République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....
№ de série : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité Mathématiques.

Option Équations aux Dérivées Partielles et Applications.

Thème

Étude d'un problème d'évolution du second ordre

présenté par

Boutaghane Rofia

Devant le jury

Président	Chikouche Wided	Professeur.	Université de Jijel
Encadreur	Lounis Sabrina	M.C.A	Université de Jijel
Co-Encadreur	Mesdoui Fatiha	M.A.B	Université de Jijel
Examinateur	Boufenouche Razika	M.C.B	Université de Jijel

Promotion **2021/2022**

Remerciements

*Je remercie en première lieu **Allah** tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience qu'il ma donné durant ces longue années d'étude et le courage pour terminer ce mémoire.*

*Je tiens à remercier Madame **Lounis Sabrina** et **Mesdoui Fatiha** pour le soutien et l'encadrement qu'elles m'ont donné.*

*Je voudrais aussi remercier l'ensemble des membres du jury Madame **Chikouche Wided** et **Boufenouche Razika** pour m'avoir honorée par leurs évaluation du travail en tant qu'examinateurs.*

En fin, je remercie ma famille pour m'avoir donné tout ce dont avais besoin pour réussir dans mes études.

Dédicace
Je dédie ce mémoire

A mes très chèrs parents Nasser et Nassima,

qui sont la graine de mon existence et la source de ma réussite,

pour leurs encouragements et leurs sacrifices.

A mon très cher frère.

A mes amies.

A mes enseignants.

Table des matières

Notations **3**

Introduction **5**

1 Notions de base et résultats préliminaires **7**

1.1 Espaces métriques 7

1.1.1 Espaces vectoriels normés 8

1.1.2 Espaces de Hilbert 9

1.2 Analyse convexe 9

1.2.1 Ensembles convexes 9

1.2.2 Fonctions convexes 11

1.2.3 Sous différentiels 13

1.2.4 Cônes normaux 15

1.3 Multi-applications 16

1.4 Topologie faible 18

1.5 Topologie faible* 18

1.6 Théorèmes fondamentaux 20

1.6.1 Le théorème de compacité d'Ascoli 20

2 Les ensembles sous-lisses **21**

2.1 Définitions et propriétés 21

2.2 Résultats auxiliaires 27

3 Résultat d'existence de solutions pour un problème d'évolution du second ordre **31**

Conclusion **42**

Bibliographie **43**

Notations

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par

$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
H	Espace de Hilbert.
E	Espace vectoriel.
E'	Espace dual de E.
$\mathbb{B}$	La boule unité ouverte de H.
$\overline{\mathbb{B}}$	La boule unité fermée de H.
$\langle .,. \rangle$	Produit scalaire dans la dualité E', E.
$\sigma(E, E')$	La topologie faible sur E.
$\sigma(E', E)$	La topologie faible* sur E'.
$x_n \to x$	(x_n) converge fortement vers x.
$x_n \rightharpoonup x$	(x_n) converge faiblement vers x.
$x_n \rightharpoonup^* x$	(x_n) converge faiblement* vers x.
$co(C)$	L'enveloppe convexe de l'ensemble C.
$\overline{co}(C)$	L'enveloppe convexe fermée de l'ensemble C.
$\partial f(\overline{x})$	Sous différentiel de f en $\overline{x}$.
$\partial_F f(\overline{x})$	Sous différentiel de Fréchet de f en $\overline{x}$.
$\partial^c f(\overline{x})$	Sous différentiel de Clarke de f en $\overline{x}$. .
$\mathcal{N}_C(\overline{x})$	Le cône normal à C en $\overline{x}$.

$\mathcal{N}_C^F(\overline{x})$	Le cône normal de Fréchet à C en $\overline{x}$.
$\mathcal{N}_C^c(\overline{x})$	Le cône normal de Clarke à C en $\overline{x}$.
$\psi_C(.)$	La fonction indicatrice d'un ensemble C.
$\mathscr{C}_H([0,T])$	L'espace de toutes les fonctions continues de $[0,T]$ à valeurs dans H, muni de la norme de la convergence uniforme $\Vert f\Vert_\infty = \sup\limits_{t\in[0,T]} \Vert f(t)\Vert_H$.
$L_H^1([0,T])$	Espace des applications Lebesgue intégrables de $[0,T]$ à valeurs dans H muni de la norme $\Vert f\Vert_{L_H^1([0,T])} = \int_0^T \Vert f(t)\Vert_H dt$.
$\mathscr{W}_H^{2,1}([0,T])$	L'espace de toutes les fonctions dans $\mathscr{C}_H([-d,0])$ telles que leurs dérivées premières sont continues et leurs dérivées secondes faibles appartiennent à $L_H^1([0-d,0])$.
gph(f)	Le graphe de f.
$DG(x)$	La dérivée de l'application G au point x.
i.e.	C'est à dire.
p.p.	Presque partout.

Introduction

L'inclusion différentielle du second ordre impliquant le processus de Rafle a été conçu pour modéliser les problèmes de frottement ([10]). Cette inclusion différentielle peut être exprimée sous la forme

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in -\mathcal{N}_{C(u(t))}(\dot{u}(t)) \quad p.p\ t \in [0,T], \\ u(0) = u_0, \dot{u}(0) = v_0 \in C(u_0), \end{cases}$$

où $\mathcal{N}_{C(u(t))}(.)$ désigne le cône normal de l'ensemble $C(u(t))$.

Le premier ordre de ce problème d'évolution, pour un ensemble dépendant du temps (i.e., $C(u(t)) = C(t)$), a été introduit et étudié de maniéré approfondie dans les années 70 par J.J.Moreau dans une série d'articles fondamentaux [9]-[7]. Ce type de problème consiste à trouver une trajectoire $t \in [0,T] \mapsto u(t) \in C(t)$ qui satisfait le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -\mathcal{N}_{C(t)}(u(t)) \quad p.p\ t \in [0,T], \\ u(0) = u_0 \in C(0). \end{cases}$$

Cette inclusion peut être interprétée de la façon suivante : le point $x(t)$ soumis au champ de force $F(t, x(t))$, doit rester dans l'ensemble mobile $C(t)$.

L'objectif de ce mémoire, d'une part est d'étudier les ensembles sous-lisses, et d'autre part de détailler la quatrième section de l'article de J. Noel [12] . Dans un espace de Hilbert H, l'auteur de cet article a étudié l'inclusion différentielle de la forme

$$\left(\mathscr{P}_d\right)\begin{cases}\ddot{u}(t) \in -\mathcal{N}^c_{C(t,u(t))}(\dot{u}(t)) + G(t, \Theta(t)\dot{u}(t), \Theta(t)u) \quad p.p.\ t \in [0,T],\\ \dot{u}(t) \in C(t,u(t)) \qquad \forall t \in [0,T],\\ \dot{u}(0) = v_0, u(0) = u_0,\\ \phi, \varphi \in \mathscr{C}_H([-d,0]) \text{ et } u \equiv \phi, \dot{u} \equiv \varphi \text{ sur } [-d,0].\end{cases}$$

où les ensembles $C(t,u)$ sont supposés sous-lisses et G une perturbation non nécessairement bornée et qui contient un retard, et on définit l'application Θ de $\mathscr{C}_H([-d,T])$ dans $\mathscr{C}_H([-d,0])$ par

$$\Theta(t)y(s) := y(t+s) \quad \text{pour tout } s \in [-d,0].$$

Ce mémoire est composé de trois chapitres. Le premier, est consacré à des notions de base et quelques résultats fondamentaux concernant la compacité, la topologie faible et faible* que l'on va utiliser dans les autres chapitres . Dans le deuxième chapitre, nous étudions les ensembles sous-lisses et nous donnons quelques propriétés fondamentales qui caractérisent ce type d'ensembles. Finalement dans le troisième chapitre, nous étudions le problème $\left(\mathscr{P}_d\right)$.

Chapitre 1

Notions de base et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et théorèmes de base qui nous seront utiles dans les chapitres suivants.
Pour plus de détails voir [13].

1.1 Espaces métriques

Définition 1.1.1. *Une distance sur un ensemble E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes*

1. $d(x, y) = 0$ *si seulement si* $x = y$ *pour tous* $x, y \in E$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *pour tous* $x, y \in E$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *pour tous* $x, y, z \in E$.

Définition 1.1.2. *Un espace métrique est un couple (E, d) où E est une ensemble non vide et d est une distance sur E. On dit souvent que E est muni de la distance d.*

Définition 1.1.3. *Soit (E, d) un espace métrique, soit $x \in E$ et soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle boule ouverte (resp. boule fermée) de centre x et de rayon r l'ensemble*

$$B(x, r) = \{y \in E, d(x, y) < r\},$$
$$\Big(\textit{resp. } \overline{B}(x, r) = \{y \in E, d(x, y) \leq r\}\Big).$$

Définition 1.1.4. *Soit (E, d) un espace métrique et soit $x \in E$. Un ensemble V est un voisinage de x lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset V$.*

Définition 1.1.5. *Soit (E, d) un espace métrique et $O, F \subset E$. On dit que*

• *O est ouvert dans E lorsqu'il est un voisinage de chacun de ses points, i.e., pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O$.*

• *F est fermé dans E, si son complémentaire $E \setminus F$ est ouvert dans E.*

Définition 1.1.6. *Soit (E, d) un espace métrique, on dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E converge vers un point x de E si $d(x_n, x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, i.e.,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : d(x_n, x) < \epsilon.$$

On dit que x est la limite de (x_n) et on note $x_n \to x$.

Remarque 1.1.7. *Si la limite d'une suite (x_n) existe, alors elle est unique.*

Définition 1.1.8. *Soit (E, d) un espace métrique et F un sous-ensemble de E. On dit que F est séquentiellement fermé dans E si toute limite d'une suite dans F qui converge dans E est dans F.*

Remarque 1.1.9. *Un ensemble F est fermé de (E, d) si et seulement si F est séquentiellement fermé.*

Définition 1.1.10. *Une suite $(x_n)_n$ dans un espace métrique (E, d) est dite suite de Cauchy si $d(x_p, x_q)$ tend vers 0, lorsque p et q tendent vers l'infini, i.e.,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 > 0 : p \geq n_0, q \geq n_0 \Rightarrow d(x_p, x_q) < \epsilon.$$

Définition 1.1.11. *Un espace métrique (E, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente.*

1.1.1 Espaces vectoriels normés

Définition 1.1.12. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle norme sur E toute application $x \to \|x\|$ définie de E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions*

1. $\forall x \in E, \|x\| = 0$ *si seulement si* $x = 0$,
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
3. $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition 1.1.13. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soit $\|.\|$ une norme sur E. On associe à cette norme, de maniére naturelle, une distance d par la formule*

$$d(x,y) = \|x-y\| \quad \forall x,y \in E.$$

Définition 1.1.14. *On appelle espace vectoriel normé le couple $(E, \|.\|)$.*

1.1.2 Espaces de Hilbert

Définition 1.1.15. *On appelle produit scalaire sur E, toute forme bilinéaire $\langle .,. \rangle$: $E \times E \to \mathbb{K}$ possédant les propriétés suivantes*

1. $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$, $\forall x,y \in E$,

2. $\langle x,x \rangle \geq 0$, $\forall x \in E$,

3. $\forall x \in E : \langle x,x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Définition 1.1.16. *Soit E un espace vectoriel et soit $\langle .,. \rangle$ un produit scalaire sur E. On associe au produit scalaire une norme, dite associée, en posant*

$$\forall x \in E : \|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}.$$

Définition 1.1.17. *On appelle espace préhilbertien le couple constitué par un espace vectoriel E et par un produit scalaire.*

Proposition 1.1.18. (***Inégalité de Cauchy-Schwarz***) *Dans un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$, on a*

$$\forall x,y \in E : |\langle x,y \rangle| \leq \|x\|.\|y\|,$$

où $\|x\| = \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}}$ et $\|y\| = \langle y,y \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Définition 1.1.19. *Un espace préhilbertien est dit espace de Hilbert, s'il est complet par rapport à la norme associée.*

1.2 Analyse convexe

1.2.1 Ensembles convexes

Pour plus de détails voir [3].

Définition 1.2.1. *On dit qu'un sous-ensemble C d'un espace vectoriel E est convexe si*

$$\forall (u,v) \in C^2,\ \forall \lambda \in [0,1] : \lambda u + (1-\lambda)v \in C.$$

Exemple 1.2.2.

1. *Dans un espace vectoriel normé réel, toute boule ouverte ou fermée est convexe.*
2. *L'intersection d'une famille quelconque de sous-ensembles convexes est convexe.*
3. *L'intérieur $int(C)$ et l'adhérence $\overline{C}$ d'un ensemble convexe sont aussi convexes.*

Définition 1.2.3. *Soit C une partie d'un espace vectoriel E, l'enveloppe convexe de C, notée $co(C)$ est l'intersection de tous les ensembles convexes contenant C, et donc c'est le plus petit convexe qui contient C, i.e., $C \subset co(C)$.*

Proposition 1.2.4. *Soit E un espace vectoriel et $C \subset E$, alors,*

$$co(C) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\ n \geq 1, x_i \in C, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \Big\}.$$

Exemple 1.2.5. *On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}$.*

1. $A = \{x, y\}$ *alors* $co(A) = [x, y]$.
2. $B = \{a, b, c, d\}$ *alors* $co(B)$ *est le quadrilatère abcd.*

Définition 1.2.6. *Soit C une partie de E, l'enveloppe convexe fermée de C, notée $\overline{co}(C)$ est l'intersection de tous les ensembles convexes fermés contenant C.*

Définition 1.2.7. ***(Fonction distance)*** *Soit E un espace vectoriel normé et C un sous ensemble non vide fermé de E, on définit la fonction distance d_C sur E par*

$$d_C(x) = d(x, C) = \inf_{s \in C} \|x - s\|.$$

Définition 1.2.8. *Soit H un espace de Hilbert. Pour tout $x \in H$ donné, le sous ensemble de A noté et defini comme suit*

$$\mathrm{Proj}_A(x) = \{a \in A, d_A(x) = \|x - a\|\},$$

s'appelle l'ensemble des points de meilleure approximation de x par rapport à A. On dit aussi que $\mathrm{Proj}_A(x)$ est la projection de x sur A.

Proposition 1.2.9. (***Caractérisation d'une projection***) *Soit $C \subset E$ un convexe non vide et fermé. Un point $y \in C$ est une projection de $x \in E$ sur C si et seulement si la condition suivante est vérifiée*

$$\langle x - y, s - y \rangle \leq 0, \forall s \in C.$$

1.2.2 Fonctions convexes

Dans cette section, on considère une fonction $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Définition 1.2.10. *On appelle domaine effectif de f l'ensemble des points où elle ne prend pas la valeur $+\infty$, i.e.,*

$$\mathrm{dom} f := \{x \in E, f(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.2.11. *On appelle graphe de f l'ensemble défini par*

$$\mathrm{gph}(f) := \{(x, f(x)), x \in E\}.$$

Définition 1.2.12. *On appelle épigraphe de f la partie de l'espace produit $E \times \mathbb{R}$ noté et défini comme suit*

$$\mathrm{epi}(f) := \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}.$$

Définition 1.2.13. *On dit qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe si pour tous $x, y \in \mathrm{dom} f$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Exemple 1.2.14. *La fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \langle a, x\rangle + b$ où $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$ est convexe. En effet, soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0,1]$, on a*

$$\begin{aligned}
g(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \langle a, (\lambda x + (1-\lambda)y)\rangle + b \\
&= \lambda\langle a, x\rangle + (1-\lambda)\langle a, y\rangle + \lambda b + (1-\lambda) b \\
&= \lambda[\langle a, x\rangle + b] + (1-\lambda)[\langle a, y\rangle + b] \\
&= \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y).
\end{aligned}$$

Proposition 1.2.15. *f est convexe si et seulement si son épigraphe l'est aussi.*

Définition 1.2.16. *Soit C un sous ensemble non vide de E, la fonction indicatrice de C, $\psi_C : E \to \{0, +\infty\}$ est définie par*

$$\psi_C(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \in C, \\ +\infty, & si\ x \notin C. \end{cases}$$

Définition 1.2.17. *Soient H un espace Hilbert et C un ensemble non vide de H. la fonction support de C (ou la fonction d'appui de C), est la fonction notée σ_C définie par*

$$\begin{aligned} \sigma_C : E &\to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x &\mapsto \sigma_C(x) := \sup_{s \in C} \langle x, s \rangle. \end{aligned}$$

Proposition 1.2.18. *Pour tout sous ensemble non vide C d'un espace de Hilbert H, on a*

$$\overline{co}(C) = \{x \in E, \forall x' \in E', \langle x', x \rangle \leq \sigma_C(x')\}.$$

Définition 1.2.19. *Une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) sur E si pour tout $x \in E$ et pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E qui converge vers x, on a*

$$\liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \geq f(x).$$

La fonction f est dite semi-continue inférieurement sur une partie C de E si f est semi-continue inférieurement en tout point de C.

Définition 1.2.20. *Une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est dite semi-continue supérieurement (s.c.s.) sur E si pour tout $x \in E$ et pour tout suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E qui converge vers x, on a*

$$f(x) \geq \limsup_{n \to +\infty} f(x_n).$$

La fonction f est dite semi-continue supérieurement sur une partie C de E si f est semi-continue supérieurement en tout point de C.

Proposition 1.2.21. *f est continue si et seulement si f est à la fois semi-continue supérieurement et semi-continue inférieurement.*

Définition 1.2.22. *On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to E$ est absolument continue si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de $[a, b]$ par des intervalles disjointes $[a_k, b_k]$ vérifiant*

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta,$$

nous avons

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \epsilon.$$

Théorème 1.2.23. *Une fonction $f : [0, T] \to H$ est absolument continue si et seulement si elle est intégrale de sa dérivée, i.e.,*

$$f(t) - f(0) = \int_0^t f'(s)ds \quad t \in [0, T].$$

On voit bien qu'une fonction absolument continue est continue par contre la réciproque est fausse.

Remarque 1.2.24.

1. *Toute fonction absolument continue est uniformément continue.*
2. *Toute fonction absolument continue est dérivable presque partout.*

Définition 1.2.25. *Soit E un espace normé et $f : E \to \mathbb{R}$, on dit que f est localement lipschitzienne en $\overline{x}$ si et seulement s'il existe un voisinage V de $\overline{x}$ et une constante $L > 0$ tels que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

pour tous $x, y \in V$.

1.2.3 Sous différentiels

Soit E un espace vectoriel normé.

Définition 1.2.26. *Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et soit $\overline{x} \in \mathrm{dom} f$, un élement $\xi \in E$ est dit sous gradient de f en $\overline{x}$ si*

$$\langle \xi, x - \overline{x} \rangle \leq f(x) - f(\overline{x}), \ \textit{pour tout}\ x \in E.$$

La collection de tous les sous gradients de f en $\overline{x}$ est appelée le sous différentiel de f en $\overline{x}$, et notée $\partial f(\overline{x})$.

Exemple 1.2.27.

1. *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. Alors*

$$\partial f(x) = \begin{cases} 1, & si\ x > 0, \\ [-1, 1], & si\ x = 0, \\ -1, & si\ x < 0. \end{cases}$$

2. *La boule unitée fermée $\overline{\mathbb{B}}$ est le sous différentiel en $\overline{x} = 0$ de la fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, défini par $g(x) = \|x\|$. En effet, soit $\xi \in \overline{\mathbb{B}}$, i.e., $\|\xi\| \leq 1$*

$$\begin{aligned} \langle \xi, x - 0 \rangle &\leq \|\xi\|.\|x\|, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\leq \|x\| - \|0\|, \\ &\Rightarrow \xi \in \partial g(\overline{x}) \\ &\Rightarrow \overline{\mathbb{B}} \subset \partial g(0). \end{aligned}$$

inversement, soit $\xi \in \partial g(0)$

$$\begin{aligned} \xi \in \partial g(0) &\Rightarrow \langle \xi, x - 0 \rangle \leq g(x) - g(0), \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ &\Rightarrow \langle \xi, x \rangle \leq \|x\|, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

en particulier, pour $x = \xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \langle \xi, \xi \rangle = \|\xi\|^2 &\leq \|\xi\| \\ &\Rightarrow \|\xi\| \leq 1 \\ &\Rightarrow \xi \subset \overline{\mathbb{B}} \\ &\Rightarrow \partial g(0) \subset \overline{\mathbb{B}}, \end{aligned}$$

donc

$$\partial g(0) = \overline{\mathbb{B}}.$$

Définition 1.2.28. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne au voisinage de $\overline{x} \in H$, alors le sous différentiel de Clarke, noté $\partial^c f(\overline{x})$ est défini par*

$$\partial^c f(\overline{x}) = \{\xi \in E', \langle \xi, v \rangle \leq f^0(\overline{x}, v), \ \forall \ v \in E\},$$

où

$$f^0(\overline{x}, v) := \limsup_{(t,x)\to(0^+,\overline{x})} t^{-1}[f(x + tv) - f(x)],$$

est la dérivée directionnelle au sens de Clarke de f au point $\overline{x}$ dans la direction de v.

Définition 1.2.29. *[12] Un vecteur $\xi \in E'$ est un sous gradient de Fréchet de f en $\overline{x} \in E$, où f est fini, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\langle \xi, y - \overline{x} \rangle \leq f(y) - f(\overline{x}) + \epsilon \|y - \overline{x}\| \quad \text{pour tout } y \in \overline{B}(\overline{x}, \delta).$$

L'ensemble de tous les sous gradients de Fréchet de f en $\overline{x}$ est le sous différentiel de Fréchet $\partial_F f(\overline{x})$ de f en $\overline{x}$.

Proposition 1.2.30. *[12] On a toujours l'inclusion suivante*

$$\partial_F f(\overline{x}) \subset \partial^c f(\overline{x}). \tag{1.1}$$

1.2.4 Cônes normaux

Dans cette section, on désigne par H un espace de Hilbert.

Définition 1.2.31. *Soit C un sous ensemble convexe de H et $\overline{x} \in C$. Le cône normal à C en $\overline{x}$ est l'ensemble défini par*

$$\mathcal{N}_C(\overline{x}) := \{v \in H : \langle v, x - \overline{x} \rangle \leq 0, \text{ pour tout } x \in C\}.$$

Exemple 1.2.32. *Soit $C = [0,1] \times [0,1]$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$,*

1. *le cône normal à C en $\overline{x} = (0,0)$ est $]-\infty, 0] \times]-\infty, 0]$,*

2. *le cône normal à C en $\overline{x} = (1,1)$ est $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$.*

Remarque 1.2.33. (***La relation entre le cône normal et la projection***) *Soit C un convexe fermé de H, si $y = \mathrm{Proj}_C(x)$, alors $y = (I + \mathcal{N}_C)^{-1}(x)$, donc*

$$(I + \mathcal{N}_C)^{-1}(.) = \mathrm{Proj}_C(.).$$

En effet,

$$\begin{aligned} y = \mathrm{Proj}_C(x) &\Leftrightarrow \langle x - y, z - y \rangle \leq 0, \forall z \in C \\ &\Leftrightarrow x - y \in \mathcal{N}_C(y) \\ &\Leftrightarrow x \in y + \mathcal{N}_C(y) \\ &\Leftrightarrow x \in (I + \mathcal{N}_C)(y) \\ &\Leftrightarrow y = (I + \mathcal{N}_C)^{-1}(x), \end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{Proj}_C(.) = (I + \mathcal{N}_C)^{-1}(.).$$

Proposition 1.2.34. (***La relation entre la fonction support et le cône normal***) *$s \in \mathcal{N}_C(x)$ si et seulement si pour tout $x \in C$*

$$\sigma_C(s) = \langle s, x \rangle.$$

Définition 1.2.35. *Soit C un sous ensemble de H. On appelle cône tangent de Clarke à C au point $\overline{x}$ qu'on noté $T_C^c(\overline{x})$ l'ensemble défini par*

$$T_C^c(\overline{x}) = \{v \in E, d_C^0(\overline{x}; v) = 0\}.$$

Définition 1.2.36. *Soit C un sous ensemble de H. On appelle cône normal de Clarke à C au point $\overline{x}$ qu'on note $\mathcal{N}_C^c(\overline{x})$ l'ensemble défini par*

$$\mathcal{N}_C^c(\overline{x}) = (T_C^c(\overline{x}))^0 = \{\xi \in H,\ \textit{tel que}\ \langle \xi, y\rangle \leq 0,\ \forall y \in T_C^c(\overline{x})\} = \partial^c \psi_C(\overline{x}).$$

Remarque 1.2.37. *Si C est convexe, alors*

$$\mathcal{N}_C^c(\overline{x}) = \{\xi \in H, \langle \xi, y\rangle \leq 0,\ \forall y \in C\} = \mathcal{N}_C(\overline{x}).$$

Définition 1.2.38. *[12] Le cône normal de Fréchet $\mathcal{N}_C^F(\overline{x})$ de C en $\overline{x} \in C$, est donné par*

$$\mathcal{N}_C^F(\overline{x}) = \partial_F \psi_C(\overline{x}).$$

Proposition 1.2.39. *[12] On a toujours l'inclusion suivante*

$$\mathcal{N}_C^F(\overline{x}) \subset \mathcal{N}_C^c(\overline{x}) \quad \textit{pour tout}\ \overline{x} \in C. \tag{1.2}$$

Proposition 1.2.40. *[12]* (***La relation entre le cône normal de Fréchet et le sous différentiel***) *Le cône normal de Fréchet est lié au sous-différentiel de Fréchet de la fonction distance par les deux relations suivantes*

$$\partial_F d_C(\overline{x}) = \mathcal{N}_C^F(\overline{x}) \cap \overline{\mathbb{B}}, \quad \mathcal{N}_C^F(\overline{x}) = \mathbb{R}_+ \partial_F d_C(\overline{x}). \tag{1.3}$$

Remarque 1.2.41. *[15] $\xi \in \mathcal{N}_C^F(u_2) \cap \overline{\mathbb{B}}$ si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\langle \xi, u_1 - u_2\rangle \leq d(u_1, C) + \epsilon \|u_1 - u_2\| \ \textit{pour tout}\ u_1 \in B(u_2, \delta). \tag{1.4}$$

Proposition 1.2.42. *[12] C un sous ensemble non vide fermé et convexe de H. Alors, pour tout $\overline{x} \in C$*

$$\partial^c d_C(\overline{x}) \subset \mathcal{N}_C^c(\overline{x}) \cap \overline{\mathbb{B}}. \tag{1.5}$$

1.3 Multi-applications

Pour plus de détails voir [5].

Définition 1.3.1. *Soient X et Y deux ensembles non vides. Une multi-application* (*ou fonction multivoque*) *F définie sur X à valeurs dans Y est une fonction qui à*

chaque élément $x \in X$ associée un sous ensemble $F(x)$ de Y, on note $F : X \rightrightarrows Y$ où $F : X \to P(Y)$, ($P(Y)$ est l'ensemble des parties de Y).
Le domaine, le graphe et l'image de la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ sont donnés par

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(F) &= \{x \in X, F(x) \neq \emptyset\},\\ \mathrm{gph}(F) &=\{(x,y) \in X \times Y : x \in \mathrm{Dom}(F), y \in F(x)\},\\ \mathrm{Im}(F) &= \underset{x\in \mathrm{Dom}(F)}{\cup} F(x).\end{aligned}$$

Définition 1.3.2. *Soient X et Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors, F est dite semi-continue supérieurement (s.c.s.) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x) \subset V$, il existe un ouvert U de X tel que $x_0 \in U$ et $F(x_0) \subset V$, pour tout $x \in U$.*
On dit que F est s.c.s. sur X si elle est s.c.s. en tout point $x \in X$.

Définition 1.3.3. *Soient X et Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, nous dirons que*

$$\limsup_{x'\to x} F(x') = \{y \in Y : \liminf_{x'\to x} d(y, F(x')) = 0\},$$

est la limite supérieure de $F(x')$ quand $x' \to x$, et que

$$\liminf_{x'\to x} F(x') = \{y \in Y : \limsup_{x'\to x} d(y, F(x')) = 0\},$$

est la limite inférieure de $F(x')$ quand $x' \to x$. Elles sont évidement fermées. Nous observons aussi que, pour tout $x \in Dom(F)$ on a

$$\liminf_{x'\to x} F(x') \subset \overline{F(x)} \subset \limsup_{x'\to x} F(x').$$

Théorème 1.3.4. *Considérons une suite (K_n) de sous ensembles dans un ensemble compact K d'un espace de Banach séparable E. Alors*

$$\overline{co}(\limsup_{n\to\infty} K_n) = \underset{N>0}{\cap} \overline{co}(\underset{n\geq N}{\cup} K_n).$$

Théorème 1.3.5. *Soient X et Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs compactes, alors*

$$\limsup_{x'\to x} F(x') = F(x).$$

Définition 1.3.6. (***Scalairement s.c.s.***)
On dit qu'une multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ est scalairement s.c.s, si pour tout $\xi \in X$, la fonction réelle $u \mapsto \sigma(F(u), \xi)$ est s.c.s.

1.4 Topologie faible

Pour plus de détails, se référer à [4].

Définition 1.4.1. *Soit E un espace de Banach et $f \in E'$, considérons l'application*

$$\begin{aligned}\varphi_f : & E \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \varphi_f(x) := \langle f, x \rangle,\end{aligned}$$

on appelle topologie faible sur E, notée $\sigma(E, E')$, la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in E'}$.

Proposition 1.4.2. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On a les propriétés suivantes*

1. *$x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$ si et seulement si $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$ pour tout $f \in E'$.*
2. *Si $x_n \to x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.*
3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$, alors $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E et*
$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$
4. *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ et si $f_n \to f$ fortement dans E' alors $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.*

1.5 Topologie faible*

Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach. On sait que E' est aussi un espace de Banach. On rappelle que E'' est le dual topologique de E', i.e., l'ensemble des formes linéaires continues sur E' et qu'on peut munir de la norme

$$\forall \xi \in E'' : \|\xi\|_{E''} = \sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} |\langle \xi, f \rangle|.$$

C'est encore un espace de Banach appelé bidual de E.
Sur E', deux topologies séparée sont déjà définies
• la "topologie forte" associée à la norme de E',
• la "topologie faible" sur E' notée $\sigma(E', E'')$.
On va définir une troisième topologie sur E' c'est "la topologie faible*" que l'on note $\sigma(E', E)$.

Définition 1.5.1. *Soit E un espace de Banach et $x \in E$, considérons l'application*

$$\begin{aligned} \varphi_x : & E' \to \mathbb{R} \\ & f \mapsto \varphi_x(f) := \langle f, x \rangle. \end{aligned}$$

On appelle topologie faible sur E', notée $\sigma(E', E)$, la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x \in E}$.*

Proposition 1.5.2. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E'. On a les propriétés suivantes*

1. *$f_n \rightharpoonup^* f$ pour $\sigma(E', E)$ si et seulement si $\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle$ pour tout $x \in E$.*
2. *Si $f_n \to f$ fortement, alors $f_n \rightharpoonup f$ faiblement pour $\sigma(E', E'')$.*
   Si $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E', E'')$, alors $f_n \rightharpoonup^* f$ pour $\sigma(E', E)$.
3. *Si $f_n \rightharpoonup^* f$ pour $\sigma(E', E)$, alors $(\|f_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E' et*

$$\|f\|_{E'} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{E'}.$$

4. *Si $x_n \rightharpoonup x$ fortement dans E et si $f_n \to^* f$ pour $\sigma(E', E)$, alors $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.*

Proposition 1.5.3. (***Théoréme dd l'application ouverte***) *Soient E, F deux espaces de Banach et soit A un operateur linéaire continue et surjectif de E dans F, alors il existe une constante $c > 0$ tel que*

$$\mathbb{B}_F(0, c) \subset A(\mathbb{B}_E(0, 1)).$$

Proposition 1.5.4. (***Lemme de Mazur***) *Soit E un espace de Banach. Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge faiblement vers x dans E. Alors, il existe une suite $(y_n)_n$ avec chaque y_n combinaison convexe des $\{x_k, k \geq n\}$ qui converge fortement vers x dans E.*

Lemme 1.5.5. *[12]* (***Lemme de Gronwall***) *Soit $A > 0$ et soient $(v_n)_n$ et $(B_n)_n$ des suites non négatives telles que*

$$v_n \leq A + \sum_{k=0}^{n-1} B_k v_k \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

alors, pour tout n, on a

$$v_n \leq A \exp\Big(\sum_{k=0}^{n-1} B_k\Big).$$

1.6 Théorèmes fondamentaux

1.6.1 Le théorème de compacité d'Ascoli

Pour plus de détails sur cette section voir [1].

Théorème 1.6.1. (***Théorème d'Ascoli-Arzéla***) *Soient K un espace compact et (E, d) un espace métrique. L'espace $\mathscr{C}(K, E)$ des fonctions continues de K dans E, muni de la topologie de la covergence uniforme, est un espace métrique.*
Une partie A de $\mathscr{C}(K, E)$ est relativement compacte si et seulement si, pour tout x de K

1. *A est équi-continue en x, i.e., pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que*

$$\forall f \in A, \forall y \in V, d(f(x), f(y)) < \epsilon,$$

2. *l'ensemble $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact.*

Théorème 1.6.2. *On considère une suite $x_k(.)$ de fonctions absolument continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E satisfaisant*

1. *$\forall t \in I, (x_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ est un sous ensemble relativement compact de E,*

2. *il existe une fonction $c(.) \in L^1(I)$ tel que pour presque tout $t \in I$, $\|x'_k(t)\| \leq c(t)$.*

Alors, il existe une sous suite de $(x_k)_k$ qu'on note toujours $(x_k(.))$ qui converge vers une fonction absolument continue $x : I \to E$ au sens suivant

i) *$x_k(.)$ converge uniformément vers $x(.)$ sur les sous ensembles compacts de I,*

ii) *$x'_k(.)$ converge faiblement vers $x'(.)$ dans $L^1(I, E)$.*

Chapitre 2

Les ensembles sous-lisses

La classe des ensembles sous-lisses a été introduite en analyse variationnel. Cette propriété correspond à un comportement variationnel. Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et propriétes sur les ensembles sous-lisses. Soit C un sous ensemble fermé d'un espace de Banach E.

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1.1. *[14] On dit que C est sous-lisse au point $u_0 \in C$, si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $u_1, u_2 \in B(u_0, \delta) \cap C$, et tout $\xi_i \in \mathcal{N}_C^c(u_i) \cap \overline{\mathbb{B}}_{E'}, i = 1, 2.$ on a*

$$\langle \xi_1 - \xi_2, u_1 - u_2 \rangle \geq -\epsilon \| u_1 - u_2 \|. \tag{2.1}$$

L'ensemble C est appellé sous-lisse, s'il est sous-lisse en chaque point $u_0 \in C$. De plus, C est appellé uniformement sous-lisse, si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que (2.1) est satisfaite pour tous $u_1, u_2 \in C$ satisfaisant $\|u_1 - u_2\| < \delta$ et tout $\xi_i \in \mathcal{N}_C^c(u_i) \cap \overline{\mathbb{B}}_{E'}$, $i = 1, 2$.

Remarque 2.1.2. *[14] Comme $0 \in \mathcal{N}_C^c(u_1) \cap \overline{\mathbb{B}}_{E'}$, alors il est clair que l'ensemble C est sous-lisse au point $u_0 \in C$ (resp. uniformément sous-lisse) si*

$$\langle \xi_2, u_1 - u_2 \rangle \leq \epsilon \| u_1 - u_2 \|, \tag{2.2}$$

pour tous $u_1, u_2 \in B(u_0, \delta) \cap C$ et $\xi_2 \in \mathcal{N}_C^c(u_2) \cap \overline{\mathbb{B}}_{E'}$ (resp. pour tous $u_1, u_2 \in C$ satisfaisant $\|u_1 - u_2\| < \delta$ et tout $\xi_2 \in \mathcal{N}_C^c(u_2) \cap \overline{\mathbb{B}}_{E'}$).

Exemple 2.1.3. *[14]*
Tout ensemble convexe fermé de E est uniformément sous-lisse.

La proposition suivante montre qu'une condition plus forte similaire à (1.4) apporte une nouvelle caractérisation des ensembles sous-lisses.

Proposition 2.1.4. *[15] Soit C un sous ensemble fermé de E. Alors, C est sous-lisse au point $u_0 \in C$ si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\langle \xi, u_1 - u_2 \rangle \leq d(u_1, C) + \epsilon \|u_1 - u_2\| \text{ pour tout } u_1 \in B(u_0, \delta), \tag{2.3}$$

pour tout $u_2 \in C \cap B(u_0, \delta)$ et tout $\xi \in \mathcal{N}_C^c(u_2) \cap \overline{\mathbb{B}}_{E'}$.

Démonstration. Puisque $d(u_1, C) = 0$ pour tout $u_1 \in C$, alors (2.3) implique (2.2). Il suffit donc de montrer la condition suffisante. Supposons que C est sous-lisse au point $u_0 \in C$. Soit $\epsilon > 0$ et prenons $\delta > 0$ tel que

$$\langle \xi, z - u_2 \rangle \leq \frac{\epsilon}{2} \|z - u_2\|, \text{ pour tout } z \in C \cap B(u_0, 2\delta), \tag{2.4}$$

avec $u_2 \in C \cap B(u_0, \delta)$ et $\xi \in \mathcal{N}_C^c(u_2) \cap \overline{\mathbb{B}}_{E'}$. Soient $u_1 \in B(u_0, \delta),\ u_2 \in C \cap B(u_0, \delta)$ et $\xi \in \mathcal{N}_C^c(u_2) \cap \overline{\mathbb{B}}_{E'}$. Alors,

$$d(u_1, C) \leq \|u_1 - u_0\| \leq \delta,$$

d'où l'existence d'une suite $(u_n)_n$ dans $C \cap B(u_1, \delta)$ tel que

$$\|u_1 - u_n\| \to d(u_1, C),$$

donc

$$\|u_n - u_0\| \leq \|u_n - u_1\| + \|u_1 - u_0\| \leq 2\delta.$$

Il découle de (2.4) que

$$\begin{aligned} \langle \xi, u_1 - u_2 \rangle &= \langle \xi, u_1 - u_n \rangle + \langle \xi, u_n - u_2 \rangle \\ &\leq \|u_1 - u_n\| + \frac{\epsilon}{2} \|u_n - u_2\| \\ &\leq \|u_1 - u_n\| + \frac{\epsilon}{2} (\|u_n - u_1\| + \|u_1 - u_2\|), \end{aligned}$$

passons à la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \xi, u_1 - u_2 \rangle &\leq d(u_1, C) + \frac{\epsilon}{2} \big(d(u_1, C) + \|u_1 - u_2\| \big) \\ &\leq d(u_1, C) + \epsilon \|u_1 - u_2\|, \end{aligned}$$

ceci montre que la condition suffisante est satisfaite, ce qui achève la démonstration. ■

En s'inspirant de la notion d'ensemble sous-lisse, nous introduisons la notion d'équi-uniformément sous-lisse.

Définition 2.1.5. *[14] Soit $\mathbb{Q}$ un sous ensemble. On dit que la famille $(C(q))_{q\in\mathbb{Q}}$ d'ensembles fermés de E est équi-uniformément sous-lisse, si pour chaque $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que (2.1) est valable pour tout $q \in \mathbb{Q}$, pour tous $u_1, u_2 \in C(q)$ satisfaisant $\|u_1 - u_2\| < \delta$ et tout $\xi_i \in \mathcal{N}^c_{C(q)}(u_i) \cap \overline{\mathbb{B}}_{E'}$, $i = \{1, 2\}$.*

Exemple 2.1.6. *[14] Soit $(S_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles fermés de E. Si les ensembles S_i sont convexes, alors la famille (S_i) est équi-uniformément sous-lisse.*

En utilisant le sous différentiel de la fonction distance de l'ensemble C dans (2.1) au lieu de la troncature du cône normal de Clarke avec la boule unité fermée, on obtient la définition suivante

Définition 2.1.7. *[11] On dit que l'ensemble fermé C est métriquement sous-lisse au point u_0 si pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un certain $\delta > 0$ tel que (2.1) est valable pour tous $u_1, u_2 \in B(u_0, \delta) \cap C$ et tout $\xi_i \in \partial^c d_C(u_i), i = 1, 2$.*
C est dit métriquement sous-lisse si cette propriété est satisfaite en chaque point C.

Le résultat suivant fait le lien entre les ensembles sous-lisses et d'autres concepts géométriques classiques.

Définition 2.1.8. *[11] Une fonction $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est sous-lisse au point $x_0 \in \text{dom} f$, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in B(x_0, \delta)$ avec $x, x^* \in \text{dom}\, \partial^c f$*

$$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x\rangle - \epsilon\|y - x\|.$$

Remarque 2.1.9. *[11] Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ensemble ouvert $U \subset E$, alors il est sous-lisse en tout point de U.*

Proposition 2.1.10. *[11] Une fonction localement lipschitzienne f est sous-lisse au point $x_0 \in \text{dom} f$, si et seulement si, l'epigaphe de f est sous-lisse au point $u_0 = (x_0, f(x_0))$.*

Proposition 2.1.11. *[11] Soit C un sous ensemble fermé d'un espace de Hilbert H et $u \in C$, si C est sous-lisse au point u, alors on a*

$$\mathcal{N}^F_C(u) = \mathcal{N}^c_C(u),$$

et

$$\partial_F d_C(u) = \partial^c d_C(u).$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, comme C est sous-lisse au point u, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $v \in C$ avec $\|v - u\| < \delta$ et tout $\xi \in \mathcal{N}_C^c(u) \cap \overline{\mathbb{B}}$, on a

$$\langle \xi, v - u\rangle \leq \epsilon\|v - u\| \quad \text{pour tout } v \in B(u, \delta) \cap C.$$

Donc, on obtient $\xi \in \mathcal{N}_C^F(u)$, qui implique $\mathcal{N}_C^c(u) \subset \mathcal{N}_C^F(u)$. D'autre part, de (1.2) on a $\mathcal{N}_C^F(u) \subset \mathcal{N}_C^c(u)$. Alors

$$\mathcal{N}_C^F(u) = \mathcal{N}_C^c(u).$$

On montre la deuxième égalité. Soit $\xi \in \partial^c d_C(u)$, alors on a $\|\xi\| \leq 1$ et $\xi \in \mathcal{N}_C^c(u)$ par (1.5), et d'après la premiére égalité on obtient $\xi \in \mathcal{N}_C^F(u)$, donc $\xi \in \mathcal{N}_C^F(u) \cap \overline{\mathbb{B}}$, ce qui est équivalent à $\xi \in \partial_F d_C(u)$ d'après (1.3). Ainsi, $\partial_F d_C(u) \subset \partial^c d_C(u)$, d'où $\partial^c d_C(u) = \partial_F d_C(u)$ d'après (1.1). ■

Proposition 2.1.12. *[14] Soit C un sous ensemble d'un espace de Banach $(X, \|.\|)$ qui est sous-lisse au point $\overline{x} \in C$. Alors la multi-application $\mathcal{N}_C^c(.)$ est sequentiellement faible* fermée au point $\overline{x}$.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments dans C qui converge vers $\overline{x}$ et $(x_n^*)_n$ une suite d'éléments dans X' qui converge faiblement* vers $x^* \in X'$ avec $x_n^* \in \mathcal{N}_C^c(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque X est un espace de Banach, il existe un réel $\beta > 0$ tel que $\|x_n^*\| \leq \beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Prenons $\epsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que (2.2) est satisfaite avec $\beta^{-1}\epsilon$ au lieu de ϵ. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$ on a $x_n \in B(\overline{x}, \delta)$. Alors, pour chaque entier $n \geq n_0$ on voit que pour tout $y \in C \cap B(\overline{x}, \delta)$

$$\langle \beta^{-1}x_n^*, y - x_n\rangle \leq \beta^{-1}\epsilon\|y - x_n\|,$$

donc

$$\langle x_n^*, y - x_n\rangle \leq \epsilon\|y - x_n\|,$$

passons à la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$\langle x^*, y - \overline{x}\rangle \leq \epsilon\|y - \overline{x}\|, \text{ pour chaque } y \in C \cap B(\overline{x}, \delta).$$

Cela implique que $x^* \in \mathcal{N}_C^F(\overline{x})$, et donc $x^* \in \mathcal{N}_C^c(\overline{x})$, d'où le résultat. ■

Lemme 2.1.13. *[14] Soit $A : X \to Y$ une application linéaire continue entre deux espaces de Banach X, Y, et soit $G : X \to Y$ un application de classe C^1 autour du point $\overline{x} \in X$.*

1. *S'il existe un réel $s > 0$ satisfaisant $s\mathbb{B}_Y \subset A(\overline{\mathbb{B}}_X)$, alors pour tout $x^* \in X'$ et $y^* \in Y'$ avec $x^* = y^* \circ A$, on a*

$$s\|y^*\| \leq \|x^*\|.$$

2. *S'il existe un réel $s > 0$ satisfaisant $s\overline{\mathbb{B}}_Y \subset DG(\overline{x})(\overline{\mathbb{B}}_X)$, alors pour tout $\eta > 0$ il existe un voisinage ouvert U de $\overline{x}$ tel que pour chaque $x \in U$ on a $s'\overline{\mathbb{B}}_Y \subset DG(x)(\overline{\mathbb{B}}_X)$, avec $s' := (1+\eta)^{-1}s$. En particulier, pour tout $x \in U, x^* \in X'$ et $y^* \in Y'$ avec $x^* := y^* \circ DG(x)$ on a*

$$s\|y^*\| \leq (1+\eta)\|x^*\|.$$

Démonstration.

1. Fixons $x^* \in X'$ et $y^* \in Y'$ tel que $x^* = y^* \circ A$, prenons $v \in \mathbb{B}_Y$ et choisissons $u \in \overline{\mathbb{B}}_X$ tel que $sv = A(u)$. Notons que

$$\begin{aligned} \langle y^*, sv\rangle &= \langle y^*, A(u)\rangle \\ &= \langle x^*, u\rangle \leq \|x^*\|, \end{aligned}$$

pour tout $v \in \mathbb{B}_Y$. Donc

$$s\|y^*\| \leq \|x^*\|.$$

2. Posons $A := DG(\overline{x})$ et $s' := (1+\eta)^{-1}s$ et choisissons un voisinage ouvert convexe U de $\overline{x}$ tel que G est de classe C^1 avec

$$\|DG(x) - DG(\overline{x})\| < s - s', \text{ pour tout } x \in U.$$

Fixons $x \in U$ et posons $\Lambda := DG(x)$. Alors

$$s'\overline{\mathbb{B}}_Y + (s-s')\overline{\mathbb{B}}_Y \subset A(\overline{\mathbb{B}}_X) \subset \Lambda(\overline{\mathbb{B}}_X) + (A-\Lambda)(\overline{\mathbb{B}}_X) \subset \Lambda(\overline{\mathbb{B}}_X) + (s-s')\overline{\mathbb{B}}_Y.$$

Donc, $s'\overline{\mathbb{B}}_Y \subset \overline{\Lambda(\overline{\mathbb{B}}_X)}$. Alors, d'après le théorème de l'application ouverte de Banach, $s'\overline{\mathbb{B}}_X \subset \Lambda(\overline{\mathbb{B}}_X)$ par conséquent, prenons $x^* \in X'$ et $y^* \in Y'$ tel que $x^* = y^* \circ DG(x)$, et par suite d'après 1, on trouve que

$$s'\|y^*\| \leq \|x^*\|,$$

d'où

$$(1+\eta)^{-1}s\|y^*\| \leq \|x^*\|,$$

et donc

$$s\|y^*\| \leq (1+\eta)\|x^*\|.$$

■

Proposition 2.1.14. *[14] Soient X, Y deux espaces de Banach et soit $G : X \to Y$ une application de classe C^1 autour d'un point $\overline{x} \in X$ avec $DG(\overline{x})$ surjective si C est un ensemble convexe de Y contenant $G(\overline{x})$, alors l'ensemble $G^{-1}(C)$ est sous-lisse au point $\overline{x}$.*

Démonstration. D'après le théorème de l'application ouverte de Banach, il existe un réel $s > 0$ tel que

$$s\overline{\mathbb{B}}_Y \subset DG(\overline{x})(\mathbb{B}_Y).$$

Alors, par le Lemme 2.1.13 il existe un voisinage ouvert U de $\overline{x}$ et un réel $\gamma > 0$ tel que pour chaque $x \in U$, l'application linéaire continue $DG(x)$ est ouverte et $\|y^*\| \leq \gamma\|x^*\|$, pour tout $x^* \in X'$ et $y^* \in Y'$ et satisfaisant $x^* = y^* \circ DG(x)$. Fixons maintenant $\epsilon > 0$ et choisissons un voisinage ouvert convexe $U_0 \subset U$ de $\overline{x}$ tel que

$$\|DG(x') - DG(x)\| \leq \frac{\epsilon}{\gamma},$$

pour tous $x, x' \in U_0$. Considérons $x, u \in U_0 \cap G^{-1}(C)$ et $x^* \in \mathcal{N}^c_{G^{-1}(C)}(x) \cap \overline{\mathbb{B}}_{X'}$, on sait qu'il existe $y^* \in \mathcal{N}^c_C(G(x))$ tel que $x^* = y^* \circ DG(x)$, alors $\|y^*\| \leq \gamma$. Puisque $\langle y^*, G(u) - G(x)\rangle \leq 0$ en déduit que

$$\begin{aligned}
\langle x^*, u - x\rangle &= \langle y^*, DG(x)(u-x)\rangle \\
&= \langle y^*, G(u) - G(x)\rangle - \langle y^*, \int_0^1 (DG(x + t(u-x)) - DG(x))(u-x)dt\rangle \\
&\leq \|y^*\| \times \int_0^1 \|DG(x + t(u-x)) - DG(x))\|\|u - x\|dt \\
&\leq \|y^*\|\Big(\frac{\epsilon}{\gamma}\Big)\|u - x\|,
\end{aligned}$$

donc

$$\langle x^*, u - x\rangle \leq \epsilon\|u - x\|,$$

ce qui montre que $G^{-1}(C)$ est sous-lisse au point $\overline{x}$. ■

Proposition 2.1.15. *[14] Soit C un sous ensemble non vide d'un espace de Banach E et U un ensemble ouvert non vide de E avec $U \cap C \neq \emptyset$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *L'ensemble C est sous-lisse en chaque point $U \cap C$.*
2. *Pour tout $\overline{x} \in U \cap C$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que* (2.1) *est satisfaite sur $C \cap B(\overline{x}, \delta)$ avec $\partial^c d_C(.)$ à la place de $\mathcal{N}_C^c(.) \cap \overline{\mathbb{B}}_{E'}$.*

Démonstration. La premiére implication est évidente. Pour montrer l'implication inverse, supposons que l'implication inverse est vraie, on suppose que 2. est satisfaite. D'après la Proposition 2.1.11, on a pour tout $x \in C \cap U$

$$\mathcal{N}_C^F(x) = \mathcal{N}_C^c(x), \quad \text{et} \quad \partial_F d_C(x) = \partial^c d_C(x).$$

Les deux égalités combinées avec l'égalité

$$\partial_F d_C(x) = \mathcal{N}_C^F(x) \cap \overline{\mathbb{B}}_{E'} \quad \forall x \in C,$$

nous donnent $\mathcal{N}_C^c(x) \cap \overline{\mathbb{B}}_{E'} = \partial^c d_C(x)$ pour tout $x \in C \cap U$. ■

2.2 Résultats auxiliaires

Les résultats suivants seront utilisés dans la preuve du théorème principal.

Lemme 2.2.1. *[11] Soit E un espace métrique et soit $(C(t))_{t \in E}$ une famille d'ensembles non vides fermés d'un espace de Hilbert H, qui est équi-uniformément sous-lisse et soit un réel $\eta > 0$. Soit $Q \subset E$ et $s_0 \in \overline{Q}$. Alors, les assertions suivantes sont satisfaites*

1. *Pour tout $(s, u) \in \mathrm{gph}C$ on a $\eta \partial^c d_{C(s)}(u) \subset \eta \overline{\mathbb{B}}$.*
2. *Pour toute suite $(s_j)_{j \in J}$ dans Q convergeant vers s_0, et toute suite $(u_j)_{j \in J}$ convergeant vers $u \in C(s_0)$ dans $(H, \|.\|)$ avec $u_j \in C(s_j)$ et $d_{C(s_j)}(y) \underset{j \in J}{\to} 0$ pour chaque $y \in C(s_0)$, et toute suite $(\zeta_j)_{j \in J}$ convergeant faiblement vers ζ avec $\zeta_j \in \eta \partial^c d_{C(s_j)}(u_j)$, on a $\zeta \in \eta \partial^c d_{C(s_0)}(u)$.*

Démonstration. L'assertion 1. étant évidente d'après (1.5), montrons donc 2. Soit $\epsilon > 0$, par la Définition 2.1.5 choisissons $\delta > 0$ tel que pour tout $s \in E, u_1, u_2 \in C(s)$ avec $\|u_1 - u_2\| < \delta$ et tout $\zeta_i \in \mathcal{N}_{C(s)}^c(u_i) \cap \overline{\mathbb{B}}$

$$\langle \zeta_1 - \zeta_2, u_1 - u_2 \rangle \geq -\epsilon \|u_1 - u_2\|. \tag{2.5}$$

Fixons dans Q, $(s_j)_{j\in J}$ convergeant dans Q vers s_0, et $(u_j)_{j\in J}$ convergeant fortement vers $u \in C(s_0)$ dans H, avec $u_j \in C(s_j)$ et $d_{C(s_j)}(y) \underset{j\in J}{\to} 0$ pour chaque $y \in C(s_0)$, fixons aussi $(\zeta_j)_{j\in J}$ convergeant faiblement vers ζ dans H, tel que $\zeta_j \in \eta\partial^c d_{C(s_j)}(u_j)$. Puisque $u_j \in C(s_j)$, alors d'après (1.5) cette dernière inclusion donne $\eta^{-1}\zeta_j \in \mathcal{N}^c_{C(s_j)}(u_j) \cap \overline{\mathbb{B}}$ pour tout $j \in J$. Fixons $y \in B(u, \frac{\delta}{2}) \cap C(s_0)$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et chaque $j \in J$, choisissons $y_{j,n} \in C(s_j)$ tel que

$$\|y_{j,n} - y\| \le d_{C(s_j)}(y) + \frac{1}{n},$$

donc $(y_{j,n})_{(j,n)\in J\times\mathbb{N}}$ est dans H. Puisque

$$d_{C(s_j)}(y) + \frac{1}{n} \underset{(j,n)\in J\times\mathbb{N}}{\longrightarrow} 0,$$

on a

$$\|y_{j,n} - y\| \underset{(j,n)\in J\times\mathbb{N}}{\longrightarrow} 0,$$

i.e., $y_{j,n} \underset{(j,n)\in J\times\mathbb{N}}{\longrightarrow} y$ fortement dans H, et donc il existe $j_0 \in J$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $(j,n) \in J \times \mathbb{N}$ avec $j \ge j_0$ et $n \ge n_0$ on a $y_{j,n} \in B(u, \frac{\delta}{2})$. Posons $u_{j,n} := u_j$ pour tout $(j,n) \in J \times \mathbb{N}$, évidement $u_{j,n} \underset{(j,n)\in J\times\mathbb{N}}{\longrightarrow} u$ fortement dans H car $u_j \underset{j\in J}{\to} u$.
Alors, on peut supposer aussi que $u_{j,n} \in B(u, \frac{\delta}{2})$ pour tout $(j,n) \in J \times \mathbb{N}$, avec $j \ge j_0$ et $n \ge n_0$, et donc, pour tout $(j,n) \in J \times \mathbb{N}$, avec $j \ge j_0$ et $n \ge n_0$ on a

$$\|y_{j,n} - u\| < \frac{\delta}{2},$$

et

$$\|u_{j,n} - u\| < \frac{\delta}{2}.$$

Posons $\zeta_{j,n} := \zeta_j$ et $s_{j,n} := s_j$ pour tout $(j,n) \in J \times \mathbb{N}$. $(s_{j,n})_{(j,n)\in J\times\mathbb{N}}$ converge vers s_0 et $(\zeta_{j,n})_{(j,n)\in J\times\mathbb{N}}$ converge faiblement vers ζ dans H et $\eta^{-1}\zeta_{j,n} \in \mathcal{N}^c_{C(s_{j,n})}(u_{j,n}) \cap \overline{\mathbb{B}}$. D'après la dernière inégalité, pour tout $(j,n) \in J \times \mathbb{N}$ avec $j \ge j_0$ et $n \ge n_0$ on a

$$\|y_{j,n} - u_{j,n}\| < \delta,$$

avec $y_{j,n}, u_{j,n} \in C(s_{j,n})$ et donc d'après (2.5)

$$\langle 0 - \eta^{-1}\zeta_{j,n}, y_{j,n} - u_{j,n}\rangle \ge -\epsilon\|y_{j,n} - u_{j,n}\|,$$

ce qui est équivalent à

$$\langle \eta^{-1}\zeta_{j,n}, y_{j,n} - u_{j,n}\rangle \le \epsilon\|y_{j,n} - u_{j,n}\|,$$

on peut passer à la limite, donc on trouve que

$$\langle \eta^{-1}\zeta, y-u\rangle \leq \epsilon\|y-u\|,$$

pour tout $y \in B(u,\frac{\delta}{2}) \cap C(s_0)$ et donc $\eta^{-1}\zeta \in \mathcal{N}^F_{C(s_0)}(u)$. De plus, $\eta^{-1}\zeta_{j,n} \in \overline{\mathbb{B}}$, alors $\eta^{-1}\zeta \in \overline{\mathbb{B}}$, ce qui nous donne

$$\eta^{-1}\zeta \subset \mathcal{N}^F_{C(s_0)}(u) \cap \overline{\mathbb{B}},$$

et par suite

$$\eta^{-1}\zeta \in \partial_F d_{C(s_0)}(u) \subset \partial^c d_{C(s_0)}(u).$$

Ce qui achève la demonstration de la proposition. ■

Grâce au Lemme 2.2.1 et aux propriétés des multi-applications semi-continues supérieurement, nous déduisons la proposition suivante.

Proposition 2.2.2. *[11] Soit H un espace de Hilbert et soit $\{C(t,x) : (t,x) \in [0,T] \times H\}$ une famille d'ensembles non vides fermés de H qui est équi-uniformément sous-lisse et soit un réel $\eta \geq 0$. On suppose qu'il existe une constante réelle $L \geq 0$ et une fonction continue $\chi : [0,T] \to \mathbb{R}$ tels que pour tout $v_i, u_i \in H$ pour $i = 1,2$ et $s,t \in [0,T]$*

$$|d(v_1, C(t,u_1)) - d(v_2, C(s,u_2))| \leq \|v_1 - v_2\| + |\chi(t) - \chi(s)| + L\|u_1 - u_2\|.$$

Alors, les assertions suivantes sont satisfaites

1. *Pour tout $(s,u,v) \in \mathrm{gph}C$ on a $\eta\partial^c d_C(s,u)(v) \subset \eta\overline{\mathbb{B}}$.*

2. *Pour toute suite (s_n) dans $[0,T]$ convergeant vers s, toute suite (u_n) convergeant vers u, toute suite (v_n) convergeant vers $v \in C(s,u)$ avec $v_n \in C(s_n,u_n)$, et tout $h \in H$, on a*

$$\limsup_{n\to\infty} \sigma(h, \eta\partial^c d_{C(s_n,u_n)}(v_n)) \leq \sigma(h, \eta\partial^c d_{C(s,u)}(v)).$$

Démonstration.

1. Evident grâce au Lemme 2.2.1.

2. Fixons $h \in H$ et soient $(s_n)_n$, une suite dans $[0,T]$ qui converge vers $(s), (u_n)_n$ une suite dans H qui converge vers u, et $(v_n)_n$ une suite dans $C(t_n,u_n)$ qui converge vers $v \in C(s,u)$. Par extraction d'une sous suite, on peut supposer que

$$\limsup_{n\to\infty} \sigma(h, \eta\partial^c d_{C(s_n,u_n)}(v_n)) = \lim_{n\to\infty} \sigma(h, \eta\partial^c d_{C(s_n,u_n)}(v_n)).$$

Pour tout n. La compacité faible de $\eta\partial^c d_{C(s_n,u_n)}(v_n)$ assure l'existence de $\zeta_n \in \eta\partial^c d_{C(s_n,u_n)}(v_n)$ tel que

$$\langle h, \zeta_n\rangle = \sigma(h, \eta\partial^c d_{C(s_n,u_n)}(v_n)),$$

puisque $\|\zeta_n\| \leq \eta$ de 1., on peut extraire de $(\zeta_n)_n$ une sous suite notée aussi $(\zeta_n)_n$ qui converge faiblement vers ζ dans H. Il en resulte donc que

$$\begin{aligned}\langle h, \zeta\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle h, \zeta_n\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \sigma(h, \eta\partial^c d_{C(s_n,u_n)}(v_n)) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \sigma(h, \eta\partial^c d_{C(s_n,u_n)}(v_n)). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Maintenant, observons que pour chaque $z \in C(s,u)$

$$0 \leq d(z, C(s_n,u_n)) \leq d(z, C(s,u)) + |\chi(s_n) - \chi(s)| + L\|u_n - u\|.$$

Puisque (u_n) et (s_n) convergent respectivement vers u et s, alors $d(z, C(s_n,u_n))$ converge vers 0. D'après le Lemme 2.2.1, on obtient $\zeta \in \eta\partial^c d_{C(s,u)}(v)$. En utilisant donc la dernière inégalité et (2.6) on trouve que

$$\limsup_{n\to\infty} \sigma(h, \eta\partial^c d_{C(s_n,u_n)}(v_n)) \leq \sigma(h, \eta\partial^c d_{C(s,u)}(v)).$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Chapitre 3

Résultat d'existence de solutions pour un problème d'évolution du second ordre

L'objectif principal dans ce chapitre est consacré à l'étude d'existence de solutions pour une inclusion différentielle perturbée du second ordre gouvernée par un cône normal où la perturbation contient un retard. Étant donné un réel $d \geq 0$,
pour tout $t \in [0,T]$ et pour tout $y \in \mathscr{C}_H([-d,T])$, on définit l'application Θ de $\mathscr{C}_H([-d,T])$ dans $\mathscr{C}_H([-d,0])$ par

$$\Theta(t)y(s) := y(t+s) \quad \text{pour tout } s \in [-d,0].$$

Considérons le problème avec retard suivant

$$\left(\mathscr{P}_d\right)\begin{cases} \ddot{u}(t) \in -\mathcal{N}^c_{C(t,u(t))}(\dot{u}(t)) + G(t,\Theta(t)\dot{u}(t),\Theta(t)u) & p.p.\ t \in [0,T], \\ \dot{u}(t) \in C(t,u(t)) \qquad \forall t \in [0,T], \\ \dot{u}(0) = v_0, u(0) = u_0, \\ \phi, \varphi \in \mathscr{C}_H([-d,0]) \text{ et } u \equiv \phi, \dot{u} \equiv \varphi \text{ sur } [-d,0]. \end{cases}$$

Soit H un espace de Hilbert et soient $C : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides fermées et $G : [0,T] \times H \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides convexes fermées tels qu'on a les hypothèses suivantes

($\mathscr{A}_1$) Pour tout ensemble borné $A \subset H$, l'ensemble $C([0,T] \times A)$ est relativement boule compact dans H, i.e., l'intersection de $C([0,T] \times A)$ avec toute boule fermée de H est relativement compacte dans H.

($\mathscr{A}_2$) Il existe une fonction absolument continue $\chi : [0,T] \to \mathbb{R}$ qui est monotone croissante, et une constante réelle $L \in]0,1[$, tells que : Pour touts $s,t \in]0,T]$ et tous $v_j, u_j \in H$ $(j = 1,2)$

$$|d(v_1, C(t,u_1)) - d(v_2, C(s,u_2))| \leq \|v_1 - v_2\| + \chi(t) - \chi(s) + L\|u_1 - u_2\|.$$

($\mathscr{A}_3$) Pour tout $t \in [0,T]$ et chaque $u \in H$, les ensembles $C(t,u)$ sont équi-uniformément sous-lisses.

($\mathscr{A}_4$) $G(.,.,.)$ est $\mathscr{L}([0,T]) \otimes \mathscr{B}(\mathscr{C}_H[-d,0]) \otimes \mathscr{B}(\mathscr{C}_H[-d,0])$ -mesurable et scalairement semi-continue supérieurement par rapport à $y,z \in \mathscr{C}_H([-d,0])$ pour presque tout $t \in [0,T]$, tel que pour un réel $\alpha \geq 0$,

$$d(0, G(t,y,z)) \leq \alpha,$$

pour tout $t \in [0,T]$ et tous $y,z \in \mathscr{C}_H([-d,0])$.

Théorème 3.0.1. *Soit H un espace de Hilbert. Sous les hypothèses $(\mathscr{A}_1), (\mathscr{A}_2), (\mathscr{A}_3)$, $(\mathscr{A}_4)$. et pour tout $\phi, \varphi \in \mathscr{C}_H([-d,0])$ tel que $\phi(0) = u_0$ et $\varphi(0) = v_0 \in C(0,u_0)$, il existe une $\mathscr{W}_H^{2,1}([-d,0])$ solution $u(.)$ de l'inclusion différentielle $\left(\mathscr{P}_d\right)$. Cette solution satisfait*

$$\|\ddot{u}(t)\| \leq 2\alpha + L\beta + \chi'(t) \quad p.p.\ t \in [0,T],$$

où

$$\beta := \Big(\|\varphi\|_\infty + 2\alpha T + \int_0^T \chi'(s)ds\Big)\exp(LT).$$

Démonstration. On pose

$$\Psi(t) := \int_0^t (\alpha + L\beta + \chi'(s))ds \quad \text{pour tout } t \in [0,T], \tag{3.1}$$

Pour chaque $t \in [0,T]$ et $y,z \in \mathscr{C}_H([-d,0])$, soit $g(t,y,z)$ l'élement de norme minimale de l'ensemble convexe fermé $G(t,y,z)$ de H défini par

$$g(t,y,z) = \mathrm{Proj}_{G(t,y,z)}(0).$$

D'après ($\mathscr{A}_4$) on a

$$\|g(t,y,z)\| \leq \alpha. \tag{3.2}$$

En utilisant l'hypothèse ($\mathscr{A}_4$) une deuxième fois, on trouve que l'application $g(.,.,.)$ est mesurable car la multi application $G(.,.,.)$ est mesurable. Donc, pour chaque $y,z \in$

$\mathscr{C}_H[-d,0]$, on obtient $g(.,y,z) \in L^1_H([0,T])$.

Étape 1 : Construction des suites (v_n) **et** (u_n).

Considérons, pour tout entier $n \geq 1$, une partition de $[0,T]$ définie par

$$t_i^n := i\tau_n, \quad i = 0, 1, ..., n,$$

où

$$\tau_n := \frac{T}{n},$$

Soit $u_0^n := u_0 = \phi(0)$ et $v_0^n := v_0 = \varphi(0)$. Trouver u_i^n, v_i^n, pour $i = 1, 2, ..., n$, tel que

$$\begin{cases} v_i^n \in C(t_i^n, u_i^n), \ u_i^n = u_{i-1}^n + \tau_n v_{i-1}^n, \\ y_{i-1}^n, z_{i-1}^n : [-d, t_{i-1}^n] \to H, \\ v_i^n - v_{i-1}^n - \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} g(s, \Theta(t_{i-1}^n) y_{i-1}^n, \Theta(t_{i-1}^n) z_{i-1}^n) ds \in -\mathcal{N}^c_{C(t_i^n, u_i^n)}(v_i^n). \end{cases} \tag{3.3}$$

Observons d'abord que $u_1^n := u_0 + \tau_n v_0$, et soient $y_0^n, z_0^n : [-d, t_0^n] \to H$, les suites d'applications définies par

$$y_0^n(t) = \varphi(t) \text{ et } z_0^n(t) = \phi(t), \text{ pour tout } t \in [-d, t_0^n].$$

Comme l'ensemble $C(t_1^n, u_1^n)$ est boule compact d'après $(\mathscr{A}_2)$, alors il existe un point

$$v_1^n \in \mathrm{Proj}_{C(t_1^n, u_1^n)}\left(v_0 + \int_{t_0^n}^{t_1^n} g(s, \Theta(t_0^n) y_0^n, \Theta(t_0^n) z_0^n) ds\right),$$

ce qui est équivalent à

$$v_0 + \int_{t_0^n}^{t_1^n} g(s, \Theta(t_0^n) y_0^n, \Theta(t_0^n) z_0^n) ds - v_1^n \in \mathcal{N}^c_{C(t_1^n, u_1^n)}(v_1^n),$$

et donc (3.3) est satisfaite.

Soient maintenant, $z_1^n, y_1^n : [-d, t_1^n] \to H$, les suites d'applications continues définies respectivement, par

$$z_1^n(t) = \begin{cases} \phi(t) & \text{si } t \in [-d, t_0^n], \\ \frac{t_1^n - t}{\tau_n} u_0 + \frac{t - t_0^n}{\tau_n} u_1^n & \text{si } t \in [t_0^n, t_1^n], \end{cases}$$

et

$$y_1^n(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in [-d, t_0^n], \\ P_1^n(t) & \text{si } t \in [t_0^n, t_1^n], \end{cases}$$

où

$$P_1^n(t) := \frac{\Psi(t)-\Psi(t_0^n)}{\Psi(t_1^n)-\Psi(t_0^n)}\left(v_1^n - \int_{t_0^n}^{t_1^n} g(s,\Theta(t_0^n)y_0^n,\Theta(t_0^n)z_0^n)ds - v_0\right)$$
$$+ v_0 + \int_{t_0^n}^{t} g(s,\Theta(t_0^n)y_0^n,\Theta(t_0^n)z_0^n)ds.$$

Prenons $u_2^n := u_1 + \tau_n v_1^n$. Encore une fois, en raison de la boule compacité de $C(t_2^n, u_2^n)$, on a

$$v_2^n \in \mathrm{Proj}_{C(t_2^n,u_2^n)}\left(v_1^n + \int_{t_1^n}^{t_2^n} g(s,\Theta(t_1^n)y_1^n,\Theta(t_1^n)z_1^n)ds\right),$$

et donc

$$v_1^n + \int_{t_1^n}^{t_2^n} g(s,\Theta(t_1^n)y_1^n,\Theta(t_1^n)z_1^n)ds - v_2^n \in \mathcal{N}^c_{C(t_2^n,u_2^n)}(v_2^n).$$

Ainsi, (3.3) est satisfaite. On suppose que les points $u_0^n, ..., u_{n-1}^n$ et $v_0^n, ..., v_{n-1}^n$ ont éte construits. Par construction, les applications
$z_{n-1}^n, y_{n-1}^n : [-d, t_{n-1}^n] \to H$ sont définies respectivement par

$$z_{n-1}^n(t) = \begin{cases} \phi(t) & \text{si } t \in [-d, t_0^n], \\ \frac{t_k^n - t}{\tau_n} u_{k-1}^n + \frac{t - t_{k-1}^n}{\tau_n} u_k^n & \text{si } t \in [t_{k-1}^n, t_k^n] \quad \text{pour } k = 1, ..., n-1. \end{cases} \tag{3.4}$$

et

$$y_{n-1}^n(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in [-d, t_0^n], \\ P_k^n(t) & \text{si } t \in [t_{k-1}^n, t_k^n] \quad \text{pour } k = 1, ..., n-1. \end{cases}$$

où

$$P_k^n(t) := \frac{\Psi(t)-\Psi(t_{k-1}^n)}{\Psi(t_k^n)-\Psi(t_{k-1}^n)}\left(v_k^n - \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} g(s,\Theta(t_{k-1}^n)y_{k-1}^n,\Theta(t_{k-1}^n)z_{k-1}^n)ds - v_{k-1}^n\right)$$
$$+ v_{k-1}^n + \int_{t_{k-1}^n}^{t} g(s,\Theta(t_{k-1}^n)y_{k-1}^n,\Theta(t_{k-1}^n)z_{k-1}^n)ds.$$

Supposons aussi que (3.3) est satisfaite pour $i = 1, ..., n-1$. Pour $u_n^n = u_{n-1}^n + \tau_n v_{n-1}^n$, la boule compacité de l'ensemble $C(t_n^n, u_n^n)$, nous donne

$$v_n^n \in \mathrm{Proj}_{C(t_n^n,u_n^n)}\left(v_{n-1}^n + \int_{t_{n-1}^n}^{t_n^n} g(s,\Theta(t_{n-1}^n)y_{n-1}^n,\Theta(t_{n-1}^n)z_{n-1}^n)ds\right). \tag{3.5}$$

De maniére équivalente

$$v_{n-1}^n + \int_{t_{n-1}^n}^{t_n^n} g(s,\Theta(t_{n-1}^n)y_{n-1}^n,\Theta(t_{n-1}^n)z_{n-1}^n)ds - v_n^n \in \mathcal{N}^c_{C(t_n^n,u_n^n)}(v_n^n).$$

Alors, (3.3) est satisfaite pour $i = 1, ..., n$, et donc la construction des suites $\{u_i^n : i = 0, ..., n\}$ et $\{v_i^n : i = 0, ..., n\}$ est obtenue par induction. Définissons maintenant les applications continues $u_n, v_n : [-d, T] \to H$ par

$$u_n(t) = z_n^n(t), \tag{3.6}$$

$$v_n(t) = y_n^n(t). \tag{3.7}$$

Par conséquent, à partir de $(\mathscr{A}_2)$ et (3.5), on obtient pour $i = 1, ..., n$

$$\begin{aligned}
\|v_i^n - v_{i-1}^n\| &\leq \left\| v_{i-1}^n + \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} g(s, \Theta(t_{i-1}^n)y_{i-1}^n, \Theta(t_{i-1}^n)z_{i-1}^n)ds - v_i^n \right\| \\
&+ \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \|g(s, \Theta(t_{i-1}^n)y_{i-1}^n, \Theta(t_{i-1}^n)z_{i-1}^n)\|ds \\
&= d\left(v_{i-1}^n + \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} g(s, \Theta(t_{i-1}^n)y_{i-1}^n, \Theta(t_{i-1}^n)z_{i-1}^n)ds, C(t_i^n, u_i^n) \right) \\
&+ \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \|g(s, \Theta(t_{i-1}^n)y_{i-1}^n, \Theta(t_{i-1}^n)z_{i-1}^n)\|ds \\
&\leq d\left(v_{i-1}^n + \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} g(s, \Theta(t_{i-1}^n)y_{i-1}^n, \Theta(t_{i-1}^n)z_{i-1}^n)ds, C(t_{i-1}^n, u_{i-1}^n) \right) \\
&+ \chi(t_i^n) - \chi(t_{i-1}^n) + L\|u_i^n - u_{i-1}^n\| \\
&+ \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \|g(s, \Theta(t_{i-1}^n)y_{i-1}^n, \Theta(t_{i-1}^n)z_{i-1}^n)\|ds.
\end{aligned}$$

En utilisant $(\mathscr{A}_4)$ on obtient

$$\|v_i^n - v_{i-1}^n\| \leq \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} (2\alpha + \chi'(s))ds + L\tau_n\|v_{i-1}^n\|,$$

et

$$\begin{aligned}
\|v_i^n\| &\leq \|v_{i-1}^n\| + \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} (2\alpha + \chi'(s))ds + L\tau_n\|v_{i-1}^n\| \\
&\leq \|v_{i-2}^n\| + \int_{t_{i-2}^n}^{t_i^n} (2\alpha + \chi'(s))ds + L\tau_n\|v_{i-2}^n\| + L\tau_n\|v_{i-1}^n\| \\
&\leq \|v_{i-3}^n\| + \int_{t_{i-3}^n}^{t_i^n} (2\alpha + \chi'(s))ds + L\tau_n\|v_{i-3}^n\| + L\tau_n\|v_{i-2}^n\| + L\tau_n\|v_{i-1}^n\|.
\end{aligned}$$

Par itération, il en résulte que

$$\begin{aligned}
\|v_i^n\| &\leq \|\varphi(0)\| + \int_0^{t_i^n} (2\alpha + \chi'(s))ds + L\tau_n \sum_{k=0}^{i-1} \|v_k^n\| \\
&\leq A + L\tau_n \sum_{k=0}^{i-1} \|v_k^n\|,
\end{aligned}$$

où $A := \|\varphi\|_\infty + \int_0^T (2\alpha + \chi'(s))ds$. D'après le lemme de Gronwall, on obtient

$$\|v_i^n\| \le A \exp\left(\sum_{k=0}^{i-1} L\tau_n\right) = A\exp(Lt_i^n) \le \beta, \forall i = 0, ..., n. \tag{3.8}$$

De plus, d'après (3.1) on a, pour $i = 1, ..., n$

$$\begin{aligned}
&\left\| v_{i-1}^n + \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} g(s, \Theta(t_{i-1}^n)y_{i-1}^n, \Theta(t_{i-1}^n)z_{i-1}^n)ds - v_i^n \right\| \\
&= d\bigg(v_{i-1}^n + \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} g(s, \Theta(t_{i-1}^n)y_{i-1}^n, \Theta(t_{i-1}^n)z_{i-1}^n)ds, C(t_i^n, u_i^n)\bigg) \\
&\le d\bigg(v_{i-1}^n + \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} g(s, \Theta(t_{i-1}^n)y_{i-1}^n, \Theta(t_{i-1}^n)z_{i-1}^n)ds, C(t_{i-1}^n, u_{i-1}^n)\bigg) \\
&+ \chi(t_i^n) - \chi(t_{i-1}^n) + L\tau_n\|v_{i-1}^n\| \\
&\le \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \|g(s, \Theta(t_{i-1}^n)y_{i-1}^n, \Theta(t_{i-1}^n)z_{i-1}^n)\|ds + \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \chi'(s)ds + L\tau_n\beta \\
&\le \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} (\alpha + \chi'(s) + L\beta)ds = \Psi(t_i^n) - \Psi(t_{i-1}^n).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Étape 2 : Convergence des suites d'application (u_n) **et** (v_n).

Dans cette étape on note y_n et x_n la restriction de u_n et v_n à $[0, T]$, respectivement, i.e., $y_n \equiv u_{n|[0,T]}$ et $x_n \equiv v_{n|[0,T]}$.

D'après (3.6) et (3.7), on a pour presque tout $t \in [t_{i-1}^n, t_i^n]$ et $i = 1, ..., n$

$$\dot{y}_n(t) = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\tau_n} = v_{i-1}^n \in C(t_{i-1}^n, u_{i-1}^n),$$

et

$$\begin{aligned}
\dot{x}_n(t) = (p_i^n)'(t) = g(t, \Theta(t_{i-1}^n)y_{i-1}^n, \Theta(t_{i-1}^n)z_{i-1}^n) + \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t_i^n) - \Psi(t_{i-1}^n)} \\
\times \left(v_i^n - \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} g(s, \Theta(t_{i-1}^n)y_{i-1}^n, \Theta(t_{i-1}^n)z_{i-1}^n)ds - v_{i-1}^n \right).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Posons

$$\theta_n(t) = \begin{cases} t_i^n & \text{si } t \in [t_{i-1}^n, t_i^n[, \\ T & \text{si } t = T. \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\delta_n(t) = \begin{cases} t_{i-1}^n & \text{si } t \in [t_{i-1}^n, t_i^n[, \\ t_{n-1}^n & \text{si } t = T. \end{cases} \tag{3.12}$$

De plus, il est facile de voir que les suites $(\theta_n(.))$ et $(\delta_n(.))$ convergent uniformément dans $[0,T]$ vers t lorsque $n \to \infty$. En effet, pour chaque $t \in [0,T]$, nous avons

$$|\theta_n(t) - t| \leq |t_i^n - t_{i-1}^n| = \frac{T}{n},$$

et

$$|\delta_n(t) - t| \leq |t_i^n - t_{i-1}^n| = \frac{T}{n},$$

alors

$$\theta_n(t) \to t \text{ et } \delta \to t \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Combinons (3.3), (3.6), (3.7), (3.10), (3.11) et (3.12), on obtient, pour presque tout $t \in [0,T]$,

$$\dot{x}_n(t) - g(t, \Theta(\delta_n(t))v_n, \Theta(\delta_n(t))u_n) \in -\mathcal{N}^c_{C(\theta_n(t), y_n(\theta_n(t)))}(x_n(\theta_n(t))). \tag{3.13}$$

En tenant compte de (3.1), (3.9) et (3.10), il s'ensuit que pour presque tout $t \in [0,T]$.

$$\|\dot{x}_n(t) - g(t, \Theta(\delta_n(t))v_n, \Theta(\delta_n(t))u_n)\| \leq \Psi'(t), \tag{3.14}$$

et d'après la condition $(\mathscr{A}_4)$

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leq \Psi'(t) + \alpha := m(t). \tag{3.15}$$

Ainsi, $x_n(.)$ est absolument continue sur $[0,T]$, en particulier

$$\|x_n(t)\| \leq \|\varphi(0)\| + \int_0^t m(s)ds \leq \|\varphi(0)\| + \int_0^T m(s)ds =: \gamma. \tag{3.16}$$

D'autre part, d'après (3.4) et (3.6), pour chaque $t \in [t_{i-1}^n, t_i^n]$ et $i = 1, ..., n$, on a

$$\begin{aligned} y_n(t) &= \frac{t_i^n - t}{\tau_n} u_{i-1}^n + \frac{t - t_{i-1}^n}{\tau_n} u_i^n \\ &= \frac{t_i^n - t}{\tau_n} u_{i-1}^n + \frac{t - t_{i-1}^n}{\tau_n} (u_{i-1}^n + \tau_n v_{i-1}^n) \\ &= u_{i-1}^n + (t - t_{i-1}^n) v_{i-1}^n, \end{aligned}$$

par itération, on trouve que

$$y_n(t) = \phi(0) + \int_0^t x_n(\delta_n(s))ds. \tag{3.17}$$

De plus, à partir de (3.8)

$$\begin{aligned} \|y_n(t)\| &\leq \|\phi(0)\| + \int_0^t \|x_n(\delta_n(s))\|ds \\ &\leq \|\phi(0)\| + \beta T =: \eta. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Fixons maintenant $t \in [0,T]$, en utilisant $(\mathscr{A}_2)$, (3.8), (3.15) et (3.17) on obtient

$$\begin{aligned} d(x_n(t), C(t, y_n(t))) &\leq d(x_n(\theta_n(t)), C(\theta_n(t), y_n(\theta_n(t)))) + \|x_n(t) - x_n(\theta_n(t)\| \\ &\quad + \chi(\theta_n(t)) - \chi(t) + L\|y_n(t) - y_n(\theta_n(t)\| \\ &\leq \int_t^{\theta_n(t)} (m(s) + \chi'(s) + L\beta) ds. \end{aligned}$$

Comme $\theta_n(t)$ convergence vers t, on trouve que

$$d(x_n(t), C(t, y_n(t))) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.19}$$

Ce qui implique $x_n(t) = c_n(t) + e_n(t)$ avec $c_n(t) \in C(t, y_n(t))$ et $e_n(t) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Il existe un réel $\rho > 0$ tel que $\|e_n(t)\| \leq \rho$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte de (3.16) et (3.18) que

$$c_n(t) \in C(t, y_n(t)) \cap (\rho + \gamma)\overline{\mathbb{B}} \subset C([0,T] \times \eta\overline{\mathbb{B}}) \cap (\rho + \gamma)\overline{\mathbb{B}}.$$

Donc, l'ensemble $\{c_n(t) : n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans H, en tenant compte de $(\mathscr{A}_1)$, et en utilisant la convergence de $e_n(t) \to 0$, on obtient la compacité relative de $\{x_n(t) : n \in \mathbb{N}\}$. Observons que $\int_A m(t)dt \to 0$, lorsque $\lambda(A) \to 0$, où λ désigne la mesure de Lebesgue, alors pour tout $\epsilon \leq 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\int_A m(t)dt < \epsilon$ dès que $\lambda(A) < \delta$. De plus, d'après (3.15),

$$\|x_n(t) - x_n(s)\| \leq \int_s^t m(\tau) d\tau.$$

Alors la suite d'applications $x_n(.)$ est équi-continue sur $[0,T]$. En utilisant le théorème d'Arzelà-Ascoli, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, est relativement compact dans $\mathscr{C}_H([0,T])$. Par conséquent, on peut extraire de (x_n) une sous suite notée aussi (x_n) qui converge vers une application absolument continue $x : [0,T] \to H$ au sens suivant

$$\begin{aligned} x_n &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \quad \text{fortement dans } \mathscr{C}_H([0,T]), \\ \dot{x}_n &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dot{x} \quad \text{faiblement dans } L^1_H([0,T]). \end{aligned}$$

En utilisant (3.17) et la convergence uniforme de $\delta_n(.)$, on trouve que, pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\|y_n(t) - y(t)\| \leq \int_0^T \|x_n(\delta_n(s)) - x(s)\| ds \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

où $y(t) := \phi(0) + \int_0^t x(s)ds$, et donc y_n convergence fortement vers y dans $\mathscr{C}_H([0,T])$. Définissons les applications u et v dans $\mathscr{C}_H([-d,T])$ en posant

$$u(t) = \begin{cases} \phi(t) & \text{si } t \in [-d, 0], \\ y(t) & \text{si } t \in [0, T]. \end{cases}$$

$$v(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in [-d, 0], \\ x(t) & \text{si } t \in [0, T]. \end{cases}$$

Alors, les suites $(u_n(.))$ et $(v_n(.))$ convergent uniformément sur $[-d,T]$ vers $u(.)$ et $v(.)$, respectivement. Grâce à (3.19), la fermeture de $C(t, y(t))$ et la convergence uniforme de (x_n, y_n) vers (x, y), on obtient $x(t) \in C(t, y(t))$ pour tout $t \in [0,T]$.
Montrons maintenant que $\Theta(\delta_n(t))v_n$ converge fortement dans $\mathscr{C}_H([-d,0])$ vers $\Theta(t)v$. Definissons tout d'abord le module de continuité d'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ par

$$\Lambda(f, I, \epsilon) := \sup\{\|f(t) - f(s)\| : s, t \in I, |t - s| \leq \epsilon\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|\Theta(\delta_n(t))v_n - \Theta(t)v_n\|_\infty &= \sup_{s\in[-d,0]} \{\|v_n(\delta_n(t) + s) - v_n(t + s)\|,\ t \in [0,T], |\delta_n(t) - t| < \tau_n\} \\ &\leq \Lambda(v_n, [-d,T], \tau_n) \\ &\leq \Lambda(\varphi, [-d,0], \tau_n) + \Lambda(x_n, [0,T], \tau_n). \end{aligned}$$

Posons $\Phi(t) = \|\varphi(0)\| + \int_0^t m(s)ds$ alors $\|x_n(t)\| \leq \Phi(t)$. En tenant compte de (3.16), on en déduit que

$$\|\Theta(\delta_n(t))v_n - \Theta(t)v_n\|_\infty \leq \Lambda(\varphi, [-d,0], \tau_n) + \Lambda(\Phi(t), [0,T], \tau_n).$$

Comme φ et Φ sont uniformément continues sur $[-d,0]$ et $[0,T]$ respectivement, alors

$$\|\Theta(\delta_n(t))v_n - \Theta(t)v_n\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En utilisant la convergence uniforme de v_n vers v sur $[-d,T]$, on obtient

$$\Theta(\delta_n(t))v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Theta(t)v \quad \text{fortement dans } \mathscr{C}_H([-d,0]).$$

De même on obtient

$$\Theta(\delta_n(t))u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Theta(t)u \quad \text{fortement dans } \mathscr{C}_H([-d,0]).$$

Étape 3 :$u(.)$ **est une solution de** $\left(\mathscr{P}_d\right)$

Montrons que l'application $u(.)$ est une solution de $\left(\mathscr{P}_d\right)$. Posons,

$$q_n(t) = g(t, \Theta(\delta_n(t))v_n, \Theta(\delta_n(t))u_n) \quad \text{pour tout } t \in [0,T].$$

Comme $\|g(t, \Theta(\delta_n(t))v_n, \Theta(\delta_n(t))u_n)\| \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,T]$, il existe une sous suite de (q_n) (notée aussi (q_n)), qui converge faiblement vers $q(.)$ dans $L^1_H([0,T])$, avec $\|q(t)\| \leq \alpha$ p.p $t \in [0,T]$.

En utilisant le fait que (q_n) et $(\dot{x}_n)$ convergent faiblement dans $L^1_H([0,T])$, vers $q(.)$ et $\dot{x}(.)$ respectivement, et d'après le lemme de Mazur, il existe une suite (ζ_n, ξ_n) qui converge fortement dans $L^1_{H\times H}([0,T])$ vers $(-\dot{x}+q, q)$ avec

$$\zeta_n(.) \in co\{-\dot{x}_k(.) + q_k(.) : k \geq n\} \text{ et } \xi_n(.) \in co\{q_k(.) : k \geq n\}.$$

Par extraction d'une sous suite, on peut supposer que $(\zeta_n(.), \xi_n(.))$ converge presque partout vers $(-\dot{x}(.) + q(.), q(.))$, donc il existe un ensemble négligeable $S \subset [0,T]$ tel que pour chaque $t \in [0,T]\backslash S$, $(\zeta_n(t), \xi_n(t))$ converge fortement dans H vers $(-\dot{x}(t) + q(t), q(t))$.

Par conséquent, pour presque tout $t \in [0,T]$,

$$-\dot{x}(t) + q(t) \in \bigcap_n \overline{co}\{-\dot{x}_k(t) + q_k(t) : k \geq n\} \text{ et } q(t) \in \bigcap_n \overline{co}\{q_k(t) : k \geq n\}.$$

Il en résulte de (3.13) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0,T]\backslash S$, et pour tout $h \in H$, on a

$$\langle h, -\dot{x}_n(t) + q_n(t)\rangle \leq \sigma(h, \Psi'(t)\partial^c d_{C(\theta_n(t), y_n(\theta_n(t)))}(x_n(\theta_n(t)))),$$

et

$$\langle h, q_n(t)\rangle \leq \sigma(h, G(t, \Theta(\delta_n(t))v_n, \Theta(\delta_n(t))u_n)).$$

Alors, pour presque tout $t \in [0,T]$ et pour chaque $h \in H$, on a

$$\langle h, -\dot{x}(t) + q(t)\rangle \leq \inf_n \sup_{k\geq n} \langle h, -\dot{x}_k(t) + q_k(t)\rangle,$$

$$\langle h, q(t)\rangle \leq \inf_n \sup_{k\geq n} \langle h, q_k(t)\rangle.$$

Il s'ensuit de (1.3), (3.13) et (3.14) que

$$\langle h, -\dot{x}(t) + q(t)\rangle \leq \Psi'(t)\limsup_{n\to\infty}\sigma(h, \partial^c d_{C(\theta_n(t), y_n(\theta_n(t)))}(x_n(\theta_n(t)))),$$

$$\langle h, q(t)\rangle \leq \limsup_{n\to\infty}\sigma(h, G(t, \Theta(\delta_n(t))v_n, \Theta(\delta_n(t))u_n)).$$

Puisque pour tout $h \in H$ et pour presque tout $t \in [0, T]$, la fonction réelle $(y, z) \to \sigma(h, G(t, y, z))$ est semi-continue supérieurement alors d'après la Proposition 2.2.2, on a pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\langle h, -\dot{x}(t) + q(t)\rangle \leq \Psi'(t)\sigma(h, \partial^c d_{C(t,y(t))}(x(t))),$$

$$\langle h, q(t)\rangle \leq \sigma(h, G(t, \Theta(t)v, \Theta(t)u)).$$

Ceci assure d'après (1.5) que

$$-\dot{x}(t) + q(t) \in \Psi'(t)\partial^c d_{C(t,y(t))}(x(t)) \subset \mathcal{N}^c_{C(t,y(t))}(x(t)),$$

$$q(t) \in G(t, \Theta(t)v, \Theta(t)u).$$

Par conséquent, on obtient

$$\dot{x}(t) \in -\mathcal{N}^c_{C(t,y(t))}(x(t)) + G(t, \Theta(t)v, \Theta(t)u) \quad p.p.\ t \in [0, T],$$

et

$$\|\dot{x}(t) + q(t)\| \leq \Psi'(t) \quad p.p.\ t \in [0, T].$$

Ce que achève la démonstration du théorème. ■

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté un résultat d'existence pour le processus de Rafle du second ordre gouverné par le cône normal de Clarke d'un ensemble qui est uniformément sous-lisse et une perturbation non nécessairement bornée à valeurs convexes fermées contenant un retard dans un espace de Hilbert. On travaille avec des propriétés appartenant à la classe d'ensembles sous-lisse et on utilise des propriétés de compacité et de topologie faible.

Bibliographie

[1] **J. P. Aubin, A. Cellina**, *Differential inclusion*, Set-Valued Maps and Viability Theory, Springer-verlag, Berlin(1984).

[2] **D. Aussel, A. Danilidis, L. Thibault**, *Subsmooth sets : function characterizations and related concepts.* Trans. Am. Math. Soc. 357, 1275-1301 (2005).

[3] **D. Azé**, *Éléments d'analyse convexe et variationnelle*, Édition Markting. 1997.

[4] **H. Brezis**, *Analyse Fonctionnelle : Théorie et application*, Dunod, Paris, 1999.

[5] **C. Castaing, M. Valdier**, *Convexe Analysis and Measurable Multifunctions*, Springer-verlag, Berlin (1977).

[6] **J.J.Moreau**, *Rafle par un convexe variable I.*Sém. Anal. convexe Montp. Exp. 15, 43(1971).

[7] **J.J.Moreau**, *Rafle par un convexe variable II.*Sém. Anal. convexe Montp. Exp. 3, 36(1972).

[8] **J.J.Moreau**, *Multi-applications à rétraction finie.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 1, 169-203 (1974).

[9] **J.J.Moreau**, *Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space.* J. Differ. Equ. 26, 347-374 (1977).

[10] **J.J.Moreau**, *Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics.* In : Moreau, J.J., Panagiotopoulos, P.D. (eds.) Nonsmooth Mechanics. CISM Courses and Lectures, vol. 302, pp. 1-82. Springer, Vienna(1988).

[11] **J.Noel**, *Inclusions différentielles d'évolution associées à des ensembles sous lisses.* Ph.D. thesis, Université Montpellier II(2013).

[12] **J.Noel**, *Second-order general perturbed sweeping process differential inclusion*, J. Fixed Point Theory Appl. (2018).

[13] **Y. Sonntag**, *Topologie et Analyse fonctionnelle*, Berlin 23-4-1880,1997.

[14] **L. Thibault**, *Subsmooth functions and sets*, *J. Linear and Nonlinear Analysis*, Vol 4,$N°$2, 157-269 (2018).

[15] **Zheng, X.Y.,Ng,K.F.**, *Linear regularity for a collection of subsmooth sets in Banach space*. SIAM J. Optim. 19(1), 62-76 (2008).