REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammaed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de :

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : EDP et Applications

Thème

Problème de Contact sans frottement-Dirichlet pour l'équation de Laplace dans un polygone

Présenté par :

Ghamit Bouchra

Devant le jury :

Président :	I. Touil	M.C.A Univ. Jijel
Encadreur :	R. Boufenouche	M.C.B Univ. Jijel
Co-Encadreur :	I. Zerrouk	M.C.B Univ. Jijel
Examinateur :	F. Mesdoui	M.A.B Univ. Jijel

Promotion 2021/2022

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu **ALLAH** qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail,

J'exprime mes profondes gratitudes à mes parents,

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur Dr. Boufenouche Razika et mon co-encadreur Hasina Zerrouk,

pour leurs conseils, et leurs encouragement durant

la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire. Je le remercie aussi de leurs suivi permanent de mon travail, ses remarques. Et je veut exprime tout mon respect aux monbres de jury, qui ont acceptés d'évaluer et de juger mon travail.

Dr. **Imen. Touil** d'avoir accepté la présidence du jury.

Dr.**F. Mesdoui** d'avoir accepté l'examination de ce travail.

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants du département de mathématique qui ont contribué à ma formation.

A tous mes amies et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail de fin d'études

Aux êtres les plus chèrs.

A ma mère et mon père qui ont fait de moi ce que je suis aujourd'hui

Par leurs sacrifices et leur bonté ainsi que leurs conseils.

A mes frères.

A mes amies.

A mes enseignants.

Table des matières

Notations

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	Un ouvert borné.
Γ	La frontière de Ω.
Γ_j	Une partie de Γ.
S_j	Les sommets de Ω.
η	Le vecteur unitaire normale sortant.
ω_j	L'ouverture de l'angle que font $\Gamma_j et\ \Gamma_{j+1}$ vers l'intérieur de Ω.
$\frac{\partial u}{\partial \eta}$	La dérivée normale.
∇u	Le gradient de u.
Δu	Le Laplacien de u.
σ	Le champ des contraintes.
ε	Le champ des déformations.
$tr(A)$	La trace de la matrice A.
$\gamma_{i,j}$	Le symbole de kronecker.
ν	Le coeffitient de Poisson.
$\mathcal{C}^k$	L'espace des fonctions k fois continûment différentiables.
$\mathcal{D}(\Omega)$	L'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ a support compact dans Ω.
$\mathcal{D}'(\Omega)$	L'espace des distributions sur Ω.
$L^p(\Omega)$	L'espace des fonctions de puissance p-ième intégrable sur Ω pour la mesure de Lebesgue.
$H_0^s(\Omega)$	L'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$.
$H_0^s(\bar{\Omega})$	L'adhérence de restrictions à Ω des éléments de $H^s(\mathbb{R}^n)$.
$\\|.\\|_{0,\Omega}$	La norme sur $L^2(\Omega)$
$\\|.\\|_{2,\Omega} =$	La norme sur $H^2(\Omega)$
pp	Presque par tout

Introduction

Les problèmes de contact avec ou sans frottement entre corps déformable ou entre un corps et une fondation sont aboudantes en industrie et dans la vie de tous les jours. Le simple contact entre une roue de voiture et une route, le piston de la chemise, les frottements entre plaques tectoniques sont des exemples parmi bien d'autres. Du fait de l'importance du phénomène, des études considérables ont été consacrées à ce sujet important qu'est la mécanique de contact.

De plusieurs résultats ont déjà été obtenus dans le cas de domaines régulières [4]. Par contre, l'étude d'existence, de régularité et de singularité des solutions de problèmes aux limites dans des domaines avec coins et arrêts est plus difficiles, plus précisément dans [6] P. Grisvard a étudié la régularité de la solution du problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace dans un polygone (c'est-à-dire le domaine à frontière polygonale), il a montré que la solution variationnelle du problème considéré est dans H^2 (c'est-à-dire régulière) si seulement si tous les angles d'ouverture du polygone sont strictement inférieur à π.

Pour les conditions de Neumann [12] et pour les conditions mixtes (Dirichlet-Neumann) [9].

Initialement, notre but était l'étude d'un problème de Dirichlet-Contact sans frottement pour l'équation de Laplace dans un polygone (domaine non régulier) et pour réaliser ce but on choisit de détailler une partie de l'article de M. Dilmi, H. Benseridi et A. Guesmia [3]. Dans ce dernier les auteurs ont étudié la régularité du déplacement d'un corps homogène isotrope occupant un domaine Ω borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière polygonale $\partial\Omega = \Gamma$ avec des conditions aux bord de contact sans frottement-Dirichlet, c'est-à-dire que le déplacement est nul sur certaines segments de la frontière Γ et sur les segments restants le déplacement tangentiel est libre et la traction tangentielle est nulle.

Ce mémoire est se composé de trois chapitres, il est organisée de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions qui nous seront utiles dans toute la suite de ce travail. Notamment, le tenseur des contraintes, déformations, les espaces de Sobolev avec ses propriétés sur les domaines polygonaux, les applications de traces et la formule de Green concernant ce type de domaines.

Dans le deuxième chapitre, nous considérons le problème gouverné par l'équation de Laplace avec une condition aux limites de contact sans frottement (unilatéral)-Dirichlet :

$$(\mathcal{P}_1)\begin{cases} -\Delta u = f & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \Gamma_j,\ \forall j \in D, \\ \begin{cases} u\cdot\eta = 0 \\ (\sigma(u)\cdot\eta)\cdot\tau = 0 \end{cases} & sur\ \Gamma_j\ ,\forall j \in G, \end{cases}$$

où : Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière polygonale $\partial\Omega = \Gamma = \bigcup_{j=1}^{N} \bar{\Gamma}_j$ où Γ_j sont des segments de droites tels que :
$\bar{\Gamma}_j \cap \bar{\Gamma}_{j+1} = S_j$ (le soment), $j = \overline{1, N}$.
$u = (u_1, u_2), f = (f_1, f_2), \sigma$ désignent respectivement les composantes du vecteur de déplacement, la densité des forces extérieurs et le tenseur des contraintes linéarisées qui lient du tenseur de déformations $\varepsilon(u)$ (le tenseur de déformation) par la loi de Hook :

$$\sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda tr(\varepsilon(u)).I,$$

$\eta^j = \begin{pmatrix} \eta_1^j \\ \eta_2^j \end{pmatrix}$, $\tau^j = \begin{pmatrix} \tau_1^j \\ \tau_2^j \end{pmatrix}$ sont respectivement la normale unitaire sortante et la tangente unitaire dans le sens positif sur la frontière Γ de Ω .
D : représente un ensemble sur lesquels sont portés les conditions de Dirichlet.
G : représente un ensemble sur lesquels sont portés les conditions de contact sans frottement (unilatéral).
Nous nous intéressons à montrer l'existence et l'unicité de la solution u du problème et nous montrons une inégalité à priori à l'aide de l'égalité de Cacciopolli dans l'espace où on cherche u, qui nous permet de construire l'espace d'image $R(\Omega)$ de $W(\Omega)$ ultérieurement.
Dans le troisième chapitre, en utilisant l'alternative de Fredholm pour montrer la régularité de la solution et prouver que l'espace orthogonal de $W(\Omega)$ est de dimension finie égale à $\sum_{j=1}^{N} \mu_j$ où

$$\mu_j = \begin{cases} card\{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k < \frac{\omega_j}{\pi}\}, & si\ S_j \text{ de type Dirichlet}, \\ card\{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k < \frac{2\omega_j}{\pi}\}, & sinon, \end{cases}$$

où ω_j est l'angle d'ouverture entre Γ_j et Γ_{j+1} vers l'intérieure de Ω.

On finira ce mémoire par une conclusion.

Chapitre 1

Préliminaires

Afin de faciliter la lecture de ce mémoire, nous allons commencer par énoncer quelques définitions qui nous serons utiles tout au long de ce travail, notamment, le tenseur des contraintes, déformations et les espaces de Sobolev. On s'intéresse ensuite aux propriétés des traces, en particulier dans des domaines non réguliers (polygonaux).

1.1 Contraintes, déformations

La notion de contrainte résulte de la prise en considération des forces intérieures qui surgissent dans un objet lorsqu'il est déformé.

Définition 1.1.1. [17] La contrainte est la force exercée sur une surface de matière solide. Vecteur de contrainte caractérise les efforts de contact exercés a travers un élément de surface ds de la normal $\overrightarrow{n}$ sur une partie B.

$$\overrightarrow{T} = \lim_{ds \to D} \frac{d\overrightarrow{f}}{ds}, \; d\overrightarrow{f} = \overrightarrow{T}(\overrightarrow{n})dB.$$

Pour connaître l'état de contrainte en un donné, il faut connaître les vecteurs contraintes associée à toutes les facettes, sur n'importe quel vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$. Il existe donc une application linéaire, le tenseur des contraintes, faisant passer $\overrightarrow{n}$ à $\overrightarrow{T}$

$$\overrightarrow{T} = \sigma.\overrightarrow{n},$$

où σ : Le tenseur des contraintes.

Définition 1.1.2. *Le tenseur des contraintes est une application linéaire de l'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Si l'on choisit une base orthonormée $\overrightarrow{e_i}$, cette application linéaire est représentée par une matrice d'éléments $\sigma_{ij}, i, j = \overline{1, n}$ et la relation*

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ . \\ . \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & . & . & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & . & . & \sigma_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & . & . & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ . \\ . \\ n_n \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

tel que σ est un tenseur réel symétrique d'ordre n représentable par une matrice $n \times n$. La relation entre ces deux tenseurs est linéaire, donc s'exprime elle-même à l'aide d'un tenseur d'ordre 4, le tenseur d'élasticité donné par :

$$\sigma_{ij}(u) = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u), \quad i, j, k, l = \overline{1, n}.$$

En pratique, cette loi est souvent trop générale et il est possible de la simplifier en considérant un matériau homogène et isotrope. La loi linéaire de comportement élastique reliant le tenseur des contraintes et des déformations porte le nom de la loi de Hook qui est défini par la relation

$$\sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))\gamma_{ij}, i, j = 1, 2,$$

où γ : le symbole de Kronecker défini par

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & si\ \ i \neq j. \end{cases}$$

λ, μ : Les constantes de Lamé.

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \ \ et \ \ \lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}.$$

E : Le module de Yong.
ν : Le coefficient de Poisson tel que $0 < \nu < \frac{1}{2}$.
$\varepsilon(u)$: Le tenseur de déformation donné par la définition suivante.

Définition 1.1.3. *Le tenseur de déformation est donné par la relation*

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), i, j = 1.2\,.$$

1.2 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels, ils peuvent être définis de différentes manières lorsque l'ouvert Ω considéré est à frontière régulière. Les définitions correspondantes peuvent conduire à des espaces différents lorsque la frontière de Ω et peu régulière.
Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ. On note :

1. $L^2(\Omega)$: L'espace des fonctions à valeurs complexes de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue dx dans Ω, muni de la norme :

$$\|u\|_{0,\Omega} = \|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. $D(\Omega)$: L'espace des fonctions infiniment différentiables à support compact dans Ω.

3. $D'(\Omega)$: L'espace des distributions sur Ω.

4. $D(\bar{\Omega})$: L'espaces des restrictions à Ω des fonctions de $D(\mathbb{R}^2)$.

1.2.1 Espaces de Sobolev d'ordre entier

Définition 1.2.1. [10] Soit p un réel, $1 \leq p \leq \infty$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et m un entier naturel. On appelle espace de Sobolev d'ordre m et on note $H^m(\Omega)$, l'ensemble :

$$H^m(\Omega) = \{u \;\; mesurable, \;\; tel \;\; que \;\;\; D^\alpha u \in L^2(\Omega), \;\; \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \;\; |\alpha| \leq m\},$$

où

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 ... \partial^{\alpha_n} x_n},$$

désigne la dérivée d'ordre α au sens des distributions avec

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \quad , \; |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 ... \alpha_n.$$

Proposition 1.2.1. [1] (Espaces $H^m(\Omega)$)

i) On munit l'espace $H^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}, \;\; \forall u, v \in H^m(\Omega).$$

La norme associé étant donné par

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H^m(\Omega),$$

de plus, il est bien connu que cet espace est un espace de Hilbert.

ii) Pour $m = 0$, on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et pour tout $m_1 > m_2$, on a :

$$H^{m_1}(\Omega) \subset H^{m_2}(\Omega) \quad \text{avec injection continu.}$$

iii) Pour tout $m \geq 0$, $H^m(\Omega)$ est un espace séparable.

iv) Pour tout $m \geq 0$, nous désignons par $H_0^m(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ *dans* $H^m(\Omega)$:

$$H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)} \ \ dans \ \ H^m(\Omega),$$

et par $H^{-m}(\Omega)$ le dual topologique de $H_0^m(\Omega)$.

v) Grâce aux applications traces, que nous allons voir après, les espace $H_0^m(\Omega)$ peuvent être définis comme suit :

$$H_0^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega) \ \text{ telle que : } \frac{\partial^j u}{\partial \eta^j} = 0, \ \ \forall j = 0, ..., m-1\},$$

où : $\frac{\partial}{\partial \eta}$ est la dérivée normale de u suivant la normale extérieur à la frontière $\Gamma = \partial\Omega$:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\eta^i, \ \ \forall x \in \Gamma.$$

1.2.2 Espaces de Sobolev d'ordre non entier

Définition 1.2.2. [10] Soit s un réel, $0 < s < 1$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $H^s(\Omega)$ l'espace :

$$H^s(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \ , \ telle \ que \ \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}} dxdy < \infty\},$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si s désigne un réel positif de partie entière $[s] = m$, l'espace $H^s(\Omega)$ peut être défini de la manière suivante :

$$H^s(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega), \ \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \ \ |\alpha| = m, \ \ D^\alpha u \in H^{s-m}(\Omega)\}.$$

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$, nous pouvons définir l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ au moyen de la transformée de Fourier. En effet, si $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, sa transformée de Fourier est donnée par :

$$v(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} exp(-ix\xi)v(x)dx, \ \ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

et nous avons :

$$H^s(\Omega) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n), \ \ tel \ \ que \ \ (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}v(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

muni de la norme :

$$\|v\|_{H^s(\Omega)} = \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}v(\xi)\|_{L^2(\Omega)},$$

qui est équivalent à la norme de $H^s(\mathbb{R}^n)$.

En particulier, nous utiliserons l'espace :

$$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \ \ \partial_i u \in L^2(\Omega), \ \ \partial_{ij}u \in L^2(\Omega), \ \ \forall i,j = 1,2\},$$

tel que

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \ , \ \partial_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Théorème 1.2.1. (***Inégalité de Poincaré-Friedrichs***) [1]
On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une constante positive C ne dépendant que de la géométrie de Ω telle que toute fonction v de $H_0^1(\Omega)$ vérifie

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2 (x)dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette inégalité permet de démontrer facilement le résultat suivant :

Corollaire 1.2.1. [15] La semi norme

$$|v|_{H^1(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2 (x)dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

est une norme sur l'espace $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$.

1.3 Applications de trace sur $H^m(\Omega)$

Définition 1.3.1. *On note $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ l'espace des fonctions f de $L^2(\Omega)$ telle que :*

$$\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^2} ds(x)ds(y) < \infty,$$

Cet espace est appelé l'espace des traces sur Γ des fonctions de $H^1(\Omega)$.

Remarque 1.3.1. *En particulier, dans les domaines polygonaux l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ n'est pas l'espaces des traces $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ de $H^2(\Omega)$, la discontinuité de la normale (c'est-à-dire $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ n'obtient pas nécessairement à $\mathcal{C}^0(\Gamma)$ aux coins nous empêche de définir les espaces de trace comme le cas des ouverts à frontières régulières. On considère donc les traces sur chacun des cotés $\Gamma_j, j = \overline{1, N}$ et pas globalement.*

Pour expliquer cette difficulté, nous allons revenir aux fonctions continûment différentiable. Il est bien clair que l'application

$$\gamma_{0j} : u \mapsto u|_j, \quad j = \overline{1, N}$$

est définie de $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ dans $\mathcal{C}^0(\Gamma)$. Par ailleurs, il est clair que l'application

$$\gamma_{1j} : u \mapsto (\frac{\partial u}{\partial \eta})|_{\Gamma_j}, \quad j = \overline{1, N}.$$

est définie de $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ dans $\prod\limits_{j=1}^{N} \mathcal{C}^0(\Gamma_j)$.

De P. Grisvard [8], on a les résultats.

Théorème 1.3.1. [8] L'application de trace

$$u \mapsto \left\{\gamma_j u, \gamma_j(\frac{\partial u}{\partial \eta_j})\right\}$$

qu'elle est définie sur $D(\bar{\Omega})$ se prolonge de façon unique et continue en un opérateur de

$$D(\Delta, L^2(\Omega)) \quad dans \quad \tilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_j) \times \tilde{H}^{\frac{-3}{2}}(\Gamma_j)$$

tel que $D(\Delta, L^2(\Omega))$: le domaine maximal de l'espace Δ.

Théorème 1.3.2. [8] L'application de trace

$$u \mapsto \left\{\gamma_n u, \gamma_n Du, ..., \gamma_n D_n^k u\right\}$$

défini sur $D(\mathbb{R}^n)$ pour $k < s - \frac{1}{2}$ a une extension continue unique comme un opérateur de $H^s(\Omega)$ sur $\prod\limits_{0 \le p \le k} H^{s-p-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Théorème 1.3.3. [8] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière polygonale Γ, alors pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'opérateur

$$u \mapsto \left\{\gamma_j u, \gamma_j \frac{\partial u}{\partial \eta_j}, ..., \gamma_j \frac{\partial^k u}{\partial \eta_j^k}\right\}.$$

définit sur $D(\bar{\Omega})$ pour $k < s - \frac{1}{2}$, a une extension continue unique en un opérateur de $H^s(\Omega)$ sur $\prod\limits_{0 \le p \le k} H^{s-p-\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$.

Théorème 1.3.4. [8] Soit Ω un sous-ensemble d'un ouvert polygonal borné de $\mathbb{R}^2$, l'application

$$u \longmapsto \{f_{j,l} = \gamma_j \frac{\partial^l u}{\partial \eta_j^l},\ 1 \leq j \leq N,\ 0 \leq l \leq m-1\}.$$

Admet un prolongement par densité qui est un opérateur linéaire continu et surjectif de $H^m(\Omega)$ sur le sous-espace de $\prod\limits_{0\leq l\leq m-1} \prod\limits_{1\leq j\leq N} H^{m-l-\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ défini par les conditions suivantes : Pour un opérateur différentiel L à coefficients constants et d'ordre $d \leq m-1$, on note $p_{j,l}$ les opérateurs différentiels tangents à Γ_j tel que

$$L = \sum_l p_{j,l} \frac{\partial^l}{\partial \eta_j^l}.$$

Alors

a) $\sum\limits_l (p_{j,l} f_{j,l})(s_j) = \sum\limits_l (p_{j+1,l} f_{j+1,l})(s_j)$ pour $d \leq m-2$
et

b) $\sum\limits_l (p_{j,l} f_{j,l}) = \sum\limits_l (p_{j+1,l} f_{j+1,l})$ à s_j pour $d = m-1$.

Définition 1.3.2. *On note $\tilde{H}^s(\Omega)$ le sous-espace de $H^s(\Omega)$ qui est formé des fonctions u dont le prolongement $\tilde{u}$ par zéro hors de Ω et appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Remarque 1.3.2. *Si le domaine Ω est lipschitzien, la définition 1.3.2 est équivalente à :*

$$\tilde{H}(\Omega) = \{u \in H_0^2(\Omega) : \frac{D^\alpha u}{\rho^\alpha} \in L^2(\Omega), |\alpha| = m\},$$

où $\rho(x)$ désigne la distance de x à la frontière Γ de Ω et $s = m + \sigma$ pour un entier m et $\sigma \in [0, 1[$. On peut définir une norme de $\tilde{H}^s(\Omega)$ comme suit

$$\|u\|_{\tilde{H},s,\Omega} = \left(\|u\|_{s,\Omega} + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x)|^2}{\rho(x)^{2\sigma}} dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 1.3.1. *Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$. Alors le sous-espace $H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est dense dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ pour tout entier $m \geq 2$*

Théorème 1.3.5. *$H_0^m(\Omega)$ est le noyau de l'application*

$$u \longmapsto \{f_{j,l} = \gamma_j \frac{\partial^l u}{\partial \eta_j^l}, 1 \leq j \leq N,\ 0 \leq l \leq m-1\}.$$

Démonstration *: Voir P. Grisvad* [9].

Théorème 1.3.6. [1] **Lax-Milgram**

Soit H un espace de Hilbert, soient $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coercive, l une forme linéaire et continue sur H. Alors il existe un unique $u \in H$ tel que

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \ \ et \ \ \frac{1}{2}a(u,u) - \langle l, u\rangle = \min_{v\in H}\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle l, v\rangle\}.$$

Théorème 1.3.7. (***de densité***) :

Soit F un sous espace vectoriel de E tel que $\bar{F} \neq E$. Alors, il existe $f \in E', f \neq 0$ tel que :

$$\forall x \in F, \ f(x) = 0.$$

1.4 Formules de Green

La formule de Green est d'exprimer une intégrale sur une surface comme une intégrale curviligne sur le bord de cette surface.

Définition 1.4.1. [1] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathbb{C}^1$ par morceaux, alors si $u \in H^1(\Omega), \ \ \forall v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_j} u\, dx + \int_\Gamma uv\eta ds. \tag{1.2}$$

où ds la mesure de longueur sur Γ.

Théorème 1.4.1. [9] Sous les mêmes hypothèses sur Ω, on a la demi-formule de Green :

$$\int\limits_\Omega u\Delta v dx + \int\limits_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int\limits_\Gamma \gamma(u)\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) ds, \ \ \forall u \in H^1(\Omega), \ \forall v \in H^2(\Omega). \tag{1.3}$$

Ainsi que la formule de Green est :

$$\int\limits_\Omega u\Delta v dx - \int\limits_\Omega v\Delta u dx = \int\limits_\Gamma \gamma(u)\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) ds - \int\limits_\Gamma \gamma(v)\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) ds, \ \forall v, u \in H^2(\Omega), \tag{1.4}$$

telle que :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} := \sum_{i=1}^{N} \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\eta_i \ , \ \eta = (\eta_1, ..., \eta_N)^\top.$$

Proposition 1.4.1. [9] Soit Ω un ouvert polygonale borné de $\mathbb{R}^2$, alors on a

$$\langle u, \Delta v\rangle - \langle v, \Delta u\rangle = \sum_j \{\langle \gamma_j u, \gamma_j\left(\frac{\partial v}{\partial \eta_j}\right)\rangle\} - \sum_j \{\langle \gamma_j v, \gamma_j(\frac{\partial u}{\partial \eta_j})\rangle\},$$

pour tout $v \in D(\Delta, L^2(\Omega))$ et $\forall \ u \in H^2(\Omega)$ tel que

$$\gamma_j u \in \tilde{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j) \quad \ et \quad \gamma_j \frac{\partial u}{\partial \eta_j} \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j),$$

pour tout j.

1.5 Définitions

Définition 1.5.1.
La forme bilinéaire $a(.,.)$ défini sur $V \times V$ est
• *Continue, s'il existe $C > 0$ telle que :*

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|_V \|v\|_V, \ \forall u, v \in V.$$

• *Coercive, s'il existe une constant $\alpha > 0$ telle que :*

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \ \forall v \in V.$$

Définition 1.5.2. *Un opérateur non borné A sur un espace de Hilbert H est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(A) \subset H$ à valeurs dans H. $D(A)$ est appelé le domaine de définition de l'opérateur A.*

En particulier le domaine de définition de l'opérateur Δ est donné par :
$D(\Delta, L^2(\Omega)) = \{u \in L^2(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$\|u\|_{D(\Delta, L^2(\Omega))} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.5.3. *Soit f une application linéaire de E dans F, alors le noyau, noté* $\ker f$*, et son image, notée Imf, sont définis par :*

$$\ker f = \{x \in E \ / \ f(x) = 0\}.$$

$$Imf = \{f(x) \ / \ x \in E\}.$$

Définition 1.5.4. *Soient E, F deux espaces vectoriels*
1. *On dit qu'une partie X de E et une partie Y de F sont orthogonales, et on note $X \perp Y$ si* $(x; y) = 0$.
2. *L'orthogonale d'une partie X de E noté $X^\perp$ est les sous espace vectoriel de F constitué des valeurs orthogonaux à tons les valeurs de X.*

$$X^\perp = \{y \in F \ / \ x \in X : \ (x; y) = 0\}.$$

Définition 1.5.5. *La codimension d'un espace vectoriel E d'un sous espace vectoriel F est la dimension de l'espace vectoriel quotient E/F tel que*

$$Co\dim_E(F) = \dim(E/F).$$

Définition 1.5.6. *On appelle indice d'un opérateur A et on note $ind(A)$ l'entier relatif :*

$$ind(A) = \dim \ker(A) - Co\dim Im(A).$$

Chapitre 2

Position du problème, existence et unicité

L'objectif de ce chapitre est de donner une formulation variationnelle à notre problème, et de démontrer l'existence et l'unicité de ce problème variationnel à l'aide d'une formule de Green. Nous terminons ce chapitre par une inégalité à priori dont on aura besoin dans la suite.

2.1 Notations et position du problème

Ω désigne un corps homogène, élastique et isotrope, occupant un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, à frontière polygonale rectiligne $\Gamma = \overset{N}{\underset{j=1}{\cup}} \bar{\Gamma}_j$ où les Γ_j sont des segments de droites ouvertes, S_j est l'origine de Γ_{j+1} et S_{j+1} son extrémité suivant l'orientation usuelle (avec $S_{N+1} = S_1$). L'ouverture de l'angle entre Γ_j et Γ_{j+1} vers l'intérieur de Ω est noté ω_j avec $0 < \omega_j < 2\pi$ (c'est-à-dire un domaine strictement polygonale). Pour tout $j = \overline{1, N}$. Voir figure 2.1.
η^j (resp τ^j) désigne la normale unitaire sortante (resp la tangente unitaire dans le sens positif) sur Γ_j. En coordonnée polaires d'origine S_j, notons par r_j la distance d'un point $M(x_j, y_j)$ de Ω à S_j et par θ_j l'angle de Γ_j à MS_j ; c'est à dire $x_j = r_j \cos(\theta_j)$ et $y_j = r_j \sin(\theta_j)$. De plus, on note par $u = (u_1, u_2)$, $f = (f_1, f_2)$ et σ respectivement le vecteur déplacement, la densité des forces extérieurs appliquée de volume et de surface, et le tenseur des contraintes , où $\sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ une matrice d'ordre 2, dont les éléments (σ_{ij}) sont donnés par la loi de Hook :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))\gamma_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

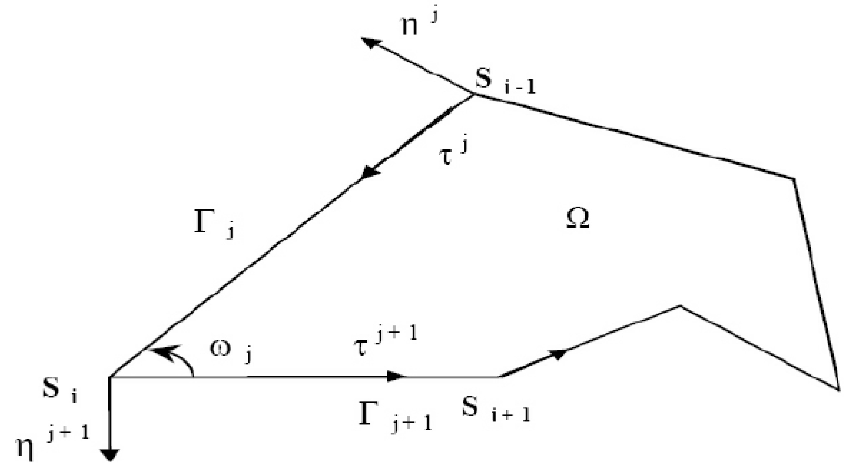

FIGURE 2.1 – polygone

et

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i, j = 1.2$$

sont les éléments de tenseur des déformations linéarisées $\varepsilon(u)$ associé à u.

λ, μ sont les coefficients de Lamé avec $\mu > 0$ et $\lambda + \mu \geq 0$.

On considère le problème suivant. Pour f donné dans $(L^2(\Omega))^2$, on cherche si possible u dans $(H^2(\Omega))^2$ solution du problème :

$$(\mathcal{P}_1) \begin{cases} -\Delta u = f & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \Gamma_j,\ \forall j \in D, \\ \begin{cases} u \cdot \eta = 0 \\ (\sigma(u) \cdot \eta) \cdot \tau = 0 \end{cases} & sur\ \Gamma_j\ , \forall j \in G, \end{cases}$$

où : $\Delta = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = div(\nabla u)$ désigne l'opérateur de Laplace. D représente un ensemble sur lesquels sont portés les conditions de Dirichlet qui s'exprime que le déplacement u est nul sur certaines segment de la frontière Γ.

G : représente un ensemble sur lesquels sont portés les conditions de contact sans frottement (unilatéral), et qui s'exprime que le déplacement tangentiel sur les segments restants est libre et la traction tangentielle est nulle.

2.2 Existence et unicité

2.2.1 Formulation variationnelle :

Avant de donner la formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P}_1)$ on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.1. *Sur* $\Gamma_j, j \in G$, *les conditions aux limites*

$$u \cdot \eta = (\sigma(u) \cdot \eta) \cdot \tau = 0,$$

sont équivalentes aux conditions

$$u \cdot \eta = \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \tau = 0.$$

Démonstration : On a

$$(\sigma(u) \cdot \eta) \cdot \tau = \sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij} \cdot \eta_j \cdot \tau_i \,,$$

puisque

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))\gamma_{ij} \,,$$

on obtient

$$\begin{aligned}(\sigma(u) \cdot \eta) \cdot \tau &= \sum_{i,j=1}^{2} (2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda tr(\varepsilon(u))\gamma_{ij})\, \eta_j.\tau_i \\ &= \mu \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}.\eta_j.\tau_i \,,\end{aligned}$$

car

$$\sum_{i,j=1}^{2} \lambda tr\varepsilon(u)\gamma_{ij}\eta_j\tau_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda tr\varepsilon(u)\eta_i\tau_i = 0,$$

ce qui donne

$$(\sigma(u) \cdot \eta) \cdot \tau = \mu \sum_{i,j=1}^{2} (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \cdot \eta_j \cdot \tau_i = \mu \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \eta_j \cdot \tau_i + \mu \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \cdot \eta_j \cdot \tau_i = 0,$$

ceci est équivalent :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \tau + \frac{\partial u}{\partial \tau} \cdot \eta = 0,$$

et comme $u \cdot \eta = 0$ *sur* Γ_j implique que $\frac{\partial u}{\partial \tau} \cdot \eta = 0$ *sur* Γ_j, on conclut que

$$\begin{cases} u\cdot\eta = 0 \\ (\sigma(u)\cdot\eta)\cdot\tau = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\cdot\eta = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\tau = 0 \end{cases} \qquad \blacksquare$$

L'étude du problème $(\mathcal{P}_1)$ par des techniques de P. Grisvard [6] et B. Merouani [14] , est basé généralement sur les étapes suivantes :

Dans la première étape, on établie une inégalité à priori valable pour u dans $(H^2(\Omega))^2$ vérifiant les mêmes conditions du problème considéré.

La seconde étape et consacrée à l'utilité de l'inégalité à priori, qui nous permet d'utiliser l'alternative de Fredholm relative à notre problème et de construire l'espace d'image $R(\Omega)$ et son orthogonal $N(\Omega)$. On démontre ensuite qu'il est de dimension finie et nous calculerons cette dernière.

Donc pour obtenir une majoration à priori des dérivées secondes, on considère le problème

$$(\mathcal{P})\begin{cases} -\Delta u = f & \textit{dans } \Omega, & (2.1)\\ \gamma_j u = 0 & \textit{sur } \Gamma_j\ \forall j\in D, & (2.2)\\ \begin{cases} \gamma_j(u\cdot\eta^j) = 0 \\ \gamma_j(\frac{\partial u}{\partial\eta^j}\cdot\tau^j) = 0 \end{cases} & \textit{sur } \Gamma_j\ \forall\ j\in G. & (2.3)\end{cases}$$

Revenons maintenant à la formulation variationnelle, pour cela on multiplie l'équation (2.1) par une fonction teste $v\in(H^1(\Omega))^2$, puis en intégrant et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$-\int\limits_\Omega \Delta u v dx = \int\limits_\Omega f v dx \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^2 \int\limits_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx - \sum_{i,j=1}^2 \int\limits_\Gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v\eta ds = \int\limits_\Omega f v dx,$$

où ds : la mesure de longueur sur la frontière Γ, d'où :

$$\sum_{i,j=1}^2 \int\limits_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx - \int\limits_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\eta} v ds = \int\limits_\Omega f v dx \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^2 \int\limits_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx - \int\limits_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial\eta} v ds - \int\limits_{\Gamma_G} \frac{\partial u}{\partial\eta} v ds = \int\limits_\Omega f v dx.$$

En utilisant la relation :

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot v = (\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\eta^j)(v\cdot\eta^j) + (\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\tau^j)(v\cdot\tau^j),\ \forall j\in G,$$

et les condition aux limites sur Γ_j, $\forall j\in G$

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\tau^j = 0,$$

on obtient

$$\int\limits_\Omega \nabla u\nabla v dx - \int\limits_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial\eta} v ds - \int\limits_{\Gamma_G} \left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\eta^j\right)(v\cdot\eta^j) ds = \int\limits_\Omega f v dx \qquad (2.4)$$

D'après L. Magénès [11] : on a $u \in (H^1(\Omega))^2$ (resp $v \in (H^1(\Omega))^2$), ce qui montre l'existence de l'application trace $\frac{\partial u}{\partial \eta^j} \cdot \eta^j$ *dans* $\tilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_j)$, $\forall j \in G$ *et de* $\frac{\partial u}{\partial \eta^j}$ *dans* $\tilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_j)^2$, $\forall j \in D$ (resp pour $v.\eta^j$ *dans* $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j), \forall j \in G$ et pour v *dans* $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)^2$, $\forall j \in D$), donc la relation (2.4) devient :

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \sum_{j \in D} \left\langle \gamma_j \frac{\partial u}{\partial \eta_j}, \gamma_j v \right\rangle_{\tilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_j)^2 \times \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)^2} - \sum_{j \in G} \left\langle \gamma_j (\frac{\partial u}{\partial \eta_j} . \eta^j), \gamma_j (v.\eta^j) \right\rangle_{\tilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_j)^2 \times \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)^2}$$
$$= \int_{\Omega} f v dx.$$

Lorsque la fonction teste v vérifie la condition

$$\begin{cases} \gamma_j v = 0, \quad \forall j \in D, \\ \gamma_j (v \cdot \eta^j) = 0, \quad \forall v \in G, \end{cases}$$

nous obtenons le problème variationnel suivant :

$$(\mathcal{P}_v) \begin{cases} Trouver \;\; u \in V \;\; tel \;\; que, \\ a(u,v) = l(v), \quad \forall \; v \in V. \end{cases}$$

Où

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx,$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

et

$$V = \{ v \in H^1(\Omega))^2, \gamma_j v = 0, \; \forall \; j \in D, \; \gamma_j (v \cdot \eta^j) = 0, \; \forall \; j \in G \}.$$

Dans ce qui suit on va démontrer que le problème $(\mathcal{P})$ admet une solution unique dans l'espace V par l'application du Théorème 1.3.6.

• Il est clair que V est un sous-espace fermé de $(H^1(\Omega))^2$ puisque $(H^1(\Omega))^2$ est un espace de Hilbert, donc V est aussi est un espace de Hilbert par rapport à la norme induite de $(H^1(\Omega))^2$.

• • La forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue sur $V \times V$:

En effet, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= |\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx| \\ &\leq \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^2} \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^2} \\ &\leq \|\nabla u\|_{(H^1(\Omega))^2} \|\nabla v\|_{(H^1(\Omega))^2}. \end{aligned}$$

$\bullet\bullet\bullet$ La forme $a(.,.)$ est coercive sur $V \times V$ c'est-à-dire,qu' il existe une constante $c > 0$ telle que

$$a(v,v) \geq c\|v\|^2$$

pour tout $v \in V$. En effet

$$\begin{aligned} a(v,v) &= \int_{\Omega} (\nabla v)^2 dx \\ &= \|\nabla v\|^2_{(L^2(\Omega))^2}, \end{aligned}$$

et d'après l'inégalité de Poincaré, on aura

$$\|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))} \geq c\|v\|^2_{(H^1(\Omega))^2}.$$

Ce qui donne le résultat.

$\bullet\bullet\bullet\bullet$ La forme linéaire l est continue sur V.

En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |l(v)| &= |\int_{\Omega} fv dx| \\ &\leq \|f\|_{(L^2(\Omega))^2}\|v\|_{(L^2(\Omega))^2} \\ &\leq \|f\|_{(L^2(\Omega))^2}\|v\|_{(H^1(\Omega))^2}. \end{aligned}$$

Les conditions du théorème de Lax-Milgram étant vérifiée, donc le problème variationnel $(\mathcal{P}_v)$ admet une solution unique $u \in V$.

Lemme 2.2.2.

Le problème variationnel $(\mathcal{P}_v)$ est équivalent au problème aux limites $(\mathcal{P})$

Démonstration :

Une implication été déja faite (c'est-à-dire u solution du problème $(\mathcal{P}) \Rightarrow u$ solution du problème $(\mathcal{P}_v)$)

La deuxième implication est se démontra dans ce qui suit :

2.2.2 Interprétation du problème variationnel

Supposons maintenant que u est la solution du problème variationnel $(\mathcal{P}_v)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f\varphi dx, \ \forall\ \varphi \in D(\Omega),$$

puisque $f \in (L^2(\Omega))^2$, $u \in (H^1(\Omega))^2$ donc $\Delta u \in (L^2(\Omega))^2$. On peut remplacer les intégrales sur Ω par les crochets de dualité $\langle .,. \rangle_{D'(\Omega)\times D(\Omega)}$, on trouve :

$$\sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle_{D'(\Omega)\times D(\Omega)} = \langle f, \varphi \rangle_{D'(\Omega)\times D(\Omega)},\ \forall \varphi \in D(\Omega),$$

d'où

$$-\sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi \right\rangle_{D'(\Omega)\times D(\Omega)} = \langle f, \varphi \rangle_{D'(\Omega)\times D(\Omega)}\ ,\ \forall \varphi \in D(\Omega),$$

donc

$$-\Delta u = f \ \ dans \ \ D'(\Omega),$$

et par conséquent

$$-\Delta u = f \ \ dans \ \ L^2(\Omega),$$

d'où

$$-\Delta u = f \ \ pp \ \ dans \ \ \Omega.$$

Reste à montrer que la solution variationnelle vérifie les conditions aux limites. On applique la formule de Green on obtient

$$-\int_{\Omega} \Delta v dx + \int_{\Gamma} \nabla u v \eta ds = \int_{\Omega} f v dx,$$

de plus, on a

$$-\int_{\Omega} \Delta v dx - \int_{\Omega} f v dx = 0,$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \nabla u v \eta ds &= \int_{\Gamma_D} \gamma_j(\nabla u)\gamma_j v \eta ds + \int_{\Gamma_G} \gamma_j(\nabla u)\gamma_j v \eta ds \\ &= \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Gamma_D} \gamma_j \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \gamma_j v ds + \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Gamma_G} \gamma_j \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}.\eta\right) \gamma_j(v.\eta) ds + \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Gamma_G} \gamma_j \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}.\tau\right) \gamma_j(v.\tau) ds.\end{aligned}$$

D'après la condition aux limites (2.2), (2.3) :

$$\begin{cases} \gamma_j u = 0,\ \ \forall j \in D, \\ \gamma_j(u \cdot \eta^j) = \gamma(\frac{\partial u}{\partial \eta}.\tau^j) = 0,\ \ \forall j \in G, \end{cases}$$

la dernière équation devient

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Gamma_D} \gamma_j(\frac{\partial u}{\partial \eta})\gamma_j v ds + \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Gamma_G} \gamma_j(\frac{\partial u}{\partial \eta}.\eta)\gamma_j(v.\eta) ds + \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Gamma_G} \gamma_j(\frac{\partial u}{\partial \eta}.\tau)\gamma_j(v.\tau) ds = 0,$$

découle directement du fait que $u \in V$.

2.3 Inégalité à priori

Dans cette section nous intéressons a la démonstration de l'inégalité à priori :

$$\|u\|_{(H^2(\Omega))^2} \leq k\|\Delta u\|_{(L^2(\Omega))^2}. \tag{2.5}$$

Cette inégalité résultera en fait de l'égalité de Caccioppoli.
Le problème $(\mathcal{P}_v)$ n'admet pas généralement des solutions assez régulières (c'est-à-dire $u \in H^2(\Omega)$), pour cela on essayera pour $f \in (L^2(\Omega))^2$, de chercher des conditions sur Ω pour que u soit dans $(H^2(\Omega))^2$.
On introduit maintenant l'espace où on cherche u et que l'on notera :

$$W(\Omega) = \{u \in (H^2(\Omega))^2 \ : \ \gamma_j u = 0, \ \forall\, j \in D; \ \gamma_j(\frac{\partial u}{\partial \eta^j}.\tau^j) = \gamma_j(u.\eta^j) = 0, \ \forall\, j \in G\}.$$

Lemme 2.3.1.
L'espace $W(\Omega) \cap (H^m(\Omega))^2$ est dense dans $W(\Omega)$ pour la norme induite par $(H^m(\Omega))^2$, $\forall\, m \geq 1$.

Démonstration
En appliquant le Théorème de densité 1.3.7
Nous allons montrer que toute forme linéaire continue sur $W(\Omega)$ qui s'annule sur $H^m(\Omega) \cap W(\Omega)$ s'annule partout.
Le Théorème 1.3.5 permet de considérer $H^m(\Omega)$ comme somme directe de $H_0^m(\Omega)$ et de l'image $R^m(\Gamma)$ de l'opérateur trace $\gamma = \{\gamma_j(\frac{\partial^l}{\partial \eta_j^l})\}_{1\leq j\leq N\ ,0\leq l\leq m-1}$. Ainsi toute forme linéaire continue L sur $W(\Omega)$ peut être représenté comme

$$\langle L, v\rangle = \langle B, v - \rho\gamma v\rangle + \langle g, \gamma v\rangle,$$

où $B \in H^{-m}(\Omega), g \in R^m(\Gamma)$ et ρ est l'inverse à droite de l'opérateur de trace γ.
Supposons que L s'annule sur $W(\Omega)$. Alors, en particulier, il s'annule sur $D(\Omega)$, et nous avons donc.

$$\langle B, v\rangle = 0,$$

sur $D(\Omega)$. Cela implique que $B = 0$ et par conséquent $\langle L, v\rangle = \langle g, \gamma v\rangle$. D'une part L lié seulement de γ, est d'autre part pour prouver que L s'annule par tout, nous n'avons qu'à vérifier que l'espace $R^m(\Gamma)$ des traces des éléments de $(H^m(\Omega))^2 \cap W(\Omega)$ est dense dans $R^2(\Gamma)$ l'espace de trace des éléments de $W(\Omega)$.

Première étape : Décrire ces espaces

Commençons par $R^2(\Gamma)$, d'après le Théorème 1.3.4 c'est le sous-espace $\prod_j H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ avec les conditions de compatibilité

$$g_j = 0 \;\; sur \; \Gamma_j \; pour \; j \in D,$$

$$h_j = 0 \;\; sur \;\; \Gamma_j \; pour \; j \in G,$$

$$g_j(S_j) = g_{j+1}(S_j), \; \forall j \tag{2.6}$$

$$g'_j = -\cos w_j g'_{j+1} + \sin w_j h_{j+1} \text{ à } s_j, \; \forall j \tag{2.7}$$

$$h_j = -\cos w_j h_{j+1} - \sin w_j g'_{j+1} \text{ à } s_j, \; \forall j \tag{2.8}$$

où la l'accent $'$ désigne une différenciation en τ_j, puis on décrit $R^m(\Gamma)$ avec $m > 4$. Pour simplifier, en profitant du Théorème 1.3.4.

Avant de continuer la démonstration on a besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 2.3.2. *L'image de $H^m(\Omega)$ par l'application*

$$u \longmapsto \{\gamma_j u = g_j, \gamma_j(\frac{\partial u}{\partial \eta_j}) = h_j\}_{1 \leq j \leq N}.$$

est le sous-espace de

$$\prod_j H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma_j) \times \prod_j H^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma_j).$$

défini par

$$g_j(S_j) = g_{j+1}(S_j),$$

et

$$g'_j(S_j) = -\cos \omega_j g'_{j+1}(S_j) + \sin \omega_j h_{j+1}(S_j), \tag{2.9}$$

$$h_j(S_j) = -\cos \omega_j h_{j+1}(S_j) - \sin \omega_j g'_{j+1}(S_j), \tag{2.10}$$

pour $1 \leq j \leq N$ et

$$-\cos \omega_j g''_j(S_j) - \sin \omega_j h'_j(S_j) = -\cos \omega_j g''_{j+1}(S_j) + \sin \omega_j h'_{j+1}(S_j), \tag{2.11}$$

lorsque $m \geq 4$ et

$$-\cos w_j g''_j - \sin \omega_j h'_j = -\cos \omega_j g''_{j+1} + \sin \omega_j h'_{j+1}, \tag{2.12}$$

lorsque $m = 3$.

Lemme 2.3.3. *Le sous-espace de* $H^{m-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+)$ *de ces fonctions* g *telle que*

$$g'(0) = 0,$$

est dense dans le sous-espace de $H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}_+)$ *des fonctions* g *telle que*

$$g' \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+),$$

pour la norme de g *dans* $H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}_+)$ *et la norme de* g' *dans* $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+)$.

Démonstration : *Voir P.Grisvard* [6].

Revenons à la démonstration du Lemme 2.3.1 *:*

De la même façon, on décrit $R^m(\Gamma)$, *c'est le sous-espace de* $\prod\limits_j H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma_j) \times H^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma_j)$ *défini par*

$$g_j(S_j) = 0 \text{ à } \Gamma_j \textit{ pour } j \in D,$$

$$h_j(S_j) = 0 \text{ à } \Gamma_j \textit{ pour } j \in G,$$

et (2.6), (2.9), (2.10), *et* (2.11)

Pour prouver la densité de $R^m(\Gamma)$ *dans* $R^2(\Gamma)$, *il faut faire l'étude localement près de chaque coin et en fonction du type de coin. Si nous supposons par exemple que* $j \in D^2$ *nous avons*

$$g_j = 0 \textit{ et } g_{j+1} = 0$$

et les conditions (2.7),(2.8) *impliquent*

$$h_j = 0 \quad et \quad h_{j+1} = 0 \quad à \quad S_j.$$

En d'autres termes

$$h_j \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+) \quad et \quad h_{j+1} \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+),$$

proche de zéro.

Dans des conditions similaires (2.9), (2.10), (2.11) *signifient que*

$$h_j(S_j) = h_{j+1}(S_j) = 0 \quad et \quad -h'_j(S_j) = h'_{j+1}(S_j).$$

Celles-ci dernières conditions sont clairement remplies lorsque

$$h_j \in D(\mathbb{R}_+) \quad et \quad h_{j+1} \in D(\mathbb{R}_+).$$

Par conséquent la densité prés de S_j découlera de la densité bien connue de $D(\mathbb{R}_+)$ dans $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+)$.
Supposons maintenant que $j \in G^2$. Alors, on a

$$h_j = 0 \quad et \quad h_{j+1} = 0$$

et les condition (2.6), (2.7), (2.8) *impliquent*

$$g_j(S_j) = g_{j+1}(S_j), \;\; g'_j = 0 \;\; et \;\; g'_{j+1} = 0 \;\; à \;\; S_j.$$

En d'autre

$$g'_j \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+) \quad et \quad g'_{j+1} \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+),$$

proche de zéro.

Dans des conditions similaires (2.6), (2.9), (2.10) et (2.8) signifient que

$$g_j(S_j) = g_{j+1}(S_j),$$

$$g'_j(S_j) = g'_{j+1}(S_j) = 0 \quad et \quad g''_j(S_j) = g''_{j+1}(S_j),$$

sauf si $\omega_j = \frac{\pi}{2}$ ou $\omega_j = \frac{3\pi}{2}$. En conséquence la densité prés de S_j du résultat auxiliaire suivant appliqué à $g_j + g_{j+1}$. Alors que l'application de $g_j - g_{j+1}$ suivra de la densité bien connue de $D(\mathbb{R}_+)$ dans $\tilde{H}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}_+)$. Supposons maintenant le cas de notre problème c'est-à-dire que $j \in D$ et $j+1 \in G$ (on laisse le cas $j \in G$ et $j+1 \in D$ qui est assez similaire au lecteur). Alors on a $h_j = 0$ et $g_{j+1} = 0$ et les conditions (2.6) (2.7) et (2.8) implique

$$g_j(S_j) = 0, \quad g'_j = \sin w_j h_{j+1} \quad à \quad S_j \quad et \quad \cos w_j h_{j+1} = 0 \quad à \quad S_j$$

de la même manière les conditions (2.6) (2.9) (2.10) et (2.11) impliquent

$$g_j(S_j) = 0, \quad g'_j(S_j) = \sin w_j h_{j+1}(S_j) \cos w_j h_{j+1}(S_j) = 0,$$

et

$$-\cos w_j g''_j(S_j) = \sin w_j h'_{j+1}(S_j).$$

Deux cas sont possibles : Commençons par le cas où $\cos w_j \neq 0$ ou autrement dit supposons que ω_j est ni $\frac{\pi}{2}$ ni $\frac{3\pi}{2}$.
Les conditions (2.6), (2.7) et (2.8) veut dire que

$$g_j(s_j) = 0, \; g'_j = h_{j+1} = 0 \; sur \; S_j$$

c'est-à-dire

$$h_{j+1} \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+) \; et \; g_j \in \tilde{H}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}_+) \;\; proche \;\; de \;\; zero.$$

Dans un état similaire (2.6), (2.9), (2.10) et (2.11) signifient que

$$g_j(S_j) = 0, \quad h_{j+1}(S_j) = g_j'(S_j) = 0 \quad et \quad -\cos w_j g''(S_j) = \sin w_j h_{j+1}'(S_j).$$

Donc, la densité de $D(\mathbb{R}_+)$ dans les deux espace $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+)$ *et* $\tilde{H}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}_+)$.

• Maintenant si $\cos w_j = 0$. Les conditions (2.6), (2.7) et (2.8) signifient seulement que

$$g_j(S_j) = 0 \quad et \quad g_j' - sin(w_j) h_{j+1} = 0,$$

c'est-à-dire

$$g_j(S_j) = 0 \quad et \quad g_j' - \sin(w_j) h_{j+1} \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+),$$

proche de zéro.

Dans un état similaire (2.6), (2.9), (2.10) et (2.11) signifient que

$$g_j(S_j) = 0, g_j'(S_j) - (\sin w_j) h_{j+1}(S_j) = 0 \quad et \quad h_{j+1}'(S_j) = 0,$$

et par conséquent la densité $D(\mathbb{R}_+)$ dans $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+)$ appliqué à

$$g_j' - (\sin w_j) h_{j+1},$$

et du lemme suivant appliqué à g_j ■

Lemme 2.3.4. [9]

Le sous-espace de $H^{m-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}+)$ de ces fonctions g telles que

$$g(0) = g''(0) = 0,$$

est dense dans le sous-espace de $H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}+)$ défini par

$$g(0) = 0.$$

Lemme 2.3.5. [9] On a l'identité

$$\int_{\Omega} D_1^2 u D_2^2 u dx = \int_{\Omega} (D_1 D_2 u)^2 dx$$

pour tout $u \in W(\Omega)$.

Démonstration : Voir Grisvard [9].

Théorème 2.3.1. ***Igalité de Caccioppoli***
Pour tout $u \in W(\Omega), ona$

$$\|\Delta u\|^2_{(L^2(\Omega))^2} = \|\nabla^2 u\|^2_{(L^2(\Omega))^2}. \tag{2.13}$$

Démonstration

D'aprés le Lemme 2.3.1 pour tout $u \in W(\Omega)$ tel que de plus $u \in (H^3(\Omega))^2$

$$\begin{aligned}\|\Delta u\|^2_{(L^2(\Omega))^2} - \|\nabla^2 u\|^2_{(L^2(\Omega))^2} &= \int_\Omega (\Delta u)^2 dx - \int_\Omega (\nabla^2 u)^2 dx \\ &= \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} dx - \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} dx = I_1 - I_2,\end{aligned}$$

tel que :

$$I_1 = \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} dx, \quad I_2 = \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} dx.$$

On utilise la formule de Green deux fois sur chaque terme de l'intégrale séparément on obtient :

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} dx \\ &= -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^2 \partial x_1} dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_1 ds \\ &= \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}\eta_2 ds + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_1 ds.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} dx \\ &= -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_2 ds \\ &= \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_1 ds + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_2 ds.\end{aligned}$$

D'apès le Lemme 2.3.5

$$\begin{aligned}I_1 - I_2 &= -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}\eta_2 ds + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_1 ds + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_1 ds - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_2 ds \\ &= \sum_D \left(\int_{\Gamma_j} \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_1 ds - \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_2 ds \right) + \sum_G \left(\int_{\Gamma_j} \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_1 ds - \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_2 ds \right).\end{aligned}$$

Pour simplifier les intégrales, on aura besoin d'expliquer les dérivées par rapport à x_1 et x_2 en fonction des dérivées suivant la normale η et la tangente τ.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x_1}\eta_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\eta_2 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x_1}\eta_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}\eta_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial \eta}\eta_1 - \frac{\partial}{\partial \tau}\eta_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial \eta}\eta_2 - \frac{\partial}{\partial \tau}\eta_1. \end{cases}$$

On applique aussi ces formules pour obtenir

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\eta_1 - \frac{\partial u}{\partial \tau}\eta_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\eta_2 - \frac{\partial}{\partial \tau}\eta_1\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\eta_2 - \frac{\partial u}{\partial \tau}\eta_1\right)\eta_1 ds \\ &- \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\eta_1 - \frac{\partial u}{\partial \tau}\eta_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\eta_1 - \frac{\partial}{\partial \tau}\eta_2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\eta_2 - \frac{\partial u}{\partial \tau}\eta_1\right)\eta_2 ds \\ &+ \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\eta_1 - \frac{\partial u}{\partial \tau}\eta_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\eta_2 - \frac{\partial}{\partial \tau}\eta_1\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\eta_2 - \frac{\partial u}{\partial \tau}\eta_1\right)\eta_1 ds \\ &- \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\eta_1 - \frac{\partial u}{\partial \tau}\eta_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\eta_1 - \frac{\partial}{\partial \tau}\eta_2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\eta_2 - \frac{\partial u}{\partial \tau}\eta_1\right)\eta_2 ds \\ &= \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\eta_1\right)\left(-\frac{\partial}{\partial \tau}\eta_1\right)\left(-\frac{\partial u}{\partial \tau}\eta_1\right)\eta_1 ds \\ &- \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\eta_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\eta_1\right)\left(-\frac{\partial u}{\partial \tau}\eta_1\right)\eta_2 ds \\ &+ \int_\Gamma \left(-\frac{\partial u}{\partial \tau}\eta_2\right)\left(-\frac{\partial}{\partial \eta}\eta_2\right)\left(-\frac{\partial u}{\partial \eta}\eta_2\right)\eta_1 ds \\ &- \int_\Gamma \left(-\frac{\partial u}{\partial \tau}\eta_2\right)\left(-\frac{\partial}{\partial \tau}\eta_2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\eta_2\right)\eta_2 ds \\ &= \sum_{j\in D}\left(\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right) ds - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) ds\right) \\ &+ \sum_{j\in G}\int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right) ds - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) ds\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On observons que les intégrales de bord sont toutes nulles, et par suite :

$$\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)^2} = \|\nabla^2 u\|^2_{L^2(\Omega)}, \forall u \in W(\Omega) \cap (H^3(\Omega))^2$$

et d'après le Lemme 2.3.1, on en déduit le résultat pour $u \in W(\Omega)$.

Corollaire 2.3.1. *Il existe une constante k positive, telle que l'inégalité* (2.5) *ait lieu pour tout $u \in W(\Omega)$.*

Démonstration

Grâce à la continuité de la forme bilinéaire $a(.,.)$ *sur* V *on a :*

$$a(u,v) \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

On pose $u = v$ *donc :*

$$a(u,v) \leq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

D'une part, d'après l'égalité (2.13)

$$a(u,u) \leq \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

et d'autre part $a(.,.)$ *est coercive, c'est-à-dire*

$$a(u,u) \geq k\|u\|^2_{H^2(\Omega)},$$

donc

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)} \leq k\|\Delta u\|^2_{H^2(\Omega)}$$

Chapitre 3

Régularité des dérivées secondes

Dans ce chapitre, nous montrerons l'importance et l'utilité de l'inégalité à priori (2.13), qui nous permet de construire l'espace d'image $R(\Omega)$ de l'espace $W(\Omega)$ et son orthogonal $N(\Omega)$ via l'alternative de Fredholm relative à notre problème dans une première partie. Dans la deuxième partie nous montrons que l'espace $N(\Omega)$ est de dimension finie.

3.1 Alternative de Fredholm

L'internative de Fredholm est un des théorème de Fredholm qui donne des conditions sur l'espace V que l'on cherche la solution du problème et un opérateur A pour dire que le problème $(\lambda - A)u = f, u, f \in V$ résoluble. Elle énonce entre autres que tout scalaire non nul du Spectre d'un opérateur compact est une valeur propre de cet opérateur.
On suppose que E un espace de Banach.

Théorème 3.1.1. *Soit $A : E \longrightarrow E$ un opérateur compact. Alors l'équation*

$$(\lambda - A)u = f. \;\; \lambda \neq 0,$$

admet une solution unique $u \in E$ si seulement si l'équation homogène

$$(\lambda - A)u = 0,$$

n'a que la solution triviale $u = 0$.

Dans ce cas l'opérateur $(\lambda - A)$ est inversible et borné.

Dans la définition suivante on parle de l'opérateur de Fredholm qui est un concept d'analyse fonctionnelle et qui porte le nom du mathématicien Suédois Fredholm $(1866-1927)$.

Définition 3.1.1. *Soit E un espace de Banach et A un opérateur linéaire borné, on dit que A est un opérateur de Fredholm si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*
1. $R(A)$ *est fermé.*
2. $\dim\ker(A)$ *est finie.*
3. $Co\dim(R(A))$ *est finie,*
où

$$Co\dim(R(A)) = \dim(E/ImA).$$

Dans tout la suite on désignera par $R(\Omega)$ l'image de $W(\Omega)$ par l'opérateur Δ, c'est-à-dire que :

$$R(\Omega) = \{f \in (L^2(\Omega))^2; f = \Delta u, u \in W(\Omega)\}.$$

On utilise l'inégalité (2.5) pour montrer que $R(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $(L^2(\Omega))^2$ et par conséquent on cherchera son orthogonal $N(\Omega)$ dans l'espace $(L^2(\Omega))^2$ où :

$$\begin{aligned} N(\Omega) &= \{v \in (L^2(\Omega))^2; \langle v, f\rangle = 0, \forall f \in R(\Omega)\} \\ &= \{v \in (L^2(\Omega))^2; \Delta v = 0,\ dans\ \ \Omega,\ \gamma v = 0, v \in W(\Omega)\} \end{aligned}$$

D'après l'inégalité

$$\|u\|_{(H^2(\Omega))^2} \leq k\|\Delta u\|_{(L^2(\Omega))^2},$$

$R(\Omega)$ est un sous espace fermé. En effet :
Soit $(u_n)_n$ une suite de $(H^2(\Omega))^2$ tel que $(\Delta u_n)_n$ converge dans $(L^2(\Omega))^2$ vers f c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta u_n := f,$$

Grâce à la linéarité de Δ

$$\|u_n - u_m\|_{(H^2(\Omega))^2} \leq c\|\Delta u_n - \Delta u_m\|_{(L^2(\Omega))^2}$$

Passant à la limite quand n, m tend vers $+\infty$, on trouve

$$\lim_{nm\to\infty} \|u_n - u_m\|_{(H^2(\Omega))^2} = 0,$$

on en déduit alors que la suite $(u_n)_n$ est elle-même une suite de Cauchy. Comme $W(\Omega)$ est complet il existe ainsi $u \in W(\Omega)$ tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = u$.
De la continuité de Δ

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta u_n = \Delta(\lim_{n\to+\infty} u_n) = \Delta u,$$

et par conséquent

$$\Delta u = f.$$

Ceci montre que $f \in R(\Omega)$ et donc $R(\Omega)$ est un sous espace fermé.
On a

$$N(\Omega) = \{v \in (L^2(\Omega))^2; \langle v, f\rangle = 0, \forall f \in R(\Omega)\}.$$

Soit $(v_n)_n$ une suite de $N(\Omega)$ qui converge vers $v \in (L^2(\Omega))^2$. Alors, pour tout $f \in R(\Omega)$ l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \langle v_n, f\rangle = \langle v, f\rangle = 0,$$

donc $v \in N(\Omega)$, de plus, on a

$$R(\Omega) \subset \overline{R(\Omega)},$$

d'où

$$(\overline{R(\Omega)})^\perp \subset N(\Omega).$$

Soit $v \in N(\Omega)$ et $f \in \overline{R(\Omega)}$, il existe f_n une suite de $R(\Omega)$ telle que $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$. Alors

$$\langle v, f\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle v, f_n\rangle = 0.$$

Pour prouver que les éléments de $N(\Omega)$ sont les solutions d'un problème de Dirichlet-contact sans frottement homogène on a le lemme suivant.

Lemme 3.1.1. *Soit $v \in N(\Omega)$, alors v est solution du problème dual suivant :*

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \ dans \ \Omega, \\ \gamma_j(v) = 0, \ sur \ \Gamma_j, \ \forall j \in D, \\ \gamma_j(v.\eta^j) = \gamma_j(\frac{\partial v}{\partial \eta^j}.\tau^j) = 0, \ sur \ \Gamma_j, \ \forall j \in G. \end{cases}$$

Démonstration

1. Montrons que l'équation d'équilibre $\Delta u = 0$ et satisfaite.
Soit v un élément de $N(\Omega)$ une fonction de carré intégrable dans Ω,$\exists u$ telle que

$$\int_\Omega f.v dx = \int_\Omega v \Delta u dx = 0.$$

On a $v \in (D(\Omega))^2$, puisque $(D(\Omega))^2 \subset W(\Omega)$ alors on change l'intégrale par les crochets

$$\langle v, \Delta u\rangle = -\langle \nabla v, \nabla u\rangle = \langle \Delta v, u\rangle = 0,$$

ceci implique que

$$\Delta v = 0 \text{ dans } (D'(\Omega))^2,$$

et par conséquent $v \in D(\Delta, (L^2(\Omega))^2)$ l'espace maximale de Δ.
Il nous reste à montrer que v vérifie les mêmes conditions que le problème $(\mathcal{P})$.
Pour tout $\Phi_j = (\Phi_j^1, \Phi_j^2) \in (D(\Gamma_j))^2; \forall j \in D,\ \psi_j \in D(\Gamma_j)\ , \chi_j \in D(\Gamma_j), \forall j \in G, \exists u \in (H^2(\Omega))^2$ tel que

$$\begin{cases} \gamma_j(u) = 0\ , \gamma_j(\frac{\partial u}{\partial \eta^j}) = \Phi_j\ , \forall j \in D; \\ \gamma_j(u.\eta^j) = 0, \gamma_j(u.\tau^j) = \psi_j,\ \forall j \in G; \\ \gamma_j(\frac{\partial u}{\partial \eta^j}.\tau^j) = 0,\ \gamma_j(\frac{\partial u}{\partial \eta^j}.\eta^j) = \chi_j,\ \forall j \in G. \end{cases}$$

De plus, u est nulle aux voisinage de S_j, $\forall j \in= \overline{1, N}$ et par conséquent, on applique la formule de Green généralisée Théorème 1.4.1 pour deux fonctions u et $v \in N(\Omega)$, on obtient

$$\langle v, \Delta u\rangle_\Omega - \langle \Delta v, u\rangle_\Omega = 0 \Leftrightarrow \int\limits_\Omega v\Delta u dx - \int\limits_\Omega \Delta v u dx = 0,$$

d'où

$$-\int\limits_\Omega \nabla v \nabla u dx + \int\limits_\Gamma \nabla u v ds + \int\limits_\Omega \nabla v \nabla u dx - \int\limits_\Gamma \nabla v u ds$$
$$=$$
$$\sum_{j\in D}\left(\int\limits_{D(\Gamma_j)} \frac{\partial u}{\partial \eta^j}.\gamma_j v ds - \int\limits_{D(\Gamma_j)} \frac{\partial v}{\partial \eta^j}.\gamma_j u ds\right) + \sum_{j\in G}\left(\int\limits_{G(\Gamma_j)} \frac{\partial u}{\partial \eta^j}.\gamma_j v ds - \int\limits_{G(\Gamma_j)} \frac{\partial v}{\partial \eta^j}.\gamma_j u ds\right)$$
$$=$$
$$\sum_{j\in D}\left(\int\limits_{D(\Gamma_j)} \gamma_j(\frac{\partial u}{\partial \eta^j}).\gamma_j(v)\right) ds + \sum_{j\in G}\left(\int\limits_{G(\Gamma_j)} \gamma_j(\frac{\partial u}{\partial \eta^j}).\gamma_j(v) ds - \int\limits_{G(\Gamma_j)} \gamma_j(\frac{\partial v}{\partial \eta^j}).\gamma_j(u) ds\right)$$

donc

$$\sum_{j\in D}\left\langle \gamma_j\left(\frac{\partial u}{\partial \eta^j}\right), \gamma_j(v)\right\rangle_{\tilde{H}^{\frac{-3}{2}}(\Gamma_j)} + \sum_{j\in G}\left\langle \gamma_j\left(\frac{\partial u}{\partial \eta^j}.\eta^j\right), \gamma_j(v.\eta^j)\right\rangle_{\tilde{H}^{\frac{-3}{2}}(\Gamma_j)}$$
$$-\sum_{j\in G}\left\langle \gamma_j\left(\frac{\partial v}{\partial \eta^j}.\tau^j\right), \gamma_j(u.\tau^j)\right\rangle_{\tilde{H}^{\frac{-3}{2}}(\Gamma_j)} = 0$$

d'où

$$\sum_{j\in D}\langle \Phi_j, \gamma_j(v)\rangle_{\tilde{H}^{\frac{-3}{2}}(\Gamma_j)} + \sum_{j\in G}\left\langle \chi_j, \gamma_j(v.\eta^j)\right\rangle_{\tilde{H}^{\frac{-3}{2}}(\Gamma_j)} - \sum_{j\in G}\left\langle \gamma_j(\frac{\partial v}{\partial \eta^j}.\tau^j), \psi_j\right\rangle_{\tilde{H}^{\frac{-3}{2}}(\Gamma_j)} = 0.$$

Les fonctions Φ_j, χ_j, ψ_j sont arbitraires dans $(D(\Gamma_j))^2, D(\Gamma_j)$ et $D(\Gamma_j)$ respectivement, donc cette égalité montre que :

$$\begin{cases} \gamma_j v = 0, \ \forall j \in D, \\ \gamma_j(v.\eta^j) = \gamma_j(\frac{\partial v}{\partial \eta^j}.\tau^j) = 0, \ \forall j \in G, \end{cases}$$

et c'est le résultat souhaité

Remarque 3.1.1. *Remarquons que le Lemme 3.1.1 montre que pour tout $v \in N(\Omega)$ est une solution du problème homogène d'adjoint, mais il ne caractérise pas complètement l'espace orthogonal $N(\Omega)$.*

Lemme 3.1.2. *Soit $v \in D(\Delta, (L^2(\Omega))^2)$ solution du problème dual tel que v vérifie les conditions*
i) $\langle v, \Delta(y_j\zeta_j)\rangle = 0$ *si* $j \in D$ *et* $j+1 \in G$;
ii) $\langle v, \Delta(x_j\zeta_j)\rangle = 0$ *si* $j \in D$ *et* $j+1 \in G$;
où $\zeta_j \in D(\overline{\Omega})$ est une fonction de troncature qui dépend seulement de S_j, tel que $\zeta_j = 1$ au voisinage de S_j et nulle sur toute $\overline{\Gamma_k}$ sauf pour $k = j$ et $k = j+1$.
Alors $v \in N(\Omega)$.

Démonstration :

D'abord on va montrer que $\langle v; \Delta u\rangle = 0, \forall u \in W(\Omega)$.
D'après le Lemme 2.3.1 on peut prendre $u \in (H^4(\Omega))^2 \cap W(\Omega)$ à conditions que $u \in (C^2(\overline{\Omega}))^2$, et on pose

$$\varpi = u - \sum_{j\in D, J+1\in G} D_{y_j}u(S_j)y_j\zeta_j - \sum_{j\in G, j+1\in D} D_{x_j}u(S_j)x_j\zeta_j.$$

Où D_{x_j}, D_{y_j} désignent respectivement les dérivées par rapport x_j et y_j.

$$\langle v; \Delta\varpi\rangle = \left\langle v, \Delta\left(u - \sum_{j\in D, J+1\in G} D_{y_j}u(S_j)y_j\zeta_j - \sum_{j\in G, j+1\in D} D_{x_j}u(S_j)x_j\zeta_j\right)\right\rangle,$$

d'après la linéarité de Δ

$$\langle v; \Delta\varpi\rangle = \langle v, \Delta u\rangle - \left\langle v, \Delta\left(\sum_{j\in D, J+1\in G} D_{y_j}u(S_j)y_j\zeta_j\right)\right\rangle - \left\langle v, \Delta\left(\sum_{j\in G, j+1\in D} D_{x_j}u(S_j)x_j\zeta_j\right)\right\rangle,$$

et grâce à la continuité de Δ et les conditions $i), ii)$ on déduit que

$$\begin{aligned} \langle v; \Delta\varpi\rangle &= \langle v, \Delta u\rangle - \left\langle v, \sum_{j\in D, J+1\in G} D_{y_j}u(s_j)\Delta(y_j\zeta_j)\right\rangle - \left\langle v, \sum_{j\in G, j+1\in D} D_{x_j}u(s_j)\Delta(x_j\zeta_j)\right\rangle \\ &= \langle v, \Delta u\rangle - \sum_{j\in D, J+1\in G} \langle v, D_{y_j}u(S_j)\Delta(y_j\zeta_j)\rangle - \sum_{j\in G, j+1\in D} \langle v, \ D_{x_j}u(S_j)\Delta(x_j\zeta_j)\rangle \\ &= \langle v, \Delta u\rangle. \end{aligned}$$

Au voisinage de S_j, on a $u(S_j) = 0,\ \forall j \in D,\ J+1 \in D$ cela implique que $\varpi(S_j) = 0,\ \forall j$. Donc $\nabla u.\mu_j = 0$ sur chaque Γ_j où

$$\begin{cases} \mu_j = \eta^j, \text{ pour } j \in G \\ \mu_j = \tau^j, \text{ pour } j \in D \end{cases}$$

ceci implique que $\nabla u(S_j) = 0$ ça veut dire que μ_j et μ_{j+1} soient parallèles. cela seulement satisfaite quand $j \in G\ et\ j+1 \in D$ ou $j \in D\ et\ j+1 \in G$.
Dans le cas où : $j \in G\ et\ \ j+1 \in D$, on a $u = 0$ sur le segment Γ_{j+1} et par conséquent $D_{x_j}u(S_j) = 0\ et\ \nabla\varpi(S_j) = 0$. La même chôse quand $j \in D$ et $j+1 \in G$:

$$u = 0\, sur\, \Gamma_j$$

et par suite

$$D_{y_j}u(S_j) = 0\ \ et\ \ \nabla\varpi(S_j) = 0.$$

En résumant : dans tous les cas, nous avons :

$$\varpi(S_j) = 0\ \ et\ \ \nabla\varpi(S_j) = 0,$$

et par conséquent, en appliquant la formule de Green généralisé pour ϖ et v, on en déduit que :

$$\langle v; \Delta u\rangle = \langle v; \Delta\varpi\rangle = 0,$$

où bien

$$\sum_j \int_{\Gamma_j} \nabla\varpi\nabla v ds - \sum_j \int_{\Gamma_j} \nabla u\nabla v ds = 0,$$

c'est-à-dire $v \in N(\Omega)$.

Lemme 3.1.3. [9]
Soit $v \in N(\Omega)$, alors $v \in C^\infty(\Omega\backslash\mathbf{S})$, où **S** est l'ensemble des sommets.

Démonstration : Voir P. Grisvard [9].

3.2 Régularité des dérivées secondes

L'objectif de cette section est d'étudier la régularité des dérivées secondes au but de déterminer la dimension de l'espace orthogonal $N(\Omega)$. Le Lemme 3.1.3 montre que la solution v est de classe C^∞ dans Ω et jusqu'au sommets de la frontière, donc nous allons étudier le comportement de la solution v prés des coins. Dans ce cas on a le théorème suivant

Théorème 3.2.1. *Si toutes les angles w_j de Ω sont strictement infèrieur à $\frac{\pi}{2}$ alors*

i) $N(\Omega) \subset (H^2(\Omega))^2$,

ii) $N(\Omega) = \{0\}$.

Démonstration :

i) Il reste à prouver que pour tout $S_j \in \mathbf{S}$, ($\mathbf{S}$: l'ensemble des sommets), il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de S_j dans $\mathbb{R}^2$ tel que $v \in (H^2(\Omega \cap \mathcal{V}))^2$ tel que $v \in N(\Omega)$.
Notons que pour le problème de Dirichlet on a la régularité $H^2(\Omega)$ (voir P. Grisvard [6]). Et sur lui il suffit de démontrer la régularité $H^2(\Omega)$ au voisinage de somment de type mixte. Pour cela on translate le point S_j considéré en $(0,0)$ et on suppose que $\mathcal{V}$ est une boule de centre $(0,0)$ et de rayon ρ assez petit pour que $\Omega \cap \mathcal{V}$ soit un secteur fini d'ouverture ω, c'est-à-dire

$$\Omega \cap \mathcal{V} = \{(x,y) = r(\cos\theta, \sin\theta), 0 < r < \rho,\ \theta \in]0,\omega[\}.$$

Maintenant, nous aurons besoin des fonctions propres de l'opérateur

$$\varphi \longrightarrow -\varphi''$$

sons diverses conditions aux limites sur $]0,\omega[$.
Plus précisément, définissions l'opérateur non borné Λ sur $H = L^2(]0,\omega[)^2$ sous la forme

$$\Lambda\varphi = -\varphi''.$$

où $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in D(\Lambda)$, tel que $D(\Lambda)$ représente le domaine de définition de Λ défini par

$$D(\Lambda) = \{\varphi \in (H^2(]0,\omega[))^2,\ \varphi_1'(0) = \varphi_1'(\omega) = 0,\ \varphi_2(0) = \varphi_2(\omega) = 0\}.$$

L'opérateur Λ est auto-adjoint et non négatif. Notons par $\varphi_m,\ m \geq 1$ les fonctions propres normalisées et par λ_m^2 leurs valeurs propres correspondantes, donc :

$$-\varphi_m'' = \lambda_m^2 \varphi_m,$$

où $\varphi_m \in D(\Lambda)$ pour tout m et λ_m $, m \geq 1$ sont solution de l'équation transcendante (solution du problème homogène) $\sin(2\lambda_m\omega) = 0$ (voir [10], [2]), alors

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{2\omega} \ , m \geq 1.$$

Soit maintenant $v \in N(\Omega)$ et on a $v \in (L^2(]0,\omega[))^2$, pour $r \in]0,\rho[$. L'ensemble des fonctions propres φ_k forme une base orthonormée de $H = L^2(]0,\omega[)$, donc chaque fonctions propres de l'opérateur Λ s'écrit comme suit :

$$v(re^{i\theta}) = \sum_{k\geq 1} c_k(r)\varphi_k(\theta),$$

avec

$$c_k(r) = \int_0^{\omega} v(re^{i\theta})\varphi_k(\theta)d\theta, \tag{3.1}$$

d'après le lemme suivant :

Lemme 3.2.1. *Si $\omega_j < \dfrac{\pi}{2}$ pour tout j, alors Λ est un isomorphisme de $H^2(\Omega \cap \mathcal{V}) \cap V(\Omega \cap \mathcal{V})$ sur $L^2(\Omega \cap \mathcal{V})$. Il en résulte que si $\varphi_k \in V(\Omega \cap \mathcal{V})$ est une fonction propre de Λ c'est-à-dire*

$$\Lambda\varphi_k = -\lambda_k\varphi_k, \quad dans \quad \Omega \cap \mathcal{V},$$

alors $\varphi_k \in H^2(\Omega \cap \mathcal{V})$ si $\omega_j < \frac{\pi}{2}$ pour tout j.

Revenons à la démonstration du Théorème 3.2.1.
En coordonnées polaires, on voit que tout $v \in N(\Omega)$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0, 0 < r < \rho, 0 < \theta < \omega$$

et comme

$$\Lambda v = -v''.$$

Cela nous permet de réécrire l'équation précédente :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\Lambda v}{r^2} = 0, 0 < r < \rho, 0 < \theta < \omega. \tag{$*$}$$

Pour calculer c_k en utilisant l'équation $(*)$ donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\sum_{k\geq 1} c_k(r)\varphi_k(\theta)\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sum_{k\geq 1} c_k(r)\varphi_k(\theta)\right)-\frac{\lambda_k^2}{r^2}\left(\sum_{k\geq 1} c_k(r)\varphi_k(\theta)\right)\\
&= \sum_{k\geq 1}\frac{\partial^2}{\partial r^2}c_k(r)\varphi_k(\theta)+\frac{1}{r}\sum_{k\geq 1}\frac{\partial}{\partial r}c_k(r)\varphi_k(\theta)-\frac{\lambda_k^2}{r^2}\sum_{k\geq 1}c_k(r)\varphi_k(\theta)\\
&= \sum_{k\geq 1}\varphi_k(\theta)\left(c_k''(r)+\frac{1}{r}c_k'(r)-\frac{\lambda_k^2}{r^2}c_k(r)\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

puisque cette identité est vérifiée pour tout $\varphi_k \in D(]0,\rho[)$, on obtient :

$$c_k''(r)+\frac{1}{r}c_k'(r)-\frac{\lambda_k^2}{r^2}c_k(r)=0,\ 0<r<\rho \tag{3.2}$$

au sens des distribution.

En effectuant le changement de variable $\ln r = t$:

$$\begin{aligned}
c_k'(r) &= \frac{dc_k(r)}{dt}\frac{dt}{dr}=\frac{1}{r}\frac{dc_k(r)}{dt},\\
c_k''(r) &= \frac{dc_k}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dc_k(r)}{dt}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{dc_k(r)}{dt}+\frac{1}{r}\frac{d^2c_k(r)}{dt^2}.
\end{aligned}$$

donc (3.2) s'écrit comme suit

$$c_k''(t)+c_k'(t)-\lambda_k^2 c_k(t)=0 \text{ dans }]0,\rho[.$$

L'équation caractéristique de cette équation admet deux solutions

$$d_k=\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda_k^2}}{2} \quad , \quad -d_k=\frac{-1-\sqrt{1+4\lambda_k^2}}{2},$$

donc

$$\begin{aligned}
c_k(t) &= a_k e^{d_k t}+b_k e^{-d_k t}\\
&= a_k e^{d_k \ln r}+b_k e^{-d_k \ln r}\\
&= a_k r^{d_k}+b_k r^{-d_k},
\end{aligned}$$

où a_k et b_k sont des constantes arbitraires .

D'abord montrons que $v\in (L^2(\Omega))^2$ c'est-à-dire, il suffit de montrer que $\|v\|_{(L^2(\Omega))^2}<+\infty$.

$$\begin{aligned}
\int_0^\omega |v(re^{i\theta})|^2 d\theta &= \int_0^\omega |\sum_{k\geq 1} c_{k(r)}\varphi_k(\theta)|^2 d\theta\\
&\leq \sum_{k\geq 1}|c_{k(r)}|^2\int_0^\omega |\varphi_k(\theta)|^2 d\theta.\\
&\leq \sum_{k\geq 1}|c_{k(r)}|^2.
\end{aligned}$$

car
$$\int_0^\omega |\varphi_k(\theta)|^2 d\theta = 1,$$
donc
$$\int_{\Omega\cap\mathcal{V}} |v(x)|^2 dx = \sum_{k\geq 1} \int_0^\rho |c_k(r)|^2 r^2 dr < +\infty,$$
puisque $v \in (L^2(\Omega))^2$, et pour que $b_k = 0$,il faut que :
$$\int_0^\rho r^{1-2d_k} dr = +\infty,$$
c'est-à-dire
$$2 - 2d_k < 0 \Leftrightarrow d_k > 1,$$
et par conséquent :
$$v(re^{i\theta}) = \sum_{k\geq 1} a_k r^{d_k} \varphi_k(\theta),$$
donc
$$\int_0^\omega |v(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{k\geq 1} |a_k|^2 r^{2d_k},$$
et par conséquent
$$\begin{aligned}\int_\Omega |v(x,y)|^2 dxdy &\geq \sum_{k\geq 1} |a_k|^2 \int_0^\rho r^{2d_k+1} dr \\ &\geq \sum_{k\geq 1} |a_k|^2 \frac{\rho^{2d_k+2}}{2d_k+2}.\end{aligned}$$
○ Dans la suite on vérifie que $v \in (H^2(\Omega))^2$ au voisinage de zéro c'est-à-dire il suffit de montrer que les normes des dérivées sont finies. Autrement dit :
Pour ε assez petit :
$$\int_0^\varepsilon \|\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\|^2_{(L^2(]0,\omega[))^2} r^2 dr + \int_0^\varepsilon \|\frac{\partial v}{\partial r}\|^2_{(H^1(]0,\omega[))^2} dr + \int_0^\varepsilon \|v\|^2_{(H^2(]0,\omega[))^2} \frac{dr}{r^2} < \infty.$$
En effet,
$$\begin{aligned}\bullet \int_0^\varepsilon \|\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\|^2_{(L^2(]0,\omega[))^2} r^2 dr &= \sum_{k\geq 1} |a_k|^2 d_k^2 (d_k-1)^2 \int_0^\varepsilon r^{2d_k-2} dr \\ &= \sum_{k\geq 1} |a_k|^2 d_k^2 (d_k-1)^2 \frac{\varepsilon^{2d_k-1}}{2d_k-1}.\end{aligned}$$
Cela signifie que la nature de l'intégrale $\int_0^\varepsilon \|\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\|^2_{(L^2(]0,\omega[))^2} r^2 dr$ est la nature de la série $\sum_{k\geq 1} |a_k|^2 d_k^2 (d_k-1)^2 \frac{\varepsilon^{2d_k-1}}{2d_k-1}$, et en conséquence nous étudierons la nature de la série. On

voit que la série $\sum\limits_{k\geq 1}|a_k|^2 d_k(d_k-1)^2\frac{\varepsilon^{2d_k-1}}{2d_k-1}$ est une série numérique à termes positifs car $d_k>1$, donc nous allons chercher une série équivalente lorsque $k\longrightarrow+\infty$ pour étudier la convergence de cette série.

D'après [5], $\lambda_k\sim Kk$ lorsque $k\longrightarrow+\infty$. On déduit que

$$d_k\sim Kk\ \ et\ \ d_k^2(d_k-1)^2\frac{\varepsilon^{2d_k-1}}{2d_k-1}\sim\frac{(Kk)^3\varepsilon^{2Kk}}{2}\qquad,$$

et aussi

$$\frac{\rho^{2+2d_k}}{2+2d_k}\sim\frac{\rho^{2Kk}}{2Kk},$$

donc pour $\varepsilon<\rho$ on a

$$d_k^2(d_k-1)^2\frac{\varepsilon^{2d_k-1}}{2d_k-1}=\circ\left(\frac{\rho^{2d_k+2}}{2d_k+2}\right),\quad k\longrightarrow+\infty$$

Alors les séries $\sum\limits_{k\geq 1}|a_k|^2 d_k^2(d_k-1)^2\frac{\varepsilon^{2d_k-1}}{2d_k-1}$ et $\sum\limits_{k\geq 1}|a_k|^2\frac{(Kk)^3\varepsilon^{2Kk}}{2}$ sont de même nature.

Fixons $\varepsilon<1$, alors par le théorème d'équivalence $\sum\limits_{k\geq 1}|a_k|^2\frac{(Kk)^3\varepsilon^{2Kk}}{2}$ converge, donc $\sum\limits_{k\geq 1}|a_k|^2 d_k^2(d_k-1)^2\frac{\varepsilon^{2d_k-1}}{2d_k-1}$ également, et par conséquent l'intégrale $\int\limits_0^{\varepsilon}\left\|\frac{\partial v}{\partial r}\right\|^2_{(L^2(]0,\omega[))^2}r^2dr$ converge. D'où :

$$\int\limits_0^{\varepsilon}\left\|\frac{\partial v}{\partial r}\right\|^2_{(L^2(]0,\omega[))^2}r^2dr<+\infty$$

$$\bullet\int\limits_0^{\varepsilon}\left\|\frac{\partial v}{\partial r}\right\|^2_{(L^2(]0,\omega[))^2}dr=\sum_{k\geq 1}|a_k|^2d_k^2\int\limits_0^{\varepsilon}r^{2d_k}dr$$
$$=\sum_{k\geq 1}|a_k|^2d_k^2\frac{\varepsilon^{2d_k+1}}{2d_k+1},$$

du fait que $d_k\sim Kk$ lorsque $k\longrightarrow+\infty$, en déduit que

$$d_k^2\frac{\varepsilon^{2d_k+1}}{2d_k+1}\sim Kk\frac{\varepsilon^{2Kk}}{2}.$$

Par la même démarche, on montre que la série numérique à termes positif $\sum\limits_{k\geq 1}|a_k|^2Kk\frac{\varepsilon^{2Kk}}{2}$ converge, alors $\sum\limits_{k\geq 1}d_k^2|a_k|^2\frac{\varepsilon^{2d_k+1}}{2dk+1}$ converge aussi, et par suite l'intégrale $\int\limits_0^{\epsilon}\|\frac{\partial v}{\partial r}\|^2_{H^1(]0,\omega[)}rdr$ converge.

Pour l'intégrale restant on utilise l'inégalité à priori (2.5) :

$$\|v\|^2_{(H^2(]0,\omega[))^2}\leq C\|v''\|^2_{(L^2(]0,\omega[))^2}.$$

donc

$$\bullet\ \|v\|^2_{(H^2(]0,\omega[))^2} \leq C \sum_{k\geq 1} |a_k|^2 r^{2d_k} d_k^4,$$

et

$$\int_0^{\varepsilon} \|v\|^2_{(H^2(]0,\omega[))^2} \frac{dr}{r^2} \leq \sum_{k\geq 1} |a_k|^2 d_k^4 \frac{\varepsilon^{2d_k-1}}{2d_k-1},$$

avec

$$d_k^4 \frac{\varepsilon^{2d_k-1}}{2d_k-1} \sim \frac{(Kk)^3 \varepsilon^{2Kk}}{2},\ k \longrightarrow +\infty.$$

Grâce au théorème d'équivalence des séries numériques, la série $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{(Kk)^3\varepsilon^{2Kk}}{2} |a_k|^2$ converge, donc la série $\sum\limits_{k\geq 1} |a_k|^2 d_k^4 \frac{\varepsilon^{2d_k-1}}{2d_k-1}$ l'est aussi, d'où la convergence de l'intégrale $\int\limits_0^{\varepsilon} \|v\|^2_{H^2(]0,\omega[)} \frac{dr}{r^2}$.
En résumé :

$$\int_0^{\varepsilon} \|\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\|^2_{(L^2(]0,\omega[))^2} dr + \int_0^{\varepsilon} \|\frac{\partial v}{\partial r}\|^2_{(H^1(]0,\omega[))^2} dr + \int_0^{\varepsilon} \|v\|^2_{(H^2(]0,\omega[))^2} dr \ \ \textit{converge}.$$

ce qui prouve que $v \in (H^2(\Omega))^2$, donc on conclure que $N(\Omega) \subset (H^2(\Omega))^2$.

ii) Soit $v \in N(\Omega)$, on sait de *i*) que $v \in H^2(\Omega)$ et

$$\Delta v = 0 \ \ \textit{dans} \ \ \Omega \ \ \textit{et} \ \ \gamma v = 0.$$

où γ est l'opérateur de traces sur $H^2(\Omega)$, donc $v \in W(\Omega)$ et comme la solution variationnelle unique on obtient que $v = 0$ donc

$$N(\Omega) = \{0\}$$

Proposition 3.2.1. [7] *Soit $v \in \mathcal{C}^\infty(]0, \rho[; D(\Lambda_j))$ solution de l'équation*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\Lambda_j v = 0,$$

et supposons que $v \in L^2(D_\rho)$ tel que $D_s = \Omega \cap \{0 < r < \rho\}$, alors

$$v(re^{i\theta}) = \sum_{m\geq 1} \alpha_m r^{\lambda_{j,m}} \varphi_{j,m}(\theta) + \sum_{0\leq \lambda_{j,m}\leq 1} \beta_m r^{-\lambda_{j,m}} \varphi_{j,m}(\theta),$$

où α_m, β_m sont des nombres réels tels que

$$|\alpha_m| \leq l m^{\frac{1}{2}} \rho^{-\lambda_{j,m}},$$

où l est une constante dépend uniquement de v.

Lemme 3.2.2. [7] *Pour tout j et pour tout $\lambda_{j,m} \in]0, 1[$, il existe $\sigma_{j,m} \in M(\Omega)$(un sous espace de $(L^2(\Omega))^2$) tel que*

$$\sigma_{j,m} - \zeta_j r_j^{-\lambda_{j,m}} \varphi_{j,m}(\theta) \in (H^1(\Omega))^2.$$

Démonstration : Pour montrer que $\sigma_{j,m} \in N(\Omega)$, il suffit de vérifier les conditions du Lemme 3.1.2. Notons par $u_{j,m}$ la fonction $\zeta_j r_j^{-\lambda_{j,m}} \varphi_{j,m}(\theta)$. Il est évident que

$$\Delta u_{j,m} = f_{j,m} \in D(\bar{\Omega}),$$

avec

$$\gamma_k(u_{j,m}) = 0, \forall k \in D,$$
$$\gamma_k(\frac{\partial u_{j,m}}{\partial \eta^k}.\tau^k) = \gamma_k(u_{j,m}.\eta^k) = 0, \quad \forall k \in G.$$

Comme on a rappelé dans la section 2.1, il existe un unique solution variationnelle $v_{j,m} \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\Delta v_{j,m} = f_{j,m},$$

$$\gamma_k(v_{j,m}) = 0 \quad pour\ tous\ k \in D,$$
$$\gamma_k(\frac{\partial v_{j,m}}{\partial \eta^k}.\tau^k) = \gamma_k(v_{j,m}.\eta^k) = 0 \quad pour\ tous\ k \in G.$$

Pour $v_{j,m} \in V$.
En appliquant la formule de Green pour $v \in (H^2(\Omega))^2$ et $h \in (H^1(\Omega))^2$ on obtient

$$\int\limits_\Omega \Delta v_{j,m} h dx = \int\limits_\Omega h f_{j,m} dx \Leftrightarrow -\int\limits_\Omega \nabla v_{j,m}.\nabla h dx = \int\limits_\Omega h f_{j,m} dx,$$

d'où

$$-\int\limits_\Omega \nabla v_{j,m}.\nabla h dx = \int\limits_\Omega \Delta u_{j,m} h dx,$$

pour tout $h \in V$.
Supposons maintenant que

$$\sigma_{j,m} = u_{j,m} - v_{j,m}.$$

Il est clair que $\sigma_{j,m} \in D(\Delta, (L^2(\Omega))^2)$ et que

$$\Delta \sigma_{j,m} = 0 \quad dans \quad \Omega,$$

$$\gamma_k(\sigma_{j,m}) = 0, \text{ sur } \Gamma_k, \ \forall\ k \in D,$$
$$\gamma\left(\frac{\partial \sigma_{j,m}}{\partial \eta^k}.\tau^k\right) = (\gamma_k \sigma_{j,m}.\eta^k) = 0 \text{ sur } \Gamma_j, \forall k \in G.$$

De plus on vérifiera les conditions d'orthogonalité du Lemme 3.1.2 en supposant $k \in G^2$, nous avons :

$$\int_\Omega \sigma_{j,m} \Delta\zeta_k dx = \int_\Omega u_{j,m}\Delta\zeta_k dx - \int_\Omega v_{j,m}\Delta\zeta_k dx$$
$$= \int_\Omega u_{j,m}\Delta\zeta_k dx + \int_\Omega \nabla v_{j,m}\nabla\zeta_k dx.$$

Par l'utilisation de la formule de Green puis que $v_{j,m} \in H^1(\Omega)$ et $\zeta_k \in H^2(\Omega)$. Donc

$$\int_\Omega \sigma_{j,m}\Delta\zeta_k dx = \int_\Omega u_{j,m}\Delta\zeta_k dx - \int_\Omega \Delta u_{j,m}\zeta_k dx.$$

On peut évaluer ces deux dernier intégrales par un calcul direct. Ils s'annulent tout les deux quand $j \neq k$ puisque ζ_j et ζ_k ont des supports disjoints. Lorsque $k = j$ la fonction ζ_j est constante par rapport à θ_j et donc orthogonale à $\varphi_{j,m}$ puisque $\lambda_{j,m} \neq 0$. En conséquence, les deux intégrales s'annulent et

$$\int_\Omega \sigma_{j,m}\Delta\zeta_k dx = 0 \text{ pour tout } k \in G^2.$$

Considérons maintenant la deuxième condition d'orthogonalité du Lemme 3.1.2, c'est-à-dire $k \in D$ et $k+1 \in G$. On peut effectuer les mêmes intégrations par parties pour conclure que

$$\int_\Omega \sigma_{j,m}\Delta(y_k\zeta_k)dx = \int_\Omega u_{j,m}\Delta(y_k\zeta_k)dx - \int_\Omega \Delta u_{j,m}(y_k\zeta_k)dx,$$

encore une fois les deux intégrales s'annulent quand $j \neq k$, et quand $k = j$ on voit que si $y_j\zeta_j = r_j \sin\theta_j \zeta_j$, c'est pour r_j fixe propositionnel à $\varphi_{j,n}$ avec $n = 1$ quand $\omega_j = \frac{\pi}{2}$ et $n = 2$ quand $\omega_j = \frac{3\pi}{2}$ c'est-à-dire orthogonal à la fonction propre correspondant à $\lambda_{j,n} = 1$. Il est orthogonal à $\varphi_{j,m}$ puisque $\lambda_{j,m} \neq 1$. Nous avons encore

$$\int_\Omega \sigma_{j,m}\Delta\zeta_k dx = 0, \quad \forall k \in M' \text{ (}\textit{un sous espace de } (L^2(\Omega))^2).$$

Enfin quand $k+1 \in D$ et $k \in G$ on prend $x_j\zeta_j = r_j\cos\theta_j\zeta_j$ au lieu de $y_j\zeta_j$, donc nous avons ainsi vérifié toutes les conditions d'orthogonalité du Lemme 3.1.2, ce qui prouve que $\sigma_{j,m} \in N(\Omega)$.

Théorème 3.2.2. *La dimension de $N(\Omega)$ est $\sum_{j=1}^{N} \mu_j$ où*

$$\mu_j = \begin{cases} card\{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k < \frac{\omega_j}{\pi}\}, & \textit{si } S_j \textit{ de type Dirichlet} \\ card\{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k < \frac{2\omega_j}{\pi}\}, & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration :

On définit l'opérateur non borné Λ_j sur $H_j = (L^2(]0, \omega_j[))^2$ par :

$$\Lambda_j \varphi = -\varphi'' \; dans \;\; D(\Lambda_j),$$

où

$$D(\Lambda_j) = \{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in (H^2(]0.\omega_j[))^2, \quad \varphi_1'(0) = \varphi_1(\omega_j) = 0; \quad \varphi_2(0) = \varphi_2(\omega_j) = 0\}.$$

Notons par $\varphi_{j,m}$, $m \geq 1$, les fonctions propres normalisées et $\lambda_{j,m}^2$ $m \geq 1$, les valeurs propres correspondantes. Donc on a :

$$-\varphi_{j,m}'' = \lambda_{j,m}^2 \varphi_{j,m} \quad \text{où} \quad \varphi_{j,m} \in D(\Lambda_j),$$

et

$$\lambda_{j,m} = \begin{cases} \frac{m\pi}{\omega_j}, & pour \; j \in D, \\ \frac{m\pi}{2\omega_j}, & pour \; j \in G. \end{cases}$$

Soit $v \in M(\Omega) \subset (L^2(\Omega))^2$. Grâce au Lemme 3.1.3 et la Proposition 3.2.1,v est une fonction régulière, alors $v(re^{i\theta}) \in D(\Lambda_j)$, pour tout $0 < r < \rho$ et

$$v(re^{i\theta}) = \sum_{m \geq 1} \alpha_{j,m} r^{\lambda_{j,m}} \varphi_{j,m}(\theta) + \sum_{0 < \lambda_{j,m} < 1} \beta_{j,m} r^{-\lambda_{j,m}} \varphi_{j,m}(\theta),$$

où $\alpha_{j,m}$ et $\beta_{j,m}$ sont des nombres réels. De plus grâce au lemme 3.2.2, on a

$$v(re^{i\theta}) - \sum_{m \geq 1} \alpha_{j,m} r^{\lambda_{j,m}} \varphi_{j,m}(\theta) - \sum_{0 < \lambda_{j,m} < 1} \beta_{j,m} \sigma_{j,m} \in (H^1(D_\rho))^2,$$

où

$$D_\rho = \Omega \cap \{0 < r < \rho\}.$$

Donc

$$v(re^{i\theta}) - \sum_{0 < \lambda_{j,m} < 1} \beta_{j,m} \sigma_{j,m} \in (H^1(D_\rho))^2.$$

D'après le Lemme 3.2.2, il s'ensuite que la fonction $w = v - \sum_{0 < \lambda_{j,m} < 1} \beta_{j,m} \sigma_{j,m}$ et de classe $H^1(\Omega)$ au voisinage de S_j ce qui montre que $\omega \in (H^1(\Omega))^2$.

Nous terminerons la preuve en montrant que ω s'annule. En effet :

Nous savons déjà que $\omega \in N(\Omega) \cap (H^1(\Omega))^2$ et d'après le théorème de Lax Milgram le problème admet une solution variationnelle unique, et montre que :

$$\int_\Omega \nabla w . \nabla v dx = 0, \forall v \in V,$$

donc

$$w = 0.$$

Cela montre que $v - \sum\limits_{0<\lambda_{j,m}<1} \beta_{j,m}\sigma_{j,m} = 0$, donc

$$v = \sum_j \sum_{0<\lambda_{j,m}<1} \beta_{j,m}\sigma_{j,m} \in (H^1(\Omega))^2.$$

Autrement dit que v est une combinaison linéaire des fonctions $\sigma_{j,m}$, $1 \leq j \leq N$ et $0 < \lambda_{j,m} < 1$ qui sont des fonctions linéairement indépendantes. Donc on conclure que $N(\Omega)$ est un sous espace de $(L^2(\Omega))^2$ de dimension finie égale $\sum\limits_{j=1}^{N} \mu_j$, où :

$$\mu_j = \begin{cases} card\{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k < \frac{\omega_j}{\pi}, & si\ S_j \text{ de type Dirichlet}, \\ card\{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k < \frac{2\omega_j}{\pi}, & sinon. \end{cases}$$

Corollaire 3.2.1. *L'opérateur Δ est un opérateur à indice de $W(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))^2$, plus précisément Δ est injectif et a une image fermée de codimension égale à $\sum\limits_{j=1}^{N} \mu_j$ dans $(L^2(\Omega))^2$.*

Démonstration :

D'après le Théorème 3.2.1, le noyau de l'opérateur Δ est nul, donc Δ est injectif et son image $R(\Omega)$ est fermée, donc l'espace quotient $(L^2(\Omega)/R(\Omega))$ est un espace de Banach, sa dimension est la codimension de l'espace image $R(\Omega)$ et par conséquent Δ est un opérateur de Fredholm à indice de $W(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))^2$.

Pour ce cas, l'indice de Δ est définie par :

$$\begin{aligned} Ind(\Delta) &= \dim N(\Omega) + Co\dim R(\Delta) \\ &= \dim\ker(\Delta) - \dim\ker(\Delta^2). \end{aligned}$$

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons traité un problème aux limites issus de la mécanique de contact.
Dans la première partie, nous avons montré l'existence et l'unicité de la solution variationnelle de problème de Dirichlet- Contact sans frottement pour l'équation de Laplace dans un polygone puis on a établie une estimation à priori très utile pour l'étude de la régularité de la solution. Dans la deuxième partie, nous avons construit l'espace de l'image de $W(\Omega)$ avec son orthogonal qui est de dimension finie et qui nous permet de déduire que l'opérateur Δ est un opérateur à indice de $W(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))^2$.

Bibliographie

[1] **H. Brezis**, *Analyse Fonctionnelle (Théorie et Applications)*, Masson, Paris, (1983).

[2] **M. Dilmi**, *Problèmes aux limites obliques et non linéaires pour les équations de Lamé* , Thèse de doctorat en sciences. Université Ferhat Abbas-Setif, Janvier 2009.

[3] **M. Dilim, H. Benseridi et A. Guesmia**, *Problème de contact sans frottement-Dirichlet pour les équations de Laplace et de Lamé dans un polygone*, Analele Universitatii Oradea, Fasc. Matematica,Tom XIV (2007), 221-236.

[4] **M. S. Hanna-K. T. Smith**, *Some remarks on the Dirichlet problem in piecewise smooth domains*, Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967), 575-593.

[5] **C. Hilbert**, *Méthode of mathematical physics*, Interscience, 1953.

[6] **P. Grisvard**, *Alternative de Frédholm relative au problème de Dirichlet dans un polygone*. Bollettion della, unione mathemtica, Italiana, (1972).

[7] **P. Grisvard**, *Alternative de Frédholm relative au problème de Dirichlet dans un polyèdre*. Annali della scuola Normale superiore di pisa, Classe di scienze 4^e série, (1975).

[8] **P. Grisvard**, *Boundary value problems in plan polygons*. Instructions for use, E.D.P, Bulletin de la direction des études et recherches, Série C, Mathématique 1(1986), 21-59.

[9] **P. Grisvard**, *Singularités in boundary value problème*, Masson, (1992).

[10] **M. Kerdoun**, *L'étude de deux problémes aux limites non linéaire d'évolution*. Mémoire de Master, Université de Jijel, (2016).

[11] **J. L. Lions, E. Magenes** et *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications*, **1**, Dunod, (1968).

[12] **M. Moussaoui**, *Problème de Neumann dans un domaine de* $\mathbb{R}^2$ *à frontière polygonale, Thèse de doctorat de troisième sycle, Alger, Mai (1973).*

[13] **N. Mehenaoui et S. Khalfoune**, *Etude variationnelle du système d'élasticité linéaire.* Mémoire de Master Université Abderrahmane mira, Bejaia, (2017).

[14] **B. Merouani**, *Quelques problème aux limites pour le système de Lamé dans un secteur plan*,C.R.A.S,t.304, serie I, 13(1987).

[15] **P. A. Raviart, Thomas**, *Introduction à L'analyse Numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, (1983).

[16] **M. Thérèse et Lacroisc. Sonier**, *Distributions Espace de Sobolev et Applications*, Ellipses, Marketing, S. A, Paris, (1998).

[17] **F. Sidroff**, *Mécanique des milieux continus*, École d'ingénieur. École centrale de lyon, France, (1980).