République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : EDP et Applications.

Thème

Sur un problème d'évolution gouverné par un opérateur maximal monotone dépendant du temps

Présenté par

Bouchakour Roumaissa

Devant le jury composé de :

Président	:	Arroud Chemseddine	Maître de Conférences B	Université de Jijel
Encadreur	:	Kecis Ilyas	Maître de Conférences A	Université de Jijel
Co-Encadreur	:	Arroud Chemseddine	Maître de Conférences B	Université de Jijel
Examinateur	:	Haddad Tahar	Professeur	Université de Jijel

Promotion **2021/2022**

⁜ *Remerciements* ⁜

Tout d'abord et avant tout, je remercie *ALLAH* qui m'a donné la force, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et gratitude à nos estimés superviseurs, *Kecis* **Ilyas** et *Arroud* **Chems Eddine** , que je suis reconnaissante de m'avoir accordé une partie de leurs précieux temps, leurs soutiens et les conseils précieux qu'ils m'ont apportés.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail. *Arroud* **Chems Eddine**, qui me fait l'honneur de présider ce jury. **Haddad Tahar**, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier tous ceux qui se sont impliqués dans ce travail, directement ou indirectement et vous avez toute mon appréciation et mon respect.

A, TOUS, UN GRAND MERCI.

⁂ *Dédicaces* ⁂

Je dédie ce modeste travail

A mes très chers parents.

A mon frère, mes sœurs et ma grand-mère.

A toute ma famille.

A tous mes camarades de promotion avec lesquelles j'ai partagé ces années.

A tous ceux qui m'ont appris une lettre.

⁂ *Roumaissa*⁂

$\mathcal{R}$ésumé

Dans ce travaille, en utilisant la technique de régularisation de Moreau-Yosida, on établit l'existence de solutions dans un espace de Hilbert séparable pour un problème d'évolution régi par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps avec un domaine complet. Ce résultat est démontré sans aucune condition liée au pseudo distance de Vladimirov. Une application au processus de rafle implicite a été traitée également.

$\mathcal{A}$bstract

In this work, by using the Moreau-Yosida regularization technique, we establish the existence of solutions in Hilbert space for an evolution inclusions governed by time-dependent maximal monotone operators with a full domain, and without any assumptions concerning Vladimirov pseudo distance. The theoretical result is applied to prove the existence of solutions for some sweeping process with velocity constraint.

Table des matières

Notations générales

H	espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produit scalaire.
$\mathrm{Dom}\,(A)$	domaine de l'opérateur multivoque A.
A^{λ}	approximation de Yosida d'indice λ de A.
I	application d'identité.
$\mathcal{P}(H)$	ensemble des parties de H.
$\mathcal{P}_c(H)$	famille d'ensembles non-vides, fermés et convexes de H.
$\mathbb{R}_+$	ensemble des nombres réels positives.
ψ_C	fonction indicatrice de C.
f^*	conjuguée de Legendre-Fenchel.
$\partial f(x)$	sous-différentiel d'une fonction convexe f au point x.
$\mathrm{Int}\,(A)$	intérieur d'un ensemble A.
$\mathcal{R}(F)$	image de F.
$\sigma(X, X^*)$	topologie faible sur X.
X^*	dual topologique d'un espace vectoriel X.
$L^p([0,T]; H)$	espace des applications $f : [0,T] \to H$ telles que f^p est intégrable mesurable $(1 \leq p < \infty)$.
$AC([0,T]; H)$	ensemble des applications absolument continues.
$C([0,T]; H)$	espace de Banach des applications continues définies de $[0,T]$ dans H.
sup	supremum.
inf	infimum.
$x_n \to x$	convergence forte de x_n vers x.
$x_n \xrightarrow{w} x$	convergence faible de x_n vers x.
$x_n \rightharpoonup x$	convergence faible de x_n vers x.
K°	cône polaire de K.
$N(C(t); x)$	cône normal à l'ensemble C au point x au sens d'analyse convexe.
$T(C(t); x)$	cône tangent à C au point x au sens d'analyse convexe.
$\mathrm{Proj}\,_C(x)$	projection du point x sur l'ensemble C.

Introduction

La théorie des inclusions différentielles a fait de grands axes de recherche ces dernières années, notamment ses applications à la théorie du contrôle et aux inégalités variationnelles. Cette théorie a été introduite dans les années quarante pour l'étude des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

L'objectif de ce mémoire est de détailler l'article d'Emilio Vilches et Bao Tran Nguyen intitulé " Evolution inclusions governed by time-dependent maximal monotone operators with a full domain [25] ". Dans un espace de Hilbert séparable, les auteurs de ce dernier article ont étudié une inclusion différentielle gouvernée par un opérateur maximal monotone avec un domaine complet définie comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -A_t(x(t)) + f(t, x(t)) \text{ p.p } t \in [0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

Où $T > 0, A_t$ est un opérateur maximal monotone dépendant du temps et $f : [0, T] \times H \to H$ est une fonction donnée. Même si le problème (1) à été profondément étudié depuis longtemps, son importance s'est augmentée ces dernières années, grâce aux applications trouvées dans la mécanique des contacts et les circuits électriques [1, 14, 24] .

Le problème (1) a été étudié dans le cas stationnaire $A_t = A$ (voir [6, 7, 13]) en utilisant des approches différentes comme la régularisation de Moreau-Yosida et la discrétisation, le lecteur peut se référer à [22] pour plus de détails.

Avant les travaux de Vladimirov [26, 27], la majorité des contributions apportées dans cette direction ont été réalisées avec une famille d'opérateurs ayant un domaine constant, i.e., $\overline{\text{Dom}\,(A_t)} = D$ sauf quelques exceptions lorsque A_t est le sous-différentiel d'une fonction convexe ou le cône normal d'un ensemble convexe $C(t)$ avec une condition sur le mouvement des ensembles $(C(t))_t$.

Le cas général d'un opérateur maximal monotone dépendant du temps a été considéré par Vladimirov [26, 27], où il a introduit le peudo-distance, dite de Vladimirov, entre deux opérateurs maximaux monotones A_1 et A_2 pour contrôler la variation temporelle de l'opérateur A_t :

$$dis(A_1, A_2) = \sup\left\{\frac{\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle}{1 + \|y_1\| + \|y_2\|} : x_i \in \operatorname{Dom} A_i, y_i \in A_i(x_i) \text{ pour } i = 1, 2\right\}. \tag{2}$$

Depuis, plusieurs études sont consacrées à étudier différentes variantes des inclusions d'évolution gouvernées par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps [9, 19]. Dans tous ces travaux, la pseudo-distance de Vladimirov entre les opérateurs $(A_t)_t$ est contrôlée par une fonction régulière de type

$$dis(A_t, A_s) \leq |r(t) - r(s)| \text{ pour tous } t, s \in [0, T], \tag{3}$$

où $r : [0, T] \to \mathbb{R}$ est une fonction vérifie une certaine propriété de régularité comme : la Lipschitzité, la continuité absolue, la variation bornée...etc. Dans ce contexte, une règle magique concernant la régularité de la solution est apparue : si la fonction $r(\cdot)$ est Lipschitzienne(respectivement, absolument continue, à variation bornée) alors la solution l'est aussi.

L'objectif principal de Vilches et Nguyen dans ce papier est de prouver que cette dernière règle magique n'est plus valable lorsque l'on travaille avec une famille d'opérateurs avec un domaine complet, i.e., $\operatorname{Dom}(A_t) = H$. Ils ont démontré l'existence de la solution pour le problème (1) en omettant la condition (3).

Ce mémoire est constituée de trois chapitres. Le premier chapitre est consacré à des notions de base et quelques résultats auxiliaires que nous allons utiliser tout au long de ce travail. Le deuxième chapitre a pour but de montrer l'existence et l'unicité de solution du problème (1) avec une méthode basée sur la régularisation de Yosida. Elle consiste à réduire l'inclusion différentielle (1) à une famille d'équations différentielles de la forme

$$(\mathcal{P}_\lambda)\begin{cases}\dot{x}(t) = f(t, x(t)) - \lambda^{-1}(x(t) - J_\lambda^t(x(t))) \text{ p.p } t \in [0, T]\\[2ex] x(0) = x_0,\end{cases}$$

où J_λ^t est la résolvant de A_t. Mais avant tout ça, on donne un petit rappel sur la mesurabilité des opérateurs multivoques dépendant du temps dans un **espace de Hilbert séparable** H en citant quelques propriétés de la régularisation de Yosida ainsi que la résolvante d'un opérateur maximal monotone.

On termine ce travail par une application du problème (1) dans l'étude d'une variante de processus de rafle donnée par l'inclusion suivante

$$(\mathcal{SC})\begin{cases} A_1\dot{x}(t) + A_0x(t) - f(t) \in -N_{C(t)}(\dot{x}) \text{ p.p } t \in [0,T], \\ x(0) = x_0 \in H, \end{cases}$$

où $A_1, A_0 : H \to H$ sont deux opérateurs linéaires semi-définis symétriques bornés, $f : [0,T] \to H$ est une application et $N_{C(t)}(\dot{x}(t))$ est le cône normal à $C(t)$ au point $\dot{x}(t)$.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre introductif a pour but de rappeler les résultats fondamentaux et les concepts de base que l'on va utiliser dans les autres chapitres. Selon les problèmes auxquels nous sommes confrontés au cours de ce travail, on est amené à utiliser quelques résultats et outils auxiliaires que l'on accepte (souvent) sans démonstration. Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, X désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et X^* représente son dual topologique formé de toutes les formes linéaires $x^* : X \to \mathbb{R}$.

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1.1. *On appelle produit scalaire sur X, toute forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ possédant les propriétés supplémentaires suivantes*

$$\begin{aligned} &\langle x, y \rangle \geq 0 \ \textit{(positivité)} \\ &\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ &\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \ \textit{(symétrie).} \end{aligned}$$

À titre d'exemple, sur l'espace $L^2(\Omega)$ de fonctions de carrée intégrable, on définit le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx,$$

dont la norme associée est

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le produit scalaire permet de mesurer l'angle formé par deux vecteurs x et y via l'équivalence suivante

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \Leftrightarrow \theta = \arccos\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

Cette dernière expression est bien définie grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz qui donne

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \Rightarrow |\cos(\theta)| = \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\|y\|} \leq 1,$$

cela conduit à dire que

$$\begin{aligned}
&x \text{ et } y \text{ forment un angle aigu si } \langle x, y\rangle > 0, (0 \leq \theta < \tfrac{\pi}{2})\\
&x \text{ et } y \text{ forment un angle obtus si } \langle x, y\rangle < 0, (\theta > \tfrac{\pi}{2})\\
&x \text{ et } y \text{ forment un angle droit si } \langle x, y\rangle = 0, (\theta = \tfrac{\pi}{2}).
\end{aligned}$$

L'application $\|\cdot\| : x \in X \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme sur X appelée la norme hilbertienne ou la norme associée (induite) au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. L'espace X muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ s'appelle un espace pré-hilbertien. Si de plus, X est complet pour la norme induite, dans ce cas, $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est dit un espace de Hilbert que l'on note généralement H.

Définition 1.1.2. *Étant donné un point $x_0 \in X$ et un réel $r > 0$, les sous ensembles de X notés*

$$\begin{aligned}
B[x_0, r] &:= \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}\\
B(x_0, r) &:= \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}\\
S[x_0, r] &:= \{x \in X : \|x - x_0\| = r\},
\end{aligned}$$

sont appelés, respectivement

boule fermée de centre x_0 et de rayon r

boule ouverte de centre x_0 et de rayon r

sphère de centre x_0 et de rayon r.

En particulier, si $r = 1$ et $x_0 = 0$ alors $\overline{\mathbb{B}}$ (resp. $\mathbb{B}$) représente la boule unité fermée (resp. ouverte).

1.2 Quelque rappels d'analyse convexe

Définition 1.2.1.

1. *On appelle segment joignant ou reliant deux points* $x, y \in X$ *l'ensemble*

$$[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda \in [0, 1]\}.$$

2. *Un sous ensemble* $C \subset X$ *est dit convexe si pour tous* $x, y \in C$ *le segment reliant* x *à* y *reste dans* C*, i.e.,*

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C \text{ pour tout } \lambda \in [0, 1].$$

3. *Une fonction* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est dite convexe si, pour tous* $x, y \in \operatorname{dom} f$ *et pour tout* $\lambda \in [0, 1]$ *l'inégalité suivante, dite "l'inégalité de convexité "est vérifiée*

$$\forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

où $\operatorname{dom} f$ *est le domaine de* f *défini par*

$$\operatorname{dom} f = \{x \in X, f(x) < +\infty\}.$$

La fonction f *est dite strictement convexe si l'inégalité de convexité est stricte. La définition de la convexité signifie que le segment reliant les deux points* $(x, f(x))$ *et* $(y, f(y))$ *se trouve toujours au dessus de la courbe de* f*.*

4. *On appelle épigraphe de* $f : X \to \mathbb{R}$ *le sous-ensemble de* $X \times \mathbb{R}$ *noté et défini comme suit*

$$\operatorname{epi}(f) = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}.$$

5. *Un sous ensemble* $K \subset X$ *est dit un cône si* $\lambda K \subset K$ *pour tout* $\lambda \geq 0$*; autrement dit,* K *est stable par rapport à la multiplication par un scalaire positif. Si de plus* K *est convexe alors* K *est dit cône convexe, il est clair qu'un cône contient toujours l'origine* $(\lambda = 0 : 0K = \{0\} \subset K)$*.*

6. *Le cône polaire (ou cône polaire négatif, ou cône dual) de* $K \subset X$ *est l'ensemble*

$$K^\circ := \{y \in X^*, \langle y, x\rangle \leq 0 \text{ pour tout } x \in K\},$$

d'autres notations sont également utilisées pour le cône polaire de K *:* K^-, $K^\ominus$*,...,etc.*

Définition 1.2.2.
Étant donné deux ensembles E et Y. Si à chaque élément x de E, on associe un sous ensemble éventuellement non vide de Y noté $F(x)$, on définit une application multivoque F de E vers Y et on note $F : E \rightrightarrows Y$. Dans la littérature, les applications multivoques sont aussi appelées multi-applications, multifonctions, relations ou correspondances.

1. *Le domaine de F noté $\operatorname{Dom} F$ est l'ensemble*

$$\operatorname{Dom} F = \{x \in E \ : \ F(x) \neq \emptyset\}.$$

2. *Si A est un sous ensemble de E alors $F(A) := \bigcup\limits_{x \in A} F(x)$, en particulier, si $A = \operatorname{Dom} F$ alors, $\mathcal{R}(F) := F(\operatorname{Dom} F)$ est l'image de F.*

3. *Le graphe de F noté $\operatorname{gph}(F)$ est*

$$\operatorname{gph}(F) = \{(x, y) \in E \times Y \ : \ y \in F(x)\}.$$

4. *On appelle image réciproque d'une partie non vide D de Y par F l'ensemble*

$$F^{-1}(D) := \{x \in E, F(x) \cap D \neq \emptyset\},$$

d'autre part, pour tout $y \in Y$ on a

$$F^{-1}(y) := \{x \in X : y \in F(x)\}.$$

5. *On note $F^{-1} : Y \rightrightarrows E$ la multi-application inverse de F définie par*

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x).$$

Définition 1.2.3. *Soit (E, Σ) un espace mesurable et soit $F : E \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides et fermées dans un espace métrique, complet et séparable Y. On dit que F est mesurable si $F^{-1}(\mathcal{O}) \in \Sigma$ pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de Y.*

Définition 1.2.4. *On dit que E est un espace séparable s'il existe un sous ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense (i.e $\overline{D} = E$).*

Soit C un ensemble convexe non vide de X. Le cône tangent à C au point $x \in C$ que l'on note $T(C; x)$ ou $T_C(x)$, est le cône fermé (de sommet 0) engendré par $C - x$, i.e.,

$$T(C; x) := \overline{\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \lambda\Big(C - x\Big)}.$$

Puisque C est convexe, il est évident que $T(C;x)$ est un cône convexe fermé. On remarque que $C \subset x + T(C;x)$, et si $x \in \text{Int}\,(C) \neq \emptyset$ alors $T(C;x) = X$.
On introduit maintenant la notion du cône normal à C au point x, noté $N(C;x)$ ou $N_C(x)$, comme étant le cône polaire du cône tangent, i.e.,

$$N_C(x) := (T_C(x))^\circ = \{x^* \in X^* : \langle x^*, z\rangle \leq 0, \forall z \in T(C;x)\}.$$

La définition de $T_C(x)$, nous permet de conclure que

$$N_C(x) = \{x^* \in X^*, \langle x^*, y - x\rangle \leq 0, \text{ pour tout } y \in C\}. \tag{1.1}$$

Il est facile de vérifier que si $x \in \text{Int}\,(C)$ avec $\text{Int}\,(C) \neq \emptyset$ alors $N_C(x) = \{0\}$. De plus pour tout $x \in -C$ et $y, z \in X$ tels que $y + z \in C$

$$N_C(-x) = -N_{-C}(x), N_C(y + z) = N_{C-z}(y). \tag{1.2}$$

Il est à noter aussi que $\text{Dom}\, T_C(\cdot) = \text{Dom}\, N_C(\cdot) = C$.

Définition 1.2.5. *Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et finie en $\overline{x} \in X$. Le sous-différentiel (de Fenchel) de f au point $\overline{x}$, noté $\partial f(\overline{x})$, est le sous ensemble de X^* défini par*

$$\partial f(\overline{x}) := \{v \in X^* : \langle v, x - \overline{x}\rangle \leq f(x) - f(\overline{x}) \textit{ pour tout } x \in X\}. \tag{1.3}$$

Si $\overline{x} \notin \text{dom}\, f$ alors $\partial f(\overline{x}) = \emptyset$. Par exemple, si $f(x) = |x|$ alors

$$\partial f(a) = \begin{cases} [-1, 1] & si\ a = 0 \\ \{1\} & si\ a > 0 \\ \{-1\} & si\ a < 0. \end{cases}$$

Le sous-différentiel peut être défini de manière équivalente géométriquement via le cône normal à l'épigraphe comme suit

$$\partial f(\overline{x}) := \{v \in X^* : (v, -1) \in N_{\text{epi}\, f}(\overline{x}, f(\overline{x}))\}.$$

Réciproquement, On peut également donner la définition du cône normal à un ensemble $C \subset X$ au point $x \in C$ en utilisant la fonction indicatrice de C notée $\psi_C(\cdot)$ comme suit

$$N(x; C) = \partial \psi_C(x),$$

avec $\psi_C(x) = 0$ si $x \in C$ et $\psi_C(x) = +\infty$ sinon.

La conjuguée de Legendre-Fenchel d'une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est la fonction notée f^*, définie sur le dual X^* par

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} \Big(\langle x^*, x \rangle - f(x) \Big) \text{ pour tout } x^* \in X^*.$$

Par exemple, sur $\mathbb{R}$, on définit la fonction f par $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$ alors

$$f^*(v) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \Big(vx - ax - b \Big) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \Big((v-a)x - b \Big) = \begin{cases} -b & \text{si } v = a \\ +\infty & \text{si } v \neq a. \end{cases}$$

Le sous différentiel d'une fonction propre, convexe et s.c.i f peut se caractériser via la conjuguée de Fenchel à travers l'équivalence suivante

$$\begin{aligned} x^* \in \partial f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad f^*(x^*) + f(x) - \langle x^*, x \rangle = 0 \Leftrightarrow f^*(x^*) + f(x) - \langle x^*, x \rangle \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \partial f^*(x^*), \end{aligned} \tag{1.4}$$

c'est à dire $(\partial f)^{-1} = \partial f^*$. Pour plus d'informations sur la théorie des fonctions convexes, le lecteur se réfère aux références [8, 17].

1.3 Topologie faible

On appelle topologie faible sur X que l'on note $\sigma(X, X^*)$ la topologie la moins fine rendant continue toutes les applications $f \in X^* : X \to \mathbb{R}$, autrement dit, $\sigma(X, X^*)$ est la topologie la moins fine qui contient tous les ensembles $f^{-1}(I)$ pour tout $f \in X^*$ et tout intervalle I de $\mathbb{R}$. La notion de la convergence dans cette topologie est donnée dans la définition suivante

Définition 1.3.1 (Caractérisation séquentielle).
Soient $(x_n)_n$ une suite dans un espace normé X et $x \in X$. On dit que $(x_n)_n$ converge faiblement vers x et on écrit $x_n \rightharpoonup x$ ou $x = w - \lim_{n \to +\infty} x_n$ ou bien $x_n \xrightarrow{w} x$ si et seulement si

$$\lim_{n \to +\infty} \Big(\langle f, x_n \rangle := f(x_n) \Big) = \langle f, x \rangle \text{ pour tout } f \in X^*.$$

Notre tâche maintenant consiste à relier la notion de la convergence faible avec un nouveau concept de limite inférieure. Pour cela nous allons introduire la notions de la limite inférieure (resp. supérieure) pour une suite ordinaire de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Définition 1.3.2. *Soit $(x_n)_n$ une suite de $\overline{\mathbb{R}}$. On définit les limites inférieure et supérieure de $(x_n)_n$ comme suit*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\inf_{k\geq n} x_k\Big)$$
$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sup_{k\geq n} x_k\Big).$$

Ces deux semi-limites vérifient les inégalités suivantes

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Proposition 1.3.1. *Soient $(x_n)_n$ une suite dans un espace normé X et $x \in X$. Soient $(f_n)_n$ une suite dans X^* et $f \in X^*$. Alors*

(a) Si (x_n) converge vers x pour la norme (fortement), alors $(x_n)_n$ converge vers x pour la topologie faible (faiblement).

(b) Si (x_n) converge faiblement vers x alors la suite $(\|x_n\|)_n$ est bornée et

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|. \tag{1.5}$$

(c) Si (x_n) converge faiblement vers x et f_n converge fortement vers f dans X^* alors

$$\langle f_n, x_n\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle f, x\rangle.$$

(d) Si $(u_n)_n$ est bornée et si chaque sous-suite faiblement convergente de $(u_n)_n$ converge vers la même limite $u \in H$ alors $(u_n)_n$ converge faiblement vers u.

Théorème 1.3.1 (Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.**
La boule unité fermé $\overline{\mathbb{B}}_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ est faiblement compacte, i.e., pour toute suite bornée $(x_n)_n$ de H, on peut extraire une sous suite de $(x_n)_n$ qui converge faiblement dans H.

Proposition 1.3.2. *Dans un espace de dimension finie, les topologies fortes et faibles coïncident.*

1.4 Opérateurs maximaux monotones

Définition 1.4.1. *On dit qu'un opérateur multivoque $A : H \rightrightarrows H$ est monotone lorsque*

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0, \text{ pour tout } (x_i, y_i) \in \operatorname{gph} A, i = 1, 2.$$

On écrit également $\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0$ pour tout $x_i \in \operatorname{Dom} A, i = 1, 2$.

L'ensemble des opérateurs monotones est ordonné par l'inclusion des graphes

$$A \subset B \Leftrightarrow Ax \subset Bx.$$

Autrement dit, l'ensemble des opérateurs monotones est inductif pour l'inclusion des graphes, ce qui justifie la définition suivante.

Définition 1.4.2. *Un opérateur multivoque $A : H \rightrightarrows H$ est dit maximal monotone s'il est maximal parmi les opérateurs monotones ordonné par l'inclusion de leurs graphes dans $H \times H$, i.e., s'il n'existe aucun autre opérateur monotone B tel que $\operatorname{gph} A \subset \operatorname{gph} B$.*

La proposition suivante donne une explication de la définition précédente.

Proposition 1.4.1. *Un opérateur monotone $A : H \rightrightarrows H$ est dit maximal monotone si pour tout $(x, y) \in H$ tel que*

$$\langle y - y', x - x' \rangle \geq 0 \textit{ pour tout } (x', y') \in \operatorname{gph} A,$$

on ait $(x, y) \in \operatorname{gph} A$.

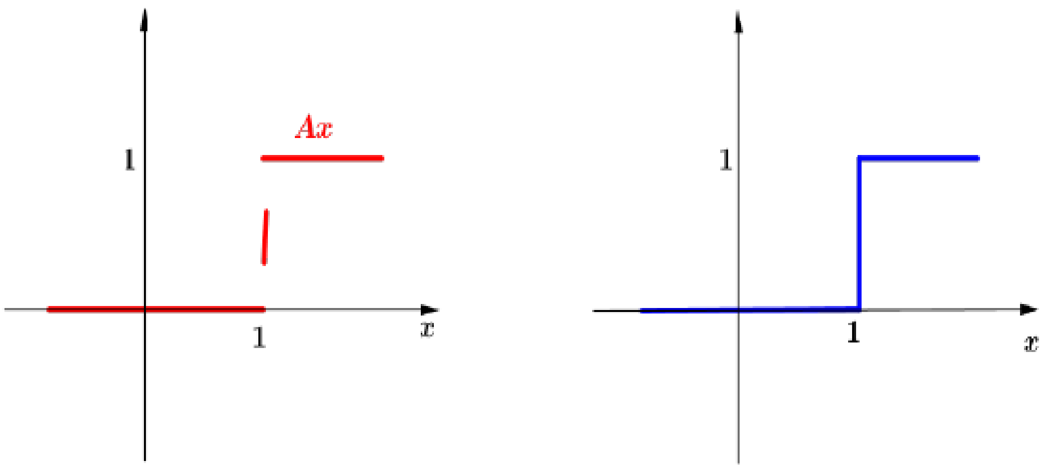

FIGURE 1.1 – L'opérateur A est maximalmonotone si et seulement si A(1)=[0,1].

Théorème 1.4.1. *(Minty [20])*
Étant donné un opérateur $A : H \rightrightarrows H$, alors les trois assertions suivantes sont équivalentes
(a) A est maximal monotone ;
(b) A est monotone et $(I + \lambda A)$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$, i.e, $\mathcal{R}(I + \lambda A) = H$;

(c) $(I+\lambda A)^{-1}$ *est une contraction partout définie sur* H *pour tout* $\lambda > 0$.

Définition 1.4.3.
Soit $A : H \rightrightarrows H$ *un opérateur multivoque.*

1. *On appelle la résolvante de* A *l'opérateur* J_λ *défini par*

$$J_\lambda(x) = (I+\lambda A)^{-1}(x),$$

et l'approximation de Yosida l'opérateur A^λ *défini par*

$$A^\lambda(x) = \lambda^{-1}(x - J_\lambda(x)).$$

2. *On note par* $A^\circ x$ *l'élément de* Ax *ayant la norme minimale i.e.,*

$$A^\circ x \in Ax \ \text{et} \ \|A^\circ x\| = \min_{\xi \in Ax} \|\xi\|.$$

Il est connu que si A est maximal monotone alors Ax *est un ensemble convexe fermé pour tout* $x \in \operatorname{Dom} A$, *alors on peut définir* $A^\circ x$ *comme suit*

$$A^\circ x = \operatorname{Proj}_{Ax} 0,$$

où,

$$\operatorname{Proj}_C(z) := \{x \in C : \|z - x\| = d_C(z)\},$$

et $d_C(z)$ *représente la distance du point* $z \in H$ *à l'ensemble* C *définie par*

$$d_C(z) = \inf_{x \in C} \|z - x\|.$$

Proposition 1.4.2 ([10], Proposition 20.31)**.**
Soit $A : H \rightrightarrows H$ *un opérateur maximal monotone et soit* $x \in \operatorname{Dom}(A)$. *Alors,* Ax *est un ensemble convexe et fermé.*

Proposition 1.4.3. *[[16], Proposition 3.2.14]*
Soit $A : H \rightrightarrows H$ *un opérateur maximal monotone tel que* $\operatorname{Int}\operatorname{Dom}(A) \neq \emptyset$. *Alors,* $A : \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(A) \rightrightarrows H$ *est fortement-faiblement semi-continu supérieurement.*

1.5 Autres résultats et définitions

Définition 1.5.1.

- *Soient* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *et* $x_0 \in X$*, on dit que* f *est*
  (a) Propre si et seulement si
  $$f(x) \neq -\infty, \forall x \in X \quad \text{ et } \quad \exists y_0 \in X : f(y_0) \neq +\infty.$$
  (b) Semi-continue inférieurement (s.c.i en abrégé) si pour tout $r \in]-\infty, f(x_0)]$*, il existe un voisinage* V *de* x_0 *tel que* $f(V) \subset]r, +\infty]$.
  La semi-continuité inférieure peut se caractériser par l'une des deux propriétés suivante : $\operatorname{epi}(f)$ *est fermé dans* $X \times \mathbb{R}$ *ou les ensembles de niveau* $[f \leq r] := \{x \in X : f(x) \leq r\}$ *sont fermés dans* X *pour tout* $r \in \mathbb{R}$.
  (c) Semi-continue supérieurement (s.c.s en abrégé) si pour tout $r \in [f(x_0), +\infty[$*, il existe un voisinage* V *de* x_0 *tel que* $f(V) \subset [-\infty, r[$.
  (d) f *est continue au point* x_0 *si et seulement si* f *est, à la fois, s.c.i et s.c.s au point* $x_0 \in X$.

Définition 1.5.2. *Soit* $u(\cdot)$ *une application définie sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ *dans un espace normé* X*. On dit que* $u(\cdot)$ *est absolument continue sur* $[\alpha, \beta] \subset I$ *si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta(\varepsilon) > 0$*, tel que pour tous* $s_i, r_i \in [\alpha, \beta], i = 1, ..., k$*, avec* $s_{i-1} \leq r_i \leq s_i$ *et* $\sum_{i=1}^{k}(s_i - r_i) < \delta$ *on ait*
$$\sum_{i=1}^{k} \|u(s_i) - u(r_i)\| < \varepsilon.$$

Exemple 1.5.1.
- *Toute application Lipschitzienne est absolument continue.*
- *Toute application absolument continue est uniformément continue.*

Théorème 1.5.1.

- *Soit* $u(\cdot) : I \to H$ *telle que* $u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)\, ds$ *avec* $v(\cdot) \in L^1(I; H), t_0, t \in I$ *alors* $u(\cdot)$ *est absolument continue sur* I *et* $\dot{u}(t) = v(t)$ *pour presque tout* $t \in I$.
- *Soit* $u(\cdot) : [T_0, T] \to H$ *une application absolument continue alors,* u *est presque partout dérivable et*
  $$u(t) - u(T_0) = \int_{T_0}^{t} \dot{u}(s)ds, \quad \forall\, t \in]T_0, T].$$

Définition 1.5.3.
La variation d'une application $u : [0, T] \to X$*, que l'on note* $\operatorname{var}(u, [0, T])$*, se donne par*
$$\operatorname{var}(u, [0, T]) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \|u(t_{i+1}) - u(t_i)\| : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T \text{ est une subdivision de } [0, T] \right\}.$$

u est dite à variation bornée si $\mathrm{var}\,(u,[0,T]) < +\infty$.
Les assertions suivantes ont lieu :

1. *Si* $u : [0,T] \to X$ *est L-lipschitzienne sur* $[0,T]$, *alors* u *est à variation bornée et* $\mathrm{var}\Big(u,[0,T]\Big) \leq LT$.
2. *Si* $u : [0,T] \to X$ *est croissante alors elle est à variation bornée avec* $\mathrm{var}\Big(u,[0,T]\Big) = u(T) - u(0)$.

Lemme 1.5.1 (Inégalité de Gronwall). *Soit* $T > T_0$ *et soient* $a(\cdot), b(\cdot) \in L^1([T_0,T];\mathbb{R})$ *telles que* $b(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in [T_0,T]$. *Soit* $w : [T_0,T] \to \mathbb{R}_+$ *une fonction absolument continue satisfait*

$$(1-\alpha)w'(t) \leq a(t)w(t) + b(t)w^{\alpha}(t), \ \ p.p\ t \in [0,T],$$

avec $0 \leq \alpha < 1$. *Alors pour tout* $t \in [T_0,T]$

$$w^{1-\alpha}(t) \leq w^{1-\alpha}(T_0)\exp\left(\int_{T_0}^{t} a(\tau)d\tau\right) + \int_{T_0}^{t}\exp\left(\int_{s}^{t} a(\tau)d\tau\right)b(s)ds.$$

Théorème 1.5.2. *Soit* $F : I \times H \rightrightarrows \mathcal{P}_c(H)$ *telle que*

(H_F^1) *Pour chaque* $x \in X$, *la multi-application* $t \rightrightarrows F(t,x)$ *est mesurable.*

(H_F^2) *Pour chaque* $t \in I$, *la multi-application* $H \ni x \rightrightarrows F(t,x)$ *est fortement-faiblement semi-continue supérieurement.*

Soient $u_n, f_n : I \to H$ *deux familles de fonctions mesurables telles que* u_n *converge presque partout sur* I *vers une fonction* $u : I \to H$ *et* f_n *converge faiblement dans* $L^1(I;H)$ *vers une fonction* $f : I \to H$. *On suppose que* $f_n(t) \in F(t,u_n(t))$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et pour presque tout* $t \in I$, *alors*

$$f(t) \in F(t,u(t)) \ p.p\ t \in I.$$

Étant donné une multi-application $F : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ et une fonction $w(\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, on dit que $F(\cdot,\cdot)$ vérifie la condition $(\mathcal{H}_w)$ si

$$\langle F(t,x) - F(t,y), x-y\rangle \leq w(t,\|x-y\|)\|x-y\| \qquad (\mathcal{H}_w)$$

Théorème 1.5.3 (voir [15], Théorème 10.5)**.**
Soit $F : [0,T] \times H \to H$ *une multi-application à valeurs convexes fermés telle que*

(a) Pour tout $x \in H$, $t \mapsto F(\cdot,x)$ *ait une sélection mesurable et* $F(t,\cdot)$ *soit s.c.s pour tout* $t \in [0,T]$.

(b) La condition de croissance suivante soit satisfaite

$$\|F(t,x)\| \leq c(t)(1+\|x\|) \text{ sur } [0,T]\times H \text{ où } c(\cdot) \in L^1([0,T];\mathbb{R}_+).$$

(c) Il existe une fonction $v(\cdot) \in L^1([0,T];\mathbb{R})$ telle que la condition ($\mathcal{H}_w$) soit vérifiée pour $w(t,\rho) := v(t)\rho$,

alors, l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in F(t,u(t)), \ \ p.p \ t \in [0,T] \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

admet une seule solution absolument continue $u(\cdot) : [0,T] \to H$.

Lemme 1.5.2. *Soit $A : H \to H$ un opérateur linéaire, continu et symétrique tel que $\langle Ax, x\rangle \geq 0$, pour tout $x \in H$, alors*

$$A = \partial\varphi_A = \{\nabla\varphi_A\},$$

où $\varphi_A : H \to \mathbb{R}$ est la fonction convexe et continue définie par

$$\varphi_A(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle, \ \text{pour tout } x \in H.$$

Chapitre 2

Problème d'inclusion gouverné par une famille d'opérateurs maximaux monotones

On commence ce chapitre par un petit rappel sur la mesurabilité des opérateurs multivoques dépendant du temps dans un **espace de Hilbert séparable** H. On donne également quelques propriétés de la régularisation de Yosida ainsi que la résolvante d'un opérateur de cette dernière classe. Ensuite, on montre le résultat d'existence et d'unicité en utilisant une méthode de régularisation qui consiste à réduire l'inclusion différentielle (1) à une familles d'équations différentielles dont les solutions convergent vers la solution désirée.

Définition 2.0.4. *Soit* $A_t : H \rightrightarrows H, t \in [0,T]$ *une famille d'opérateurs monotones. On dit que* $(A_t)_{t\in[0,T]}$ *est mesurable si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*
(Δ_1) $\forall \lambda > 0, \forall x \in H : [0,T] \ni t \mapsto (I+\lambda A_t)^{-1}$ *est mesurable.*
(Δ_2) $[0,T] \ni t \mapsto \operatorname{gph}(A_t)$ *est multivoques et mesurable de* $[0,T]$ *dans* $H \times H$.

2.1 Approximation de Yosida

Le lemme suivant donne quelque propriétés importantes de l'approximation de Yosida d'un opérateur maximal monotone dépendant du temps A_t.

Lemme 2.1.1. *Soit* $A_t : H \rightrightarrows H$ *un opérateur tel que* $Dom(A) = H$ *tel que*
(a) Pour tout $t \in [0,T]$, *l'opérateur* $A_t : H \rightrightarrows H$ *est maximale monotone.*
(b) Pour tout $x \in H$ *l'application* $t \mapsto A_t(x)$ *est mesurable.*
Alors :

(i) Pour tout $x \in H$ et $t \in [0, T]$,

$$\lambda^{-1}(x - J_\lambda^t(x)) \in A_t(J_\lambda^t(x)).$$

(ii) Pour tous $x, y \in H$ et tout $t \in [0, T]$

$$\|J_\lambda^t(x) - J_\lambda^t(y)\| \leq \|x - y\|.$$

(iii) Pour tout $x \in H$, L'application $t \mapsto J_\lambda^t(x)$ est mesurable.

(iv) Pour tout $x \in H$ et tout $t \in [0, T]$

$$\|x - J_\lambda^t(x)\| \leq \lambda \|A_t^\circ(x)\|,$$

où

$$\|A_t^\circ(x)\| := \inf\{\|y\| : y \in A_t(x)\}.$$

(v) Pour tout $t \in [0, T]$, l'opérateur $x \mapsto A_t(x)$ est fortement - faiblement semi-continue supérieurement.

Démonstration.

(i) Soit $x \in H$ alors

$$\begin{aligned} J_\lambda^t(x) = (I + \lambda A_t)^{-1}(x) &\Leftrightarrow x \in (I + \lambda A_t)(J_\lambda^t(x)) \\ &\Leftrightarrow x \in J_\lambda^t(x) + \lambda A_t(J_\lambda^t(x)) \\ &\Leftrightarrow \lambda^{-1}(x - J_\lambda^t(x)) \in A_t(J_\lambda^t(x)). \end{aligned}$$

(ii) Soient $x, y \in H$ alors

$$\lambda^{-1}(x - J_\lambda^t(x)) \in A_t(J_\lambda^t(x)) \text{ et } \lambda^{-1}(y - J_\lambda^t(y)) \in A_t(J_\lambda^t(y)),$$

il résulte de la monotonie de A_t que

$$\begin{aligned} &\langle \lambda^{-1}(x - J_\lambda^t(x)) - \lambda^{-1}(y - J_\lambda^t(y)), J_\lambda^t(x) - J_\lambda^t(y) \rangle \geq 0 \\ &\Rightarrow \langle x - y, J_\lambda^t(x) - J_\lambda^t(y) \rangle \geq \langle J_\lambda^t(x) - J_\lambda^t(y), J_\lambda^t(x) - J_\lambda^t(y) \rangle, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient

$$\|x - y\| \|J_\lambda^t(x) - J_\lambda^t(y)\| \geq \|J_\lambda^t(x) - J_\lambda^t(y)\|^2,$$

d'où l'inégalité désirée.

(iii) C'est une conséquence directe de [[5], Lemme 2.1].

(iv) Soient $x \in H, z \in A_t(x)$ et $t \in [0,T]$. D'après (i), on a $\lambda^{-1}(x - J_\lambda^t(x)) \in A_t(J_\lambda^t(x))$, donc

$$\begin{aligned}
&\langle z - \lambda^{-1}(x - J_\lambda^t(x)), x - J_\lambda^t(x)\rangle \geq 0 \\
&\Rightarrow \langle z, x - J_\lambda^t(x)\rangle \geq \lambda^{-1}\|x - J_\lambda^t(x)\|^2 \\
&\Rightarrow \|z\|\|x - J_\lambda^t(x)\| \geq \lambda^{-1}\|x - J_\lambda^t(x)\|^2 \\
&\Rightarrow \|x - J_\lambda^t(x)\| \leq \lambda\|z\|, \forall z \in A_t(x) \\
&\Rightarrow \|x - J_\lambda^t(x)\| \leq \lambda \inf\{\|z\|, z \in A_t(x)\} =: \lambda\|A_t^\circ(x)\|.
\end{aligned}$$

(v) Comme $\operatorname{Int} Dom(A) = H \neq \emptyset$, alors selon La proposition 1.4.3, pour tout $t \in [0,T]$, l'opérateur $x \mapsto A_t(x)$ est fortement - faiblement semi-continue supérieurement.

$\square$

2.2 Liste des hypothèses

Avant de présenter le résultat principal de ce travail, on donne l'ensemble des condition que l'on va supposer dans la suite.

• **Hypothèses sur les opérateurs** $A_t : H \rightrightarrows H$

$(\mathcal{H}_\mathcal{A})$:

$(\mathcal{H}_\mathcal{A}^a)$ Pour tout $t \in [0,T]$, l'opérateur $A_t : H \rightrightarrows H$ est maximal monotone.

$(\mathcal{H}_\mathcal{A}^b)$ Pour tout $x \in H$, l'application $t \mapsto A_t(x)$ est mesurable .

$(\mathcal{H}_\mathcal{A}^c)$ Pour tout $t \in [0,T]$ et tout $x \in H$

$$\|A_t^\circ(x)\| \leq \alpha(t)\|x\| + \beta(t),$$

où $\alpha, \beta \in L^2([0,T]; \mathbb{R}_+)$ et $\|A_t^\circ(x)\| := \inf\{\|y\| : y \in A_t(x)\}$.

• **Hypothèses sur l' applications** $f : [0,T] \times H \to H$

$(\mathcal{H}_f)$:

$(\mathcal{H}_f^a)$ Pour tout $x \in H$, l'application $t \mapsto f(t,x)$ est mesurable.

$(\mathcal{H}_f^b)$ Pour tout $t \in [0,T]$ et tous $x, y \in H$

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \kappa(t)\|x - y\|,$$

où $\kappa \in L^2([0,T]; \mathbb{R}_+)$.

$(\mathcal{H}_f^c)$ Pour tout $t \in [0,T]$ et tout $x \in H$

$$\|f(t,x)\| \leq \gamma(t)\|x\| + \delta(t),$$

où $\gamma, \delta \in L^2([0,T];\mathbb{R}_+)$.

2.3 Résultat d'existence et d'unicité

Théorème 2.3.1. *Supposons que $(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ et $(\mathcal{H}_f)$ soient vérifiées. Alors, pour toute valeur initiale $x_0 \in H$, il existe une seule solution absolument continue $x : [0,T] \to H$ de l'inclusion différentielle :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -A_t(x(t)) + f(t,x(t)) \ p.p\ t \in [0,T], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

De plus, l'application $x_0 \mapsto x(\cdot)$ est Lipschitzienne et pour presque tout $t \in [0,T]$

$$\begin{cases} \|x(t)\| \leq \rho(t) := \left(\|x_0\| + \int_0^t (\beta(s)+\delta(s))ds\right) \exp\left(\int_0^t (\alpha(s)+\gamma(s))ds\right) \\ \|\dot{x}(t)\| \leq \theta(t) := (\alpha(t)+\gamma(t))\rho(t) + (\beta(t)+\delta(t)), \end{cases} \tag{2.2}$$

où α, β, γ et δ sont données dans $(\mathcal{H}_f)$ et $(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$.

Démonstration.

I. Existence

Pour $\lambda > 0$ considérons la famille des équations différentielles

$$(\mathcal{P}_\lambda) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x(t)) - \lambda^{-1}(x(t) - J_\lambda^t(x(t))) \text{ p.p } t \in [0,T], \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

On cherche a prouvé que le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ admet une solution unique x_λ et que $(x_\lambda)_{\lambda>0}$ converge uniformément vers l'unique solution $x \in AC([0,T];H)$ de (2.1).

La preuve du Théorème 2.3.1 sera divisée en plusieurs étapes.

Étape 1.

Montrons que Pour chaque $\lambda > 0$ il existe une solution unique x_λ du problème $(\mathcal{P}_\lambda)$. De plus, les majorations suivantes ont lieu

$$\|x_\lambda(t)\| \leq \rho(t) \textbf{ et } \|\dot{x}_\lambda(t)\| \leq \theta(t) \textbf{ p.p } t \in [0,T], \tag{2.3}$$

où ρ et θ sont définies dans (2.2)**.**

Soit $g_\lambda(\cdot,\cdot)$ la fonction définie sur $[0,T] \times H$ par

$$g_\lambda(t,x) := f(t,x) - \lambda^{-1}(x - J_\lambda^t(x)),$$

alors

(a_1) Pour tout $x \in H$, l'application $t \mapsto g_\lambda(t,x)$ est mesurable grâce à celles de f et J_λ^t.

(a_2) Pour presque tout $t \in [0,T]$ et tous $x, y \in H$

$$\begin{aligned}\|g_\lambda(t,x) - g_\lambda(t,y)\| &\leq \|f(t,x) - f(t,y)\| + \lambda^{-1}\Big[\|x-y\| + \|J_\lambda^t(x) - J_\lambda^t(y)\|\Big] \\ &\leq \kappa(t)\|x-y\| + \frac{2}{\lambda}\|x-y\| \\ &\leq \kappa_\lambda(t)\|x-y\|,\end{aligned}$$

où $\kappa_\lambda := \kappa(t) + \frac{2}{\lambda}$ appartient á $L^2([0,T];\mathbb{R}_+)$.

Ce qui montre que $x \mapsto g_\lambda(t,x)$ est continue, donc elle est s.c.s.

(a_3) Pour presque tout $t \in [0,T]$ et tous $x, y \in H$

$$\begin{aligned}\|g_\lambda(t,x)\| \leq \|f(t,x)\| + \lambda^{-1}\|x - J_\lambda^t x\| &\leq \gamma(t)\|x\| + \delta(t) + \|A_t^\circ x\| \\ &\leq (\alpha(t) + \gamma(t))\|x\| + (\beta(t) + \delta(t)),\end{aligned}$$

avec $\alpha(\cdot) + \gamma(\cdot) \in L^2 \subset L^1$ et $\beta(\cdot) + \delta(\cdot) \in L^2 \subset L^1$.

(a_4)

$$\begin{aligned}\langle g_\lambda(t,x) - g_\lambda(t,y), x-y\rangle &\leq \|g_\lambda(t,x) - g_\lambda(t,y)\|\|x-y\| \\ &\leq \kappa_\lambda(t)\|x-y\|\|x-y\| = w_\lambda(t, \|x-y\|)\|x-y\|,\end{aligned}$$

avec $w_\lambda(t,\sigma) := \kappa_\lambda(t)\sigma$.

Donc les conditions du Théorème 1.5.3 sont satisfaites, alors conséquent, l'équation différentielle $(\mathcal{P}_\lambda)$ admet une seule solution absolument continue $x_\lambda : [0,T] \to H$.

D'autre part, pour presque tout $t \in [0,T]$.

$$\|\dot{x}_\lambda(t)\| = \|g_\lambda(t, x_\lambda(t))\| \leq (\alpha(t) + \gamma(t))\|x_\lambda(t)\| + (\beta(t) + \delta(t))$$

mais

$$\|x_\lambda(t)\| - \|x_\lambda(0)\| \leq \|x_\lambda(t) - x_\lambda(0)\| = \Big\|\int_0^t \dot{x}_\lambda(s)ds\Big\| \leq \int_0^t \|\dot{x}_\lambda(s)\|ds$$

alors

$$\|x_\lambda(t)\| \leq Q_\lambda(t) := \|x_0\| + \int_0^t \|\dot{x}_\lambda(s)\|ds,$$

de plus

$$\dot{Q}_\lambda(t) = \|\dot{x}_\lambda(t)\| \text{ p.p } t \in [0,T] \text{ (grâce au Théorème 1.5.1 , car } \dot{x}_\lambda(\cdot) \in L^1([0,T];H)).$$

On déduit que

$$\dot{Q}_\lambda(t) \leq (\alpha(t)+\gamma(t))Q_\lambda(t) + \beta(t) + \delta(t) \text{ p.p } t \in [0,T],$$

en appliquant le lemme de Gronwall (avec $\alpha = 0$), il vient

$$\begin{aligned} Q_\lambda(t) &\leq Q_\lambda(0)\exp\Big(\int_0^t (\alpha(s)+\gamma(s))\, ds\Big) + \int_0^t \exp\Big(\int_s^t (\alpha(r)+\gamma(r))\, dr\Big)(\beta(s)+\delta(s))\, ds \\ &\leq \Big(\|x_0\| + \int_0^t (\beta(s)+\delta(s))ds\Big)\exp\Big(\int_0^t (\alpha(s)+\gamma(s))ds\Big) = \rho(t) \end{aligned}$$

mais $\|x_\lambda(t)\| \leq Q_\lambda(t)$, d'où

$$\|x_\lambda(t)\| \leq \rho(t).$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \|\dot{x}_\lambda(t)\| = \|g_\lambda(t,x_\lambda(t))\| &\leq (\alpha(t)+\gamma(t))\|x_\lambda(t)\| + (\beta(t)+\delta(t)) \\ &\leq (\alpha(t)+\gamma(t))\ \rho(t) + (\beta(t)+\delta(t)) = \theta(t). \end{aligned}$$

Étape 2 :

Montrons que $x_\lambda(\cdot)$ est une suite de Cauchy dans $C([0,T];H)$.

Pour tous $\lambda, \mu > 0$, on pose

$$\phi(t) := \frac{1}{2}\|x_\lambda(t) - x_\mu(t)\|^2.$$

La fonction $\phi(\cdot)$ est absolument continue et presque partout dérivable avec

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= \langle \dot{x}_\lambda(t) - \dot{x}_\mu(t), x_\lambda(t) - x_\mu(t)\rangle \\ &= \langle \dot{x}_\lambda(t) - \dot{x}_\mu(t), x_\lambda(t) - J_\lambda^t(x_\lambda(t)) + J_\lambda^t(x_\lambda(t)) + J_\mu^t(x_\mu(t)) - J_\mu^t(x_\mu(t)) - x_\mu(t)\rangle \\ &= \langle \dot{x}_\lambda(t) - \dot{x}_\mu(t), x_\lambda(t) - J_\lambda^t(x_\lambda(t))\rangle + \langle \dot{x}_\lambda(t) - \dot{x}_\mu(t), J_\lambda^t(x_\lambda(t)) - J_\mu^t(x_\mu(t))\rangle \\ &+ \langle \dot{x}_\lambda(t) - \dot{x}_\mu(t), J_\mu^t(x_\mu(t)) - x_\mu(t)\rangle, \end{aligned} \tag{2.4}$$

comme

$$\dot{x}_r(t) = f(t,x_r(t)) - r^{-1}(x_r(t) - J_r^t(x_r(t)) \text{ p.p } t \in [0,T], x_r(0) = x_0, r \in \{\lambda, \mu\},$$

il résulte que

$$\begin{aligned} \langle \dot{x}_\lambda(t) - \dot{x}_\mu(t), J_\lambda^t(x_\lambda(t)) - J_\mu^t(x_\mu(t))\rangle &= \langle f(t,x_\lambda(t)) - f(t,x_\mu(t)) + \mu^{-1}\Big(x_\mu(t) - J_\mu^t(x_\mu(t))\Big) \\ &- \lambda^{-1}\Big(x_\lambda(t) - J_\lambda^t(x_\lambda(t))\Big), J_\lambda^t(x_\lambda(t)) - J_\mu^t(x_\mu(t))\rangle \\ &= \langle f(t,x_\lambda(t)) - f(t,x_\mu(t)), J_\lambda^t(x_\lambda(t)) - J_\mu^t(x_\mu(t))\rangle \\ &+ \langle \mu^{-1}\Big(x_\mu(t) - J_\mu^t(x_\mu(t))\Big) - \lambda^{-1}\Big(x_\lambda(t) - J_\lambda^t(x_\lambda(t))\Big), J_\lambda^t(x_\lambda(t)) \\ &- J_\mu^t(x_\mu(t))\rangle, \end{aligned}$$

mais, d'après la Propriété (i) du Lemme 2.1.1 ,

$$r^{-1}(x_r(t) - J_r^t(x_r(t))) \in A_t(J_r^t(x_r(t))), r \in \{\lambda, \mu\},$$

alors, en tenant compte de la monotonie de A_t, on obtient

$$\langle \lambda^{-1}(x_\lambda(t) - J_\lambda^t(x_\lambda(t))) - \mu^{-1}(x_\mu(t) - J_\mu^t(x_\mu(t))), J_\lambda^t(x_\lambda(t)) - J_\mu^t(x_\mu(t))\rangle \geq 0,$$

ce qui donne

$$\langle \mu^{-1}(x_\mu(t) - J_\mu^t(x_\mu(t))) - \lambda^{-1}(x_\lambda(t) - J_\lambda^t(x_\lambda(t))), J_\lambda^t(x_\lambda(t)) - J_\mu^t(x_\mu(t))\rangle \leq 0.$$

Donc

$$\langle \dot{x}_\lambda(t) - \dot{x}_\mu(t), J_\lambda^t(x_\lambda(t)) - J_\mu^t(x_\mu(t))\rangle \leq \langle f(t, x_\lambda(t)) - f(t, x_\mu(t)), J_\lambda^t(x_\lambda(t)) - J_\mu^t(x_\mu(t))\rangle. \quad (2.5)$$

Alors, on déduit de (2.5) que

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t) \leq & \langle \dot{x}_\lambda(t) - \dot{x}_\mu(t), x_\lambda(t) - J_\lambda^t(x_\lambda(t))\rangle + \langle f(t, x_\lambda(t)) - f(t, x_\mu(t)), J_\lambda^t(x_\lambda(t)) - J_\mu^t(x_\mu(t))\rangle \\ & + \langle \dot{x}_\lambda(t) - \dot{x}_\mu(t), J_\mu^t(x_\mu(t)) - x_\mu(t)\rangle. \qquad (2.6)\end{aligned}$$

D'une autre point, on a

$$\begin{aligned}\langle \dot{x}_\lambda(t) - \dot{x}_\mu(t), x_\lambda(t) - J_\lambda^t(x_\lambda(t))\rangle &\leq \|\dot{x}_\lambda(t) - \dot{x}_\mu(t)\|\|x_\lambda(t) - J_\lambda^t(x_\lambda(t))\| \\ &\leq (\|\dot{x}_\lambda(t)\| + \|\dot{x}_\mu(t)\|)\|x_\lambda(t) - J_\lambda^t(x_\lambda(t))\| \\ &\leq 2\theta(t)\|x_\lambda(t) - J_\lambda^t(x_\lambda(t))\|,\end{aligned}$$

et d'apré la Propriété (iv) du Lemme 2.1.1

$$\langle \dot{x}_\lambda(t) - \dot{x}_\mu(t), x_\lambda(t) - J_\lambda^t(x_\lambda(t))\rangle \leq 2\lambda\theta(t)\|A_t^\circ(x_\lambda(t))\|,$$

qui se simplifie encore par l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}^c)$

$$\langle \dot{x}_\lambda(t) - \dot{x}_\mu(t), x_\lambda(t) - J_\lambda^t(x_\lambda(t))\rangle \leq 2\lambda\theta(t)(\alpha(t)\|x_\lambda(t)\| + \beta(t)).$$

D'apré l'inégalité (2.3) alors

$$\langle \dot{x}_\lambda(t) - \dot{x}_\mu(t), x_\lambda(t) - J_\lambda^t(x_\lambda(t))\rangle \leq 2\lambda\theta(t)(\alpha(t)\rho(t) + \beta(t)). \quad (2.7)$$

De même manière pour μ.

$$\langle \dot{x}_\lambda(t) - \dot{x}_\mu(t), x_\mu(t) - J_\mu^t(x_\mu(t))\rangle \leq 2\mu\theta(t)(\alpha(t)\rho(t) + \beta(t)). \quad (2.8)$$

Maintenant, on sait que

$$\langle f(t,x_\lambda(t))-f(t,x_\mu(t)), J^t_\lambda(x_\lambda(t))-J^t_\mu(x_\mu(t))\rangle \leq \|f(t,x_\lambda(t))-f(t,x_\mu(t))\|\|J^t_\lambda(x_\lambda(t))-J^t_\mu(x_\mu(t))\|.$$

D'après l'hypothèse $(\mathcal{H}^b_f)$, on trouve

$$\begin{aligned}\langle f(t,x_\lambda(t)) - f(t,x_\mu(t)), J^t_\lambda(x_\lambda(t)) - J^t_\mu(x_\mu(t))\rangle &\leq \kappa(t)\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\|\|J^t_\lambda(x_\lambda(t)) - J^t_\mu(x_\mu(t))\| \\ &\leq \kappa(t)\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\|\|J^t_\lambda(x_\lambda(t)) - J^t_\mu(x_\mu(t)) \\ &+ x_\lambda(t) - x_\lambda(t) - x_\mu(t) + x_\mu(t)\| \\ &\leq \kappa(t)\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\|\Big(\|J^t_\lambda(x_\lambda(t)) - x_\lambda(t)\| \\ &+ \|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\| + \|J^t_\mu(x_\mu(t)) - x_\mu(t)\|\Big) \\ &= \kappa(t)\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\|^2 + \kappa(t)\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\| \\ &\Big(\|J^t_\lambda(x_\lambda(t)) - x_\lambda(t)\| + \|J^t_\mu(x_\mu(t)) - x_\mu(t)\|\Big).\end{aligned}$$

De la Propriété (iv) du Lemme 2.1.1, on obtient

$$\begin{aligned}\langle f(t,x_\lambda(t)) - f(t,x_\mu(t)), J^t_\lambda(x_\lambda(t)) - J^t_\mu(x_\mu(t))\rangle &\leq \kappa(t)\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\|^2 + \kappa(t)\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\| \\ &\Big(\lambda\|A^\circ_t(x_\lambda(t))\| + \mu\|A^\circ_t(x_\mu(t))\|\Big).\end{aligned}$$

De l'hypothèse $(\mathcal{H}^c_\mathcal{A})$, on trouve

$$\begin{aligned}\langle f(t,x_\lambda(t)) - f(t,x_\mu(t)), J^t_\lambda(x_\lambda(t)) - J^t_\mu(x_\mu(t))\rangle &\leq \kappa(t)\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\|^2 + \kappa(t)\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\| \\ &\Big[\lambda\Big(\alpha(t)\|x_\lambda(t))\| + \beta(t)\Big) + \mu\Big(\alpha(t)\|x_\mu(t)\| + \beta(t)\Big)\Big] \\ &\leq \kappa(t)\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\|^2 + \kappa(t)\Big[\lambda\Big(\alpha(t)\rho(t)+\beta(t)\Big) \\ &+ \mu\Big(\alpha(t)\rho(t)+\beta(t)\Big)\Big]\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\| \\ &\leq \kappa(t)\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\|^2 + \kappa(t)\Big[\lambda\Big(\alpha(t)\rho(t)+\beta(t)\Big) \\ &+ \mu\Big(\alpha(t)\rho(t)+\beta(t)\Big)\Big]\Big(\|x_\lambda(t)\| + \|x_\mu(t)\|\Big) \\ &\leq \kappa(t)\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\|^2 + \kappa(t)\Big[\lambda\Big(\alpha(t)\rho(t)+\beta(t)\Big) \\ &+ \mu\Big(\alpha(t)\rho(t)+\beta(t)\Big)\Big]\Big(\rho(t)+\rho(t)\Big) \\ &\leq \kappa(t)\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\|^2 + 2\kappa(t)\rho(t)(\lambda+\mu) \\ &\Big(\alpha(t)\rho(t)+\beta(t)\Big) \\ &\leq 2\kappa(t)h(t) + 2(\lambda+\mu)\kappa(t)\rho(t)\Big(\alpha(t)\rho(t)+\beta(t)\Big).\end{aligned} \tag{2.9}$$

En combinant (2.7), (2.8), et (2.9) dans (2.6), il s'en suit que

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t) &\leq 2(\lambda+\mu)\theta(t)\Big(\alpha(t)\rho(t)+\beta(t)\Big)+2\kappa(t)h(t)+2(\lambda+\mu)\kappa(t)\Big(\alpha(t)\rho(t)+\beta(t)\Big)\rho(t)\\ &\leq 2(\lambda+\mu)\Big(\theta(t)+\kappa(t)\rho(t)\Big)\Big(\alpha(t)\rho(t)+\beta(t)\Big)+2\kappa(t)h(t).\end{aligned}$$

On utilisant le Lemme de Gronwall 1.5.1, on obtient.

$$\phi(t) \leq 2(\lambda+\mu)\int_0^t \Big(\kappa(s)\rho(s)+\theta(s)\Big)\Big(\alpha(s)\rho(s)+\beta(s)\Big)\exp\Big(2\int_s^t \kappa(\tau)d\tau\Big)ds.$$

Comme par définition $\phi(t)=\frac{1}{2}\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\|^2$, pour tout $t\in[0,T]$ alors,

$$\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\|^2 \leq 4(\lambda+\mu)\int_0^t \Big(\kappa(s)\rho(s)+\theta(s)\Big)\Big(\alpha(s)\rho(s)+\beta(s)\Big)\exp\Big(2\int_s^t \kappa(\tau)d\tau\Big)ds.$$

D'où, l'estimation

$$\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\|^2 \leq 4(\lambda+\mu)\int_0^t \sigma(s)\ ds, t\in[0,T], \tag{2.10}$$

et

$$\sigma(s)=\Big(\kappa(s)\rho(s)+\theta(s)\Big)\Big(\alpha(s)\rho(s)+\beta(s)\Big)\exp\Big(2\int_s^t \kappa(\tau)d\tau\Big), t\in[0,T],$$

par conséquent

$$\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\|_\infty := \max_{t\in[0,T]}\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\| \leq 2\sqrt{\|\sigma\|_{L^1([0,T];\mathbb{R}_+)}}\sqrt{\lambda+\mu}, t\in[0,T],$$

alors

$$\lim_{\lambda,\mu\downarrow 0}\max_{t\in[0,T]}\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\|=0,$$

cela signifie que la suite $(x_\lambda)_{\lambda>0}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $C([0,T];H)$ alors, elle converge uniformément sur $[0,T]$ vers une application $x(\cdot)\in C([0,T];H)$.

Étape 3 :

Montrons que $x(\cdot)$ est absolument continue et la suite $(\dot{x}_\lambda)_\lambda$ converge faiblement dans $L^2([0,T];H)$ vers $\dot{x}(\cdot)$.

D'après nos hypothèses, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in L^2([0,T];\mathbb{R}_+)\subset L^1([0,T];\mathbb{R}_+)$, alors

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \Big(\|x_0\|+\int_0^t(\beta(s)+\delta(s))ds\Big)\exp\Big(\int_0^t(\alpha(s)+\gamma(s))ds\Big)\\ &\leq \Big(\|x_0\|+\|\beta+\delta\|_{L^1}\Big)\exp\Big(\|\alpha+\gamma\|_{L^1}\Big),\end{aligned}$$

cela entraine que $\rho(\cdot)\in L^2([0,T];\mathbb{R}_+)$. Aussi

$$\theta(t)=(\alpha(t)+\gamma(t))\rho(t)+\beta(t)+\delta(t)\Rightarrow\theta(\cdot)\in L^2([0,T];\mathbb{R}_+),$$

il s'ensuit que pour tout $\lambda > 0$

$$\|\dot{x}_\lambda(t)\| \leq \theta(t), \forall t \in [0,T] \Rightarrow \dot{x}_\lambda(\cdot) \in L^2([0,T];H),$$

en vertu du Théorème 1.3.1, on peut extraire une sous-suite $(\dot{x}_{\lambda_n}), \lambda_n > 0$ telle que

$$\dot{x}_{\lambda_n} \xrightarrow[n\to\infty]{w} v \text{ dans } L^2([0,T];H) \quad (\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0),$$

c'est-à-dire

$$\int_0^T \langle \dot{x}_{\lambda_n}(r), \eta(r)\rangle dr \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \langle v(r), \eta(r)\rangle dr \text{ dans } H.$$

En particulier, pour $\eta(\cdot) = z \cdot \mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot), t \in [0,T]$, on obtient

$$\int_0^T \langle \dot{x}_{\lambda_n}(r), \eta(r)\rangle dr = \int_0^T \langle \dot{x}_{\lambda_n}(r), z \cdot \mathbf{1}_{[0,t]}(r)\rangle dr = \int_0^t \langle \dot{x}_{\lambda_n}(r), z\rangle dr = \langle \int_0^t \dot{x}_{\lambda_n}(r) dr, z\rangle,$$

aussi

$$\int_0^T \langle v(r), \eta(r)\rangle dr = \langle \int_0^t v(r) dr, z\rangle,$$

il vient

$$\langle \int_0^t \dot{x}_{\lambda_n}(r) dr, z\rangle \longrightarrow \langle \int_0^t v(r) dr, z\rangle, \forall z \in H,$$

donc

$$\begin{aligned} &\int_0^t \dot{x}_{\lambda_n}(r) dr \xrightarrow[n\to\infty]{w} \int_0^t v(r) dr \text{ dans } H, \\ &\Rightarrow x_{\lambda_n}(t) = x_0 + \int_0^t \dot{x}_{\lambda_n}(r) dr \xrightarrow{w} x_0 + \int_0^t v(r) dr \text{ dans } H. \end{aligned}$$

Comme $(x_\lambda(t))_\lambda$ converge fortement vers $x(t)$ alors toutes ses sous-suites convergent fortement et faiblement vers la même limite $x(t)$. Cela nous permet d'écrire

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(r) dr \quad \text{avec} \quad v \in L^1([0,T];H).$$

Le Théorème 1.5.1 assure que l'application $x(\cdot)$ est absolument continue de plus, elle est presque partout dérivable et $\dot{x}(\cdot) = v(\cdot)$ p.p $t \in [0,T]$.

Étape 4 :

Montrons que $x(\cdot)$ est la solution désirée.

On définit la multi-application $\mathbb{G} : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ par

$$\mathbb{G}(t,u) := A_t(u).$$

Il résulte de la Proposition 1.4.2 que la multi-application $\mathbb{G}$ est à valeurs convexes et fermées. De plus, d'après les hypothèse supposées et les résultat démontrés ci-dessus on a

$$-\dot{x}_\lambda(t) + f(t, x_\lambda(t)) \in \mathbb{G}(t, J_\lambda^t(x_\lambda(t))) \text{ p.p } t \in [0,T]. \tag{$\mathcal{W}1$}$$

En effet,d'après $(\mathcal{P}_\lambda)$ et la Propriété (i) du Lemme 2.1.1 on a

$$-\dot{x}_\lambda(t) + f(t, x_\lambda(t)) = \lambda^{-1}(x_\lambda(t) - J_\lambda^t(x_\lambda(t))) \in A_t(J_\lambda^t(x_\lambda(t))).$$

D'autre part,

$$\begin{cases} t \rightrightarrows \mathbb{G}(t,u) \text{ est mesurable et } x \rightrightarrows \mathbb{G}(t,u) \text{ est fortement-faiblement} \\ \text{semi-continue supérieurement grâce à } (\mathcal{H}_{\mathcal{A}}^a) \text{ et la propriété (v) du Lemme 2.1.1.} \end{cases} \tag{$\mathcal{W}2$}$$

La Propriété (iv) du Lemme 2.1.1 assure que pour tout $t \in [0,T]$ et tout $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \|J_\lambda^t(x_\lambda(t)) - x(t)\| &= \|J_\lambda^t(x_\lambda(t)) - x_\lambda(t) + x_\lambda(t) - x(t)\| \\ &\leq \lambda \|A_t^\circ(x_\lambda(t))\| + \|x_\lambda(t) - x(t)\| \\ &\underset{(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}^c)}{\leq} \lambda(\alpha(t)\rho(t) + \beta(t)) + \|x_\lambda(t) - x(t)\| \end{aligned}$$

ce qui justifie la convergence suivante

$$(J_\lambda^t(x_\lambda(\cdot)))_\lambda \text{ vers } x(\cdot) \text{ car } x_\lambda(\cdot) \text{ converge uniformément vers } x(\cdot). \tag{$\mathcal{W}3$}$$

On a également selon $(\mathcal{H}_f^b)$

$$\|f(t, x_\lambda(t)) - f(t, x(t))\| \leq \kappa(t)\|x_\lambda(t) - x(t)\|,$$

alors $\Big(f(\cdot, x_\lambda(\cdot))\Big)_\lambda$ converge uniformément vers $f(\cdot, x(\cdot))$ et par conséquent

$$f(\cdot, x_\lambda(\cdot)) \xrightarrow{w} f(\cdot, x(\cdot)) \text{ dans } L^1([0,T]; H).$$

De plus, l'inégalité $\|\dot{x}_\lambda(t)\| \leq \theta(t)$ avec $\theta(\cdot) \in L^1([0,T]; \mathbb{R}_+)$ montre bien que la suite $(\dot{x}_\lambda)_\lambda$ est faiblement compacte dans $L^1([0,T]; H)$. Alors, on peut en extraire une sous-suite, notée également $(\dot{x}_{\lambda_n})_n$, telle que $(\dot{x}_{\lambda_n})_n$ converge faiblement vers $\dot{x}(\cdot)$ dans $L^1([0,T]; H)$. Finalement

$$-\dot{x}_{\lambda_n}(\cdot) + f(\cdot, x_{\lambda_n}(\cdot)) \xrightarrow{w} -\dot{x}(\cdot) + f(\cdot, x(\cdot)) \text{ dans } L^1([0,T]; H). \tag{$\mathcal{W}4$}$$

En mettant les assertions $(\mathcal{W}1) - (\mathcal{W}4)$ ensemble et en utilisant le Théorème 1.5.2, on déduit l'inclusion

$$-\dot{x}(t) + f(t, x(t)) \in \mathbb{G}(t, x(t)) = A_t(x(t)) \text{ p.p } t \in [0,T],$$

ce qui montre que $x(\cdot)$ est une solution du problème (2.1). Il nous reste qu'à vérifier les estimation (2.2). D'après ce qui précède on a : $\|x_\lambda(t)\| \leq \rho(t)$, alors

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \|x_\lambda(t)\| = \|x(t)\| \leq \rho(t).$$

Soit $t \in]0,T[$ tel que x_{λ_n} et x soient dérivable en t et soit $h > 0$ tel que $t+h \in]0,T[$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x_{\lambda_n}(t+h) - x_{\lambda_n}(t) = x_0 + \int_0^{t+h} \dot{x}_{\lambda_n}(r)dr - x_0 - \int_0^t \dot{x}_{\lambda_n}(r)dr = \int_t^{t+h} \dot{x}_{\lambda_n}(r)dr,$$

donc

$$\frac{\|x_{\lambda_n}(t+h) - x_{\lambda_n}(t)\|}{h} \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|\dot{x}_{\lambda_n}(r)\|dr \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \theta(r)dr.$$

En faisant tendre $n \to +\infty$ on obtient

$$\frac{\|x(t+h) - x(t)\|}{h} \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \theta(r)dr,$$

lorsque $h \downarrow 0$, on trouve $\|\dot{x}(t)\| \leq \theta(t)$, ce qui donne l'inégalité souhaitée.

II. Unicité

On suppose qu'il existe deux solutions $x_i(\cdot), i = 1,2$ du problème (2.1), i.e.,

$$-\dot{x}_i(t) + f(t, x_i(t)) \in A_t(x_i(t)) \ \ i \in \{1,2\}.$$

Comme l'opérateur A_t est monotone alors

$$\begin{aligned}
&\langle -\dot{x}_1(t) + f(t,x_1(t)) + \dot{x}_2(t) - f(t,x_2(t)), x_1(t) - x_2(t)\rangle \geq 0 \\
&\Rightarrow \langle \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t), x_1(t) - x_2(t)\rangle \leq \langle f(t,x_1(t)) - f(t,x_2(t)), x_1(t) - x_2(t)\rangle.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, si $y(\cdot) : [0,T] \to H$ est dérivable en t alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 = \langle \dot{y}(t), y(t)\rangle,$$

cela donne $\langle \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t), x_1(t) - x_2(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x_1(t) - x_2(t)\|^2$ et par suite

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x_1(t) - x_2(t)\|^2 &\leq \|f(t,x_1(t)) - f(t,x_2(t))\|\|x_1(t) - x_2(t)\| \\
&\leq 2\kappa(t)\|x_1(t) - x_2(t)\|^2.
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall (avec $\alpha = 0, b(t) = 0, a(t) = 2\kappa(t)$), on obtient

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \|x_1(0) - x_2(0)\|\sqrt{\exp(2\|\kappa\|_{L^1})}.$$

Comme les valeurs initiales sont égales $x_1(0) = x_2(0) = x_0$ alors les deux solutions x_1 et x_2 sont égales. Ce qui traduit l'unicité de la solution. □

L'exemple suivant montre que si le domaine de A_t est un sous-ensemble strictement inclus dans H et sans aucun contrôle sur les ensembles $Dom(A_t)$, alors l'existence d'une solution même à variation bornée pour (2.1) n'est pas assurée.

Exemple 2.3.1. *Soit* $(\alpha_n)_n$ *telle que* $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < 1$ *et* $\alpha_n \to 1$ *lorsque* $n \to \infty$. *Soient* Ω_1 *et* Ω_2 *les ensembles définis par*

$$\begin{aligned}\Omega_1 &:= \bigcup_{i\geq 0}[\alpha_{2i+1}, \alpha_{2i+2}[= [\alpha_1, \alpha_2[\cup[\alpha_3, \alpha_4[\cup \ldots,\\ \Omega_2 &:= \bigcup_{i\geq 1}[\alpha_{2i}, \alpha_{2i+1}[\cup\{1\} = [\alpha_2, \alpha_3[\cup[\alpha_4, \alpha_5[\cup \ldots \cup \{1\}.\end{aligned}$$

On définit l'opérateur $A_t : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *par*

$$A_t(x) = \begin{cases} N_{\{0\}}(x) & si \quad t \in \Omega_1 \\ \\ N_{\{1\}}(x) & si \quad t \in \Omega_2. \end{cases}$$

On sait que

$$N_{\{a\}}(x) = \begin{cases} \emptyset \ si \ x \neq a \\ \mathbb{R} \ si \ x = a, \end{cases}$$

alors

$$A_t(x) = \begin{cases} \left.\begin{matrix} \emptyset \ si \ x \neq 0 \\ \mathbb{R} \ si \ x = 0 \end{matrix}\right\} & si\, t \in \Omega_1. \\ \\ \left.\begin{matrix} \emptyset \quad si \quad x \neq 1 \\ \mathbb{R} \quad si \quad x = 1 \end{matrix}\right\} & si\, t \in \Omega_2. \end{cases}$$

Cela montre que

$$Dom(A_t) = \begin{cases} \{0\} \ si \ t \in \Omega_1, \\ \{1\} \ si \ t \in \Omega_2. \end{cases} = \{0, 1\} \subsetneq \mathbb{R}.$$

On définit maintenant le problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} -\dot{x}(t) \in A_t(x(t)), \\ x(0) = 0 \Rightarrow x(0) \in \mathrm{Dom}\,(A_t). \end{cases}$$

On suppose que $x(\cdot)$ *soit une solution du problème* $(\mathcal{P})$ *alors, il faut que* $x(t) \in \mathrm{Dom}\,(A_t)$ *i.e.,*

$$x(t) = \begin{cases} 0 \quad si \quad t \in \Omega_1 \\ 1 \quad si \quad t \in \Omega_2. \end{cases} \Rightarrow x(t) = \begin{cases} 0 \quad si \quad t \in \mathrm{Int}\,\Omega_1 \\ 1 \quad si \quad t \in \mathrm{Int}\,\Omega_2. \end{cases}$$

Soit $(\gamma_n)_n$ *telle que* $\gamma_n \in]\alpha_n, \alpha_{n+1}[$ *alors*

$$\gamma_n \in \operatorname{Int} \Omega_1 \Rightarrow \gamma_{n+1} \in \operatorname{Int} \Omega_2$$

alors $\|x(\gamma_n) - x(\gamma_{n+1})\| = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Cela montre que*

$$\operatorname{var}(x, [0,1]) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\|x(\gamma_{n+1}) - x(\gamma_n)\|}_{=1} = +\infty,$$

on déduit que $x(t)$ *n'est pas un variation bornée.*

Chapitre 3

Application : Processus de rafle implicite avec une contrainte sur la vitesse

La notion de processus de rafle, sweeping process en anglais, a été introduite en 1971 dans un célèbre exposé de J.J. Moreau [21]. Ce type de problèmes consiste à étudier l'existence d'une trajectoire $x : [0, T] \to H$ telle que $x(t) \in C(t)$ et

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)), \quad \text{presque pour tout } t \in [0, T] \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où H est un espace de Hilbert, $C : [0, T] \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs convexes fermées, $N_{C(t)}(\cdot)$ représente le cône normal à $C(t)$ au point $x(t)$ au sens d'analyse convexe et $\dot{x}(t)$ est la dérivée de x au point t.

Dans ce chapitre, on donne une application du problème (2.1) où on va utiliser le Théorème 2.3.1 pour étudier une autre variante de processus de rafle donnée par l'inclusion suivante

$$(\mathcal{SC}) \begin{cases} A_1\dot{x}(t) + A_0x(t) - f(t) \in -N(C(t); \dot{x}) \text{ p.p } t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \in H, \end{cases}$$

où $A_1, A_0 : H \longrightarrow H$ sont deux opérateurs linéaires semi-définis symétriques bornés et $f : [0, T] \to H$ est une application. Cette variante a été étudiée pour la première fois dans [2] où les ensembles $C(t)$ sont convexes, fermés et bougent de façon absolument continue tels que $C(0)$ est borné. Les auteurs ont démontré que le problème $(\mathcal{SC})$ est équivalent à l'inégalité variationnelle d'évolution suivante : Trouver $x(\cdot) : [0, T] \to H$ avec $x(0) = x_0 \in H$ telle que $\dot{x}(t) \in C(t)$ p.p.

$t \in [0, T]$ et

$$a_0(x(t), v - \dot{x}(t)) + a_1(\dot{x}(t), v - \dot{x}(t)) \geq \langle f(t), v - \dot{x}(t) \rangle \quad \text{pour tout } v \in C(t), \tag{3.2}$$

où $a_0(\cdot, \cdot)$ et $a_1(\cdot, \cdot)$ sont des formes bilinéaires, bornées et symétriques associées respectivement aux opérateurs A_0 et A_1. La preuve se déduit directement de la définition du cône normal au sens d'analyse convexe. Plus tard, les auteurs dans [3] ont étendu le résultat d'existence aux ensembles qui ne sont pas forcément bornés avec la condition suivante : il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\langle A_1 x, x \rangle \geq \alpha \|x\| - \beta \text{ pour tout } x \in C(0).$$

On trouve également une autre extension de cette étude dans [18] où $(C(t))_t$ sont mesurables avec $t \mapsto d_{C(t)}(0)$ est intégrable.

Lemme 3.0.1. *On suppose que A_1 soit linéaire, continu et symétrique tel que $\langle A_1 x, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$. Alors*

$$(\mathcal{SC}) \Leftrightarrow \dot{x}(t) \in \partial g_t^*(-A_0 x(t) + f(t)),$$

où

$$g_t(x) = \frac{1}{2}\langle A_1 x, x \rangle + \psi_{C(t)}(x).$$

Démonstration.
En utilisant le Lemme 1.5.2 on obtient

$$\begin{aligned}
A_0 x(t) + A_1 \dot{x}(t) - f(t) \in -N_{C(t)}(\dot{x}(t)) &\Leftrightarrow -A_0 x(t) + f(t) \in N_{C(t)}(\dot{x}(t)) + A_1(\dot{x}(t)) \\
&\Leftrightarrow -A_0 x(t) + f(t) \in \Big[A_1(\cdot) + N_{C(t)}(\cdot)\Big](\dot{x}(t)) \\
&\Leftrightarrow -A_0 x(t) + f(t) \in \Big[\underbrace{\nabla \varphi_{A_1}(\cdot)}_{=\partial \varphi_{A_1}(\cdot)} + \partial \psi_{C(t)}(\cdot)\Big](\dot{x}(t)) \\
&\Leftrightarrow -A_0 x(t) + f(t) \in \partial \underbrace{\Big(\varphi_{A_1} + \psi_{C(t)}\Big)}_{=g_t}(\dot{x}(t)) \\
&\overset{(1.4)}{\Longleftrightarrow} \dot{x}(t) \in \partial \underbrace{\Big(\varphi_{A_1} + \psi_{C(t)}\Big)^*}_{=g_t^*}(-A_0 x(t) + f(t)).
\end{aligned}$$

□

Afin de prouver le résultat d'existence du problème $(\mathcal{SC})$, on considère les deux hypothèses suivantes

Hypothèse 1

Les ensembles $C(t)$ sont non vides, fermés et convexes. De plus, la multi-application $C : [0,T] \rightrightarrows H$ est mesurable et la fonction $t \mapsto d^2_{C(t)}(0)$ est intégrable.

Hypothèse 2

$A_1, A_0 \in H \to H$ sont deux opérateurs semi-définis, linéaires, symétriques et bornés. De plus, il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\langle A_1 x, x\rangle \geq \alpha \|x\|^2 - \beta \ \text{ pour tout } x \in C(t) \text{ et } t \in [0,T].$$

Lemme 3.0.2. *Supposons que les hypothèses* 1 *et* 2 *aient lieu. Considérons la fonction*

$$g_t(x) = \frac{1}{2}\langle A_1 x, x\rangle + \psi_{C(t)}(x),$$

alors

$$\sup_{w \in \partial g_t *(z)} \|w\| \leq \frac{\sqrt{2+\alpha}}{\alpha}\|z\| + \nu(t) \qquad \textit{pour tout } z \in H,$$

où

$$\nu(t) := \frac{\sqrt{2\|A_1\|^2 + \alpha}}{\alpha} d_{C(t)}(0) + \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha}}.$$

Démonstration.
Soit $z \in H$ alors

$$\begin{aligned} w \in \partial g_t^*(z) &\overset{(1.4)}{\Longleftrightarrow} z \in \partial g_t(w) = \partial(\frac{1}{2}\langle A_1 w, w\rangle + \psi_{C(t)}(w)) \\ &\Leftrightarrow z \in A_1 w + N_{C(t)}(w) \\ &\Leftrightarrow z - A_1 w \in N_{C(t)}(w), \end{aligned}$$

la définition du cône normale montre que pour tout $y \in C(t)$

$$\begin{aligned} &\langle z, y\rangle - \langle z, w\rangle - \langle A_1 w, y\rangle + \langle A_1 w, w\rangle = \langle z - A_1 w, y - w\rangle \leq 0 \\ &\Rightarrow \langle A_1 w, w\rangle \leq \langle z, w - y\rangle + \langle A_1 w, y\rangle \\ &\Rightarrow \langle A_1 w, w\rangle \leq \Big(\|z\| + \|A_1\|\|w\|\Big)\|y\| + \|z\|\|w\|. \end{aligned}$$

En particulier, pour $y = \operatorname{Proj}_{C(t)}(0) \in C(t)$ on obtient

$$\|y\| = \inf_{z \in C(t)} \|z - 0\| = d_{C(t)}(0),$$

donc
$$\langle A_1 w, w\rangle \leq \Big(\|z\| + \|A_1\|\|w\|\Big) d_{C(t)}(0) + \|w\|\|z\|.$$
En vertu de l'Hypothèse 2, on obtient
$$\alpha\|w\|^2 - \beta \leq \Big(\|z\| + \|A_1\|\|w\|\Big) d_{C(t)}(0) + \|w\|\|z\|,$$
d'où
$$\alpha\|w\|^2 \leq \Big(\|z\| + \|A_1\|\|w\|\Big) d_{C(t)}(0) + \|w\|\|z\| + \beta. \tag{3.3}$$
En utilisant l'inégalité
$$2ab \leq \frac{2}{\alpha}a^2 + \frac{\alpha}{2}b^2, \quad a, b \in \mathbb{R},$$
il s'ensuit que
$$\begin{aligned} 2\|A_1\|\|w\| d_{C(t)}(0) &\leq \frac{2}{\alpha}\|A_1\|^2 d^2_{C(t)}(0) + \frac{\alpha}{2}\|w\|^2 \\ 2\|w\|\|z\| &\leq \frac{2}{\alpha}\|z\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|w\|^2. \end{aligned}$$
En combinant les deux dernières inégalités avec (3.3), il vient
$$\begin{aligned} \alpha\|w\|^2 &\leq \|z\| d_{C(t)}(0) + \|A_1\|\|w\| d_{C(t)}(0) + \|w\|\|z\| + \beta \\ &\leq \|z\| d_{C(t)}(0) + \frac{1}{\alpha}\|A_1\|^2 d^2_{C(t)}(0) + \frac{\alpha}{2}\|w\|^2 + \frac{1}{\alpha}\|z\|^2 + \beta \\ &\leq \frac{1}{2}\|z\|^2 + \frac{1}{2} d^2_{C(t)}(0) + \frac{1}{\alpha}\|A_1\|^2 d^2_{C(t)}(0) + \frac{\alpha}{2}\|w\|^2 + \frac{1}{\alpha}\|z\|^2 + \beta \end{aligned}$$
alors
$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2}\|w\|^2 &\leq \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}\Big)\|z\|^2 + \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}\|A_1\|^2\Big) d^2_{C(t)}(0) + \beta \\ \Rightarrow \alpha\|w\|^2 &\leq \Big(1 + \frac{2}{\alpha}\Big)\|z\|^2 + \Big(1 + \frac{2}{\alpha}\|A_1\|^2\Big) d^2_{C(t)}(0) + 2\beta. \end{aligned}$$

□

On arrive maintenant à énoncer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.0.2. *Supposons les* **Hypothèses 1 et 2** *aient lieu. On suppose également que $f \in L^2([0,T]; H)$. Alors, pour toue condition initiale $x_0 \in H$, le problème*
$$(\mathcal{S}) \begin{cases} A_1\dot{x}(t) + A_0 x(t) - f(t) \in -N(C(t); \dot{x}(t)) \quad p.p\ t \in [0,T], \\ x(0) = x_0 \in H. \end{cases} \tag{3.4}$$
A au moins une solution dans $W^{1,2}([0,T]; H)$.

Démonstration.

Dans cette preuve, on traite seulement le cas où la condition supplémentaire "A_0 défini positif" est supposée.

Soit g_t la fonction définie par

$$g_t(x) := \frac{1}{2}\langle A_1 x, x\rangle + \psi_{C(t)}(x) \quad x \in H.$$

Comme l'ensemble $C(t)$ est convexe fermé alors la fonction g_t est propre, convexe et semi-continue inférieure. Aussi, comme l'opérateur A_0 est défini positif, alors A_0 se décompose sous la forme $A = PP^t$ ou $P : H \to H$ est inversible. Pour tout $t \in [0, T]$, on définit la fonction φ_t par

$$\varphi_t(z) = g_t^*(Pz + f(t)), z \in H.$$

On montre que : **une fonction $x(\cdot)$ est une solution du problème $(\mathcal{SC})$ si et seulement si $z(\cdot) = -P^t x(\cdot)$ est une solution de l'inclusion différentielle :**

$$-\dot{z}(t) \in \partial\varphi_t(z(t)) \text{ p.p } t \in [0, T]. \tag{3.5}$$

En effet, soit $x(\cdot)$ une solution de $(\mathcal{SC})$ alors

$$\begin{aligned} & -A_0 x(t) + f(t) \in \partial g_t(\dot{x}(t)) \\ & \Rightarrow \dot{x}(t) \in \partial g_t^*(-A_0 x(t) + f(t)) = \partial g_t^*(-P\underbrace{P^t x(t)}_{=-z(t)} + f(t)), \end{aligned}$$

donc

$$\dot{z}(t) = -P^t \dot{x}(t) \in -P^t \partial g_t^*(Pz(t) + f(t)), \tag{3.6}$$

mais

$$\partial\varphi_t(z(t)) = \partial\bigg(g_t^*(Pz + f(t))\bigg) = P^t \partial g_t^*(Pz(t) + f(t))$$

de (3.6), on déduit que

$$\dot{z}(t) \in -\partial\varphi_t(z(t)).$$

Réciproquement, on suppose que $z(\cdot)$ est une solution de (3.5) alors

$$z(t) = -p^t x(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = (p^t)^{-1}\dot{z}(t),$$

cela donne

$$\dot{x}(t) = -(p^t)^{-1}\partial\varphi_t(z(t)) = -\partial g_t^*(-A_0 x(t) + f(t)),$$

ce qui montre l'équivalence souhaitée. Finalement, pour terminer la preuve, il suffit de mettre $A_t = \partial\varphi_t$ et montrer que A_t vérifie les conditions du Théorème 2.3.1, i.e, l'hypothèse $(\mathcal{H}_\mathcal{A})$. $\square$

Conclusion

Dans ce travail, on a prouvé le caractère bien posé d'un problème d'évolution gouvernée par un opérateur maximal monotone dépendant du temps. La technique de régularisation de Moreau-Yosida, nous a permet d'établir ce résultat d'existence sans la condition de régularité sur l'opérateur maximal monotone.

Les résultats théoriques ont des applications intéressantes en mécanique et attirent l'attention pour des nouvelles recherches pour développer des nouvelles techniques.

Bibliographie

[1] **V. Acary, O. Bonnefon, B. Brogliato**, Nonsmooth modeling and simulation for switched circuits. Springer (2011).

[2] **S. Adly, T. Haddad, L. Thibault**, Convex sweeping process in the framework of measure differential inclusions and evolution variational inequalities. Math. Program. 148(1), 5–47 (2014).

[3] **S. Adly, B. K. Le**, On semicoercive sweeping process with velocity constraint. Optimi. Lett. 12(4), 831–843 (2018).

[4] **S. Aizicovici, V. Staicu,** *Multivalued evolution equations with nonlocal initial conditions in banach spaces.* NoDEA, Nonlinear Differential Equations Appl. 14(3), 361–376 (2007).

[5] **H. Attouch**, Familles d'opérateurs maximaux monotones et mesurabilité. Annali di Matematica pura ed applicata, 1979, 35-111.

[6] **H. Attouch, A. Damlamian**, On multivalued evolution equations in Hilbert spaces. Israel J. Math. 12, 373–390 (1972).

[7] **H. Attouch, A. Damlamian,** Problèmes d'évolution dans les Hilberts et applications. J. Math. Pures Appl. (9) 54, 53–74 (1975).

[8] **D. Azé**, Éléments d'analyse convexe et variationnelle, Éditions Ellipses, Paris, (1997).

[9] **D. Azzam-Laouir, C. Castaing, M.D.P Monteiro Marques,** Perturbed evolution prob- lems with continuous bounded variation in time and applications. Set-Valued Var. Anal. 26(3), 693–728 (2018).

[10] **H. H. Bauschke, P. L. Combettes**, *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*, 2nd end.Springer, cham (2017).

[11] **J. Borwein, J. Vanderwerff**, *Convex functions : constructions, characterizations and counterexamples,* Encyclopedia Math Appl., vol. 109. Cambridge University Press, Cambridge (2010).

[12] **H.Brezis**, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Vol. 2. No. 3. New York : Springer, 2011.

[13] **H. Brézis**,*Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London ; American El- sevier Publishing Co., Inc., New York (1973). North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50).

[14] **B. Brogliato**, Nonsmooth Mechanics, 3 edn. Springer (2016).

[15] **K. Deimling** , *Multivalued Differential Equations*, de Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl., vol. 1. Walter de Gruyter & Co., Berlin (1992).

[16] **L. Gasiński, N. S. Papageorgiou**, Nonlinear Analysis, Chapman and Hall/CRC, Vol 9 , New York, (2005).

[17] **J. B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal**, Fundamentals of convex analysis, Springer, (2004).

[18] **A. Jourani, E. Vilches**, A differential equation approach to implicit sweeping processes. J. Diff. Equ. 266(8), 5168–5184 (2019).

[19] **M. Kunze, Monteiro, M.D.P. Marques**, Bv solutions to evolution problems with time-dependent domains. Set-Valued Var. Anal. 5(1), 57–72 (1997).

[20] **G. Minty**, *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space*, Duke Math. J. 29 341-346 (1962).

[21] **J. J. Moreau**, Rafle par un convexe variable I. Travaux Sém. Anal. Convexe Montpellier Exposé 15. (1971).

[22] **J. Peypouquet, S. Sorin**, Evolution equations for maximal monotone operators : asymptotic analysis in continuous and discrete time. J. Convex Anal. 17(3-4), 1113–1163 (2010).

[23] **R. E. Showalter**, Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Patial Differential Equations. American Mathematical Society, Providence (1997).

[24] **A. Tanwani, B. Brogliato, C. Prieur**, Well-posedness and output regulation for implicit time-varying evolution variational inequalities. SIAM J. Control Optim. 56(2), 751–781 (2018).

[25] **E. Vilches, B.T. Nguyen**, Evolution inclusions governed by time-dependent maximal monotone operators with a full domain. Set-Valued and Variational Analysis, 2020, vol. 28, no 3, p. 569-581.

[26] **A. Vladimirov**, Nonstationary dissipative evolution equations in a Hilbert space. Nonlinear Anal. 17(6), 499–518 (1991).

[27] **A.A. Vladimirov,** Differential inclusions with nonstationary maximal monotone operators. Funktsional. Anal. i Prilozhen. 24(4), 14–24, 96 (1990).