République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre :
№ de séries :

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Inclusion différentielle régis par le sous différentiel de Clarke dans un espace de Hilbert

Présenté par :

- **Bouhama Moufida** - **Boulmelh Aicha**

Soutenu le . / . /.

Devant le jury :

Président	: F. Aliouane	MCA Université de Jijel
Encadreur	: S. Melit	MCB Université de Jijel
Examinateur	: H. Menigher	MAB Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

DÉDICACES

Je dédie ce travail :

A mon cher père ***Bouhama Ferhat****;*

A ma chère mère ***Bouhama Fatiha****;*

A mon mari et sa famille,

Qui m'ont soutenu et encouragé pendant ces années d'études.

A mes frères et mes sœurs qui m'ont toujours encouragé, et à qui je vous souhaite plus de succès, de joie et de bonheur

A ma chère binôme, ***Aicha***

Merci pour ta patience, ta tolérance, et pour les bons moments qu'on a partagé.

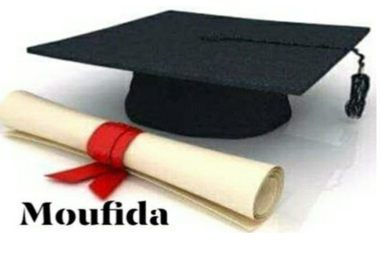
A mes chères amies, ***Rim Herrati, Houria Tibigui, Besma Boukhalfa et Besma Mekhlouf***

Merci pour les très bons moments qu'on avait passé ensemble.

A toute ma famille,

A tous mes autres amies,

Que dieu nous garde si tendres et aimantes les une envers les autres.



DÉDICACES

Je dédie ce travail :

A mon cher père ***Ahcene Boulmelh****;*

A ma chère mère ***Fatima Madi****;*

Qui m'ont soutenu et encouragé pendant ces années d'études.

A mes frères ***Abd Erraouf, Islam, Walid*** *et mes belles sœurs* ***Nouara, Karima, Saliha, Aya, Hibat Errahman,*** *qui m'ont toujours encouragé, et à qui je vous souhaite plus de succès, de joie et de bonheur*

A ma sœur ***Ismahan****, son mari* ***Abd Elghani*** *et leurs petit Angle* ***Iyad***

A ma chère binôme, ***Moufida***

Merci pour ta patience, ta tolérance, et pour les bons moments qu'on a partagé

A mes chères amies, ***Hasna, Rim, Houria, Besma, Samia, Sara, Iman, Assia, Aida, donia May, Fatiha, Samiha, Souad,*** *et ma cousine* ***Iman****.*

Merci pour les très bons moments qu'on avait passé ensemble.

A toute ma famille,

A tous mes autres amies,

Que dieu nous garde si tendres et aimantes les une envers les autres.

REMERCIEMENTS

En premier lieu, nous remercions ALLAH le tout puissant pour la volonté et la santé qu'il nous a donné tout au long des années de nos études pour terminer ce mémoire.

Aussi, notre plus grand remerciement à Madame S. MELIT qui a dirigé et suivi notre travail avec une attention soutenue et beaucoup de patience.

Nos remerciements également aux membres du jury pour avoir l'honneur de critiquer, corriger et noter notre travail.

Enfin, c'est avec beaucoup de plaisir que nous voulons remercier profondément tout les membres de nos familles pour leurs conseils et encouragements durant toutes les années de nos études sans oublier tous nos collègues.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude de l'existence de solutions pour une inclusion différentielle du premier ordre ainsi qu'à l'existence de solutions extrémales.

L'existence de solutions pour l'inclusion différentielle du premier ordre dans un espace de Hilbert séparable H de la forme

$$(\mathcal{P}_{\mathbf{F}}) \begin{cases} \dot{x}(t) \in \partial_c \varphi(x(t)) + F(t, x(t)), & \text{p.p. sur [0,T]} \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

a été étudiée dans la référence [1], où $\partial_c \varphi(.)$ est le sous différentiel de Clarke d'une fonction $\varphi(.)$ propre semi-continue inférieurement compacte convexe, $F : [0, T] \times H \rightrightarrows H$ est une multi-application semi-continue supérieurement par rapport à la deuxième variable et à valeurs fermées convexes.

Les auteurs dans [17] ont étudié la même inclusion d'évolution avec $\varphi(.)$ une fonction propre convexe et semi-continue inférieurement dans les deux cas où la perturbation $F(., .)$ est à valeurs convexes ou non convexes.

Les inclusions différentielles d'évolution gouvernées par le sous différentiel d'une fonction propre convexe semi-continue inférieurement apparaissent souvent dans les problèmes de contrôle optimale (Cesari [8], Clarke [9], et Rockafellar [22]), de mécanique (Moreau [19] et Danchev [14]), et de l'économie mathématique (Cornet [10] et Henry [15]).

Le problème d'existence des solutions extrémales pour le problème de Cauchy d'une inclusion différentielle du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in ext\Big(F(t, x(t))\Big), & \text{p.p. sur } [0,\text{T}] \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

a été introduit par Cellina [7], et dans [11] DeBlasi et Pianigiani ont donné un résultat d'existence dans un espace de Banach réel réflexif et F une mutlti-application à valeurs non vides convexes compactes, le cas où F satisfait des hypothèses qui excluent la compacité a été traité dans [12].

Note mémoire est constitué de trois chapitre.

Le premier chapitre rappelle les notions essentielles et les résultats de base concernant les multi-applications que nous utiliserons tout au long de ce travail.

Dans le chapitre 2, on étudie l'existence de solution de l'inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par le sous différentiel de Clarke d'une fonction localement lipschitzienne dans uns espace de Hilbert séparable de la forme

$$(\mathcal{P}_G) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial_c\varphi(x(t)) + G(t, x(t)), \;\; p.p \text{ sur } [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

dans trois cas :

(1) $G(.,.)$ est une fonction univoque dans $\mathbf{L}^2([0, T], H)$,

(2) $G(.,.)$ est une multi-application semi-continue supérieurement par rapport à la deuxième variable,

(3) $G(.,.)$ est une multi-application semi-continue inférieurement par rapport à la deuxième variable.

Dans le chapitre 3, nous donnons un théorème d'existence de solutions extrémales pour l'inclusion différentielle suivante

$$(\mathcal{P}_{ext(G)}) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial_c\varphi(x(t)) + ext(G(t, x(t)), \; p.p. \; t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où $G : [0, T] \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides convexes compactes, mesurables sur $[0, T]$ et $\mathcal{H}$-continue sur $H \times H$.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

1.1 Notations

Tout au long de ce travail, nous utiliserons les notations suivantes.

• $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

• $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ la droite numérique achevée.

• $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réel positifs.

• H un espace de Hilbert séparable réel.

• $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire de H.

• $|.|$ la norme de H associée à $\langle ., . \rangle$.

• H_σ l'espace H muni de la topologie faible.

• $\Gamma_0(H)$ l'ensemble des fonctions propres, semi-continue inférieurement et convexes définie de H dans $\overline{\mathbb{R}}$.

• $\mathbf{B}_H(x_0, r)$ la boule ouverte de centre x_0 et de rayon $r > 0$ et $\mathbf{B}_H$ la boule unité ouverte de H.

• $\overline{\mathbf{B}}_H(x_0, r)$ la boule fermée de centre x_0 et de rayon $r > 0$ et $\overline{\mathbf{B}}_H$ la boule unité fermée de H.

• $co(S)$ l'enveloppe convexe de $S \subset H$.

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. On note par

• $\overline{co}(S)$ l'enveloppe convexe fermée de $S \subset H$.

• $\mathbf{C}(I,H)$ l'espace de Banach des applications continues $u : I \to H$, muni de la norme de la convergence uniforme, i.e.

$$\|u(.)\|_{\mathbf{C}} = \sup_{t\in I}\|u(t)\|, \text{ pour tout } u(.) \in \mathbf{C}(I,H).$$

• $\mathbf{L}^p(I,H)$ ($p \in [1,+\infty[$) l'espace quotient de Banach des applications $u : I \to H$ mesurables et telles que $\int_I \|u(t)\|^p dt < +\infty$, muni de la norme

$$\|u(.)\|_p = \left(\int_I \|u(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

• $1\!\!\mathrm{I}_A$ la fonction caractéristique d'une partie A de H, définie par

$$1\!\!\mathrm{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A. \end{cases}$$

• $int(A)$ est le plus grand ouvert contenue dans A.

• Soit $G : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application, muni de la norme suivante

$$|G(.,.)| = \sup_{\xi\in G(.,.)} |\xi|.$$

1.2 Les fonctions semi-continues

Définition 1.2.1. *Soit (X,d) un espace métrique et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.*

• *On dit que f est semi-continue inférieurement (et on note s.c.i) au point $x_0 \in X$, si pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $h < f(x_0)$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que $h < f(x)$, $\forall x \in V_{x_0}$.*

• *On dit que f est semi-continue supérieurement (et on note s.c.s) au point $x_0 \in X$, si pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $h > f(x_0)$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que $h > f(x)$, $\forall x \in V_{x_0}$.*

• *f sera dit s.c.i (resp. s.c.s) sur X si elle est s.c.i (resp. s.c.s) en tout point de X.*

Remarque 1.2.1. *Soient X un espace topologique et $x_0 \in X$.*
Si $f : X \to \mathbb{R}$ ou bien $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et $f(x_0) \in \mathbb{R}$ alors

• *f est s.c.i au point $x_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$, $\exists V_{x_0} \in \mathcal{V}(x_0)$; $\forall x \in V_{x_0}$ on a $f(x) - f(x_0) > -\varepsilon$.*

• *f est s.c.s au point $x_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$, $\exists V_{x_0} \in \mathcal{V}(x_0)$; $\forall x \in V_{x_0}$ on a $f(x) - f(x_0) < +\varepsilon$.*

• *f est continue au point $x_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$, $\exists V_{x_0} \in \mathcal{V}(x_0)$; $\forall x \in V_{x_0}$ on a $|f(x) - f(x_0)| < +\varepsilon$.*

Proposition 1.2.1. *Soient (X,d), un espace métrique et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.*
Soit $x_0 \in X$, alors

i) f est s.c.i au point $x_0 \Leftrightarrow \liminf_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0)$.

ii) f est s.c.s au point $x_0 \Leftrightarrow \limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)$.

Définition 1.2.2. *Soit X un espace de Banach. Une fonction $f : [a,b] \to X$ est dite absolument continue si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tels que pour toute partition dénombrable de l'intervalle $[a,b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant*

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta,$$

on a

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.2.1. *Une fonction $f : [a,b] \to X$ est absolument continue ssi elle est l'intégrale de sa dérivée, c'est à dire,*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(t)dt.$$

1.3 Topologie faible et faible*

Les résultats suivants sont pris de la référence [3].
Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_X$ et X' son dual topologique, i.e.,

$$X' = \{f : X \to \mathbb{R}, f \text{ linéare continue}\},$$

et $\|.\|_{X'}$ sa norme associée définie par $\|f\|_{X'} = \sup_{x \in \overline{\mathbf{B}}_X} |\langle f, x\rangle|$.
Et soit X'' le dual de X' (bidual de X).

Définition 1.3.1. *Soit $f \in X'$ un élément fixé et*

$$\begin{array}{rcl} \varphi_f : X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi_f(x) = \langle f, x\rangle. \end{array}$$

(On note l'image de x par f, $\langle f, x\rangle$ au lieu de $f(x)$).
Lorsque f parcourt X', on obtient une famille d'applications $(\varphi_f)_{f \in X'}$.
• *On appelle topologie faible sur X la topologie la moins fine rendant les applications $(\varphi_f)_{f \in X'}$ continues et on la note $\sigma(X, X')$.*

Notations 1.3.1. *$x_n \rightharpoonup x$ veut dire ($(x_n)_n$ converge faiblement ou $\sigma(X, X')$ vers x), $x_n \to x$ veut dire ($(x_n)_n$ converge fortement vers x, i.e., $\|x_n - x\| \to 0$).*

Proposition 1.3.1. *Soit $(x_n)_n$ une suite de points de X alors, quand $n \to \infty$, on a* *i)* $x_n \rightharpoonup x \Longleftrightarrow \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle,\ \forall\, f \in X'$.

ii) $x_n \to x \Longrightarrow x_n \rightharpoonup x$.

iii) $x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow (\|x_n\|)_n$ *est bornée et* $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

iv) *si* $x_n \rightharpoonup x$ *et si* $f_n \to f$ *fortement dans* X', *alors* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Définition 1.3.2. *Sur l'espace* X' *on connait déjà deux topologies, la topologie forte induite par la norme de* X', *et la topologie faible* $\sigma(X', X'')$. *On définit une troisième topologie sur* X' *comme suit*
Soit $x \in X$ *fixé et*

$$\begin{aligned} \psi_x : X' &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \psi_x(f) = \langle f, x\rangle. \end{aligned}$$

Lorsque x *parcourt* X, *on obtient une famille de formes linéaires continues* $(\psi_x)_{x\in X}$ *sur* X' *i.e,* $\psi_x \in X''$, *la topologie la moins fine sur* X' *rendant ces applications continues est appelée topologie faible* et on note* $\sigma(X', X)$.

Proposition 1.3.2. *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de points de* X' *alors quand* $n \to \infty$, *on a*

i) $f_n \rightharpoonup^* f$ $((f_n)$ *converge* $\sigma(X', X)$ *vers* $f) \Longleftrightarrow \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle,\ \forall x \in X$.

ii) $f_n \to f \Longrightarrow f_n \rightharpoonup^* f$.

iii) $f_n \rightharpoonup f$ $((f_n)$ *converge* $\sigma(X', X'')) \Longrightarrow f_n \rightharpoonup^* f$.

iv) $f_n \rightharpoonup^* f \Longrightarrow (\|f_n\|_{X'})_n$ *est bornée et* $\|f\|_{X'} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{X'}$.

v) *Si* $f_n \rightharpoonup^* f$ *et si* $x_n \to x$ *alors* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Proposition 1.3.3. *Si* X *est de dimension finie alors les topologies forte, faible et faible* coïncident sur* X'.

Définition 1.3.3. *Soient* X *une espace de Banach et* A *une partie de* X.
On dit que A *est faiblement* compacte (resp. fermée) si elle est compacte (resp. fermée) par rapport à la topologie faible*.*

1.4 La distance de Hausdorff

Définition 1.4.1. *(voir [3]) Soient A, B deux sous ensembles d'un espace métrique (X, d), l'écart entre A et B est défini par*

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a,\ B),$$

avec

$$d(a,\ B) = \inf_{b \in B} d(a,\ b),$$

et la distance de Hausdorff entre A et B est définie par

$$\mathcal{H}(A, B) = max(e(A, B), e(B, A)).$$

Propriétés élémentaires

Soient $A, B, C \subset X$. Alors

1. $e(A, \emptyset) = \infty$ *si* $A \neq \emptyset$,
2. $e(\emptyset, B) = 0$,
3. $e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$,
4. $e(A, B) \leq e(A, C) + e(C, B)$,
5. $\mathcal{H}(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$,
6. $\mathcal{H}(A, B) \leq \mathcal{H}(A, C) + \mathcal{H}(C, B)$,
7. $|d(x, A) - d(x, B)| \leq \mathcal{H}(A, B)$, $\forall x \in X$.

Notons par $P_f(X)$, l'ensemble des parties fermées de X, alors $P_f(X)$ muni de la distance de Hausdorff $\mathcal{H}$, est un espace métrique.

Rappelons les propriétés suivantes

— *Si (X, d) est un espace métrique complet, alors $(P_f(X), \mathcal{H})$ l'est aussi.*

— *Si X est séparable, l'ensemble des parties compactes de X, noté $P_k(X)$ muni de $\mathcal{H}$ est aussi séparable.*

1.5 Multi-applications et sélections

Pour une étude détaillée des multi-applications et leurs sélections on peut se référer à [3, 6].

Définition 1.5.1. *Soient X et Y deux ensembles non vides. Une multi-application (ou application multivoque) F définie sur X à valeurs dans Y est une application qui associe à chaque élément $x \in X$ un sous ensemble $F(x)$ de Y. Il ya dans la littérature plusieurs notations mais nous allons adopté la suivante $F : X \rightrightarrows Y$.*
Le domaine, le graphe et l'image de la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ sont donnés par

$$D(F) = \Big\{x \in X : \; F(x) \neq \emptyset\Big\}.$$

$$gph(F) = \Big\{(x, y) \in X \times Y : \; x \in D(F), y \in F(x)\Big\}.$$

$$Im(F) = \bigcup_{x \in D(F)} F(x).$$

Définition 1.5.2. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : X \to Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \;\; \forall\, x \in X.$$

1.5.1 Mesurabilité des multi-applications

Pour plus de détails sur la mesurabilité des multi-application on peut se référer à [3] et [6].

Définition 1.5.3. *Soit (Ω, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique et $F : \Omega \rightrightarrows X$. On dit que F est Σ-mesurable où simplement mesurable si pour tout ouvert V de X*

$$F^{-1}(V) = \{t \in \Omega : \; F(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Lemme 1.5.1. *Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, (X, d) un espace métrique complet séparable et $F : \Omega \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides fermées.*
Considérons les propriétés suivantes

(*i*) $F^{-1}(B) \in \Sigma$ *pour tout Borélien B de X.*

(*ii*) $F^{-1}(C) \in \Sigma$ *pour tout fermé C de X.*

(*iii*) $F^{-1}(V) \in \Sigma$ *pour tout ouvert V de X.*

(iv) *Il existe une suite* $(f_n)_n$ *de sélections mesurables de* F *telle que*

$$\forall t \in \Omega,\ F(t) = \overline{\{f_n(t)\}}_{n \in \mathbb{N}}.$$

(v) $\forall\, x \in X$, *la fonction distance* $d(x, F(\cdot))$ *est mesurable.*

(vi) *Le graphe de* F *appartient à* $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$ *(*$\mathcal{B}(X)$ *la tribu de Borel sur* X*).*

Alors $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Rightarrow (vi)$.

Si F *est à valeurs non vides complètes alors* $(iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi)$.

Si F *est à valeurs non vides compactes alors* $(iii) \Rightarrow (i)$.

Lemme 1.5.2. *Soit* (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré avec* $\mu \geq 0$, σ*-finie et* Σ μ*-complète. Soient* X *un espace métrique complet,* $F : \Omega \rightrightarrows X$ *une multi-application à valeurs non vides fermées, alors* $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi)$.

Corollaire 1.5.1. *Soit* (T, Σ) *un espace mesurable et soit* $(F_j)_{j \in J}$ *une famille de multi-applications* Σ*-mesurables définies sur* T *à valeurs dans* X*. Si* J *est fini et* X *un espace de Banach séparable, alors la multi-application* $G : \underset{t}{T} \underset{\mapsto}{\rightrightarrows} \underset{\sum_{j \in J} F_j(t)}{X}$ *est* Σ*-mesurable.*

Théorème 1.5.1. ***(Théorème d'existence de sélections mesurables)***
Soient (Ω, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace métrique complet séparable et* $F : \Omega \rightrightarrows X$ *une multi-application mesurable à valeurs fermées. Alors* F *admet au moins une sélection mesurable, i.e., il existe une application mesurable* $f : \Omega \to X$ *telle que* $f(t) \in F(t), \forall\, t \in \Omega$.

Théorème 1.5.2. *Soient* (Ω, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace de Banach. Soient* $F : \Omega \times X \rightrightarrows X$ *une multi-application mesurable,* $u : \Omega \to X$ *une application mesurable. Alors la multi-application* $F(\cdot, u(\cdot))$ *est mesurable.*

Définition 1.5.4. *Soit* (X, Σ, μ) *un espace mesuré, on dit que* μ *et non atomique si pour tout ensemble mesurable* A*, avec* $\mu(A) > 0$*, il existe un sous ensemble mesurable non vide* $B \subset A$*, tel que* $\mu(A) \subset \mu(B)$.

1.5.2 Continuité des multi-applications

Les résultats suivants sont pris des références [2, 3, 6].

Définition 1.5.5. *Soient X, Y deux espaces topologiques, et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.*

1. *On dit que F est semi-continue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de Y tel que $F(x_0) \subset U$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 dans X tel que $F(V_{x_0}) \subset U$.*

On dit que F est s.c.s sur X si elle est s.c.s en tout point $x_0 \in X$.

2. *On dit que F est semi-continue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de Y tel que $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 dans X tel que $F(x) \cap U \neq \emptyset$, pour tout $x \in V_{x_0}$.*

On dit que F est s.c.i sur X si elle est s.c.i en tout point $x_0 \in X$.

Définition 1.5.6. *On dit que F est continue au point x_0 si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i au point x_0 et F est continue sur X si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i sur X.*

Proposition 1.5.1. *Soient X, Y deux espaces topologiques. Une multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ à valeurs non vides est semi-continue supérieurement si et seulement si l'image inverse $F^{-1}(C) := \{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\}$ est fermée pour tout sous ensemble fermé C de Y, et elle est semi-continue inférieurement si et seulement si pour tout sous ensemble ouvert G de Y, $F^{-1}(G)$ est aussi ouvert dans X.*

Théorème 1.5.3. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application s.c.s à valeurs non vides fermées. Alors le graphe de F est fermé dans $X \times Y$.*

Proposition 1.5.2. *Soient X un espace de Banach, Y un espace de Banach compact. Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Si le graphe de F est fermé alors F est s.c.s.*

Exemples 1.5.1.

1. *Soit $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ la multi-application définie par*

$$F(x) = \begin{cases} [-1, 1] & si \quad x = 0 \\ \{0\} & si \quad x \neq 0, \end{cases}$$

alors F est s.c.s.

2. *Soit $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ la multi-application définie par*

$$F(x) = \begin{cases} [-1, 1] & si \quad x \neq 0. \\ \{0\} & si \quad x = 0, \end{cases}$$

alors F est s.c.i.

Définition 1.5.7. *Soient X, Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs compactes. Alors F est $\mathcal{H}$-continue (continue par rapport à la distance de Hausdorff) si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \subset X$ convergeant vers x_0 nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(F(x_n),\, F(x_0)) = 0.$$

Corollaire 1.5.2. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace localement convexe et $\alpha : T \to \mathbb{R}$ une fonction continue au point $t_0 \in T$, et soient $F_1 : T \rightrightarrows X$ et $F_2 : T \rightrightarrows X$ deux multi-applications. Considérons la multi-application $F : T \rightrightarrows X$ définie par $F(t) = \alpha(t)F_1(t) + F_2(t)$.*

Si $F_1(t_0)$ et $F_2(t_0)$ sont compacts et si F_1 et F_2 sont s.c.s au point t_0, alors F est s.c.s au point t_0.

On donne un théorème du point fixe qui nous sera utilse dans la démonstration de nos résultas d'existence.

Théorème 1.5.4. ***(Théorème du point fixe de Schauder)***
Soient X un espace vectoriel normé, K un sous ensemble non vide convexe compact de X et $f : K \to K$ une application continue. Alors f admet un point fixe dans K.

1.6 Quelques résultats de convergence

Les résultats suivants sont pris de la référence [13].

Théorème 1.6.1. ***(Théorème de la convergence de Lebesgue)****.*
Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et X un espace de Banach, soit $1 \leq p < +\infty$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables définies sur Ω à valeurs dans X, si la suite $(f_n)_n$ vérifie

- *(i)* $f_n \to f$ *μ.p.p sur Ω,*
- *(ii) il existe une fonction positive $g \in \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ μ.p.p.*

Alors $f_n \to f$ dans $\mathbf{L}^p(\Omega, X)$. En particulier, dans le cas $p = 1$,

$$\int_\Omega f_n d\mu \to \int_\Omega f d\mu.$$

Théorème 1.6.2. ***(Réciproque de la convergence de Lebesgue)****.*
Soient (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré et* X *un espace de Banach, soit* $1 \leq p < +\infty$. *Si* $f_n \to f$ *dans* $\mathbf{L}^p(\Omega, X)$ *alors il existe* (f_{n_k}) *une suite extraite de* (f_n) *et une fonction positive* $g \in \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{R})$ *telles que*

(*i*) $f_{n_k} \to f$ μ*.p.p,*

(*ii*) *pour tout* k, $\|f_{n_k}\| \leq g$ μ*.p.p.*

1.7 Quelques résultats de compacité

Théorème 1.7.1. ***(Théorème d'Ascoli-Arzelà)****.*
Soient X *un espace métrique compact,* Y *un espace métrique complet, et* H *un sous ensemble de* $\mathbf{C}(X, Y)$, *(l'espace des applications continues définies sur* X *à valeurs dans* Y, *muni de la topologie de la convergence uniforme). Alors* H *est relativement compact si et seulement si* H *est équicontinu et pour tout* $x \in X$, $H(x)$ *est relativement compact, avec*

$$H(x) = \{f(x) : f \in H\}.$$

Théorème 1.7.2. ***(Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki)****(voir[4])*
Soit X *un espace de Banach. Alors la boule unité fermée de* X' *est compacte pour la topologie faible** $\sigma(X', X)$.

Théorème 1.7.3. *(voir [4]) Soit* X *un espace de Banach et* C *un ensemble convexe de* X, *alors* C *est faiblement fermé si et selement s'il est fortement fermé.*

Théorème 1.7.4. ***(Théorème d'Eberlein-Smulian)***
Soit S *un sous ensemble d'un espace de Banach* X. *Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

1. S *est faiblement (relativement) séquentiellement compact.*
2. S *est faiblement (relativement) compact.*

Nous terminons cette section par le Lemme suivant qui est variante du Lemme de Gronwall.

Lemme 1.7.1. *(voir [20]) Soient* f, g, h *des fonctions définies sur* $[0, T]$ $(T > 0)$ *à valeurs dans* $[0, +\infty[$ *telles que*

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t f(\tau)h(\tau)d\tau, \ \forall\, t \in [0, T],$$

alors

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t g(\tau)h(\tau)\exp\left(\int_\tau^t h(s)ds\right)d\tau, \;\; \forall\, t \in [0,T].$$

Lemme 1.7.2. *Soient a un réel positif et f, g, h des fonctions définies sur $[0,T]$ $(T > 0)$ à valeurs dans $[0,+\infty[$ telles que*

$$f(t) \leq a + \int_0^t f(\tau)h(\tau)d\tau + \int_0^t g(\tau)d\tau, \;\; \forall\, t \in [0,T],$$

alors

$$f(t) \leq a\ \exp(\int_0^t h(\tau)d\tau) + \int_0^t g(\tau)\exp\left(\int_\tau^t h(s)ds\right)d\tau, \;\; \forall t \in [0,T].$$

CHAPITRE 2

EXISTENCE DE SOLUTIONS POUR UN PROBLÈME AUX LIMITES GOUVERNÉ PAR LE SOUS DIFFÉRENTIEL DE CLARKE

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on donne un théorème d'existence de solution pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par le sous différentiel de Clarke, avec une condition initiale $x_0 \in D(\partial_c\varphi) = \{x \in H : \partial_c\varphi(x) \neq \emptyset\}$, qui se présente sous la forme

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial_c\varphi(x(t)) + G(t, x(t)), \;\; p.p \text{ sur } I, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Ce résultat a été prouvé par S. Qin et X. Xue [21]. Ici, $I = [0, T]$ un intervalle non vide fermé dans $\mathbb{R}_+$, H un espace de Hilbert réel séparable, $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction localement lipschitzienne et $\partial_c\varphi$ désigne le sous différentiel au sens de Clarke.
On étudie l'existence d'une solution pour l'inclusion différentielle $(\mathcal{P})$ dans trois cas :

(1) $G(.,.)$ est une fonction univoque dans $\mathbf{L}^2(I, H)$,

(2) $G(.,.)$ est une multi-application semi-continue supérieurement par rapport à la deuxième variable,

(3) $G(.,.)$ est une multi-application semi-continue inférieurement par rapport à la deuxième variable.

On suppose sur nos données les hypothèses suivantes

$H(\varphi)$: il existe une fonction régulière $F : H \to \mathbb{R}$, telle que

(i) $\varphi - F \in \Gamma_0(H)$ et elle est inf-compact dans H, c'est à dire, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $L(\lambda)(\varphi - F) = \{x \in H : \ |x| \leq \lambda, \ (\varphi - F)(x) \leq \lambda\}$ est compact ;

(ii) $\partial_c F$ satisfait la condition de la croissance sous linéaire, c'est à dire, il existe $c > 0$, telle que

$$|\partial_c F(x)| \leq c(1 + |x|), \ \text{ pour tout } \ x \in H;$$

(iii) il existe une constante positive M, telle que, $\forall x_i \in H$ et $y_i \in \partial_c F(x_i)$, $i = \overline{1,2}$,

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq -M|x_1 - x_2|^2.$$

2.2 Préliminaires

Dans tout ce chapitre, $I = [0, T]$ est un intervalle de $\mathbb{R}_+$.

2.2.1 Sous-différentiabilité

On commence ce chapitre par donner des définitions et quelques résultats sur la sous différentiabilité au sens de l'analyse convexe et au sens de Clarke.

Définition 2.2.1. *Soit X un espace topologique réel et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, on appelle domaine effectif de f qu'on note $D(f)$ l'ensemble défini par*

$$D(f) = \Big\{x \in X : \ f(x) < +\infty\Big\}.$$

Définition 2.2.2. *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, on dit que f est convexe si et seulement si pour tous $x, y \in D(f)$, et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, nous avons*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Exemples 2.2.1.

i) *Toute norme* $\|.\|$ *sur* $\mathbb{R}^n$ *est convexe.*

ii) *Toute forme linéaire sur* $\mathbb{R}^n$ *est convexe.*

Définition 2.2.3. *Soit* X *un espace vectoriel, on dit que* f *est propre si et seulement si* $f(x) \neq -\infty, \forall x \in X$ *et* $\exists x_0 \in X, f(x_0) < +\infty$.
Alors, une fonction $f : X \to]-\infty, +\infty]$ *est propre si et seulement si* $D(f) \neq \emptyset$.

Définition 2.2.4. *(voir [6]) Soient* X *un espace vectoriel normé,* X' *son dual topologique,* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *et* $x_0 \in D(f)$. *On appelle sous différentiel de* f *au point* x_0 *(au sens de l'analyse convexe), noté* $\partial f(x_0)$, *l'ensemble définie par*

$$\partial f(x_0) = \Big\{ x' \in X' : \ \langle x', x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0), \ \forall x \in X \Big\}.$$

Un point $x' \in \partial f(x_0)$ *est dit sous gradient de* f *au point* x_0, *on dit que* f *est sous différentiable au point* x_0 *si* $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.

Exemple 2.2.1. *Soit* f *la fonction définie par*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = |x|, \end{array}$$

on sait que f *n'est pas différentiable au point* 0. *Par contre elle est sous différentiable en* 0.

En effet.

$$\begin{aligned} \partial f(0) &= \Big\{ y \in \mathbb{R} : \ y(x-0) \leq f(x) - f(0), \ \forall\, x \in \mathbb{R} \Big\} \\ &= \Big\{ y \in \mathbb{R} : \ yx \leq |x| - |0|, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \Big\} \\ &= \Big\{ y \in \mathbb{R} : \ yx \leq |x|, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \Big\} \\ &= \Big\{ y \in \mathbb{R} : \ yx \leq x, \ \forall\, x > 0 \Big\} \bigcap \Big\{ y \in \mathbb{R} : \ yx \leq -x, \ \forall\, x < 0 \Big\} \\ &= \Big\{ y \in \mathbb{R} : \ y \leq 1 \Big\} \bigcap \Big\{ y \in \mathbb{R} : \ y \geq -1 \Big\} \\ &= \ ]-\infty, 1] \cap [-1, +\infty[\\ &= [-1, 1]. \end{aligned}$$

Pour $x \neq 0$, *le sous différentiel coïncide avec la dérivée. En résumé*

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{1\} & si \ \ x > 0 \\ [-1, 1] & si \ \ x = 0 \\ \{-1\} & si \ \ x < 0. \end{cases}$$

Théorème 2.2.1. *(voir [16]) Soient X un espace de Banach, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe et continue au point $x_0 \in X$, alors $\partial f(x_0)$ est non vide convexe faiblement* compact dans X'.*

Proposition 2.2.1. *Soient X un espace vectoriel normé, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe, et $x_0 \in D(f)$. Si f est continue au point x_0, alors $\partial f(x_0)$ est borné i.e. ; $\exists \sigma > 0$ tel que $\partial f(x_0) \subset \overline{\mathbf{B}}_X(0, \sigma)$.*

Proposition 2.2.2. *Soient X un espace de Banach, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe. Si f est continue sur $int(D(f))$, alors $\partial f : (X, \|.\|_X) \rightrightarrows (X', \sigma(X', X))$ est s.c.s sur $int(D(f))$.*

preuve.

Soit $x_0 \in int(D(f))$, montrons que ∂f est s.c.s au point x_0.
Soit U un ouvert pour la topologie $\sigma(X', X)$ dans X' tel que $\partial f(x_0) \subset U$, montrons que

$$\exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbf{B}_X(x_0, \delta) \cap int(D(f)),\ \partial f(x) \subset U. \tag{2.1}$$

On suppose que (2.1) n'est pas vérifiée i.e.

$$\forall \delta > 0, \exists x \in \mathbf{B}_X(x_0, \delta) \cap int(D(f)),\ \text{tel que } \partial f(x) \not\subset U,$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in \mathbf{B}_X(x_0, \frac{1}{n}) \cap int(D(f)),\ \text{tel que } \partial f(x_n) \not\subset U,$$

c'est à dire

$$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset int(D(f)), x_n \to x_0 \text{ et on a, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \partial f(x_n) \not\subset U,$$

donc

$$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset int(D(f)), x_n \to x_0 \text{ et on a, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x'_n \in \partial f(x_n) \text{ et } x'_n \notin U. \tag{2.2}$$

D'après la Proposition 2.2.1, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \sigma_n > 0,\ \text{tel que } \partial f(x_n) \subset \overline{\mathbf{B}}_{X'}(0, \sigma_n).$$

Posons $\sigma = \max_{n \in \mathbb{N}^*} \sigma_n$, alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \partial f(x_n) \subset \overline{\mathbf{B}}_{X'}(0, \sigma), \tag{2.3}$$

d'où (2.2), donne

$$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset int(D(f)), x_n \to x_0 \text{ et on a, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x'_n \in \partial f(x_n) \subset \overline{\mathbf{B}}_{X'}(0, \sigma) \text{ et } x'_n \notin U,$$

donc

$$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset int(D(f)), x_n \to x_0 \text{ et on a, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x'_n \in \overline{\mathbf{B}}_{X'}(0,\sigma) \text{ et } x'_n \notin U,$$

et comme on a $\overline{\mathbf{B}}_{X'}(0,\sigma) = \sigma\overline{\mathbf{B}}_{X'}(0,1)$ est faiblement* compact (par le Théorème 1.7.2 de Banach-Alaoglu-Bourbaki), alors la suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une sous suite $(x^*_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge faiblement* ver x',
d'où d'après la relation (2.2)

$$x^*_n \in \partial f(x_n) \text{ et } x^*_n \notin U, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

donc par la définition de sous différentielle, nous avons

$$\langle x^*_n, x - x_n\rangle \leq f(x) - f(x_n),\ \forall x \in X \text{ et } x^*_n \notin U, \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.4}$$

On a U est faiblement* ouvert, alors $X'\backslash U$ est faiblement* fermé, et comme on a $(x^*_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X'\backslash U$ et $x^*_n \rightharpoonup^* x'$, alors $x' \in X'\backslash U$, donc $x' \notin U$, d'où par passage à la limite dans (2.4), on trouve

$$\begin{aligned}\langle x', x - x_0\rangle \leq f(x) - f(x_0), \forall x \in X \text{ et } x' \notin U &\Rightarrow x' \in \partial f(x_0) \text{ et } x' \notin U,\\ &\Rightarrow \partial f(x_0) \not\subset U.\end{aligned}$$

Ce qui contredit $\partial f(x_0) \subset U$, donc (2.1) est vérifiée, c'est à dire ∂f est s.c.s au point x_0 et x_0 est un point quelconque de $int(D(f))$, alors f est s.c.s sur $int(D(f))$. ■

Définition 2.2.5. *Soit X un espace de Banach, Y un sous ensemble de X. On dit que la fonction $f : Y \to \mathbb{R}$ vérifie la condition de Lipschitz sur Y, si pour un certain scalaire positif L, on a*

$$|f(y) - f(y')| \leq L\|y - y'\|,$$

pour tous $y, y' \in Y$.

On dit que f est localement Lipschitzienne (de rapport L) au voisinage de x si pour un certain $\varepsilon > 0$, f vérifie la condition de Lipschitz (de rapport L) sur l'ensemble $x + \varepsilon\mathbf{B}_X$ (c'est à dire dans un ε-voisinage de x).

Définition 2.2.6. *Soient X un espace de Banach et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne au voisinage d'un point donné $x_0 \in X$, et soit v un vecteur dans X. La dérivée directionnelle généralisée de f au point x_0 dans la direction v, notée $f^\circ(x_0, v)$ est définie par*

$$f^\circ(x_0, v) = \limsup_{\substack{x\to x_0\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t},$$

où y est un vecteur dans X et t est un scalaire positif.

Proposition 2.2.3. *(voir [9]) Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne au voisinage de $x \in X$ de rapport $L > 0$. Alors*

(**a**) *la fonction $v \mapsto f^\circ(x, v)$ est finie, positivement homogène, sous-additive et satisfait*

$$|f^\circ(x, v)| \leq L\|v\|;$$

(**b**) *la fonction $(x, v) \mapsto f^\circ(x, v)$ est semi-continue supérieurement comme fonction de (x, v), et comme fonction de v seulement elle est Lipschitzienne sur X de rapport L.*

preuve.

a) (i) Montrons que $f^\circ(x_0, v)$ est positivement homogène.

Soient $\lambda > 0$, $v \in X$, montrons que $f^\circ(x_0, \lambda v) = \lambda f^\circ(x_0, v)$.

On a, $\forall v \in X$,

$$f^\circ(x_0, \lambda v) = \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x + t\lambda v) - f(x)}{t}.$$

Posons $\lambda t = m$, alors quand $t \downarrow 0$ on a $m \downarrow 0$,

$$\begin{aligned} f^\circ(x_0, \lambda v) &= \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x + t\lambda v) - f(x)}{t} \\ &= \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ m \downarrow 0}} \frac{f(x + mv) - f(x)}{\frac{m}{\lambda}} \\ &= \lambda \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ m \downarrow 0}} \frac{f(x + mv) - f(x)}{m} \\ &= \lambda f^\circ(x_0, v). \end{aligned}$$

D'où $f^\circ(x_0, v)$ est positivement homogène.

(ii) Montrons que $f^\circ(x_0, .)$ est sous additive.

Soient $v, w \in X$, montrons que $f^\circ(x_0, v + w) \leq f^\circ(x_0, v) + f^\circ(x_0, w)$.

On a, $\forall v, w \in X$

$$\begin{aligned}
f^\circ(x_0, v+w) &= \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x + t(v+w)) - f(x)}{t} \\
&= \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x + tv + tw) - f(x)}{t} \\
&= \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x + tv + tw) - f(x+tw) + f(x+tw) - f(x)}{t} \\
&\leq \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x + tv + tw)) - f(x+tw)}{t} + \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x+tw) - f(x)}{t} \\
&= \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x + tv + tw)) - f(x+tw)}{t} + f^\circ(x_0, w).
\end{aligned}$$

D'où,

$$f^\circ(x_0, v+w) \leq \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x + tv + tw) - f(x+tw)}{t} + f^\circ(x_0, w), \ \forall v, w \in X, \tag{2.5}$$

on pose $x + tw = y$, alors quand $x \to x_0$ et $t \downarrow 0$ on a $y \to x_0$.

Alors

$$\limsup_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x + tv + tw) - f(x+tw)}{t} = \limsup_{\substack{y \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t} = f^\circ(x_0, v).$$

D'où (2.5) est équivalente à

$$f^\circ(x_0, v+w) \leq f^\circ(x_0, v) + f^\circ(x_0, w), \ \forall v, w \in X.$$

Donc $f^\circ(x_0, v)$ est sous additive.

(iii) Montrons que $|f^\circ(x_0, v)| \leq L\|v\|$, $\forall v \in X$.

On a, $\forall v \in X$

$$\begin{aligned}
|f^\circ(x_0, v)| &= \left| \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \right| \\
&\leq \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \left| \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \right| \\
&= \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{|f(x + tv) - f(x)|}{t} \\
&\leq \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{L\|x + tv - x\|}{t} \\
&= L\|v\|.
\end{aligned}$$

D'où, $|f^\circ(x_0, v)| \leq L\|v\|$, $\forall v \in X$.

De plus $L \in \mathbb{R}_+^*$, alors $f^\circ(x_0, v)$ est finie.

b) Montrons que $f^\circ(.,.)$ est s.c.s en (x_0, v).

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites quelconques de X qui convergent vers x_0 et v respectivement. Par la définition de $f^\circ(.,.)$, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists y_n \in X$ et $\exists t_n > 0$, tels que $\|y_n - x_n\| + t_n < \frac{1}{n}$,

et

$$f^\circ(x_n, v_n) - \frac{1}{n} < \frac{f(y_n + t_n v_n) - f(y_n)}{t_n},$$

comme f est localement lipschitzienne au voisinage de x_0, alors

$$\begin{aligned} f^\circ(x_n, v_n) - \frac{1}{n} &< \frac{f(y_n + t_n v_n) - f(y_n)}{t_n} + \frac{f(y_n + t_n v)}{t_n} - \frac{f(y_n + t_n v)}{t_n} \\ &= \frac{f(y_n + t_n v) - f(y_n)}{t_n} + \frac{f(y_n + t_n v_n) - f(y_n + t_n v)}{t_n} \\ &\leq \frac{f(y_n + t_n v) - f(y_n)}{t_n} + \frac{L\|y_n + t_n v_n - (y_n + t_n v)\|}{t_n} \\ &= \frac{f(y_n + t_n v) - f(y_n)}{t_n} + \frac{L t_n \|v_n - v\|}{t_n}, \end{aligned}$$

d'où

$$f^\circ(x_n, v_n) - \frac{1}{n} \leq \frac{f(y_n + t_n v) - f(y_n)}{t_n} + L\|v_n - v\|. \tag{2.6}$$

Par passage à la limite supérieure dans (2.6) quand n tend ver $+\infty$, on trouve

$$\limsup_{n\to+\infty} f^\circ(x_n, v_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{f(y_n + t_n v) - f(y_n)}{t_n},$$

et on a

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{f(x_n + t_n v) - f(x_n)}{t_n} \leq f^\circ(x_0, v),$$

d'où

$$\limsup_{n\to+\infty} f^\circ(x_n, v_n) \leq f^\circ(x_0, v),$$

donc $f^\circ(.,.)$ est une semi-continue supérieurement en (x_0, v). ■

Définition 2.2.7. *(voir [9]) Soit X un espace de Banach. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne au voisinage d'un point donné x et soit v un vecteur dans X. Le sous différentiel de Clarke de f au point x, noté $\partial_c f(x)$ est le sous ensemble de X', donné par*

$$\partial_c f(x) = \left\{ \xi \in X' : \langle \xi, v\rangle \leq f^\circ(x, v), \ \textit{pour tout } v \in X \right\}.$$

On note par $\|\xi\|_*$ la norme de ξ dans X', donnée par

$$\|\xi\|_* = \sup\left\{ \langle \xi, v\rangle : \ v \in X, \|v\| \leq 1 \right\}.$$

Exemples 2.2.2.

1. *Soit f la fonction définie par*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = max\,(0,x), \end{array}$$

qui est une fonction Lipschitzienne et donc

$$\begin{array}{rcl} f^{\circ}(0,v) & = & \lim_{y\to 0}\sup_{t\downarrow 0}\dfrac{f(y+tv)-f(y)}{t} \\ & = & \lim_{y\to 0}\sup_{t\downarrow 0}\dfrac{max(0,y+tv)-max\,(0,y)}{t} \\ & = & \begin{cases} v & si\ v\geq 0 \\ 0 & si\ v\leq 0, \end{cases} \end{array}$$

par suite

$$\begin{array}{rcl} \partial_c f(0) & = & \Big\{\xi\in\mathbb{R}:\ \langle\xi,v\rangle\leq f^{\circ}(0,v),\ \ pour\ tout\,v\in\mathbb{R}\Big\} \\ & = & \Big\{\xi\in\mathbb{R}:\ \xi v\leq v,\ \forall v>0\Big\}\bigcap\Big\{\xi\in\mathbb{R}:\ \xi v\leq 0,\ \forall v\leq 0\Big\} \\ & = & \Big\{\xi\in\mathbb{R}:\ \xi\leq 1\Big\}\bigcap\Big\{\xi\in\mathbb{R}:\ \xi\geq 0\Big\} \\ & = &]-\infty,1]\cap[0,+\infty[\\ & = & [0,1]. \end{array}$$

2. *Soient X un espace de Banach, $f(t)=\|x\|$ une fonction Lipschitzienne de rapport $L=1$. D'après la Proposition 2.2.3, on a*

$$f^{\circ}(0,v)\leq\|v\|,\ \ \forall\ v\in X,$$

or on a, $f'(0,v)=\|v\|$ d'après la dérivée directionnelle usuelle.
Et on a aussi

$$f^{\circ}(0,v)\geq f'(0,v),\ \ \forall\ v\in X,$$

ce qui donne

$$f'(0,v)\leq f^{\circ}(0,v)\leq\|v\|,$$

maintenant d'après la définition du sous différentielle de Clarke, on a
$\xi\in\partial_c f(0)$ si et seulement si

$$f^{\circ}(0,v)=\|v\|\geq\langle\xi,v\rangle,\ \forall v\in X,$$

on conclut donc que

$$\partial_c f(0)=\mathbf{B}_{X'}.$$

Proposition 2.2.4. *(voir [9]) Soit f une fonction Lipschitzienne de rapport L au voisinage de x. Alors*

(**a**) *$\partial_c f(x)$ est un sous ensemble non vide, convexe et faiblement*compact de X' et $\|\xi\|_* \leq L$ pour tout ξ dans $\partial_c f(x)$;*

(**b**) *pour tout v dans X, on a*

$$f^\circ(x,v) = \max\Big\{\langle \xi, v\rangle \,:\, \xi \in \partial_c f(x)\Big\}.$$

(**c**) *Soient $(x_n)_n$ et $(x'_n)_n$ deux suites respectivement dans X et X' telles que $x'_n \in \partial_c f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Supposons que $(x_n)_n$ converge vers x et $(x'_n)_n$ convergence faiblement* vers x', alors $x' \in \partial_c f(x)$.*

Lemme 2.2.1. *(voir [23]) Soient X un espace de Banach, $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne sur X. Alors le sous différentiel de Clarke $\partial_c f : (X, \|.\|_X) \rightrightarrows (X', \sigma(X',X))$ est une multi-application semi-continue supérieurement sur X.*

Proposition 2.2.5. *(voir [9]) Soit f une fonction convexe localement Lipschitzienne au voisinage de x, alors $\partial_c f(x)$ coincide avec $\partial f(x)$ et $f^\circ(x,v)$ coincide avec la dérivée directionnelle $f'(x,v)$, pour tout v.*

Définition 2.2.8. *(voir[9]) On dit que f est régulière au pont x_0 si*

(i) pour tout v dans X, la dérivée usuelle $f'(x_0,v)$ existe.

(ii) pour tout v dans X, $f'(x_0,v) = f^\circ(x_0,v)$.

Évidemment, toute fonction convexe est régulière.

Proposition 2.2.6. *Si f_1 et f_2 sont régulières au x_0, alors*

$$\partial_c(f_1+f_2)(x_0) = \partial_c f_1(x_0) + \partial_c f_2(x_0).$$

2.2.2 Les ensembles décomposables et $\mathbf{L}^p$-sélections

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, σ-fini et X un espace de Banach séparable.

Définition 2.2.9. *(voir [16]) Soit K un ensemble de $\mathbf{L}^p(\Omega, X)$. On dit que K est décomposable si pour tous u,v $\in K$ est pour tout sous ensemble $A \in \Sigma$, nous avons*

$$1\!\!1_A u + (1 - 1\!\!1_A)v \in K.$$

Définition 2.2.10. *Soit $F : \Omega \rightrightarrows X$ une multi-application, pour $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'ensemble de toutes les $\mathbf{L}^p$-sélections de F par*

$$\mathcal{S}_F^p = \Big\{f(.) \in \mathbf{L}^p(\Omega, X) \,:\, f(t) \in F(t),\ \mu.p.p\Big\}.$$

Lemme 2.2.2. *(voir [16]) Soit $F : \Omega \rightrightarrows X$ une multi-application de graphe mesurable et $1 \leq p \leq +\infty$, alors $\mathcal{S}_F^p$ est non vide si et seulement si*

$$\inf\Big\{\|x\| : x \in F(t)\Big\} \leq h(t)\ \mu.p.p,$$

pour une certaine application $h(.) \in \mathbf{L}^p(\Omega, X)$.

Remarques 2.2.1.

(i) Il est clair que pour toute multi-application $F(.)$, l'ensemble $\mathcal{S}_F^p$ est décomposable.

(ii) Si F est à valeurs non vides fermées, alors l'ensemble $\mathcal{S}_F^p$ est fermé dans $\mathbf{L}^p(\Omega, X)$.

En effet.

(i) Soit $A \in \Sigma$ et soient $u, v \in \mathcal{S}_F^p$, nous avons

$$\begin{aligned}
u \in \mathcal{S}_F^p &\Leftrightarrow u \in \mathbf{L}^p(\Omega, X) :\ u(t) \in F(t),\ \ p.p.\ t \in \Omega \\
&\Rightarrow \mathbb{1}_A u \in \mathbf{L}^p(\Omega, X)\ \ et\ \ \mathbb{1}_A(t)u(t) \in \mathbb{1}_A(t)F(t),\ p.p.\ t \in \Omega, \\
v \in \mathcal{S}_F^p &\Leftrightarrow v \in \mathbf{L}^p(\Omega, X) :\ v(t) \in F(t),\ p.p.\ t \in \Omega \\
&\Rightarrow (1 - \mathbb{1}_A)v \in \mathbf{L}^p(\Omega, X)\ \ et\ \ (1 - \mathbb{1}_A(t))v(t) \in (1 - \mathbb{1}_A(t))F(t),\ p.p.\ t \in \Omega.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{1}_A u + (1 - \mathbb{1}_A)v \in \mathbf{L}^p(\Omega, X)$$

et

$$\mathbb{1}_A(t)u(t) + (1 - \mathbb{1}_A(t))v(t) \in \mathbb{1}_A(t)F(t) + (1 - \mathbb{1}_A(t))F(t),\ p.p.\ t \in \Omega.$$

Et comme

$$\mathbb{1}_A(t)F(t) + (1 - \mathbb{1}_A(t))F(t) = \begin{cases} F(t) & \text{si } t \in A \\ F(t) & \text{si } t \notin A \end{cases} = F(t).$$

Donc, $\mathbb{1}_A u + (1 - \mathbb{1}_A)v \in \mathcal{S}_F^p$.

(ii) Soit $(f_n(.))_n \subset \mathcal{S}_F^p$ convergeant vers $f(.) \in \mathbf{L}^p(\Omega, X)$, donc $f_n(t) \in F(t)\ \mu.p.p.$, par le Théorème 1.6.2, il existe une sous suite extraire de $(f_n(.))_n$ qu'on aussi $(f_n(.))_n$ telle que $f_n(.) \to f(.)\ p.p.$ sur Ω, et comme F est à valeurs fermées, on conclut que $f(t) \in F(t)$, $\forall\, t \in \Omega$, i.e., $f \in \mathcal{S}_F^p$, par conséquent $\mathcal{S}_F^p$ est fermé.

Définition 2.2.11. *(voir [16]) Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré σ-fini et X, Y deux espaces de Banach séparables. Soit $F : \Omega \times X \rightrightarrows Y$ une multi-application, soient $p, q \in [1, +\infty[$. On définit la multi-application*

$$\begin{aligned}
\Gamma : \mathbf{L}^p(\Omega, X) &\rightrightarrows \mathbf{L}^q(\Omega, Y) \\
u &\mapsto \Gamma(u) = \mathcal{S}^q_{F(.,u(.))}.
\end{aligned}$$

Nous appelons $\Gamma(.)$ *l'opérateur multivalué de Nemitsky ou superposition correspondante à* $F(.,.)$.

Théorème 2.2.2. *(voir [16]) Soit* (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré* σ*-fini et* X, Y *deux espaces de Banach séparables. Soit* $F : \Omega \times X \rightrightarrows Y$ *une multi-application à valeurs fermées telle que*
(i) $(t, x) \mapsto F(t, x)$ *est de graphe mesurable,*
(ii) pour tout $x \in X$, $x \mapsto F(t, x)$ *est s.c.i,*
(iii) $|F(t, x)| \leq a(t) + c\|x\|^{\frac{p}{q}}$ *p.p. avec* $a(.)$ *une fonction positif dans* $\mathbf{L}^q(\Omega, \mathbb{R})$ *et* $c \geq 0$.
Alors $u \mapsto \Gamma(u)$ *est s.c.i.*

Théorème 2.2.3. ***(Théorème de sélection continue)****(voir [16])*
Soient (Ω, Σ, μ) *un espace de probabilité avec* μ *une mesure non atomique,* X *un espace métrique séparable,* Y *un espace de Banach et* $F : X \rightrightarrows \mathbf{L}^1(\Omega, Y)$ *une multi-application s.c.i à valeurs fermées et décomposables, alors* $F(.)$ *admet une sélection continue.*

2.3 Théorème d'existence

2.3.1 Cas où la perturbation est une fonction univoque

Cette section est consacrée à l'étude de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P})$ dans le cas où $G(.,.)$ est à valeurs univoques .

Définitions 2.3.1. *(voir [5]) Soient* H *un espace de Hilbert séparable,* A *un opérateur de* H *et* $f \in \mathbf{L}^1(I, H)$.

- *On appelle solution forte de l'inclusion différentielle* $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$, *toute fonction* $u \in \mathbf{C}(I, H)$, *absolument continue sur tout compact de* $]0, T[$, *vérifiant* $u(t) \in D(A)$ *et* $\dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$, *p.p.* $t \in]0, T[$.
- *On dit que* $u \in \mathbf{C}(I, H)$ *est une solution faible de l'inclusion différentiel* $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ *s'il existe des suites* $f_n \in \mathbf{L}^1(I, H)$ *et* $u_n \in \mathbf{C}(I, H)$, *telles que* u_n *soit une solution forte de l'inclusion différentiel* $\dfrac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$, $f_n \longrightarrow f$ *dans* $\mathbf{L}^1(I, H)$ *et* $u_n \longrightarrow u$ *uniformément sur* $]0, T[$.

Pour résoudre le problème $(\mathcal{P})$, il sera utile de rappeler la Proposition et le Théorème suivants dans [1] et [5] respectivement.

Proposition 2.3.1. *Soient H un espace de Hilbert séparable, $\varphi : H \to \mathbb{R}$ une fonction propre, s.c.i et convexe sur H, tel que pour tout réel M, l'ensemble $C(M) = \{x \in H : |x| \leq M, \varphi(x) \leq M\}$ est compact dans H. Soit $B : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application satisfaisant les hypothèses suivantes*

(1) pour presque $t \in I$, $x \mapsto B(t,x)$ est s.c.s sur $\overline{D(\partial\varphi)}$ dans H_σ à valeurs non vides convexes faiblement compactes ;

(2) pour tout $x \in \overline{D(\partial\varphi)}$, $t \mapsto B(t,x)$ est mesurable sur I dans H_σ, c'est à dire, pour tout $x \in \overline{D(\partial\varphi)}$ la fonction $b_{x,\xi} : t \mapsto \sup\{\langle y, \xi\rangle : y \in B(t,x)\}$ est mesurable sur I ;

(3) il existe deux fonctions positives $\gamma(.)$, $\delta(.) \in \mathbf{L}^2(I,\mathbb{R})$ telles que, pour presque tout $t \in I$, et $x \in \overline{D(\partial\varphi)}$,

$$\sup_{y\in B(t,x)} |y| \leq \gamma(t)|x| + \delta(t).$$

Alors, l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_1)\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \partial\varphi(u(t)) + B(t,u(t)) \ni 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

admet au moins une solution forte.
Plus précisément

(1) il existe une sélection mesurable $\beta : I \to H$, telle que $\beta(t) \in B(t,u(t))$, presque tout $t \in I$;

(2) $u(.)$ est une solution forte de $\dfrac{du}{dt} + \partial\varphi(u(t)) + \beta(t) \ni 0$, $u(0) = u_0 \in \overline{D(\varphi)}$.

Théorème 2.3.1. *Soient H un espace de Hilbert, $\varphi :\ H \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, s.c.i et $K = \{x \in H : \varphi(x) = 0\}$. Soit $f(.) \in \mathbf{L}^2(I,H)$, alors toute solution faible de l'inclusion différentielle $f(t) \in \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t))$ est une solution forte et $\sqrt{t}\dfrac{du}{dt}(t) \in \mathbf{L}^2(I,H)$ et on a les estimations suivantes*

(1) $$\left(\int_0^T \left|\frac{du}{dt}(t)\right|^2 t dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^T |f(t)|^2 t dt\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^T |f(t)|dt + \frac{1}{\sqrt{2}} d(u(0),K).$$

(2) $$\left(\int_\delta^T \left|\frac{du}{dt}(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^T |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\delta}}\int_0^\delta |f(t)|dt + \frac{1}{\sqrt{2\delta}} d(u(0),K),$$

$\forall\delta \in]0,T[$.

La fonction $t \mapsto \varphi(u(t))$ appartient à $\mathbf{L}^1(I,\mathbb{R})$ et elle est absolument continue sur tout

intervalle $[\delta, T]$, $\forall \delta \in]0, T[$ *avec* $\left|\dfrac{du}{dt}\right|^2 + \dfrac{d}{dt}\varphi(u) = \langle f, \dfrac{du}{dt}\rangle$, *p.p. sur* $]0, T[$.
Enfin si $u(0) \in D(\varphi)$, *alors* $\dfrac{du}{dt} \in \mathbf{L}^2(I, H)$, *avec*

$$\left(\int_0^T \left|\frac{du}{dt}(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^T |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\varphi(u(0))},$$

et la fonction $t \mapsto \varphi(u(t))$ *est absolument continue sur* I.

Théorème 2.3.2. *Soient* H *un espace de Hilbert séparable,* $\varphi : H \to \mathbb{R}$ *est une fonction localement lipschitzienne satisfaisant les hypothèses* $H(\varphi)$ *et soit* $f(.)$ *une fonction de* $\mathbf{L}^2(I, H)$.
Alors, pour tout x_0 *fixé dans* $D(\partial_c\varphi)$, *l'inclusion différentielle*

$$(\mathcal{P}_f) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial_c\varphi(x(t)) + f(t), \ \textit{p.p.}\ t \in I, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

admet une solution unique forte.
De plus elle satisfait les estimations suivantes

(i) il existe $c_1 > 0$ *et* $c_2 > 0$, *tel que*

$$|x(t)| \leq c_1 + c_2\|f\|_2, \ \textit{pour tout} \quad t \in I,$$

(ii) il existe $d_1 > 0$ *et* $d_2 > 0$, *tel que*

$$\left(\int_0^T |\dot{x}(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq d_1 + d_2\|f\|_2.$$

Preuve.

Par l'hypothèse $H(\varphi)(i)$, on a $\varphi - F$ est une fonction convexe, donc régulière, alors par la Proposition 2.2.6, on peut écrire

$$\begin{aligned} \partial_c\varphi(x) &= \partial_c(\varphi - F + F)(x) \\ &= \partial_c(\varphi - F)(x) + \partial_c F(x) \\ &= \partial(\varphi - F)(x) + \partial_c F(x), \end{aligned}$$

par conséquent, l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_f)$ est équivalente à

$$(\mathcal{P}_2) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial(\varphi - F)(x(t)) + \partial_c F(x(t)) + f(t), \ \textit{p.p.}\ t \in I, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Nous allons principalement étudier l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_2)$ au lieu de $(\mathcal{P}_f)$.

Etape 1.

• **L'existence de la solution**.

Par l'hypothèse $H(\varphi)(i)$, la fonction $\varphi - F$ est propre, s.c.i, convexe et inf-compact dans H.

D'après le Lemme 2.2.1 et la Proposition 2.2.4, nous avons $x \mapsto \partial_c F(x)$ est une multi-application s.c.s sur H et à valeurs convexes faiblement compactes.

Pour tout $\xi \in H$ et pour tout $x \in \overline{D(\partial(\varphi - F))}$, la fonction $b_{x,\xi} : t \to \sup\{\langle y, \xi\rangle : y \in \partial_c F(x) + f(t)\} = \sup\{\langle y, \xi\rangle : y \in \partial_c F(x)\} + \langle f(t), \xi\rangle$ est mesurable sur I.

Et par l'hypothèse $H(\varphi)(ii)$, presque tout $t \in I$ et tout $x \in \overline{D(\partial(\varphi - F))}$, nous avons pour $y \in \partial_c F(x) + f(t)$, il existe $z \in \partial_c F(x)$, tel que $y = z + f(t)$, donc

$$\begin{aligned} |y| &= |z + f(t)| \\ &\leq |z| + |f(t)|, \end{aligned}$$

implique

$$\begin{aligned} \sup_{y \in \partial_c F(x) + f(t)} |y| &\leq \sup_{z \in \partial_c F(x)} |z| + |f(t)| \\ &\leq c(1 + |x|) + |f(t)| \\ &= c + c|x| + |f(t)| \\ &= c|x| + (c + |f(t)|), \end{aligned}$$

donc

$$\sup_{y \in \partial_c F(x) + f(t)} |y| \leq \gamma(t)|x| + \delta(t),$$

où $\gamma(t) = c$ et $\delta(t) = c + |f(t)|$.

On conclut alors que la multi-application $(t, x) \mapsto \partial_c F(x) + f(t)$ satisfaisant les hypothèses (1),(2) et (3) de la Proposition 2.3.1, donc l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_2)$ admet au moins une solution forte $x(.)$ qui est également une solution du $(\mathcal{P}_f)$.

• **L'unicité de la solution.**

Pour montrer l'unicité de la solution, nous supposons que $x_1(.)$ et $x_2(.)$ deux solutions du problème $(\mathcal{P}_2)$. Le fait que les multi-applications $y \mapsto \partial_c F(y)$ et $y \mapsto \partial(\varphi - F)(y)$ sont s.c.s et $x_i(.)$ sont continues $i = \overline{1, 2}$, on conclut que les multi-applications $t \mapsto \partial_c F(x_i(t))$ et $t \mapsto \partial(\varphi - F)(x_i(t))$ sont mesurables. Donc d'après le théorème d'existence de sélections mesurables (Théorème 1.5.1), il existe une sélection mesurable $y_i(.) : I \to H$ telle que

$y_i(t) \in \partial_c F(x_i(t)), \forall t \in I$ et $\gamma_i(.) : I \to H$ telle que $\gamma_i(t) \in \partial(\varphi - F)(x_i(t)), \forall t \in I, i = \overline{1,2}$, ceci donne

$$-\dot{x}_i(t) = \gamma_i(t) + y_i(t) + f(t), \ i = \overline{1,2}. \ p.p. \, t \in I,$$

avec $x_i(0) = x_0$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x_1(t) - x_2(t)|^2 &= \langle x_1(t) - x_2(t), \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t) \rangle \\
&= \langle x_1(t) - x_2(t), -\gamma_1(t) - y_1(t) - f(t) + \gamma_2(t) + y_2(t) + f(t) \rangle \\
&= \langle x_1(t) - x_2(t), -\gamma_1(t) - y_1(t) + \gamma_2(t) + y_2(t) \rangle \\
&= \langle x_1(t) - x_2(t), \gamma_2(t) - \gamma_1(t) \rangle + \langle x_1(t) - x_2(t), y_2(t) - y_1(t) \rangle.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a $\gamma_1(t) \in \partial(\varphi - F)(x_1(t))$ et $\gamma_2(t) \in \partial(\varphi - F)(x_2(t))$, donc par la définition de sous différentiel au sens de l'analyse convexe, on a

$$\langle \gamma_1(t), y - x_1(t) \rangle + (\varphi - F)(x_1(t)) \leq (\varphi - F)(y), \forall y \in H,$$

et

$$\langle \gamma_2(t), z - x_2(t) \rangle + (\varphi - F)(x_2(t)) \leq (\varphi - F)(z), \forall z \in H.$$

En particulier, pour $y = x_2(t)$ et $z = x_1(t)$, on obtient

$$\langle \gamma_1(t), x_2(t) - x_1(t) \rangle + (\varphi - F)(x_1(t)) \leq (\varphi - F)(x_2(t)),$$

et

$$\langle \gamma_2(t), x_1(t) - x_2(t) \rangle + (\varphi - F)(x_2(t)) \leq (\varphi - F)(x_1(t)).$$

En additionnant ces deux dernières inégalités, on obtient

$$\langle \gamma_2(t) - \gamma_1(t), x_1(t) - x_2(t) \rangle \leq 0, \tag{2.7}$$

par suite

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x_1(t) - x_2(t)|^2 &= \langle x_1(t) - x_2(t), \gamma_2(t) - \gamma_1(t) \rangle + \langle x_1(t) - x_2(t), y_2(t) - y_1(t) \rangle \\
&\leq -\langle x_1(t) - x_2(t), y_1(t) - y_2(t) \rangle,
\end{aligned}$$

et par l'hypothèse $H(\varphi)(iii)$ et le fait que $y_i(t) \in \partial_c F(x_i(t)), i = \overline{1,2}$, on obtient

$$\langle x_1(t) - x_2(t), y_1(t) - y_2(t) \rangle \geq -M|x_1(t) - x_2(t)|^2, \tag{2.8}$$

donc, par la relation (2.8), on trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x_1(t) - x_2(t)|^2 \leq M|x_1(t) - x_2(t)|^2.$$

En intègre cette dernière inégalité entre 0 et t, on obtient

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}|x_1(s)-x_2(s)|^2 ds \leq M\int_0^t |x_1(s)-x_2(s)|^2 ds$$

implique

$$|x_1(t)-x_2(t)|^2 - |x_1(0)-x_2(0)|^2 \leq 2M\int_0^t |x_1(s)-x_2(s)|^2 ds,$$

et comme $x_1(0)=x_2(0)=x_0$, donc

$$|x_1(t)-x_2(t)|^2 \leq 2M\int_0^t |x_1(s)-x_2(s)|^2 ds.$$

En appliquant le Lemme de Gronwall (Lemme 1.7.2), on obtient

$$|x_1(t)-x_2(t)|^2 \leq 0,$$

implique $x_1(t)=x_2(t)$, pour tout $t\in I$, donc l'unicité de la solution du problème $(\mathcal{P}_2)$.

Etape 2.

Soit $x(.)$ une solution du problème $(\mathcal{P}_2)$, c'est à dire, pour tout $t\in I$,

$$-\dot{x}(t)\in\partial(\varphi-F)(x(t))+\partial_c F(x(t))+f(t),$$

avec $x(0)=x_0$.

Comme les multi-applications $y\mapsto\partial(\varphi-F)(y)$ et $y\mapsto\partial_c F(y)$ sont s.c.s et $x(.)$ est continue, on conclut que les multi-applications $t\mapsto\partial(\varphi-F)(x(t))$ et $t\mapsto\partial_c F(x(t))$ sont mesurables, alors d'après le théorème d'existence de sélections mesurables (Théorème 1.5.1), il existe $\gamma: I\to H$ telle que $\gamma(t)\in\partial(\varphi-F)(x(t)),\forall t\in I$ et il existe $y: I\to H$ telle que $y(t)\in\partial_c F(x(t)),\forall t\in I$, ceci donne

$$-\dot{x}(t)=\gamma(t)+y(t)+f(t).$$

Pour tous $\gamma_0\in\partial(\varphi-F)(x_0)$ et $y_0\in\partial_c F(x_0)$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x(t)-x_0|^2 &= \langle x(t)-x_0,\dot{x}(t)\rangle\\ &= \langle x(t)-x_0,-\gamma(t)-y(t)-f(t)\rangle\\ &= \langle x(t)-x_0,\gamma_0-\gamma(t)\rangle+\langle x(t)-x_0,y_0-y(t)\rangle\\ &+\langle x(t)-x_0,-\gamma_0-y_0-f(t)\rangle\\ &= -\langle x(t)-x_0,y(t)-y_0\rangle+\langle x(t)-x_0,\gamma_0-\gamma(t)\rangle\\ &+\langle x(t)-x_0,-\gamma_0-y_0-f(t)\rangle,\end{aligned}$$

comme $\gamma_0\in\partial(\varphi-F)(x_0)$ et $\gamma(t)\in\partial(\varphi-F)(x(t))$, donc par la définition de sous différentiel au sens de l'analyse convexe, on obtient

$$\langle\gamma_0,y-x_0\rangle+(\varphi-F)(x_0)\leq(\varphi-F)(y),\forall y\in H,$$

et

$$\langle \gamma(t), z - x(t) \rangle + (\varphi - F)(x(t)) \leq (\varphi - F)(z), \forall z \in H.$$

En particulier pour $y = x(t)$ et $z = x_0$, on obtient

$$\langle \gamma_0, x(t) - x_0 \rangle + (\varphi - F)(x_0) \leq (\varphi - F)(x(t)),$$

et

$$\langle \gamma(t), x_0 - x(t) \rangle + (\varphi - F)(x(t)) \leq (\varphi - F)(x_0).$$

Nous sommons les deux inégalités ci-dessus, on trouve

$$\langle x(t) - x_0, \gamma_0 - \gamma(t) \rangle \leq 0.$$

Donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,|x(t) - x_0|^2 \leq -\langle x(t) - x_0, y(t) - y_0 \rangle + \langle x(t) - x_0, -\gamma_0 - y_0 - f(t) \rangle,$$

et par l'hypothèse $H(\varphi)(iii)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x(t) - x_0|^2 \leq M|x(t) - x_0|^2 + |x(t) - x_0||\gamma_0 + y_0 + f(t)|,$$

on peut écrire cette dernière inégalité comme suit

$$|x(t) - x_0|\frac{d}{dt}|x(t) - x_0| \leq M|x(t) - x_0|^2 + |x(t) - x_0||\gamma_0 + y_0 + f(t)|,$$

implique

$$\frac{d}{dt}|x(t) - x_0| \leq M|x(t) - x_0| + |\gamma_0 + y_0 + f(t)|,$$

en intègre cette inégalité entre 0 et t, on obtient

$$|x(t) - x_0| - |x(0) - x_0| \leq M\int_0^t |x(s) - x_0|ds + \int_0^t |\gamma_0 + y_0 + f(s)|ds,$$

et comme $x(0) = x_0$, donc

$$|x(t) - x_0| \leq M\int_0^t |x(s) - x_0|ds + \int_0^t |\gamma_0 + y_0 + f(s)|ds,$$

on applique le Lemme de Gronwall (Lemme 1.7.2), on trouve

$$\begin{aligned}
|x(t)-x_0| &\leq \int_0^t |\gamma_0+y_0+f(\tau)| \exp\left(\int_\tau^t Mds\right)d\tau \\
&= \int_0^t |\gamma_0+y_0+f(\tau)| e^{M(t-\tau)}d\tau \\
&= e^{Mt}\int_0^t |\gamma_0+y_0+f(s)|e^{-Ms}ds \\
&\leq e^{Mt}\int_0^t |\gamma_0+y_0+f(s)|ds \\
&\leq e^{MT}\left(\int_0^T |\gamma_0+y_0|ds+\int_0^T |f(s)|ds\right) \\
&\leq e^{MT}\left[|\gamma_0+y_0|T+\left(\int_0^T ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T |f(s)|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= e^{MT}\left(|\gamma_0+y_0|T+\sqrt{T}\|f\|_2\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\Big||x(t)|-|x_0|\Big| &\leq |x(t)-x_0| \\
&\leq e^{MT}\Big(|\gamma_0+y_0|T+\sqrt{T}\|f\|_2\Big),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq |x_0|+e^{MT}\Big(|\gamma_0+y_0|T+\sqrt{T}\|f\|_2\Big) \\
&= \Big(|x_0|+e^{MT}|\gamma_0+y_0|T\Big)+e^{MT}\sqrt{T}\|f\|_2 \\
&= c_1+c_2\|f\|_2, \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

où

$$c_1 = |x_0|+e^{MT}|\gamma_0+y_0|T > 0,$$

et

$$c_2 = e^{MT}\sqrt{T} > 0.$$

Par la définition de $x(.)$ qui est continue et le fait que $y \mapsto \partial_c F(y)$ est s.c.s (par la Proposition 2.2.4), on conclut que l'application $t \mapsto \partial_c F(x(t))$ est mesurable. D'après le Théorème d'existence de sélections mesurables (Théorème 1.5.1), il existe une application mesurable $g : I \to H$ telle que $g(t) \in \partial_c F(x(t))$, pour tout $t \in I$. Ceci donne pour tout $t \in I$,

$$-\dot{x}(t) \in \partial(\varphi - F)(x(t)) + g(t) + f(t). \qquad (2.10)$$

Par l'hypothèse $H(\varphi)(ii)$ et comme $x(.)$ est borné par la relation (2.9), on aura

$g(.) \in \mathbf{L}^2(I, H)$, donc par le Théorème 2.3.1 et l'unicité de la solution de (2.10), on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^T |\dot{x}(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_0^T |f(t) + g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{|(\varphi - F)(x_0)|} \\
&= \|f + g\|_2 + \sqrt{|(\varphi - F)(x_0)|} \\
&\leq \|f\|_2 + \|g\|_2 + \sqrt{|(\varphi - F)(x_0)|},
\end{aligned}$$

et d'après l'hypothèse $H(\varphi)(ii)$ et la relation (2.9), on a

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^T |\dot{x}(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sqrt{|(\varphi - F)(x_0)|} + \|f\|_2 + \left(\int_0^T |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{|(\varphi - F)(x_0)|} + \|f\|_2 + \left(\int_0^T c^2(1 + |x(t)|)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{|(\varphi - F)(x_0)|} + \|f\|_2 + c\left(\int_0^T (1 + c_1 + c_2\|f\|_2)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{|(\varphi - F)(x_0)|} + \|f\|_2 + c(1 + c_1 + c_2\|f\|_2)\sqrt{T} \\
&= \sqrt{|(\varphi - F)(x_0)|} + c(1 + c_1)\sqrt{T} + (1 + cc_2\sqrt{T})\|f\|_2 \\
&= d_1 + d_2\|f\|_2,
\end{aligned}$$

où

$$d_1 = \sqrt{|(\varphi - F)(x_0)|} + c(1 + c_1)\sqrt{T},$$

et

$$d_2 = (1 + cc_2\sqrt{T}).$$

Ceci termine la preuve. ■

2.3.2 Cas où la perturbation est une multi-application semi-continue supérieurement

Dans cette section, nous démontrons l'existence de la solution du problème $(\mathcal{P})$, où $(t,x) \mapsto G(t,x)$ est une multi-application s.c.s par rapport à la deuxième variable x.

Théorème 2.3.3. *Soient H un espace de Hilbert séparable, $\varphi : H \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne satisfaisant les hypothèses $H(\varphi)$ et soit $G : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application satisfaisant à (1), (2) et (3) de la Proposition 2.3.1. Alors l'inclusion différentielle $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution forte $x(.)$.*

Preuve.

D'après la preuve du Théorème 2.3.2, l'inclusion différentielle $(\mathcal{P})$ équivaut à

$$(\mathcal{P}_G) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial(\varphi - F)(x(t)) + \partial_c F(x(t)) + G(t, x(t)), \quad p.p. \ t \in I, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Dans la suite, nous allons prouver que la multi-application $(t,x) \mapsto \partial_c F(x(t)) + G(t,x(t))$ satisfaisant les hypothèses (1),(2) et (3) du Proposition 2.3.1.

On a, la multi-application $t \mapsto \partial_c F(x(t)) + G(t,x(t))$ est mesurable sur I et la multi-application $x \mapsto \partial_c F(x(t)) + G(t,x(t))$ est s.c.s sur $\overline{D(\partial(\varphi - F))}$ dans H_σ à valeurs non vides convexes faiblement compactes et on a par l'hypothèse $H(\varphi)(ii)$ et l'hypothèse (3) de la Proposition 2.3.1, pour $y \in \partial_c F(x) + G(t,x)$, il existe $y_1 \in \partial_c F(x)$ et $y_2 \in G(t,x)$, telle que

$$\begin{aligned} |y| &= |y_1 + y_2| \\ &\leq |y_1| + |y_2| \\ &\leq \sup_{y_1 \in \partial_c F(x)} |y_1| + \sup_{y_2 \in G(t,x)} |y_2| \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \sup_{y \in \partial_c F(x) + G(t,x)} |y| &\leq \sup_{y_1 \in \partial_c F(x)} |y_1| + \sup_{y_2 \in G(t,x)} |y_2| \\ &\leq c(1 + |x|) + \gamma(t)|x| + \delta(t) \\ &= (c + \gamma(t))|x| + (c + \delta(t)) \\ &= \gamma_1(t)|x| + \delta_2(t), \end{aligned}$$

où $\gamma_1(.) = c + \gamma(.) \in \mathbf{L}^2(I, \mathbb{R})$ et $\delta_2(.) = c + \delta(.) \in \mathbf{L}^2(I, \mathbb{R})$.
On conclure alors que le Théorème 2.3.3 est une conséquence de la Proposition 2.3.1, donc l'inclusion différentielle $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution forte. ■

2.3.3 Cas où la perturbation est une multi-application semi-continue inférieurement

Ensuite, nous traitons l'inclusion différentielle $(\mathcal{P})$ avec une multi-application s.c.i par rapport à la deuxième variable.

Théorème 2.3.4. *Soient H un espace de Hilbert séparable, $\varphi : H \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne satisfaisant les hypothèses $H(\varphi)$ et $x_0 \in D(\partial_c \varphi)$. Soit $G : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application vérifiant les hypothèses suivantes*
(H_1) $(t, x) \mapsto G(t, x)$ est mesurable ;
(H_2) ils existent deux fonctions positives $a(.), b(.) \in \mathbf{L}^2(I, \mathbb{R})$, telle que

$$|G(t, x)| \leq a(t) + b(t)|x|, \ \ p.p. \ t \in I;$$

(H_3) pour tout $t \in I$, $x \mapsto G(t, x)$ est s.c.i.
Alors, l'inclusion différentielle $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution forte.

Preuve.
Premièrement on trouve une bornetude de la solution du problème $(\mathcal{P})$.

Soit $x(.)$ une solution forte de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P})$. Alors par définition il existe une application $g : I \to H$, avec $g(.) \in \mathbf{S}^2_{G(.,x(.))}$ telle que

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial_c \varphi(x(t)) + g(t), \ \ p.p. \ \ t \in I, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{S}^2_{G(.,x(.))} = \{g(.) \in \mathbf{L}^2(I, H) : g(t) \in G(t, x(t)), \ p.p. \ \ t \in I\}.$$

Donc, pour tout $t \in I$, nous avons

$$-\dot{x}(t) \in \partial(\varphi - F)(x(t)) + \partial_c F(x(t)) + g(t),$$

ainsi, comme les deux multi-applications $y \mapsto \partial(\varphi - F)(y)$ et $y \mapsto \partial_c F(y)$ sont s.c.s et $x(.)$ est continue, on conclut que $t \mapsto \partial(\varphi - F)(x(t))$ et $t \mapsto \partial_c F(x(t))$ sont mesurables, donc par le Théorème d'existence de sélections mesurables (Théorème 1.5.1), il existe $\gamma, y : I \to H$ telle que $\gamma(t) \in \partial(\varphi - F)(x(t))$ et $y(t) \in \partial_c F(x(t)), \forall t \in I$, ceci donne

$$-\dot{x}(t) = \gamma(t) + y(t) + g(t),$$

avec $x(0) = x_0$.
Pour tout $\gamma_0 \in \partial(\varphi - F)(x_0)$ et $y_0 \in \partial_c F(x_0)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x(t) - x_0|^2 &= \langle x(t) - x_0, \dot{x}(t)\rangle \\
&= \langle x(t) - x_0, -\gamma(t) - y(t) - g(t)\rangle \\
&= \langle x(t) - x_0, \gamma_0 - \gamma(t)\rangle + \langle x(t) - x_0, y_0 - y(t)\rangle \\
&+ \langle x(t) - x_0, -\gamma_0 - y_0 - g(t)\rangle \\
&= -\langle x(t) - x_0, y(t) - y_0\rangle + \langle x(t) - x_0, \gamma_0 - \gamma(t)\rangle \\
&+ \langle x(t) - x_0, -\gamma_0 - y_0 - g(t)\rangle.
\end{aligned}$$

Comme $\gamma_0 \in \partial(\varphi - F)(x_0)$ et $\gamma(t) \in \partial(\varphi - F)(x(t))$, donc par la définition de sous différentiel au sens de l'analyse convexe, on a

$$\langle \gamma_0, y - x_0\rangle + (\varphi - F)(x_0) \leq (\varphi - F)(y), \forall y \in H,$$

et

$$\langle \gamma(t), z - x(t)\rangle + (\varphi - F)(x(t)) \leq (\varphi - F)(z), \forall z \in H.$$

En particulier pour $y = x(t)$ et $z = x_0$, on obtient

$$\langle \gamma_0, x(t) - x_0\rangle + (\varphi - F)(x_0) \leq (\varphi - F)(x(t)),$$

et

$$\langle \gamma(t), x_0 - x(t)\rangle + (\varphi - F)(x(t)) \leq (\varphi - F)(x_0).$$

Nous sommons les deux inégalités ci-dessus, on trouve

$$\langle x(t) - x_0, \gamma_0 - \gamma(t)\rangle \leq 0,$$

alors, par l'hypothèse $H(\varphi)(iii)$ et l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x(t) - x_0|^2 &\leq -\langle x(t) - x_0, y(t) - y_0\rangle + \langle x(t) - x_0, -\gamma_0 - y_0 - g(t)\rangle \\
&\leq M|x(t) - x_0|^2 + |x(t) - x_0||\gamma_0 + y_0 + g(t)|,
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$|x(t) - x_0|\frac{d}{dt}|x(t) - x_0| \leq M|x(t) - x_0|^2 + |x(t) - x_0||\gamma_0 + y_0 + g(t)|,$$

donc

$$\frac{d}{dt}|x(t) - x_0| \leq M|x(t) - x_0| + |\gamma_0 + y_0 + g(t)|,$$

en intègre entre 0 et t, on obtient

$$|x(t) - x_0| - |x(0) - x_0| \leq M \int_0^t |x(s) - x_0| ds + \int_0^t |\gamma_0 + y_0 + g(s)| ds,$$

avec $x(0) = x_0$, par le Lemme de Gronwall (Lemme 1.7.2), on obtient

$$\begin{aligned}
|x(t) - x_0| &\leq \int_0^t |\gamma_0 + y_0 + g(\tau)| \exp\left(\int_\tau^t M ds\right) d\tau \\
&= \int_0^t |\gamma_0 + y_0 + g(\tau)| e^{M(t-\tau)} d\tau \\
&= e^{Mt} \int_0^t |\gamma_0 + y_0 + g(s)| e^{-Ms} ds \\
&\leq e^{Mt} \int_0^t |\gamma_0 + y_0 + g(s)| ds \\
&\leq e^{Mt} \left(\int_0^t |\gamma_0 + y_0| ds + \int_0^t |g(s)| ds \right).
\end{aligned}$$

Donc, par l'hypothèse (H_2), on a

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq |x_0| + e^{MT} \Big(|\gamma_0 + y_0| T + \int_0^t |g(s)| ds \Big) \\
&\leq |x_0| + e^{MT} (|\gamma_0 + y_0| T + \int_0^t (a(s) + b(s)|x(s)|) ds \\
&\leq |x_0| + e^{MT} (|\gamma_0 + y_0| T + e^{MT} \|a\|_1 + e^{MT} \int_0^t b(s)|x(s)| ds.
\end{aligned}$$

En vertu du Lemme 1.7.2 (Lemme de Gronwall), on obtient

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq (|x_0| + e^{MT} |\gamma_0 + y_0| T + e^{MT} \|a\|_1) \, exp\,(e^{MT} \int_0^t b(s) ds) \\
&\leq (|x_0| + e^{MT} |\gamma_0 + y_0| T + e^{MT} \|a\|_1) \, exp\,(e^{MT} \|b\|_1),
\end{aligned}$$

donc, pour tout $t \in I$,

$$|x(t)| \leq k,$$

avec

$$k = (|x_0| + e^{MT} |\gamma_0 + y_0| T + e^{MT} \|a\|_1) \, exp(e^{MT} \|b\|_1) > 0.$$

Considérons maintenant la multi-application $\widehat{G} : I \times H \rightrightarrows H$, définie par

$$\widehat{G}(t, x) = \begin{cases} G(t, x) & \text{si} \;\; |x| \leq k \\ G\Big(t, \dfrac{kx}{|x|}\Big) & \text{si} \;\; |x| > k. \end{cases}$$

Il est claire que $\widehat{G}(t,x) = G(t, p_k(x))$, où

$$p_k(x) = \begin{cases} x & \text{si } \; |x| \leq k \\ \dfrac{kx}{|x|} & \text{si } \; |x| > k, \end{cases}$$

qui est continue, ainsi on a la multi-application $(t,x) \mapsto \widehat{G}(t,x)$ est mesurable et pour tout $t \in I$, $x \mapsto \widehat{G}(t,x)$ est s.c.i.

En plus, par l'hypothèse (H_2), on a

$$\begin{aligned} |\widehat{G}(t,x)| &= |G(t, p_k(x))| \\ &\leq a(t) + b(t)|p_k(x)| \\ &\leq a(t) + b(t)k = \gamma(t), \;\; p.p. \;\; t \in I, \end{aligned}$$

on aura $\gamma(.)$ est une fonction positive de $\mathbf{L}^2(I, \mathbb{R})$.

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{B}(\gamma) = \{h(.) \in \mathbf{L}^2(I,H) : \; |h(t)| \leq \gamma(t), \;\; p.p. \;\; t \in I\}.$$

Il est clair que $\mathcal{B}(\gamma)$ est un sous ensemble faiblement compact dans $\mathbf{L}^2(I,H)$.

En effet. Soit $(h_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}(\gamma)$, donc $|h_n(t)| \leq \gamma(t)$, $p.p. \, t \in I$, c'est à dire $\|h_n\|_2 \leq \|\gamma\|_2$.

Posons $s_n(t) = \dfrac{h_n(t)}{\|\gamma\|_2}$, ceci donne $\|s_n\|_2 = \dfrac{\|h_n\|_2}{\|\gamma\|_2} \leq 1$, donc $s_n(.) \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{L}^2(I,H)}$ qui est faiblement compacte dans $\mathbf{L}^2(I,H)$, car $\mathbf{L}^2(I,H)$ est réflexif, par extraction d'une sous suite on peut supposer que $(s_n(.))_n$ converge faiblement vers une application $s(.) \in \mathbf{L}^2(I,H)$, c'est à dire pour tout $z \in \mathbf{L}^2(I,H)$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle s_n(.), z_n(.)\rangle = \langle s(.), z(.)\rangle.$$

Soit $y(.) \in \mathbf{L}^2(I,H)$, alors

$$\begin{aligned} \langle h_n(.), y(.)\rangle &= \langle \|\gamma\|_2 s_n(.), y(.)\rangle \\ &= \langle s_n(.), \|\gamma\|_2 y(.)\rangle, \end{aligned}$$

comme $y(.) \in \mathbf{L}^2(I,H)$, on aura $\|\gamma\|_2 y(.) \in \mathbf{L}^2(I,H)$, et par suite

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \langle h_n(.), y(.)\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle s_n(.), \|\gamma\|_2 y(.)\rangle \\ &= \langle s(.), \|\gamma\|_2 y(.)\rangle \\ &= \langle \|\gamma\|_2 s(.), y(.)\rangle, \end{aligned}$$

c'est à dire $(h_n(.))$ converge faiblement dans $\mathbf{L}^2(I,H)$ vers l'application $h(.) = \|\gamma\|_2 s(.)$.
Ceci montre que $\mathcal{B}(\gamma)$ est relativement compact dans $\mathbf{L}^2(I,H)$.
De plus, $\mathcal{B}(\gamma)$ est un sous ensemble convexe fortement fermé dans $\mathbf{L}^2(I,H)$.
En effet. Soient $\lambda \in [0,1], h_1(.), h_2(.) \in \mathcal{B}(\gamma)$, on aura $\lambda h_1(.) + (1-\lambda)h_2(.) \in \mathbf{L}^2(I,H)$ et nous avons

$$\begin{aligned}|\lambda h_1(t) + (1-\lambda)h_2(t)| &\leq \lambda|h_1(t)| + (1-\lambda)|h_2(t)|\\ &\leq \lambda\gamma(t) + (1-\lambda)\gamma(t)\\ &= \gamma(t),\end{aligned}$$

d'où la convexité de $\mathcal{B}(\gamma)$.

Maintenant, soit $(h_n(.))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\gamma)$ une suite convergeant vers $h(.) \in \mathbf{L}^2(I,H)$, alors par le Théorème 1.6.2, il existe une sous suite extraite de $(h_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ qu'on note aussi $(h_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $h_n(.) \to h(.)$ presque partout sur I, donc

$$\begin{aligned}|h_n(t)| \leq \gamma(t) &\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |h_n(t)| \leq \gamma(t)\\ &\Longrightarrow |\lim_{n\to\infty} h_n(t)| \leq \gamma(t)\\ &\Longrightarrow |h(t)| \leq \gamma(t).\end{aligned}$$

Alors, l'ensemble $\mathcal{B}(\gamma)$ est fortement fermé, donc par le Théorème 1.7.3, il est faiblement fermé. Nous concluons que l'ensemble $\mathcal{B}(\gamma)$ est faiblement compact dans $\mathbf{L}^2(I,H)$, et par le Théorème Eberlein-Smulian (Théorème 1.7.4), il est séquentiellement faiblement compact.

Pour $h(.) \in \mathcal{B}(\gamma)$, on considère l'inclusion différentielle suivante

$$(\mathcal{P}_h)\begin{cases}-\dot{x}(t) \in \partial_c\varphi(x(t)) + h(t), \quad p.p.\ t \in I,\\ x(0) = x_0.\end{cases}$$

Par le Théorème 2.3.2, on sait que l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_h)$ admet une solution forte unique, que nous désignons par $x(h)(.)$.

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{W} = \Big\{x(h)(.) \in \mathbf{C}(I,H) : x(h)(.) \text{ est la solution forte unique de } (\mathcal{P}_h), h(.) \in \mathcal{B}(\gamma)\Big\}.$$

En suite, on montre que $\mathcal{W}$ est relativement compact.

Pour tout $x(h)(.) \in \mathcal{W}$, $0 \leq t \leq t' \leq T$ et par l'estimation (ii) du Théorème 2.3.2, nous avons

$$\begin{aligned}
|x(t') - x(t)| &= \left| \int_t^{t'} \dot{x}(s) ds \right| \\
&\leq \int_t^{t'} |\dot{x}(s)| ds \\
&\leq \sqrt{t' - t} \sqrt{\int_t^{t'} |\dot{x}(s)|^2 ds} \\
&\leq \sqrt{t' - t} \sqrt{\int_0^{T} |\dot{x}(s)|^2 ds} \\
&\leq \sqrt{t - t'} (d_1 + d_2 \parallel h \parallel_2).
\end{aligned}$$

Donc l'équicontinuité de l'ensemble $\mathcal{W}$.

Puisque $-\dot{x}(t) \in \partial_c \varphi(x(t)) + h(t) = \partial(\varphi - F)(x(t)) + \partial_c F(x(t)) + h(t)$, et le fait que $y \mapsto \partial_c F(y)$ est s.c.s (d'après le Lemme 2.2.1) et $x(.)$ est continue, on conclut que la multi-application $t \mapsto \partial_c F(x(t))$ est mesurable. Donc d'après le Théorème d'existence de sélections mesurables (Théorème 1.5.1), il existe une application mesurable $f : I \to H$ telle que $f(t) \in \partial_c F(x(t)), \forall t \in I$ et

$$-\dot{x}(t) - f(t) - h(t) \in \partial(\varphi - F)(x(t)).$$

Alors par le Théorème 2.3.1, nous avons

$$|\dot{x}(t)|^2 + \frac{d}{dt}(\varphi - F)(x(t)) = \langle -f(t) - h(t), \dot{x}(t) \rangle, \quad p.p.\ t \in I,$$

implique

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\varphi - F)(x(t)) &= -|\dot{x}(t)|^2 + \langle -f(t) - h(t), \dot{x}(t) \rangle \\
&\leq \langle -f(t) - h(t), \dot{x}(t) \rangle, \qquad p.p.\ t \in I.
\end{aligned}$$

En intègre entre 0 et t et par l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
(\varphi - F)(x(t)) - (\varphi - F)(x_0) &\leq \int_0^t \langle -f(s) - h(s), \dot{x}(s) \rangle ds \\
&= \int_0^t \langle -f(s), \dot{x}(s) \rangle ds + \int_0^t \langle -h(s), \dot{x}(s) \rangle ds \\
&\leq \int_0^t |f(s)||\dot{x}(s)| ds + \int_0^t |h(s)||\dot{x}(s)| ds,
\end{aligned}$$

et par l'hypothèse $H(\varphi)(ii)$ et les estimations (i) et (ii) du Théorème 2.3.2, on trouve

$$\begin{aligned}
(\varphi - F)(x(t)) &\leq (\varphi - F)(x_0) + \int_0^t c(1+|x(s)|)|\dot{x}(s)|ds + \int_0^T |h(s)||\dot{x}(s)|ds \\
&\leq (\varphi - F)(x_0) + \int_0^t c(1+|x(s)|)|\dot{x}(s)|ds + \|h\|_2\|\dot{x}\|_2 \\
&\leq (\varphi - F)(x_0) + \int_0^t c(1+|x(s)|)|\dot{x}(s)|ds + \|\gamma\|_2\|\dot{x}\|_2 \\
&\leq (\varphi - F)(x_0) + \int_0^t c\Big(1+c_1+c_2\|h\|_2\Big)|\dot{x}(s)|ds + \|\gamma\|_2\|\dot{x}\|_2 \\
&\leq (\varphi - F)(x_0) + \int_0^T c\Big(1+c_1+c_2\|h\|_2\Big)|\dot{x}(s)|ds + \|\gamma\|_2\|\dot{x}\|_2 \\
&\leq (\varphi - F)(x_0) + c(1+c_1+c_2\|h\|_2)\sqrt{T}\|\dot{x}\|_2 + \ \|\gamma\|_2\|\dot{x}\|_2 \\
&\leq (\varphi - F)(x_0) + \left(c\Big(1+(c_1+c_2\|\gamma\|_2)\Big)\sqrt{T} + \|\gamma\|_2\right)(d_1+d_2\|\gamma\|_2) \\
&:= M_1, \quad \text{pour tout } \ t \in I \ \text{ et } \ x(.) \in \mathcal{W}.
\end{aligned}$$

On a par l'hypothèse $H(\varphi)(i)$, $\varphi - F$ est inf-compact c'est à dire l'ensemble

$$L(k+M_1)(\varphi - F) = \{x \in H : |x| \leq k+M_1, (\varphi - F)(x) \leq k+M_1\},$$

est compact dans H.

D'autre part, on a

$$\overline{\mathcal{W}}(t) = cl\{x(t) : x(.) \in \mathcal{W}\} \subseteq L(k+M_1)(\varphi - F),$$

En effet. Soit $x(.) \in \mathcal{W}$, c'est à dire $x(.)$ est une solution du problème $(\mathcal{P}_h)$, donc

$$|x(t)| \leq k+M_1 \ \text{ et } \ (\varphi - F)(x(t)) \leq k+M_1,$$

implique

$$x(.) \in L(k+M_1)(\varphi - F),$$

alors $\overline{\mathcal{W}}(t) = cl\{x(t) : \ x(.) \in \mathcal{W}\} \subseteq L(k+M_1)(\varphi - F)$, et comme $\overline{\mathcal{W}}(t)$ est fermé et $L(k+M_1)(\varphi - F)$ est compact, donc $\overline{\mathcal{W}}(t)$ l'est aussi.

Donc par le théorème d'Arzéla-Ascoli (Théorème 1.7.1), on conclut que $\mathcal{W}$ est relativement compact dans $\mathbf{C}(I, H)$.
En suite, on montre que $\mathcal{W}$ est fermé dans $\mathbf{C}(I, H)$. Soit $(x_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{W}$ convergeant vers $x(.) \in \mathbf{C}(I, H)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $h_n(.) \in \mathcal{B}(\gamma)$ telle que

$$\begin{cases} -\dot{x}_n(t) \in \partial_c\varphi(x_n(t)) + h_n(t), \ \ p.p. \ t \in I, \\ x_n(0) = x_0, \end{cases}$$

Comme $\mathcal{B}(\gamma)$ est faiblement compact dans $\mathbf{L}^2(I,H)$, on peut extraire de $(h_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite notée aussi $(h_n(.))_n$ qui converge dans $\mathbf{L}^2(I,H)$, par rapport à la topologie faible $\sigma(\mathbf{L}^2,\mathbf{L}^2)$ vers une application $h(.)\in\mathcal{B}(\gamma)$. Le fait que $y\mapsto\partial_c F(y)$ est s.c.s (par le Lemme 2.2.1) et $x_n(.)$ est continue, on conclut que la multi-application $t\mapsto\partial_c F(x_n(t))$ est mesurable, donc par le théorème d'existence de sélections mesurables (Théorème 1.5.1), il existe une application mesurable $f_n: I\to H$ telle que $f_n(t)\in\partial_c F(x_n(t))$, $\forall t\in I$, ceci donne

$$-\dot{x}_n(t)-f_n(t)-h_n(t)\in\partial(\varphi-F)(x_n(t)).$$

Soit $\widehat{x}(.)$ une solution de $(\mathcal{P}_h)$ correspondante à h. Alors $\widehat{x}(.)\in\mathcal{W}$ et on a la multi-application $y\mapsto\partial(\varphi-F)(y)$ est s.c.s et $\widehat{x}(.)$ et $x_n(.)$ sont continues, donc les deux multi-applications $t\mapsto\partial(\varphi-F)(\widehat{x}(t))$ et $t\mapsto\partial(\varphi-F)(x_n(t))$ sont mesurables, donc d'après le théorème d'existence de sélections mesurables (Théorème 1.5.1), il existe une multi-application mesurable $\widehat{\gamma}: I\to H$ et $\gamma_n: I\to H$ telle que $\widehat{\gamma}(t)\in\partial(\varphi-F)(\widehat{x}(t))$ et $\gamma_n(t)\in\partial(\varphi-F)(x_n(t)),\forall t\in I$, et on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x_n(t)-\widehat{x}(t)|^2 &= \langle x_n(t)-\widehat{x}(t),\dot{x}_n(t)-\dot{\widehat{x}}(t)\rangle\\ &= \langle x_n(t)-\widehat{x}(t),-f_n(t)-h_n(t)-\gamma_n(t)+f(t)+h(t)+\widehat{\gamma}(t)\rangle\\ &= \langle x_n(t)-\widehat{x}(t),f(t)-f_n(t)\rangle+\langle x_n(t)-\widehat{x}(t),h(t)-h_n(t)\rangle\\ &+\langle x_n(t)-\widehat{x}(t),\widehat{\gamma}(t)-\gamma_n(t)\rangle.\end{aligned}$$

Par la définition de sous différentiel au sens de l'analyse convexe

$$\langle\widehat{\gamma}(t),y-\widehat{x}(t)\rangle+(\varphi-F)(\widehat{x}(t))\leq(\varphi-F)(y),\ \ \forall\, y\in H,$$

et

$$\langle\gamma_n(t),z-x_n(t)\rangle+(\varphi-F)(x_n(t))\leq(\varphi-F)(z),\ \forall\, z\in H.$$

En particulier pour $y=x_n(t)$ et $z=\widehat{x}(t)$, on obtient

$$\langle\widehat{\gamma}_n(t),x_n(t)-\widehat{x}(t)\rangle+(\varphi-F)(\widehat{x}(t))\leq(\varphi-F)(x_n(t)),$$

et

$$\langle\gamma_n(t),\widehat{x}(t)-x_n(t)\rangle+(\varphi-F)(x_n(t))\leq(\varphi-F)(\widehat{x}(t)).$$

En additionnant ces deux dernières inégalités, nous obtenons

$$\langle x_n(t)-\widehat{x}(t),\widehat{\gamma}(t)-\gamma_n(t)\rangle\leq 0,$$

et par l'hypothèse $H(\varphi)(iii)$, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x_n(t)-\widehat{x}(t)|^2 &\leq \langle x_n(t)-\widehat{x}(t),f(t)-f_n(t)\rangle+\langle x_n(t)-\widehat{x}(t),h(t)-h_n(t)\rangle\\ &\leq M|x_n(t)-\widehat{x}(t)|^2+\langle x_n(t)-\widehat{x}(t),h(t)-h_n(t)\rangle.\end{aligned}$$

En intègre l'inégalité ci-dessus entre 0 et t, on obtient

$$|x_n(t)-\widehat{x}(t)|^2-|x_n(0)-\widehat{x}(0)|^2 \leq 2M\int_0^t |x_n(s)-\widehat{x}(s)|^2ds+2\int_0^t \langle x_n(s)-\widehat{x}(s), h(s)-h_n(s)\rangle ds,$$

avec $x_n(0) = \widehat{x}(0) = 0$, par un passage à la limite dans la dernière inégalité, quand $n \to +\infty$, nous avons

$$|x(t) - \widehat{x}(t)|^2 \leq 2M \int_0^t |x(s) - \widehat{x}(s)|^2 ds.$$

On appliquant le Lemme de Gronwall (Lemme 1.7.2), on obtient $|x(t) - \widehat{x}(t)|^2 \leq 0$, donc $x(t) = \widehat{x}(t)$, pour presque tout $t \in I$. Donc $\mathcal{W}$ est fermé dans $\mathbf{C}(I, H)$, et par suite la compacité. On pose $\widehat{\mathcal{W}} = \overline{co}(\mathcal{W})$, donc $\widehat{\mathcal{W}}$ est convexe compact dans $\mathbf{C}(I, H)$.

Maintenant, on considère la multi-application $R : \widehat{\mathcal{W}} \to \mathbf{L}^2(I, H)$ défini par

$$R(y) = \mathbf{S}^2_{\widehat{G}(.,y(.))} = \{g(.) \in \mathbf{L}^2(I, H) : \; g(t) \in \widehat{G}(t, y(t))\}.$$

On a par l'hypothèse (H_3) pour tout $t \in I$, la multi-application $x \mapsto G(t, x)$ est s.c.s, donc $x \mapsto \widehat{G}(t, x)$ l'est aussi et par le Théorème 2.2.2, on conclut que la multi-application $R(.)$ est s.c.i.

On applique le Théorème 2.2.3, on obtient une sélection continue $r : \widehat{\mathcal{W}} \to \mathbf{L}^2(I, H)$ de $R(y)$, c'est à dire $r(y) \in R(y)$, pour tout $y \in \widehat{\mathcal{W}}$, alors, il existe une solution unique $x(y)(.)$ de $(\mathcal{P}_h)$ avec $h(.) = r(y)(.)$.

Maintenant, on considère l'application continue p défini par

$$\begin{array}{rcl} p : \widehat{\mathcal{W}} & \to & \widehat{\mathcal{W}} \\ y & \mapsto & x(y)(.). \end{array}$$

où $x(y)(.)$ est l'unique solution de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_h)$ correspondant à $h(.)$ avec $h(.) = r(y)(.)$.

On applique le théorème du point fixe de Schauder (Théorème 1.5.4), on obtient l'existence de $\overline{x} \in \widehat{\mathcal{W}}$ tel que $\overline{x} = p(\overline{x})$, donc $p(\overline{x})$ est l'unique solution de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_h)$ correspondant à $r(\overline{x})$, c'est à dire

$$-\dot{\overline{x}} \in \partial_c\varphi(\overline{x}(t)) + r(\overline{x})(t), \quad p.p. \;\; t \in I,$$

et comme $r(\overline{x})(t) \in \mathbf{S}^2_{\widehat{G}(.,\overline{x}(.))}$, c'est à dire $r(\overline{x})(t) \in \widehat{G}(t, \overline{x}(t))$, et comme $|\overline{x}(t)| \leq k$, donc $\widehat{G}(t, \overline{x}(t)) = G(t, \overline{x}(t))$, on obtient

$$-\dot{\overline{x}} \in \partial_c\varphi(\overline{x}(t)) + G(t, \overline{x}(t), p.p. \;\; t \in I, \text{avec } \; \overline{x}(0) = x_0,$$

c'est à dire $\overline{x}(.)$ est une solution de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P})$.
Ce ci achève la démenstration.

$\blacksquare$

CHAPITRE 3

SOLUTIONS EXTRÉMALES POUR UN PROBLÈME AUX LIMITES GOUVERNÉ PAR LE SOUS DIFFÉRENTIEL DE CLARKE

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie un problème de relaxation associe à l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_G)\begin{cases}-\dot{x}(t) \in \partial_c\varphi(x(t)) + G(t, x(t)),\ p.p.\ t \in I,\\ x(0) = x_0\end{cases}$$

quand la relaxation considérée est l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_{ext(G)})\begin{cases}-\dot{x}(t) \in \partial_c\varphi(x(t)) + ext(G(t, x(t)),\ p.p.\ t \in I,\\ x(0) = x_0,\end{cases}$$

où $t \in I = [0, T]$ un intervalle non vide fermé dans $\mathbb{R}_+$, H un espace de Hilbert séparable, $x_0 \in D(\partial_c\varphi) = \{x \in H : \partial_c\varphi(x) \neq \emptyset\}$, $G : I \times H \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs non vides convexes compactes, mesurable sur I et $\mathcal{H}$-continue sur $H \times H$, et $ext(G(t, x(t)))$ désigne l'ensemble des points extrémaux à $G(t, x(t))$.

3.2 Préliminaires

Dans ce chapitre aussi on note $I = [0, T]$.

3.2.1 Points extrémaux

Dans cette section, nous présentons quelques définitions et résultats sur les points extrémaux (voir [18]).

Définition 3.2.1. *Soit X un espace vectoriel et $K \subset X$. On dit que $x \in K$ est un point extrémal à K si $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, $x_1, x_2 \in X$ et $\alpha \in]0,1[$, alors $x_1 = x_2$.*

Si K est convexe, un point $x \in K$ est extrémal à K si x ne puisse être intérieur à un segment de droite inclus dans K.

On note par ext(K), l'ensemble des points extrémaux à K.

Exemples 3.2.1.

(i) Si K est un cercle de $\mathbb{R}^2$, alors ext(K) est la circonférence de ce cercle.

(ii) Si K est un rectangle de $\mathbb{R}^2$, alors ext(K) est l'ensemble des quatre sommets de ce rectangle.

(iii) Soit K un convexe de $\mathbb{R}^d$, telle que

$$K = \left\{ x \in (\mathbb{R}^+)^d : \|x\| = \sum_{i=1}^{d} x_i = 1 \right\},$$

alors, les points extrémaux de K sont les vecteurs $e_1, e_2, ..., e_d$ de la base canonique.

Théorème 3.2.1. ***(Théorème de Krein-Milman)***
Soit X un espace topologique localement convexe. Alors tout ensemble convexe compact K de X admet au moins un point extrémal, i.e., ext$(K) \neq \emptyset$. De plus K est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.

Définition 3.2.2. *(voir [21]) Soit X un espace de Banach, un ensemble non vide $M_0 \subseteq$ $\mathbf{C}(I, X)$ est dit σ-compact, s'il existe une suite $(M_k)_{k \geq 1}$ des ensembles compacts M_k telle que $M_0 = \bigcup_{k \geq 1} M_k$.*

Définition 3.2.3. *Soit X un espace de Banach et Y un espace métrique. Soit la multi-application $H : [0,T] \times Y \rightrightarrows X$ à valeurs non vides compactes convexes.*

On dit que H est intégrablement bornée sur les compacts de Y, si pour tout compact $D \subset Y$, nous pouvons trouver une fonction intégrable $a_D : [0,T] \to \mathbb{R}$ telle que

$$sup \{\|y\| : y \in H(t,z)\} \leq a_D(t),$$

pour presque tout $z \in D$.

Proposition 3.2.1. *(voir [24]) Soit X un espace de Banach séparable, soit $F : I \times X \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides, convexes, faiblement compactes et intégrablement bornée dans $M \subseteq \mathbf{C}(I,H)$, telle que*

(1) pour tout $x \in X$, $t \mapsto F(t,x)$ est mesurable ;

(2) pour tout $t \in I$, $x \mapsto F(t,x)$ est $\mathcal{H}$-continue.

S'il existe $M_0 \subseteq M$ tel que M_0 dense dans M et σ-compact, alors il existe une application continue $g : M \to \mathbf{L}^1(I,X)$ telle que pour presque tout $t \in I$, si $x(.) \in M_0$, alors $g(x)(t) \in ext(F(t,x(t)))$, et si $x(.) \in M \backslash M_0$, alors $g(x)(t) \in \overline{ext}\Big(F(t,x(t))\Big)$.

3.3 Théorème de Relaxation

Nous pouvons énoncer le Théorème démontré par S. Qin et X. Xue [21].

Théorème 3.3.1. *Soient H un espace de Hilbert séparable, $\varphi : H \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne satisfaisant les conditions $H(\varphi)$ et $G : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides convexes faiblement compactes vérifiant les hypothèses*

(H_1) *pour tout $x \in H$, $t \mapsto G(t,x)$ est mesurable ;*

(H_2) *pour presque $t \in I$, $x \mapsto G(t,x)$ est $\mathcal{H}$-continue ;*

(H_3) *il existe deux fonctions positives $a(.), b(.) \in \mathbf{L}^2(I,\mathbb{R})$, telle que*

$$|G(t,x)| \leq a(t) + b(t)|x| \,, \quad p.p. \;\; t \in I,$$

Alors, l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_{ext(G)}) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial_c\varphi(x(t)) + ext(G(t,x(t))), \; p.p. \; t \in I, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

admet au moins une solution forte.

Preuve.
Comme dans la preuve du Théorème 2.3.4, nous trouvons une bornetude de la solution du problème $(\mathcal{P}_{ext(G)})$.

On a l'ensemble des solutions $S(\mathcal{P}_{ext(G)})$ du problème $(\mathcal{P}_{ext(G)})$ est inclue dans l'ensemble des solutions $S(\mathcal{P}_G)$ du problème $(\mathcal{P}_G)$, donc pour $x(.) \in S(\mathcal{P}_{ext(G)})$, il existe $k > 0$, telle que $|x(t)| \leq k$, pour tout $t \in I$.

Considérons une multi-application $\widehat{G} : I \times H \rightrightarrows H$, définie par

$$\widehat{G}(t,x) = \begin{cases} G(t,x) & \text{si} \quad |x| \leq k \\ G\Big(t, \dfrac{kx}{|x|}\Big) & \text{si} \quad |x| > k, \end{cases}$$

il est claire que

$$\widehat{G}(t,x) = G(t, p_k(x)),$$

où

$$p_k(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq k \\ \dfrac{kx}{|x|} & \text{si } |x| > k, \end{cases}$$

donc, pour tout $x \in H$, la multi-application $t \mapsto \widehat{G}(t,x)$ est mesurable et pour presque $t \in I$, la multi-application $x \mapsto \widehat{G}(t,x)$ est $\mathcal{H}$-continue, en plus pour tout $t \in I$ et $x \in H$,

$$\begin{aligned} |\widehat{G}(t,x)| &= |G(t, p_k(x))| \\ &\leq a(t) + b(t)|p_k(x)| \\ &\leq a(t) + b(t)k := \gamma(t), \ \ t \in I, \end{aligned}$$

on aura $\gamma(.)$ est une fonction positive de $\mathbf{L}^2(I, \mathbb{R})$.

On définie l'ensemble

$$\mathcal{B}(\gamma) = \{g(.) \in \mathbf{L}^2(I,H) : |g(t)| \leq \gamma(t) \; p.p.t \in I\}$$

qui est un sous ensemble convexe faiblement compacte dans $\mathbf{L}^2(I,H)$ (d'après la preuve du Théorème 2.3.4, et par le Théorème Eberlein-Smulian (Théorème 1.7.4), il est séquentiellement faiblement compact.

Pour $g(.) \in \mathcal{B}(\gamma)$, on considère l'inclusion différentielle suivante

$$(\mathcal{P}_g) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial_c \varphi(x(t)) + g(t), \ p.p. \ t \in I, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

par le Théorème 2.3.2, on sait que l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_g)$ admet une solution forte unique, que nous désignons par $x(g)(.) \in \mathbf{C}(I,H)$.

Considérons maintenant l'ensemble

$$\mathcal{W} = \{x(g)(.) \in \mathbf{C}(I,H) : x(g)(.) \text{ est la solution forte unique de } (\mathcal{P}_g), g(.) \in \mathcal{B}(\gamma)\}$$

qui est compact (d'après la preuve du Théorème 2.3.4).

On pose $\Delta = \overline{co}\mathcal{W}$, donc Δ est convexe compact dans $\mathbf{C}(I,H)$.
On applique la Proposition 3.2.1, nous obtenons une application continue $g : \Delta \to \mathbf{L}^1(I,H)$, telle que $g(x)(t) \in ext(\widehat{G}(t,x(t)))$, *p.p.* $t \in I$,
et

$$\int_0^T |g(x)(s)|^2 ds \leq \int_0^T |\widehat{G}(s,x(s))|^2 ds \leq \|\gamma\|_2^2,$$

c'est à dire $g(x) \in \mathbf{L}^2(I,H) \cap \mathcal{B}(\gamma) = \mathcal{B}(\gamma)$, il est facile le preuve que $g(.)$ est continue de Δ dans $\mathcal{B}(\gamma)$.

Maintenant, on note par $F_{x_0}(f) = x$, la solution unique de $(\mathcal{P})$, avec $G(t,x) = f(t)$. Nous avons besoin du Lemme suivant :

Lemme 3.3.1. *L'application F_{x_0} définie par*

$$\begin{aligned} F_{x_0} : \mathcal{B} &\to \Delta \\ f &\mapsto F_{x_0}(f) = x, \end{aligned}$$

est continue.

Preuve (du Lemme 3.3.1).

Soit $(f_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}(\gamma)$ convergeant vers $f(.) \in \mathbf{L}^2(I,H)$, et comme $\mathcal{B}(\gamma)$ est un ensemble séquentiellement faiblement compact dans $\mathbf{L}^2(I,H)$, alors $f(.) \in \mathcal{B}(\gamma)$.

Soit $x_n = F_{x_0}(f_n)$ et $\widehat{x} = F_{x_0}(f)$ donc $x_n \in \Delta$, qui est compacte dans $\mathbf{C}(I,H)$, alors il existe $x(.) \in \Delta$ tel que $x_n(.)$ converge vers $x(.)$.

Maintenant on va montrer que $x(.) = \widehat{x}(.)$. Par les hypothèses $H(\varphi)$, et le fait que $y \mapsto \partial_c F(y)$ est s.c.s et $x_n(.)$ est continue, il existe une fonction $h_n : I \to H$, telle que $h_n(t) \in \partial_c F(x_n(t))$, ceci donne

$$-\dot{x}_n(t) - f_n(t) - h_n(t) \in \partial(\varphi - F)(x_n(t)).$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x_n(t)-\widehat{x}(t)|^2 &= \langle x_n(t)-\widehat{x}(t), \dot{x}_n(t)-\dot{\widehat{x}}(t)\rangle\\ &\leq \langle x_n(t)-\widehat{x}(t), h(t)-h_n(t)\rangle + \langle x_n(t)-\widehat{x}(t), f(t)-f_n(t)\rangle\\ &\leq M|x_n(t)-\widehat{x}(t)|^2 + \langle x_n(t)-\widehat{x}(t), f(t)-f_n(t)\rangle\\ &= M|x_n(t)-\widehat{x}(t)|^2 + \langle x_n(t)-x(t), f(t)-f_n(t)\rangle\\ &+ \langle x(t)-\widehat{x}(t), f(t)-f_n(t)\rangle.\end{aligned}$$

En intègre l'inégalité ci-dessus entre 0 et t, en obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|x_n(t)-\widehat{x}(t)|^2-\frac{1}{2}|x_n(0)-\widehat{x}(0)| \leq M\int_0^t |x_n(s)-\widehat{x}(s)|^2 ds + \int_0^t \langle x_n(s)-x(s), f(s)-f_n(s)\rangle ds\\ + \int_0^t \langle x(s)-\widehat{x}(s), f(s)-f_n(s)\rangle ds,\end{aligned}$$

avec $x_n(0)=\widehat{x}(0)=x_0$,
implique

$$\begin{aligned}|x_n(t)-\widehat{x}(t)|^2 \leq 2M\int_0^t |x_n(s)-\widehat{x}(s)|^2 ds + \int_0^t \langle x_n(s)-x(s), f(s)-f_n(s)\rangle ds\\ + \int_0^t \langle x(s)-\widehat{x}(s), f(s)-f_n(s)\rangle ds,\end{aligned}$$

on passant à la limite, quand n tend vers $+\infty$, on trouve

$$|x(t)-\widehat{x}(t)|^2 \leq 2M\int_0^t |x(s)-\widehat{x}(s)|^2 ds.$$

En applique l'inégalité de Gronwall (Lemme1.7.2), on conclut que $|x(t)-\widehat{x}(t)|^2 \leq 0$, c'est à dire $x(t)=\widehat{x}(t)$, *p.p.* $t \in I$. Par conséquent F_{x_0} est continue de $\mathcal{B}(\gamma)$ dans Δ.

Finalement on pose $L = F_{x_0} \circ g : \Delta \to \Delta$ qui est continue d'après la continuité de F_{x_0} et g et comme Δ est une ensemble convexe compact. On applique le Théorème du point fixe de Schauder (Théorème 1.5.4), on obtient l'existence de $\overline{x}(.) \in \Delta$, tel que $\overline{x}(.) = (F_{x_0} \circ g)(\overline{x}(.))$, donc $\overline{x}(.)$ est l'unique solution de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_g)$ correspondant à $g(.)$, c'est à dire

$$-\dot{\overline{x}}(t) \in \partial_c\varphi(\overline{x}(t)) + ext\widehat{G}(t,\overline{x}(t)).\ p.p.\ t \in I,\ \text{ avec } x(0)=x_0,$$

et comme $\widehat{G}(t,\overline{x}) = G(t,\overline{x})$, on conclut que $\overline{x}(.)$ est une solution dans $\mathbf{C}(I,H)$ du problème $(\mathcal{P}_{ext(G)})$.
Ce ci termine la preuve. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] **H. Attouch, A. Damlamian**, *On multivalued evolution equations in Hilbert spaces.* Israel J. Math, 12 (1972), 373-390.

[2] **J.P. Aubin and A. Cellina**, *Differential inclusions-set-valued maps and viability theory*, Springer-Verlag, Berlin, (1984).

[3] **D. Azzam-Laouir**, *Polycopié, cours d'analyse multivoque*, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Jijel (2009).

[4] **H. Brezis**, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications.* Dunold, Paris, 1999.

[5] **H. Brezis**, *Operateurs Maximaux Monotones*, Mathemetical Studies, vol.50. North-Holland, Amsterdam, (1972).

[6] **C. Castaing and M. Valadier**, *Convex analysis and measurable multifunctions.* Lectures Notes in Mathematics, vol. 580. Springer, Berlin, (1977).

[7] **A. Cellina**, *On the differential inclusion $x' \in [-1, 1]$.* Atti Accad. Naz. Liancei Rend. Cl. Fis. Mat. Natur. (8), 69 (1-2), 1-6 (1981).

[8] **L. Cesari**, *Optimization theory and applications* . Appl. of Math., Vol. 17, Springer Verlag, New York, Berlin, (1983).

[9] **F.H. Clarke**, *Optimization and nonsmooth analysis.* Wiley, New York, (1983).

[10] **B. Cornet**, *Existence of slow solutions for a class of differential inclusions* . J. Math. Anal. Appl. 96 (1983), 130-147.

[11] **F.S. DeBlasi and G. Pianigianni**, *Nonconvex valued differential inclusions in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., 157(1991), 469-494.

[12] **F.S. DeBlasi and G. Pianigianni**, *On the density of the extremal solutions of the differential inclusions*, Ann. Polon. Math., LVI(2)(1992), 133-142.

[13] **R.D. Descombes**, Cours d'analyse, *Librairie Vuibert, Paris*, (1962).

[14] **T. Donchev**, *Qualitive properties of a class of differential inclusions.* Glas. Mat. 31 (1996), 269-276.

[15] **C. Henry**, *An existence theorem for a class of differentrial equations with multivalued right-hand side* . J. Math. Anal. Appl. 41 (1973), 179-186.

[16] **S. Hu and N.S. Papagiorgiou**, *Handbook of multivalued analysis. Volume I : Theory.* Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, (1997).

[17] **D. Kravvaritis and N.S. Papageorgiou**, *Multivalued perturbations of subdifferential type evolution equations in Hilbert space.* J. Differential Equations 76 (1988), 238-255.

[18] **J. Lehec**, *Analyse convexe approfondie.* Université Paris-Dauphine M1MMD, 2013-2014.

[19] **J.J. Moreau**, *Evolution problems associated with a moving convex set in a Hilbert space.* J. Differential Equations 26(1977), 347-374.

[20] **B.G. Pachpatte**, *A note on Gronwall-Bellman inequality,* J. Math. Anal, 44 (1973), 758-762.

[21] **S. Qin, X. Xue**, *Evolution inclusions with Clarke subdifferential type in Hilbert space,* Math. Comput. Modelling, 51 (5) (2010), pp. 550-561.

[22] **R.T. Rockafellar**, *Existence theorems for general control problems of Bolza and Lagrange*, Adv. in Math. 15 (1975), 312-333.

[23] **W. Schirotzek**, *Nonsmooth Analysis,* Springer-Verlage.Berlin Heidelberg, (2007).

[24] **A.A. Tolstonogov**, *Extreme continuous selectors of multivalued maps and their applications*, Journal of Differential Equations, vol. 122, n°2,(1995), 161-180.