|\dot{u}_n(t) - \dot{u}_m(t)\|^2. \qquad (4.2.3)$$

En négligeant, pour le moment, le dernier terme dans le côté droit de (4.2.3) et en intégrant sur $[t, T]$, $0 < t < T$, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n(T) - u_m(T)\|^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n(t) - u_m(t)\|^2 \geq - \int_0^T \|f_n(\tau) - f_m(\tau)\| \cdot \|u_n(\tau) - u_n(\tau)\| d\tau.$$

Mais

$$\frac{d}{dt} \|u_n(T) - u_m(T)\|^2 = 2 \Big\langle \dot{u}_n(T) - \dot{u}_m(T), u_n(T) - u_m(T) \Big\rangle = 0,$$

d'où

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n(t) - u_m(t)\|^2 \geq - \int_0^T \|f_n(\tau) - f_m(\tau)\| \cdot \|u_n(\tau) - u_n(\tau)\| d\tau.$$

Une nouvelle intégration, cette fois sur $[0, t]$, donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_n(t) - u_m(t)\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|x_n - x_m\|^2 + \int_0^T \left(\int_s^T \|f_n(\tau) - f_m(\tau)\| \cdot \|u_n(\tau) - u_n(\tau)\| d\tau \right) ds. \\ &= \frac{1}{2} \|x_n - x_m\|^2 + \int_0^T \tau \|f_n(\tau) - f_m(\tau)\| \cdot \|u_n(\tau) - u_n(\tau)\| d\tau. \qquad (4.2.4) \end{aligned}$$

En notant $M_{mn} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_n(t) - u_m(t)\|$, on obtient de (4.2.4)

$$M_{mn}^2 \leq \|x_n - x_m\|^2 + 2M_{mn} \int_0^T \tau \|f_n(\tau) - f_m(\tau)\| d\tau.$$

Ceci montre que $(u_n(\cdot))$ est une suite de Cauchy, donc convergente dans $\mathcal{C}(I, H)$ vers une application $u(\cdot)$, et en particulier $u(0) = x$ et $u(T) = y$.

L'unicité de la solution faible u suit facilement, même dans le cas où $x, y \in \overline{\mathcal{D}(A)}$.

En effet, si u et $\tilde{u}$ sont deux solutions faibles de (4.1.2) et $u_n, \tilde{u}_n \in \mathrm{W}^{2,2}(I, H)$, $f_n, \tilde{f}_n \in \mathrm{L}^2(I, H)$ sont des suites correspondantes à la Définition 4.1, alors, en utilisant la monotonie de A on a

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \|u_n(t) - \tilde{u}_n(t)\|^2 \geq \left\langle f_n(t) - \tilde{f}_n(t), u_n(t) - \tilde{u}_n(t) \right\rangle \text{ p.p. sur }]0, T[. \tag{4.2.5}$$

Puisque $u_n(\cdot), \tilde{u}_n(\cdot)$ sont toutes les deux convergentes dans $\mathcal{C}(I, H)$ (vers $u(\cdot)$ et $\tilde{u}(\cdot)$ respectivement) il existe une constante positive M, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|u_n(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \leq \frac{M}{4} \quad \text{et} \quad \|\tilde{u}_n(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \leq \frac{M}{4}.$$

Donc par (4.2.5) on trouve

$$\frac{d^2}{dt^2} \|u_n(t) - \tilde{u}_n(t)\|^2 \geq -M \|f_n(t) - \tilde{f}_n(t)\| \text{ p.p. sur }]0, T[. \tag{4.2.6}$$

Si on multiplie (4.2.6) par t et on intègre sur $[0, t]$, on trouve

$$\int_0^t \tau \frac{d^2}{dt^2} \|u_n(\tau) - \tilde{u}_n(\tau)\|^2 d\tau \geq -M \int_0^T \tau \|f_n(\tau) - \tilde{f}_n(\tau)\| d\tau \ \forall t \in [0, T].$$

Une intégration par parties montre que

$$\begin{aligned} & \tau \frac{d}{dt} \|u_n(\tau) - \tilde{u}_n(\tau)\|^2 \Big|_0^t - \int_0^t \frac{d}{dt} \|u_n(\tau) - \tilde{u}_n(\tau)\|^2 d\tau \\ = \ & t \frac{d}{dt} \|u_n(t) - \tilde{u}_n(t)\|^2 - \|u_n(t) - \tilde{u}_n(t)\|^2 + \|u_n(0) - \tilde{u}_n(0)\|^2 \\ \geq \ & -M \int_0^T \tau \|f_n(\tau) - \tilde{f}_n(\tau)\| d\tau \ \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Une nouvelle intégration, cette fois sur $[t, T]$, nous donne

$$\begin{aligned} & \int_t^T \left(\tau \frac{d}{dt} \|u_n(\tau) - \tilde{u}_n(\tau)\|^2 - \|u_n(\tau) - \tilde{u}_n(\tau)\|^2 \right) d\tau + (T - t) \|u_n(0) - \tilde{u}_n(0)\|^2 \\ \geq \ & -M(T - t) \int_0^T \tau \|f_n(\tau) - \tilde{f}_n(\tau)\| d\tau \ \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Ce qui conduit, après une intégration par parties, à

$$T\|u_n(T)-\tilde{u}_n(T)\|^2+(T-t)\|u_n(0)-\tilde{u}_n(0)\|^2+M(T-t)\int_0^T \tau\|f_n(\tau)-\tilde{f}_n(\tau)\|d\tau$$
$$\geq t\|u_n(t)-\tilde{u}_n(t)\|^2, \quad \text{pour tout } t\in[0,T]. \quad (4.2.7)$$

Quand $n\to\infty$ on obtient

$$t\|u(t)-\tilde{u}(t)\|^2\leq 0, \quad \text{pour tout } \ t\in[0,T].$$

D'où $u(t)=\tilde{u}(t)$ pour tout $t\in]0,T]$.

De plus, puisque $u_n(0)=\tilde{u}_n(0)=x$, on obtient quand n tend vers l'infini

$$u(0)=\tilde{u}(0)=x,$$

ce qui montre que $u=\tilde{u}$. □

4.3 Résultat principal

Dans cette section, on va introduire un nouvel concept, qu'on peut appeler solution faible, pour le problème (4.1.1), en utilisant les solutions fortes du problème (4.1.2), et aussi en utilisant une méthode de discrétisation, déjà vue dans le chapitre 2.

On commence par définir l'ensemble $\mathrm{X}^{1,2}$ par

$$\mathrm{X}^{1,2}=\{u(\cdot)\in \mathrm{W}^{1,2}(I,H):\ \dot{u}(\cdot) \text{ est continue par morceaux et}$$
$$\text{absolument continue sur chaque morceau et } \ \ddot{u}(\cdot)\in \mathrm{L}^2(I,H)\}.$$

Théorème 4.3. *Soit $A:H\rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone, tel que $0\in A(0)$. Soit $f:I\times H\to H$ une application mesurable sur I telle que*

1. *pour tout $\eta>0$, il existe une fonction positive $k_\eta(\cdot)\in X'_T$, $\|k_\eta(\cdot)\|_{X_T}<\frac{1}{2}$ telle que pour tout $t\in I$ et pour tout $(x,y)\in \mathrm{B}_H(0,\eta)\times B_H(0,\eta)$*

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|\leq k_\eta(t)\|x-y\|;$$

2. *il existe une fonction positive* $\beta(\cdot) \in \mathrm{L}^2(I, \mathbb{R})$, $\|\beta(\cdot)\|_{X_T} < \frac{1}{2}$ *telle que pour tout* $(t, x) \in I \times H$

$$\|f(t, x)\| \leq \beta(t)(1 + \|x\|).$$

Alors, pour tout $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, *il existe une suite* $(u_n(\cdot)) \in \mathrm{X}^{1,2}$ *et une suite* $(g_n(\cdot))$ *de* $\mathrm{L}^2(I, H)$, *telles que*

(i) $u_n(\cdot)$ *vérifie* (4.1.2) *avec* $f = g_n$, $x = x_0$ *et* $y = 0$ *pour presque tout* $t \in I$ *;*

(ii) $(u_n(\cdot))$ *converge vers* $u(\cdot)$ *dans* $\mathcal{C}(I, H)$ *;*

(iii) $(g_n(\cdot))$ *converge vers* $f(\cdot, u(\cdot))$ *dans* X'_T *;*

(iv) $u(0) = x_0$ *et* $u(T) = 0$.

De plus,

$$\|u(\cdot)\| \leq l = \frac{1}{1 - 2\|\beta(\cdot)\|_{X_T}} \Big(\|\beta(\cdot)\|_{X_T} + \sqrt{\|\beta(\cdot)\|^2_{X_T} + \|x_0\|^2}\Big),$$

et la suite $(t^{1/2}\dot{u}_n(\cdot))$ *est convergente dans* $\mathrm{L}^2(I, H)$ *vers une certaine application* $g(\cdot) \in \mathrm{L}^2(I, H)$ *qui vérifie*

$$\|g(\cdot)\|_2 \leq c = \sqrt{\frac{1}{2}\|x_0\|^2 + l(1 + l)\|\beta(\cdot)\|_{X_T}}.$$

Preuve.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère la partition de I donnée par $t^n_j = \frac{j}{n}T$, $(0 \leq j \leq n)$.

Nous allons commencer par la construction, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, d'une suite finie d'éléments de H, $\{x^n_j, j = 0, \cdots, n\}$ avec $x^n_0 = x_0$ et $x^n_n = 0$, et une suite finie d'applications u^n_j de $\mathrm{W}^{2,2}([0, t^n_j], H)$, $j = 1, \cdots, n$, solutions des problèmes

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in A(u(t)) + f(t, x^n_j) & \text{p.p. sur }]0, t^n_j[\\ u(0) = x_0, \quad u(t^n_j) = x^n_j. \end{cases}$$

Etape 1. Construction des suites.

Nous procédons par récurrence. On pose $x^n_n = 0$, alors par l'hypothèse 2., pour tout $t \in I$ on a

$$\left\|f(t, x^n_n)\right\| \leq \beta(t),$$

et puisque $\beta(\cdot) \in \mathrm{L}^2(I, \mathbb{R})$, alors $f(\cdot, x^n_n) \in \mathrm{L}^2(I, H)$.

On note par $u_n^n(\cdot) \in \mathrm{W}^{2,2}(I, H)$ la solution (forte) du problème

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in A(u(t)) + f(t, x_n^n) & \text{p.p. sur }]0,1[\\ u(0) = x_0, \quad u(t_n^n) = 0. \end{cases}$$

Posons alors $x_{n-1}^n = u_n^n(t_{n-1}^n)$ (on choisit n assez grand et vérifiant $u_n^n(t_{n-1}^n) \in D(A)$ puisque $u_n^n(t) \in D(A)$ p.p. sur I). Alors, toujours par l'hypothèse 2., pour tout $t \in [0, t_{n-1}^n]$ on a

$$\left\| f(t, x_{n-1}^n) \right\| \leq \beta(t)(1 + \|x_{n-1}^n\|),$$

d'où $f(\cdot, x_{n-1}^n) \in \mathrm{L}^2([0, t_{n-1}^n], H)$. Donc l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in A(u(t)) + f(t, x_{n-1}^n) & \text{p.p. sur }]0, t_{n-1}^n[\\ u(0) = x_0, \quad u(t_{n-1}^n) = x_{n-1}^n, \end{cases}$$

admet une solution forte dans $\mathrm{W}^{2,2}([0, t_{n-1}^n], H)$ notée $u_{n-1}^n(\cdot)$.

Maintenant, on suppose que $\{x_j^n,\ j = i+1, \cdots, n\}$ et $\{u_j^n,\ j = i+1, \cdots, n\}$ $(1 \leq i \leq n-1)$ sont définis de façon similaire.

On pose $x_i^n = u_{i+1}^n(t_i^n)$, alors par l'hypothèse 2., pour tout $t \in [0, t_i^n]$ on a

$$\|f(t, x_i^n)\| \leq \beta(t)(1 + \|x_i^n\|),$$

d'où $f(\cdot, x_i^n) \in \mathrm{L}^2([0, t_i^n], H)$. Donc l'inclusion

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in A(u(t)) + f(t, x_i^n) & \text{p.p. sur }]0, t_i^n[\\ u(0) = x_0, \quad u(t_i^n) = x_i^n, \end{cases}$$

admet une solution forte dans $\mathrm{W}^{2,2}([0, t_i^n], H)$ notée $u_i^n(\cdot)$.

De cette façon, on construit $(x_1^n, u_1^n(\cdot)), \cdots, (x_n^n, u_n^n(\cdot))$ tels que, pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, $u_j^n(\cdot) \in \mathrm{W}^{2,2}([0, t_j^n], H)$, $u_j^n(0) = x_0$, $u_j^n(t_j^n) = u_{j+1}^n(t_j^n)$ et, pour presque tout $t \in]0, t_j^n[$

$$\ddot{u}_j^n(t) \in A(u_j^n)(t) + f\big(t, u_{j+1}^n(t_j^n)\big).$$

De plus, par l'hypothèse 2., pour tout $t \in [0, t_i^n]$

$$\left\| f\big(t, u_{j+1}^n(t_j^n)\big) \right\| \leq \beta(t)\big(1 + \|u_{j+1}^n(t_j^n)\|\big).$$

Etape 2. Définition de la suite $(u_n(\cdot))$.

On définit l'application $u_n(\cdot) : I \to H$ comme suit. On pose $u_n(0) = x_0$ et

$$u_n(t) = u_{j+1}^n(t), \qquad \text{si } t \in]t_j^n, t_{j+1}^n](j = 0, \cdots, n-1). \tag{4.3.1}$$

Soit $\theta_n(\cdot) : I \to I$ définie par

$$\theta_n(t) := \begin{cases} t_{j+1}^n & \text{si } t \in]t_j^n, t_{j+1}^n] \ (j = 0, \cdots, n-1) \\ t_1^n & \text{si } t = 0. \end{cases} \tag{4.3.2}$$

Avec ces notations, on a par construction, $u_n(T) = 0$, et pour presque tout $t \in]0, 1[$

$$\ddot{u}_n(t) \in A(u_n(t)) + f\big(t, u_n(\theta_n(t))\big), \tag{4.3.3}$$

et pour tout $t \in I$

$$\big\| f\big(t, u_n(\theta_n(t))\big) \big\| \leq \beta(t)\big(1 + \|u_n(\theta_n(t))\|\big). \tag{4.3.4}$$

Etape 3. Montrons que $(u_n(\cdot))$ est bornée dans $\mathcal{C}(I, H)$.

Par (4.3.3), pour presque tout $t \in]0, T[$, il existe $y_t^{(n)} \in A(u_n(t))$ telle que

$$\ddot{u}_n(t) = y_t^{(n)} + f\big(t, u_n(\theta_n(t))\big),$$

En multipliant par $u_n(t)$ on trouve

$$\langle \ddot{u}_n(t), u_n(t) \rangle = \langle y_t^{(n)}, u_n(t) \rangle + \Big\langle f\big(t, u_n(\theta_n(t))\big), u_n(t) \Big\rangle. \tag{4.3.5}$$

Mais

$$\frac{d^2}{dt^2}\|u_n(t)\|^2 = 2\frac{d}{dt}\langle \dot{u}_n(t), u_n(t) \rangle = 2\langle \ddot{u}_n(t), u_n(t) \rangle + 2\|\dot{u}_n(t)\|^2.$$

Donc

$$\frac{d^2}{dt^2}\|u_n(t)\|^2 - \|\dot{u}_n(t)\|^2 = \langle y_t^{(n)}, u_n(t) \rangle + \Big\langle f\big(t, u_n(\theta_n(t))\big), u_n(t) \Big\rangle.$$

Alors, par la monotonie de A et le fait que $0 \in A(0)$ on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\|u_n(t)\|^2 \geq \Big\langle f\big(t, u_n(\theta_n(t))\big), u_n(t) \Big\rangle + \|\dot{u}_n(t)\|^2 \quad \text{p.p. sur }]0, T[. \tag{4.3.6}$$

En négligeant, pour le moment, le dernier terme dans le côté droit de (4.3.6) et en intégrant sur $[t, T]$, $0 < t < T$, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(T)\|^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2 \geq \int_t^T \Big\langle f\big(s, u_n(\theta_n(s))\big), u_n(s) \Big\rangle ds.$$

Puisque $\dfrac{d}{dt}\|u_n(T)\|^2 = 0$, on trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2 \leq -\int_t^T \Big\langle f\big(s, u_n(\theta_n(s))\big), u_n(s)\Big\rangle ds.$$

Une nouvelle intégration, cette fois sur $[0,t]$ $(0 < t < T)$, donne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[\|u_n(t)\|^2 - \|x_0\|^2] &\leq -\int_0^t \left(\int_s^T \langle f\big(\tau, u_n(\theta_n(\tau))\big), u_n(\tau)\rangle d\tau\right) ds \\
&\leq \int_0^T \left(\int_s^T \big\|f\big(\tau, u_n(\theta_n(\tau))\big)\big\| \cdot \|u_n(\tau)\| d\tau\right) ds \\
&\leq \int_0^T \tau \big\|f\big(\tau, u_n(\theta_n(\tau))\big)\big\| \cdot \|u_n(\tau)\| d\tau \\
&= \int_0^T \tau\beta(\tau)\big(1 + \|u_n(\theta_n(\tau))\|\big) \cdot \|u_n(\tau)\| d\tau \\
&\leq \sup_{0\leq s\leq T} \|u_n(s)\| \int_0^T \tau\beta(\tau) d\tau + \sup_{0\leq s\leq T} \|u_n(s)\|^2 \int_0^T \tau\beta(\tau) d\tau \\
&= \|u_n(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \|\beta(\cdot)\|_{X_T} + \|u_n(\cdot)\|_{\mathcal{C}}^2 \|\beta(\cdot)\|_{X_T}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\|u_n(\cdot)\|_{\mathcal{C}}^2 \leq \frac{1}{1 - 2\|\beta(\cdot)\|_{X_T}}\Big(\|x_0\|^2 + 2\|\beta(\cdot)\|_{X_T}\|u_n(\cdot)\|_{\mathcal{C}}\Big),$$

ou bien

$$\|u_n(\cdot)\|_{\mathcal{C}}^2 - \frac{2\|\beta(\cdot)\|_{X_T}}{1 - 2\|\beta(\cdot)\|_{X_T}}\|u_n(\cdot)\|_{\mathcal{C}} - \frac{1}{1 - 2\|\beta(\cdot)\|_{X_T}}\|x_0\|^2 \leq 0.$$

En posant $a = \dfrac{\|\beta(\cdot)\|_{X_T}}{1 - 2\|\beta(\cdot)\|_{X_T}} > 0$ et $b = \dfrac{1}{1 - 2\|\beta(\cdot)\|_{X_T}}\|x_0\|^2 \geq 0$, et puisque $\Delta = a^2 + b > 0$, le polynôme $r^2 - ar - b$ admet deux racines distinctes

$$r_1 = a - \sqrt{\Delta} < 0 \quad \text{et} \quad r_2 = a + \sqrt{\Delta} = l > 0.$$

D'où

$$\|u_n(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \leq l, \qquad \text{pour tout } n. \tag{4.3.7}$$

On remarque que l est indépendant de n.

Etape 4. Montrons que $(t^{1/2}\dot{u}_n(\cdot))$ est bornée dans $\mathrm{L}^2(I, H)$.

En multipliant (4.3.3) par $tu_n(t)$, par la monotonie de A et le fait que $0 \in A(0)$, pour presque tout $t \in]0, T[$

$$\langle \ddot{u}_n(t), tu_n(t)\rangle \geq t\Big\langle f\big(t, u_n(\theta_n(t))\big), u_n(t)\Big\rangle.$$

Une intégration par parties sur $[0,T]$ donne

$$\langle tu_n(t), \dot{u}_n(t)\rangle\Big|_0^T - \int_0^T \langle u_n(t), \dot{u}_n(t)\rangle dt - \int_0^T t\|\dot{u}_n(t)\|^2 dt \geq \int_0^T t\Big\langle f\big(t, u_n(\theta_n(t))\big), u_n(t)\Big\rangle dt.$$

Puisque $u_n(T) = 0$ et $\langle u_n(t), \dot{u}_n(t)\rangle = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2$, on obtient

$$-\frac{1}{2}\|u_n(t)\|^2\Big|_0^T - \int_0^T t\|\dot{u}(t)\|^2 dt \geq \int_0^T t\Big\langle f\big(t, u_n(\theta_n(t))\big), u_n(t)\Big\rangle dt.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|t^{1/2}\dot{u}_n(\cdot)\|_2^2 &= \int_0^T t\|\dot{u}(t)\|^2 dt \\
&\leq \frac{1}{2}\|x_0\|^2 + \int_0^T t\big\|f\big(t, u_n(\theta_n(t))\big)\big\| \cdot \|u_n(t)\| dt \\
&\leq \frac{1}{2}\|x_0\|^2 + \int_0^T t\beta(t)\big(1 + \|u_n(\theta_n(t))\|\big) \cdot \|u_n(t)\| dt \\
&\leq \frac{1}{2}\|x_0\|^2 + l(1+l)\|\beta(\cdot)\|_{X_T},
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\|t^{1/2}\dot{u}_n(\cdot)\|_2 \leq c, \tag{4.3.8}$$

où $c = \sqrt{\frac{1}{2}\|x_0\|^2 + l(1+l)\|\beta(\cdot)\|_{X_T}}$ est indépendant de n.

Etape 5. Convergence de $(u_n(\cdot))$.

Grâce à la monotonie de A, il découle de (4.3.3) que pour $n, m \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $t \in]0,T[$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\|u_n(t) - u_m(t)\|^2 &\geq \Big\langle f\big(t, u_n(\theta_n(t))\big) - f\big(t, u_m(\theta_m(t))\big), u_n(t) - u_m(t)\Big\rangle \\
&+ \|\dot{u}_n(t) - \dot{u}_m(t)\|^2
\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

D'où

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\|u_n(t) - u_m(t)\|^2 \geq \Big\langle f\big(t, u_n(\theta_n(t))\big) - f\big(t, u_m(\theta_m(t))\big), u_n(t) - u_m(t)\Big\rangle.$$

Une intégration sur $[t,T]$, $0 < t < T$, donne (puisque $u_n(T) = u_m(T) = 0$)

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t) - u_m(t)\|^2 \geq \int_t^T \big\|f\big(\tau, u_n(\theta_n(\tau))\big) - f\big(\tau, u_m(\theta_m(\tau))\big)\big\| \cdot \|u_n(\tau) - u_m(\tau)\| d\tau.$$

De (4.3.7), pour tout $t \in [0,T]$ et tout $n \geq n_0$ on a

$$u_n(t) \in \overline{\mathrm{B}}_H(0,l) \subset \mathrm{B}_H(0,2l).$$

Donc, par hypothèse, il existe une fonction positive $k(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I,\mathbb{R})$ telle que $\|k(\cdot)\|_{X_T} < \frac{1}{2}$ et $f(t,\cdot)$ est $k(t)$-Lipschitzienne sur $\mathrm{B}_H(0,2l)$. Alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)-u_m(t)\|^2 \leq \int_t^T k(\tau)\|u_n(\theta_n(\tau))-u_m(\theta_m(\tau))\|\cdot\|u_n(\tau)-u_m(\tau)\|d\tau.$$

Une nouvelle intégration sur $[0,t]$, donne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u_n(t)-u_m(t)\|^2 &\leq \int_0^t\int_s^T k(\tau)\|u_n(\theta_n(\tau))-u_m(\theta_m(\tau))\|\cdot\|u_n(\tau)-u_m(\tau)\|d\tau.ds\\
&\leq \int_0^T\int_s^T k(\tau)\|u_n(\theta_n(\tau))-u_m(\theta_m(\tau))\|\cdot\|u_n(\tau)-u_m(\tau)\|d\tau.ds\\
&\leq \int_0^T \tau k(\tau)\|u_n(\theta_n(\tau))-u_m(\theta_m(\tau))\|\cdot\|u_n(\tau)-u_m(\tau)\|d\tau.\\
&\leq \int_0^T \tau k(\tau)(\|u_n(\theta_n(\tau))-u_n(\tau)\|+\|u_m(\theta_m(\tau))-u_m(\tau)\|)\cdot\|u_n(\tau)-u_m(\tau)\|d\tau\\
&+ \int_0^T \tau k(\tau)\|u_n(\tau)-u_m(\tau)\|^2d\tau. \qquad (4.3.10)
\end{aligned}$$

En notant $M_{mn} = \sup_{t\in I}\|u_n(t)-u_m(t)\| = \|u_n(\cdot)-u_m(\cdot)\|_{\mathcal{C}}$, on obtient de (4.3.10)

$$\frac{1}{2}M_{mn}^2 \leq M_{mn}\int_0^T \tau k(\tau)\Big(\|u_n(\theta_n(\tau))-u_n(\tau)\|+\|u_m(\theta_m(\tau))-u_m(\tau)\|\Big)d\tau + \|k(\cdot)\|_{X_T}M_{mn}^2,$$

d'où

$$\begin{aligned}
M_{mn}^2 &\leq \frac{2M_{mn}}{1-2\|k(\cdot)\|_{X_T}}\left(\int_0^T \tau k(\tau)\Big(\|u_n(\theta_n(\tau))-u_n(\tau)\|+\|u_m(\theta_m(\tau))-u_m(\tau)\|\Big)d\tau\right)\\
&\leq \frac{2M_{mn}}{1-2\|k(\cdot)\|_{X_T}}\left(\int_0^T \tau k(\tau)\Big(\int_\tau^{\theta_n(\tau)}\|\dot{u}_n(s)\|ds+\int_\tau^{\theta_m(\tau)}\|\dot{u}_m(s)\|ds\Big)d\tau\right)\\
&\leq \frac{2M_{mn}}{1-2\|k(\cdot)\|_{X_T}}\left(\int_0^T \sqrt{\tau}k(\tau)\left(\int_\tau^{\theta_n(\tau)}\sqrt{\tau}\|\dot{u}_n(s)\|ds+\int_\tau^{\theta_m(\tau)}\sqrt{\tau}\|\dot{u}_m(s)\|ds\right)d\tau\right),
\end{aligned}$$

puisque $\tau \leq s$, et donc $\sqrt{\tau} \leq \sqrt{s}$, alors on trouve en utilisant l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
M_{mn}^2 &\leq \frac{2M_{mn}}{1-2\|k(\cdot)\|_{X_T}} \left(\int_0^T \sqrt{\tau} k(\tau) \left(\int_\tau^{\theta_n(\tau)} \sqrt{s}\|\dot{u}_n(s)\|ds + \int_\tau^{\theta_m(\tau)} \sqrt{s}\|\dot{u}_m(s)\|ds \right) d\tau \right) \\
&\leq \frac{2M_{mn}}{1-2\|k(\cdot)\|_{X_1}} \left(\int_0^T \sqrt{\tau} k(\tau) \left(\int_0^T \mathbb{1}_{[\tau,\theta_n(\tau)]}(s)(\sqrt{s}\|\dot{u}_n(s)\|)ds \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \int_0^T \mathbb{1}_{[\tau,\theta_m(\tau)]}(s)(\sqrt{s}\|\dot{u}_m(s)\|)ds \right) d\tau \right) \\
&\leq \frac{2M_{mn}}{1-2\|k(\cdot)\|_{X_T}} \left(\int_0^T \sqrt{\tau} k(\tau) \left(\sqrt{\theta_n(\tau)-\tau}\|t^{1/2}\dot{u}_n(\cdot)\|_2 + \sqrt{\theta_m(\tau)-\tau}\|t^{1/2}\dot{u}_m(\cdot)\|_2 \right) d\tau \right) \\
&\leq \frac{2cM_{mn}}{1-2\|k(\cdot)\|_{X_T}} \left(\int_0^T \sqrt{\tau} k(\tau) \left(\sqrt{\theta_n(\tau)-\tau} + \sqrt{\theta_m(\tau)-\tau} \right) d\tau \right).
\end{aligned}$$

D'où

$$M_{mn} \leq \frac{2c}{1-2\|k(\cdot)\|_{X_T}} \left(\int_0^T \sqrt{\tau} k(\tau) \left(\sqrt{\theta_n(\tau)-\tau} + \sqrt{\theta_m(\tau)-\tau} \right) d\tau \right).$$

Puisque $\theta_n(t) \to t$ quand $n \to \infty$ pour tout $t \in I$ et comme, de plus, $k(\cdot) \in X'_T$ et

$$\sqrt{t} k(t) \left(\sqrt{\theta_n(t)-t} + \sqrt{\theta_m(t)-t} \right) \leq 2\sqrt{t} k(t),$$

pour tout $t \in I$, il résulte du théorème de la convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{n,m\to\infty} \sqrt{t} k(t) \left(\sqrt{\theta_n(t)-t} + \sqrt{\theta_m(t)-t} \right) = 0.$$

Ceci donne

$$\lim_{n,m\to\infty} \|u_n(\cdot) - u_m(\cdot)\|_{\mathcal{C}} = 0. \tag{4.3.11}$$

Donc, $(u_n(\cdot))$ est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}(I,H), \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$, par conséquent elle converge vers une application $u(\cdot)$, et en particulier $u(0) = x_0$ et $u(T) = 0$.

De la convergence uniforme de $(u_n(\cdot))$ vers $(u(\cdot))$, et puisque $\theta_n(t) \to t$ pour tout $t \in I$, alors

$$u_n(\theta_n(t)) \to u(t) \qquad \text{pour tout } \ t \in I. \tag{4.3.12}$$

De plus, de (4.3.7), on trouve que $\|u(\cdot)\| \leq l$. Donc

$$\begin{aligned}
\left\| f\big(\cdot, u_n(\theta_n(\cdot))\big) - f\big(\cdot, u(\cdot)\big) \right\|_{X'_T} &= \int_0^T \sqrt{t} \left\| f\big(t, u_n(\theta_n(t))\big) - f\big(t, u(t)\big) \right\| dt \\
&\leq \int_0^T \sqrt{t} k(t) \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| dt.
\end{aligned}$$

Mais $\sqrt{t}k(t)\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| \leq 2l\sqrt{t}k(t)$, pour tout $t \in I$ et $k(\cdot) \in X'_T$, il s'ensuit par le théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{n\to\infty} \big\|f\big(\cdot, u_n(\theta_n(\cdot))\big) - f\big(\cdot, u(\cdot)\big)\big\|_{X'_T} = 0,$$

c'est à dire, en posant $g_n(\cdot) = f\big(\cdot, u_n(\theta_n(\cdot))\big)$, la suite $(g_n(\cdot))$ converge vers $f\big(\cdot, u(\cdot)\big)$ dans X'_T.

Etape 6. Il reste à montrer que la suite $(t^{1/2}\dot{u}_n(\cdot))$ converge dans $\mathrm{L}^2(I, H)$.

Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, en multipliant (4.3.9) par t et en intégrant sur $[0, T]$, on trouve

$$\int_0^T \frac{t}{2}\left(\frac{d^2}{dt^2}\|u_n(t) - u_m(t)\|^2\right) dt \geq -\int_0^T t\|f(t, u_n(\theta_n(t))) - f(t, u_m(\theta_m(t)))\| \cdot \|u_n(t) - u_m(t)\| dt + \int_0^T t\|\dot{u}_n(t) - \dot{u}_m(t)\|^2 dt. \quad (4.3.13)$$

Une intégration par parties du côté gauche donne

$$\begin{aligned}
\int_0^T \frac{t}{2}\left(\frac{d^2}{dt^2}\|u_n(t) - u_m(t)\|^2\right) dt &= \frac{t}{2}\left(\frac{d}{dt}\|u_n(t) - u_m(t)\|^2\right)\Big|_0^T - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\|u_n(t) - u_m(t)\|^2 dt \\
&= t\langle \dot{u}_n(t) - \dot{u}_m(t), u_n(t) - u_m(t)\rangle\Big|_0^T \\
&- \frac{1}{2}\|u_n(t) - u_m(t)\|^2\Big|_0^T \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'où, par (4.3.13), on trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^T t\|\dot{u}_n(t) - \dot{u}_m(t)\|^2 dt &\leq \int_0^T t\big\|f\big(t, u_n(\theta_n(t))\big) - f\big(t, u_m(\theta_m(t))\big)\big\| \cdot \|u_n(t) - u_m(t)\| dt \\
&\leq \left(\int_0^T T\Big(\big\|f\big(t, u_n(\theta_n(t))\big)\big\| + \big\|f\big(t, u_m(\theta_m(t))\big\|\Big) dt\right)\|u_n(\cdot) - u_m(\cdot)\|_{\mathcal{C}}.
\end{aligned} \quad (4.3.14)$$

De plus par (4.3.7), pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$, on a

$$\big\|f(t, u_n(\theta_n(t)))\big\| \leq \beta(t)\big(1 + \|u_n(\theta_n(t))\|\big) \leq (1 + l)\beta(t),$$

et donc

$$\int_0^T t\|\dot{u}_n(t) - \dot{u}_m(t)\|^2 dt \leq T(1 + l)\|u_n(\cdot) - u_m(\cdot)\|_{\mathcal{C}}. \quad (4.3.15)$$

Par (4.3.11), on a

$$\lim_{n,m\to\infty} \|u_n(\cdot) - u_m(\cdot)\|_{\mathcal{C}} = 0.$$

Comme le côté gauche de l'inégalité (4.3.14) est positif, on obtient

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_0^T t\|\dot{u}_n(t) - \dot{u}_m(t)\|^2 dt = 0.$$

Il s'ensuit que $(t^{1/2}\dot{u}_n(\cdot))$ est une suite de Cauchy de $\mathrm{L}^2(I, H)$, donc elle est convergente vers une application $g(\cdot) \in \mathrm{L}^2(I, H)$.

Finalement, par (4.3.8) on trouve

$$\|g(\cdot)\|_2 \leq c.$$

$\square$

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous étions face à trois problématiques.

La première concerne le processus de la rafle perturbé du premier ordre, où, dans le cadre Hilbertien, nous avons donné des résultats d'existence dans le cas où C est seulement en fonction du temps t.

Nos perspectives pour cette partie, sont de généraliser ces résultats aux deuxième ordre, aux espaces de Banach, et au cas où C dépend de l'état.

La deuxième partie a été consacrée aux problèmes non linéaires, où nous avons donné deux résultats d'existence, le premier concerne le cas où la perturbation est en fonction de u et $\dot{u}$, et est somme de deux multiapplications l'une s.c.s et l'autre s.c.i. La perturbation vérifie aussi la condition de Hartman généralisée.

Dans l'autre cas la perturbation est seulement en fonction de u, semicontinue mixte et vérifie la condition de Hartman, et là, comme perspectives, c'est d'essayer de démontrer le même résultat quand F dépend aussi de $\dot{u}$ et vérifie la condition de Hartman généralisée.

Finalement, la troisième problématique a trait à la construction d'une suite de fonctions $(u_n(\cdot)) \subset \mathrm{X}^{1,2}$ convergeant dans $\mathcal{C}(I, H)$ vers une fonction u qui peut être considérée comme solution faible d'une inclusion différentielle du second ordre avec conditions aux limites, perturbée par une fonction à deux variables, mais cette solution n'a pas assez de régularités. Alors, ce que nous prévoyons dans des travaux futurs, c'est d'essayer de trouver des solutions fortes, et sous des conditions plus générales sur f, trouver des solutions faibles pour le même problème comme limites de solutions fortes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. P. Aubin et A. Cellina, Differential inclusions, set-valued maps and viability theory, *Springer-Verlag, Berlin* 1984.

[2] D. Azzam-Laouir, Contribution à l'étude de problèmes d'évolution du second ordre, *thèse de doctorat d'état, Constantine* Juin 2003.

[3] D. Azzam-Laouir, C. Castaing et L. Thibault, Three boundary value problems for second order differential inclusions in Banach spaces, *Control Cybernet.* 31, No. 3 (2002) 659–693.

[4] D. Azzam-Laouir et S. Lounis, Nonconvex perturbations of second order maximal monotone differential inclusions, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 35(2) (2010) 305–317.

[5] D. Azzam-Laouir et A. Makhlouf, Nonlinear problems for second order differential inclusions with mixed semicontinuous perturbation, *article soumis pour publication.*

[6] D. Azzam-Laouir, A. Makhlouf et L. Thibault, On perturbed sweeping process. *Applicable Analysis, DOI : 10.1080/00036811.2014.1002482* (2015).

[7] V. Barbu, A class of boundary value problems for second order abstract differential equations, *J. Fac. Sci. Tokyo Sect. I* 19 (1972) 295–319.

[8] V. Barbu, Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces, *Noordhoff, Leyden* 1976.

[9] H. Benabdellah, Existence of Solutions to the Nonconvex Sweeping Process, *J. Differ. Equa* 164 (2000) 286–295.

[10] H. Benabdellah et A. Faik, Perturbations convexes et non convexes des équations d'évolution, *Port. Math.* 53 (1996) 187–208.

[11] M. Bounkhel, Regularity concepts in nonsmooth analysis : Theory and Applications. *Springer. New York Dordrecht Heidelberg London* 2012.

[12] M. Bounkhel et L. Thibault, On various notions of regularity of sets. *Nonlinear Anal., Theory, Methods and Applications* 48(2) (2002) 223–246 .

[13] M. Bounkhel et L. Thibault, Nonconvex sweeping process and prox-regularity in Hilbert space. *J. Nonlinear Convex Anal.* 6(2) (2005) 359–374.

[14] N. Bourbaki, Intégration : Chapitre 1 à 4, *N. Bourbaki et Springer-Verlag Berlin Heidelberg* 2007.

[15] H. Brézis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, *North-Holland, Amsterdam* 1973.

[16] R.E. Bruck, Periodic forcing of solutions of boundary value problem for a second order differential equation in Hilbert space, *Set-Valued Var. Anal.* 22 (2014) 521–531.

[17] F. H. Clarke, Optimization and Nonsmooth Analysis, *John Wiley and Sons* 1983.

[18] C. Castaing, Equation différentielle multivoque avec contrainte sur l'état dans les espaces de Banach, *Sém. Anal. Convexe Montpellier*, Exp 13 (1978).

[19] C. Castaing, T.X. Duc Ha et M. Valadier, Evolution equations governed by the sweeping process, *Set-Valued Anal.* 1 (1993) 109–139.

[20] C. Castaing et M. Valadier, Convex analysis and measurable multifunctions. *Lectures Notes in Math.*, 580 *Springer-Verlag, Berlin* 1977.

[21] C. Castaing et A. G. Ibrahim, Functional differential inclusion on closed sets in Banach spaces, *ADV. Math. Econ.* 2 (2000) 21–39.

[22] C. Castaing et M.D.P. Monteiro Marques, A multivalued version of Scorza-Dragoni theorem with an application to normal integrands, *Bull. Pol. Acad. Sci. Mathematics,* 42 (1994) 133–140.

[23] C. Castaing et M.D.P. Monteiro Marques, Evolution problems associated with nonconvex closed moving sets with bounded variation, *Portugal. Math.* 53 (1996) 73–87.

[24] C. Castaing, A. Salvadori et L.Thibault, Functinal evolution equations governed by nonconvex sweeping process, *J. Nonlinear Convex Anal.* 2 (2001) 217–241.

[25] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern et P. R. Wolenski, Nonsmooth Analysis and Control Theory, *Springer-Verlag, New-York, inc.* 1998.

[26] F.H. Clarke, R.L. Stern et P.R. Wolenski, Proximal smoothness and the lower C2 property, *J. Convex Anal.* 2 (1/2) (1995) 117–144.

[27] F.H. Clarke, Optimization et Nonsmooth Analysis, *John Wiley and Sons* 1983.

[28] G. Colombo et V.V. Goncharov, The sweeping processes without convexity, *Set- Valued Anal.* 7 (1999) 357–374.

[29] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, *Springer Verlag* 1985.

[30] K. Deimling, Multivalued Differential Equations, *Walter de Gruyter, Berlin, New York* 1992.

[31] Z. Denkowski, S. Migórski,Nikolaos et S. Papageorgiou, An Introduction to Nonlinear Analysis : Applications, Volume 2, *Walter de Gruyter, Berlin* 1994.

[32] N. Dinculeanu, Vector measures, *VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin* 1967.

[33] J. F. Edmond et L. Thibault, BV solutions of nonconvex sweeping process differential inclusion with perturbation, *J. Differ. Equ* 226 (2006) 135–179.

[34] J. F. Edmond et L. Thibault, Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process. *Mathematical Programming* 6 (2005) 347–373.

[35] J. F. Edmond, Problèmes d'évolution associés à des ensembles prox-réguliers. Inclusions et intégration de sous-différentiels, *Thèse de doctorat, Université Montpellier II, France* 2004.

[36] L.C. Evans, Partial differential equations, *volume 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, Second edition* 2010.

[37] M. E. Filippakis et N.S. Papageorgiou, Multivalues p-Lienard systems, *Fixed Point Theory and Applications* 2 (2004) 71–80.

[38] L. Gasiński et N.S. Papageorgiou, Nonlinear second-order multivalued boundary value problems, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* 113 (2003) 293–320.

[39] A. Granas et J. Dugundji, Fixed Point Theory, *Springer-Verlag New York, Inc.* 2003.

[40] C. Henry, An existence theorem for a class of differential inclusions with multivalued right-hand side, *J. Math. Anal. Appl.* 41 (1973) 179–186.

[41] F. Hiai et H. Umegaki, Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions, *J. Multivariate Anal.* 7 (1977) 149–182.

[42] S. Hu et N.S. Papageorgiou, Handbook of Multivalued Analysis, Volume I : Theory, *Kluwer, Dordrecht, The Netherlands* 1997.

[43] H. Khatibzadeh et G. Moroşanu, Strong and weak solutions order differential inclusions governed by monotone operators, *Set-Valued Var. Anal* 22 (2014) 521–531.

[44] M. Kisieliwicz, Differential inclusion and optimal control, *PWN-Polish Scientific Publishers, Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, Boston, London* (1991).

[45] S. Kyritsi, N. Matzakos et N.S. Papageorgiou, Nonlinear boundary value problems for second order differential inclusions, *Czechoslovak Math. J.* 55 (2005) 545–579.

[46] R. Manasevich et J. Mawhin, Periodic solutions for nonlinear systems with p-Laplacian like operators, *J. Differential Equations* 145 (1998) 367–393.

[47] M. Marcus et V. Mizel, Absolute continuity on tracks and mappings of Sobolev spaces, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 45 (1972) 294–320.

[48] M. D. P, Monteiro Marques, Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems, Shocks and dry friction, *Birkhäuser, Basel* 1993.

[49] J. J. Moreau, Evolution problem associated with amoving convex set in a Hilbert space. *J. Differ. Equ* 26 (1977) 347–374.

[50] J. J. Moreau, Rafle par un convexe variable, 1$^{\text{ère}}$ partie, *Sém. d'Analyse Convexe, Montpellier* Exp. 15 (1971).

[51] J. J. Moreau, Sur l'évolution d'un système élasto-viscoplastique, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 273 (1971) A118-A121.

[52] F. Papalini, Solvability of strongly nonlinear boundary value problems for second order differential inclusions, *Nonlinear Anal.* 66 (2007), 2166–2189.

[53] R.A. Poliquin, R.T. Rockafellar et L. Thibault, Local differentiability of ditance functions, *Trans. Amer. Math. Soc. 352* 11 (2000) 5231–5249.

[54] V. S. Pugachev et I. N. Sinitsyn, Lectures on Fonctional Analysis and Applications, *World scientific, Singapore,* 1999.

[55] L. Thibault, Sweeping Process with regular and nonregular sets, *J. Diff. Equations* 193(1) (2003) 1–26.

[56] J. V. Tiel, Convex analysis. An introductory text, *Wiley, New York* 1984.

[57] A. A. Tolstonogov, Solutions of a differential inclusion with unbouded right-hand side. (Russian) *Sibirsk. Mat. Zh.* 29(5), 212–225, 241 translation in *Siberian. Math. J.* 29(5) (1988) 857–868.

[58] M. Valadier, Entrainement uniteral, lignes de descente, fonction lipschitziennes non pathologiques, *C.R.A.S Paris,* 308(I) (1989) 1241–1244.

[59] M. Valadier, Lignes de descente de fonctions lipschitziennes non pathologiques, *Sém. d'Anal. Convexe, Montpellier,* exposé N° 9, 1988.

[60] D. Wagner. Survey of measurable selection theorems. *SIAM J. Control Optim.* 15 (1977) 859–903.

[61] Q. Zhang et G. Li. Nonlinear boundary value problems for second order differential inclusions. Nonlinear Analysis, 70 (2009) 3390–3406.

الملخص. في هذه الأطروحة، نحن مهتمون بدراسة وجود الحلول لبعض اشكاليات التطور و تنقسم إلى ثلاثة أجزاء. فيما يتعلق بالجزء الأول، فهو متمثل في عملية المسح بتشويش بمجموع تطبيق متعدد القيم شبه مستمر من الاعلى و تطبيق لبشيتزي، مرتبط بمجموعات r-شبه منتظمة في فضاء هيلبرت منفصل حقيقي. كما نثبت وجود الحلول لعملية المسح بتشويش مع تأخر. في الجزء الثاني، في فضاء بعده منته، نقدم نتيجتين لوجود الحلول للاحتواءات التفاضلية غير الخطية من الدرجة الثانية تضم مؤثر شبيه بـp-لبلاصي، مؤثرأعظمي رتيب، تطبيق متعدد القيم بشروطمختلطةوشروطغيرخطية على الحدود. أخيرا، فيالجزءالثالث، قمنا بدراسة وجود الحلول الضعيفة للاحتواءات التفاضلية من الدرجة الثانية مع شروط على الحدود موجه بمؤثر أعظمي رتيب و تطبيق لبشيتزي.

الكلمات المفتاحية. اشكالية التطور، تطبيقات متعددة القيم،مجموعة شبه منتظمة، شرط هارتمان، شرط هارتمان موسع، مؤثرأعظمي رتيب، نقطة ثابتة، p-لبلاصي ، حل ضعيف.

Résumé. Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude de l'existence de solutions pour certains problèmes d'évolution. Elle est répartie en trois parties. Dans la première partie, il s'agit du processus de la rafle perturbé par somme d'une multiapplication scalairement s.c.s et une application lipschitzienne, associés à des ensembles r-prox-réguliers dans un espace de Hilbert réel séparable. On établit aussi un résultat d'existence de solutions pour les processus de la rafle perturbés avec retard.Dans la deuxième partie, et dans un espace de dimension finie, on présente deux résultats d'existence de solutions pour des inclusions différentielles non linéaires du second ordre comportant un opérateur semblable au p-Laplacien, un opérateur maximal monotone, une multiapplication avec conditions mixtes et des conditions aux limites non linéaires.Finalement, dans la troisième partie, ona étudié l'existence de solutions faibles pour des inclusions différentielles du second ordre avec conditions aux limites, et gouvernées par un opérateur maximal monotone et une application lipschitzienne.

Mots clés. Problème d'évolution, multiapplication, ensemble prox-régulier, condition de Hartman, condition de Hartman généralisée, opérateur maximal monotone, point fixe, p-Laplacien, solution faible.

Abstract. In this thesis, we are interested by the study of existence of solutions for someevolutionproblems.It is divided into three parts.The first part concerns a sweeping process perturbed by a sum of a scalarly upper semicontinuous set-valued map and a Lipschitz single-valued map, associated with r-prox-regular sets in a real separable Hilbert space. In addition, we establish a result concerning existence of solutions for a first order perturbed sweeping process with delay. In the second part, and in a finite dimension space, we present two results of existence of solutions for nonlinear second order differential inclusions including a p-Laplacian-like operator, a maximal monotone operator, set-valued map with mixed conditions and nonlinear boundary conditions. Finally, in the third part, we studied the existence of weak solutions for a second order differential inclusion with boundary conditions and governed by a maximal monotone operator and a Lipschitz map.

Keywords. Evolution Problem, set-valued map, prox-regular set, Hartman condition, generalized Hartman condition, maximal monotone operator, fixed point, p-Laplacian, weak solution.