République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Benyahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....

№ de série : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : EDP et Applications.

Thème

Analyse d'erreur a priori d'équation de Richards par la méthode spectrale

par

Kenza Mezenner

Devant le jury

Président	H. Benhassine	Maître de Conférences B	Université de Jijel
Encadreur	S. Maarouf	Maître de Conférences A	Université de Jijel
Co-Encadreur	Y. Daikh	Maître de Conférences A	Université de Jijel
Examinateur	S. Djemai	Maître de Conférences B	Université de Jijel

Promotion **2021/2022**

Remerciements

Tout d'abord et avant tout, je remercie ALLAH qui m'a donné la force, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et gratitude à mon encadreur Mme Sarra Maarouf, pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour ses conseils avec beaucoup de patience et d'encouragements.

Je tiens à remercie mon Co-Encadreur, Mme Yassmina Daikh, pour sa présence, ses remarques et conseils, merci Madame

Je remercie aussi tous les enseignants du département de mathématique, en particulier du spécialité EDP.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail.
Mr Hani Benhassine, qui me fait l'honneur de présider ce jury.
Mme Samia Djemai, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier tous ceux qui se sont impliqués dans ce travail, directement ou indirectement.

Dédicace

Du profond du mon cœur, je dédie ce modeste travail :

À l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, à toi mon père Amor je t'aime.

À la personne la plus précieuse et la plus chére, ma mère Akila je t'aime.

À la lumière de ma vie, la source de mes efforts et mon bonheur, ma sœur Aziza que j'adore.

À tous mes très chers frères Yassine, Ismail et El Amine. À mes sœurs Hanane, Safia et Sarra.

À mes amies Romaissa, Ilham, Assala, Kawter et Achwak, elles n'ont cessé de consentir pour moi, par leur encouragement et leur profonde affection.

À mes collègues avec qui j'ai partagé des moments agréables et inoubliables Hakima, Lamia et Laila.

À tous les membres de la famille Mezenner.

À tous mes collègues du promotion 2^{eme} *année master EDP et Applications.*

À tous ceux qui ont une place dans mon cœur.

À tout qui m'aiment et que j'aime.

Kenza

TABLE DES MATIÈRES

Introduction **iv**

1 Préliminaires **1**

1.1 Espaces de Sobolev 1

1.2 L'espace H(div,$\mathbf{\Omega}$) 4

1.2.1 Opérateur de traces 4

1.2.2 L'opérateur de divergence 4

1.3 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle 5

1.4 Outils de la méthode spectrale 7

1.4.1 Formule de Gauss-Lobatto 7

1.4.2 Erreur d'interpolation polynomiale 8

2 Étude mathématique d'équation de Richards **10**

2.1 Position du problème 10

2.2 Formulation variationnelle 11

3 Problème discret **17**

3.1 Discrétisation temporelle 17

3.1.1 Problème semi-discret 17

3.1.2 Stabilité de la solution semi-discrète 24

3.2 Discrétisation spatiale 26

4 Estimation d'erreur a priori **30**

4.1 Nouvelle formulation 30

4.2 Estimation d'erreur en temps 37

4.3 Estimation d'erreur en espace 41

4.4 Lemmes techniques 42

4.5 Résultat et conclusion 54

Bibliographie **55**

QUELQUES NOTATIONS GÉNÉRALES

i.e.	c'est-à-dire
p.p.	presque partout
$\forall$	pour tout
$\mu(\cdot)$	la mesure de Lebègue
T	temps fixé, $T > 0$
$\boldsymbol{v}$	un vecteur ; i.e. $\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots v_d)$
$\cdot$	produit scalaire de deux vecteurs
∇	gradient ; i.e. $\nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial v}{\partial x_d}\right)$
$\nabla \cdot \boldsymbol{v}$	divergence d'un vecteur ; i.e. $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$
$\boldsymbol{n}$	vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$
X, Y	deux espaces de Hilbert
E	espace de Banach
E'	espace dual de E

INTRODUCTION

L'équation de Richards est l'une des nombreux modèles non linéaires de l'écoulement d'un fluide à travers un milieu poreux. Ce modèle, introduit pour la première fois par Lorenzo Richards en 1931, est utilisé largement dans les sciences physiques pour modéliser l'écoulement des fluides à travers des matériaux poreux non saturés.

L'équation suivante

$$\partial_t \widetilde{\Theta}(h_\omega) - \nabla \cdot \big(\Theta(h_\omega)\big) \nabla (h_\omega + z) = 0, \tag{1}$$

modélise l'écoulement d'un fluide mouillant, principalement de l'eau, dans la surface souterraine, donc dans un milieu non saturé, voir L.A. Richards [25] pour l'introduction de ce type de modèles. Contrairement aux systèmes de Darcy ou de Brinkman (voir [24] pour tous ces modèles), cette équation est hautement non linéaire : Cela découle du fait que, en raison de la présence d'air au-dessus de la surface, le milieu poreux n'est que partiellement saturé d'eau. En effet, ce modèle est dérivée en combinant l'équation généralisée de Darcy

$$\boldsymbol{q}_\omega = -K_\omega\big(\Theta(h_\omega)\big) \nabla (h_\omega + z),$$

avec la loi de conservation de masse

$$\partial_t \widetilde{\Theta}(h_\omega) + \nabla \cdot \boldsymbol{q}_\omega = 0,$$

en désignant par $\boldsymbol{q}_\omega$ le flux d'eau (aussi appelée vitesse de Darcy). L'inconnu est la hauteur de pression h_ω, où l'indice ω signifie "eau". Les coefficients sont la teneur en eau Θ et une perturbation de celle-ci notée $\widetilde{\Theta}$, le terme de perméabilité K_ω ici censé être scalaire, et la hauteur par rapport à la direction gravitationnelle, désigné par z. Nous nous référons à [4] pour les valeurs physiques de ces coefficients utilisés dans les expériences numériques.

L'argument clé pour l'analyse du problème (1) est d'utiliser le changement d'inconnues de Kirchhof. Après ça transformation, la nouvelle équation correspond au cadre général proposé dans [3]. Ainsi, l'existence et l'unicité d'une solution à cette équation lorsqu'elle est fournie avec une condition initiale.

Un grand nombre d'articles traitent des discrétisations des problèmes similaires, voir par exemple [16] et [17] pour la discrétisation par la méthode des éléments finis et aussi [15] pour une discrétisation par la méthode des volumes finis. Plus récemment, plusieurs discrétisations de l'équation de Richards ont été proposée, voir pa exemple [5, 23, 26]. La plupart d'entre elles reposent sur une formulation mixte de l'équation précédente, où le flux $\boldsymbol{q}_\omega$ est introduit comme seconde inconnue. Nous rappelons cette formulation mixte et son caractère bien posé.

Le problème (1) est généralement discrétisé en temps par le schéma implicite d'Euler, on utilise aussi ce schéma pour ses simplicité. Cependant, il semble qu'aucune discrétisation spectrale de ce problème n'ait été envisagée jusqu'à 2018.
Nous utilisons ici le changement d'inconnues de Kirchhof suivant :

$$x \mapsto \mathcal{K}(x) = \int_0^x K_\omega(\Theta(s))ds.$$

En effet, en fixant

$$u = \mathcal{K}(h_\omega), \quad b(u) = \Theta \circ \mathcal{K}^{-1}(u), \quad k \circ b(u) = K_\omega \circ \Theta \circ \mathcal{K}^{-1}(u),$$

on obtient le problème suivant qui est équivalent à (1)

$$\alpha\partial_t u + \partial_t b(u) - \nabla \cdot (\nabla u + k \circ b(u)\mathbf{e}_z) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\times]0, T[. \tag{2}$$

L'objectif de ce mémoire est de détailler quelques parties de l'article [1], en particulier la partie concernant l'étude d'une discrétisation combinant le schéma d'Euler en temps et une méthode spectrale en espace du problème continu ainsi que l'estimation d'erreur à priori. A noter que les méthodes spectrales sont des méthodes de Galerkin avec intégration numérique pour plus de détails voir [6, 7, 8, 9].

Ce mémoire est structuré de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous donnons les principales propriétés des espaces de Sobolev [2] et quelques rappels d'analyse fonctionnelle. Ensuite nous donnons les principales estimations d'erreur d'interpolation polynômiale aux nœuds de la formule de quadrature de Gauss-Lobatto en normes des espaces de Sobolev usuels sur $]-1,1[^d$ [6] [9].

Dans le deuxième chapitre, nous commençons par la présentation de l'équation de Richards. Nous écrivons ensuite la formulation variationnelle du problème aux limite associé et nous montrons aussi existence d'une formulation mixte équivalente à ce problème.

Dans le troisième chapitre, nous proposons une semi-discrétisation en temps, par un schéma d'Euler implicite d'ordre un. C'est une méthode numérique pour résoudre par approximation des équations différentielles du premier ordre avec un condition initiale. Puis nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution du problème semi-discret obtenu et nous établissons des estimations de stabilité de la solution. On termine ce chapitre par l'étude du problème discrétisé en espace par une méthode spectrale. Nous prouvons aussi que le problème discret est bien posé.

L'objet du dernier chapitre est l'analyse d'erreur a priori par application du théorème dû à Brezzi, Rappaz et Raviart [12].

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Le but de ce chapitre est d'introduire les outils mathématiques nécessaires pour une bonne compréhension de l'étude du problème traité dans ce mémoire. Les preuve des théorèmes et propositions de ce chapitre se trouvent dans les références [2, 14, 21, 19, 27, 10, 18, 20].

1.1 Espaces de Sobolev

Dans ce qui suit, d est un entier positif représentant la dimension de l'espace dans lequel on se place. Le symbole ∂ suivi d'un nom d'ouvert, désigne sa frontière.

Dans la suite, on note Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. On note $\boldsymbol{x}$ le point générique de Ω, et $(x_1, ..., x_d)$ ses coordonnées. Finalement, on utilise la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$, que l'on écrit soit $d\boldsymbol{x}$ soit $dx_1, ..., dx_d$.
On rappelle que $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω, et que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ désigne l'espaces des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $\mathbb{R}^d$. Le dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω. On introduit également $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ l'espaces des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$.
On note maintenant pour un nombre p supérieur ou égal à 1 l'espace

$$L^p(\Omega) = \big\{v \text{ mesurable dans } \Omega \int_\Omega |v(x)|^p dx < +\infty\big\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |v(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

En particulier pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions v mesurables telles que

$$\int_\Omega v^2(x)\, dx \;< +\infty.$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx.$$

On note $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ la norme

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \Big(\int_\Omega v^2(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On sait que l'espace $L^2(\Omega)$ contient les deux espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ comme sous-espaces denses, et que l'espace $L^2(\Omega)$ est contenu dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$. Le produit de dualité entre les espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$ étant alors une extension du produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. La théorie des distributions permet de définir, pour les fonctions de $L^2(\Omega)$, des dérivées d'ordre quelconque à valeurs dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.
On introduit l'espace $L^\infty(\Omega)$ suivant :

$$\begin{aligned} L^\infty(\Omega) = &\{f \text{ mesurable dans } \Omega \text{ telle qu'il existe une constante} C \geq 0 \\ &\text{vérifiant} |f(x)| \leq C \text{ p.p.sur } \Omega\}, \end{aligned}$$

muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Définition 1.1.1. *Pour tout entier $m \geq 0$, on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ de la façon suivante :*

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega),\, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega),\, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\, |\alpha| \leq m\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} (\partial^\alpha v)^2(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1}$$

Il est facile de vérifier que l'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire associé à la norme (1.1) :

$$(u, v)_{1,\Omega} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} (\partial^\alpha u)(x)(\partial^\alpha v)(x)\, dx\Big).$$

Une autre propriété fondamentale est rappelée dans le lemme suivant :

Lemme 1.1.1. *Pour tout entier positif m, l'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$.*

Ce résultat conduit à la définition suivante :

Définition 1.1.2. *Soit m un entier positif. On note $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $H^m(\Omega)$.*

L'espace $H_0^m(\Omega)$ est donc un sous-espace fermé de $H^m(\Omega)$.

On rappelle maintenant un résultat de base, connu sous le nom d'inégalité de Poincaré-Friedrichs.

Lemme 1.1.2 (Inégalité de Poincaré-Friedrichs). *Il existe une constante positive C ne dépendant que de la géométrie de Ω telle que toute fonction v de $H_0^1(\Omega)$ vérifie*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\Big(\int_\Omega \sum_{j=1}^{d} \big(\frac{\partial v}{\partial x_j}\big)^2(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

Cette inégalité permet de démontrer facilement le résultat suivant :

Corollaire 1.1.3. *La semi norme*

$$|v|_{H^1(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \sum_{j=1}^{d} \big(\frac{\partial v}{\partial x_j}\big)^2(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

est une norme sur l'espace $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Notation 1.1.1. *Soit E un espace de Banach séparable de norme $\|\cdot\|_E$. on note $\mathcal{C}^0(\Omega; E)$ l'espace des fonctions continues de $\overline{\Omega}$ à valeurs dans E.*
On notera $L^2(\Omega, E)$ l'espace des fonctions définies de Ω dans E telles que la fonction : $v \mapsto \|v\|_E$ appartienne à $L^2(\Omega)$. Pour tout entier $m \geq 0$, on désigne par $H^m(\Omega, E)$ l'espace des fonctions de $L^2(\Omega, E)$ dont toutes les dérivées partielles d'ordre $\leq m$ sont dans $L^2(\Omega, E)$, on définit $H_0^m(\Omega, E)$ comme l'adhérence dans $H^m(\Omega, E)$ des fonctions indéfiniment différentiables de Ω dans E à support compact dans Ω, et $H^{-m}(\Omega, E)$ comme son dual. Les espaces $H^m(\Omega, E)$ sont munis de la norme

$$\|v\|_{H^m(\Omega,E)} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} \|(\partial^\alpha v)(x)\|_E^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

et de la semi norme

$$|v|_{H^m(\Omega,E)} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha|= m} \|(\partial^\alpha v)(x)\|_E^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.1.3. *Soit m un entier positif. On note $H^{-m}(\Omega)$ le dual de $H_0^m(\Omega)$ et on le munit de la norme duale :*

$$\|f\|_{-m,\Omega} = \sup_{v\in H_0^m(\Omega)} \frac{< f, v >}{| v |_{m,\Omega}}, \tag{1.4}$$

où $< \cdot, \cdot >$ désigne le produit de dualité entre $H_0^m(\Omega)$ et son dual.

1.2 L'espace H(div,$\mathbf{\Omega}$)

1.2.1 Opérateur de traces

La caractérisation des espaces $H_0^m(\Omega)$ s'effectue au moyen du théorème de traces, que l'on trouve démontré dans Grisvard [19]. On suppose que l'ouvert Ω étant assez régulier, il existe en presque tout point de la frontière $\partial\Omega$, un vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ et dirigé vers l'extérieur de Ω, que l'on note $\boldsymbol{n}$.

Théorème 1.2.1. *L'application $\gamma_0 : u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \mapsto \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$ se prolonge de manière unique, et de façon continue à l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$. On appelle l'opérateur γ_0 ainsi obtenu :* ***l'application de traces.***
l'opérateur γ_0 n'est pas surjectif sur $L^2(\partial\Omega)$. L'image de γ_0 est un espace de Sobolev fractionnaire appelé $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et qui est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \inf\{\|u\|_{H^1(\Omega)},\ u \in H^1(\Omega), \gamma_0 u = v\}.$$

Dans ces conditions, il existe un opérateur linéaire continu $R_0 : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$, dit de relèvement, qui vérifie $\gamma_0 \circ R_0 = Id_{\partial\Omega}$.

1.2.2 L'opérateur de divergence

Définition 1.2.1. *L'opérateur de divergence appliqué à un champ de vecteurs $\boldsymbol{v}$ de composantes (v_x, v_y) en dimension $d = 2$ et (v_x, v_y, v_z) en dimension $d = 3$, est défini lorsque $\boldsymbol{v}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par la formule*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad \text{en dimension } d = 2,$$

et

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \text{en dimension } d = 3.$$

Nous pouvons étendre la définition de la divergence à un élément quelconque $\boldsymbol{v}$ *de* $\mathcal{D}'(\Omega)^d$ *par les formules de dualité suivantes :*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad < \nabla \cdot \boldsymbol{v}, \varphi >= - < v_x, \frac{\partial\varphi}{\partial x} > - < v_y, \frac{\partial\varphi}{\partial y} > \quad \text{en dimension } d = 2,$$

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad < \nabla\cdot \boldsymbol{v}, \varphi >= - < v_x, \frac{\partial\varphi}{\partial x} > - < v_y, \frac{\partial\varphi}{\partial y} > - < v_z, \frac{\partial\varphi}{\partial z} > \quad \text{en dimension } d = 3.$$

On est alors en mesure d'introduire l'espace $H(\mathrm{div}, \Omega)$ *comme le domaine de l'opérateur de divergence dans* $L^2(\Omega)^d$*, plus précisément comme*

$$H(\mathrm{div}, \Omega) = \{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d; \nabla \cdot \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)\}.$$

On le munit da la norme de graphe

$$\|\boldsymbol{v}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} = (\|\boldsymbol{v}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \|\nabla \cdot \boldsymbol{v}\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}},$$

et on note que c'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire associé à cette norme .

Lemme 1.2.1. *Pour* $\boldsymbol{v}$ *dans* $H(\mathrm{div}, \Omega)$*, alors* $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$ *est définit dans* $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$*, et on a la formule de Green,*

$$\forall\varphi \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{v}\,\varphi d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\,\varphi d\boldsymbol{x}. \tag{1.5}$$

1.3 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Dans ce paragraphe, nous allons énoncer quelques définitions, théorèmes et propositions qui sont importants pour la suite.

Définition 1.3.1. *Soit* $G : L^p(\Omega) \mapsto L^p(\Omega)$ *une application. Nous disons que la fonction* G *est lipschitzienne dans* $L^p(\Omega)$ *si elle vérifie, pour tout* $(f, g) \in L^p(\Omega)^2$*, l'inégalité suivante :*

$$\|G(f) - G(g)\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|f - g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Théorème 1.3.1. *Soit* $d = 2$*. Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^2$ *de frontière* $\partial\Omega$*, l'injection continue de* $H^1(\Omega)$ *dans* $L^q(\Omega)$*, où* $1 \leq q \leq \infty$*, est compacte.*
Si la dimension $d = 3$*, l'injection continue de* $H^1(\Omega)$ *dans* $L^q(\Omega)$ *est vérifiée pour* $1 \leq q \leq 6$ *et est compacte pour* $1 \leq q < 6$*.*

Théorème 1.3.2. *Soit m un entier positif. L'espace $H^m(\Omega)$ est inclus, avec injection continue dans l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ si et seulement si*

$$2m > d. \tag{1.6}$$

Définition 1.3.2. *Soit E un espace de Banach et E' le dual topologique de E*

(i) ***Convergence faible****. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $u \in E$. On dit que $u_n \to u$ faiblement dans E lorsque $n \to \infty$ si $T(u_n) \to T(u)$ pour tout $T \in E'$.*

(ii) ***Convergence forte****. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge fortement vers $u \in E$ si la suite $(\|u_n - u\|)_{n\in\mathbb{N}}$ tends vers 0 lorsque $n \to \infty$.*

Théorème 1.3.3 (Théorème de point fixe de Brouwer). *Soit X un espace de Hilbert de dimension finie muni d'un produit scalaire noté $(\cdot,\cdot)$ auquel on associe la norme $|\cdot|$. Soit $\mathbf{\Phi}$ une application continue de X dans X qui vérifie la propriété suivante:*
Il existe un réel μ strictement positif tel que $(\mathbf{\Phi}(f), f) \geq 0$ pour tout f dans X avec $|f| = \mu$. Alors, il existe un élément f_0 dans X tel que $\mathbf{\Phi}(f_0) = 0$ et $|f_0| \leq \mu$.

Théorème 1.3.4. *Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, alors $E \times F$ est un espace vectoriel normé muni de la norme$\|\cdot\|_{E\times F}$, définie par :*

$$\forall \boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \in E \times F,\ \|\boldsymbol{u}\|_{E\times F} = (\|u_1\|_E^2 + \|u_2\|_F^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.3.5 (Inégalité de Hölder). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et*
$1 \leq r \leq \infty$, $1 \leq s \leq \infty$ et $1 \leq t \leq \infty$ tels que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{t}$. Alors

$$\forall f \in L^r(\Omega), \forall g \in L^s(\Omega), f.g \in L^t(\Omega)$$

et

$$\|fg\|_{L^t(\Omega)} \leq \|f\|_{L^r(\Omega)} \|g\|_{L^s(\Omega)}. \tag{1.7}$$

Remarque 1.3.1. *Cette inégalité devient l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $r = s = 2$ et $t = 1$.*

Lemme 1.3.1 (Lemme de Grönwall). *Soit k une fonction intégrable et positive presque partout sur l'intervalle $]0, T[$. Soit $C \geq 0$ une constante et φ dans $\mathcal{C}^0(]0, T[)$ une fonction vérifiant l'inégalité :*

$$\forall t \in [0, T], \quad 0 \leq \varphi(t) \leq C + \int_0^T k(s)\varphi(s)ds. \tag{1.8}$$

Alors, φ est majorée par :

$$\forall t \in [0, T], \quad \varphi(t) \leq C \exp\Big(\int_0^T k(s)ds\Big). \tag{1.9}$$

On réfère à [28, Thm 21.1], pour la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 1.3.6 (Théorème de Cauchy-Lipschitz). *Supposons que $[t_1, t_2]$ est un intervalle compact d'intérieur non vide et que f est une application continue de $[t_1, t_2] \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ qui vérifie la propriété suivante, il existe une constante L telle que*

$$\forall t \in [t_1, t_2], \forall v, w \in \mathbb{R}^d, \quad |f(t, v) - f(t, w)| \leq L|v - w|.$$

Ici $|\cdot|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^d$. Alors quel que soient t_0 dans $[t_1, t_2]$ et u_0 dans $\mathbb{R}^d$, il existe une unique fonction u continûment différentiable de $[t_1, t_2]$ dans $\mathbb{R}^d$ et qui vérifie

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Définition 1.3.3. *L'opérateur $A : X \to Y$ est appelé monotone si pour tous $x, y \in X$, on a*

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq 0. \tag{1.10}$$

Lemme 1.3.2. *Soient E et F deux espaces de Banach, soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme et $G \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\|G\| < \dfrac{1}{\|L^{-1}\|}$, alors, $L - G$ est un isomorphisme, et*

$$\|L - G\|^{-1} \leq \frac{L^{-1}}{1 - \|L^{-1}\|\|G\|}$$

1.4 Outils de la méthode spectrale

Les preuves des théorèmes et propositions de cette section se trouvent dans les références de base suivantes: [7], [6] et [8].
On considère le domaine Ω égal au carré ou au cube $]-1, 1[^d$, $d = 2$ ou 3.

Notation 1.4.1. *Pour tout entier $n \geq 0$, on définit $\mathbb{P}_n$ comme l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de degré $\leq n$. On note $\mathbb{P}_n(\Omega)$ l'espace des restrictions à Ω des polynômes à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de degré $\leq n$ par rapport à chaque variable.*

1.4.1 Formule de Gauss-Lobatto

Définition 1.4.1. *On rappelle la formule de Gauss-Lobatto sur l'intervalle $]-1, 1[$: il existe un unique ensemble de $N + 1$ nœuds ξ_j, $0 \leq j \leq N$, avec $\xi_0 = -1$ et $\xi_N = 1$, et un* *unique ensemble de $N+1$ poids ρ_j, $0 \le j \le N$, tel que*

$$\forall \Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(-1,1), \quad \int_{-1}^{1} \Phi(\zeta)\, d\zeta = \sum_{j=0}^{N} \Phi(\xi_j)\rho_j. \tag{1.11}$$

Cette formule de quadrature n'est pas exacte sur $\mathbb{P}_{2N}(-1,1)$, donc elle n'est pas exacte pour la norme $L^2(-1,1)$ des polynômes de $\mathbb{P}_N(-1,1)$. En revanche, on a les relations suivantes (voir [9]) :

Corollaire 1.4.1. *Pour tout φ_N dans $\mathbb{P}_N(-1,1)$, on a*

$$\|\varphi_N\|^2_{L^2(-1,1)} \le \sum_{j=0}^{N} \varphi_N(\xi_j)^2 \rho_j \le 3\|\varphi_N\|^2_{L^2(-1,1)}. \tag{1.12}$$

Définition 1.4.2. *La grille de Gauss-Lobatto est donnée par*

$$\Sigma_N = \begin{cases} \{x = (\xi_i, \xi_j), \quad 0 \le i,j \le N\} & \text{pour} \quad d = 2, \\ \{x = (\xi_i, \xi_j, \xi_k), \quad 0 \le i,j,k \le N\} & \text{pour} \quad d = 3. \end{cases} \tag{1.13}$$

On définit le produit discret pour toutes fonctions continues u et v sur $\overline{\Omega}$ par

$$(u,v)_N = \begin{cases} \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u(\xi_i,\xi_j)v(\xi_i,\xi_j)\rho_i\rho_j & \text{si} \quad d = 2, \\ \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} u(\xi_i,\xi_j,\xi_k)v(\xi_i,\xi_j,\xi_k)\rho_i\rho_j\rho_k & \text{si} \quad d = 3. \end{cases} \tag{1.14}$$

La formule (1.12) entraîne que le produit discret est un produit scalaire sur $\mathbb{P}_N(\Omega)$ et on note $\|\cdot\|_N$ la norme associée à ce produit scalaire.

1.4.2 Erreur d'interpolation polynomiale

On introduit maintenant l'opérateur d'interpolation aux points de Gauss-Lobatto.

Notation 1.4.2. *On note $\mathcal{I}_N$ l'opérateur d'interpolation sur la grille Σ_N, c'est à dire pour toute fonction v continue sur $\overline{\Omega}$, $\mathcal{I}_N v$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Omega)$ et vérifie*

$$\begin{cases} (\mathcal{I}_N \boldsymbol{v})(\xi_i,\xi_j) = \boldsymbol{v}(\xi_i,\xi_j), & 0 \le i,j \le N \quad \text{si } d = 2, \\ (\mathcal{I}_N \boldsymbol{v})(\xi_i,\xi_j,\xi_k) = \boldsymbol{v}(\xi_i,\xi_j,\xi_k), & 0 \le i,j,k \le N \quad \text{si } d = 3 \end{cases}$$

Les propriétés d'opérateur d'interpolation polynomiale sont présentées et démontrées en détail dans [7, 9].

Théorème 1.4.3. *Pour tout entier $m \geq 2$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction v de $H^m(\Omega)$, on ait*

$$\|v - \mathcal{I}_N v\|_{L^2(\Omega)} \leq cN^{-m}\|v\|_{H^m(\Omega)}. \tag{1.15}$$

On a également une estimation d'erreur dans l'espace $H^1(\Omega)$ (voir [7, Thm 14.2]).

Théorème 1.4.4. *Pour tout entier $m \geq \frac{1}{2}$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction v de $H^{m+1}(\Omega)$, on ait*

$$\|v - \mathcal{I}_N v\|_{H^1(\Omega)} \leq cN^{-m}\|v\|_{H^{m+1}(\Omega)}. \tag{1.16}$$

Théorème 1.4.5. *Pour tout entier $m \geq \frac{d}{2}$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction v de $H^m(\Omega)$, on ait*

$$|v - \mathcal{I}_N v|_{H^1(\Omega)} \leq cN^{1-s}\|v\|_{H^m(\Omega)}. \tag{1.17}$$

Proposition 1.4.2. *Pour tout $\varphi_M \in \mathbb{P}_M(\Omega)$, on a*

$$\|\mathcal{I}_N \varphi_M\|_{L^2(\Omega)} \leq c\big(1 + \frac{M}{N}\big)^2\|\varphi_M\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.18}$$

CHAPITRE 2

ÉTUDE MATHÉMATIQUE D'ÉQUATION DE RICHARDS

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'équation de Richards. Premièrement, on s'intéresse à écrire la formulation variationnelle puis à démontrer l'équivalence entre le problème continu et le problème variationnel et ensuite s'assurer de l'existence et l'unicité de la solution, de plus on écrire une autre formulation mixte du problème continu.

2.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, d =2 ou 3, à frontière Lipschitzienne continue $\partial\Omega$. Soit T un nombre réel positif.
La modélisation mathématique du problème de Richard sous la transformation de Kirchhoff conduit à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha\partial_t u + \partial_t b(u) - \nabla \cdot (\nabla u + k \circ b(u)\mathbf{e}_z) = 0 & \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\times]0,T[, \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

tel que : $-\mathbf{e}_z$ est le vecteur unitaire dans la direction de la gravité, l'inconnu est la quantité u, les applications b et k sont supposés connus, α est une constante positive.

Pour étudier le système (2.1), on suppose que les coefficients k et b et la donnée u_0 satisfont les hypothèses suivantes :

Hypothèse 2.1.

($\mathcal{H}_1$) *L'application b est de classe $\mathcal{C}^1$, monotone, croissante et globalement Lipschitzienne continue sur $\mathbb{R}$.*

($\mathcal{H}_2$) *L'application $x \mapsto k \circ b(x)$ est continue, bornée sur $\mathbb{R}$ et satisfait pour une constante positive c_k*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad |k \circ b(x_1) - k \circ b(x_2)|^2 \leq c_k \big(b(x_1) - b(x_2)\big)(x_1 - x_2). \tag{2.2}$$

2.2 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle du problème (2.1) est donnée par :
Trouver $u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ avec $\partial_t u \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$ tel que

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{2.3}$$

et pour tout t$\in]0, T[$,

$$\begin{aligned}&\forall v \in H_0^1(\Omega),\\ &\alpha\langle \partial_t u(\cdot,t), v\rangle + \langle \partial_t b(u)(\cdot,t), v\rangle + \int_\Omega \left(\nabla u + k \circ b(u)\mathbf{e}_z\right)(\boldsymbol{x},t) \cdot (\nabla v)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0,\end{aligned} \tag{2.4}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et son dual $H^{-1}(\Omega)$.

Proposition 2.2.1. *Les problèmes* (2.1) *et* (2.3)–(2.4) *sont équivalents au sens des distributions.*

Preuve. Nous commençons par la première implication :
Soit u une solution du problème (2.1). Pour toute fonction test $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, nous avons

$$\begin{aligned}\alpha\langle \partial_t u(\cdot,t), v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} &+ \langle \partial_t b(u)(\cdot,t), v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\\ &- \langle \nabla \cdot \big(\nabla u + k \circ b(u)\mathbf{e}_z\big)(\cdot,t), v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = 0,\end{aligned}$$

où $\langle \cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}$ désigne le crochet de dualité entre $\mathcal{D}(\Omega)$ et son dual.
On dérive au sens des distributions, on trouve :

$$\alpha\langle \partial_t u(\cdot,t), v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} + \langle \partial_t b(u)(\cdot,t), v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \\ + \langle \big(\nabla u + k\circ b(u)\mathbf{e}_z\big)(\cdot,t), \nabla v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = 0, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Supposons que $\nabla u \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)$, donc on peut remplacer les crochets de dualité par les intégrales dans le troisième terme

$$\alpha\langle \partial_t u(\cdot,t), v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} + \langle \partial_t b(u)(\cdot,t), v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \\ + \int_\Omega \big(\nabla u + k\circ b(u)\mathbf{e}_z\big)(\boldsymbol{x},t)\cdot(\nabla v)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ on trouve

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \alpha\langle \partial_t u(\cdot,t), v\rangle + \langle \partial_t b(u)(\cdot,t), v\rangle - \int_\Omega \big(\nabla u + k\circ b(u)\mathbf{e}_z\big)(\boldsymbol{x},t)\cdot(\nabla v)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0.$$

Ce qui montre que u est une solution du problème(2.3)–(2.4).
Réciproquement, soit u une solution du problème (2.3)–(2.4), on prend $v \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ dans (2.4)

$$\alpha\langle \partial_t u(\cdot,t), v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} + \langle \partial_t b(u)(\cdot,t), v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \\ + \langle \big(\nabla u + k\circ b(u)\mathbf{e}_z\big)(\cdot,t), \nabla v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = 0.$$

On dérive au sens des distributions, on obtient :

$$\alpha\langle \partial_t u(\cdot,t), v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} + \langle \partial_t b(u)(\cdot,t), v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \\ - \langle \nabla\cdot\big(\nabla u + k\circ b(u)\mathbf{e}_z\big)(\cdot,t), v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = 0, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

D'où,

$$\alpha\partial_t u + \partial_t b(u) - \nabla\cdot\big(\nabla u + k\circ b(u)\mathbf{e}_z\big) = 0, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Finalement, la condition $u = 0$ sur $\partial\Omega\times]0,T[$, étant assurée par l'appartenance de u à $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. On déduit donc l'équivalence entre les deux problèmes. ■

On énonce maintenant le résultat d'existence et d'unicité du problème (2.3)–(2.4). On réfère à [20, §2.1] pour la preuve de ce résultat .

Théorème 2.2.1. *Si l'hypothèse 2.1 est satisfaite, le problème* (2.3)–(2.4) *admet une solution unique. De plus, les quantités* $\partial_t u$ *et* $\partial_t b(u)$ *appartiennent à* $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

On rappelle l'espace de Sobolev $H(\mathrm{div}, \Omega)$ par

$$H(\mathrm{div}, \Omega) = \{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d;\ \nabla \cdot \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)\}$$

Compte tenu de la discrétisation, nous introduisons une formulation mixte du problème (2.3)–(2.4).
Trouver $(u, \boldsymbol{q}) \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \times L^2(0, T; H(\mathrm{div}, \Omega))$ avec $\partial_t u \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ tel que

$$u(\cdot, 0) = u_0 \text{ dans } \Omega, \tag{2.5}$$

et pour tout $t \in]0, T[$,

$$\begin{aligned} \forall w \in L^2(\Omega), \quad \alpha \int_\Omega \big(\partial_t u\big)(\boldsymbol{x}, t) w(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \big(\partial_t b(u)\big)(\boldsymbol{x}, t) w(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\ + \int_\Omega (\nabla \cdot \boldsymbol{q})(\boldsymbol{x}) w(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{\varphi} \in H(\mathrm{div}, \Omega), \qquad \int_\Omega \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} - \int_\Omega u(\boldsymbol{x}, t)(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\ + \int_\Omega \big(k \circ b(u) \mathbf{e}_z\big)(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Proposition 2.2.2. *Si l'hypothèse 2.1 est satisfaite, les problèmes* (2.3)–(2.4) *et* (2.5)–(2.6) *sont équivalents au sens où :*

(i) pour toute solution u de (2.3)–(2.4)*, il existe une fonction $\boldsymbol{q}$ dans* $L^2(0, T; H(\mathrm{div}, \Omega))$ *tel que $(u, \boldsymbol{q})$ est une solution du problème* (2.5)–(2.6)*,*

(ii) pour toute solution $(u, \boldsymbol{q})$ de (2.5)–(2.6)*, la fonction u appartient à* $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ *est une solution du problème* (2.3)–(2.4)*.*

Preuve. *(i)* Soit u solution du problème (2.3)–(2.4), on pose $\boldsymbol{q} = -\nabla u - k \circ b(u) \mathbf{e}_z$, on voit que $\boldsymbol{q}$ appartient à $L^2(0, T; L^2(\Omega)^d)$, de plus on prend $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans la première ligne du problème (3.1), on obtient

$$\alpha \partial_t u + \partial_t b(u) = \nabla \cdot \boldsymbol{q} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

d'après le théorème 2.2.1, $\partial_t u$ et $\partial_t b(u)$ appartiennent à $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, alors $\nabla \cdot \mathbf{q} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Tout cela donne que $\boldsymbol{q} \in L^2(0, T; H(\mathrm{div}, \Omega))$. De plus on multiplie l'équation $\boldsymbol{q} = -\nabla u - k \circ b(u) \mathbf{e}_z$ par une fonction $\boldsymbol{w} \in H(\mathrm{div}, \Omega)$ et on intègre sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \big(k \circ b(u) \mathbf{e}_z\big)(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

On applique la formule de Green sur la première intégrale du membre de droite, on trouve

$$\int_\Omega \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \int_\Omega u(\boldsymbol{x},t)(\nabla\cdot\boldsymbol{w})(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \big(k\circ b(u)\mathbf{e}_z\big)(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \\ = -\int_{\partial\Omega} u(\tau,t)(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n})(\tau)d\tau.$$

Comme $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, l'intégrale sur $\partial\Omega$ s'annule, d'où la deuxième équation du problème (2.6). D'autre part, en prenant $v = w$ un élément de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans (2.4), on a

$$\begin{aligned}\alpha\langle\partial_t u(\cdot,t),w\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} &+ \langle\partial_t b(u)(\cdot,t),w\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \\ &= -\langle\nabla u(\cdot,t) + k\circ b(u)\mathbf{e}_z(\cdot,t),\nabla w\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \\ &= \langle\boldsymbol{q}(\cdot,t),\nabla w\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}, \quad \forall w\in\mathcal{D}(\Omega).\end{aligned}$$

On dérive au sens des distributions, on aura

$$\alpha\langle\partial_t u(\cdot,t),w\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} + \langle\partial_t b(u)(\cdot,t),w\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = -\langle(\nabla\cdot\boldsymbol{q})(\cdot,t),w\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}, \forall w\in\mathcal{D}(\Omega).$$

Comme $\partial_t u$, $\partial_t b(u)$ et $\nabla\cdot\boldsymbol{q}$ appartiennent à $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, donc on peut remplacer les crochets de dualité par des intégrales dans l'équation précédente, on aurait :

$$\forall w\in\mathcal{D}(\Omega), \quad \alpha\int_\Omega \big(\partial_t u\big)(\boldsymbol{x},t)w(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \big(\partial_t b(u)\big)(\boldsymbol{x},t)w(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \\ + \int_\Omega (\nabla\cdot\boldsymbol{q})(\boldsymbol{x},t)w(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0,$$

et par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on conclut que cette identité est valable pour toute fonction w dans $L^2(\Omega)$ i.e :

$$\forall w\in L^2(\Omega), \quad \alpha\int_\Omega \big(\partial_t u\big)(\boldsymbol{x},t)w(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \big(\partial_t b(u)\big)(\boldsymbol{x},t)w(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \\ + \int_\Omega (\nabla\cdot\boldsymbol{q})(\boldsymbol{x},t)w(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0.$$

D'où la première équation du problème (2.6).

(ii) Soit $(u,\boldsymbol{q}) \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \times L^2(0,T;H(\mathrm{div},\Omega))$ solution du problème (2.5)–(2.6), on prend $\boldsymbol{v}\in\mathcal{D}(\Omega)^d \subset H(\mathrm{div},\Omega)$ dans la deuxième équation du (2.6)

$$\langle\boldsymbol{q}(\cdot,t),\boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^d,\mathcal{D}(\Omega)^d} - \langle u(\cdot,t),\nabla\cdot\boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^d,\mathcal{D}(\Omega)^d} + \langle k\circ b(u)\mathbf{e}_z(\cdot,t),\boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^d,\mathcal{D}(\Omega)^d} = 0.$$

On dérive au sens des distributions, on obtient

$$\forall\boldsymbol{v}\in\mathcal{D}(\Omega)^d, \quad \langle\boldsymbol{q}(\cdot,t),v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^d,\mathcal{D}(\Omega)^d} + \langle\nabla u(\cdot,t),\boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^d,\mathcal{D}(\Omega)^d} \\ + \langle k\circ b(u)\mathbf{e}_z(\cdot,t),\boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^d,\mathcal{D}(\Omega)^d} = 0. \tag{2.7}$$

Ceci implique que

$$\boldsymbol{q} = -\nabla u - k \circ b(u)\mathbf{e}_z, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)^d.$$

Or $\boldsymbol{q}$ et $k \circ b(u)$ appartiennent à $L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)$ et $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ respectivement, on déduit que $\nabla u \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)$, donc u est dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, et que

$$\boldsymbol{q} = -\nabla u - k \circ b(u)\mathbf{e}_z \text{ p.p dans } \Omega. \tag{2.8}$$

Maintenant on prend $\boldsymbol{\varphi} \in H(\mathrm{div},\Omega)$ dans la deuxième équation du problème (2.6), et d'après l'équation (2.7), on aura

$$\begin{aligned}\forall \boldsymbol{\varphi} \in H(\mathrm{div},\Omega), \quad -\int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= \int_\Omega \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\ &+ \int_\Omega k\circ b(u)\mathbf{e}_z(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

Puis on utilise la deuxième équation du problème (2.6), on obtient

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in H(\mathrm{div},\Omega), \quad \int_\Omega u(\boldsymbol{x},t)(\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \big(\nabla u\big)(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

D'après la formule de Green, on aura

$$\begin{aligned}\forall \boldsymbol{\varphi} \in H(\mathrm{div},\Omega), \quad \int_{\partial\Omega} u(\tau,t)(\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{n})(\tau)d\tau &= \int_\Omega u(\boldsymbol{x},t)(\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{x})dv\\ &+ \int_\Omega \big(\nabla u\big)(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0.\end{aligned}$$

En particulier pour $\boldsymbol{\varphi} = u\boldsymbol{e}_1$, avec $\boldsymbol{e}_1$ représente le vecteur de base, tel que la première composante égale à 1 est les autres sont nulles, alors on trouve

$$\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} = 0.$$

Ceci implique que $u = 0$ p.p sur $\partial\Omega$, on déduit que $u \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$.
D'autre part, on prend $w \in H^1_0(\Omega)$ dans la première équation du problème (2.6)

$$\begin{aligned}\alpha\int_\Omega \big(\partial_t u\big)(\boldsymbol{x},t)w(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &+ \int_\Omega \big(\partial_t b(u)\big)(\boldsymbol{x},t)w(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\ &+ \int_\Omega (\nabla\cdot\boldsymbol{q})(\boldsymbol{x},t)w(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0.\end{aligned}$$

On applique la formule de Green sur le dernier membre, on obtient

$$\begin{aligned}\forall w \in H^1_0(\Omega), \quad \alpha\int_\Omega \big(\partial_t u\big)(\boldsymbol{x},t)w(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &+ \int_\Omega \big(\partial_t b(u)\big)(\boldsymbol{x},t)w(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\ -\int_\Omega \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t)\cdot\big(\nabla w\big)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= -\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{q})(\tau,t)(w\boldsymbol{n})(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Et comme $w \in H_0^1(\Omega)$, donc l'intégrale sur $\partial\Omega$ s'annule, grâce à (2.8), on obtient

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \quad \alpha \int_\Omega \big(\partial_t u\big)(\boldsymbol{x},t) w(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \big(\partial_t b(u)\big)(\boldsymbol{x},t) w(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\ + \int_\Omega (\nabla u + k \circ b(u)\mathbf{e}_z)(\boldsymbol{x},t) \cdot \big(\nabla w\big)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0.$$

D'où l'équation (2.4). ■

Le corollaire suivant est une conséquence directe du Théorème 2.2.1 et de la Proposition 2.2.2

Corollaire 2.2.3. *Si l'Hypothèse 2.1 est satisfaite, le problème* (2.5)–(2.6) *admet une solution unique* $(u, \boldsymbol{q})$ *dans l'espace* $L^2(0,T; L^2(\Omega)) \times L^2(0,T; H(\mathrm{div}, \Omega))$.

CHAPITRE 3

PROBLÈME DISCRET

Dans ce chapitre on s'intéresse à la discrétisation en temps du problème de Richards (2.1) par un schéma d'Euler implicite et par la méthode spectrale en espace en utilisant la méthode de Galerkin avec intégration numérique.

3.1 Discrétisation temporelle

Hypothèse 3.1.

($\boldsymbol{\mathcal{H}_1}$) *Les applications b, k et la donnée u_0 satisfont l'hypothèse 2.1.*

($\boldsymbol{\mathcal{H}_2}$) *La fonction k est lipschitzienne continue sur $\mathbb{R}$.*

3.1.1 Problème semi-discret

On introduit une partition de l'intervalle $[0, T]$ en sous intervalles $[t_{j-1}, t_j]$, $1 \leq j \leq J$, telle que

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_J = T.$$

On désigne par $\tau_j = t_j - t_{j-1}$ le pas de discrétisation en temps et par τ les J-uplets $(\tau_1, \cdots, \tau_J)$; on pose aussi $|\tau| = \max_{1 \leq j \leq J} \tau_j$.

En discrétisant la dérivée partielle en temps par un schéma d'Euler implicite ce qui donne

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t_j) \simeq \frac{u(x,t_j)) - u(x,t_j-1)}{\tau_j} \simeq \frac{u^j(x) - u^{j-1}(x)}{\tau_j}$$

et

$$\frac{\partial b(u)}{\partial t}(x,t_j) \simeq \frac{b(u)(x,t_j) - b(u)(x,t_{j-1})}{\tau_j} \simeq \frac{b(u^j)(x) - b(u^{j-1})(x)}{\tau_j}$$

Le terme $k \circ b(u)$ est traité explicitement pour simplifier. Donc le problème semi-discret s'écrit : Trouver $(u^j)_{0\le j\le J} \in H_0^1(\Omega)^{J+1}$, avec $u^0 = u_0 \quad dans\ \Omega$ tel que pour tout j, $1 \le j \le J$,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \alpha\langle \frac{u^j - u^{j-1}}{\tau_j}, v\rangle + \langle \frac{b(u^j) - b(u^{j-1})}{\tau_j}, v\rangle + \int_\Omega \big(\nabla u^j + k \circ b(u^{j-1})\mathbf{e}_z\big)(\boldsymbol{x}) \cdot \big(\nabla v\big)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0. \quad (3.1)$$

Et le problème semi-discret pour la formulation mixte est donné par :
Trouver $(u^j)_{0\le j\le J} \in L^2(\Omega)^{J+1}$ *et* $(\boldsymbol{q}^j)_{1\le j\le J} \in H(\mathrm{div},\Omega)^J$ avec $u^0 = u_0 \quad dans\ \Omega$, tels que pour tout j, $1 \le j \le J$,

$$\forall w \in L^2(\Omega), \quad \alpha\int_\Omega \Big(\frac{u^j - u^{j-1}}{\tau_j}\Big)(\boldsymbol{x})w(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \Big(\frac{b(u^j) - b(u^{j-1})}{\tau_j}\Big)(\boldsymbol{x})w(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_\Omega (\nabla \cdot \boldsymbol{q}^j)(\boldsymbol{x})w(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0,$$

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in H(\mathrm{div},\Omega), \int_\Omega \boldsymbol{q}^j(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \int_\Omega u^j(\boldsymbol{x})(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \big(k \circ b(u^{j-1})\big)(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0. \quad (3.2)$$

Proposition 3.1.1. *Les problèmes* (3.1) *et* (3.2) *sont équivalents dans le sens où :*

(i) pour toute solution u^j de (3.1)*, il existe une fonction $\boldsymbol{q}^j$ dans $L^2(0,T;H(\mathrm{div},\Omega))$ telle que $(u^j,\boldsymbol{q}^j)$ est une solution de problème* (3.2)*,*

(ii) pour toute solution $(u^j,\boldsymbol{q}^j)$ de (3.2)*, la fonction u^j qui appartient à $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ est une solution du problème* (3.1)*.*

Preuve. *(i)* Soit u^j dans $H_0^1(\Omega)$ une solution du problème (3.1), et soit

$$\boldsymbol{q}^j = -\nabla u^j - k \circ b(u^{j-1})\mathbf{e}_z$$

en multipliant cette équation par une fonction $\boldsymbol{\varphi} \in H(\mathrm{div},\Omega)$ et en intégrant sur Ω, on a

$$\int_\Omega \boldsymbol{q}^j(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \nabla u^j(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \big(k \circ b(u^{j-1})\mathbf{e}_z\big)(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

On applique la formule de Green sur la première intégrale du membre de droite, sachant que l'intégrale sur $\partial\Omega$ est nulle, car $u^j \in H_0^1(\Omega)$, d'où la deuxième équation du problème (3.2). Ensuite on prend $v = \varphi$ un élément de $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ dans (3.1) alors

$$\begin{aligned}\alpha\langle\frac{u^j - u^{j-1}}{\tau_j}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} + \langle\frac{b(u^j) - b(u^{j-1})}{\tau_j}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \\ = -\langle\nabla u^j + k \circ b(u^{j-1})\mathbf{e}_z, \nabla\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \\ = \langle\boldsymbol{q}^j, \nabla\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).\end{aligned}$$

On dérive au sens des distributions, on aura

$$\begin{aligned}\alpha\langle\frac{u^j - u^{j-1}}{\tau_j}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} + \langle\frac{b(u^j) - b(u^{j-1})}{\tau_j}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \\ = -\langle\nabla \cdot \boldsymbol{q}^j, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).\end{aligned} \tag{3.3}$$

D'où,

$$\alpha\frac{u^j - u^{j-1}}{\tau_j} + \frac{b(u^j) - b(u^{j-1})}{\tau_j} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q}^j \qquad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Comme $u^j - u^{j-1}$ et $b(u^j) - b(u^{j-1})$ appartiennent à $L^2(\Omega)$, donc $\nabla \cdot \boldsymbol{q}^j \in L^2(\Omega)$, ceci implique que $\boldsymbol{q}^j \in H(\mathrm{div}, \Omega)$. D'autre part, on peut remplacer les crochets de dualité par des intégrales dans (3.3), on aurait :

$$\begin{aligned}\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \alpha\int_\Omega\Big(\frac{u^j - u^{j-1}}{\tau_j}\Big)(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_\Omega\Big(\frac{b(u^j) - b(u^{j-1})}{\tau_j}\Big)(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \\ + \int_\Omega(\nabla \cdot \boldsymbol{q}^j)(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0,\end{aligned}$$

et par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on conclut que cette identité et valable pour toute fonction $\varphi \in L^2(\Omega)$ i.e :

$$\begin{aligned}\forall\varphi \in L^2(\Omega), \quad \alpha\int_\Omega\Big(\frac{u^j - u^{j-1}}{\tau_j}\Big)(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_\Omega\Big(\frac{b(u^j) - b(u^{j-1})}{\tau_j}\Big)(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \\ + \int_\Omega(\nabla \cdot \boldsymbol{q}^j)(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0.\end{aligned}$$

D'où la première équation du problème (3.2).

(ii) Soit $(u^j, \boldsymbol{q}^j) \in L^2(\Omega) \times H(\mathrm{div}, \Omega)$ solution du problème (3.2), en prenant $\boldsymbol{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^d \subset H(\mathrm{div}, \Omega)$ dans la deuxième équation du problème (3.2), on aurait

$$\langle\boldsymbol{q}^j, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^d,\mathcal{D}(\Omega)^d} - \langle u^j, \nabla \cdot \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^d,\mathcal{D}(\Omega)^d} + \langle k \circ b(u^{j-1})\mathbf{e}_z, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^d,\mathcal{D}(\Omega)^d} = 0.$$

On dérive au sens des distributions, on trouve

$$\langle\boldsymbol{q}^j, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^d,\mathcal{D}(\Omega)^d} + \langle\nabla u^j, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^d,\mathcal{D}(\Omega)^d} + \langle k \circ b(u^{j-1})\mathbf{e}_z, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^d,\mathcal{D}(\Omega)^d} = 0, \forall\boldsymbol{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^d.$$

Ceci implique que

$$\boldsymbol{q}^j = -\nabla u^j - k \circ b(u^{j-1})\mathbf{e}_z, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)^d.$$

Comme $\boldsymbol{q}^j \in L^2(\Omega)^d$ et $k \circ b(u^{j-1}) \in L^2(\Omega)$, on déduit que $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$, et donc $u \in H^1(\Omega)$, d'autre part, on obtient

$$\boldsymbol{q}^j = -\nabla u^j - k \circ b(u^{j-1})\mathbf{e}_z \text{ p.p dans } \Omega.$$

Ainsi d'après la deuxième équation du problème (3.2), on a

$$\begin{aligned}\forall \boldsymbol{\varphi} \in H(\operatorname{div}, \Omega), \quad \int_\Omega u^j(\boldsymbol{x})(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = & \int_\Omega \big(k \circ b(u^{j-1})\big)(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\ & + \int_\Omega \boldsymbol{q}^j(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

On remplace $\boldsymbol{q}^j$ par $-\nabla u^j - k \circ b(u^{j-1})\mathbf{e}_z$ dans l'équation précédente, on obtient

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in H(\operatorname{div}, \Omega), \quad \int_\Omega u^j(\boldsymbol{x})(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \big(\nabla u^j\big)(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0.$$

D'après la formule de Green, on aura

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in H(\operatorname{div}, \Omega), \quad \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{n})(\tau) u^j(\tau) d\tau = 0.$$

En particulier pour $\boldsymbol{\varphi} = u^j \boldsymbol{e}_1$, donc on trouve

$$\|u^j\|^2_{L^2(\partial\Omega)} = 0.$$

Ceci implique que $u^j = 0$ p.p sur $\partial\Omega$. Tout cela donne que $u^j \in H^1_0(\Omega)$.
De plus, on prend $v \in H^1_0(\Omega)$ dans la première équation du problème (3.2), on trouve

$$\alpha \int_\Omega \Big(\frac{u^j - u^{j-1}}{\tau_j}\Big)(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \Big(\frac{b(u^j) - b(u^{j-1})}{\tau_j}\Big)(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega (\nabla \cdot \boldsymbol{q}^j)(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

On applique la formule de Green sur le membre de droite, on obtient

$$\begin{aligned}\forall v \in H^1_0(\Omega), \quad \alpha \int_\Omega \Big(\frac{u^j - u^{j-1}}{\tau_j}\Big)(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + & \int_\Omega \Big(\frac{b(u^j) - b(u^{j-1})}{\tau_j}\Big)(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\ = & \int_\Omega \boldsymbol{q}^j(\boldsymbol{x}) \cdot (\nabla v)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{q}^j(\tau) \cdot (v\boldsymbol{n})(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Comme $v \in H^1_0(\Omega)$, alors l'intégrale sur $\partial\Omega$ s'annule, on utilise encore la deuxième équation de (3.2), on obtient (3.1). ■

Proposition 3.1.2. *Si l'hypothèse 3.1 est satisfaite, le problème* (3.2) *admet une solution unique* $(u^j, \mathbf{q}^j)_j$*, pour tout* $1 \le j \le J$.

Preuve. D'après la proposition 3.1.1, pour tout $1 \leq j \leq J$, le problème (3.2) admet la formulation équivalente suivante :
Trouver $u^j \in H_0^1(\Omega)$, tels que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \alpha\langle \frac{u^j - u^{j-1}}{\tau_j}, v\rangle + \langle \frac{b(u^j) - b(u^{j-1})}{\tau_j}, v\rangle + \int_\Omega \big(\nabla u^j + k \circ b(u^{j-1})\mathbf{e}_z\big)(\boldsymbol{x}) \cdot \big(\nabla v\big)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0. \quad (3.4)$$

Maintenant on montre l'existence et l'unicité de la solution

1)-L'unicité : Soient $(u^j, \boldsymbol{q}^j)_j$ et $(\tilde{u}^j, \tilde{\boldsymbol{q}}^j)_j$ deux solutions du problème (3.2), i.e $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\alpha\langle \frac{u^j - u^{j-1}}{\tau_j}, v\rangle + \langle \frac{b(u^j) - b(u^{j-1})}{\tau_j}, v\rangle + \int_\Omega \big(\nabla u^j + k \circ b(u^{j-1})\mathbf{e}_z\big)(\boldsymbol{x}) \cdot \big(\nabla v\big)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0. \quad (3.5)$$

$$\alpha\langle \frac{\tilde{u}^j - \tilde{u}^{j-1}}{\tau_j}, v\rangle + \langle \frac{b(\tilde{u}^j) - b(\tilde{u}^{j-1})}{\tau_j}, v\rangle + \int_\Omega \big(\nabla \tilde{u}^j + k \circ b(\tilde{u}^{j-1})\mathbf{e}_z\big)(\boldsymbol{x}) \cdot \big(\nabla v\big)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0. \quad (3.6)$$

Ensuite, nous soustrayons (3.6) de (3.5), nous obtenons
$\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} &\alpha\langle \frac{u^j - \tilde{u}^j}{\tau_j}, v\rangle - \alpha\langle \frac{u^{j-1} - \tilde{u}^{j-1}}{\tau_j}, v\rangle + \langle \frac{b(u^j) - b(\tilde{u}^j)}{\tau_j}, v\rangle - \langle \frac{b(u^{j-1}) - b(\tilde{u}^{j-1})}{\tau_j}, v\rangle \\ &+ \int_\Omega \big(\big(k \circ b(u^{j-1}) - k \circ b(u^{j-1})\big)\mathbf{e}_z\big)(\boldsymbol{x}) \cdot \big(\nabla v\big)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\ &+ \int_\Omega \big(\nabla(u^j - \tilde{u}^{j-1})\big)(\boldsymbol{x}) \cdot \big(\nabla v\big)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

On montre par récurrence que

$$(u^{j-1} = \tilde{u}^{j-1}), \quad 1 \leq j \leq J \quad (p),$$

on a pour $j = 1$, $u^0 - \tilde{u}^0 = u_0 - u_0 = 0$ donc (p) est vraie pour $j = 1$. Maintenant on suppose que (p) est vraie et on montre qu'elle est vraie pour j. D'après (3.7) et par l'hypothèse de récurrence, on obtient
$\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\alpha\langle \frac{u^j - \tilde{u}^j}{\tau_j}, v\rangle + \langle \frac{b(u^j) - b(\tilde{u}^j)}{\tau_j}, v\rangle + \int_\Omega \big(\nabla(u^j - \tilde{u}^j)\big)(\boldsymbol{x}) \cdot (\nabla v)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0.$$

En prenant $v = u^j - \tilde{u}^j$ qui appartient à $H_0^1(\Omega)$, on trouve

$$\frac{\alpha}{\tau_j}\|u^j - \tilde{u}^j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \langle \frac{b(u^j) - b(\tilde{u}^j)}{\tau_j}, u^j - \tilde{u}^j \rangle + |u^j - \tilde{u}^j|_{H^1(\Omega)}^2 = 0.$$

Et comme le terme $\langle b(u^j) - b(\tilde{u}^j), u^j - \tilde{u}^j \rangle$ est positif, alors

$$\frac{\alpha}{\tau_j}\|u^j - \tilde{u}^j\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u^j - \tilde{u}^j|_{H^1(\Omega)}^2 \leq 0.$$

Ceci implique que $u^j = \tilde{u}^j,\ 1 \leq j \leq J$.

On utilise maintenant la deuxième équation du problème (3.2), on obtient pour toute $\boldsymbol{\varphi}$ dans $H(\mathrm{div}, \Omega)$

$$\int_\Omega \boldsymbol{q}^j(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} - \int_\Omega u^j(\boldsymbol{x})(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \big(k \circ b(u^{j-1})\big)(\boldsymbol{x}) \mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0. \tag{3.8}$$

et

$$\int_\Omega \tilde{\boldsymbol{q}}^j(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} - \int_\Omega u^j(\boldsymbol{x})(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \big(k \circ b(u^{j-1})\big)(\boldsymbol{x}) \mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0. \tag{3.9}$$

Ensuite, nous soustrayons (3.9) de (3.8), on trouve

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in H(\mathrm{div}, \Omega), \quad \int_\Omega (\boldsymbol{q}^j - \tilde{\boldsymbol{q}}^j)(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0,$$

en particulier pour $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{q}^j - \tilde{\boldsymbol{q}}^j$ qui appartient à $H(\mathrm{div}, \Omega)$, on obtient

$$\|\boldsymbol{q}^j - \tilde{\boldsymbol{q}}^j\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0.$$

Ceci implique que $\boldsymbol{q}^j = \tilde{\boldsymbol{q}}^j,\ 1 \leq j \leq J$. D'où l'unicité.

2)-L'existence : On prouve maintenant l'existence de la solution pour le problème :
Trouver $u^j \in H_0^1(\Omega)$, tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \alpha \int_\Omega u^j(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \int_\Omega b(u^j(\mathrm{x})) v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\ + \tau_j \int_\Omega (\nabla u^j)(\boldsymbol{x}) \cdot (\nabla v)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \mathcal{L}^j(v),$$

avec

$$\mathcal{L}^j(v) = \alpha \int_\Omega u^{j-1}(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \int_\Omega b(u^{j-1}(\boldsymbol{x})) v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\ - \tau_j \int_\Omega k \circ b(u^{j-1}) \mathbf{e}_z(\boldsymbol{x}) \cdot (\nabla v)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x},$$

est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. Nous effectuons la preuve en plusieurs étapes :
• On définit l'application Φ de $H_0^1(\Omega)$ sur son dual :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \langle \Phi(w), v\rangle = \alpha \int_\Omega w(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_\Omega b(w(\boldsymbol{x}))v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \tau_j \int_\Omega (\nabla w)(\boldsymbol{x})\cdot(\nabla v)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \mathcal{L}^j(v).$$

Il est clair que Φ est continue sur $H_0^1(\Omega)$. On vérifie que Φ est positive sur $H_0^1(\Omega)$. On prend $v = w$, on obtient :

$$\langle \Phi(w), w\rangle = \alpha\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega b(w(\boldsymbol{x}))w(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \tau_j|w|^2_{H^1(\Omega)} - \mathcal{L}^j(w).$$

De la condition ($\boldsymbol{\mathcal{H}_2}$), on observe que $b(w)x$ est supérieur à $b(0)w$. D'où

$$\langle \Phi(w), w\rangle \geq \alpha\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \tau_j|w|^2_{H^1(\Omega)} - C_j\|w\|_{L^2(\Omega)},$$

telle que C_j est une constante qui dépend de la norme $\mathcal{L}^j$, la constante $b(0)$ et $\mu(\Omega)$. Nous utilisons la relation $ab \leq \frac{1}{2\varepsilon}a^2 + \frac{\varepsilon}{2}b^2$, $\forall\varepsilon > 0$. Pour $\varepsilon = \alpha$, dans l'inégalité précédente, nous trouvons :

$$\langle \Phi(w), w\rangle \geq \frac{\alpha}{2}\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \tau_j|w|^2_{H^1(\Omega)} - \frac{C_j^2}{2\alpha}.$$

D'où la positivité de $\langle \Phi(w), w\rangle$ sur l'ellipse

$$\frac{\alpha}{2}\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \tau_j|w|^2_{H^1(\Omega)} = \frac{C_j^2}{2\alpha}.$$

• Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, alors il existe une suite croissante $(\mathbb{H}_m)_m$ de sous-espace de dimension finie de $H_0^1(\Omega)$ tel que $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{H}_m$ et dense dans $H_0^1(\Omega)$. De plus les conditions du théorème de Brouwer (Théorème 1.3.3) sont vérifiées sur la restriction de Φ sur l'espace de dimension finie $\mathbb{H}_m$, donc il existe une suite $u_m \in \mathbb{H}_m$ telle que

$$\forall v_m \in \mathbb{H}_m \quad \langle \Phi(u_m), v_m\rangle = 0 \quad et \quad \frac{\alpha}{2}\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \tau_j|u_m|^2_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C_j^2}{2\alpha}$$

• Comme la suite $(u_m)_m$ est bornée dans $H^1(\Omega)$, et $H^1(\Omega)$ s'injecte de façons compacte dans $L^2(\Omega)$, alors il existe une sous-suite que l'on note $(u_m)_m$ pour simplifier qui converge vers u^j faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ et fortement dans $L^2(\Omega)$, la sous-suite satisfait pour $m \geq k$

$$\forall v_k \in \mathbb{H}_k, \qquad \int_\Omega u_m(\boldsymbol{x})v_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_\Omega b(u_m(\boldsymbol{x}))v_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \tau_j \int_\Omega (\nabla u_m)(\boldsymbol{x})\cdot(\nabla v_k)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \mathcal{L}^j(v_k). \quad (3.10)$$

• Passage à la limite : commençons par les termes linéaires, comme $(u_m)_m$ converge faiblement vers u^j dans $H_0^1(\Omega)$, alors $(\nabla u_m)_m$ converge faiblement vers (∇u) dans $L^2(\Omega)^d$. Concernant le terme non linéaire, on a

$$\int_\Omega b(u_m(\boldsymbol{x}))v_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \int_\Omega b(u^j(\boldsymbol{x}))v_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \Big(b(u_m(\boldsymbol{x})) - b(u^j(\boldsymbol{x}))\Big)v_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\int_\Omega \Big(b(u_m(\boldsymbol{x})) - b(u^j(\boldsymbol{x}))\Big)v_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \leq \|b(u_m) - b(u^j)\|_{L^2(\Omega)}\|v_k\|_{L^2(\Omega)}.$$

Et comme b est lipschitzienne i.e :

$$\|b(u_m) - b(u^j)\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|u_m - u^j\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.11}$$

et u_m converge vers u^j fortement dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, d'où (3.11) implique la convergence du terme non linéaire, ainsi la fonction u^j satisfait l'équation (3.10) pour tout v_k dans $\mathbb{H}_k$. Grâce à la densité de $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{H}_k$ dans $H_0^1(\Omega)$, on aura

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \alpha \int_\Omega u^j(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_\Omega b(u^j(\boldsymbol{x}))v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \tau_j \int_\Omega (\nabla u^j)(\boldsymbol{x}) \cdot (\nabla v)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \mathcal{L}^j(v).$$

D'où le couple $(u^j, \boldsymbol{q}^j)$ avec $\boldsymbol{q}^j = -\nabla u^j - k \circ b(u^{j-1})\mathbf{e}_z$ est une solution du problème (3.2), ceci achève la démonstration. ■

3.1.2 Stabilité de la solution semi-discrète

Proposition 3.1.3. *Si l'Hypothèse 3.1 est satisfaite, de plus si on suppose que u_0 est dans $H_0^1(\Omega)$, alors l'estimation suivante est valable pour la solution $(u^j, \boldsymbol{q}^j)_j$ du problème (3.2), $1 \leq j \leq J$*

$$\Big(\alpha \sum_{m=1}^{j} \tau_m \|\frac{u^m - u^{m-1}}{\tau_m}\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}} + |u^j|_{H^1(\Omega)} \leq C\Big(\sqrt{j} + |u_0|_{H^1(\Omega)}\Big). \tag{3.12}$$

Preuve. D'après la Proposition 3.1.1, le problème (3.2) peut s'écrire de manière équivalente comme suit :
Trouver $(u^j)_{1\leq j\leq J} \in H_0^1(\Omega)^{J+1}$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \alpha\langle \frac{u^j - u^{j-1}}{\tau_j}, v\rangle + \langle \frac{b(u^j) - b(u^{j-1})}{\tau_j}, v\rangle + \int_\Omega \big(\nabla u^j + k \circ b(u^{j-1})\mathbf{e}_z\big)(\boldsymbol{x}) \cdot \big(\nabla v\big)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0.$$

On prend v égale à $u^j - u^{j-1}$, on trouve

$$\alpha\tau_j\|\frac{u^j - u^{j-1}}{\tau_j}\|^2_{L^2(\Omega)} + \langle\frac{b(u^j) - b(u^{j-1})}{\tau_j}, u^j - u^{j-1}\rangle + \int_\Omega \big(\nabla u^j + k\circ b(u^{j-1})\mathbf{e}_z\big)(\boldsymbol{x})\cdot\big(\nabla(u^j - u^{j-1})\big)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0.$$

On utilise l'identité

$$(a, a-b) = \frac{1}{2}(\|a\|^2 + \|a-b\|^2 - \|b\|^2),$$

on obtient

$$\alpha\tau_j\|\frac{u^j - u^{j-1}}{\tau_j}\|^2_{L^2(\Omega)} + \langle\frac{b(u^j) - b(u^{j-1})}{\tau_j}, u^j - u^{j-1}\rangle + \frac{1}{2}|u^j|^2_{H^1(\Omega)} - \frac{1}{2}|u^{j-1}|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{2}|u^j - u^{j-1}|^2_{H^1(\Omega)} = -\int_\Omega k\circ b(u^{j-1})\mathbf{e}_z(\boldsymbol{x})\cdot\big(\nabla(u^j - u^{j-1})\big)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

Comme $\langle b(u^j) - b(u^{j-1}), u^j - u^{j-1}\rangle$ est positif, donc

$$\alpha\tau_j\|\frac{u^j - u^{j-1}}{\tau_j}\|^2_{L^2(\Omega)} + +\frac{1}{2}|u^j|^2_{H^1(\Omega)} - \frac{1}{2}|u^{j-1}|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{2}|u^j - u^{j-1}|^2_{H^1(\Omega)} \leq -\int_\Omega \big(k\circ b(u^{j-1})\mathbf{e}_z\big)\cdot\big(\nabla(u^j - u^{j-1})\big)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que l'application $k\circ b$ est bornée, on trouve

$$\alpha\tau_j\|\frac{u^j - u^{j-1}}{\tau_j}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}|u^j|^2_{H^1(\Omega)} - \frac{1}{2}|u^{j-1}|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{2}|u^j - u^{j-1}|^2_{H^1(\Omega)} \leq c|u^j - u^{j-1}|_{H^1(\Omega)}.$$

Nous utilisons la relation $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, nous obtenons

$$\alpha\tau_j\|\frac{u^j - u^{j-1}}{\tau_j}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}|u^j|^2_{H^1(\Omega)} - \frac{1}{2}|u^{j-1}|^2_{H^1(\Omega)} \leq \frac{c^2}{2}.$$

en sommant sur j, on obtient

$$\alpha\sum_{m=1}^{j}\tau_m\|\frac{u^m - u^{m-1}}{\tau_m}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{j}\Big(|u^m|^2_{H^1(\Omega)} - |u^{m-1}|^2_{H^1(\Omega)}\Big) \leq \frac{c^2 j}{2}.$$

Alors

$$\alpha\sum_{m=1}^{j}\tau_m\|\frac{u^m - u^{m-1}}{\tau_m}\|^2_{L^2(\Omega)} + |u^j|^2_{H^1(\Omega)} \leq c^2 j + |u_0|^2_{H^1(\Omega)}.$$

En déduit que

$$\big(\alpha\sum_{m=1}^{j}\tau_m\|\frac{u^m - u^{m-1}}{\tau_m}\|^2_{L^2(\Omega)}\big)^{\frac{1}{2}} + |u^j|_{H^1(\Omega)} \leq C\Big(\sqrt{j} + |u_0|_{H^1(\Omega)}\Big),$$

avec $C = \max(1, c)$. ∎

3.2 Discrétisation spatiale

On considère Ω le carré ou le cube $]-1,1[^d$, $d=2$ ou 3. Pour d'écrire les espaces discrets, on introduit pour tout triplet (ℓ,m,n) des entiers non négatifs,
• En $d=2$, l'espace $\mathbb{P}_{\ell,m}(\Omega)$ des restrictions à Ω des polynômes de degré $\leq \ell$ par rapport à x et $\leq m$ par rapport à y.
• En $d=3$, l'espace $\mathbb{P}_{\ell,m,n}(\Omega)$ des restrictions à Ω des polynômes de degré $\leq \ell$ par rapport à x, $\leq m$ par rapport à y et $\leq n$ par rapport à z.
Si ℓ et m sont égales à n, l'espaces sera tout simplement noté $\mathbb{P}_n(\Omega)$.
Le paramètre de discrétisation est un entier $N \geq 2$. Les espaces discrets $\mathbb{X}_N$ et $\mathbb{Y}_N$ associés à $L^2(\Omega)$ et $H(\mathrm{div},\Omega)$ respectivement sont définis comme suit :

$$\mathbb{X}_N = \mathbb{P}_{N-1}(\Omega).$$

$$\mathbb{Y}_N = \begin{cases} \mathbb{P}_{N,N-1}(\Omega) \times \mathbb{P}_{N-1,N}(\Omega) & \text{si } d=2, \\ \mathbb{P}_{N,N-1,N-1}(\Omega) \times \mathbb{P}_{N-1,N,N-1}(\Omega) \times \mathbb{P}_{N-1,N-1,N}(\Omega) & \text{si } d=3. \end{cases}$$

Afin de gérer les fonctions non régulières b et k, comme suggéré dans [22], nous utilisons éventuellement la sur-intégration. On fixe un entier $M \geq N$ et en posant $\xi_{M0} = -1$ et $\xi_{MM} = 1$, on introduit les $M-1$ nœuds ξ_{Mi}, $1 \leq i \leq M-1$, et les $M+1$ poids ρ_{Mi}, $0 \leq i \leq M$, de la formule de quadrature de Gauss-Lobatto (1.11).

Le problème discret construit par la méthode de Galerkin avec intégration numérique s'écrit :
Trouver $\left(u_N^j\right)_{0\leq j\leq J} \in \mathbb{X}_N^{J+1}$ et $\left(\boldsymbol{q}_N^j\right)_{1\leq j\leq J} \in \mathbb{Y}_N^J$ tel que

$$u_N^0 = \mathcal{I}_{N-1}u_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

et pour tout j, $1 \leq j \leq J$,

$$\forall w_N \in \mathbb{X}_N, \quad \alpha(\frac{u_N^j - u_N^{j-1}}{\tau_j}, w_N)_M + (\frac{b(u_N^j) - b(u_N^{j-1})}{\tau_j}, w_N)_M + (\nabla \cdot \boldsymbol{q}_N^j, w_N)_M = 0,$$

$$\forall \boldsymbol{\varphi}_N \in \mathbb{Y}_N, \quad (\boldsymbol{q}_N^j, \boldsymbol{\varphi}_N)_M - (u_N^j, \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{N}})_M + (\mathcal{I}_{N-1}(k \circ b(u_N^{j-1})\mathbf{e}_z), \boldsymbol{\varphi}_N)_M = 0. \quad (3.13)$$

Hypothèse 3.2.

$(\boldsymbol{\mathcal{H}_1})$ *Les applications b et k satisfont l'hypothèse 2.1.*

$(\boldsymbol{\mathcal{H}_2})$ *La fonction u_0 appartient à $H^s(\Omega), s > \frac{d}{2}$.*

Proposition 3.2.1. *Si l'hypothèse* 3.2 *est satisfaite, le problème* (3.13) *admet une solution unique* $(u_N^j, \boldsymbol{q}_N)_j$*, pour tout* $1 \leq j \leq J$.

Preuve. Nous commençons par montrer l'unicité.
Soient $(u_N^j, \boldsymbol{q}_N^j)$ et $(\tilde{u}_N^j, \tilde{\boldsymbol{q}}_N^j)$ deux solutions du problème (3.13),

$$\begin{aligned}
&\forall w_N \in \mathbb{X}_N, \quad \alpha(\frac{u_N^j - u_N^{j-1}}{\tau_j}, w_N)_M + (\frac{b(u_N^j) - b(u_N^{j-1})}{\tau_j}, w_N)_M + (\nabla \cdot \boldsymbol{q}_N^j, w_N)_M = 0,\\
&\forall \boldsymbol{\varphi}_N \in \mathbb{Y}_N, \quad (\boldsymbol{q}_N^j, \boldsymbol{\varphi}_N)_M - (u_N^j, \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi_N})_M + (\mathcal{I}_{N-1}(k \circ b(u_N^{j-1})\mathbf{e}_z), \boldsymbol{\varphi}_N)_M = 0. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\forall w_N \in \mathbb{X}_N, \quad \alpha(\frac{\tilde{u}_N^j - \tilde{u}_N^{j-1}}{\tau_j}, w_N)_M + (\frac{b(\tilde{u}_N^j) - b(\tilde{u}_N^{j-1})}{\tau_j}, w_N)_M + (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{q}}_N^j, w_N)_M = 0,\\
&\forall \boldsymbol{\varphi}_N \in \mathbb{Y}_N, \quad (\tilde{\boldsymbol{q}}_N^j, \boldsymbol{\varphi}_N)_M - (\tilde{u}_N^j, \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi_N})_M + (\mathcal{I}_{N-1}(k \circ b(\tilde{u}_N^{j-1})\mathbf{e}_z), \boldsymbol{\varphi}_N)_M = 0. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Nous soustrayons (3.15) de (3.14), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\forall w_N \in \mathbb{X}_N, \quad &\alpha(\frac{u_N^j - \tilde{u}_N^j}{\tau_j}, w_N)_M - \alpha(\frac{u_N^{j-1} - \tilde{u}_N^{j-1}}{\tau_j}, w_N)_M + (\frac{b(u_N^j) - b(\tilde{u}_N^j)}{\tau_j}, w_N)_M\\
&- (\frac{b(u_N^{j-1}) - b(\tilde{u}_N^{j-1})}{\tau_j}, w_N)_M + (\nabla \cdot (\boldsymbol{q}_N^j - \tilde{\boldsymbol{q}}_N^j), w_N)_M = 0, \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall \boldsymbol{\varphi}_N \in \mathbb{Y}_N, \quad &(\boldsymbol{q}_N^j - \tilde{\boldsymbol{q}}_N^j, \varphi_N)_M - (u_N^j - \tilde{u}_N^j, \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_N)_M\\
&+ ((\mathcal{I}_{N-1}(k \circ b(\tilde{u}_N^{j-1}) - \mathcal{I}_{N-1}(k \circ b(u_N^{j-1}))\mathbf{e}_z), \boldsymbol{\varphi}_N)_M = 0. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

On montre par récurrence que

$$(u_N^{j-1} = \tilde{u}_N^{j-1}), \quad 1 \leq j \leq J \quad (p),$$

on a pour $j = 1$, $u_N^0 - \tilde{u}_N^0 = \mathcal{I}_{N-1}u_0 - \mathcal{I}_{N-1}u_0 = 0$ donc (p) est vraie pour $j = 1$. Maintenant on suppose que (p) est vraie et on montre qu'elle est vraie pour j. D'après (3.16)-(3.17) et par l'hypothèse de récurrence, on aura

$$\begin{aligned}
&\forall w_N \in \mathbb{X}_N, \quad \alpha(\frac{u_N^j - \tilde{u}_N^j}{\tau_j}, w_N)_M + (\frac{b(u_N^j) - b(\tilde{u}_N^j)}{\tau_j}, w_N)_M + (\nabla \cdot (\boldsymbol{q}_N^j - \tilde{\boldsymbol{q}}_N^j), w_N)_M = 0,\\
&\forall \boldsymbol{\varphi}_N \in \mathbb{Y}_N, \quad (\boldsymbol{q}_N^j - \tilde{\boldsymbol{q}}_N^j, \boldsymbol{\varphi}_N)_M - (u_N^j - \tilde{u}_N^j, \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_N)_M = 0.
\end{aligned}$$

On prend $w_N = u_N^j - \tilde{u}_N^j$ et $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{q}_N^j - \tilde{\boldsymbol{q}}_N^j$, et on somme les deux équations, on obtient

$$\alpha(\frac{u_N^j - \tilde{u}_N^j}{\tau_j}, u_N^j - \tilde{u}_N^j)_M + (\frac{b(u_N^j) - b(\tilde{u}_N^j)}{\tau_j}, u_N^j - \tilde{u}_N^j)_M + (\boldsymbol{q}_N^j - \tilde{\boldsymbol{q}}_N^j, \boldsymbol{q}_N^j - \tilde{\boldsymbol{q}}_N^j)_M = 0.$$

D'après la relation d'équivalence (1.12), on trouve

$$\frac{\alpha}{\tau_j}\|u_N^j - \tilde{u}_N^j\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\boldsymbol{q}_N^j - \tilde{\boldsymbol{q}}_N^j\|^2_{L^2(\Omega)^d}\leq -\frac{1}{\tau_j}(b(u_N^j) - b(\tilde{u}_N^j), u_N^j - \tilde{u}_N^j)_M.$$

En dimension $d = 2$ par exemple,

$$\begin{aligned}&(b(u_N^j) - b(\tilde{u}_N^j), u_N^j - \tilde{u}_N^j)_M \\ &= \sum_{i,j=0}^{M} \big(b(u_N^j(\xi_{Mi}, \xi_{Mj})) - b(\tilde{u}_N^j(\xi_{Mi}, \xi_{Mj}))\big)\big(u_N^j(\xi_{Mi}, \xi_{Mj}) - \tilde{u}_N^j(\xi_{Mi}, \xi_{Mj})\big)\,\rho_{Mi}\rho_{Mj},\end{aligned}$$

et comme les ρ_{Mi} sont positifs, nous utilisons l'hypothèse 3.2

$$\frac{\alpha}{\tau_j}\|u_N^j - \tilde{u}_N^j\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\boldsymbol{q}_N^j - \tilde{\boldsymbol{q}}_N^j\|^2_{L^2(\Omega)^d}\leq 0.$$

Ceci implique que $(u_N^j, \boldsymbol{q}_N^j)$ égal à $(\tilde{u}_N^j, \tilde{\boldsymbol{q}}_N^j)$, pour $1 \leq j \leq J$. D'où l'unicité.
On démontre maintenant l'existence. On introduit l'application Φ_N sur $\mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N$, pour tout $(w_N, \boldsymbol{\varphi}_N) \in \mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N$, $(u_N, \boldsymbol{q}_N) \in \mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N$

$$\begin{aligned}\langle \Phi_N(u_N, \boldsymbol{q}_N), (w_N, \boldsymbol{\varphi}_N)\rangle = \alpha(\frac{u_N}{\tau_j}, w_N)_M + (\frac{b(u_N)}{\tau_j}, w_N)_M + (\nabla\cdot \boldsymbol{q}_N, \boldsymbol{\varphi}_N)_M \\ + (\boldsymbol{q}_N, \boldsymbol{\varphi}_N)_M - (u_N, \nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}_N)_M - R^j(w_N, \boldsymbol{\varphi}_N),\end{aligned}$$

tel que

$$R^j(w_N, \boldsymbol{\varphi}_N) = \alpha(\frac{u_N^{j-1}}{\tau_j}, w_N)_M + (\frac{b(u^{j-1})}{\tau_j}, w_N)_M - (\mathcal{I}_{N-1}k\circ b(u_N^{j-1})\mathbf{e}_z, \boldsymbol{\varphi}_N)_M.$$

L'application Φ_N est continue sur $\Big(\mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N, (\|\cdot\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\cdot\|^2_{H(\mathrm{div},\Omega)})^{\frac{1}{2}}\Big)$, et comme toutes les normes sur l'espace de dimension finie sont équivalentes, alors Φ_N est continue sur $\Big(\mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N, (\|\cdot\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\cdot\|^2_{L^2(\Omega)^d})^{\frac{1}{2}}\Big)$. On vérifie maintenant que Φ_N est positive sur $\mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N$. On prend $(w_N, \boldsymbol{\varphi}_N) = (u_N, \boldsymbol{q}_N)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\langle \Phi_N(u_N, \boldsymbol{q}_N), (u_N, \boldsymbol{q}_N)\rangle = \alpha(\frac{u_N}{\tau_j}, \boldsymbol{q}_N)_M + (\frac{b(u_N)}{\tau_j}, u_N)_M + (\nabla\cdot \boldsymbol{q}_N, \boldsymbol{q}_N)_M \\ + (\boldsymbol{q}_N, \boldsymbol{q}_N)_M - (u_N, \nabla\cdot\boldsymbol{q}_N)_M - R^j(u_N, \boldsymbol{q}_N).\end{aligned}$$

Comme $(b(u_N), u_N)_M$ est positif, on applique la relation d'équivalence (1.12), on trouve

$$\langle \Phi_N(u_N, \boldsymbol{q}_N), (u_N, \boldsymbol{q}_N)\rangle \geq \frac{\alpha}{\tau_j}\|u_N\|^2_{L^2(\Omega)}+\|v_N\|^2_{L^2(\Omega)^d}-R^j(u_N, \boldsymbol{q}_N).$$

D'autre part, d'après l'inégalités de Cauchy-Schwarz et la relation d'équivalence (1.12), on aura

$$\begin{aligned}
R^j(u_N,\boldsymbol{q}_N) &\le \frac{\alpha}{\tau_j}(u_N^{j-1},u_N^{j-1})_M^{\frac{1}{2}}(u_N,u_N)_M^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\tau_j}(b(u_N^{j-1}),b(u_N^{j-1}))_M^{\frac{1}{2}}(u_N,u_N)_M^{\frac{1}{2}} \\
&+ (\mathcal{I}_{N-1}k\circ b(u_N^{j-1})\mathbf{e}_z,\mathcal{I}_{N-1}k\circ b(u_N^{j-1})\mathbf{e}_z)_M^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{q}_N,\boldsymbol{q}_N)_M^{\frac{1}{2}}. \\
&\le \frac{3^d\alpha}{\tau_j}\|u_N^{j-1}\|_{L^2(\Omega)}\|u_N\|_{L^2(\Omega)}+\frac{3^d}{\tau_j}\|b(u_N^{j-1})\|_{L^2(\Omega)}\|u_N\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ 3^d\|\mathcal{I}_{N-1}k\circ b(u_N^{j-1})\mathbf{e}_z\|_{L^2(\Omega)}\|\boldsymbol{q}_N\|_{L^2(\Omega)^d} \\
&\le \frac{3^d\alpha}{\tau_j}\|u_N^{j-1}\|_{L^2(\Omega)}\|u_N\|_{L^2(\Omega)}+\frac{3^d}{\tau_j}\|b(u_N^{j-1})\|_{L^2(\Omega)}\|u_N\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ 3^d\|\mathcal{I}_{N-1}k\circ b(u_N^{j-1})\mathbf{e}_z\|_{L^2(\Omega)}\|\boldsymbol{q}_N\|_{L^2(\Omega)^d}, \\
&\le \max\left(3^d\big(\frac{\alpha}{\tau_j}\|u_N^{j-1}\|_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{\tau_j}\|b(u_N^{j-1})\|_{L^2(\Omega)}\big),3^d\|\mathcal{I}_{N-1}k\circ b(u_N^{j-1})\mathbf{e}_z\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\times\left(\|u_N\|_{L^2(\Omega)}+\|\boldsymbol{q}_N\|_{L^2(\Omega)^d}\right), \\
&\le C_j\left(\|u_N\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\boldsymbol{q}_N\|^2_{L^2(\Omega)^d}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Tout cela donne

$$\langle\Phi_N(u_N,\boldsymbol{q}_N),(u_N,\boldsymbol{q}_N)\rangle \ge \min(1,\frac{\alpha}{\tau_j})\left(\|u_N\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\boldsymbol{q}_N\|^2_{L^2(\Omega)^d}\right)-C_j\left(\|u_N\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\boldsymbol{q}_N\|^2_{L^2(\Omega)^d}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ceci implique que $\langle\Phi_N(u_N,\boldsymbol{q}_N),(u_N,\boldsymbol{q}_N)\rangle$ est positive sur la sphère de rayon

$$C_j=\sqrt{2}\max\left(3^d\big(\frac{\alpha}{\tau_j}\|u_N^{j-1}\|_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{\tau_j}\|b(u_N^{j-1})\|_{L^2(\Omega)}\big),3^d\|\mathcal{I}_{N-1}k\circ b(u_N^{j-1})\mathbf{e}_z\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Les conditions du théorème de Brouwer voir (Théorème 1.3.3) sont satisfaite, donc il existe un couple $(u_N,\boldsymbol{q}_N)\in\mathbb{X}_N\times\mathbb{Y}_N$ tel que

$$\forall(w_N,\boldsymbol{\varphi}_N)\in\mathbb{X}_N\times\mathbb{Y}_N,\quad \langle\Phi_N(u_N,\boldsymbol{q}_N),(w_N,\boldsymbol{\varphi}_N)\rangle=0,$$

et vérifiant la propriété :

$$(\|u_N\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\boldsymbol{q}_N\|^2_{L^2(\Omega)^d})^{\frac{1}{2}}\le C_j,$$

d'où $(u_N,\boldsymbol{q}_N)$ est une solution du problème (3.13). ■

CHAPITRE 4

ESTIMATION D'ERREUR A PRIORI

L'estimation d'erreur a priori repose essentiellement sur le théorème de Brezzi, Rappaz et Raviart voir [12], pour cela nous avons besoin de travailler avec une autre formulation variationnelle équivalente à (2.3)–(2.4).

4.1 Nouvelle formulation

Soit $\mathcal{T}$ l'opérateur associé à l'équation linéaire de la chaleur : Pour toutes données F dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et u_0 satisfaisant l'Hypothèse 2.1. $\mathcal{T}(F,u_0)$ est égal à la solution du problème
Trouver $u \in \mathcal{C}^0(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$ tel que

$$u(\cdot,0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

et pour tout $t \in]0,T[$,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \alpha \int_\Omega \partial_t u(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla v(\boldsymbol{x})d\mathbf{x} = \int_\Omega F(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}. \quad (4.1)$$

Il est clair que ce problème est bien posé.
Avec cette notation, le problème (2.3)–(2.4) est équivalent à trouver u la solution de l'équation :

$$\mathcal{F}(u) = u - \mathcal{T}(\mathcal{G}(u),u_0) = 0. \quad (4.2)$$

où l'application $\mathcal{G}$ est définie par

$$\int_\Omega \mathcal{G}(u)(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = -\langle \partial_t b(u)(\cdot,t), v\rangle - \int_\Omega k\circ b(u)(\boldsymbol{x},t)\mathbf{e}_z \cdot \nabla v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}. \tag{4.3}$$

Nous prouvons d'abord une autre propriété de $D\mathcal{F}(u)$, où u est la solution du problème (2.3)–(2.4) et D représente l'opérateur différentiel par rapport à u. Maintenant nous fixons :

$$\mathbb{W} = L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.4}$$

Lemme 4.1.1. *Supposons que les applications b et k sont de classe $\mathcal{C}^2$ à dérivées bornées. Si la solution u du problème (2.3)–(2.4) est telle que $\partial_t u$ appartient à $L^\infty(\Omega\times]0,T[)$, l'opérateur $D\mathcal{F}(u)$ est un isomorphisme de $\mathbb{W}$.*

Preuve. L'assertion du lemme est équivalente au caractère bien posé du problème suivant : Pour tout F dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$;
Trouver $w \in \mathcal{C}^0(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$ tel que

$$w(\cdot,0) = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

et pour tout $t \in]0,T[$,

$$\begin{aligned}\forall v \in H_0^1(\Omega),\quad \alpha\int_\Omega \partial_t w(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \partial_t\left(b'(u)w\right)(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\ + \int_\Omega \left(\nabla w + (k\circ b)'(u)w\mathbf{e}_z\right)(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_\Omega F(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Nous procédons en plusieurs étapes, on commence par montrer une estimation a priori de toute solution de ce problème.

Étape 1. Premièrement, nous prenons v égal à w dans (4.5), nous obtenons

$$\begin{aligned}\alpha\int_\Omega \partial_t w(\boldsymbol{x},t)w(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \partial_t\left(b'(u)w\right)(\boldsymbol{x},t)w(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}\\ + \int_\Omega \left(\nabla w + (k\circ b)'(u)w\mathbf{e}_z\right)(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla w(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} = \int_\Omega F(\boldsymbol{x},t)w(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \partial_t\left(b'(u)w\right)(\boldsymbol{x},t)w(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} + |w(\cdot,t)|^2_{H^1(\Omega)}\\ + \int_\Omega (k\circ b)'(u)w(\boldsymbol{x},t)\mathbf{e}_z\cdot\nabla w(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} = \int_\Omega F(\boldsymbol{x},t)w(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

On intègre par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2}\|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t\int_\Omega \partial_t\left(b'(u)w\right)(\boldsymbol{x},s)w(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds + \int_0^t |w(\cdot,s)|^2_{H^1(\Omega)}ds\\ + \int_0^t\int_\Omega (k\circ b)'(u)w(\boldsymbol{x},s)\mathbf{e}_z\cdot\nabla w(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds = \int_0^t\int_\Omega F(\boldsymbol{x},s)w(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds.\end{aligned}$$

On note que

$$\int_0^t \int_\Omega \partial_t \left(b'(u)w\right)(\boldsymbol{x},s)w(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds$$
$$= \int_0^t \int_\Omega \left(b''(u)(\partial_t u)w + b'(u)(\partial_t w)\right)(\boldsymbol{x},s)w(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds,$$

et par intégration par partie par rapport à t, on trouve

$$\int_0^t \int_\Omega \partial_t \left(b'(u)w\right)(\boldsymbol{x},s)w(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds$$
$$= \int_0^t \int_\Omega \left(b''(u)(\partial_t u)\right)(\boldsymbol{x},s)w^2(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds + \int_\Omega b'(u)(\boldsymbol{x},s)w^2(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}$$
$$- \int_0^t \int_\Omega \partial_t(b'(u)w)(\boldsymbol{x},s)w(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds.$$

Donc

$$\int_0^t \int_\Omega \partial_t \left(b'(u)w\right)(\boldsymbol{x},t)w(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}ds$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega \left(b''(u)(\partial_t u)\right)(\boldsymbol{x},s)w^2(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds + \frac{1}{2}\int_\Omega b'(u)(\boldsymbol{x},s)w^2(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}.$$

D'autre part,

$$\int_0^t \int_\Omega (k\circ b)'(u)w(\boldsymbol{x},s)\mathbf{e}_z \cdot \nabla w(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds = \int_0^t \int_{\partial\Omega} (k\circ b)'(u)w\mathbf{e}_z(\tau,s)\cdot w\boldsymbol{n}(\tau,s)d\tau ds$$
$$- \int_0^t \int_\Omega \nabla\cdot\big((k\circ b)'(u)\mathbf{e}_z w(\boldsymbol{x},s)\big)w(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds.$$

Comme w est dans $\mathcal{C}^0(0,T;H_0^1(\Omega))$, alors l'intégrale au bord s'annule, on aura donc

$$\int_0^t \int_\Omega (k\circ b)'(u)w(\boldsymbol{x},s)\mathbf{e}_z \cdot \nabla w(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds = -\int_0^t \int_\Omega \nabla\cdot\big((k\circ b)'(u)\mathbf{e}_z\big)w^2(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds$$
$$- \int_0^t \int_\Omega (k\circ b)'(u)w(\boldsymbol{x},s)\mathbf{e}_z \cdot \nabla w(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds.$$

Ceci implique que

$$\int_0^t \int_\Omega (k\circ b)'(u)w(\boldsymbol{x},t)\mathbf{e}_z \cdot \nabla w(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds = -\frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega \nabla\cdot(k\circ b)'(u)\mathbf{e}_z w^2(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds.$$

Tout cela donne

$$\frac{\alpha}{2}\|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega \left(b''(u)(\partial_t u)\right)(\boldsymbol{x},s)w^2(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds + \frac{1}{2}\int_\Omega b'(u)(\boldsymbol{x},s)w^2(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}$$
$$+ \int_0^t |w(\cdot,s)|^2_{H^1(\Omega)}ds - \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega \nabla\cdot(k\circ b)'(u)\mathbf{e}_z w^2(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds$$
$$= \int_0^t \int_\Omega F(\boldsymbol{x},s)w(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds.$$

Comme b' est positive, et par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le membre de droite, on aura

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha}{2}\|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t|w(\cdot,s)|^2_{H^1(\Omega)}ds\\&\qquad\le\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega\Big(-b''(u)\partial_t u(\boldsymbol{x},s)+\nabla\cdot\big((k\circ b)'(u)\mathbf{e}_z(\boldsymbol{x},s)\big)\Big)w^2(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds\\&\qquad+\int_0^t\|F(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}\|w(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}ds.\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Poincaré-Friedrichs (1.2), et la relation $ab\le\frac{1}{2}(a^2+b^2)$, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha}{2}\|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\int_0^t|w(\cdot,s)|^2_{H^1(\Omega)}ds\\&\qquad\le\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega\Big(-b''(u)\partial_t u(\boldsymbol{x},s)+\nabla\cdot\big((k\circ b)'(u)\mathbf{e}_z\big)(\boldsymbol{x},s)\Big)w^2(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds\\&\qquad+\frac{c_p^2}{2}\int_0^t\|F(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds.\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder, on aura

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha}{2}\|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\int_0^t|w(\cdot,s)|^2_{H^1(\Omega)}ds\\&\qquad\le\frac{1}{2}\int_0^t\Big(\|b''(u)\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t u(\cdot,s)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\nabla\cdot\big((k\circ b)'(u)\mathbf{e}_z\big)(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}\Big)\\&\qquad\times\|w^2(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}ds\\&\qquad+\frac{c_p^2}{2}\int_0^t\|F(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds.\end{aligned}$$

Or b'', $\partial_t u$ et $\nabla\cdot((k\circ b)'(u)\mathbf{e}_z)$ sont bornées, on aura

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha}{2}\|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\int_0^t|w(\cdot,s)|^2_{H^1(\Omega)}ds\\&\qquad\le\frac{c(u)}{2}\int_0^t\|w(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds+\frac{c_p^2}{2}\int_0^t\|F(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds.\end{aligned}$$

Grâce au lemme de Grönwall, on trouve

$$\|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\le c(u)\int_0^t\|F(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds\exp(t).$$

Donc

$$\|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\le C(u)\int_0^t\|F(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds. \tag{4.6}$$

Ensuite, en prenant v égal à $\partial_t w$ dans (4.5), on obtient

$$\begin{aligned}
&\alpha\|\partial_t w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega b''(u)(\boldsymbol{x},t)\partial_t u(\boldsymbol{x},t)w(\boldsymbol{x},t)\partial_t w(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}\\
&+\int_\Omega b'(u)(\boldsymbol{x},t)(\partial_t w)^2(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \left((k\circ b)'(u)\mathbf{e}_z w\right)(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla\partial_t w(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}\\
&= \int_\Omega F(\boldsymbol{x},t)\partial_t w(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

on intègre par rapport à t, et comme b' est positive, on trouve

$$\begin{aligned}
\alpha&\int_0^t \|\partial_t w(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds + \frac{1}{2}\|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\le \int_0^t\int_\Omega F(\boldsymbol{x},s)\partial_t w(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds - \int_0^t\int_\Omega b''(u)(\boldsymbol{x},t)\partial_t u(\boldsymbol{x},t)w(\boldsymbol{x},t)\partial_t w(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}ds\\
&- \int_0^t\int_\Omega \left((k\circ b)'(u)\mathbf{e}_z w\right)(\boldsymbol{x},s)\cdot\nabla\partial_t w(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds.
\end{aligned}$$

On commence par le premier terme du membre de droite, en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz et la relation suivante,

$$ab \le \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2, \tag{4.7}$$

en choisissant $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_\Omega F(\boldsymbol{x},s)\partial_t w(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds &\le \int_0^t \|\partial_t w(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}\|F(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}ds\\
&\le \frac{\alpha}{4}\int_0^t \|\partial_t w(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds + \frac{1}{\alpha}\int_0^t \|F(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds.
\end{aligned}$$

Et pour le second terme, on utilise le fait que b'' et $\partial_t u$ sont bornés, les inégalités de Cauchy–Schwarz et de Poincaré–Friedrichs (1.2), et la relation (4.7) pour $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{2}$, pour obtenir

$$\begin{aligned}
&|\int_0^t\int_\Omega b''(u)(\boldsymbol{x},t)\partial_t u(\boldsymbol{x},t)w(\boldsymbol{x},t)\partial_t w(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}ds|\\
&\qquad\le c(u)\int_0^t \|\partial_t w(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}\|w(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}ds\\
&\qquad\le c(u)c_p\int_0^t \|\partial_t w(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}|w(\cdot,s)|_{H^1(\Omega)}ds\\
&\qquad\le \frac{\alpha}{4}\int_0^t \|\partial_t w(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds + c(u)\int_0^t |w(\cdot,s)|^2_{H^1(\Omega)}ds
\end{aligned}$$

Enfin pour le troisième terme on applique l'intégration par partie par rapport à t, et les mêmes étapes utilisées précédemment

$$
\begin{aligned}
&|\int_0^t \int_\Omega \big((k\circ b)'(u)\mathbf{e}_z w\big)(\boldsymbol{x},s)\cdot\nabla\partial_t w(\boldsymbol{x},s)d\boldsymbol{x}ds| \\
&\quad = |\int_\Omega \left((k\circ b)'(u)\mathbf{e}_z w\right)(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla w(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} - \int_0^t\int_\Omega \partial_t\left((k\circ b)'(u)\mathbf{e}_z w\right)(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla w(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}ds| \\
&\quad = |\int_\Omega \left((k\circ b)'(u)\mathbf{e}_z w\right)(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla w(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} \\
&\quad - \int_0^t\int_\Omega \big(\partial_t\big((k\circ b)'(u)\mathbf{e}_z\big)(\boldsymbol{x},s)w(\boldsymbol{x},s) + (k\circ b)'(u)\mathbf{e}_z(\boldsymbol{x},s)\partial_t w(\boldsymbol{x},t)\big)\cdot\nabla w(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}ds| \\
&\quad \le c(u)|w(\cdot,t)|_{H^1(\Omega)}\|w(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} + c(u)\int_0^t \|w(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}|w(\cdot,s)|_{H^1(\Omega)}ds \\
&\quad + c(u)\int_0^t \|\partial_t w(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}|w(\cdot,s)|_{H^1(\Omega)}ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{4}|w(\cdot,t)|^2_{H^1(\Omega)} + c_1(u)\|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + c(u)C_p\int_0^t |w(\cdot,s)|^2_{H^1(\Omega)}ds \\
&+ \frac{\alpha}{4}\int_0^t \|\partial_t w(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds + c(u)\int_0^t |w(\cdot,s)|^2_{H^1(\Omega)}ds \\
&\le \frac{1}{4}|w(\cdot,t)|^2_{H^1(\Omega)} + c(u)\|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ \frac{\alpha}{4}\int_0^t \|\partial_t w(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds + c(u)\int_0^t |w(\cdot,s)|^2_{H^1(\Omega)}ds.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha}{4}\int_0^t \|\partial_t w(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds + \frac{1}{4}\|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} &\le \frac{1}{\alpha}\int_0^t \|F(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds + c(u)\|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ c(u)\int_0^t |w(\cdot,s)|^2_{H^1(\Omega)}ds.
\end{aligned}
$$

On a aussi de (4.6)

$$
\|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \le C(u)\int_0^t \|F(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds.
$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
\alpha\int_0^t \|\partial_t w(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds + \|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} &\le c(u)\int_0^t |w(\cdot,s)|^2_{H^1(\Omega)}ds \\
&+ c(u)\int_0^t \|F(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds.
\end{aligned}
$$

Ensuite on utilise le lemme de Grönwall, on aura

$$
\alpha\int_0^t \|\partial_t w(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds + \|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \le c(u)\int_0^t \|F(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds\exp(t).
$$

Donc

$$\alpha \int_0^t \|\partial_t w(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds + \|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(u) \int_0^t \|F(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds. \tag{4.8}$$

Étape 2. Maintenant on montre l'existence de la solution du problème (4.5). Notons que l'application

$$G : (t,w) \mapsto F - b''(u)\partial_t u w - \nabla w - (k \circ b)'(u) w.$$

est continue et lipschitzienne par rapport à w, en effet

$$\begin{aligned}
&\|G(t,w_1) - G(t,w_2)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad = \|-b''(u)\partial_t u w_1 - \nabla w_1 - (k\circ b)'(u) w_1 - (-b''(u)\partial_t u w_2 - \nabla w_2 - (k \circ b)'(u) w_2)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad = \|b''(u)\partial_t u(w_1 - w_2)) - \nabla(w_1 - w_2) - (k\circ b)'(u)(w_1 - w_2)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad \leq \|b''(u)\partial_t u(w_1 - w_2)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(w_1 - w_2)\|_{L^2(\Omega)^d} + \|(k\circ b)'(u)(w_1 - w_2)\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Comme b'', $\partial_t u$ et $(k \circ b)'$ sont bornées, on obtient

$$\begin{aligned}
\|G(t,w_1) - G(t,w_2)\|_{L^2(\Omega)} &\leq c(u)\|w_1 - w_2\|_{L^2(\Omega)} + |w_1 - w_2|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq C(u)\|w_1 - w_2\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Soit $(\mathbb{H}_n)_n$ une suite croissante de sous-espaces de dimension finie de $H^1_0(\Omega)$ telle que $\bigcup_n \mathbb{H}_n$ est dense dans $H^1_0(\Omega)$. On en déduit le problème suivant, pour tout $n > m$
Trouver $w_n \in \mathcal{C}^0(0,T;\mathbb{H}_n) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$ tel que

$$w_n(\cdot,0) = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

et pour tout $t \in]0,T[$,

$$\begin{aligned}
\forall v \in \mathbb{H}_m, \qquad & \alpha \int_\Omega \partial_t w_n(\boldsymbol{x},t) v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \partial_t \left(b'(u) w_n\right)(\boldsymbol{x},t) v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\
& + \int_\Omega \left(\nabla w_n + (k\circ b)'(u) w_n\right)(\boldsymbol{x},t) \cdot \nabla v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \int_\Omega F(\boldsymbol{x},t) v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (voir Théorème 1.3.6), le problème (4.9) admet une solution unique w_n dans $\mathcal{C}^0(0,T;\mathbb{H}_n) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$. La solution w_n vérifie (4.8), donc il existe une sous-suite que l'on note encore par $(w_n)_n$ pour simplifier, qui converge faiblement vers w dans $\mathcal{C}^0(0,T;H^1_0(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$. En passant à la limite sur n, on déduit que la fonction w est solution de (4.5) pour tout v dans $\mathbb{H}_m$, et donc pour tout v dans $H^1_0(\Omega)$ par densité. Ceci donne l'existence d'une solution du problème (4.5) dans $\mathcal{C}^0(0,T;H^1_0(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$.

Étape 3. Enfin on montre l'unicité, si w_1, w_2 sont deux solutions du problème (4.5) et soit $w = w_1 - w_2$ avec la donnée F égal à zéro, on voit que w vérifie l'estimation (4.6), alors on déduit que w est nulle. Ceci prouve l'unicité de la solution dans $\mathcal{C}^0(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$ ■

4.2 Estimation d'erreur en temps

On note u_τ la fonction continue affine sur $[t_{j-1},t_j]$, $1 \le j \le J$, et égales à u^j en temps $t = t_j$, $0 \le j \le J$. Pour toute fonction v continue sur $[0,T]$, on introduit aussi :

• Les fonctions $\pi_\tau^+ v$ et $\pi_\tau^- v$ sont constantes et égales à $v(t_j)$ et $v(t_{j-1})$ respectivement, sur tout intervalle $]t_{j-1},t_j]$, $1 \le j \le J$.

Soit $\mathcal{T}_\tau$ l'opérateur semi-discret : pour toutes données F dans $\mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega))$ et u_0 satisfaisant l'Hypothèse 3.1, $\mathcal{T}_\tau(F,u_0)$ est égal à u_τ associée à la solution du problème Trouver $(u^j)_{0\le j\le J} \in H_0^1(\Omega)^{J+1}$ tel que

$$u^0 = u_0 \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

et, pour $1 \le j \le J$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad \alpha \int_\Omega \left(\frac{u^j - u^{j-1}}{\tau_j}\right)(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \int_\Omega (\nabla u^j)(\boldsymbol{x}) \cdot (\nabla v)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \int_\Omega F(\boldsymbol{x},t_j) v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}. \tag{4.10}$$

Proposition 4.2.1 (Stabilité). *Pour toute donnée F dans $\mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega))$,*

$$\|\mathcal{T}_\tau(F,0)\|_{\mathbb{W}} \le c\|\pi_\tau^+ F\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{4.11}$$

Preuve. Posons $u_0 = 0$, on prend $v = \dfrac{u^j - u^{j-1}}{\tau_j}$ dans (4.10), on obtient

$$\alpha \left\|\frac{u^j - u^{j-1}}{\tau_j}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\tau_j}\int_\Omega (\nabla u^j)(\boldsymbol{x}) \cdot (\nabla(u^j - u^{j-1}))(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \int_\Omega F(\boldsymbol{x},t_j)\left(\frac{u^j - u^{j-1}}{\tau_j}\right)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz et l'identité

$$(a, a-b) = \frac{1}{2}(\|a\|^2 + \|a-b\|^2 - \|b\|^2),$$

on trouve

$$\alpha\|\frac{u^j-u^{j-1}}{\tau_j}\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2\tau_j}\big(|u^j|^2_{H^1(\Omega)}-|u^{j-1}|^2_{H^1(\Omega)}+|u^j-u^{j-1}|^2_{H^1(\Omega)}\big)$$
$$\leq \|F(\cdot,t_j)\|_{L^2(\Omega)}\|\frac{u^j-u^{j-1}}{\tau_j}\|_{L^2(\Omega)}.$$

d'autre part, on utilise la relation suivante pour $\varepsilon=\alpha$

$$ab\leq\frac{\varepsilon}{2}a^2+\frac{1}{2\varepsilon}b^2,$$

on aura

$$\frac{\alpha}{2}\|\frac{u^j-u^{j-1}}{\tau_j}\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2\tau_j}\big(|u^j|^2_{H^1(\Omega)}-|u^{j-1}|^2_{H^1(\Omega)}+|u^j-u^{j-1}|^2_{H^1(\Omega)}\big)$$
$$\leq\frac{1}{2\alpha}\|F(\cdot,t_j)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Ensuite on multiplie l'équation précédente par $2\tau_j$ et en sommant sur j, on obtient

$$\alpha\sum_{m=1}^{j}\tau_m\|\frac{u^m-u^{m-1}}{\tau_m}\|^2_{L^2(\Omega)}+|u^j|^2_{H^1(\Omega)}+\sum_{m=1}^{j}|u^m-u^{m-1}|^2_{H^1(\Omega)}$$
$$\leq\frac{1}{\alpha}\sum_{m=1}^{j}\tau_m\|F(\cdot,t_m)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Comme le terme $\sum_{m=1}^{j}|u^m-u^{m-1}|^2_{H^1(\Omega)}$ est positif, alors

$$\begin{aligned}\alpha\sum_{m=1}^{j}\tau_m\|\frac{u^m-u^{m-1}}{\tau_m}\|^2_{L^2(\Omega)}+|u^j|^2_{H^1(\Omega)} &\leq\frac{1}{\alpha}\sum_{m=1}^{j}\tau_m\|F(\cdot,t_m)\|^2_{L^2(\Omega)},\\ &\leq\frac{1}{\alpha}\sum_{m=1}^{j}\int_{t_{m-1}}^{t_m}\|F(\cdot,t_m)\|^2_{L^2(\Omega)}dt,\\ &\leq\frac{1}{\alpha}\sum_{m=1}^{j}\int_{t_{m-1}}^{t_m}\|\pi_\tau^+F(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt.\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. ■

Dans ce qui suit, on va estimer l'erreur due à la discrétisation en temps. Soit $u(\cdot,t_j)$ solution du problème (4.1) à l'instant t_j et soit u^j solution de (4.10), on définit $e^j=u(\cdot,t_j)-u^j$. En soustrayant l'équation (4.1) de (4.10) à l'instant t_j on voit que,

$\forall v\in H_0^1(\Omega)$,

$$\alpha\int_\Omega\left(\partial_t u(\boldsymbol{x},t_j)-\frac{(u^j-u^{j-1})(\boldsymbol{x})}{\tau_j}\right)v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}+\int_\Omega(\nabla(u(\boldsymbol{x},t_j)-u^j(\boldsymbol{x}))\cdot\nabla v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=0,$$

On ajoute et retranche le terme $\dfrac{u(\cdot,t_j)-u(\cdot,t_{j-1})}{\tau_j}$ à l'équation précédente, on trouve

$$\alpha\int_\Omega\left(\frac{u(\boldsymbol{x},t_j)-u^j(\boldsymbol{x})-\big(u(\boldsymbol{x},t_{j-1})-u^{j-1}(\boldsymbol{x})\big)}{\tau_j}\right)v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$
$$+\int_\Omega(\nabla(u(\boldsymbol{x},t_j)-u^j(\boldsymbol{x}))\cdot\nabla v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\alpha\int_\Omega\frac{\big(u(\boldsymbol{x},t_j)-u(\boldsymbol{x},t_{j-1})\big)}{\tau_j}-\alpha\int_\Omega\partial_t u(\boldsymbol{x},t_j)v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

On constate que $e^0=0$ et que

$$\forall v\in H_0^1(\Omega),\qquad \alpha\int_\Omega(\frac{e^j-e^{j-1}}{\tau_j})vd\boldsymbol{x}+\int_\Omega\nabla e^j\cdot\nabla vd\boldsymbol{x}=\alpha\int_\Omega\varepsilon^jvd\boldsymbol{x},\tag{4.12}$$

où l'erreur de consistance ε^j est donnée par

$$\varepsilon^j=\frac{u(\cdot,t_j)-u(\cdot,t_{j-1})}{\tau_j}-(\partial_t u)(\cdot,t_j).$$

Proposition 4.2.2. *Supposons que la solution u du problème (2.3)–(2.4) appartient à l'espace $H^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Alors, on a l'estimation suivante,*

$$\|\varepsilon^j\|_{L^2(\Omega)}\le\sqrt{\frac{\tau_j}{3}}\|u\|_{H^2(t_{j-1},t_j;L^2(\Omega))}.\tag{4.13}$$

Preuve. On fait appel à la formule de Taylor avec reste intégrale

$$u(\cdot,t_j)-u(\cdot,t_{j-1})=\tau_j(\partial_t u)(\cdot,t_j)-\int_{t_{j-1}}^{t_j}(t-t_{j-1})\partial^2_{tt}u(\cdot,t)dt,$$

donc

$$\varepsilon^j=-\frac{1}{\tau_j}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(t-t_{j-1})\partial^2_{tt}u(\cdot,t)dt.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\varepsilon^j\le\frac{1}{\tau_j}\Big(\int_{t_{j-1}}^{t_j}(t-t_{j-1})^2dt\Big)^{\frac12}\Big(\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\partial^2_{tt}u(\cdot,t))^2dt\Big)^{\frac12}.$$

Or

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j}(t-t_{j-1})^2dt=\frac13(t-t_{j-1})^3\Big|_{t_{j-1}}^{t_j}=\frac{\tau_j^3}{3}.$$

Par conséquent,

$$\varepsilon^j\le\sqrt{\frac{\tau_j}{3}}\Big(\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\partial^2_{tt}u(\cdot,t))^2dt\Big)^{\frac12}.$$

En passant à la norme de $L^2(\Omega)$, on obtient

$$\|\varepsilon^j\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\tau_j}{3}\|\partial^2_{tt}u\|^2_{L^2(t_{j-1},t_j;L^2(\Omega))}.$$

Ceci achève la démonstration. ■

Proposition 4.2.3. *Supposons que la solution u du problème (2.3)–(2.4) appartient à l'espace $H^2(0,T;H^1_0(\Omega))$. Alors, on a l'estimation suivante pour tout $1 \leq j \leq J$*

$$\Big(\alpha\sum_{m=1}^{j}\tau_m\Big\|\frac{u(\cdot,t_j)-u^j-(u(\cdot,t_{j-1})-u^{j-1})}{\tau_m}\Big\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$+|u(\cdot,t_j)-u^j|_{H^1(\Omega)} \leq c|\tau|\|u\|_{H^2(t_{j-1},t_j;L^2(\Omega))}. \quad (4.14)$$

Preuve. On prend $v = \dfrac{e^j-e^{j-1}}{\tau_j}$ dans l'équation (4.12), on trouve

$$\alpha\|\frac{e^j-e^{j-1}}{\tau_j}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\tau_j}\int_\Omega(\nabla e^j)\cdot(\nabla(e^j-e^{j-1}))d\boldsymbol{x} = \alpha\int_\Omega \varepsilon^j(\frac{e^j-e^{j-1}}{\tau_j})d\boldsymbol{x}$$

L'identité $(a, a-b) = \frac{1}{2}(\|a\|^2+\|a-b\|^2-\|b\|^2)$, l'inégalité de Cauchy–Schwarz et la formule $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, nous donnent

$$\frac{\alpha}{2}\|\frac{e^j-e^{j-1}}{\tau_j}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\tau_j}(|e^j|^2_{H^1(\Omega)}+|e^j-e^{j-1}|^2_{H^1(\Omega)}-|e^{j-1}|^2_{H^1(\Omega)}) \leq \frac{\alpha}{2}\|\varepsilon^j\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

En multipliant par $2\tau_j$

$$\alpha\tau_j\|\frac{e^j-e^{j-1}}{\tau_j}\|^2_{L^2(\Omega)} + |e^j|^2_{H^1(\Omega)}+|e^j-e^{j-1}|^2_{H^1(\Omega)}-|e^{j-1}|^2_{H^1(\Omega)} \leq \alpha\tau_j\|\varepsilon^j\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

En sommant sur j, on obtient

$$\alpha\sum_{m=1}^{j}\tau_m\|\frac{e^m-e^{m-1}}{\tau_m}\|^2_{L^2(\Omega)} + |e^j|^2_{H^1(\Omega)} + \sum_{m=1}^{j}|e^m-e^{m-1}|^2_{H^1(\Omega)} \leq \alpha\sum_{m=1}^{j}\tau_m\|\varepsilon^m\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Comme $\sum\limits_{m=1}^{j}|e^m-e^{m-1}|^2_{H^1(\Omega)}$ est positif, donc

$$\alpha\sum_{m=1}^{j}\tau_m\|\frac{e^m-e^{m-1}}{\tau_m}\|^2_{L^2(\Omega)} + |e^j|^2_{H^1(\Omega)} \leq \alpha\sum_{m=1}^{j}\tau_m\|\varepsilon^m\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

On déduit de (4.13) l'estimation d'erreur désirée. ■

Par définition des opérateurs $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_\tau$ combiné avec la Proposition 4.2.3, on déduit la proposition suivante

Proposition 4.2.4 (Estimation d'erreur a priori). *pour toute donnée F dans $\mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega))$ tel que $\mathcal{T}(F,u_0)$ appartient à $H^2(0,T;L^2(\Omega))$, on ait*

$$\|(\mathcal{T}-\mathcal{T}_\tau)(F,u_0)\|_{\mathbb{W}} \leq c|\tau|\big(\|\mathcal{T}(F,u_0)\|_{H^2(0,T;L^2(\Omega))}\big). \tag{4.15}$$

Théorème 4.2.1 (Convergence). *pour toute donnée F dans $\mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega))$,*

$$\lim_{|\tau|\to 0}\|(\mathcal{T}-\mathcal{T}_\tau)(F,0)\|_{\mathbb{W}} = 0. \tag{4.16}$$

Ainsi le problème (3.2) peut s'écrire de manière équivalente

$$\mathcal{F}_\tau(u_\tau) = u_\tau - \mathcal{T}_\tau(\mathcal{G}_\tau(u),u_0) = 0. \tag{4.17}$$

où l'application $\mathcal{G}_\tau$ est définie par

$$\int_\Omega \mathcal{G}_\tau(u)(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = -\langle\partial_t\big(b(u)\big)(\cdot,t),v\rangle - \int_\Omega k\circ b(u)(\boldsymbol{x},t)\mathbf{e}_z\cdot\nabla v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}. \tag{4.18}$$

4.3 Estimation d'erreur en espace

Dans ce qui suit on définit l'espace discret $\mathbb{Z}_N = \mathbb{P}_N^0$ associés à $H_0^1(\Omega)$, et on introduit l'espace discret, c'est-à-dire l'espace $\mathbb{W}_{N\tau}$ des fonctions affines sur chaque intervalle $[t_{j-1},t_j]$, $1\leq j\leq J$, et tels que leurs valeurs en t_j appartient à $\mathbb{Z}_N$. Cet espace est de dimension finie et inclus dans l'espace $\mathbb{W}$ défini dans (4.4).
Dans cette partie, on note $u_{N\tau}$, la fonction continue affine sur tout intervalle $[t_{j-1},t_j]$, $1\leq j\leq J$, et égales à u_N^j, au temps t_j, $0\leq j\leq J$. On vérifie que la fonction $u_{N\tau}$ appartient à l'espace $\mathbb{W}_{N\tau}$. On définie aussi l'opérateur discret $\mathcal{T}_{N\tau}$: pour toute donnée F dans $\mathcal{C}(0,T;L^2(\Omega))$ et u_0 satisfait l'Hypothèse 3.2, $\mathcal{T}_{N\tau}(F,u_0)$ est égale à la fonction $u_{N\tau}$, qui interpole la solution du problème suivant
Trouver $\big(u_N^j\big)_{0\leq j\leq J}\in\mathbb{Z}_N^{J+1}$ tel que

$$u_N^0 = \mathcal{I}_{N-1}u_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

et pour tout j, $1\leq j\leq J$,

$$\forall v_N\in\mathbb{Z}_N^0,\quad \alpha(\frac{u_N^j-u_N^{j-1}}{\tau_j},w_N)_M + (\nabla u_N^j,v_N(\cdot,t))_M = \int_\Omega F(\boldsymbol{x},t_j)v_N(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}. \tag{4.19}$$

On rappelle de [9] les estimations suivantes :
(i) Stabilité : Pur toute donnée F dans $\mathcal{C}(0,T;L^2(\Omega))$,

$$\|\mathcal{T}_{N\tau}(F,0)\|_{\mathbb{W}} \leq c\sup_{v_N\in\mathbb{W}_{N\tau}}\frac{\displaystyle\int_\Omega F(\boldsymbol{x},t_j)v_N(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}}{\|v_N\|_{\mathbb{W}}}. \tag{4.20}$$

(*ii*) Estimation d'erreur a priori : pour toute donnée F dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ tel que $\mathcal{T}(F,u_0)$ appartient à $H^1(0,T;H^s(\Omega)), s > \frac{d}{2}$

$$\|(\mathcal{T}_\tau - \mathcal{T}_{N\tau})(F,u_0)\|_{\mathbb{W}} \leq cN^{1-s}\|\mathcal{T}(F,u_0)\|_{H^1(0,T;H^s(\Omega))}. \tag{4.21}$$

(*iii*) Convergence : pour toute donnée F dans $\mathcal{C}(0,T;L^2(\Omega))$,

$$\lim_{N\to+\infty}\|(\mathcal{T}_\tau - \mathcal{T}_{N\tau})(F,0)\|_{\mathbb{W}} = 0. \tag{4.22}$$

Pour conclure, on observe que le problème peut s'écrire de manière équivalente

$$\mathcal{F}_{N\tau}(u_{N\tau}) = u_{N\tau} - \mathcal{T}_{N\tau}(\mathcal{G}_{N\tau}(u_{N\tau}),u_0) = 0, \tag{4.23}$$

où l'application $\mathcal{G}_{N\tau}$ est définie par

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{G}_{N\tau}(u_{N\tau})(\cdot,t),v_N\big)_M = &-(\partial_t\big(b(u_{N\tau})\big)(\cdot,t),v_N)_M \\ &- (k\circ b(u_{N\tau})(\cdot,t)\mathbf{e}_z\cdot\nabla v_N(\cdot,t))_M.\end{aligned} \tag{4.24}$$

4.4 Lemmes techniques

Maintenant, nous introduisons une approximation $u^*_{N\tau}$ de la solution u dans $\mathbb{W}_{N\tau}$ et nous faisons les hypothèses suivantes

Hypothèse 4.1.

($\mathcal{H}_1$) *La solution u du problème* (2.3)–(2.4) *appartient à $L^\infty(\Omega\times]0,T[)$, avec sa dérivée $\partial_t u$.*

($\mathcal{H}_2$) *La propriété de convergence suivante est vérifiée*

$$\lim_{|\tau|\to0}\lim_{N\to\infty}\|u-u^*_{N\tau}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} = 0. \tag{4.25}$$

$$\lim_{|\tau|\to0}\lim_{N\to\infty}\|\partial_t u-\partial_t u^*_{N\tau}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} = 0. \tag{4.26}$$

($\mathcal{H}_3$) *L'application $(k\circ b)'$ est continue et Lipschitzienne.*

On réfère à [13] et [29] pour la preuve de l'estimation suivante,

Lemme 4.4.1. *pour tout réel $s > \frac{d}{2}$, il existe une constante c positive ne dépend que de s telle que, pour toute fonction v de $H^s(\Omega)$, on ait*

$$\|v-\mathcal{I}_N v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq cN^{\frac{d}{2}-s}\|v\|_{H^s(\Omega)}. \tag{4.27}$$

Lemme 4.4.2. *Supposons que les applications b et k soient de classe $\mathcal{C}^2$ avec des dérivées bornées, et que l'application b'' est continue et Lipschitzienne. Si l'Hypothèse 4.1 est vérifiée, il existe des nombres réels positifs τ_0 et N_0 tels que, pour tout τ, $|\tau| \le \tau_0$ et pour tout $N \ge N_0$, l'opérateur $D\mathcal{F}_{N\tau}(u^*_{N\tau})$ est un isomorphisme de $\mathbb{W}_{N\tau}$, et la norme de son inverse est bornée indépendamment de τ et de N.*

Preuve. On utilise la décomposition :

$$D\mathcal{F}_{N\tau}(u^*_{N\tau}) = D\mathcal{F}(u) + (\mathcal{T} - \mathcal{T}_{N\tau})(D\mathcal{G}(u), 0) + \mathcal{T}_{N\tau}(D\mathcal{G}(u) - D\mathcal{G}_{N\tau}(u^*_{N\tau}), 0).$$

D'après le Lemme 4.1.1, $D\mathcal{F}(u)$ est un isomorphisme de $\mathbb{W}$, il suffit de voir que les deux derniers termes tendent vers 0 quand $\tau \to 0$ et $N \to \infty$.

Étape 1 : Nous déduisons de (4.3) que pour toute $w_{N\tau}$ un élément de la sphère unité de $\mathbb{W}_{N\tau}$,

$$\int_\Omega D\mathcal{G}(u)(\boldsymbol{x}, t) w_{N\tau}(\boldsymbol{x}, t) v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = -\langle b'(u)\partial_t w_{N\tau}(\cdot, t), v\rangle - \langle b''(u) w_{N\tau}(\cdot, t)\partial_t u(\cdot, t), v\rangle$$
$$- \int_\Omega (k \circ b(u))'(\boldsymbol{x}, t) w_{N\tau}(\boldsymbol{x}, t)\mathbf{e}_z \cdot \nabla v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

Comme $\mathbb{W}_{N\tau}$ est de dimension finie, on déduit de l'hypothèse 4.1 que $D\mathcal{G}(u)w_{N\tau}$ appartient à un compact de $\mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega))$ voir [1]. Grâce à décomposition :

$$\mathcal{T} - \mathcal{T}_{N\tau} = \mathcal{T} - \mathcal{T}_\tau + \mathcal{T}_\tau - \mathcal{T}_{N\tau},$$

la convergence du premier terme est une conséquence directe de (4.15) et (4.21).

Étape 2 : On définit les quantités

$$\begin{aligned}\int_\Omega D\mathcal{G}(u)(\boldsymbol{x}, t) w_{N\tau}(\boldsymbol{x}, t) v_N(\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x} = &- \langle b'(u)\partial_t w_{N\tau}(\cdot, t), v_N(\cdot, t)\rangle \\ &- \langle b''(u) w_{N\tau}(\cdot, t)\partial_t u(\cdot, t), v_N(\cdot, t)\rangle \\ &- \int_\Omega (k \circ b)'(\boldsymbol{x}, t) w_{N\tau}(\boldsymbol{x}, t)\mathbf{e}_z \cdot \nabla v_N(\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x},\end{aligned}$$

et

$$\big(D\mathcal{G}_{N\tau}(u^*_{N\tau})(\cdot, t) w_{N\tau}(\boldsymbol{x}, t), v_N(\cdot, t)\big)_M = -(b'(u^*_{N\tau})\partial_t w_{N\tau}(\cdot, t), v_N(\cdot, t))_M$$
$$- (b''(u^*_{N\tau}) w_{N\tau}(\cdot, t)\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot, t), v_N(\cdot, t))_M - ((k \circ b(u^*_{N\tau}))'(\cdot, t) w_{N\tau}(\cdot, t)\mathbf{e}_z, \nabla v_N(\cdot, t))_M.$$

Grâce à (4.20), on va montrer la convergence de la quantité

$$D\mathcal{G}(u) - D\mathcal{G}_{N\tau}(u^*_{N\tau}),$$

pour tout w_N et v_N dans $\mathbb{W}_{N\tau}$ avec $\|v_N\|_{\mathbb{W}} = 1$. On voit que

$$D\mathcal{G}(u) - D\mathcal{G}_{N\tau}(u^*_{N\tau}) = D\mathcal{G}(u) - D\mathcal{G}(u^*_{N\tau}) + D\mathcal{G}(u^*_{N\tau}) - D\mathcal{G}_{N\tau}(u^*_{N\tau}).$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (D\mathcal{G}(u) - D\mathcal{G}(u^*_{N\tau}))(\boldsymbol{x},t) w_{N\tau}(\boldsymbol{x},t) v_N(\boldsymbol{x},t) d\boldsymbol{x} \\
&\qquad = -\langle b'(u)\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t), v_N(\cdot,t)\rangle + \langle b'(u^*_{N\tau})\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t), v_N(\cdot,t)\rangle \\
&\qquad - \langle b''(u) w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u(\cdot,t), v_N(\cdot,t)\rangle + \langle b''(u^*_{N\tau}) w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t), v_N(\cdot,t)\rangle \\
&\qquad - \int_\Omega (k\circ b(u))'(\boldsymbol{x},t) w_{N\tau}(\boldsymbol{x},t)\mathbf{e}_z \cdot \nabla v_N(\boldsymbol{x},t) d\boldsymbol{x} \\
&\qquad + \int_\Omega (k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\boldsymbol{x},t) w_{N\tau}(\cdot,t)\mathbf{e}_z \cdot \nabla v_N(\boldsymbol{x},t) d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

On fait les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
E_{1,1} &:= -\langle b'(u)\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t), v_N(\cdot,t)\rangle + \langle b'(u^*_{N\tau})\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t), v_N(\cdot,t)\rangle, \\
E_{2,1} &:= -\langle b''(u) w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u(\cdot,t), v_N(\cdot,t)\rangle + \langle b''(u^*_{N\tau}) w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t), v_N(\cdot,t)\rangle, \\
E_{3,1} &:= -\int_\Omega (k\circ b(u))'(\boldsymbol{x},t) w_{N\tau}(\boldsymbol{x},t)\mathbf{e}_z \cdot \nabla v_N(\boldsymbol{x},t) d\boldsymbol{x} \\
&+ \int_\Omega (k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\boldsymbol{x},t) w_{N\tau}(\cdot,t)\mathbf{e}_z \cdot \nabla v_N(\boldsymbol{x},t) d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

Pour traiter $E_{1,1}$ on utilise l'inégalité de Hölder et le fait que b' est Lipschitzienne, en effet

$$\begin{aligned}
|E_{1,1}| =& |\langle b'(u^*_{N\tau}) - b'(u)\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t), v_N(\cdot,t)\rangle|, \\
&\leq \|b'(u^*_{N\tau}) - b'(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \|v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}, \\
&\leq c\|u^*_{N\tau}(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \|v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

On intègre entre 0 et T et on utilise l'inégalité de Hölder par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^T |E_{1,1}| dt = &\leq c\int_0^T \|u^*_{N\tau}(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \|v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} dt, \\
&\leq c\|u^*_{N\tau} - u\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} \Big(\int_0^T \|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^T \|v_N(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt\Big)^{\frac{1}{2}}, \\
&\leq c\|u^*_{N\tau} - u\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} \|\partial_t w_{N\tau}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \|v_N\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.
\end{aligned}$$

D'après (4.25), on obtient la convergence de $E_{1,1}$.

Et pour $E_{2,1}$ on ajoute et retranche le terme $\langle b''(u^*_{N\tau}) w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u(\cdot,t), v_N(\cdot,t)\rangle$

$$\begin{aligned}
E_{2,1} &= -\langle b''(u) w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u(\cdot,t), v_N(\cdot,t)\rangle + \langle b''(u^*_{N\tau}) w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t), v_N(\cdot,t)\rangle \\
&+ \langle b''(u^*_{N\tau}) w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u(\cdot,t), v_N(\cdot,t)\rangle - \langle b''(u^*_{N\tau}) w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u(\cdot,t), v_N(\cdot,t)\rangle, \\
&= \langle (b''(u^*_{N\tau}) - b''(u)) w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u(\cdot,t), v_N(\cdot,t)\rangle \\
&+ \langle b''(u^*_{N\tau}) w_{N\tau}(\cdot,t)(\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t) - \partial_t u(\cdot,t)), v_N(\cdot,t)\rangle
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Hölder et le fait que b'' est Lipschitzienne, on aura

$$\begin{aligned}|E_{2,1}| &\leq \|b''(u^*_{N\tau}) - b''(u)\|_{L^\infty(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &\quad + \|b''(u^*_{N\tau})\|_{L^\infty(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\left(\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t) - \partial_t u(\cdot,t)\right)\|_{L^2(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq c\|u^*_{N\tau}(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &\quad + \|b''(u^*_{N\tau})\|_{L^\infty(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\left(\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t) - \partial_t u(\cdot,t)\right)\|_{L^2(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

en utilisant encore L'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}|E_{2,1}| &\leq c\|u^*_{N\tau}(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &\quad + \|b''(u^*_{N\tau})\|_{L^\infty(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t) - \partial_t u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

comme b'' et $\partial_t u$ sont bornées et par intégration ente 0 et T, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^T |E_{2,1}|dt \leq c\Big\{ &\int_0^T \|u^*_{N\tau}(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}dt\\ &+ \int_0^T \|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t) - \partial_t u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}dt\Big\},\end{aligned}$$

de plus on applique l'inégalité de Hölder par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T |E_{2,1}|dt \leq c\Big\{&\|u^*_{N\tau}(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\\ &+ \|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\|\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t) - \partial_t u(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\Big\}\|v_N\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.\end{aligned}$$

On conclut que $E_{2,1}$ converge vers 0 grâce à (4.25)-(4.26). Enfin pour traiter $E_{3,1}$ on utilise les mêmes arguments que $E_{1,1}$

$$\begin{aligned}|E_{3,1}| &= |\int_\Omega ((k\circ b(u^*_{N\tau}))' - (k\circ b(u))')(\boldsymbol{x},t)w_{N\tau}(\boldsymbol{x},t)\mathbf{e}_z\cdot\nabla v_N(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}|,\\ &\leq c\|((k\circ b(u^*_{N\tau}))' - (k\circ b(u))')(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)^d}\end{aligned}$$

Or $(k\circ b)'$ est Lipschitzienne, alors

$$|E_{3,1}| \leq c\|u^*_{N\tau}(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}|v_N(\cdot,t)|_{H^1(\Omega)},$$

On intègre entre 0 et T et on utilise l'inégalité de Hölder par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T |E_{3,1}|dt &\leq c\int_0^T \|u^*_{N\tau}(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{L^\infty}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}|v_N(\cdot,t)|_{H^1(\Omega)}dt,\\ &\leq c\|u^*_{N\tau} - u\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\|w_{N\tau}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\|v_N\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))}.\end{aligned}$$

D'où grâce à (4.25) la convergence de $E_{3,1}$. Finalement, on montre la convergence de $D\mathcal{G}(u^*_{N\tau}) - D\mathcal{G}_{N\tau}(u^*_{N\tau})$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (D\mathcal{G}(u^*_{N\tau}))(\boldsymbol{x},t)w_{N\tau}(\boldsymbol{x},t)v_N(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} - \big(D\mathcal{G}_{N\tau}(u^*_{N\tau})(\boldsymbol{x},t)w_{N\tau}(\cdot,t)v_N(\cdot,t)\big)_M \\
&\qquad = -\langle b'(u^*_{N\tau})\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t), v_N(\cdot,t)\rangle + (b'(u^*_{N\tau})\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t), v_N(\cdot,t))_M \\
&\qquad - \langle b''(u^*_{N\tau})w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t), v_N(\cdot,t)\rangle + (b''(u^*_{N\tau})w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t), v_N(\cdot,t))_M \\
&\qquad - \int_\Omega (k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\boldsymbol{x},t)w_{N\tau}(\boldsymbol{x},t)\mathbf{e}_z\cdot\nabla v_N(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} \\
&\qquad + ((k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\cdot,t)w_{N\tau}(\cdot,t)\mathbf{e}_z, \nabla v_N(\cdot,t))_M.
\end{aligned}$$

On note par

$$\begin{aligned}
E_{1,2} &:= -\langle b'(u^*_{N\tau})\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t), v_N(\cdot,t)\rangle + (b'(u^*_{N\tau})\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t), v_N(\cdot,t))_M, \\
E_{2,2} &:= -\langle b''(u^*_{N\tau})w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t), v_N(\cdot,t)\rangle + (b''(u^*_{N\tau})w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t), v_N(\cdot,t))_M, \\
E_{3,2} &:= -\int_\Omega (k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\boldsymbol{x},t)w_{N\tau}(\boldsymbol{x},t)\mathbf{e}_z\cdot\nabla v_N(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} + ((k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\cdot,t)w_{N\tau}(\cdot,t)\mathbf{e}_z, \nabla v_N(\cdot,t))_M.
\end{aligned}$$

Pour montrer la convergence de $E_{1,2}$, on choisit $M_\diamond$ la partie entière de $\dfrac{2M-1-N}{2}$ et on introduit des approximations $t_{M_\diamond}$ de $b'(u^*_{N\tau})$ et $v^*_{M_\diamond}$ de v_N dans $\mathbb{P}_{M_\diamond}(\Omega)$. D'après l'exactitude de la formule de quadrature (1.11), on a

$$\int_\Omega t_{M_\diamond}(\boldsymbol{x},t)\partial_t w_{N\tau}(\boldsymbol{x},t)v^*_{M_\diamond}(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} = (t_{M_\diamond}(\cdot,t)\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t), v^*_{M_\diamond}(\cdot,t))_M.$$

On voit que :

$$\begin{aligned}
E_{1,2} &= -\langle b'(u^*_{N\tau})\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t), v_N(\cdot,t)\rangle + \langle t_{M_\diamond}(\cdot,t)\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t), v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\rangle \\
&\quad + (b'(u^*_{N\tau})\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t), v_N(\cdot,t))_M - (t_{M_\diamond}(\cdot,t)\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t), v^*_{M_\diamond}(\cdot,t))_M.
\end{aligned}$$

De plus on ajoute et retranche le terme $\langle b'(u^*_{N\tau})\partial_t w_{N\tau}, v^*_{M_\diamond}\rangle$ et on ajoute et retranche le même terme pour le produit discret, on obtient

$$\begin{aligned}
E_{1,2} &= \langle b'(u^*_{N\tau})\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t), v^*_{M_\diamond}(\cdot,t) - v_N(\cdot,t)\rangle + \langle (t_{M_\diamond}(\cdot,t) - b'(u^*_{N\tau}))\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t), v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\rangle \\
&\quad + (b'(u^*_{N\tau})\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t), v_N(\cdot,t) - v^*_{M_\diamond}(\cdot,t))_M + ((b'(u^*_{N\tau} - t_{M_\diamond}(\cdot,t))\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t), v^*_{M_\diamond}(\cdot,t))_M.
\end{aligned}$$

Maintenant on applique les inégalités de Hölder pour le produit continu et de Cauchy–Schwarz et la relation d'équivalence (1.12) pour le produit discret, on aura

$$\begin{aligned}
E_{1,2} &\le \|b'(u^*_{N\tau})\|_{L^\infty(\Omega)}\|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|v^*_{M_\diamond}(\cdot,t) - v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|t_{M_\diamond}(\cdot,t) - b'(u^*_{N\tau})\|_{L^\infty(\Omega)}\|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + c\Big\{\|\mathcal{I}_M(b'(u^*_{N\tau})(v_N(\cdot,t) - v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)))\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|\mathcal{I}_M((b'(u^*_{N\tau}) - t_{M_\diamond}(\cdot,t))v^*_{M_\diamond}(\cdot,t))\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\Big\}.
\end{aligned}$$

Grâce à la stabilité de l'opérateur voir $\mathcal{I}_M$ (1.18) et l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned}|E_{1,2}| &\leq \|b'(u^*_{N\tau})\|_{L^\infty(\Omega)}\|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)-v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &+\|t_{M_\diamond}(\cdot,t)-b'(u^*_{N\tau})\|_{L^\infty(\Omega)}\|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &+c\Big\{\|b'(u^*_{N\tau})(v_N(\cdot,t)-v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)))\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &+\|(b'(u^*_{N\tau})-t_{M_\diamond}(\cdot,t))v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\Big\},\\ &\leq c\Big\{\|b'(u^*_{N\tau})\|_{L^\infty(\Omega)}\|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)-v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &+\|t_{M_\diamond}(\cdot,t)-b'(u^*_{N\tau})\|_{L^\infty(\Omega)}\|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\}.\end{aligned}$$

Comme b'' est bornée et par intégration par rapport à t, et par application de l'inégalité de Hölder, on aura

$$\begin{aligned}\int_0^T|E_{1,2}|dt &\leq c\Big\{\int_0^T\|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)-v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}dt\\ &+\int_0^T\|t_{M_\diamond}(\cdot,t)-b'(u^*_{N\tau})\|_{L^\infty(\Omega)}\|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}dt\}\\ &\leq c\Big\{\|\partial_t w_{N\tau}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\|v^*_{M_\diamond}-v_N\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\\ &+\|t_{M_\diamond}-b'(u^*_{N\tau})\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\|\partial_t w_{N\tau}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\|v^*_{M_\diamond}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\}.\end{aligned}$$

On choisit les approximations $t_{M_\diamond}=\mathcal{I}_{M_\diamond}b'(u^*_{N\tau})$ et $v^*_{M_\diamond}=\mathcal{I}_{M_\diamond}v_N$ dans $\mathbb{P}_{M_\diamond}(\Omega)$ et on utilise les inégalités (1.15) et (4.27), on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^T|E_{1,2}|dt &\leq c\Big\{cM_\diamond^{-s}\|\partial_t w_{N\tau}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\|v_N\|_{L^2(0,T;H^s(\Omega))}\\ &+cM_\diamond^{\frac{d}{2}-s}\|b'(u^*_{N\tau})\|_{L^\infty(0,T;H^s(\Omega))}\|\partial_t w_{N\tau}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\|v^*_{M_\diamond}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\}.\end{aligned}$$

D'où la convergence de $E_{1,2}$. Ensuite, pour montrer la convergence de $E_{2,2}$ on utilise les mêmes notations de $E_{1,2}$ pour simplifier. On introduit des approximations $t_{M_\diamond}$ de $b''(u^*_{N\tau})$ et $v^*_{M_\diamond}$ de v_N des $\mathbb{P}_{M_\diamond}(\Omega)$. D'après l'exactitude de la formule de quadrature, on a

$$\int_\Omega t_{M_\diamond}(\boldsymbol{x},t)w_{N\tau}(\boldsymbol{x},t)\partial_t u_{N\tau}(\boldsymbol{x},t)v^*_{M_\diamond}(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}=(t_{M_\diamond}(\cdot,t)w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t),v^*_{M_\diamond}(\cdot,t))_M.$$

On voit que :

$$\begin{aligned}E_{2,2}=&-\langle b''(u^*_{N\tau})w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t),v_N(\cdot,t)\rangle+\langle t_{M_\diamond}(\cdot,t)w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t),v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\rangle\\ &+(b''(u^*_{N\tau})w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t),v_N(\cdot,t))_M-(t_{M_\diamond}(\cdot,t)w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t),v^*_{M_\diamond}(\cdot,t))_M,\end{aligned}$$

De plus on ajoute et retranche le terme $\langle b''(u^*_{N\tau})w_{N\tau}\partial_t u^*_{N\tau}, v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\rangle$ et on ajoute et retranche le même terme pour le produit discret, on obtient

$$\begin{aligned} E_{2,2} &= \langle b''(u^*_{N\tau})w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t), v_N(\cdot,t) - v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\rangle \\ &+ \langle (t_{M_\diamond}(\cdot,t) - b''(u^*_{N\tau}))w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t), v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\rangle \\ &+ (b''(u^*_{N\tau})w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t), v^*_{M_\diamond}(\cdot,t) - v_N(\cdot,t))_M \\ &+ ((b''(u^*_{N\tau}) - t_{M_\diamond}(\cdot,t))w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t), v^*_{M_\diamond}(\cdot,t))_M. \end{aligned}$$

Ensuite on applique les inégalités de Hölder pour le produit continu et de Cauchy–Schwarz et la relation d'équivalence (1.12) pour le produit discret, on aura

$$\begin{aligned} |E_{2,2}| &\le \|b''(u^*_{N\tau})\|_{L^\infty(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)(v_N - v^*_{M_\diamond})\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \|t_{M_\diamond}(\cdot,t) - b''(u^*_{N\tau})\|_{L^\infty(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ c\Big\{\|\mathcal{I}_M(b''(u^*_{N\tau})w_{N\tau}(\cdot,t)(v^*_{M_\diamond}(\cdot,t) - v_N(\cdot,t)))\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \|\mathcal{I}_M((b''(u^*_{N\tau}) - t_{M_\diamond}(\cdot,t))w_{N\tau}(\cdot,t)v^*_{M_\diamond}(\cdot,t))\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\Big\}. \end{aligned}$$

Grâce à la stabilité de l'opérateur $\mathcal{I}_M$ (1.18), l'inégalité de Hölder et l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^4(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned} |E_{2,2}| &\le c\Big\{\|b''(u^*_{N\tau})\|_{L^\infty(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)}\|v_N(\cdot,t) - v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)}\|\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \|t_{M_\diamond}(\cdot,t) - b''(u^*_{N\tau})\|_{L^\infty(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)}\|v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)}\|\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \|b''(u^*_{N\tau})w_{N\tau}(\cdot,t)(v^*_{M_\diamond}(\cdot,t) - v_N(\cdot,t))\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \|(b''(u^*_{N\tau}) - t_{M_\diamond}(\cdot,t))w_{N\tau}(\cdot,t)v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\Big\}, \\ &\le c\Big\{\|b''(u^*_{N\tau})\|_{L^\infty(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)}\|v_N(\cdot,t) - v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)}\|\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \|t_{M_\diamond}(\cdot,t) - b''(u^*_{N\tau})\|_{L^\infty(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)}\|v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)}\|\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\Big\} \\ &\le c\Big\{\|b''(u^*_{N\tau})\|_{L^\infty(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|v_N(\cdot,t) - v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \|t_{M_\diamond}(\cdot,t) - b''(u^*_{N\tau})\|_{L^\infty(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\Big\}. \end{aligned}$$

On utilise le fait que b'' et $v_{M_\diamond}$ sont bornées, on intègre entre 0 et T et en appliquant encore l'inégalité de Hölder par rapport à t, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^T |E_{2,2}|dt &\le c\Big\{\int_0^T \|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|v_N(\cdot,t) - v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}dt \\ &+ \int_0^T \|t_{M_\diamond}(\cdot,t) - b''(u^*_{N\tau})\|_{L^\infty(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}dt\Big\}, \\ &\le c\Big\{\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}\|v_N(\cdot,t) - v^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\|\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &+ \|t_{M_\diamond}(\cdot,t) - b''(u^*_{N\tau})\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}\|\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\Big\}. \end{aligned}$$

Maintenant, on choisit les approximations $t_{M_\diamond} = \mathcal{I}_{M_\diamond} b''(u^*_{N\tau})$ et $v^*_{M_\diamond} = \mathcal{I}_{M_\diamond} v_N$ qui sont dans $\mathbb{P}_{M_\diamond}(\Omega)$ et on applique les estimations (1.16) et (4.27)

$$\int_0^T |E_{2,2}|dt \leq c\Big\{cM_\diamond^{-s}\|w_{N\tau}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}\|v_N(\cdot,t)\|_{L^2(0,T;H^{s+1}(\Omega))}\|\partial_t u^*_{N\tau}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + cM_\diamond^{\frac{d}{2}-s}\|b''(u^*_{N\tau})\|_{L^2(0,T;H^s(\Omega))}\|w_{N\tau}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}\|\partial_t u^*_{N\tau}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\Big\}.$$

D'où la convergence de $E_{2,2}$. Enfin il reste à montrer la convergence de $E_{3,2}$, on introduit les approximations $t_{M_\diamond}$ de $(k\circ b(u^*_{N\tau}))'$ et $\boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}$ de ∇v_N qui sont dans $\mathbb{P}_{M_\diamond}(\Omega)$ et $\mathbb{P}_{M_\diamond}(\Omega)^d$ respectivement. D'après l'exactitude de la formule de quadrature (1.11), on a

$$\int_\Omega t_{M_\diamond}(\boldsymbol{x},t)w_{N\tau}(\boldsymbol{x},t)\mathbf{e}_z\cdot\boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} = (t_{M_\diamond}(\cdot,t)w_{N\tau}(\cdot,t)\mathbf{e}_z, \boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}(\cdot,t))_M.$$

On voit que

$$E_{3,2} = -\int_\Omega (k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\boldsymbol{x},t)w_{N\tau}(\boldsymbol{x},t)\mathbf{e}_z\cdot\nabla v_N(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} + \int_\Omega t_{M_\diamond}(\boldsymbol{x},t)w_{N\tau}(\boldsymbol{x},t)\mathbf{e}_z\cdot\boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} + ((k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\cdot,t)w_{N\tau}(\cdot,t)\mathbf{e}_z, \nabla v_N(\cdot,t))_M - (t_{M_\diamond}(\cdot,t)w_{N\tau}(\cdot,t)\mathbf{e}_z, \boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}(\cdot,t))_M$$

De plus on ajoute et retranche le terme $\int_\Omega (k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\boldsymbol{x},t)w_{N\tau}\mathbf{e}_z\cdot\boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}d\boldsymbol{x}$ et on ajoute et retranche le même terme pour le produit discret, on obtient

$$\begin{aligned} E_{3,2} = &\int_\Omega (k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\boldsymbol{x},t)w_{N\tau}(\boldsymbol{x},t)\mathbf{e}_z\cdot(\boldsymbol{v}^*_{M_\diamond} - \nabla v_N)(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} \\ &+ \int_\Omega (t_{M_\diamond}(\boldsymbol{x},t) - (k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\boldsymbol{x},t))w_{N\tau}(\boldsymbol{x},t)\mathbf{e}_z\cdot\boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} \\ &+ ((k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\cdot,t)w_{N\tau}(\cdot,t)\mathbf{e}_z, \nabla v_N(\cdot,t) - \boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}(\cdot,t))_M \\ &+ (((k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\cdot,t) - t_{M_\diamond}(\cdot,t))w_{N\tau}(\cdot,t)\mathbf{e}_z, \boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}(\cdot,t))_M \end{aligned}$$

Maintenant on applique les inégalités de Hölder pour le produit continu et de Cauchy–Schwarz et la relation d'équivalence (1.12) pour le produit discret, on aura

$$\begin{aligned} |E_{3,2}| \leq &\|(k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\cdot,t)\mathbf{e}_z\|_{L^4(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)}\|\boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}(\cdot,t) - \nabla v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &+ \|(t_{M_\diamond}(\cdot,t) - (k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\cdot,t)\mathbf{e}_z\|_{L^4(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)}\|\boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ c\Big\{\|\mathcal{I}_M((k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\cdot,t)w_{N\tau}(\cdot,t)\mathbf{e}_z)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v_N(\cdot,t) - \boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &+ \|(\mathcal{I}_M((k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\cdot,t) - t_{M_\diamond}(\cdot,t))w_{N\tau}(\cdot,t)\mathbf{e}_z)\|_{L^2(\Omega)}\|\boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)^d}\Big\}. \end{aligned}$$

Grâce à la stabilité de l'opérateur $\mathcal{I}_M$ (1.18), l'inégalité de Hölder et l'injection de $H^1(\Omega)$

dans $L^4(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned}
|E_{3,2}| \leq c\Big\{ & \|(k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\cdot,t)\mathbf{e}_z\|_{H^1(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|\boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}(\cdot,t)-\nabla v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)^d}\\
&+\|(t_{M_\diamond}(\cdot,t)-(k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\cdot,t)\mathbf{e}_z\|_{H^1(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|\boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\
&+\|(k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\cdot,t)w_{N\tau}(\cdot,t)\mathbf{e}_z\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v_N(\cdot,t)-\boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)^d}\\
&+\|((k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\cdot,t)-t_{M_\diamond}(\cdot,t))w_{N\tau}(\cdot,t)\mathbf{e}_z\|_{L^2(\Omega)}\|\boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)^d}\Big\},\\
\leq c\Big\{ & \|(k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\cdot,t)\mathbf{e}_z\|_{H^1(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|\boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}(\cdot,t)-\nabla v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)^d}\\
&+\|(t_{M_\diamond}(\cdot,t)-(k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\cdot,t)\mathbf{e}_z\|_{H^1(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|\boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Comme $(k\circ b(u^*_{N\tau}))'$ et $\boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}$ sont bornées, on intègre et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz par rapport à t, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^T |E_{3,2}|dt \leq c\Big\{ & \int_0^T \|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|\boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}(\cdot,t)-\nabla v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)^d}dt\\
&+\int_0^T \|(t_{M_\diamond}(\cdot,t)-(k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}dt,\\
\leq c\Big\{ & \|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\|\boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}-\nabla v_N\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)}\\
&+\|(t_{M_\diamond}-(k\circ b(u^*_{N\tau}))'\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\|w_{N\tau}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}.
\end{aligned}$$

On choisit les approximations $t_{M_\diamond}=\mathcal{I}_M(k\circ b(u^*_{N\tau}))'$ et $\boldsymbol{v}^*_{M_\diamond}=\mathcal{I}_M\nabla v_N$ qui sont dans $\mathbb{P}_{M_\diamond}(\Omega)$, $\mathbb{P}_{M_\diamond}(\Omega)^d$ respectivement. Après on utilise les estimations (1.16) et (1.17) pour obtenir la convergence de $E_{3,2}$. ■

Lemme 4.4.3. *Supposons que les applications b et k soient de classe $\mathcal{C}^2$ à dérivées bornées, et que l'application b'' est continue et Lipschitzienne. Si l'hypothèse 4.1 est satisfaite, il existe un voisinage de $u^*_{N\tau}$ dans $\mathbb{W}_{N\tau}$ et un nombre réel positif λ tels que l'opérateur $D\mathcal{F}_{N\tau}$ satisfait la propriété de Lipschitz, pour tout z_N dans ce voisinage*

$$\|D\mathcal{F}_{N\tau}(u^*_{N\tau})-D\mathcal{F}_{N\tau}(z_N)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{W}_{N\tau})}\leq\lambda\|u^*_{N\tau}-z_N\|_{\mathbb{W}},\tag{4.28}$$

où $\mathcal{L}(\mathbb{W}_{N\tau})$ représente l'espace des endomorphismes de $\mathbb{W}_{N\tau}$.

Preuve. Grâce à (4.20), on va estimer la quantité

$$\big((D\mathcal{G}_{N\tau}(u^*_{N\tau})-D\mathcal{G}_{N\tau}(z_N))(\cdot,t)w_N(\cdot,t),v_N(\cdot,t)\big)_M,\tag{4.29}$$

pour tout w_τ et v_N dans $\mathbb{W}_{N\tau}$ avec $\|v_N\|_{\mathbb{W}}=1$. On note

$$L_1(t)=-(b'(u^*_N)\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t),v_N(\cdot,t))_M+(b'(z_N)\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t),v_N(\cdot,t))_M,$$

$$L_2(t)=-(b''(u^*_{N\tau})w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t),v_N(\cdot,t))_M+(b''(z_N)w_N(\cdot,t)\partial_t z_N(\cdot,t),v_N(\cdot,t))_M,$$

$$L_3(t)=-((k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\cdot,t)w_{N\tau}(\cdot,t)\mathbf{e}_z,\nabla v_N(\cdot,t))_M+((k\circ b(z_N))'(\cdot,t)w_{N\tau}(\cdot,t)\mathbf{e}_z,\nabla v_N(\cdot,t))_M$$

D'après l'inégalités de Cauchy–Schwarz et la relation d'équivalence (1.12), on obtient

$$\begin{aligned}|L_1(t)| &= |\big((b'(u_N^*) - b'(z_N))\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t), v_N(\cdot,t)\big)_M| \\ &\le c\|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathcal{I}_M((b'(z_N) - b'(u_{N\tau}^*)v_N(\cdot,t))\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

On utilise l'équation (1.18), l'inégalité de Hölder et le fait que b' est lipschitzienne, on aura

$$\begin{aligned}|L_1(t)| &\le c\|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|(b'(z_N) - b'(u_{N\tau}^*)v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}, \\ &\le c\|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|(b'(z_N) - b'(u_{N\tau}^*)\|_{L^4(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)}, \\ &\le c\|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_{N\tau}^*(\cdot,t) - z_N(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)}.\end{aligned}$$

Comme l'espace $H^1(\Omega)$ s'injecte dans $L^4(\Omega)$ (Théorème 1.3.1), on aura

$$|L_1(t)| \le c\|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_{N\tau}^*(\cdot,t) - z_N(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}.$$

De plus on intègre entre 0 et T et on applique l'inégalité de Hölder par rapport à t, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^T |L_1(t)|dt &\le c\int_0^T \|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_{N\tau}^*(\cdot,t) - z_N(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}dt, \\ &\le c\Big(\int_0^T \|\partial_t w_{N\tau}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt\Big)^{\frac12}\|u_{N\tau}^*(\cdot,t) - z_N(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \\ &\times\Big(\int_0^T \|v_N(\cdot,t)\|^2_{H^1(\Omega)}dt\Big)^{\frac12} \\ &\le c\|w_{N\tau}\|_{\mathbb{W}}\|u_{N\tau}^*(\cdot,t) - z_N(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}\|v_N\|_{\mathbb{W}}.\end{aligned}$$

Comme $\|v_N\|_{\mathbb{W}} = 1$, donc

$$\int_0^T |L_1(t)|dt \le c\|w_{N\tau}\|_{\mathbb{W}}\|u_{N\tau}^* - z_N\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}. \tag{4.30}$$

Ensuite, pour estimer L_2 on ajoute et retranche le terme $(b''(z_N)w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u_{N\tau}^*(\cdot,t), v_N(\cdot,t))_M$, on obtient

$$\begin{aligned}L_2(t) = ((b''(z_N) - b''(u_{N\tau}^*))w_{N\tau}(\cdot,t)\partial_t u_{N\tau}^*(\cdot,t), v_N(\cdot,t))_M \\ + (b''(z_N)w_{N\tau}(\cdot,t)(\partial_t z_N(\cdot,t) - \partial_t u_{N\tau}^*(\cdot,t)), v_N(\cdot,t))_M,\end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy–Schwarz et la relation d'équivalence (1.12), on aura

$$\begin{aligned}L_2(t) \le c\big\{&\|\mathcal{I}_M((b''(z_N) - b''(u_{N\tau}^*))w_{N\tau}(\cdot,t)v_N(\cdot,t))\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t u_{N\tau}^*(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \|\mathcal{I}_M(b''(z_N)w_{N\tau}(\cdot,t)v_N(\cdot,t))\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t z_N(\cdot,t) - \partial_t u_{N\tau}^*(\cdot,t)\|_{L^2\Omega)}\big\},\end{aligned}$$

de plus on utilise l'équation (1.18) et l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned}L_2(t) &\le c\big\{\|(b''(z_N) - b''(u^*_{N\tau}))w_{N\tau}(\cdot,t)v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t u^*_{N\tau}\|_{L^2(\Omega)}\\
&\quad + \|b''(z_N)w_{N\tau}(\cdot,t)v_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t z_N(\cdot,t) - \partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2\Omega)}\big\}\\
&\le c\big\{\|b''(z_N) - b''(u^*_{N\tau})\|_{L^6(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^6(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{L^6(\Omega)}\|\partial_t u^*_{N\tau}\|_{L^2(\Omega)}\\
&\quad + \|b''(z_N)\|_{L^6(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^6(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{L^6(\Omega)}\|\partial_t z_N(\cdot,t) - \partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2\Omega)}\big\}.\end{aligned}$$

De plus b'' est lipschitzienne et grâce à l'injection de l'espace $H^1(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$ (Théorème 1.3.1), on obtient

$$\begin{aligned}|L_2(t)| &\le c\big\{\|z_N(\cdot,t) - u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^6(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^6(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{L^6(\Omega)}\|\partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\
&\quad + \|b''(z_N)\|_{L^6(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^6(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{L^6(\Omega)}\|\partial_t z_N(\cdot,t) - \partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\big\}\\
&\le c\big\{\|z_N(\cdot,t) - u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|\partial_t u^*_{N\tau}\|_{L^2(\Omega)}\\
&\quad + \|b''(z_N)\|_{H^1(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|\partial_t z_N(\cdot,t) - \partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2\Omega)}\big\}.\end{aligned}$$

Comme b'' et $\partial_t u^*_{N\tau}$ sont bornées, alors

$$\begin{aligned}|L_2(t)| &\le c\big\{\|z_N(\cdot,t) - u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\\
&\quad + \|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|\partial_t z_N(\cdot,t) - \partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2\Omega)}\big\}.\end{aligned}$$

Après on intègre entre 0 et T et on applique l'inégalité de Hölder par rapport à t, on aura

$$\begin{aligned}\int_0^T |L_2(t)|dt &\le c\Big\{\int_0^T \|z_N(\cdot,t) - u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}dt\\
&\quad + \int_0^T \|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|v_N(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|\partial_t z_N(\cdot,t) - \partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2\Omega)}dt\Big\}\\
&\le c\big\{\|z_N - u^*_{N\tau}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}\Big(\int_0^T \|w_{N\tau}(\cdot,t)\|^2_{H^1(\Omega)}dt\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^T \|v_N(\cdot,t)\|^2_{H^1(\Omega)}dt\Big)^{\frac12}\\
&\quad + \|w_{N\tau}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}\Big(\int_0^T \|v_N(\cdot,t)\|^2_{H^1(\Omega)}\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^T \|\partial_t z_N(\cdot,t) - \partial_t u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|^2_{L^2\Omega)}dt\Big)^{\frac12}\Big\}\\
&\le c\Big(\|z_N - u^*_{N\tau}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|z_N - u^*_{N\tau}\|^2_{H^1(0,T;L^2(\Omega)}\Big)\|w_{N\tau}\|_{\mathbb{W}}\|v_N\|_{\mathbb{W}}.\end{aligned}$$

Alors

$$\int_0^T |L_2(t)|dt \le c\Big(\|z_N - u^*_{N\tau}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|z_N - u^*_{N\tau}\|^2_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}\Big)\|w_{N\tau}\|_{\mathbb{W}}. \tag{4.31}$$

Enfin, pour estimer L_3 on applique les mêmes arguments utilisés pour L_1, en effet

$$\begin{aligned}|L_3(t)| &= |((k\circ b(z_N))' - (k\circ b(u^*_{N\tau}))'(\cdot,t)w_{N\tau}(\cdot,t)\mathbf{e}_z, \nabla v_N(\cdot,t))_M|,\\
&\le c\|\nabla v_N\|_{L^2(\Omega)^d}\|\mathcal{I}_M(((k\circ b(z_N))' - (k\circ b(u^*_{N\tau})')w_{N\tau}(\cdot,t))\|_{L^2(\Omega)},\\
&\le c|v_N|_{H^1(\Omega)}\|((k\circ b(z_N))' - (k\circ b(u^*_{N\tau})')w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

En suite on utilise L'inégalité de Hölder et le fait que $(k\circ b)'$ est lipschitzienne, on aura

$$\begin{aligned}|L_3(t)| &\leq c|v_N(\cdot,t)|_{H^1(\Omega)}\|(k\circ b(z_N))' - (k\circ b(u^*_{N\tau}))'\|_{L^4(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)},\\ &\leq c|v_N(\cdot,t)|_{H^1(\Omega)}\|z_N(\cdot,t) - u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)},\end{aligned}$$

Comme l'espace $H^1(\Omega)$ s'injecte dans $L^4(\Omega)$, on aura

$$|L_3(t)| \leq c|v_N(\cdot,t)|_{H^1(\Omega)}\|z_N(\cdot,t) - u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)},$$

De plus on intègre entre 0 et T et on applique l'inégalité de Hölder (Théorème 1.3.5) par rapport à t, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^T |L_3(t)|dt &\leq c\int_0^T |v_N(\cdot,t)|_{H^1(\Omega)}\|z_N(\cdot,t) - u^*_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\|w_{N\tau}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}dt,\\ &\leq c\Big(\int_0^T |v_N(\cdot,t)|^2_{H^1(\Omega)}dt\Big)^{\frac{1}{2}}\|z_N - u^*_{N\tau}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}\|w_{N\tau}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))},\\ &\leq c\|v_N\|_{\mathbb{W}}\|z_N - u^*_{N\tau}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}\|w_{N\tau}\|_{\mathbb{W}},\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^T |L_3(t)|dt \leq \|z_N - u^*_{N\tau}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}\|w_{N\tau}\|_{\mathbb{W}} \tag{4.32}$$

En combinant (4.30), (4.31) et (4.32), on obtient l'estimation désirée. ■

On admet le résultat suivante (voir [5], Lemme 5.5).

Lemme 4.4.4. *Supposons que les applications b et k soient de classe $\mathcal{C}^{\max\{\lceil s\rceil,2\}}$ avec des dérivées bornées. Si la solution u appartient à $H^1(0,T;H^s(\Omega))$, $s > \frac{d+1}{2}$, on a l'estimation suivante :*

$$\|\mathcal{F}_{N\tau}(u^*_{N\tau})\|_{\mathbb{W}} \leq c(u)(|\tau| + N^{1-s}). \tag{4.33}$$

4.5 Résultat et conclusion

Grâce aux Lemmes 4.4.2 à 4.4.4, toutes les hypothèses nécessaires pour appliquer le théorème de Brezzi, Rappaz et Raviart [12] sont satisfaites. D'où l'estimation

Théorème 4.5.1. *Supposons que, pour un nombre réel* $s > \frac{d+1}{2}$,
(i) Les applications b *et* k *sont de classe* $\mathcal{C}^{\max\{\lceil s \rceil, 2\}}$ *à dérivées bornées,*
(ii) la solutions du problème (2.3)–(2.4) *appartient à* $H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^s(\Omega))$.
Ainsi, il existe des nombres réels positifs τ_0^* *et* N_0^* *tels que, pour tout* τ, $|\tau| \leq \tau_0^*$ *et* $N \geq N_0^*$, *la solutions* $(u_N^j, \boldsymbol{q}_N^j)$ *du problème* (3.13) *vérifie l'estimation d'erreur a priori suivante*

$$\|u - u_{N\tau}\|_{\mathbb{W}} + \|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_{N\tau}\|_{L^2(0,T;H(\mathrm{div},\Omega))} \leq c(u)(|\tau| + N^{1-s}), \tag{4.34}$$

où la constante $c(u)$ *ne dépend que de la solution* u *du problème* (2.3)–(2.4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] **N. Abedellatif, C. Bernardi, M. Touihri, D. Yakoubi**, *A priori error analysis of the implicit Euler, spectral discretization of a nonlinear equation for a flow in a partially saturated porous media*, Advances in Pure and Applied Mathematics. 9 (2018), 1–27.

[2] **R.A. Adams, J. Fournier**, *Sobolev Spaces*, Academic Press, (2003).

[3] **H.W. Alt, S. Luckhaus**, *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations*, Math. Z. 183 (1983), 311–341.

[4] **J. Bear**, *Dynamics of Fluids in Porous Media*, Elsevier (1972).

[5] **C. Bernardi, L. El Alaoui, Z. Mghazli**, *A posteriori analysis of a space and time discretization of a nonlinear model for the flow in partially saturated porous media*, IMA J. Numer. Anal. 34 (2014), 1002–1036.

[6] **C. Bernardi, V. Girault, Y. Maday**, *Approximation Variationnelle : Méthodes d'Eléments Finis et Méthodes Spectrales*, Université Pierre et Marie Curie-Paris, Cours de DEA, Octobre 1990.

[7] **C. Bernardi, Y. Maday.** *Spectral Methods, in the Handbook of Numerical Analysis V*, P. G .Ciarlet & J. L. Lions eds, North-Holland (1997), 209–485.

[8] **C. Bernardi, Y. Maday**, *Spectral Element and Mortar Element Methods*, Université Pierre et Marie Curie, Cours de DEA, Novembre 1998.

[9] **C. Bernardi, Y. Maday, F. Rapetti**, *Discrétisations Variationnelles de Problèmes aux Limites Elliptiques*, Mathématiques & Applications 45, Springer-Verlag (2004).

[10] **H. Brezis**, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, Heidelberg, London, (2010).

[11] **F. Brezzi, M. Fortin**,*Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer-Verlag, New York, (1991).

[12] **F. Brezzi, J. Rappaz, P.-A. Raviart**, *Finite-dimensional approximation of nonlinear problems. Part I : Branches of nonsingular solutions.* Numer. Math. 36, (1980), 1-25

[13] **Y. Daikh, W. Chikouche**, *Spectral element discretization of the heat equation with varaible difusion coeffcient*, HAL, Archives ouvertes, (2015).

[14] **R. Dautray, J.-L. Lions**, *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*, Masson, Paris, (1987).

[15] **R. Eymard, M. Gutnic, D. Hilhorst**, *The finite volume method for Richards equation*, Comput. Geosci. 3 (1999), 259-294.

[16] **S. M. F. Garcia**, *Improved error estimates for mixed finite-element approximations for nonlinear parabolic equations : The continuous-time case*, Numer. Methods Partial Differential Equations 10 (1994), 129-147.

[17] **S. M. F. Garcia**, *Improved error estimates for mixed finite-element approximations for nonlinear parabolic equations : The discrete-time case*, Numer. Methods Partial Differential Equations 10 (1994), 149-169.

[18] **V. Girault, P.-A. Raviart**, *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*, volume 749 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, (1979).

[19] **P. Grisvard**, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domain.* Pitman, Boston, London, Melbourne, (1985).

[20] **J.-L. Lions**, *Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux Limites non linéaire*, Dunod & Gauthier-Villars (1969).

[21] **J.-L. Lions, E. Magenes**, *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications*, Volume I. Dunod, Paris, (1968).

[22] **Y. Maday, E. M. Rønquist**, *Optimal error analysis of spectral methods with emphasis on non-constant coeffjcients and deformed geometries*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 80 (1990), 91-115.

[23] **F. Radu, I. S. Pop, P. Knabner**, *Order of convergence estimates for an Euler implicit, mixed finite element discretization of Richards equation*, SIAM J. Numer. Anal. 42 (2004), 1452-1478.

[24] **K.R. Rajagopal**, *On a hierarchy of approximate models for flows of incompressible fluids through porous solid*, Math. Models Methods Appl. Sci. 17 (2007), 215–252. 318-333.

[25] **L.A. Richards**, *Capillary conduction of liquids through porous mediums.* Physics 1 (1931), 318-333.

[26] **E. Schneid, P. Knabner, F. Radu**, *A priori error estimates for a mixed finite element discretization of the Richards equation*, Numer. Math. 98 (2004), 353-370.

[27] **L. Schwartz**, *Théorie des Distributions.* Hermann, Paris, (1966).

[28] **M. Schatzman**, *Analyse Numérique Cours et Exercices pour la Licence.* InterEditions, Paris, (1991).

[29] **M. Touihri**, *Discrétisations spectrale des équations de Navier-Stokes à densité variable*, Thèse de doctorat, Univ. Pierre et Marie Curie, Paris 6, (1997).