

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel



Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : EDP et applications

Thème

**Sur l'existence d'un problème d'interaction fluide
structure**

Présenté par :

Bouchouia Karima

Devant le jury composé de

Président : Y. Daikh MCA Université de Jijel.

Encadreur : O. Yakhlef MCB Université de Jijel.

Co-encadreur : H. Benhassine MCB Université de Jijel.

Examineur : W. Khellaf MCB Université de Jijel.

Promotion 2021/2022

Remerciements

*Tout d'abord et avant tout, je remercie **ALLAH** qui m'a donné la force, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.*

*Je tiens à exprimer ma reconnaissance et gratitude à mes encadreurs Mr **Yakhlef Othman** et Mr **Benhassine Hani**, pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour leurs conseils avec beaucoup de patience et d'encouragements.*

Je remercie aussi en particulier tous les enseignants du spécialité EDP.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail.

*Mme **Daikh Yasmina**, qui me fait l'honneur de présider ce jury.*

*Mme **Khellaf Wahiba**, pour avoir accepté d'examiner ce travail.*

*Un grand merci pour mes **parents** et tout ma famille pour leurs sacrifice et encouragement, pour mes amis qui nous a supporté tous les difficultés et soutient moral tout au long de notre travail.*

Je tiens à remercier tous ceux qui se sont impliqués dans ce travail, directement ou indirectement.

KARIMA

★ Dédicaces ★

Du profond du mon coeur, je dédie ce modeste travail : À la personne la plus précieuse
et la plus

chère, ma mère **Sultana**. À ceux qui ont fait de moi une bonne personne et une femme forte dans ce monde, mon père **Salah** à Mes chers sœurs , mes frères et mes amies avec qui j'ai partagé des moments agréables et inoubliables et mes remerciements relié à au professeur " **Amor Kessab** " université USTHB faculté de Mathématique , " **Redhwane Chaib** " et " **Kadri Abdeldjalil** " étudiants de Doctorat Mathématique

Finalement, je dédie ce travail à tous ceux qui ont participé à ***ma réussite***.

Merci d'être toujours là pour moi.

KARIMA.

Table des matières

Notations	3
Introduction générale	5
1 Concepts de base et résultats préliminaires	7
1.1 Ensembles convexes	7
1.2 Fonctions convexes	7
1.3 Quelques rappels de la topologie	8
1.4 Sous-gradient et sous-différentiel	9
1.5 Multi-applications	9
1.6 Opérateurs maximaux monotones	10
1.7 Théorème de point fixe de Schauder	11
1.8 Distance de Hausdorff	11
1.9 Quelques résultats théoriques	11
1.9.1 Formules de Green et formule de la divergence	14
1.9.2 Théorème de Lax-Milgram	15
1.9.3 Théorème de Babushka-Brezzi	15
2 Position du problème d'interaction fluide-structure	17
2.1 Problème de Stokes	17
2.2 Problème d'élasticité	20

2.3	Problème d'interaction fluide-structure	23
3	Approche du domaine fictif en utilisant la méthode de pénalisation	28
3.1	Méthode de pénalisation	28
3.2	Problème d'interaction fluide-structure pénalisé	29
3.3	Formulation faible du problème pénalisé	30
3.4	Existence de la solution de la formulation faible du problème pénalisé . . .	38
3.5	Covergence de la solution du problème pénalisé vers la solution du problème original	43
	Bibliographie	51

Notations

D : ouvert borné de \mathbb{R}^2

p.p. : presque partout

dx : mesure de Lebesgue

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: application produit scalaire

$\|\cdot\|$: application norme

$\nabla f(x_0)$: le gradient de f au point x_0

$\partial f(x_0)$: le sous différentiel de f au point x_0

d_H : la distance de Hausdorff

$dom f$: le domaine effectif de la fonction f

$epi f$: epigraphe de f

H : espace de Hilbert ($E, \langle \cdot, \cdot \rangle$) : espace pré-hilbertien

E' : espace dual de l'espace E

$$L^p(D) = \{v : D \rightarrow \mathbb{R}; v \text{ mesurable et } \int_D |v(x)|^p dx < \infty\}, \quad 1 \leq p < \infty$$

En particulier :

$$L^2(D) = \{v : D \rightarrow \mathbb{R}; v \text{ mesurable et } \int_D |v(x)|^2 dx < \infty\}$$

$(L^2(D))^2$: espace produit

$L^\infty(D) = \{v \text{ mesurable dans } D / \exists c \geq 0 \text{ vérifiant } |v| \leq c \text{ p.p. sur } D\}$

$|\alpha| = \sum_{i=1}^2 \alpha_i$, utilisé pour la définition des espaces de Sobolev

$$\partial^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdot \partial^{\alpha_2} x_2}$$

$W^{m,p}(D)$: espace de Sobolev sur D défini par :

$$W^{m,p}(D) = \{v \in L^p(D), \partial^\alpha v \in L^p(D) \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq m\}$$

$$H^m(D) = W^{m,2}(D) = \{v \in L^2(D), \partial^{|\alpha|} v \in L^2(D), \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq m\}$$

$H^1(D) := W^{1,2}(D)$: espace de Sobolev d'ordre 1 sur D défini par :

$$H^1(D) = \{v \in L^2(D); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(D), i = 1, 2\}$$

$(H^1(D))^2$: espace produit

$\text{supp}(v) = \overline{\{x \in D; v(x) \neq 0\}}$: le support de v

$$H_0^1(D) = \{v \in H^1(D), v = 0 \text{ sur } \partial D\}$$

$(H_0^1(D))^2$: espace produit

$W^{m,\infty}(D)$: espace de Sobolev sur D défini par :

$$W^{m,\infty}(D) = \{v \in L^\infty(D), \partial^\alpha v \in L^\infty(D), \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq m\},$$

$W^{1,\infty}(D)$: espace de Sobolev d'ordre 1 sur D défini par :

$$W^{1,\infty}(D) = \{v \in L^\infty(D); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^\infty(D), i = 1, 2\},$$

$(W^{1,\infty}(D))^2$: espace produit

$$L_0^2(D) = \{v \in L^2(D); \int_D v(x) dx = 0\}$$

$\mathcal{D}(D)$: espace des fonctions indéfiniment dérivables à support borné (espace des fonctions test).

Introduction générale

L'interaction fluide-structure (*IFS*) s'intéresse au comportement d'un système constitué par des entités mécaniques considérées comme distinctes : une structure mobile (rigide ou déformable) et un fluide (en écoulement ou au repos) autour ou à l'intérieur de la structure. L'évolution de chacune des deux entités dépendant de celle de l'autre. Plus précisément, le mouvement de la structure est influencé par l'écoulement du fluide à travers les efforts transmis à l'interface, et réciproquement, le mouvement de la structure influence l'écoulement du fluide par les déplacements de l'interface qui entraîne le fluide dans son mouvement, un phénomène de couplage apparaît.

Les phénomènes d'interaction fluide-structure font partie de la vaste classe des problèmes multi-physiques. Un grand nombre de situations font apparaître à ces phénomènes [10, 26, 29]. Les applications en bio-mécanique font, en général, intervenir un liquide et une structure déformable : écoulements sanguins dans les vaisseaux, déformation des globules rouges dans les capillaires. Dans le domaine du génie nucléaire, l'usure d'un faisceau tubulaire d'un échangeur de chaleur, par instabilité sous écoulement, peut prendre à peine quelques secondes ; cet effet de couplage est pris en compte de façon primordiale pour des raisons de sûreté des installations de production d'énergie. La compréhension des effets de vibrations induites par écoulement a initié de nombreuses campagnes expérimentales et justifie aujourd'hui le développement de méthodes de calcul numérique en couplage fluide-structure. Dans le domaine du génie civil, nous citons fréquemment l'exemple de

destruction du pont de Tacoma dont la compréhension a donné lieu à une littérature scientifique abondante et qui illustre l'importance des effets d'interaction fluide-structure.

Le but principal de ce travail est d'essayer de détailler un peu les notions d'un article de A. Halanay, C. Murea, D. Tiba intitulé : Existence et approximation pour un problème d'interaction fluide-structure stationnaire en utilisant une approche de domaine fictif avec pénalisation [16].

Ce mémoire est divisé en trois chapitres présentés comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux rappels de certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires qui seront utilisés dans la suite.

Le second chapitre sera voué à la représentation des systèmes d'élasticité et de Stokes. Nous rappellerons brièvement les deux formulations (forte et faible) de ces deux systèmes. Aussi, nous énoncerons les propositions permettant d'assurer l'existence et l'unicité de la solution pour les deux formulations variationnelles associées aux systèmes de Stokes et celui de l'élasticité. Nous introduirons par la suite, le problème d'interaction fluide-structure dans sa formulation forte.

Le dernier chapitre abordera dans un premier temps la formulation variationnelle du problème IFS pénalisé (dont on a rajouté un terme dépendant d'un paramètre ϵ dans notre formulation dans le but d'écrire les équations sur un domaine de calcul simplifié D). Ensuite nous s'attellerons à démontrer l'existence de la solution du problème pénalisé, afin de parler sur la convergence de la solution du problème IFS pénalisé vers la solution du problème IFS initial quand le paramètre ϵ tend vers zéro.

Chapitre 1

Concepts de base et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons introduire tous les résultats et les notions qui nous seront très utiles tout au long de ce mémoire. Nous présentons quelques concepts d'analyse convexe et d'analyse fonctionnelle [6], [3].

1.1 Ensembles convexes

Définition 1.1 Une partie C de E est dite convexe si et seulement si pour tout

$$x, y \in C : \theta x + (1 - \theta) y \in C \quad \forall \theta \in [0, 1].$$

1.2 Fonctions convexes

Définition 1.2 (Domaine effectif) Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On appelle domaine effectif de la fonction f l'ensemble défini par :

$$\text{dom} f := \{x \in E : f(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.3 (Fonction propre) La fonction f est dite propre si $\text{dom} f \neq \emptyset$ et $f(x) \neq -\infty, \forall x \in E$.

Définition 1.4 (Fonction convexe) On dit qu'une fonction $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si pour tous $x, y \in \text{dom} f$ et pour tout $\theta \in [0, 1]$, on a :

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y).$$

Définition 1.5 (*Épigraphe*) On appelle épigraphe d'une fonction $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble défini par :

$$\text{epi}(f) := \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}.$$

Propriétés 1.1 .

1. f est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.
2. Si f_1 et f_2 sont des fonctions convexes, alors $f_1 + f_2$ est convexe.

1.3 Quelques rappels de la topologie

Soit E un espace de Banach et E' son dual topologique i.e. $E' = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ est forme linéaire continue}\}$ tel que pour tout $f \in E'$:

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle|.$$

Nous désignons par $\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Lorsque f décrit E' on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in E'}$ d'applications de E dans \mathbb{R} .

Définition 1.6 .

1. **Convergence faible.** Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ et $u \in E$. On dit que u_n converge faiblement vers u dans E lorsque $n \rightarrow \infty$ si $\varphi_f(u_n) \rightarrow \varphi_f(u)$ pour tout $f \in E'$.
2. **Convergence forte.** Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ converge fortement vers $u \in E$ si la suite $(\|u_n - u\|)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

Définition 1.7 (*Demi-fermé*).

Un sous-ensemble A de $X \times X$ est dit demi-fermé s'il est fortement-faiblement fermé dans $X \times X$.

Autrement dit, $x_n \longrightarrow x$, $y_n \rightharpoonup y$ et $[x_n, y_n] \in A$ implique que $[x, y] \in A$. (On rappelle que \rightharpoonup dénote la convergence faible en X).

Un ensemble A est fermé si $[x_n, y_n] \in A$, $x_n \longrightarrow x$ et $y_n \longrightarrow y$ implique $[x, y] \in A$.

1.4 Sous-gradient et sous-différentiel

Définition 1.8 Soit $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction convexe et soit $\bar{x} \in \text{dom}(f)$, un élément ξ est appelé sous-gradient de f en \bar{x} si :

$$\langle \xi, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}); \quad \forall x \in H.$$

Définition 1.9 Soit H un espace de Hilbert et f est une fonction convexe propre et définie de H à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in \text{dom}(f)$.

Le sous-différentiel de f au point x_0 noté $\partial f(x_0)$ est le sous-ensemble de H définie par :

$$\partial f(x_0) = \{ \xi \in H : f(x) \geq f(x_0) + \langle \xi, x - x_0 \rangle, \quad \forall x \in H \}.$$

Remarque 1.1 Si $x_0 \notin \text{dom}(f)$, alors $\partial f(x_0) = \emptyset$

Proposition 1.1 Si $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et différentiable en x_0 , alors $\partial f(x_0) = \{ \nabla f(x_0) \}$.

Définition 1.10 (Fréchet différentiable). Soit f une fonction sur un ensemble ouvert U d'un espace normé X dans l'espace normé Y . Nous disons que f est Fréchet différentiable en $x \in U$ s'il y a un opérateur linéaire borné $T_x : X \rightarrow Y$ tel que :

$$f(x + y) = f(x) + T_x y + \|y\|_{E_x(y)}.$$

où $E_x(y) \rightarrow 0$ si $y \rightarrow 0$.

1.5 Multi-applications

Définition 1.11 Soient X et Y deux ensembles non vides dans H . Nous appelons Multi-application (ou fonction multivoque) de X dans Y tout application T de X dans $\mathcal{P}(Y)$ (ensemble des parties de Y) et nous notons $T : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ ou $T : X \rightrightarrows Y$. Alors $\forall x \in X : T(x) \subset Y$ est un sous-ensemble de Y .

Définition 1.12 On appelle domaine (effectif) de T qu'on le note $D(T)$ le sous-ensemble de X défini par :

$$D(T) = \{ x \in X : T(x) \neq \emptyset \}.$$

Et l'image de T noté $R(T)$ le sous-ensemble de Y définie par :

$$R(T) = \{ y \in Y / \exists x \in X : y \in T(x) \} = \bigcup_{x \in D(T)} T(x).$$

Définition 1.13 On appelle graphe de T et on note $\text{gph}(T)$ le sous-ensemble de $X \times Y$ définie par :

$$\text{gph}(T) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in D(T), y \in T(x)\} ..$$

Définition 1.14 (Localement borné).

Soit $A : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. A est dit localement bornée si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x tel que :

$$A(V) = \{Ax; x \in V\}$$

est borné dans Y .

Définition 1.15 (Ensemble Polaire d'un ensemble). Soit X un espace vectoriel et soit $V \subset X$. L'ensemble Polaire de V noté V° est défini par :

$$V^\circ = \{h \in X'; \langle h, v \rangle; \forall v \in V\}.$$

$$h \in X'; h : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ linéaire continue}$$

1.6 Opérateurs maximaux monotones

Définition 1.16 (Opérateur monotone). L'opérateur $T : H \rightrightarrows H$ est dit monotone si :

$$\forall u, v \in D(T), \forall u_1 \in T(u), \forall v_1 \in T(v) : \langle v_1 - u_1, v - u \rangle \geq 0.$$

Proposition 1.2 Soit f une fonction convexe propre sur H . Alors le sous-différentiel de f est un opérateur monotone .

Remarque 1.2 Si T_1 et T_2 sont des opérateurs monotones alors $T_1 + T_2$ est un opérateur monotone.

Définition 1.17 (opérateur maximal monotone). Un opérateur $T : H \rightrightarrows H$ est dit maximal monotone s'il est monotone et s'il n'existe pas d'opérateur monotone $G : H \rightrightarrows H$ tel que $\text{gph}(T) \subset \text{gph}(G)$.

Proposition 1.3 Soit un opérateur $T : H \rightrightarrows H$. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

- 1) T est maximal monotone.
- 2) T est monotone et $R(I + T) = H$

Corollaire 1.1 Soit $T : H \longrightarrow H$ un opérateur monotone et continue. Alors T est maximal monotone.

1.7 Théorème de point fixe de Schauder

Le théorème de point fixe de Schauder est une généralisation de théorème de Brouwer.

Dont l'énoncé est :

Théorème 1.1 (*Théorème de point fixe de Schauder*)[34]

Soit C un sous ensemble fermé et convexe d'un espace de Banach E et $f : C \rightarrow C$ une application continue telle que $f(C)$ est relativement compact. Alors f possède un point fixe. Plus généralement, si C est compact convexe alors toute fonction continue de C sur C possède un point fixe.

1.8 Distance de Hausdorff

Définition 1.18 (*Fonction Distance*). Soit $C \subset H$ une partie non vide. La fonction distance associée à C est définie par :

$$d_C(x) = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

Proposition 1.4 . Soit $C \subset H$ une partie non vide, alors :

- $d_C(x) = 0 \iff x \in \text{adh}(C)$.
- La fonction distance est continûment Lipschitzienne de rapport égale à 1.

Définition 1.19 (*Distance de Hausdorff*). Soient H un espace de Hilbert, C_1 et C_2 deux sous-ensembles fermés non vide de H . On appelle distance de Hausdorff entre C_1 et C_2 la fonction numérique : $d_H(.,.)$ définie par :

$$\begin{aligned} d_H(C_1, C_2) &:= \sup_{y \in H} |d_{C_1}(y) - d_{C_2}(y)| \\ &:= \max_{y \in H} (\sup_{x \in C_1} d_{C_2}(x), \sup_{x \in C_2} d_{C_1}(x)). \end{aligned}$$

1.9 Quelques résultats théoriques

Nous travaillerons avec des champs vectoriels de fonctions $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($D \subset \mathbb{R}^2$), tels que :

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2), \text{ où } v_i : D \rightarrow \mathbb{R} (i = 1, 2),$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2), \text{ où } u_i : D \rightarrow \mathbb{R} (i = 1, 2),$$

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2), \text{ où } w_i : D \rightarrow \mathbb{R} (i = 1, 2),$$

Pour un tel champ, nous écrivons les opérateurs vectoriels associés de la manière suivante :

Opérateur de divergence :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_i},$$

Opérateur de gradient et laplace :

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \nabla v_1 \\ \nabla v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \end{pmatrix} .$$

La norme d'un champ vectoriel \mathbf{u} dans un espace de Hilbert $H^1(D)^2$ se note :

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(D)^2} := \left(\sum_{j=1}^2 \|u_j\|_{H^1(D)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Si u_i est un champ scalaire dans l'espace $H^1(D)$ alors par la définition de la norme H^1 :

$$\|\nabla u_i\|_{L^2(D)} := \left(\sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(D)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|u_i\|_{H^1(D)} .$$

Théorème 1.2 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*) [1]

• **Avec des sommes :**

Soient \mathbf{u} et $\mathbf{v} \in D$ ($D \subset \mathbb{R}^2$). Alors :

$$\sum_{i=1}^2 |u_i v_i| \leq \left(\sum_{i=1}^2 |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^2 |v_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

• **Avec des intégrales :**

Soient $u, v \in C([0, 1], \mathbb{R})$. Alors :

$$\int_0^1 |uv| \, dx \leq \left(\int_0^1 |u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

• **Dans un espace de Hilbert :**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace pré-hilbertien. Alors, pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$,

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|_E \|\mathbf{v}\|_E .$$

Théorème 1.3 (Inégalité de Hölder) [8]

Soit D un ouvert de \mathbb{R}^2 . $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$ tels que $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$. Alors

$$\forall \mathbf{u} \in L^p(D), \forall \mathbf{v} \in L^q(D), \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in L^1(D),$$

et

$$\| \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \|_{L^1(D)} \leq \| \mathbf{u} \|_{L^p(D)} \| \mathbf{v} \|_{L^q(D)} .$$

En particulier on a : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in L^1(D)$.

Remarque 1.3 Cette inégalité devient l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $p = q = 2$.

Théorème 1.4 (Théorème de trace)[2] Soit Ω un ouvert borné régulier (i.e. admettent au plus des point anguleux) de \mathbb{R}^n .

$v \in H^1(\Omega)$ n'est pas définie sur le bord, car les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont pas continues si $n \geq 2$.

On introduit la fonction trace :

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) &\rightarrow L^2(\partial\Omega) \\ v &\mapsto \gamma_0 v = v |_{\partial\Omega}, \end{aligned}$$

qui est continue. Dans ces conditions,

$$\exists C > 0, \forall v \in H^1(\Omega), \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Où

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \gamma_0 v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Théorème 1.5 (Inégalité de Poincaré) [1]

Soit D un ouvert borné de \mathbb{R}^2 . Alors, il existe une constante $C_D > 0$ telle que : pour toute fonction $v \in H_0^1(D)$, nous avons :

$$\| v \|_{L^2(D)} \leq C_D \| \nabla v \|_{L^2(D)} .$$

Remarque 1.4 : Une inégalité de Poincaré est une inégalité qui permet de contrôler (estimer) la norme L^2 d'une fonction par la norme L^2 de son gradient.

1.9.1 Formules de Green et formule de la divergence

Nous donnons quelques rappels utilisés par la suite.

Formules de Green

Soit v et w de $H^1(D)$ et $x = (x_1, x_2)$, $i = \overline{1, 2}$ on a :

$$\int_D \frac{\partial v}{\partial x_i} w \, dx = \int_{\partial D} v n_i w \, d\sigma - \int_D v \frac{\partial w}{\partial x_i} \, dx.$$

a) Pour tous champs scalaires $v \in H^1(D)$ et $w \in H^2(D)$ réguliers, on a :

$$- \int_D \Delta w v \, dx = \int_D \nabla w \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial D} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} v \, d\sigma, \quad (1.1)$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire extérieure à D .

b) Pour tous champs vectoriels \mathbf{v}, \mathbf{w} réguliers, on a

$$- \int_D \Delta \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_D \nabla \mathbf{w} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\partial D} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma, \quad (1.2)$$

avec $\nabla \mathbf{w} : \nabla \mathbf{v} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$.

c) Soit D un ouvert régulier de \mathbb{R}^2 et $p : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $\mathbf{v} : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ vectoriel de classe C^2 . Alors

$$\int_D \nabla p \cdot \mathbf{v} \, dx = - \int_D p \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx + \int_{\partial D} (p \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\sigma, \quad (1.3)$$

où $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ est le vecteur unitaire normal à ∂D .

Formule de la divergence :

Pour tout champ vectoriel \mathbf{v} régulier, nous avons

$$\int_D \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = \int_{\partial D} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma, \quad (1.4)$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire extérieure à D

Nous notons par $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ (resp. $\|\cdot\|_{\mathbb{Y}}$) la norme sur \mathbb{X} (resp. sur \mathbb{Y}), tels que \mathbb{X} et \mathbb{Y} sont des espaces de Hilbert.

1.9.2 Théorème de Lax-Miligram

Définition 1.20 Soit $a : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. Nous disons que

1) $a(.,.)$ est continue sur \mathbb{X} si :

$$\text{Il existe } M > 0 \quad \forall u, v \in \mathbb{X} \text{ tel que } |a(u, v)| \leq M \|u\|_{\mathbb{X}} \|v\|_{\mathbb{X}}.$$

2) $a(.,.)$ est coercive sur \mathbb{X} si :

$$\text{Il existe } \alpha > 0 \text{ tel que } \alpha \|v\|_{\mathbb{X}}^2 \leq a(v, v).$$

3) $a(.,.)$ est symétrique si :

$$\forall u, v \in \mathbb{X}, \quad a(u, v) = a(v, u).$$

Théorème 1.6 (Théorème de représentation de Lax-Milgram)[7]

Soit $a : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur l'espace de Hilbert \mathbb{X} et soit $L : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue sur \mathbb{X} . Alors, il existe un unique $u \in \mathbb{X}$ tel que l'équation $a(u, v) = L(v)$ soit vérifiée pour tout v de \mathbb{X} , i.e :

$$\exists! u \in \mathbb{X} \quad \forall v \in \mathbb{X}, \quad a(u, v) = L(v). \quad (1.5)$$

Si on suppose de plus que la forme a est symétrique, alors l'élément u est caractérisé comme étant l'unique élément de \mathbb{X} qui minimise la fonctionnelle $J : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$ pour tout v de \mathbb{X} , i.e :

$$\exists! u \in \mathbb{X}, \quad J(u) = \min_{v \in \mathbb{X}} J(v). \quad (1.6)$$

1.9.3 Théorème de Babushka-Brezzi

Soit \mathbb{X} et \mathbb{Y} deux espaces de Hilbert et deux formes bilinéaires

$$a : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$b : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Etant donné $f \in \mathbb{X}'$, nous cherchons $(u, p) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ tels que

$$a(u, v) + b(u, p) = \langle f, v \rangle_{\mathbb{X}, \mathbb{X}} \quad \forall v \in \mathbb{X} \quad (1.7)$$

$$b(u, q) = 0 \quad \forall q \in \mathbb{Y}. \quad (1.8)$$

Théorème 1.7 [21]

Nous donnons les hypothèses suivantes :

1) La forme $a(.,.)$ est continue sur \mathbb{X} :

$$\text{Il existe } M > 0, \quad \forall u, v \in \mathbb{X}, \text{ tel que } |a(u, v)| \leq M \|u\|_{\mathbb{X}} \|v\|_{\mathbb{X}}.$$

2) La forme $a(.,.)$ est coercive sur \mathbb{X} :

$$\text{Il existe } \alpha > 0, \text{ tel que } \alpha \|v\|_{\mathbb{X}}^2 \leq a(v, v).$$

3) La forme $b(.,.)$ est continue :

$$\text{Il existe } N > 0, \quad \forall v \in \mathbb{X}, \quad \forall q \in \mathbb{Y}, \text{ tel que } |b(v, q)| \leq N \|v\|_{\mathbb{X}} \|q\|_{\mathbb{Y}}.$$

4) La forme $b(.,.)$ satisfait la condition 'inf-sup' suivante :

$$\text{Il existe } \beta > 0, \text{ tel que } \inf_{\substack{q \in \mathbb{Y} \\ q \neq 0}} \sup_{\substack{v \in \mathbb{X} \\ v \neq 0}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_{\mathbb{X}} \|q\|_{\mathbb{Y}}} \geq \beta.$$

Alors le problème (1.7),(1.8) admet une unique solution $(u, p) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Chapitre 2

Position du problème d'interaction fluide-structure

Dans ce chapitre, nous expliquons le problème de Stokes et d'élasticité avec une étude variationnelle pour les deux problèmes et aussi nous présentons la formulation forte du problème d'interaction fluide-structure.

2.1 Problème de Stokes

Le problème de "Stokes" est au coeur de la simulation numérique en mécanique de fluides. Une bonne compréhension des difficultés liées à sa discrétisation par la méthode des éléments finis ouvre la voie à toute une panoplie d'application, Cela va des écoulements des fluides fortement visqueux. Le système de Stokes modélise l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible à petite vitesse. Nous supposons que le fluide occupe un domaine D qui est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 .

On considérera le problème de Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ dans } D, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } D, \\ \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \partial D. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

C'est un problème elliptique linéaire avec une condition au bord de type Dirichlet homogène, nous considérons :

D ouvert borné connexe de \mathbb{R}^2 , \mathbf{u} représente le champ de vitesse du fluide $\mathbf{u} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$.

p : La pression du fluide $p : D \rightarrow \mathbb{R}$.

\mathbf{f} : Champ de force agissant sur la frontière avec le coefficient de viscosité cinématique $\nu(\nu > 0)$.

Ici nous nous intéresserons uniquement au cas des fluides incompressibles régi par l'équation

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

Formulation variationnelle

Nous supposons que $\mathbf{f} \in L^2(D)^2$, $\mathbf{u} \in H^2(D)^2$ et $p \in L^2(D)$. Nous multiplions la première équation par un champ vectoriel \mathbf{v} dans l'espace des fonctions tests $(\mathcal{D}(D))^2$ et nous intégrons. Le problème devient :

$$-\nu \int_D \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_D \nabla p \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_D \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} \in (\mathcal{D}(D))^2.$$

En utilisant les formules de Green (1.2) et (1.3), l'expression devient :

$$\int_D (\nu(\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}) - p \operatorname{div} \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial D} ((-\nu(\nabla \mathbf{u})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} + (p\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}) \, d\sigma = \int_D \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} \in (\mathcal{D}(D))^2.$$

De plus, afin de simplifier le problème variationnel, nous cherchons une fonction s'annulant sur ∂D . Nous définissons ainsi

$$V := H_0^1(D)^2.$$

Concernant la pression, puisque l'équation de Stokes ne fait intervenir que les dérivées, nous sommes poussés à imposer une condition sur p qui nous fixe la constante d'intégration afin de garantir l'unicité d'une telle pression. Nous choisissons à cet effet l'espace des

fonctions de carré sommable à moyenne nulle

$$Q = L_0^2(D) := \{q \in L^2(D) \mid \int_D q \, dx = 0\}.$$

Par l'équation d'incompressibilité, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, nous la multiplions par une fonction scalaire $q : D \rightarrow \mathbb{R}$ dans l'espace Q et nous intégrons. Nous obtenons

$$\int_D q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q \in Q.$$

Finalement, en définissant les formes bilinéaires $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \nu \int_D \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (2.2)$$

$$b(\mathbf{v}, q) := - \int_D q \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (2.3)$$

ainsi que la fonctionnelle linéaire $F : V \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F(\mathbf{v}) := \int_D \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x},$$

Nous obtenons la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in V, p \in Q \text{ tel que} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in Q. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Théorème 2.1 *Il existe une unique solution (\mathbf{u}, p) du problème (2.4)*

Preuve. La démonstration est basée sur la satisfaction de la condition inf-sup de Babushka-Brezzi (Théorème 1.7).

1) Continuité de $a(\cdot, \cdot)$:

Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, nous avons :

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \nu \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V,$$

la forme bilinéaire $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est continue avec $M = \nu$ comme constante de continuité.

2) Coercivité de $a(., .)$:

Soit $\mathbf{v} \in V$, nous avons :

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \nu \alpha \|\mathbf{v}\|_V^2$$

la forme bilinéaire a est coercive avec $\nu \alpha$ la constante de coercivité.

3) Continuité de $b(., .)$:

Soient $\mathbf{u} \in V$, $q \in Q$, nous avons :

$$|b(\mathbf{u}, q)| \leq \gamma \|\mathbf{u}\|_V \|q\|_Q \quad \forall \mathbf{u} \in V, q \in Q.$$

Donc la forme b est continue avec γ la constante de continuité.

4) On peut finalement montrer que les espaces V et Q vérifient la propriété suivante :

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que } \forall q \in Q \quad \exists \mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq 0 : b(\mathbf{u}, q) \geq \beta \|\mathbf{v}\|_V \|q\|_Q.$$

De plus, $H_0^1(D)$ et $L_0^2(D)$ sont des espaces de Hilbert. Alors, la théorie de Babushka-Brezzi assure l'existence et l'unicité de (\mathbf{u}, p) (solution de problème (2.4)) ■

2.2 Problème d'élasticité

Le système d'élasticité linéaire est un système d'équations aux dérivées partielles de type elliptique correspondant à un modèle physique stationnaire, qui modélise les phénomènes de flexions de poutre et les problèmes de plaques et membranes.

Soit D un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^2 de frontière $\partial D \in C^1$ par morceaux.

On considère le problème suivant : étant données des fonctions $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ de $L^2(D)^2$ et

de trouver une fonction $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} + f_i = 0 & \text{dans } D, \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial D. \end{cases}$$

où

$$\sigma_{ij}(\mathbf{v}) = \lambda \left(\sum_{k=1}^2 (\mathbf{v}) \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) \right); i, j = \overline{1, 2}.$$

λ, μ : Les coefficients de Lamé.

avec

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right); i, j = \overline{1, 2}.$$

Les équations du problème décrivent les petits déplacements \mathbf{u} à partir de l'état naturel d'un solide élastique homogène et isotrope soumis à une densité volumique de force \mathbf{f} dans D .

Formulation variationnelle

Soit $\mathbf{v} \in H^1(D)^2$ une fonction test. En multipliant l'équation d'élasticité par $v_i \in H^1(D)$, on trouve :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} + f_i \right) v_i &= 0; \quad i = \overline{1, 2}, \\ \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} v_i + f_i v_i &= 0; \quad i = \overline{1, 2}, \\ - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} v_i &= f_i v_i; \quad i = \overline{1, 2}. \end{aligned}$$

En intégrant sur D , on obtient :

$$- \int_D \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} v_i dx = \int_D f_i v_i dx; \quad i = \overline{1, 2}.$$

En utilisant la formule de Green :

$$\sum_{j=1}^2 \int_D \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \sum_{j=1}^2 \int_{\partial D} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) v_i n_j ds = \int_D f_i v_i dx; \quad i = \overline{1, 2}.$$

En choisissant $v_i = 0$ sur ∂D pour $i = \overline{1,2}$ et en posant :

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(D)^2; \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \partial D \right\} = H_0^1(D)^2.$$

on obtient la formulation variationnelle :

$$\sum_{j=1}^2 \int_D \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = \int_D f_i v_i dx; \quad i = \overline{1,2},$$

où $a(.,.)$ la forme bilinéaire et $L(.)$ la forme linéaire données par :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^2 \int_D \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx,$$

$$L(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^2 \int_D f_i v_i dx.$$

Théorème 2.2 . Soit D un ouvert borné de \mathbb{R}^2 et ∂D . Soit $\mathbf{f} \in L^2(D)^2$, il existe une unique solution faible $\mathbf{u} \in H_0^1(D)^2$ de problème d'élasticité.

Preuve. Voir [28]. La preuve est basé sur le théorème de Lax-Milgram (Théorème ??).

1) Continuité de $a(.,.)$:

Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, nous avons :

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq M_a \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V,$$

la forme bilinéaire $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est continue avec M_a comme constante de continuité.

2) Coercivité de $a(.,.)$:

Soit $\mathbf{v} \in V$, nous avons :

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_V^2$$

la forme bilinéaire a est coercive avec α la constante de coercivité.

3) Continuité de $L(.)$:

Soient $\mathbf{v} \in V$, nous avons :

$$|L(\mathbf{v})| \leq M_L \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Donc la forme L est continue avec M_L la constante de continuité.

De plus, $H_0^1(D)^2$ est espace de Hilbert. Alors, la théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de \mathbf{u} solution du problème.

■

2.3 Problème d'interaction fluide-structure

L'interaction entre fluide et une structure déformable, qui apparaît dans un champ très large de problèmes industriels, fait depuis peu l'objet d'une attention croissante de la part de la communauté scientifique. Les simulations numériques de tels problèmes restent une tâche difficile. Une première difficulté vient du fait que l'ensemble de système est l'assemblage de deux sous systèmes de nature différentes. Nous nous pouvons alors soit considérer le système complet comme une partie entière et écrire une formulation variationnelle qui comprend les équations du fluide et de la structure, soit utiliser des solveurs appropriés pour chacun de ces sous systèmes. Le fluide est représenté par l'équation de Stokes et la structure représenté par l'équation d'élasticité.

Soit D un domaine ouvert borné de frontière $\partial D = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Soit $\Omega_0^S \subset D$ le domaine de la structure non déformée, et supposons que sa frontière admette la décomposition $\partial\Omega_0^S = \Gamma_0 \cup \Gamma_D$, où Γ_0 est un sous-ensemble relativement ouvert de la frontière. Sur Γ_D on impose un déplacement nul pour la structure ($\Gamma_D \subset \Sigma_2$).

Supposons que la structure est élastique et notons $\mathbf{u} : \overline{\Omega}_0^S \rightarrow \mathbb{R}^2$ son déplacement. Une particule de la structure dont la position initiale était le point \mathbf{X} occupera la position

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X})$$

dans le domaine déformé $\Omega_u^S = \varphi(\Omega_0^S)$.

On suppose que $\Omega_u^S \subset D$ et que le fluide occupe $\Omega_u^F = D \setminus \overline{\Omega}_u^S$. On pose $\Gamma_u = \varphi(\Gamma_0)$

et on suppose que Γ_u ne touche pas la paroi du contenant, c'est à dire $\Gamma_u \cap \partial D = \emptyset$. On rappelle que Γ_0 est un sous-ensemble relativement ouvert. On obtient que $\overline{\Omega}_u^S \cap \overline{\Omega}_u^F = \Gamma_u$ qui représente l'interface fluide-structure. La frontière de la structure déformée est $\partial\Omega_u^S = \Gamma_u \cup \Gamma_D$ et la frontière du domaine fluide admet la décomposition $\partial\Omega_u^F = \Sigma_1 \cup (\Sigma_2 \setminus \Gamma_D) \cup \Gamma_D$. La configuration géométrique fluide-structure est représentée sur la Figure 2.1.

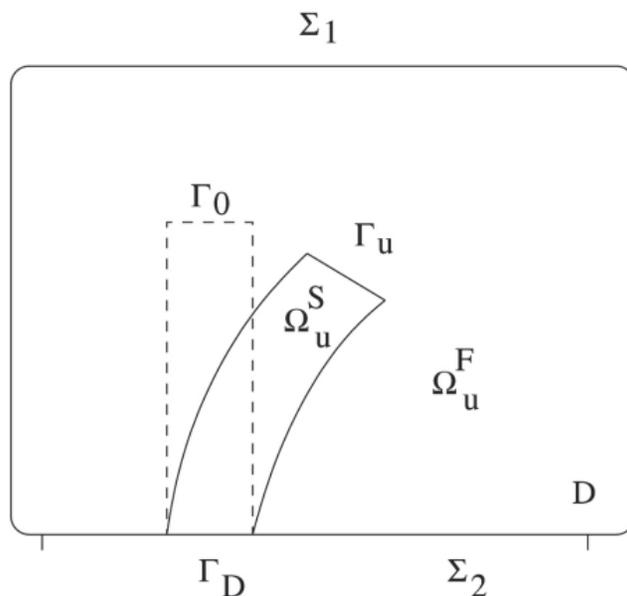


FIGURE 2.1 – La configuration géométrique

Nous introduisons quelques notations. Généralement, les équations de fluide sont décrites en coordonnées eulériennes, tandis que pour les équations de structure, les coordonnées lagrangiennes sont employées. Les gradients par rapport aux coordonnées eulériennes $\mathbf{x} \in \Omega_u^S$ d'un champ scalaire $q : D \rightarrow \mathbb{R}$ ou d'un champ vectoriel $\mathbf{w} = (w_1, w_2) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont notés

$$\nabla q = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial x_1} \\ \frac{\partial q}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad \nabla \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x_1} & \frac{\partial w_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Le produit scalaire de deux vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{w} de \mathbb{R}^2 est noté

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^2 v_i w_i$$

Si $\sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ et $\tau = (\tau_{i,j})_{1 \leq i, j \leq 2}$ sont deux tenseurs, on note

$$\sigma : \tau = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} \tau_{i,j}.$$

Les opérateurs de divergence par rapport aux coordonnées Eulériennes d'un champ vectoriel $\mathbf{w} = (w_1, w_2) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ et d'un tenseur $\sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ sont notés

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}, \quad \nabla \cdot \sigma = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

De même, lorsque les dérivées sont par rapport aux coordonnées lagrangiennes $\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}) \in \Omega_0^S$, on utilise les notations :

∇ : Le gradient pour les coordonnées Eulériennes \mathbf{x} .

$\nabla \cdot$: Le divergence pour les coordonnées Eulériennes \mathbf{x} .

$\nabla_{\mathbf{X}}$: Le gradient pour les coordonnées Lagrangiennes \mathbf{X} .

$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot$: Le divergence pour les coordonnées Lagrangiennes \mathbf{X} .

Si A est une matrice carrée, on note $\det A$, A^{-1} l'inverse de A , A^T transposé de A , A^{-T} transposé de l'inverse de A . On note $Cof(A)$ co-facteur de matrice A .

On note

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}(\mathbf{X})$$

le gradient de la déformation et :

$$J(\mathbf{X}) = \det \mathbf{F}(\mathbf{X})$$

le déterminant jacobien, où \mathbf{I} est la matrice unitaire.

Formulation forte du problème d'intraction fluide structure :

$$-\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \sigma^S(\mathbf{u}) = \mathbf{f}^S, \quad \text{dans } \Omega_0^S \quad (2.5)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (2.6)$$

$$-\nabla \cdot \sigma^F(\mathbf{v}, p) = \mathbf{f}^F, \quad \text{dans } \Omega_u^F \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \text{dans } \Omega_u^F \quad (2.8)$$

$$\mathbf{v} = 0, \quad \text{sur } \Sigma_1 \quad (2.9)$$

$$\mathbf{v} = 0, \quad \text{sur } \Sigma_2 \setminus \Gamma_D \quad (2.10)$$

$$\mathbf{v} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (2.11)$$

$$w(\sigma^F(\mathbf{v}, p)\mathbf{n}^F) \circ \varphi = -\sigma^S(\mathbf{u})\mathbf{n}^S \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (2.12)$$

Nous rappelons la signification physique et mathématique du problème d'interaction fluide-structure :

\mathbf{u} : Déplacement de la structure défini de $\overline{\Omega}_0^S$ à valeur dans \mathbb{R}^2 i.e :

$$\mathbf{u} : \overline{\Omega}_0^S \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

\mathbf{v} : La vitesse de fluide définie de $\overline{\Omega}_u^F$ à valeur dans \mathbb{R}^2 i.e :

$$\mathbf{v} : \overline{\Omega}_u^F \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

p : La pression de fluide définie de $\overline{\Omega}_u^F$ à valeur dans \mathbb{R}^2 i.e :

$$p : \overline{\Omega}_u^F \longrightarrow \mathbb{R}$$

\mathbf{f}^S : Les forces volumiques de structure définie de Ω_0^S à valeur dans \mathbb{R}^2 i.e :

$$\mathbf{f}^S : \Omega_0^S \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

\mathbf{n}^S : Le vecteur normal unitaire extérieur de structure sur la frontière $\partial\Omega_0^S$.

\mathbf{f}^F : Les forces volumiques de fluides définie de Ω_0^F à valeur dans \mathbb{R}^2 i.e :

$$\mathbf{f}^F : \Omega_0^F \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

\mathbf{n}^F : Le vecteur normal unitaire extérieur de fluide sur la frontière $\partial\Omega_u^S$.

σ^S : Tenseur des contraintes de Cauchy de la structure défini de Ω_0^S à valeur dans \mathbb{R}^4 i.e :

$$\sigma^S(\mathbf{u}) : \Omega_0^S \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

σ^F : Tenseur des contraintes de Cauchy de fluide définie de Ω_u^F à valeur dans \mathbb{R}^4 i.e :

$$\sigma^F(\mathbf{v}, p) : \Omega_u^F \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$w(\mathbf{X}) = \left\| J\mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}^S \right\|_{\mathbb{R}^2} = \left\| \text{cof}(\mathbf{F}) \mathbf{n}^S \right\|_{\mathbb{R}^2}$$

w : Un sorte de déterminant Jacobien pour le changement de formule variable pour l'intégral sur l'interface.

Les équations (2.5)-(2.6) concernent la structure et les équations (2.7)-(2.10) concernent le fluide, les équations (2.11),(2.12) représentent les conditions aux limites sur l'interface.

Remarque 2.1 *Les domaines du fluide et de la structure Ω_u^F , Ω_u^S dépendent du déplacement de la structure \mathbf{u} qui est l'inconnue. Par conséquence, le système (2.5)-(2.12) est un problème aux limites.*

Chapitre 3

Approche du domaine fictif en utilisant la méthode de pénalisation

Dans ce chapitre, on présente le problème d'interaction fluide-structure (*IFS*) pénalisé et sa formulation faible. Après, on donne une étude sur l'existence de la solution du problème pénalisé, et aussi la convergence de cette solution.

3.1 Méthode de pénalisation

La méthode du domaine fictif est souvent utilisée dans la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles dans un domaine avec des obstacles mobiles. Elle a été étudiée par plusieurs auteurs : Peskin (2002) [25], Glowinski et al (2000) [14], Ilinca et Hétu (2011) [18], Su et al(2007) [33] et beaucoup d'autres, au cours des dernières années. En particulier, cette méthode est applicable pour l'interaction fluide-structure.

L'idée fondatrice des approches de domaine fictifs est d'immerger le domaine original d'étude (ou domaine physique) dans un domaine fictif de forme géométrique plus simple qui devient le domaine de calcul. L'intérêt principal est d'utiliser un maillage cartésien sur le domaine de calcul permettant ainsi la résolution simple et rapide du problème fictif. Il y a plusieurs méthodes de domaine fictif, nous ne parlerons que de la méthode de

pénalisation.

L'idée des méthodes de pénalisation est d'utiliser une unique équation sur le domaine fictif en perturbant le moins possible l'équation sur le domaine réel. Pour cela on introduit un terme de pénalisation. Ce terme est divisé par un paramètre de pénalisation que l'on note ϵ de telle sorte que le terme de pénalisation soit nul sur le domaine réel et qu'il tende vers l'infini sur le domaine extérieur. Des travaux ont été faites dans le cas des équations elliptiques scalaire avec des conditions aux limites de types Dirichlet, Neumann et Robin.

3.2 Problème d'interaction fluide-structure pénalisé

On a

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \sigma^F(\mathbf{v}, p) &= \mathbf{f}^F \quad \text{dans } \Omega_u^F, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \quad \text{dans } \Omega_u^F. \end{aligned}$$

Nous introduisons deux autres équations concernant les champs fluides, mais écrites sur le domaine de la structure déformée :

$$-\nabla \cdot \sigma^F(\mathbf{v}, p) + \frac{1}{\epsilon} \mathcal{P}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}^F, \quad \text{dans } \Omega_u^S \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \text{dans } \Omega_u^S \quad (3.2)$$

tel que $\epsilon > 0$ est un paramètre de pénalisation et

$$\mathcal{P}(\mathbf{v}) = \left(|v_1|^{\alpha-1} \operatorname{sgn}(v_1), |v_2|^{\alpha-1} \operatorname{sgn}(v_2) \right), \quad (3.3)$$

où $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ et $1 < \alpha < 2$ est un réel. Ce choix du terme de pénalisation sera justifié ultérieurement (Section 3.4).

En suite, nous définissons les fonctions caractéristiques : $\chi_u^S : D \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\chi_u^S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \overline{\Omega_u^S} \\ 0, & \mathbf{x} \in D \setminus \overline{\Omega_u^S} \end{cases}$$

et $\chi_u^F : D \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\chi_u^F = 1 - \chi_u^S$.

En combinant (2.7) et (3.1) on obtient :

$$-\nabla \cdot \sigma^F(\mathbf{v}, p) + \frac{1}{\epsilon} \chi_u^S \mathcal{P}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}^F, \quad \text{dans } D. \quad (3.4)$$

De même, nous avons de (2.8) et (3.2) :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \text{dans } D. \quad (3.5)$$

Remarque 3.1 Au vu de l'équation (3.1), la vitesse et la pression du fluide « fictives » définies sur le domaine de la structure Ω_u^S dépendent de ϵ . Dans la suite, on note \mathbf{v}_ϵ et p_ϵ la vitesse et la pression du fluide définies sur tout le domaine D .

3.3 Formulation faible du problème pénalisé

- **Ecriture variationnelle de la condition d'interface**

On cherche la formulation variationnelle du problème d'élasticité dans Ω_0^S .

Soit $\mathbf{w}^S : \Omega_0^S \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $\mathbf{w}^S = 0$ sur Γ_D

En multipliant l'équation (2.5) par la fonction test \mathbf{w}^S , on trouve :

$$-\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \sigma^S(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{w}^S = \mathbf{f}^S \cdot \mathbf{w}^S$$

En intégrant sur Ω_0^S , on trouve :

$$\int_{\Omega_0^S} -\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \sigma^S(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{w}^S d\mathbf{X} = \int_{\Omega_0^S} \mathbf{f}^S \cdot \mathbf{w}^S d\mathbf{X}.$$

En utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega_0^S} \sigma^S(\mathbf{u}) : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w}^S d\mathbf{X} - \int_{\Gamma_0} \sigma^S(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{w}^S \mathbf{n}^S dS = \int_{\Omega_0^S} \mathbf{f}^S \cdot \mathbf{w}^S d\mathbf{X}.$$

où $\mathbf{u}, \mathbf{w}^S \in (H^1(\Omega_0^S))^2$

Donc, on a :

$$\int_{\Omega_0^S} \sigma^S(\mathbf{u}) : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w}^S d\mathbf{X} = \int_{\Omega_0^S} \mathbf{f}^S \cdot \mathbf{w}^S d\mathbf{X} + \int_{\Gamma_0} \sigma^S(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{w}^S \mathbf{n}^S dS. \quad (3.6)$$

Nous définissons $\tilde{\mathbf{w}}^S : \Omega_u^S \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $\tilde{\mathbf{w}}^S = \mathbf{w}^S \circ \varphi^{-1}$ et $\tilde{\mathbf{w}}^S = 0$ sur Γ_D .

En multipliant l'équation précédente (3.1) par la fonction test $\tilde{\mathbf{w}}^S$, on trouve :

$$\left[-\nabla \cdot \sigma^F(\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon) + \frac{1}{\epsilon} \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) \right] \cdot \tilde{\mathbf{w}}^S = \mathbf{f}^F \cdot \tilde{\mathbf{w}}^S.$$

En intégrant sur Ω_u^S , on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_u^S} -\nabla \cdot \sigma^F(\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon) \cdot \tilde{\mathbf{w}}^S + \frac{1}{\epsilon} \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) \cdot \tilde{\mathbf{w}}^S \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_u^S} \mathbf{f}^F \cdot \tilde{\mathbf{w}}^S \, d\mathbf{x}, \\ \int_{\Omega_u^S} -\nabla \cdot \sigma^F(\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon) \cdot \tilde{\mathbf{w}}^S \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega_u^S} \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) \cdot \tilde{\mathbf{w}}^S \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_u^S} \mathbf{f}^F \cdot \tilde{\mathbf{w}}^S \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green, on trouve :

$$\int_{\Omega_u^S} \sigma^F(\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon) : \nabla \tilde{\mathbf{w}}^S \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_u} \sigma^F(\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon) \mathbf{n}^F \cdot \tilde{\mathbf{w}}^S \, ds + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega_u^S} \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) \cdot \tilde{\mathbf{w}}^S \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_u^S} \mathbf{f}^F \cdot \tilde{\mathbf{w}}^S \, d\mathbf{x},$$

d'où :

$$\int_{\Omega_u^S} \sigma^F(\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon) : \nabla \tilde{\mathbf{w}}^S \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega_u^S} \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) \cdot \tilde{\mathbf{w}}^S \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_u^S} \mathbf{f}^F \cdot \tilde{\mathbf{w}}^S \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_u} \sigma^F(\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon) \mathbf{n}^F \cdot \tilde{\mathbf{w}}^S \, ds. \quad (3.7)$$

L'équation précédente est équivalente à la formulation variationnelle écrite dans le domaine non déformé Ω_0^S :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0^S} J(\sigma^F(\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon) \circ \varphi) F^{-T} : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w}^S \, d\mathbf{X} + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega_0^S} J\mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon \circ \varphi) \cdot \mathbf{w}^S \, d\mathbf{X} &= \int_{\Omega_0^S} J(\mathbf{f}^F \circ \varphi) \cdot \mathbf{w}^S \, d\mathbf{X} \\ - \int_{\Gamma_0} w(\sigma^F(\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon) \mathbf{n}^F \circ \varphi) \cdot \mathbf{w}^S \, dS & \end{aligned} \quad (3.8)$$

Des détails sur ce type de transformations peuvent être trouvés dans ([9], chapitre 1.2).

On a

$$\int_{\Omega_0^S} \sigma^S(\mathbf{u}) : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w}^S \, d\mathbf{X} = \int_{\Omega_0^S} \mathbf{f}^S \cdot \mathbf{w}^S \, d\mathbf{X} + \int_{\Gamma_0} \sigma^S(\mathbf{u}) \mathbf{n}^S \cdot \mathbf{w}^S \, dS.$$

Alors

$$\int_{\Omega_0^S} \sigma^S(\mathbf{u}) : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w}^S \, d\mathbf{X} - \int_{\Omega_0^S} \mathbf{f}^S \cdot \mathbf{w}^S \, d\mathbf{X} = \int_{\Gamma_0} \sigma^S(\mathbf{u}) \mathbf{n}^S \cdot \mathbf{w}^S \, dS,$$

et aussi on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0^S} J(\sigma^F(\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon) \circ \varphi) F^{-T} : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w}^S d\mathbf{X} + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega_0^S} J\mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon \circ \varphi) \cdot \mathbf{w}^S d\mathbf{X} \\ & - \int_{\Omega_0^S} J(\mathbf{f}^F \circ \varphi) \cdot \mathbf{w}^S d\mathbf{X} = - \int_{\Gamma_0} w(\sigma^F(\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon) \mathbf{n}^F \circ \varphi) \cdot \mathbf{w}^S dS. \end{aligned}$$

En soustrayant l'équation (3.8) de (3.6) et en tenant compte de l'équation d'interface (2.12), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0^S} \sigma^S(\mathbf{u}) : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w}^S d\mathbf{X} - \int_{\Omega_0^S} \mathbf{f}^S \cdot \mathbf{w}^S d\mathbf{X} = \int_{\Omega_0^S} J(\sigma^F(\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon) \circ \varphi) F^{-T} : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w}^S d\mathbf{X} \\ & + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega_0^S} J\mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon \circ \varphi) \cdot \mathbf{w}^S d\mathbf{X} - \int_{\Omega_0^S} J(\mathbf{f}^F \circ \varphi) \cdot \mathbf{w}^S d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (3.9)$$

pour tout $\mathbf{w}^S : \Omega_0^S \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{w}^S = 0$ sur Γ_D .

• **Formulation du problème de Stokes pénalisé**

En multipliant l'équation précédente (3.4) par une fonction teste $\mathbf{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{w} = 0$ sur ∂D , on trouve :

$$\left(-\nabla \cdot \sigma^F(\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon) + \frac{1}{\epsilon} \chi_u^S \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) \right) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{f}^F \cdot \mathbf{w}.$$

En intégrant sur D , on trouve :

$$\int_D -\nabla \cdot \sigma^F(\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon) \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} + \frac{1}{\epsilon} \int_D \chi_u^S \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} = \int_D \mathbf{f}^F \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x}.$$

En utilisant la formule de Green, on trouve :

$$\int_D \sigma^F(\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon) : \nabla \mathbf{w} d\mathbf{x} - \int_{\partial D} \sigma^F(\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon) \mathbf{n}^F \cdot \nabla \mathbf{w} ds + \frac{1}{\epsilon} \int_D \chi_u^S \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} = \int_D \mathbf{f}^F \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x},$$

et comme $\mathbf{w} = 0$ sur ∂D , alors

$$\int_{\partial D} \sigma^F(\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon) \mathbf{n}^F \cdot \nabla \mathbf{w} ds = 0,$$

alors

$$\int_D \sigma^F(\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon) : \nabla \mathbf{w} d\mathbf{x} + \frac{1}{\epsilon} \int_D \chi_u^S \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} = \int_D \mathbf{f}^F \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x}, \quad (3.10)$$

pour $q : D \rightarrow \mathbb{R}$, on a $\nabla \cdot \mathbf{v}_\epsilon = 0$ dans D

alors :

$$\int_D (\nabla \cdot \mathbf{v}_\epsilon) q d\mathbf{x} = 0. \quad (3.11)$$

Donc, la formulation faible du problème pénalisé consiste à trouver :

le déplacement de la structure $\mathbf{u} : \bar{\Omega}_0^S \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} = 0$ sur Γ_D

la vitesse du fluide $\mathbf{v}_\epsilon : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}_\epsilon = 0$ sur ∂D

la pression du fluide $p_\epsilon : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Remarque 3.2 *Il faut souligner que les conditions aux limites sur l'interface (2.11), (2.12) n'apparaissent pas dans la formulation faible ci-dessus. La condition (2.11) sera approchée par le terme de pénalisation. La condition (2.12) peut être obtenue au sens faible de (3.9) et (3.10), si l'on impose une certaine régularité aux inconnues. Ceci sera fait après l'introduction des relations constitutives. Notez que l'équation (3.9) ne représente pas l'équation de la structure, mais la différence des équations de la structure et des fluides sur le domaine de la structure. Cette technique employée dans [5] permet d'éliminer (2.12).*

• **Relations constitutives :**

Soit $\mathbf{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, on introduit le :

$$\epsilon(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{w})^T),$$

si σ est un tenseur symétrique, on a :

$$\sigma : \nabla \mathbf{w} = \frac{1}{2} \sigma : \nabla \mathbf{w} + \frac{1}{2} \sigma^T : (\nabla \mathbf{w})^T = \sigma : \epsilon(\mathbf{w}).$$

Maintenant, nous présentons les relations constitutives de la structure et du fluide. Nous supposons que la structure vérifie l'équation d'élasticité linéaire, sous l'hypothèse de petites déformations. Le tenseur des contraintes de la structure écrite dans le cadre Lagrangien est :

$$\sigma^S = \lambda^S (\nabla \cdot \mathbf{u}) I + 2\mu^S \epsilon(\mathbf{u}).$$

tel que : $\lambda^S, \mu^S > 0$ sont les coefficients de Lamé et I est la matrice identité.

On a la forme bilinéaire dans le domaine non déformé :

$$a_S(\mathbf{u}, \mathbf{w}^S) = \int_{\Omega_0^S} \sigma^S(\mathbf{u}) : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w}^S d\mathbf{X}$$

Comme : $\sigma^S(\mathbf{u}) = \lambda^S (\nabla \cdot \mathbf{u}) I + 2\mu^S \epsilon(\mathbf{u})$, alors :

$$\begin{aligned} a_S(\mathbf{u}, \mathbf{w}^S) &= \int_{\Omega_0^S} [\lambda^S (\nabla \cdot \mathbf{u}) I + 2\mu^S \epsilon(\mathbf{u})] : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w}^S d\mathbf{X} \\ &= \int_{\Omega_0^S} (\lambda^S (\nabla \cdot \mathbf{u})) (\nabla \cdot \mathbf{w}^S) + 2\mu^S \epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{w}^S) d\mathbf{X}. \end{aligned}$$

On suppose que le fluide est Newtonien et que le tenseur des contraintes de Cauchy est donné par :

$$\sigma^F(\mathbf{v}, p) = -pI + 2\mu^F \epsilon(\mathbf{v}),$$

tel que : $\mu^F > 0$ est la viscosité du fluide et on a :

$$\begin{aligned} \sigma^F(\mathbf{v}, p) : \nabla \mathbf{w} &= \sigma^F(\mathbf{v}, p) : \epsilon(\mathbf{w}) \\ &= -(\nabla \cdot \mathbf{w}) p + 2\mu^F \epsilon(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{w}) \\ &= 2\mu^F \epsilon(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{w}) - (\nabla \cdot \mathbf{w}) p. \end{aligned}$$

On a par intégration sur D

$$\int_D \sigma^F(\mathbf{v}, p) : \nabla \mathbf{w} d\mathbf{x} = \int_D 2\mu^F \epsilon(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{w}) d\mathbf{x} - \int_D (\nabla \cdot \mathbf{w}) p d\mathbf{x}.$$

On note :

$$\begin{aligned} a_F(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \int_D 2\mu^F \epsilon(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{w}) d\mathbf{x}, \\ b_F(\mathbf{w}, p) &= - \int_D (\nabla \cdot \mathbf{w}) p d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

• **Paramétrisation et régularisation de la fonction caractéristique :**

Soit $j \in W^{1,\infty}(D)$ une paramétrisation de $\Omega_0^S \subset D$, i.e :

$$\begin{aligned} j(\mathbf{x}) &> 0, \mathbf{x} \in \Omega_0^S, \\ j(\mathbf{x}) &< 0, \mathbf{x} \in D \setminus \overline{\Omega_0^S}, \\ j(\mathbf{x}) &= 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega_0^S. \end{aligned}$$

La paramétrisation n'est pas forcément unique.

Soit $\mathbf{u} \in (W^{1,\infty}(\Omega_0^S))^2$ un Lipschitz de constante inférieure à 1. Notons comme précédemment $\Omega_u^S = \varphi(\Omega_0^S)$, où $\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X})$. \mathbf{u} sera le déplacement de la structure et on montrera qu'il satisfait la condition $\Omega_u^S \subset D$. Alors $\varphi : \overline{\Omega_0^S} \rightarrow \overline{\Omega_u^S}$ est bijectif bilipschitzien et :

$$j_u(\mathbf{y}) = \begin{cases} j(\mathbf{x}), & \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) \in \Omega_u^S, \\ 0, & \mathbf{y} \in \partial\Omega_u^S, \\ -dist(\mathbf{y}, \overline{\Omega_u^S}), & \mathbf{y} \notin \overline{\Omega_u^S}. \end{cases}$$

est une paramétrisation de Ω_u^S , et $j_u \in W^{1,\infty}(D)$.

Si H est la fonction de Heaviside $H : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ i.e :

$$H(r) = \begin{cases} 1, & r \geq 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases}$$

\widetilde{H} : est une régularisation de Lipschitz de H .

$H(j_u(\cdot))$: est la fonction caractéristique de Ω_u^S .

$\widetilde{H}(j_u(\cdot))$: est l'approximation de $H(j_u(\cdot))$.

La technique de paramétrisation pour les géométries inconnues a été introduite dans [20] et une discussion approfondie peut être trouvée en [23]. Elle a été employée dans [22] pour des problèmes d'optimisation de forme avec des équations elliptiques et en [17] pour les

équations de Navier-Stokes stationnaires.

Nous précisons maintenant comment choisir la régularisation lipschitz \widetilde{H} de l'application de Heaviside H .

Si Ω_0^S est un ouvert borné, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\Omega_0^\epsilon \subset\subset \Omega_0^S$, tel que $\Omega_0^\epsilon \rightarrow \Omega_0^S$ au sens de Hausdorff-pompeiu, pour $\epsilon \rightarrow 0$. Puisque $j : D \rightarrow \mathbb{R}$ est Lipschitz continu et $\Omega_0^\epsilon \subset\subset \Omega_0^S$, et $j > 0$ dans Ω_0^S , il existe $\mu_\epsilon > 0$ tel que $j(\mathbf{x}) \geq \mu_\epsilon > 0$, pour tout $\mathbf{x} \in \Omega_0^\epsilon$ on note $\Omega_u^\epsilon = (id + \mathbf{u})(\Omega_0^\epsilon)$, où id est l'application d'identité.

Par conséquent :

$$\mu_\epsilon \leq \min_{y \in \Omega_0^\epsilon} j_u(\mathbf{y}), \forall \mathbf{u} \in (W^{1,\infty}(\Omega_0^S))^2.$$

Alors on prend $\widetilde{H} = H^{\mu_\epsilon}$ la régularisation Yosida de H .

$$H^{\mu_\epsilon} = \begin{cases} 1 & r \geq \mu_\epsilon, \\ \frac{r}{\mu_\epsilon} & 0 \leq r \leq \mu_\epsilon, \\ 0 & r < 0, \end{cases}$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_u^\epsilon, H^{\mu_\epsilon}(j_u(\mathbf{x})) = 1.$$

Introduisons les espaces de Hilbert :

$$\mathbf{W}^S = \left\{ \mathbf{w}^S \in (H^1(\Omega_0^S))^2, \mathbf{w}^S = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\}$$

$$\mathbf{W} = (H_0^1(D))^2$$

$$Q = L_0^2(D) = \left\{ q \in L^2(D), \int_D q \, d\mathbf{x} = 0 \right\}$$

On suppose que $\mathbf{f}^F \in (L^2(D))^2$, et $\mathbf{f}^S \in (L^2(\Omega_0^S))^2$ pour $\mathbf{u} \in (W^{1,\infty}(\Omega_0^S))^2$ un donné, tel que :

$\|\mathbf{u}\|_{1,\infty,\Omega_0^S} < 1$ et $\mathbf{u} = 0$ sur Γ_D , on définit :

Vitesse du fluide $\mathbf{v}_\epsilon \in (H_0^1(D))^2$.

Pression du fluide $p_\epsilon \in Q$.

Déplacement de la structure $\mathbf{u}_\epsilon \in W^S$.

Déplacement de la structure du système faiblement couplé suivant d'EDP. De (3.10) on

a :

$$\begin{aligned} \int_D \sigma^F(\mathbf{v}, p) : \nabla \mathbf{w} d\mathbf{x} &= \int_D 2\mu^F \epsilon(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{w}) - (\nabla \cdot \mathbf{w})p d\mathbf{x} \\ &= \int_D 2\mu^F \epsilon(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{w}) d\mathbf{x} - \int_D (\nabla \cdot \mathbf{w})p d\mathbf{x} \\ &= a_F(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + b_F(\mathbf{w}, p), \end{aligned}$$

alors, $\forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}$

$$a_F(\mathbf{v}_\epsilon, \mathbf{w}) + b_F(\mathbf{w}, p_\epsilon) + \frac{1}{\epsilon} \int_D \widetilde{H}(j_u) \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} = \int_D \mathbf{f}^F \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} \quad (3.12)$$

$$b_F(\mathbf{v}_\epsilon, q) = 0, \forall q \in Q. \quad (3.13)$$

de (3.9) on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0^S} \sigma^S(\mathbf{u}) : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w}^S d\mathbf{X} - \int_{\Omega_0^S} \mathbf{f}^S \cdot \mathbf{w}^S d\mathbf{X} &= \int_{\Omega_0^S} J(\sigma^F(\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon) \circ \varphi) F^{-T} : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w}^S d\mathbf{X} \\ &\quad - \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega_0^S} J\mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon \circ \varphi) \cdot \mathbf{w}^S d\mathbf{X} - \int_{\Omega_0^S} J(\mathbf{f}^F \circ \varphi) \cdot \mathbf{w}^S d\mathbf{X} \end{aligned}$$

donc : $\forall \mathbf{w}^S \in \mathbf{W}^S$

$$\begin{aligned} a_S(\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{w}^S) &= \int_{\Omega_0^S} \mathbf{f}^S \cdot \mathbf{w}^S d\mathbf{X} + \int_{\Omega_0^S} J(\sigma^F(\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon) \circ \varphi) F^{-T} : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w}^S d\mathbf{X} \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega_0^S} J\mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon \circ \varphi) \cdot \mathbf{w}^S d\mathbf{X} \\ &\quad - \int_{\Omega_0^S} J(\mathbf{f}^F \circ \varphi) \cdot \mathbf{w}^S d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (3.14)$$

tel que :

$$F(\mathbf{X}) = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}(\mathbf{X}), J(\mathbf{X}) = \det F(\mathbf{X}).$$

De (3.10) et (3.9), en utilisant les relations constitutives et la régularisation de la fonction caractéristique, on obtient (3.12) et (3.14), respectivement.

Remarque 3.3 L'application \mathbf{u} apparaît dans le coefficient $\widetilde{H}(j_u)$ dans (3.12) ainsi que dans les termes de (3.14) issus des équations fluides du membre de droite. Mais les coefficients de a_F, b_F, a_S sont des constantes.

3.4 Existence de la solution de la formulation faible du problème pénalisé

On note par $\|\cdot\|_{m,s,\Omega}$ la norme usuelle de l'espace de Sobolev $W^{m,s}(\Omega)$. Lorsque $s = 2$, on utilise la notation bien connue $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

On note α' le nombre $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ tel que $2 < \alpha'$ et $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$.

Dans la suite, nous montrons quelques estimations pour les solutions du problème de Fluide (3.12)-(3.13) et respectivement du problème de structure (3.14). Suivant l'exemple [13], les propriétés ci-dessous sont vérifiées :

$$\exists \alpha_F > 0, \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}, \alpha_F \|\mathbf{w}\|_{1,2,D}^2 \leq a_F(\mathbf{w}, \mathbf{w}), \quad (3.15)$$

$$\exists M_F > 0, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{W}, |a_F(\mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq M_F \|\mathbf{v}\|_{1,2,D} \|\mathbf{w}\|_{1,2,D}, \quad (3.16)$$

$$\exists \beta > 0, \inf_{\substack{q \in Q \\ q \neq 0}} \sup_{\substack{\mathbf{w} \in \mathbf{W} \\ \mathbf{w} \neq 0}} \frac{b_F(\mathbf{w}, q)}{\|\mathbf{w}\|_{1,2,D} \|q\|_{0,2,D}} \geq \beta, \quad (3.17)$$

$$\exists N_F > 0, \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}, \forall q \in Q, |b_F(\mathbf{w}, q)| \leq \|\mathbf{w}\|_{1,2,D} \|q\|_{0,2,D}, \quad (3.18)$$

Quand $\mathbf{u} \in (W^{1,\infty}(\Omega_0^S))^2$ pour tout $0 < \delta < 1$, il existe $0 < \eta_\delta < 1$ tel que :

$$1 - \delta \leq \det(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \leq 1 + \delta, a.e. \mathbf{x} \in \Omega_0^S. \quad (3.19)$$

Pour tout \mathbf{u} satisfait $\|\mathbf{u}\|_{1,\infty,\Omega_0^S} \leq \eta_\delta$.

Notons que les coefficients $\widetilde{H}(j_u)$ est Lipschitz et $0 \leq \widetilde{H}(j_u(\mathbf{x})) \leq 1, \forall \mathbf{x} \in \overline{D}$.

Définissons $\phi : L^2(D) \rightarrow \mathbb{R}$ par $\phi(\mathbf{v}) = \frac{1}{\alpha}(|v_1|^\alpha + |v_2|^\alpha)$ où $1 < \alpha < 2$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.

Ceci est une fonction continue convexe, définissons :

$$V = \left\{ \mathbf{w} \in (H_0^1(D))^2, \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \text{ sur } D \right\},$$

et soit V' son dual.

Lemme 3.1 *L'opérateur $\frac{1}{\epsilon}\widetilde{H}(j_u)\partial\phi(\cdot) : V \longrightarrow V'$ est maximal monotone.*

Preuve.

Premièrement, on va montrer que l'opérateur suivant est maximal monotone :

$\frac{1}{\epsilon}\widetilde{H}(j_u)\partial\phi(\cdot) : V \longrightarrow V'$ défini par $\mathbf{w} \longrightarrow \frac{1}{\epsilon}\widetilde{H}(j_u)\partial\phi(\mathbf{w})$

telle que :

$$V = \left\{ \mathbf{w} \in H_0^1(D)^2; \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \text{ dans } D \right\}$$

$\partial\phi(\cdot)$: sous-différentiel.

Pour tout $\mathbf{x} \in \overline{D}$, $1 < \alpha < 2$, on défini :

$$\phi : L^2(D)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

tel que : $\mathbf{v} \longrightarrow \phi(\mathbf{v}) = \frac{1}{\alpha} (|v_1|^\alpha + |v_2|^\alpha)$, une fonction convexe et continue.

$\partial\phi(\cdot)$ à valeur dans $L^2(D)^2 \times L^2(D)^2$ est monotone (Voir la proposition 1.2).

De plus le coefficient $\frac{1}{\epsilon}\widetilde{H}(j_u)$ est positif, ce qui implique que l'opérateur $\frac{1}{\epsilon}\widetilde{H}(j_u)\partial\phi(\cdot)$ est monotone.

Deuxièmement pour prouver la maximalité de l'opérateur, nous utilisons le théorème de Minty qui équivaut à la proposition 1.3.

On introduit la régularisation de Moreau :

$$\phi_\delta : L^2(D)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui est Frèchet différentiable,

et $\nabla\phi_\delta \subset L^2(D)^2 \times L^2(D)^2$ est Lipschitzien, alors l'opérateur $\frac{1}{\epsilon}\widetilde{H}(j_u)\nabla\phi_\delta$ monotone et Lipschitzien dans $L^2(D)^2 \times L^2(D)^2$.

La restriction de l'opérateur $\frac{1}{\epsilon}\widetilde{H}(j_u)\nabla\phi_\delta$ sur $V \times V'$ est monotone et continue, donc $\frac{1}{\epsilon}\widetilde{H}(j_u)\nabla\phi_\delta$ est maximal monotone.

D'après le théorème de Minty :

$\exists! \mathbf{v}_\delta \in V$ solution de l'équation :

$$F\mathbf{v}_\delta + \frac{1}{\epsilon} \widetilde{H}(j_u) \nabla \phi_\delta(\mathbf{v}_\delta) = \mathbf{w},$$

tel que :

$\mathbf{w} \in V'$ et $F : V \longrightarrow V'$.

En tenant compte que

$$\nabla \phi_\delta(0) = 0.$$

On obtient,

$\{\mathbf{v}_\delta, \delta > 0\}$ est une borné de V et \mathbf{W} . Sur une sous-suite :

$$\mathbf{v}_\delta \rightharpoonup \hat{\mathbf{v}} \text{ faiblement dans } \mathbf{W} = H_0^1(D)^2.$$

$$\mathbf{v}_\delta \longrightarrow \hat{\mathbf{v}} \text{ fortement dans } L^2(D)^2.$$

Comme $(Id + \delta \partial \phi)^{-1}$ est non expansif dans $L^2(D)^2$ on a :

$$(Id + \delta \partial \phi)^{-1} \hat{\mathbf{v}} \longrightarrow \hat{\mathbf{v}} \text{ dans } L^2(D)^2$$

alors :

$$(Id + \delta \partial \phi)^{-1} \mathbf{v}_\delta \longrightarrow \hat{\mathbf{v}} \text{ dans } L^2(D)^2$$

pour $\delta \longrightarrow 0$.

$\partial \phi$ définie par tout dans $L^2(D)^2$ et aussi localement borné (Définition 1.14). Alors :

$$\partial \phi (Id + \delta \partial \phi)^{-1} (\mathbf{v}_\delta) = \nabla \phi_\delta(\mathbf{v}_\delta) \text{ est borné dans } L^2(D)^2..$$

On peut supposer que :

$$\partial \phi (Id + \delta \partial \phi)^{-1} (\mathbf{v}_\delta) \rightharpoonup \mathbf{z} \text{ faiblement dans } L^2(D)^2 \text{ sur une sous-suite.}$$

La demi-fermeture de $\partial\phi$ donne $\mathbf{z} \in \partial\phi(\hat{\mathbf{v}})$.

En passant à la limite dans l'équation on trouve :

$$\mathbf{w} \in F\hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{\epsilon}\widetilde{H}(j_{\mathbf{u}})\partial\phi(\hat{\mathbf{v}}).$$

■

Proposition 3.1 *Il existe une unique solution de (3.12)-(3.13), telle que : $\mathbf{v}_\epsilon \in H_0^1(D)^2, p_\epsilon \in Q$.*

Preuve. L'opérateur défini par la forme bilinéaire $a_F(.,.) : V \times V' \longrightarrow \mathbb{R}$ est maximal monotone, continue et coercive. Sa somme de l'opérateur défini par $a_F(.,.)$ et l'opérateur $\frac{1}{\epsilon}\widetilde{H}(j_{\mathbf{u}})\partial\phi(.)$ est par conséquent maximal monotone sur V' du fait de sa coercivité.

De telles propriétés sont discutées dans ([4], chapitre 2, page 37). Alors :

$\exists! \mathbf{v}_\epsilon$ solution faible dans V de :

$$a_F(\mathbf{v}_\epsilon, \mathbf{w}) + \frac{1}{\epsilon} \int_D \widetilde{H}(j_{\mathbf{u}})\partial\phi(\mathbf{v}_\epsilon) \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} = \int_D \mathbf{f}^F \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{w} \in V.$$

On obtient que l'élément de \mathbf{W}' défini par :

$$\mathbf{w} \longmapsto a_F(\mathbf{v}_\epsilon, \mathbf{w}) + \frac{1}{\epsilon} \int_D \widetilde{H}(j_{\mathbf{u}})\partial\phi(\mathbf{v}_\epsilon) \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} - \int_D \mathbf{f}^F \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x},$$

appartient à l'ensemble polaire (Définition 1.15) :

$$V^0 : \{h \in \mathbf{W}', \langle h, \mathbf{w} \rangle = 0, \forall \mathbf{w} \in V\}$$

En tenant compte de (3.17)-(3.18) i.e condition inf-sup de théorème de Babushka-Brezzi et du Lemme 4.1 page .58 [13],

$\exists! p_\epsilon \in Q$ telle que (3.12) soit vérifier.

On sait que $\mathbf{v}_\epsilon \in V$ i.e. $\nabla \cdot \mathbf{v}_\epsilon = 0$ dans D pour $\mathbf{v}_\epsilon \in H_0^1(D)^2$ donc :

$$\forall q \in Q; b_F(\mathbf{v}_\epsilon, q) = - \int_D (\nabla \cdot \mathbf{w})q d\mathbf{x}.$$

Le choix de l'opérateur de pénalisation est justifié par l'expression de $\partial\phi$ le sous-différentiel de $\phi(\mathbf{v}) = \frac{1}{\alpha}(|v_1|^\alpha + |v_2|^\alpha)$ et on a :

$$\frac{1}{\epsilon} \int_D \widetilde{H}(j_u) \partial\phi(\mathbf{v}_\epsilon) \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} = \frac{1}{\epsilon} \int_D \widetilde{H}(j_u) \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x}.$$

■

Proposition 3.2 Soit D, Ω_0^S des ensembles ouverts bornés de classe C^2 .

On suppose que $\mathbf{f}^F \in L^{\alpha'}(D)^2$ et $\mathbf{f}^S \in L^{\alpha'}(\Omega_0^S)^2$, alors :

$\mathbf{v}_\epsilon \in W^{2,\alpha'}(D)^2, p_\epsilon \in W^{1,\alpha'}(D)$ et $\mathbf{u}_\epsilon \in W^{2,\alpha'}(\Omega_0^S)^2$ tels que : $\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon$ et \mathbf{u}_ϵ sont les solutions de (3.12)-(3.14).

Preuve. L'existence de la solution faible $\mathbf{v}_\epsilon \in H_0^1(D)^2$ et $p_\epsilon \in Q$ des équations (3.12)-(3.13) a déjà été discuté dans la proposition 3.1.

On a $\mathbf{v}_\epsilon \in H_0^1(D)^2$ alors $\mathbf{v}_\epsilon \in L^\alpha(D)^2$ car $\alpha < 2$.

$$\begin{aligned} \int_D (|\mathbf{v}_\epsilon|^{\alpha-1})^{\alpha'} d\mathbf{x} &= \int_D (|\mathbf{v}_\epsilon|^{\alpha-1})^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} d\mathbf{x} \\ &= \int_D (|\mathbf{v}_\epsilon|)^\alpha d\mathbf{x} < \infty. \end{aligned} \quad (3.20)$$

D'où

$$|\mathbf{v}_\epsilon|^{\alpha-1} \in L^{\alpha'}(D)^2.$$

D'autre part, on a $0 \leq \widetilde{H}(j_u(x)) \leq 1$ Lipschitz, $\forall x \in \overline{D}$, alors $\frac{1}{\epsilon} \widetilde{H}(j_u) \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) \in L^{\alpha'}(D)^2$.

Comme, on a :

$$\begin{cases} |\mathbf{v}_\epsilon|^{\alpha-1} \in L^{\alpha'}(D)^2, \\ \frac{1}{\epsilon} \widetilde{H}(j_u) \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) \in L^{\alpha'}(D)^2. \end{cases}$$

Alors $\forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}$

$$\begin{aligned} a_F(\mathbf{v}_\epsilon, \mathbf{w}) + b_F(\mathbf{w}, p_\epsilon) &= \int_D \left(\mathbf{f}^F - \frac{1}{\epsilon} \widetilde{H}(j_u) \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) \right) \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} \\ b_F(\mathbf{v}_\epsilon, q) &= 0, \forall q \in Q. \end{aligned}$$

On trouve que $(\mathbf{v}_\epsilon, p_\epsilon)$ solution de problème de Stokes. Donc le résultat de régularité pour Stokes donne :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_\epsilon \in W^{2,\alpha'}(D)^2, \\ p_\epsilon \in W^{1,\alpha'}(D). \end{cases}$$

L'existence et la régularité des \mathbf{u}_ϵ sont une conséquence des résultats standards pour les systèmes elliptiques. ■

3.5 Convergence de la solution du problème pénalisé vers la solution du problème original

On définit l'opérateur non linéaire :

$$T_\epsilon : \left\{ \mathbf{u} \in \left(W^{1,\infty}(\Omega_0^S) \right)^2, \|\mathbf{u}\|_{1,\infty,\Omega_0^S} < 1, \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\} \longrightarrow \left(W^{1,\infty}(\Omega_0^S) \right)^2$$

$$\mathbf{u} \longrightarrow T_\epsilon(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_\epsilon$$

Nous rappelons que nous avons supposé $\Omega_u^S \subset D$. Dans la suite nous allons prouver que T_ϵ est bien défini et qu'il admet au moins un point fixe sous quelques hypothèses supplémentaires.

Proposition 3.3 $\forall \epsilon > 0$, l'opérateur non linéaire T_ϵ a au moins un point fixe dans :

$$B_\delta = \left\{ \mathbf{u} \in W^{1,\infty}(\Omega_0^S)^2, \|\mathbf{u}\|_{1,\infty,\Omega_0^S} \leq \eta_\delta, \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\}.$$

Si $\mathbf{f}^F, \mathbf{f}^S$ sont "petits" dans leurs propres normes.

Preuve. En utilisant le Théorème du point fixe de Schauder. On va montrer que $T_\epsilon(B_\delta) \subset B_\delta$ et que T_ϵ est continue.

Etape 01 : $T_\epsilon(B_\delta) \subset B_\delta$

Le résultat de régularité de la proposition 3.2 peut être complété par des estimations exprimant la dépendance bornées des solutions \mathbf{v}_ϵ , p_ϵ et \mathbf{u}_ϵ sur les données \mathbf{f}^F , \mathbf{f}^S :

$$\|\mathbf{v}_\epsilon\|_{2,\alpha',D} + \|p_\epsilon\|_{1,\alpha',D} \leq c_1 \left[\|\mathbf{f}^F\|_{0,\alpha',D} + \frac{1}{\epsilon} \|\widetilde{H}(j_u)\mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon)\|_{0,\alpha',D} \right], \quad (3.21)$$

$$\|\mathbf{u}_\epsilon\|_{2,\alpha',\Omega_0^S} \leq c_2 \left[\|\mathbf{v}_\epsilon\|_{2,\alpha',D} + \|p_\epsilon\|_{1,\alpha',D} + \|\mathbf{f}^S\|_{0,\alpha',\Omega_0^S} + \|\mathbf{f}^F\|_{0,\alpha',D} \right], \quad (3.22)$$

$\epsilon > 0$ est fixe et les constantes c_1, c_2 sont indépendantes de ϵ et $\mathbf{u} \in B_\delta$.

On fait l'estimation de $\widetilde{H}(j_u)\mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon)$:

on a :

$0 \leq \widetilde{H}(j_u(\mathbf{x})) \leq 1$ et $\mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) = |\mathbf{v}_\epsilon|^{\alpha-1} \text{sgn}(\mathbf{v}_\epsilon)$, alors :

$$\begin{aligned} |\widetilde{H}(j_u)\mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon)|^{\alpha'} &= |\widetilde{H}(j_u)|^{\alpha'} |\mathbf{v}_\epsilon|^{\alpha-1} |\text{sgn}(\mathbf{v}_\epsilon)|^{\alpha'} \\ &\leq 1 \cdot |\mathbf{v}_\epsilon|^{(\alpha-1)\alpha'} \cdot 1 = |\mathbf{v}_\epsilon|^{(\alpha-1)\frac{\alpha}{\alpha-1}} = |\mathbf{v}_\epsilon|^\alpha. \end{aligned}$$

Alors

$$|\widetilde{H}(j_u)\mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon)|^{\alpha'} \leq |\mathbf{v}_\epsilon|^\alpha.$$

En intégrant sur D :

$$\int_D |\widetilde{H}(j_u)\mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon)|^{\alpha'} d\mathbf{x} \leq \int_D |\mathbf{v}_\epsilon|^\alpha d\mathbf{x}.$$

On sait que $\text{supp}(\widetilde{H}(j_u)) \subset \Omega_u^S$, alors :

$$\begin{aligned} \int_D |\widetilde{H}(j_u)\mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon)|^{\alpha'} d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_u^S} |\widetilde{H}(j_u)\mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon)|^{\alpha'} d\mathbf{x} \\ &\leq \int_{\Omega_u^S} |\mathbf{v}_\epsilon|^\alpha d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

alors dans $L^{\alpha'}(D)$, on a :

$$\begin{aligned} \left(\int_D |\widetilde{H}(j_u) \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon)|^{\alpha'} dx \right)^{\frac{1}{\alpha'}} &\leq \left(\int_{\Omega_u^S} |\mathbf{v}_\epsilon|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha'}} \\ \|\widetilde{H}(j_u) \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon)\|_{0,\alpha',D} &\leq \left(\int_{\Omega_u^S} |\mathbf{v}_\epsilon|^\alpha dx \right)^{\frac{\alpha}{\alpha'}} \\ &\leq \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{0,\alpha,\Omega_u^S}^{\frac{\alpha}{\alpha'}} \\ &\leq \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{0,\alpha,\Omega_u^S}^{\alpha \cdot \frac{(\alpha-1)}{\alpha}} \\ &\leq \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{0,\alpha,\Omega_u^S}^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

On utilise (3.21), (3.22), on trouve :

$$\|\mathbf{v}_\epsilon\|_{2,\alpha',D} + \|p_\epsilon\|_{1,\alpha',D} \leq c_1 \left[\|\mathbf{f}^F\|_{0,\alpha',D} + \frac{1}{\epsilon} \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{0,\alpha,\Omega_u^S}^{\alpha-1} \right].$$

Alors :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\epsilon\|_{2,\alpha',\Omega_0^S} &\leq c_2 \left[\left[\frac{1}{\epsilon} \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{0,\alpha,\Omega_u^S}^{\alpha-1} + \|\mathbf{f}^S\|_{0,\alpha',\Omega_0^S} + \|\mathbf{f}^F\|_{0,\alpha',D} \right] + \|\mathbf{f}^F\|_{0,\alpha',D} \right] c_1 \\ &\leq c_2 c_1 \frac{1}{\epsilon} \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{0,\alpha,\Omega_u^S}^{\alpha-1} + c_2 c_1 \|\mathbf{f}^F\|_{0,\alpha',D} + c_2 \|\mathbf{f}^S\|_{0,\alpha',\Omega_0^S} + c_2 \|\mathbf{f}^F\|_{0,\alpha',D} \\ &\leq c_2 c_1 \frac{1}{\epsilon} \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{0,\alpha,\Omega_u^S}^{\alpha-1} + (c_1 c_2 + c_2) \|\mathbf{f}^F\|_{0,\alpha',D} + c_2 \|\mathbf{f}^S\|_{0,\alpha',\Omega_0^S} \\ &\leq c \left[\frac{1}{\epsilon} \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{0,\alpha,\Omega_u^S}^{\alpha-1} + \|\mathbf{f}^S\|_{0,\alpha',\Omega_0^S} + \|\mathbf{f}^F\|_{0,\alpha',D} \right]. \end{aligned}$$

On pose que $\mathbf{w} = \mathbf{v}_\epsilon \in \mathbf{W}$ dans (3.12) on trouve :

$$a_F(\mathbf{v}_\epsilon, \mathbf{v}_\epsilon) + \frac{1}{\epsilon} \int_D \widetilde{H}(j_u) \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) \cdot \mathbf{v}_\epsilon dx = \int_D \mathbf{f}^F \cdot \mathbf{v}_\epsilon dx. \quad (3.23)$$

Comme $\widetilde{H}(j_u) \geq 0$ et $\mathcal{P} \cdot \mathbf{v}_\epsilon \geq 0$, alors :

$$\int_D \widetilde{H}(j_u) \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) \cdot \mathbf{v}_\epsilon dx \geq 0.$$

On utilise la coercivité de $a_F(\cdot, \cdot)$ de (3.15) :

$$\alpha_F \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{1,2,D} \leq a_F(\mathbf{v}_\epsilon, \mathbf{v}_\epsilon),$$

alors : $\alpha_F \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{1,2,D} \leq \int_D \mathbf{f}^F \cdot \mathbf{v}_\epsilon d\mathbf{x}$.

En appliquant l'inégalité de Cauchy :

$$\begin{aligned} \alpha_F \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{1,2,D}^2 &\leq \|\mathbf{f}^F\|_{0,2,D} \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{0,2,D} \\ &\leq \|\mathbf{f}^F\|_{0,2,D} \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{1,2,D} \\ \alpha_F \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{1,2,D} &\leq \|\mathbf{f}^F\|_{0,2,D}, \end{aligned}$$

pour $\alpha < 2$, alors :

$$\|\mathbf{u}_\epsilon\|_{2,\alpha',\Omega_0^S} \leq c \left[\|\mathbf{f}^F\|_{0,\alpha',D} + \|\mathbf{f}^S\|_{0,\alpha',\Omega_0^S} + \frac{1}{\epsilon} \|\mathbf{f}^F\|_{0,\alpha',D}^{\alpha-1} \right],$$

$\forall \epsilon > 0$ et fixé, si $\mathbf{f}^F, \mathbf{f}^S$ sont "petits" dans leurs propres normes .

Alors :

$$T_\epsilon(B_\delta) \subset B_\delta.$$

Etape 02 : T_ϵ continue

On peut utiliser le théorème de plongement de Sobolev qui donne que \mathbf{u}_ϵ est Lipschitzien en chaque composante. Le théorème de Sobolev assure aussi la compacité.

Il suffit de montrer que l'opérateur T_ϵ est continue dans B_δ (car on a la compacité de théorème de Sobolev). On commence avec le coefficient $\tilde{H} = H^{\mu_\epsilon}$ (on a déjà parlé de μ_ϵ).

Soit u_n est une suite dans $W^{1,\infty}(\Omega_0^S)^2$ telle que :

$u_n \rightarrow u$ fortement dans $W^{1,\infty}(\Omega_0^S)^2$ au sens de Hausdorff-Pompieu.

On va montrer que : $\overline{\Omega}_{u_n}^S \rightarrow \overline{\Omega}_u^S$ i.e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Omega}_{u_n}^S = \overline{\Omega}_u^S$$

On commence par :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Omega}_{u_n}^S \subset \overline{\Omega}_u^S?$$

D'après la compacité de la métrique de Hausdorff-Pompieu, la limite existe sur une sous-suite (à nouveau désigné par n) et on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Omega}_{u_n^S} = \left\{ y \in \mathbb{R}^2, \exists x_n \in \Omega_0^S, y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + u_n(x_n)) \right\}.$$

Supposons que $x_n \rightarrow x_0$ pour $n \rightarrow \infty$, alors :

$$\begin{aligned} y &= \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + u_n(x_n)) \\ &= x_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_n) \end{aligned}$$

On ajoute :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_0) - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_0),$$

on trouve :

$$\begin{aligned} y &= x_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_0) + \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_0), \\ y &= x_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_0) + \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n(x_n) - u_n(x_0)). \end{aligned}$$

On sait que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n(x_n) - u_n(x_0)) = 0$$

alors :

$$y = x_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_0)$$

On a :

$$u_n \rightarrow u$$

alors :

$$y = x_0 + \mathbf{u}(x_0).$$

Par la propriété Lipschitz uniforme de $u_n \in B_\delta$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Omega}_{u_n^S} \subset \overline{\Omega}_u^S.$$

On montre l'inclusion inverse i.e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Omega}_{u_n}^S \supset \overline{\Omega}_u^S ?$$

$\forall z \in \Omega_0^S; y \in \Omega_u^S$, telle que :

$$\begin{aligned} y &= z + \mathbf{u}(z) \\ &= z + \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (z + u_n(z)). \end{aligned}$$

Comme la limite est unique, la convergence est valide sans prendre de sous-suites.

D'après les propriétés de régularité de Ω_u^S et $\Omega_{u_n}^S$, on a la convergence :

$$\overline{\Omega}_{u_n}^S \longrightarrow \overline{\Omega}_u^S,$$

est équivalente à la convergence des ensemble ouverts $\overline{\Omega}_{u_n}^S \longrightarrow \overline{\Omega}_u^S$ au sens complémentaire de Hausdorff-Pompieu [23],p 469.

Grâce à Γ -Propriété de la convergence complémentaire de Hausdorff-Pompieu des ensembles ouverts et soit $\mathcal{K} \subset \Omega_u^S$ compact alors $\mathcal{K} \subset \Omega_{u_n}^S$ pour n assez grand, [23],p 465.

Si $y \in \mathcal{K}$, $\exists x_n \in \Omega_{u_n}^S$, $\exists x \in \Omega_u^S$, telle que :

$$\begin{aligned} x_n &= (I + u_n)^{-1}(y), \\ x &= (I + u)^{-1}(y). \end{aligned}$$

On peut supposer que $x_n \longrightarrow z$ (limite de sous suite).

D'après la propriété de Lipschitz uniforme de u_n , on a :

$$(I + u_n)(z) - (I + u_n)(x_n) \longrightarrow 0$$

alors :

$$\begin{aligned} y &= (I + u_n)(x_n) - (I + u_n)(x) \\ &= (I + \mathbf{u})(z) \end{aligned}$$

on a $z = x$ car $I + u$ univoque, alors :

$$x_n \longrightarrow x$$

donc :

$$(I + u_n)^{-1}(y) \longrightarrow (I + \mathbf{u})^{-1}(y), \quad \forall y \in \mathcal{K},$$

et :

$$j_{u_n}(y) \longrightarrow j_u(y), \quad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Comme \mathcal{K} peut être « étendu » à Ω_u^S , la définition de j_u montre que :

$j_{u_n} \longrightarrow j_u$ dans D , alors :

$$H^{\mu_\epsilon}(j_{u_n}) \longrightarrow H^{\mu_\epsilon}(j_u).$$

a.e dans D .

La bornitude de \widetilde{H} donne :

$$H^{\mu_\epsilon}(j_{u_n}) \longrightarrow H^{\mu_\epsilon}(j_u),$$

fortement dans $L^r(D)$, pour $r \geq 1$.

Comme $u_n, u \in B_\delta$ et on note $v_n, v, p_n, p, T_\epsilon u_n, T_\epsilon u$, (*efixe*) sont des solutions de système (3.12), (3.13), (3.14) bornées dans leurs espaces, uniformément en n . On peut prendre des sous suites convergentes faibles notée encore n .

L'opérateur de pénalisation $\mathcal{P}(v_n) \longrightarrow \mathcal{P}(v)$ uniformément.

D'après la propriété de convergence de \widetilde{H} , on peut passer à la limite dans l'intégrale de pénalisation. Ceci permet de passer à la limite dans (3.12), (3.14) et de montrer que v, p sont bien les bornes de \mathbf{v}_n, p_n et que :

$$T_\epsilon u_n \longrightarrow T_\epsilon u$$

dans B_δ .

D'où l'opérateur T_ϵ est continue dans B_δ et le théorème de point fixe de Schauder réalise

la preuve

■

Remarque 3.4 *La solution de $T_\epsilon u = u$ en générale n'est pas unique car T_ϵ est non linéaire. L'argumentation ci-dessus peut être comparée à l'approche de [15], bien que les équations pénalisées, les domaines géométriques et les espaces fonctionnels soient différents.*

Proposition 3.4 *On a $\{\mathbf{v}_\epsilon\}$ borné dans $H^1(D)^2$ et :*

$$\frac{1}{\epsilon} \int_D \widetilde{H}(j_{u_\epsilon}) |\mathbf{v}_\epsilon|^\alpha d\mathbf{x} \leq \frac{1}{2\alpha_F} \|\mathbf{f}^F\|_{0,2,D}^2, \quad (3.24)$$

pour tout $\epsilon > 0$. De plus $\{\mathbf{u}_\epsilon\}$ est borné dans $W^{1,\infty}(\Omega_0^S)^2$.

Preuve. De (3.23), on a :

$$a_F(\mathbf{v}_\epsilon, \mathbf{v}_\epsilon) + \frac{1}{\epsilon} \int_D \widetilde{H}(j_u) \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) \cdot \mathbf{v}_\epsilon d\mathbf{x} = \int_D \mathbf{f}^F \cdot \mathbf{v}_\epsilon d\mathbf{x}.$$

De (3.15), on a encore :

$$a_F(\mathbf{v}_\epsilon, \mathbf{v}_\epsilon) \geq \alpha_F \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{1,2,D}^2.$$

Alors

$$\alpha_F \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{1,2,D}^2 + \frac{1}{\epsilon} \int_D \widetilde{H}(j_u) \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) \cdot \mathbf{v}_\epsilon d\mathbf{x} \leq a_F(\mathbf{v}_\epsilon, \mathbf{v}_\epsilon) + \frac{1}{\epsilon} \int_D \widetilde{H}(j_u) \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) \cdot \mathbf{v}_\epsilon d\mathbf{x}.$$

donc

$$\alpha_F \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{1,2,D}^2 + \frac{1}{\epsilon} \int_D \widetilde{H}(j_u) \mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) \cdot \mathbf{v}_\epsilon d\mathbf{x} \leq \int_D \mathbf{f}^F \cdot \mathbf{v}_\epsilon d\mathbf{x}$$

Par conséquent : $\{\mathbf{v}_\epsilon\}$ est borné dans $H^1(D)^2$.

D'autre part, on a par définition de \mathcal{P} ,

$$\mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon) = |\mathbf{v}_\epsilon|^{\alpha-1} \text{sgn}(\mathbf{v}_\epsilon)$$

alors

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon)|^{\alpha'} &= \left| |\mathbf{v}_\epsilon|^{\alpha-1} \text{sgn}(\mathbf{v}_\epsilon) \right|^{\alpha'} \\ &\leq |\mathbf{v}_\epsilon|^{(\alpha-1)\alpha'} = |\mathbf{v}_\epsilon|^{(\alpha-1)\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\ &\leq |\mathbf{v}_\epsilon|^\alpha, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{\epsilon} \int_D \widetilde{H}(j_u) |\mathcal{P}(\mathbf{v}_\epsilon)|^{\alpha'} d\mathbf{x} \leq \frac{1}{\epsilon} \int_D \widetilde{H}(j_u) |\mathbf{v}_\epsilon|^\alpha d\mathbf{x}.$$

donc

$$\alpha_F \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{1,2,D}^2 + \frac{1}{\epsilon} \int_D \widetilde{H}(j_u) |\mathbf{v}_\epsilon|^\alpha d\mathbf{x} \leq \int_D \mathbf{f}^F \cdot \mathbf{v}_\epsilon d\mathbf{x}.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy, on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha_F \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{1,2,D}^2 + \frac{1}{\epsilon} \int_D \widetilde{H}(j_u) |\mathbf{v}_\epsilon|^\alpha d\mathbf{x} &\leq \|\mathbf{f}^F\|_{0,2,D} \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{0,2,D} \\ &\leq \frac{1}{2\alpha_F} \|\mathbf{f}^F\|_{0,2,D}^2 + \frac{\alpha_F}{2} \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{0,2,D}^2 \\ \alpha_F \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{1,2,D}^2 - \frac{\alpha_F}{2} \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{0,2,D}^2 + \frac{1}{\epsilon} \int_D \widetilde{H}(j_u) |\mathbf{v}_\epsilon|^\alpha d\mathbf{x} &\leq \frac{1}{2\alpha_F} \|\mathbf{f}^F\|_{0,2,D}^2, \end{aligned}$$

alors

$$\frac{\alpha_F}{2} \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{0,2,D}^2 + \frac{1}{\epsilon} \int_D \widetilde{H}(j_u) |\mathbf{v}_\epsilon|^\alpha d\mathbf{x} \leq \frac{1}{2\alpha_F} \|\mathbf{f}^F\|_{0,2,D}^2,$$

comme $\frac{\alpha_F}{2} \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{0,2,D}^2 \geq 0$, alors :

$$\frac{1}{\epsilon} \int_D \widetilde{H}(j_u) |\mathbf{v}_\epsilon|^\alpha d\mathbf{x} \leq \frac{1}{2\alpha_F} \|\mathbf{f}^F\|_{0,2,D}^2.$$

La bornitude de $\{\mathbf{u}_\epsilon\}$ est donnée par $u_\epsilon \in B_\delta$, d'après la proposition 3.3. ■

Remarque 3.5 *On peut déduire des propriétés de convergence faibles de la proposition 3.4. Les expériences de la section suivante montrent que notre méthode a également de bonnes propriétés de convergence numérique et de stabilité. D'un point de vue théorique, il est nécessaire de clarifier également l'hypothèse selon laquelle les données $\mathbf{f}^F, \mathbf{f}^S$ doivent être "petites", ce qui peut induire la même dépendance indésirable à $\epsilon > 0$.*

Proposition 3.5 *Si $u_\epsilon \rightarrow u^*$ faiblement dans $W^{2,\alpha'}(\Omega_0^S)$; $\mathbf{v}_\epsilon \rightarrow v^*$ faiblement dans $W^{2,\alpha'}(D)$ et $p_\epsilon \rightarrow p^*$ faiblement dans $W^{1,\alpha'}(D)$. Alors v^*, p^* satisfait (2.7), (2.8) dans $\Omega_{u^*}^F$ et v^* satisfait (2.11) sur Γ_{u^*} , (2.9), (2.10). L'application u^* satisfait (2.5), (2.6).*

Preuve. Voir [16] ■

Bibliographie

- [1] **R.A.Adams**, Sobolev Spaces, Academic Press, San Francisco, London, 1975.
- [2] **G. Allaire**, Approximation numérique et optimisation. Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique, 2019.
- [3] **H. H. Bauschke, P. L. Combettes**. Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces .
- [4] **V. Barbu**. Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces, Noordhoff, Leyden, 1976.
- [5] **P.J. Blanco, R.A. Feijoo, E.A. Dari**. A variational framework for fluid-solid interaction problems based on immersed domains : theoretical bases. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 197 :2353-2371, 2008.
- [6] **H.Brézis**. Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, 1973.
- [7] **H.Brézis**. Analyse fonctionnelle, théorie et applications, dunod, Paris, 1999. Nouvelle présentation, 2005.
- [8] **H.Brézis**. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, New York, Heidelberg, London, 2010.
- [9] **P. Ciarlet**. Elasticité tridimensionnelle, Masson, 1986.

- [10] **C. Conca, M. Duran, J. Planchard**, A quadratic eigenvalue problem involving Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 100 (3) :1295-313, 1992.
- [11] **M. Discacciati**, Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Cour Master MA, EPFL, Lausanne, 2010.
- [12] **M. Fabre**. Méthodes de domaines fictifs pour les éléments finis, application à la mécanique des structures. PhD thesis, Lyon, INSA, 2015.
- [13] **P. Girault, P.A. Raviart**, Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Springer, New York, 1986.
- [14] **R.Glowinski, T.W.Pan, T.I.Hesla, D.D.Joseph, J.Périaux**. A fictitious domain approach to the direct numerical simulation of incompressible viscous flow past moving rigid bodies : Application to particulate flow. *Journal of Computational Physics.* 169 (2) : 363-426, 2000
- [15] **C. Grandmont**. Existence et unicité de solutions d'un problème de couplage fluide-structure bidimensionnel stationnaire. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 326 :651-656, 1998.
- [16] **A. Halanay, C. Murea, and D. Tiba**. Existence and approximation for a steady fluid-structure interaction problem using fictitious domain approach with penalization. *5(1-2) :120-147*, 2013.
- [17] **A. Halanay, D. Tiba**. Shape optimization for stationary Navier-Stokes equations, *Control and Cybernetics*, 38 :1359-1374, 2009.
- [18] **F. Ilinca, J.F. Héту**. A finite element immersed boundary method for fluid flow around rigid objects. *International Journal for Numerical Methods in Fluids.* 65(7) : 856-875,

- [19] **V.D. Kopčenov**. Approximate solutions of the dirichlet problem by the method of fictive domains. *Differential Equations*, 4(1), 1968.
- [20] **R. Makinen, P. Neittaanmaki, D. Tiba**. On a FIxed domain approach for shape optimization problem, In *Computational and Applied Mathematics II : Differential Equations*, W.F. Ames and P.J. van der Nower editors, pp. 317–326, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [21] **C.Murea**. Schémas numériques stables pour fluides, structures et leurs interactions. *Collection Mécaniques Des Fluides*. ISTE, 2017.
- [22] **P. Neittaanmaki, A. Pennanen, D. Tiba**. Fixed domain approaches in shape optimization problems with Dirichlet boundary conditions. *Inverse Problems* 25 :1-18, 2009.
- [23] **P. Neittaanmaki, J. Sprekels, D. Tiba**. Optimization of elliptic systems. Theory and applications. *Springer Monographs in Mathematics*. Springer, New York, 2006.
- [24] **C. S. Peskin**. Flow patterns around heart valves : A numerical method. *Journal of Computational Physics*, 10(2) :252–271, 1972.
- [25] **C. Peskin**. The immersed boundary method. *ACTA Numer.* 11 :479-517, 2002.
- [26] **S. Piperno**. Simulation numérique de phénomènes d’interaction fluide-structure. Thèse, ENPC, jun 1995.
- [27] **I. Ramière**. Méthodes de domaine fictif pour des problèmes elliptiques avec conditions aux limites générales en vue de la simulation numérique d’écoulements diphasiques. PhD thesis, Université d’Aix-Marseille I, 2006.
- [28] **P. A. Raviart, J. M. Thomas**, Introduction à l’analyse numérique des équations aux dérivées partielles.

- [29] **J.Y. Renou**, Une méthode eulérienne de calcul numérique de forces fluide-élastiques. Thèse de doctorat : Université Paris VI, 1998.
- [30] **R. Rockafellar**. Convex Analysis princeton university press princeton. New Jersey Google Scholar, 1970.
- [31] **N. Saito and G. Zhou**. Analysis of the fictitious domain method with an l_2 -penalty for elliptic problem. Numerical functional analysis and optimization, 36(4) : 501-527, 2015.
- [32] **V.K. Saul'ev**. On the solution of some boundary value problems on high performance computers by fictitious domain method. Siberian Math. Journal, 4(4) :912-925, 1963.
- [33] **S.W. Su, M.C. Lai, L. Chao-An**. An immersed boundary technique for simulating complex flows with rigid boundary. Computers and Fluids. 36(2) :313-324.
- [34] **E. Zeidler**, Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, I : Fixed Point Theorems, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [35] **G. Zhou and N. Saito**. Analysis of the fictitious domain method with penalty for elliptic problem. Japan journal of industrial and applied mathematics, 31(1) :57-85, 2014.