République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Benyahai - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique

Département de Mathématique

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Équation aux dérivées partielles et applications.

Thème

Un résultat d'existence pour un problème d'évolution non linéaire

Présenté par :

Idoui Lamia

Devant le jury :

Président	: Arroud Chems Eddine	M.C.B Université de Jijel.
Encadreur	: Haddad Tahar	Professeur Université de Jijel.
Co-encadreur	: Khallaf Wahiba	M.C.B Université de Jijel.
Examinateur	: Menniche Linda	M.C.A Université de Jijel.

Promotion **2021/2022**

Soutenu le **06/07/2022**

Remerciements

*Tout d'abord et avant tout, je remercie **ALLAH** tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience qu'il m'a donné durant ces longue années d'étude et le courage pour terminer ce mémoire.*

*J'exprime mes profonds remerciements à mon encadreur **Professeur Haddad Tahar** pour la pertinence de ses remarques et ses conseils durant la réalisation de ce travail. J' admire beaucoup son sérieux et sa manière de diriger qui furent pour nous une grande source d'inspiration et de motivation. J'ai pris un grand plaisir a travailler avec lui.*

*Je tiens également à remercier mon co-encadreur **Khallaf Wahiba** pour sa gentillesse.*

*J'e remercie vivement **Arroud Chems Eddine** pour avoir accepter de présidé le jury de soutenance.*

*J'adresse également mes vifs remerciements à l'examinatrice **Menniche Linda** pour avoir accepter d'être membre de ce jury.*

Je voudrais aussi remercier tous mes enseignants du département de mathématiques à l'université de Jijel.

Enfin, je n'oubliera pas de remercier profondément ma famille, mes amis, mes collègues de promotion pour leur soutien et leurs encouragements et toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin, à terminer ce travail.

$\preccurlyeq$ *I*.**Lamia** $\succcurlyeq$

Table des matières

Table des figures

Notations et abréviations

$i.e.$	C'est-à-dire .
p.p.	Presque partout.
$int(C)$	L'intérieur topologique de l'ensemble C.
$adh(C)$	L'adhérence topologique ou la fermeture de l'ensemble C.
H	Un espace de Hilbert réel.
$Proj_C(\cdot)$	La Projection sur l'ensemble C.
$d_C(\cdot)$	La fonction distance à C.
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	Le produit scalaire de H.
$\\| . \\|$	La norme de H.
$\mathbb{B}_H$	La boule unité fermée .
$B[x,\eta]$	La boule fermée de centre x et de rayon η.
E'	Dual topologique d'un espace vectoriel normé E.
$\sigma(E,E')$	Topologie faible sur E.
$C([T_0,T],H)$	L'espace de Banach de toutes les applications continues définies sur $[T_0,T]$ à valeurs dans H muni de la norme de la convergence uniforme $$\\|f(\cdot)\\|_\infty = \sup_{t\in[T_0,T]} \\|f(t)\\|.$$
$L^p([T_0,T],H)$	L'espace des applications mesurables de puissance p^{ime} intégrables $(1\le p<\infty)$ définies sur $[T_0,T]$ à valeurs dans H muni de la norme $$\\|f(\cdot)\\|_{L^p} = \left(\int_{T_0}^{T} \\|f(t)\\|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$
$L^\infty([T_0,T],H)$	L'espace des applications essentiellement bornées définies sur $[T_0,T]$ à valeurs dans H muni de la norme $$\\|f(\cdot)\\|_{L^\infty} = \inf\big\{c\ge 0 : \\|f(t)\\| \le c \text{ } p.p. \text{ sur } [T_0,T]\big\}.$$

Introduction

Le concept de processus de rafle (en anglais"sweeping process") a été introduit et étudie pour la première fois dans les années soixante-dix par Jean Jacques Moreau[20]. Ce problème était formulé sous la forme d'une inclusion différentielle d'évolution du premier ordre régis par le cône normale comme suit

$$(P)\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) \quad \text{p.p. sur } [0,T], \\ x(0) = x_0 \in C(0), \end{cases}$$

où $N_{C(t)}(x(t))$ représente le cône normal au sens de l'analyse convexe à l'ensemble convexe $C(t)$ au point $x(t)$, $\dot{x}(t)$ est la dérivée de $x(t)$ au point t, et x_0 est une condition initiale donnée. J. J. Moreau a expliqué dans une série de travaux que ce problème modélise des phénomènes d'élasto-plasticité et de la dynamique non régulière. Bien que la théorie ait été produite de la mécanique, mais de nos jours, ce modèle reste un objet de recherches mathématiques, qui est essentiel non seulement dans la mécanique, mais aussi dans l'économie, l'électronique, la biologie, etc. La théorie est devenue cruciale dans beaucoup de branches de science avec des applications diverses, particulièrement à l'hysteresis magnétique, mouvement de foule [18], la modélisation économique sociale, circuits électriques non-réguliers [1, 4] et beaucoup d'autres.

Pour interpréter le mécanisme décrit par le problème (P), on suppose que $x(t)$ se trouve à l'intérieur de $C(t)$. Alors, le cône normal à l'ensemble $C(t)$ à ce point $x(t)$ est réduit à zéro et donc, la vitesse du point est nulle, c-à-d que le point ne bouge pas. Par contre, tout contact du point $x(t)$ avec la frontière de l'ensemble $C(t)$ produit un choc qui repousse ce premier avec une vitesse opposée à la normale à l'ensemble. Le problème décrit le mouvement d'un ensemble qui traîne un point.

Divers autres travaux ont été développés a fin d'obtenir des résultats d'existence de solution dans diverses directions.

L'objectif de ce travail est de détailler l'article de Abderrahim Bouach, Tahar Haddad et Lionel Thibault [7] intitulé " Nonconvex integro-differential sweeping process with applications " dans le cas convexe. Le but principal des auteurs de cet article est d'étudier une nouvelle variante du processus de rafle dans un espace de Hilbert H donnée par

$$(P_{f_1,f_2})\begin{cases}-\dot{x}(t)\in N_{C(t)}(x(t))+f_1(t,x(t))+\displaystyle\int_{T_0}^{t} f_2(t,s,x(s))\,ds \qquad \text{p.p. } t\in[T_0,T]\\ x(T_0)=x_0\in C(T_0),\end{cases}$$

où $f_1 : [T_0,T]\times H \longrightarrow H,\ f_2 : [T_0,T]^2\times H\longrightarrow H$ sont deux fonctions univoques de carathéodory et la fonction f_2 est la perturbation intégrale dépend de deux temps t,s. Dans le cas où f_2 dépend de temps t alors le processus de rafle (P_{f_1,f_2}) est équivalente à

$$(P_{f_1,f_{t,2}})\begin{cases}-\dot{x}(t)\in N_{C(t)}(x(t))+f_1(t,x(t))+y(t) \qquad \text{p.p. } t\in[T_0,T]\\ \dot{y}(t)=f_2(t,x(t))\\ x(T_0)=x_0,\ y(T_0)=0.\end{cases}$$

Et alors

$$\overbrace{\begin{pmatrix}-\dot{x}(t)\\ -\dot{y}(t)\end{pmatrix}}^{-\dot{X}(t)}\in N_{C(t)\times H}\overbrace{\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}}^{X(t)}+\overbrace{\begin{pmatrix}f_1(t,x(t))+y(t)\\ -f_2(t,x(t))\end{pmatrix}}^{f(t,X(t))}.$$

Observons que le problème ci-dessus est un cas particulier de processus de rafle perturbé, par contre la réduction du problème (P_{f_1,f_2}) au processus de rafle perturbé ca marche pas.

Ce mémoire est composé de trois chapitres organisés comme suit : Au début on commence par un chapitre introductif qui rappelle et présente les résultats fondamentaux et les concepts de base qui vont servir de clé dans les autres chapitres, notamment les notions de l'analyse convexe avec des exemples explicatifs, quelques résultats classiques de l'analyse fonctionnelle et les inégalités de Gronwall.

Le deuxième chapitre est consacré à étudier un résultat d'existence, d'unicité et de stabilité de solution absolument continue pour le processus de rafle integro-différentiel du premier ordre (P_{f_1,f_2}). Ceci est fait à l'aide d'une nouvelle inégalité de type Gronwall et d'un nouveau schéma correspondant à l'existence de solutions absolument continues sur chaque sous intervalles pour les processus de rafle

$$\begin{cases} -\dot{x}_n(t) \in N_{C(t)}(x_n(t)) + f_1(t, x_n(t_k)) + \sum\limits_{j=0}^{k-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f_2(t, s, x_n(t_j))\, ds \\ + \int\limits_{t_k}^{t} f_2(t, s, x_n(t_k))\, ds \quad \text{p.p. } t \in [t_k, t_{k+1}] \\ x_n(T_0) = x_0 \in C(T_0), \end{cases}$$

òu $T_0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ c'est la discrétisation de l'intervalle $[T_0, T]$.

Enfin, dans le troisième chapitre, nous donnons des applications de nos résultats principaux dans la théorie des circuits électriques non réguliers.

Chapitre 1

Concepts de base et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons toutes les notions et les résultats de base qui nous serons très utiles pour la démonstration de nos résultats principaux. Nous énonçons des définitions et concepts fondamentaux d'analyse convexe et d'analyse fonctionnelle. Les définitions, les propositions, et les théorèmes de ce chapitre ont été pris des références [3], [4], [5], [6], [9], [10], [12], [14], [15], [21], [23], [24].

1.1 Ensembles convexes

Définition 1.1.1 (Ensemble convexe). *Un sous-ensemble C de H est dit convexe s'il contient tout segment de ces points i.e.,*

$$\forall x, y \in C,\ \forall \lambda \in [0, 1] :\ \lambda x + (1 - \lambda) y \in C.$$

Exemple 1.1.2. $H = \mathbb{R}^2$

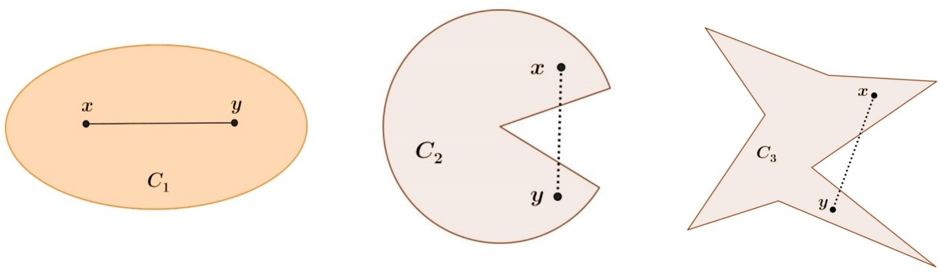


FIGURE 1.1 – Ensembles convexes et non convexes.

Exemple 1.1.3.

- *Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.*
- *Une boule ouverte ou fermée est convexe.*

Proposition 1.1.4. *L'intersection d'une famille quelconque de sous-ensembles convexes est convexe.*

Définition 1.1.5 (Enveloppe convexe). *Soit A une partie de H. L'enveloppe convexe de A, noté $co(A)$ est l'intersection de tous les convexes contenant A (est donc convexe), et par conséquent c'est le plus petit convexe contenant A.*

$$co(A) := \cap\{C : C\, est\, un\, convexe\, contenant\, A\}.$$

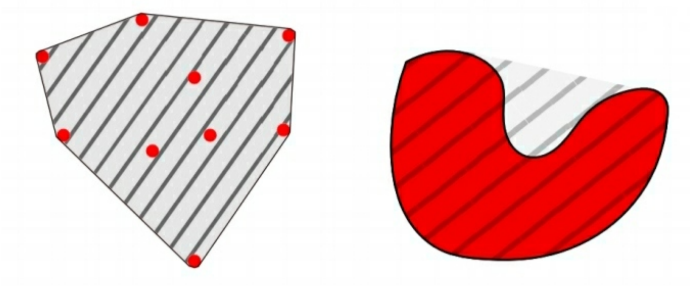


FIGURE 1.2 – Exemple d'enveloppes convexes.

Proposition 1.1.6. *Soit $A \subset H$. Alors $co(A)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes d'éléments de A.*

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, x_i \in A \right\}.$$

Remarque 1.1.7.

- *Si C est convexe alors $co(C) = C$.*
- *Si C est borné alors $co(C)$ est borné.*

Définition 1.1.8 (Enveloppe convexe fermé). *Soit A une partie de H. On appelle enveloppe convexe fermée de A, noté $\overline{co}(A)$ l'intersection de tous les ensembles convexes fermés contenant A.*

$$\overline{co}(A) := \cap\{C : C \text{ est un convexe fermé contenant } A\}.$$

1.2 Fonctions convexes

Définition 1.2.1 (Domaine effectif). *Soient H un espace de Hilbert et une fonction $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On appelle domaine effectif de f l'ensemble défini par :*

$$domf := \{x \in H : f(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.2.2 (Fonction propre). *La fonction f est dit propre si $domf \neq \emptyset$ et $f(x) \neq -\infty, \ \forall x \in H$.*

Définition 1.2.3 (Fonction convexe). *On dit qu'une fonction $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe si pour tout $x, y \in domf$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a :*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

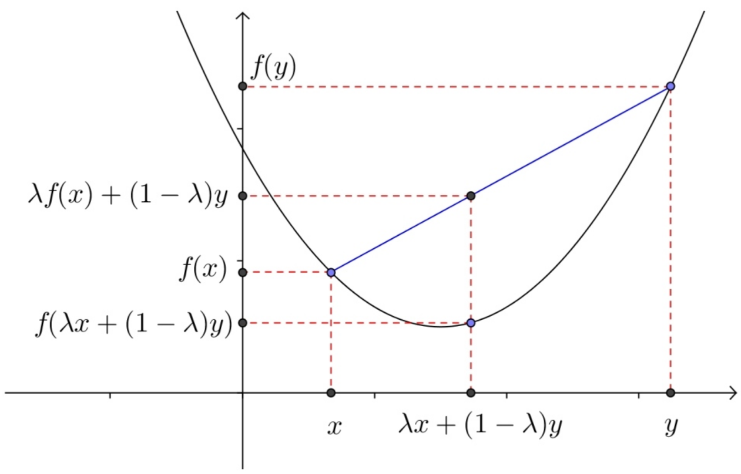


FIGURE 1.3 – Illustration de la définition.

Définition 1.2.4 (Épigraphe). *On appelle épigraphe d'une fonction $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ l'ensemble défini par :*

$$epif := \{(x,r) \in H \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}.$$

Définition 1.2.5 (Fonction indicatrice). *Soit C un sous-ensemble non vide de H, la fonction indicatrice associée à C est définie par :*

$$\begin{aligned} \delta_C(\cdot) : H &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x &\longmapsto \delta_C(x) = \begin{cases} 0 & si \ \ x \in C, \\ +\infty & si \ \ x \notin C. \end{cases} \end{aligned}$$

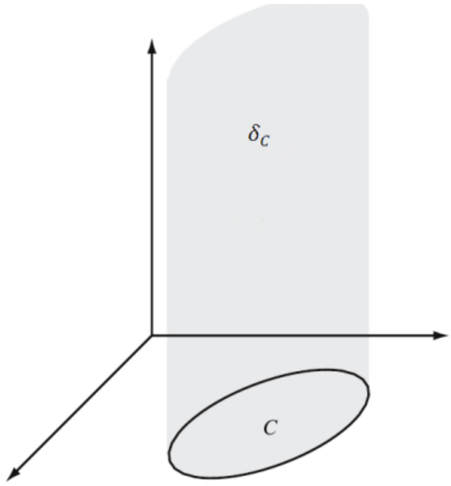


FIGURE 1.4 – Fonction indicatrice.

Remarque 1.2.6.

- *$dom(\delta_C) = C$.*
- *$epi(\delta_C) = C \times [0, +\infty]$.*
- *La fonction $\delta_C(\cdot)$ est convexe si et seulement si C est convexe.*

Définition 1.2.7 (Fonction caractéristique). *Soit C un sous-ensemble non vide de H, la fonction caractéristique associée à C est définie par :*

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{1}_C(\cdot) : H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathbf{1}_C(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in C, \\ 0 & si \quad x \notin C. \end{cases} \end{array}$$

1.3 Projection sur un convexe fermé

Définition 1.3.1 (Fonction distance). *Soit $C \subset H$ une partie non vide.*
La fonction distance associée à C est définie par : $d_C(x) := \inf\limits_{y \in C} \|x - y\|$.

Proposition 1.3.2. *Soit $C \subset H$ une partie non vide, alors*

1. *$d_C(x) = 0 \Leftrightarrow x \in adh(C)$.*
2. *La fonction distance est continûment lipschitzienne de rapport égale à 1.*

Définition 1.3.3. *Un élément $y \in C$ est une projection (ou un projeté) de $x \in H$ sur C si*

$$d_C(x) = \|x - y\|.$$

On note $\mathrm{Proj}_C(x)$ *l'ensemble de tous les points* $y \in C$ *vérifiant la définition ci-dessus, autrement dit*

$$\mathrm{Proj}_C(x) = \{y \in C : d_C(x) = \|x - y\|\}.$$

Si de plus $x \in C$*, alors* $\mathrm{Proj}_C(x) := \{x\}$.

Théorème 1.3.4. *Soit* H *un espace de Hilbert et soit* C *une partie convexe et fermée, non vide de* H*. Alors, pour tout* $x \in H$*, il existe une unique projection de* x *sur* C*, i.e.,*

$$\forall x \in H, \exists! y = \mathrm{Proj}_C(x) \in C \; : d_C(x) = \|x - y\|.$$

De plus, la projection sur C *se caractérisé par l'inégalité*

$$y = \mathrm{Proj}_C(x) \Longleftrightarrow \langle x - y, z - y\rangle \leq 0 \,\forall,\; z \in C. \tag{1.1}$$

Remarque 1.3.5. *L'inégalité* (1.1) *dit que le produit scalaire du vecteur* yx *avec tout vecteur* yz *est* ≤ 0 *, c'est-à-dire que l'angle* θ *déterminé par ces deux vecteurs est toujours obtus, c-à-d,* $\theta \geq \frac{\pi}{2}$*, (voir figure 1.5).*

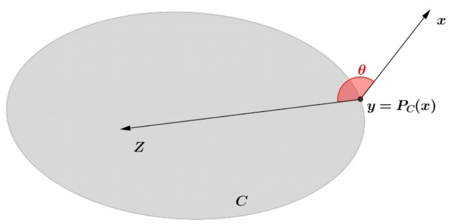


FIGURE 1.5 – Interprétation géométrique de la caractérisation.

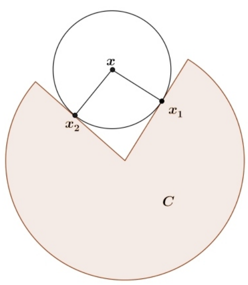


FIGURE 1.6 – Non-unicité de la projection.

1.4 Distance de Hausdorff

Définition 1.4.1 (Distance de Hausdorff).

Soient H un espace de Hilbert, C_1 et C_2 deux sous-ensembles fermés non vide de H. On appelle distance de Hausdorff entre C_1 et C_2 la fonction $d_H(\cdot,\cdot)$ définie par :

$$\begin{aligned} d_H(C_1, C_2) &:= \sup_{y\in H} \mid d_{C_1}(y) - d_{C_2}(y) \mid \\ &:= \max\big(\sup_{x\in C_1} d_{C_2}(x), \sup_{x\in C_2} d_{C_1}(x)\big). \end{aligned}$$

Proposition 1.4.2.

Soient C_1, $C_2 \subset H$ deux sous-ensembles non vide et fermés de H alors

$$d_H(C_1, C_2) \leq \varepsilon \Leftrightarrow C_1 \subset C_2 + \varepsilon \mathbb{B}_H \textit{ et } C_2 \subset C_1 + \varepsilon \mathbb{B}_H,\ \varepsilon > 0.$$

Preuve.

Supposons que $d_H(C_1, C_2) \leq \varepsilon$, donc d'après la définition précédente, nous avons

$$\mid d_{C_1}(y) - d_{C_2}(y) \mid \leq d_H(C_1, C_2) \leq \varepsilon, \quad \forall\, y \in H. \tag{1.2}$$

Soit $y \in C_1$, comme ce dernier est un fermé de H, alors de (1.2) on a :

$$d_{C_2}(y) \leq \varepsilon. \tag{1.3}$$

Soit $z \in C_2$ une projection de y sur C_2 (puisque C_2 est un fermé de H de plus cette projection n'est pas unique), alors de (1.3) on a :

$$\|y - z\| := d_{C_2}(y) \leq \varepsilon.$$

Or $y - z \in \varepsilon \mathbb{B}_H$ i.e. $y \in C_2 + \varepsilon \mathbb{B}_H$.

D'où $C_1 \subset C_2 + \varepsilon \mathbb{B}_H$, et de même façon on trouve que $C_2 \subset C_1 + \varepsilon \mathbb{B}_H$.

Inversement, supposons que $C_1 \subset C_2 + \varepsilon \mathbb{B}_H$ et $C_2 \subset C_1 + \varepsilon \mathbb{B}_H$, $\varepsilon > 0$.

Soit $x \in C_1$, alors $x = z + e$, $e \in \varepsilon \mathbb{B}_H$ et

$$\begin{aligned} d_{C_2}(x) &\leq \|z - x\| = \|e\| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Or $\sup_{x\in C_1} d_{C_2}(x) \leq \varepsilon$, et de même façon on trouve que $\sup_{x\in C_2} d_{C_1}(x) \leq \varepsilon$.

Et par suite $d_H(C_1, C_2) \leq \varepsilon$. ∎

1.5 Cône normal

Définition 1.5.1 (Cône). *Une partie $C \subset H$ est un cône si*

$$\forall x \in C\,,\, \forall \lambda \geq 0\,,\, \lambda x \in C.$$

Autrement dit, $\lambda C \subset C$, pour tout $\lambda \geq 0$.

Remarque 1.5.2.

- *Si C est convexe, il est alors appelé un cône convexe.*
- *Il est clair qu'un cône contient toujours l'origine $\big(\lambda = 0 : 0C = \{0\} \subset C\big)$.*

Définition 1.5.3 (Cône normal). *Soit $C \subset H$ un sous-ensemble convexe. On appelle cône normal à C au point x_0 l'ensemble noté $N_C(x_0)$ défini par :*

$$N_C(x_0) = \begin{cases} \{\xi \in H : \langle \xi, x - x_0 \rangle \leq 0, \quad \forall x \in C\} & si\ x_0 \in C \\ \emptyset & si\ x_0 \notin C. \end{cases}$$

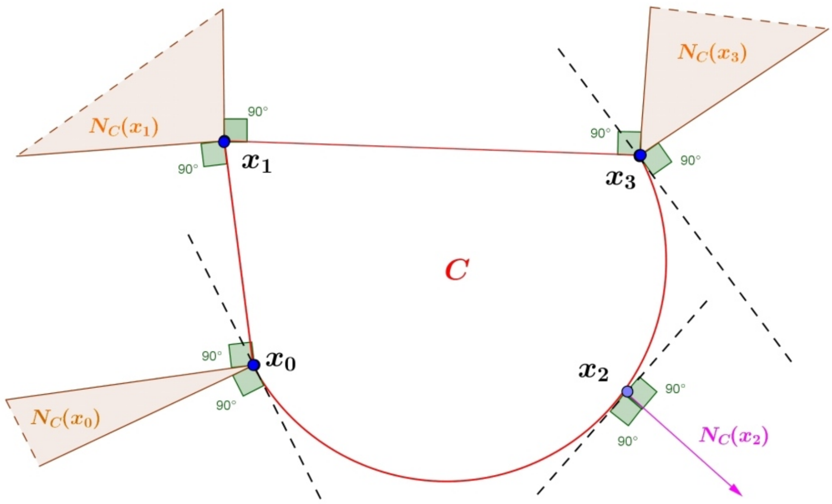


FIGURE 1.7 – Cônes normaux à un sous-ensemble convexe en différents points.

Remarque 1.5.4.

- *Un vecteur v est un vecteur normal si $v \in N_C(x)$.*
- *Le cône normal de C est une application multivoque de H vers H.*

Proposition 1.5.5. *Soit $C \subset H$ un sous-ensemble convexe et $x_0 \in C$, alors $N_C(x_0)$ est un cône convexe et fermé.*

Théorème 1.5.6. *Soit $C \subset H$ un sous-ensemble convexe tel que $int(C) \neq \emptyset$. Alors si $x \in int(C)$, on a $N_C(x) = \{0\}$.*

Exemple 1.5.7.

- $N_H(x_0) = \{0\}$.
- $N_{\{x_0\}}(x_0) = H$.
- $C = [0, 1]$

$$N_C(x) = \begin{cases} \mathbb{R}_- & si\, x = 0 \\ \mathbb{R}_+ & si\, x = 1 \\ \{0\} & si\, x \in]0, 1[\\ \emptyset & ailleur. \end{cases}$$

Remarque 1.5.8. *Dans un espace de Hilbert, le cône normal à un ensemble convexe fermé C est lié à l'application de projection, ce que l'on peut voir clairement dans l'équivalence suivante*

$$y = Proj_C(x) \Leftrightarrow x - y \in N_C(y).$$

En effet

$$x - y \in N_C(y) \Leftrightarrow \langle x - y, z - y \rangle \leq 0 \;\; \forall z \in C \Leftrightarrow y = Proj_C(x).$$

Proposition 1.5.9. *Soient C, C_1, C_2 des ensembles convexes de H. Alors on a*

1. $N_C(-x) = -N_{-C}(x)$ *pour tout* $x \in (-C)$.
2. $N_{C+a}(x + a) = N_C(x)$ *pour tout* $x \in C$, $a \in H$.
3. $N_{C_1 \times C_2}(x_1, x_2) = N_{C_1}(x_1) \times N_{C_2}(x_2)$ *pour tout* $x_1 \in C_1$, $x_2 \in C_2$.

Définition 1.5.10 (Cône dual). *Soit K un sous ensemble non vide convexe fermé de H. On appelle cône dual à K l'ensemble noté K^* défini par :*

$$K^* := \{p \in H, \langle p, v \rangle \geq 0, \; \forall v \in K\}.$$

Exemple 1.5.11.

- *Pour* $H = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}_+$, *on a* $K^* = \mathbb{R}_+$.

Proposition 1.5.12. *Soit K un cône convexe fermé non vide de H et soient u, $p \in H$. Alors*

$$K \ni \; u \perp p \in K^* \iff -p \in N_K(u) \iff -u \in N_{K^*}(p).$$

1.6 Sous-différentiel

Définition 1.6.1 (**Sous-différentiel**). *Soient H un espace de Hilbert et $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, propre et $x_0 \in dom(f)$.*
Le sous-différentiel de f au point x_0, noté $\partial f(x_0)$ est le sous-ensemble de H défini par :

$$\partial f(x_0) := \{\xi \in H : f(x) \geq f(x_0) + \langle \xi, x - x_0 \rangle \, , \; \forall x \in H\} \, .$$

- *Si $x_0 \notin dom(f)$, alors $\partial f(x_0) = \emptyset$.*
- *Les éléments de $\partial f(x_0)$ sont appelés sous-gradients de f en x_0.*

Remarque 1.6.2. *Dans le cas euclidien ($\mathbb{R}^2$) le sous-différentiel de f au point x_0 est la collection des pentes des minorantes affines située ci-dessous de graphe de f et passant par le point $(x_0, f(x_0))$.*

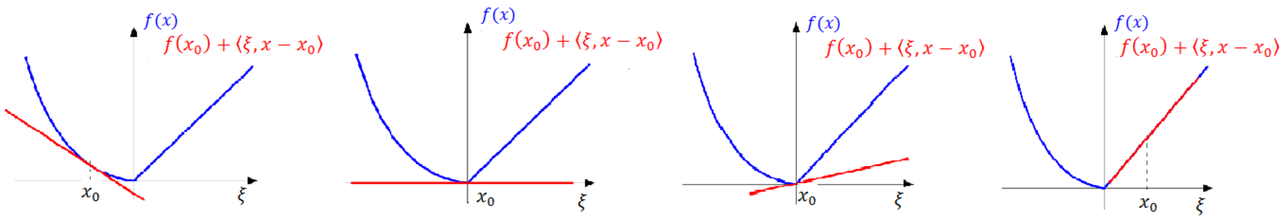


FIGURE 1.8 – Le sous différentiel .

Proposition 1.6.3. *Si $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ convexe et différentiable en x_0 alors* $\partial f(x_0) = \{\bigtriangledown f(x_0)\}$.

Exemple 1.6.4. *Considérons la fonction*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = |x| \, . \end{aligned}$$

$\partial f(0) = [-1, 1]$.
En effet,

$$\begin{aligned} \partial f(0) &= \{\xi \in \mathbb{R} : f(x) \geq f(0) + \langle \xi, x \rangle \, , \quad \forall x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\xi \in \mathbb{R} : |x| \geq x \cdot \xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\xi \in \mathbb{R} : x \cdot \xi \leq x, \; \forall x > 0\} \cap \{\xi \in \mathbb{R} : x \cdot \xi \leq -x, \; \forall x < 0\} \cap \mathbb{R} \\ &= \{\xi \in \mathbb{R} : \xi \leq 1\} \cap \{\xi \in \mathbb{R} : \xi \geq -1\} \cap \mathbb{R} \\ &= [-1, 1]. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\partial f(x_0) = \begin{cases} [-1,1], & si\, x = 0 \\ \{1\}, & si\, x_0 > 0 \\ \{-1\}, & si\, x < 0. \end{cases}$$

Théorème 1.6.5. *Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre et convexe. Soit $x_0 \in dom(f)$ Alors*

$$\partial f(x_0) = \big\{\xi \in H \text{ tel que } (\xi, -1) \in N_{epi(f)}(x_0, f(x_0))\big\}.$$

Exemple 1.6.6. *Sous-différentiel de la fonction de valeur absolue à l'origine.*

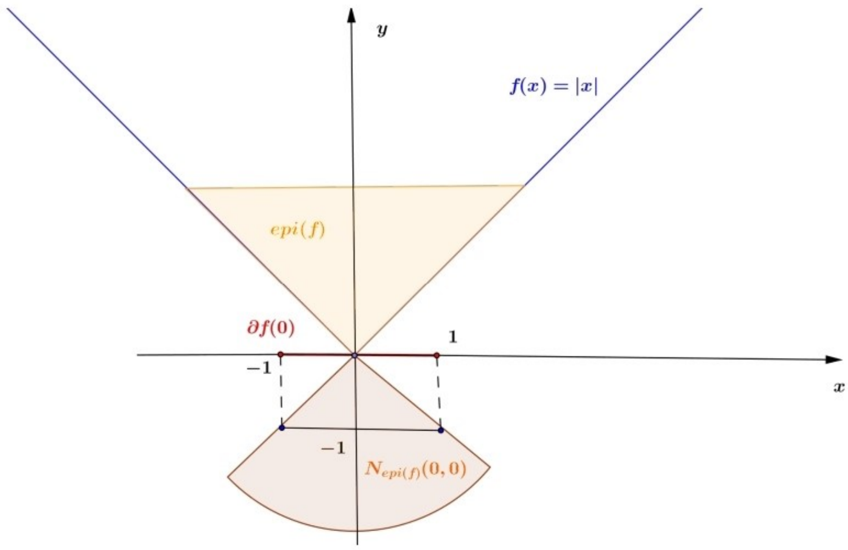


FIGURE 1.9 – Sous-différentiel de la fonction de valeur absolue à l'origine.

Proposition 1.6.7. *Pour tout sous-ensemble C convexe non vide de H avec $x_0 \in C$, le sous-différentiel de la fonction indicatrice $\delta_C(\cdot)$ coincide avec le cône normal $N_C(\cdot)$, i.e.,*

$$\partial \delta_C(x_0) = N_C(x_0).$$

Preuve. Soit $\xi \in \partial\delta_C(x_0)$, alors $\langle \xi, x - x_0\rangle \leq \delta_C(x) - \delta_C(x_0), \quad \forall x \in H$.
En particulier pour $x \in C$ on a $\langle \xi, x - x_0\rangle \leq 0 \quad, \forall x \in C$. Donc $\xi \in N_C(x_0)$.
Réciproquement, si $\xi \in N_C(x_0)$ alors $\langle \xi, x - x_0\rangle \leq 0 \quad, \forall x \in C$
Or $\langle \xi, x - x_0\rangle \leq \delta_C(x) - \delta_C(x_0) \quad, \forall x \in C$.
De plus $\langle \xi, x - x_0\rangle \leq \delta_C(x) - \delta_C(x_0) \quad, \forall x \in H \backslash C$ (puisque $\delta_C(x) = +\infty$),
donc $\xi \in \partial\delta_C(x_0)$.
D'où le résultat. ■

1.7 Opérateurs monotones

Définition 1.7.1. *Soit H un espace de Hilbert .*
L'opérateur $A : H \longrightarrow H$ est dit multivoque s'il est définit de H dans $\mathcal{P}(H)$ l'ensemble des parties de Het on écrit $A : H \rightrightarrows H$ et le domaine de A est l'ensemble

$$D(A) = \{x \in H : Ax \neq \phi\}.$$

On identifiera l'opérateur multivoque avec son graphe dans $H \times H$ défini par

$$Gr(A) = \{(x, y) \in H \times H : y \in Ax\}.$$

Exemple 1.7.2.

- *Soit C un convexe de H, alors l'opérateur cône normal $A = N_C(\cdot)$ associé à C est multivoque.*
- *Pour toute fonction convexe $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, l'opérateur sous-différentiel $A = \partial f(\cdot)$ est multivoque.*

Définition 1.7.3 (Opérateur monotone). *L'opérateur $A : H \rightrightarrows H$ est dit monotone si*

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Gr(A); \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0.$$

Proposition 1.7.4. *Soit f une fonction convexe propre sur H. Alors le sous-différentiel de f est un opérateur monotone.*

Preuve. ∂f est monotone $\Leftrightarrow \forall (x, \xi), (x^*, \xi^*) \in Gr(A)\,, \langle \xi - \xi^*, x - x^*\rangle \geq 0.$
Soient $x, x^* \in D(\partial f)$ et $\xi \in \partial f(x),\ \xi^* \in \partial f(x^*)$. Alors

$$\xi \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(y) \geq f(x) + \langle \xi, y - x\rangle\,,\ \forall\, y \in H, \tag{1.4}$$

$$\xi^* \in \partial f(x^*) \Leftrightarrow f(y) \geq f(x^*) + \langle \xi^*, y - x^*\rangle\,,\ \forall\, y \in H, \tag{1.5}$$

on particulier pour $y = x^*$ dans (1.4) et pour $y = x$ dans (1.5), on trouve

$$f(x^*) \geq f(x) + \langle \xi, x^* - x\rangle$$
$$f(x) \geq f(x^*) + \langle \xi^*, x - x^*\rangle\,.$$

En additionnant ces deux inégalités on obtient

$$\langle \xi, x^* - x\rangle + \langle \xi^*, x - x^*\rangle \leq 0, \text{ donc } \langle \xi - \xi^*, x - x^*\rangle \geq 0.$$

D'où la monotonie de ∂f. ■

Corollaire 1.7.5. *Le cône normal associé à un ensemble convexe fermé non vide C, au point $x \in C$, est monotone (résultat direct de la proposition 1.7.4 et la proposition 1.6.7).*

1.8 Fonctions absolument continues

Définition 1.8.1. *On dit qu'une fonction v de $[T_0, T]$ dans H est absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de d'intervalle $[T_0, T]$ par des intervalles disjoints $]\alpha_n, \beta_n[$ vérifiant*

$$\sum_n |\alpha_n - \beta_n| < \delta$$

on a

$$\sum_n \|v(\alpha_n) - v(\beta_n)\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.8.2. *Une fonction $v : [T_0, T] \longrightarrow H$ est absolument continue si et seulement si elle est intégrale de sa dérivée, c'est-à-dire :*

$$v(t) - v(T_0) = \int_{T_0}^{t} \dot{v}(s)ds, \quad \forall\, t \in]T_0, T[.$$

Remarque 1.8.3.

- *Toute fonction lipschitzienne est absolument continue.*
- *Toute fonction absolument continue est uniformément continue.*
- *Toute fonction absolument continue est dérivable p.p.*

Lemme 1.8.4 (Formule de Moreau). *Soit $x : [T_0, T] \longrightarrow H$ une fonction absolument continue, alors*

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = 2\langle \dot{x}(t), x(t)\rangle, \quad p.p.\ t \in [T_0, T].$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\|x(t+h)\|^2 - \|x(t)\|^2\Big)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\big\langle x(t+h), x(t+h)\big\rangle - \big\langle x(t), x(t)\big\rangle\Big)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\big\langle x(t+h) - x(t) + x(t), x(t+h)\big\rangle - \big\langle x(t), x(t)\big\rangle\Big)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\big\langle x(t+h) - x(t), x(t+h)\big\rangle + \big\langle x(t+h), x(t)\big\rangle - \big\langle x(t), x(t)\big\rangle\Big)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\big\langle x(t+h) - x(t), x(t+h)\big\rangle + \big\langle x(t+h) - x(t), x(t)\big\rangle\Big)\\
&= 2\big\langle \dot{x}(t), x(t)\big\rangle.
\end{aligned}$$

■

1.9 Inégalités de Gronwall

Lemme 1.9.1 (Inégalité de Gronwall). *Soit* $T > T_0$ *et* $a(\cdot)$, $b(\cdot) \in L^1([T_0, T], \mathbb{R})$ *avec* $b(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in [T_0, T]$. *Soit* $w : [T_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction absolument continue satisfaite :*

$$(1-\alpha)w'(t) \leq a(t)w(t) + b(t)w^{\alpha}(t), \quad p.p.\ t \in [T_0, T],$$

où $0 \leq \alpha < 1$. *Alors pour tout* $t \in [T_0, T]$, *on a*

$$w^{1-\alpha}(t) \leq w^{1-\alpha}(T_0) \exp\left(\int_{T_0}^{t} a(\tau)d\tau\right) + \int_{T_0}^{t} \exp\left(\int_{s}^{t} a(\tau)d\tau\right) b(s)ds.$$

Lemme 1.9.2. *Soit* $\rho : [T_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction absolument continue positive et soit* b_1, b_2, $a : [T_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *trois fonctions positives Lebesgue intégrables. Suppose que*

$$\dot{\rho}(t) \leq a(t) + b_1(t)\rho(t) + b_2(t) \int_{T_0}^{t} \rho(t)\, ds, \quad p.p.\ t \in [T_0, T]. \tag{1.6}$$

Alors pour tout $t \in [T_0, T]$, *on a*

$$\rho(t) \leq \rho(T_0) \exp\left(\int_{T_0}^{t} (b(\tau)+1)d\tau\right) + \int_{T_0}^{t} a(s) \exp\left(\int_{s}^{t} (b(\tau)+1)d\tau\right) ds,$$

où $\quad b(t) := \max\{b_1(t), b_2(t)\}, \quad p.p.\ t \in [T_0, T]$.

Preuve. posons $z(t) = \int_{T_0}^{t} \rho(s)\, ds$ alors $\dot{z}(t) = \rho(t)$, et $\ddot{z}(t) = \dot{\rho}(t)$.
En remplaçant dans (1.6) il vient,

$$\begin{aligned}
\ddot{z}(t) &\leq a(t) + b_1(t)\dot{z}(t) + b_2(t)z(t) \\
&\leq a(t) + \max\{b_1(t), b_2(t)\}(\dot{z}(t) + z(t)) \\
&= a(t) + b(t)w(t),
\end{aligned}$$

où $b(t) = \max\{b_1(t), b_2(t)\}$ p.p. $t \in [T_0, T]$, et $w(t) = \dot{z}(t) + z(t)$ pour tout $t \in [T_0, T]$.
Ainsi, pour p.p. $t \in [T_0, T]$

$$\dot{w}(t) = \ddot{z}(t) + \dot{z}(t),$$

et

$$\dot{w}(t) \leq a(t) + b(t)w(t) + \dot{z}(t) \leq a(t) + (b(t)+1)w(t).$$

En appliquant le Lemme de Gronwall 1.9.1 avec w, on obtient pour tout $t \in [T_0, T]$

$$w(t) \leq w(T_0) \exp\left(\int_{T_0}^{t} (b(\tau) + 1)\, d\tau \right) + \int_{T_0}^{t} a(s) \exp\left(\int_{s}^{t} (b(\tau) + 1)\, d\tau \right) ds,$$

cela donne

$$\rho(t) \leq \dot{z}(t) + z(t) = w(t) \leq \rho(T_0) \exp\left(\int_{T_0}^{t} (b(\tau) + 1)\, d\tau \right) + \int_{T_0}^{t} a(s) \exp\left(\int_{s}^{t} (b(\tau) + 1)\, d\tau \right) ds.$$

■

Lemme 1.9.3 (Inégalité différentielle de type Gronwall). *Soit $\rho : [T_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive absolument continue et soit $K_1, K_2, \varepsilon : [T_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ trois fonctions positives Lebesgue intégrables. Suppose que pour certains $\epsilon > 0$*

$$\dot{\rho}(t) \leq \varepsilon(t) + \epsilon + K_1(t)\rho(t) + K_2(t)\sqrt{\rho(t)} \int_{T_0}^{t} \sqrt{\rho(s)}\, ds, \quad \text{p.p. } t \in [T_0, T]. \tag{1.7}$$

Alors pour tout $t \in [T_0, T]$, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho(t)} \leq{}& \sqrt{\rho(T_0) + \epsilon} \exp\left(\int_{T_0}^{t} (K(s) + 1)\, ds \right) + \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} \int_{T_0}^{t} \exp\left(\int_{s}^{t} (K(\tau) + 1)\, d\tau \right) ds \\ &+ 2\left(\sqrt{\int_{T_0}^{t} \varepsilon(s)\, ds + \epsilon} - \sqrt{\epsilon} \exp\left(\int_{T_0}^{t} (K(\tau) + 1)\, d\tau \right) \right) \\ &+ 2 \int_{T_0}^{t} (K(s) + 1) \exp\left(\int_{s}^{t} (K(\tau) + 1)\, d\tau \right) \sqrt{\int_{T_0}^{s} \varepsilon(\tau)\, d\tau + \epsilon}\; ds, \end{aligned} \tag{1.8}$$

où $K(t) = \max\left\{ \frac{K_1(t)}{2}, \frac{K_2(t)}{2} \right\}$, p.p. $t \in [T_0, T]$.

Preuve.

Posons $\lambda(t) = \sqrt{\int_{T_0}^{t} \varepsilon(s)\, ds + \epsilon}$ et $z_\varepsilon(t) = \sqrt{\rho(t) + \lambda^2(t)}$ pour tout $t \in [T_0, T]$.

D'aprés (1.7) on a pour p.p. $t \in [T_0, T]$

$$\dot{\rho}(t) \leq \varepsilon(t) + \epsilon + K_1(t)(\rho(t) + \lambda^2(t)) + K_2(t)\sqrt{\rho(t) + \lambda^2(t)} \int_{T_0}^{t} \sqrt{\rho(s) + \lambda^2(s)}\, ds, \tag{1.9}$$

et
$$\dot{z}_\varepsilon(t) = \frac{\dot{\rho}(t) + 2\dot{\lambda}(t)\lambda(t)}{2\sqrt{\rho(t) + \lambda^2(t)}} = \frac{\dot{\rho}(t) + \varepsilon(t)}{2z_\varepsilon(t)},$$
ou de manière équivalente
$$\dot{\rho}(t) = 2z_\varepsilon(t)\dot{z}_\varepsilon(t) - \varepsilon(t),$$
par (1.9) on a
$$2z_\varepsilon(t)\dot{z}_\varepsilon(t) \leq 2\varepsilon(t) + \epsilon + K_1(t)z_\varepsilon(t)^2 + K_2(t)z_\varepsilon(t)\int_{T_0}^{t} z_\varepsilon(s)\,ds,$$
donc, pour p.p. $t \in [T_0, T]$ on a
$$\dot{z}_\varepsilon(t) \leq \frac{\varepsilon(t)}{z_\varepsilon(t)} + \frac{\epsilon}{2z_\varepsilon(t)} + \frac{K_1(t)}{2}z_\varepsilon(t) + \frac{K_2(t)}{2}\int_{T_0}^{t} z_\varepsilon(s)\,ds. \tag{1.10}$$
D'autre part, on note que
$$\lambda(t) = \sqrt{\int_{T_0}^{t}\varepsilon(s)\,ds + \epsilon} \leq \sqrt{\rho(t) + \int_{T_0}^{t}\varepsilon(s)\,ds + \epsilon} = \sqrt{\rho(t) + \lambda^2(t)} = z_\varepsilon(t),$$
ensuite
$$\frac{1}{z_\varepsilon(t)} \leq \frac{1}{\lambda(t)} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\varepsilon(t)}{z_\varepsilon(t)} \leq \frac{\varepsilon(t)}{\lambda(t)}. \tag{1.11}$$
On a aussi $\dot{\lambda}(t) = \dfrac{\varepsilon(t)}{2\lambda(t)}$, donc $\dfrac{\varepsilon(t)}{z_\varepsilon(t)} \leq 2\dot{\lambda}(t)$, et $\sqrt{\epsilon} \leq \sqrt{\epsilon + \int_{T_0}^{t}\varepsilon(s)\,ds} = \lambda(t) \leq z_\varepsilon(t)$,
par conséquent
$$\frac{\epsilon}{2z_\varepsilon(t)} \leq \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}. \tag{1.12}$$
les relations (1.10), (1.12), (1.11) donnent l'inégalité
$$\dot{z}_\varepsilon(t) \leq 2\dot{\lambda}(t) + \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} + \frac{1}{2}\left(K_1(t)z_\varepsilon(t) + K_2(t)\int_{T_0}^{t} z_\varepsilon(s)\,ds\right). \tag{1.13}$$
On applique le lemme de Gronwall 1.9.2 a travers (1.13) avec z_ε, on obtient pour tout $t \in [T_0, T]$
$$\begin{aligned} z_\varepsilon(t) &\leq z_\varepsilon(T_0)\exp\big(\int_{T_0}^{t}(K(\tau)+1)\,d\tau\big) + \int_{T_0}^{t}\exp\Big(\int_{s}^{t}(K(\tau)+1)\,d\tau\Big)(2\dot{\lambda}(s) + \frac{\sqrt{\epsilon}}{2})\,ds \\ &= \sqrt{\rho(T_0)+\epsilon}\exp\Big(\int_{T_0}^{t}(K(s)+1)\,ds\Big) + \int_{T_0}^{t}\exp\Big(\int_{s}^{t}(K(\tau)+1)\,d\tau\Big)(2\dot{\lambda}(s) + \frac{\sqrt{\epsilon}}{2})\,ds, \end{aligned}$$

où
$$K(t) := \max\left\{\frac{K_1(t)}{2}, \frac{K_2(t)}{2}\right\},$$
de manière équivalente
$$\begin{aligned} z_\varepsilon(t) \le \sqrt{\rho(T_0)+\epsilon}\exp\Big(\int_{T_0}^{t}(K(s)+1)\,ds\Big) + 2\int_{T_0}^{t}\exp\Big(\int_{s}^{t}(K(\tau)+1)\,d\tau\Big)\dot\lambda(s)\,ds \\ + \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}\int_{T_0}^{t}\exp\Big(\int_{s}^{t}(K(\tau)+1)\,d\tau\Big)\,ds. \end{aligned} \tag{1.14}$$
D'autre part, à partir de l'intégration par parties, on note que
$$\begin{aligned} &\int_{T_0}^{t}\exp\Big(\int_{s}^{t}(K(\tau)+1)\,d\tau\Big)\dot\lambda(s)\,ds \\ &= \left[\exp\Big(\int_{s}^{t}(K(\tau)+1)\,d\tau\Big)\lambda(s)\right]_{T_0}^{t} + \int_{T_0}^{t}(K(s)+1)\exp\Big(\int_{s}^{t}(K(\tau)+1)\,d\tau\Big)\lambda(s)\,ds \\ &= \lambda(t) - \exp\Big(\int_{T_0}^{t}(K(\tau)+1)\,d\tau\Big)\sqrt{\epsilon} + \int_{T_0}^{t}(K(s)+1)\exp\Big(\int_{s}^{t}(K(\tau)+1)\,d\tau\Big)\lambda(s)\,ds, \end{aligned}$$
combinons avec (1.14) on obtient
$$\begin{aligned} z_\varepsilon(t) \le \sqrt{\rho(T_0)+\epsilon}\,\exp\Big(\int_{T_0}^{t}(K(s)+1)\,ds\Big) + \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}\int_{T_0}^{t}\exp\Big(\int_{s}^{t}(K(\tau)+1)\,d\tau\Big)\,ds \\ + 2\lambda(t) - 2\exp\Big(\int_{T_0}^{t}(K(\tau)+1)\,d\tau\Big)\sqrt{\epsilon} + 2\int_{T_0}^{t}(K(s)+1)\exp\Big(\int_{s}^{t}(K(\tau)+1)\,d\tau\Big)\lambda(s)\,ds. \end{aligned}$$
Par conséquent, observons que $\sqrt{\rho(t)} \le \sqrt{\rho(t)+\lambda^2(t)} = z_\varepsilon(t)$ on obtient
$$\begin{aligned} \sqrt{\rho(t)} \le \sqrt{\rho(T_0)+\epsilon}\,\exp\Big(\int_{T_0}^{t}(K(s)+1)\,ds\Big) + \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}\int_{T_0}^{t}\exp\Big(\int_{s}^{t}(K(\tau)+1)\,d\tau\Big)\,ds + 2\lambda(t) \\ - 2\exp\Big(\int_{T_0}^{t}(K(\tau)+1)\,d\tau\Big)\sqrt{\epsilon} + 2\int_{T_0}^{t}(K(s)+1)\exp\Big(\int_{s}^{t}(K(\tau)+1)\,d\tau\Big)\lambda(s)\,ds. \end{aligned}$$
Comme $\lambda(t) = \sqrt{\int_{T_0}^{t}\varepsilon(s)\,ds + \epsilon}$, on obtient (1.8).

Ce qui complète la preuve du lemme . ■

1.10 Topologie faible

Soient $(E, \|, \|)$ un espace vectoriel normé et E' son dual topologique i.e., E' l'espace des formes linéaires continues sur E muni de la norme

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |\langle f, x\rangle| \,.$$

On désigne par $\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$. Lorsque f décrit E' on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in E'}$ d'applications de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.10.1.
La ***topologie faible*** $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$ *sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications* $(\varphi_f)_{f \in E'}$.

- *La topologie associée à la norme* $\|.\|$*est dite topologie forte sur E.*
- *La topologie* $\sigma(E, E')$ *est dite topologie faible sur E.*

Définition 1.10.2.
Soit $(x_n)_n$ *une suite de* E*. On dit que* x_n *converge faiblement vers* $x \in E$*, et on note* $x_n \rightharpoonup x$ *(ou* $x_n \rightharpoonup x$ *pour* $\sigma(E, E')$*) si et seulement si*

$$\langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle \quad , \forall f \in E'.$$

Remarque 1.10.3.
Si E est un espace de Hilbert donc on peut identifier E' *par* E*, alors*
$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \langle y, x_n\rangle \longrightarrow \langle y, x\rangle \quad , \forall y \in E$.
où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *est le produit scalaire de* E*.*

Proposition 1.10.4.
Soit $(x_n)_n$ *une suite de* E*. on a*

Si $x_n \longrightarrow x$ *fortement, alors* $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(E, E')$*.*

Proposition 1.10.5.
Soit $(x_n)_n$ *une suite de* E*. on a*

1. *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(E, E')$*, alors* $\|x_n\|$ *est bornée.*
2. *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(E, E')$ *et si* $f_n \longrightarrow f$ *fortement dans* E'*, alors* $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$ *fortement.*

1.11 Quelques résultats de convergence

Théorème 1.11.1 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue). .
Soit $1 \leq p < +\infty$ *et* $f_n \subset L^p([T_0, T], H)$. *On suppose que*

1. $f_n \longrightarrow f$ *p.p.sur* $[T_0, T]$.
2. *il existe une fonction* $g(\cdot) \in L^p([T_0, T], H)$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n(t)\| \leq g(t) \text{ p.p. } t \in [T_0, T].$$

Alors $f(\cdot) \in L^p([T_0, T], H)$ *et la suite*$(f_n)_n$ *converge vers* f *dans* $L^p([T_0, T], H)$.
En particulier, dans le cas $p = 1$,

$$\int_{T_0}^{T} f_n dt \longrightarrow \int_{T_0}^{T} f dt.$$

Lemme 1.11.2 (Lemme de Mazur). .
Soit E *un espace de Banach. Soit* $(x_n) \subset E$ *et* $x \in E$ *tel que* $x_n \longrightarrow x$ *faiblement dans* E *.Alors*

1. $x \in \overline{co}\{x_k, k \geq n\}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
2. *Il existe* $(y_n)_n \subset E$ *telle que* $y_n \in co\{x_k; k \geq n\}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$
   et $y_n \longrightarrow x$ *fortement dans* E.

Théorème 1.11.3.
Soit $1 \leq p < \infty$ *et soit* $(f_n)_n \subset L^p([T_0, T], H)$ *une suite convergent vers une fonction* $f \in L^p([T_0, T], H)$ *pour la norme de* $L^p([T_0, T], H)$. *Alors, il existe une sous suite* $(f_{nk})_k$ *convergent vers* f *p.p sur* $[T_0, T]$.*i.e.,*

$$(f_{nk})_k \longrightarrow f(x) \, p.p. \; sur [T_0, T].$$

Théorème 1.11.4.
Soit H *un espace de Hilbet. Soit* $\psi(\cdot) \in L^1([T_0, T], H)$ *alors l 'ensemble*

$$A := \left\{ x(\cdot) \in L^1([T_0, T], H) : \|x(t)\| \leq \psi(t), p.p. \;\; sur \; [T_0, T] \right\}$$

est faiblement relativement compacte dans $L^1([T_0, T], H)$

Chapitre 2

Le caractère bien posé pour un processus de rafle intégro-différentiel

Ce chapitre est consacré à étudier un résultat d'existence, d'unicité et de stabilité pour un problème d'évolution non linéaire du premier ordre avec la somme de deux perturbations dépendant du temps et de l'état de la forme :

$$(P_{f_1,f_2}) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + f_1(t,x(t)) + \int\limits_{T_0}^{t} f_2(t,s,x(s))ds \qquad \text{p.p. } t \in [T_0,T], \\ x(T_0) = x_0 \in C(T_0). \end{cases}$$

Notre étude est menée dans un espace de Hilbert H, avec

• la variable d'etat x appartient a H et $C(t) \subset H$ ensemble convexe.

• $f_1 : [T_0,T] \times H \longrightarrow H$ une fonction mesurable sur $[T_0,T]$ et lipschitzienne sur H.

• $f_2 : [T_0,T] \times [T_0,T] \times H \longrightarrow H$ une fonction mesurable, intégrable sur $[T_0,T]$ et lipschitzienne sur H.

Dans ce chapitre on s'intéresse au caractère bien posé pour un processus de rafle intégro-différentiel (le problème (P_{f_1,f_2})).

Avant de présenter ces résultats, on donne la liste des hypothèses que l'on va utiliser pour la démonstration du théorème principal .

2.1 Hypothèses technique

($\mathcal{H}_1$) Pour tout $t \in [T_0, T]$, $C(t)$ est un sous-ensemble convexe fermé non vide de H et bouge d'une façon absolument continue. C'est-à-dire, qu'il existe une fonction absolument continue $\upsilon : [T_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$C(t) \subset C(s) + |\upsilon(t) - \upsilon(s)|\mathbb{B}_H, \quad \forall\, t, s \in [T_0, T],$$

équivalant à

$$|d_{C(s)}(y) - d_{C(t)}(y)| \leq |\upsilon(s) - \upsilon(t)|, \quad \forall\, t, s \in [T_0, T],\ \forall y \in\ H.$$

($\mathcal{H}_2$) $f_1 : [T_0, T] \times H \longrightarrow H$ est Lebesgue mesurable par rapport au temps (i.e., $f(\cdot, x)$ est mesurable pour tout $x \in H$), et vérifiant

($\mathcal{H}_{2,1}$) il existe une fonction positive $\beta_1(\cdot) \in L^1([T_0, T], \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\|f_1(t, x)\| \leq \beta_1(t)(1 + \|x\|), \ \text{ pour tout } \ t \in [T_0, T] \text{ et pour tout } \ x \in \bigcup_{t \in [T_0, T]} C(t),$$

($\mathcal{H}_{2,2}$) pour chaque $\eta > 0$ il existe une fonction positive $L_1^\eta(\cdot) \in L^1([T_0, T], \mathbb{R}_+)$ telle que pour tout $t \in [T_0, T]$ et pour tout$(x, y) \in B[0, \eta] \times B[0, \eta]$.

$$\|f_1(t, x) - f_1(t, y)\| \leq L_1^\eta(t)\|x - y\|.$$

($\mathcal{H}_3$) $f_2 : Q_\Delta \times H \longrightarrow H$ est une application mesurable telle que

($\mathcal{H}_{3,1}$) il existe une fonction positive $\beta_2(\cdot, \cdot) \in L^1(Q_\Delta, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\|f_2(t, s, x)\| \leq \beta_2(t, s)(1 + \|x\|), \ \text{ pour tout } \ (t, s) \in Q_\Delta \text{ et pour tout } \ x \in \bigcup_{t \in [T_0, T]} C(t),$$

($\mathcal{H}_{3,2}$) pour chaque $\eta > 0$ il existe une fonction positive $L_2^\eta(\cdot) \in L^1([T_0, T], \mathbb{R}_+)$ telle que pour tout $(t, s) \in Q_\Delta$ et pour tout $(x, y) \in B[0, \eta] \times B[0, \eta]$,

$$\|f_2(t, s, x) - f_2(t, s, y)\| \leq L_2^\eta(t)\|x - y\|,$$

où

$$Q_\Delta := \{(t, s) \in [T_0, T] \times [T_0, T] : s \leq t\}.$$

2.2 Résultat d'existence et d'unicité

Dans cette section nous allons aborder la question d'existence et d'unicité de solution pour le problème d'évolution non linéaire (P_{f_1,f_2}).

Proposition 2.2.1. *Soit H un espace de Hilbert réel, supposons que $C(\cdot)$ satisfait $(\mathcal{H}_1)$. Soit $h : [T_0,T]$ une application a valeur unique dans $L^1([T_0,T],H)$. Alors pour tout $x_0 \in C(T_0)$ il existe une unique solution absolument continue $x(.)$ pour l'inclusion différentielle suivante*

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + h(t) \ p.p. \ \ t \in [T_0,T]\,, \\ x(T_0) = x_0. \end{cases}$$

De plus $x(\cdot)$ satisfait l'inégalité suivante

$$\|\dot{x}(t) + h(t)\| \leq \|h(t)\| + |\dot{v}(t)| \ \ p.p. \ t \in [T_0,T]\,. \tag{2.1}$$

Théorème 2.2.2. *Soit H un espace de Hilbert réel. Supposons que les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$, et $(\mathcal{H}_3)$ sont satisfaites. Alors pour toute condition initiale $x_0 \in H$, avec $x_0 \in C(T_0)$ l'inclusion différentielle (P_{f_1,f_2}) admet une unique solution absolument continue $x : [T_0,T] \longrightarrow H$. De plus, cette solution vérifie les inégalités suivantes*

1. *Pour p.p. $t \in [T_0,T]$*

$$\|\dot{x}(t)+f_1(t,x(t))+\int_{T_0}^{t} f_2(t,s,x(s))\,ds\| \leq |\dot{v}(t)|+\|f_1(t,x(t))\|+\int_{T_0}^{t} \|f_2(t,s,x(s))\|\,ds. \tag{2.2}$$

2. *Si $\int_{T_0}^{T} \Big[\beta_1(\tau) + \int_{T_0}^{\tau} \beta_2(\tau,s)\,ds\Big] d\tau < \frac{1}{4}$, on a*

$$\|f_1(t,x(t))\| \leq (1+M)\beta_1(t), \ \ pour\ tout\ \ t \in [T_0,T], \tag{2.3}$$

$$\|f_2(t,s,x(s))\| \leq (1+M)\beta_2(t,s), \ \ pour\ tout\ \ (t,s) \in Q_\Delta, \tag{2.4}$$

et pour presque tout $t \in [T_0,T]$

$$\left\|\dot{x}(t) + f_1(t,x(t)) + \int_{T_0}^{t} f_2(t,s,x(s))\,ds\right\| \leq (1+M)\Big(\beta_1(t) + \int_{T_0}^{t} \beta_2(t,s)\,ds\Big) + |\dot{v}(t)|, \tag{2.5}$$

où

$$M := 2\Big(\ \|x_0\| + \int_{T_0}^{T} |\dot{v}(\tau)|\,d\tau + \frac{1}{2}\Big).$$

3. *Supposons l'hypothèse* $(\mathcal{H}_{3,1})$ *sur la fonction* f_2 *est remplacé par l'hypothèse suivante :*
   $(\mathcal{H}'_{3,1})$ *: il existe des fonctions positives* $\alpha(\cdot) \in L^1([T_0, T], \mathbb{R}_+)$ *et* $g(\cdot) \in L^1(Q_\Delta, \mathbb{R}_+)$ *telles que*
$$\|f_2(t, s, x)\| \leq g(t, s) + \alpha(t)\|x\|, \text{ pour tout } (t, s) \in Q_\Delta \text{ et tout } x \in \bigcup_{t \in [T_0, T]} C(t).$$
   Alors nous obtenons
$$\|x(t)\| \leq \widetilde{M}, \text{ pour tout } t \in [T_0, T], \tag{2.6}$$
$$\|f_1(t, x(t))\| \leq (1 + \widetilde{M})\beta_1(t), \text{ pour tout } t \in [T_0, T], \tag{2.7}$$
$$\|f_2(t, s, x(s))\| \leq g(t, s) + \alpha(t)\widetilde{M}, \text{ pour tout } (t, s) \in Q_\Delta, \tag{2.8}$$
   et pour presque tout $t \in [T_0, T]$
$$\|\dot{x}(t) + f_1(t, x(t)) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s))\, ds\| \leq |\dot{v}(t)| + (1 + \widetilde{M})\beta_1(t) + \int_{T_0}^{t} g(t, s)\, ds + T\alpha(t)\widetilde{M}, \tag{2.9}$$
   où
$$\begin{aligned}\widetilde{M} :&= \exp\left(\int_{T_0}^{T} (b(\tau) + 1)\, d\tau\right) \int_{T_0}^{T} \left(|\dot{v}(s)| + 2\beta_1(s) + 2\int_{T_0}^{T} g(s, \tau)\, d\tau\right) ds \\ &+ \|x_0\| \exp\left(\int_{T_0}^{T} (b(\tau) + 1)\, d\tau\right),\end{aligned}$$
   et
$$b(t) := 2\max\{\beta_1(t), \alpha(t)\} \text{ pour tout } t \in [T_0, T].$$

Dans notre approche et pour prouver l'existence de solution pour le problème perturbé (P_{f_1,f_2}), on utilisera la méthode de discrétisation i.e., on va construire une suite des solution approchées $x_n : [T_0, T] \longrightarrow H$ via une discrétisation de l'intervalle $[T_0, T]$ et on montrera que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergera vers $x : [T_0, T] \longrightarrow H$ qui est une solution de problème (P_{f_1,f_2}).

Preuve.
On commence par l'existence de la solution.

I- Existence
La preuve de l'existence de la solution sera établie à travers sept étapes.

Étape 1. Discrétisation de l'intervalle $I := [T_0, T]$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on subdivise l'intervalle $[T_0, T]$ en n intervalles de même longueur $h = \frac{T-T_0}{n}$ (cette subdivision est appelée subdivision uniforme), et on définit pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$

$$\begin{cases} t_{k+1}^n := t_k^n + h = T_0 + kh, \\ t_0^n := T_0, \ t_n^n := T, \\ I_k^n := \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right], \end{cases} \tag{2.10}$$

telle que

$$T_0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_k^n < t_{k+1}^n < \cdots < t_n^n = T. \tag{2.11}$$

Étape 2. Construction de la suite des solutions approchées $x_n(\cdot)$.

Nous allons construire une suite de fonctions $(x_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}(I, H)$ qui converge uniformément vers une solution $x(\cdot)$ de (P_{f_1,f_2}).

Notre méthode consiste à établir une suite de solutions discrètes $(x_k^n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ dans chaque sous intervalle $I_k^n := [t_k^n, t_{k+1}^n](0 \leq k \leq n-1)$ en utilisant la Proposition 2.2.1 (autrement dit la Proposition 2.2.1 assure l'existence de la suite $(x_k^n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$, et donc l'algorithme est bien défini). En effet, nous procédons comme suit.

Considérons le problème suivant

$$(P_0) : \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + f_1(t, x_0) + \int\limits_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_0)\, ds \quad \text{p.p.} \ \ t \in [T_0, t_1^n], \\ x(T_0) = x_0. \end{cases}$$

Alors (P_0) est un processus de rafle perturbé dont la perturbation ne dépend que du temps.

Soit $h_0 : [T_0, t_1^n] \to H$ défini par

$$h_0(t) := f_1(t, x_0) + \int\limits_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_0)\, ds \text{ pour tout } t \in [T_0, t_1^n].$$

h_0 est la somme de deux applications mesurables donc elle est mesurable.

Par suite,

$$\begin{aligned} \|h_0(t)\| &= \|f_1(t, x_0) + \int\limits_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_0)\, ds\| \\ &\leq \|f_1(t, x_0)\| + \|\int\limits_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_0)\, ds\| \end{aligned}$$

$$\|h_0(t)\| \leq \|f_1(t, x_0)\| + \int_{T_0}^{t} \|f_2(t, s, x_0)\| ds.$$

En utilisant les conditions de croissances $(\mathcal{H}_{2,1})$ et $(\mathcal{H}_{3,1})$, on aura

$$\|h_0(t)\| \leq (1 + \|x_0\|)\beta_1(t) + (1 + \|x_0\|) \int_{T_0}^{t} \beta_2(t, s) ds.$$

Par intégration sur $[T_0, t_1^n]$, on obtient

$$\int_{T_0}^{t_1^n} \|h_0(t)\| dt \leq \int_{T_0}^{T} \|h_0(t)\| dt \leq (1 + \|x_0\|) \int_{T_0}^{T} \beta_1(t) dt + (1 + \|x_0\|) \int_{T_0}^{T} \int_{T_0}^{t} \beta_2(t, s) ds\, dt,$$

et comme $\beta_1(\cdot) \in L^1([T_0, T], \mathbb{R}_+)$ et $\beta_2(\cdot, \cdot) \in L^1(Q_\Delta, \mathbb{R}_+)$, alors $h_0(\cdot)$ est une fonction intégrable donc, $h_0(\cdot) \in L^1([T_0, t_1^n], H)$. Par conséquent, par la Proposition 2.2.1 l'inclusion différentielle (P_0) a une solution absolument continue unique notée par

$$x_0^n(\cdot) : [T_0, t_1^n] \longrightarrow H, \tag{2.12}$$

satisfaisant l'inégalité suivante

$$\left\| \dot{x}_0^n(t) + f_1(t, x_0) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_0)\, ds \right\| \leq \left\| f_1(t, x_0) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_0)\, ds \right\| + |\dot{v}(t)| \tag{2.13}$$

p.p $t \in [T_0, t_1^n]$.

Considérons ensuite le problème suivant

$$(P_1) : \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + f_1(t, x_0^n(t_1^n)) + \int_{T_0}^{t_1^n} f_2(t, s, x_0)\, ds + \int_{t_1^n}^{t} f_2(t, s, x_0^n(t_1^n))\, ds \\ \quad \text{p.p. } t \in [t_1^n, t_2^n], \\ x(t_1^n) = x_0^n(t_1^n). \end{cases} \tag{2.14}$$

(P_1) est un processus de rafle perturbé dont la perturbation ne dépend que du temps.

Soit $h_1 : [t_1^n, t_2^n] \to H$ définit par

$$h_1(t) := f_1(t, x_0^n(t_1^n)) + \int_{T_0}^{t_1^n} f_2(t, s, x_0)\, ds + \int_{t_1^n}^{t} f_2(t, s, x_0^n(t_1^n))\, ds \text{ pour tout } t \in [t_1^n, t_2^n].$$

h_1 est la somme des applications mesurables donc elle est mesurable.

Par suite,

$$\begin{aligned}\|h_1(t)\| &= \|f_1(t, x_0^n(t_1^n)) + \int_{T_0}^{t_1^n} f_2(t,s,x_0)\,ds + \int_{t_1^n}^{t} f_2(t,s,x_0^n(t_1^n))\,ds\| \\ &\leq \|f_1(t, x_0^n(t_1^n))\| + \int_{T_0}^{t_1^n} \|f_2(t,s,x_0)\,\|ds + \int_{t_1^n}^{t} \|f_2(t,s,x_0^n(t_1^n))\,\|ds\end{aligned}$$

En utilisant les conditions de croissances $(\mathcal{H}_{2,1})$ et $(\mathcal{H}_{3,1})$ nous obtenons

$$\|h_1(t)\| \leq (1+\|x_0^n(t_1^n)\|)\beta_1(t) + (1+\|x_0\|)\int_{T_0}^{t_1^n} \beta_2(t,s)ds\,dt + (1+\|x_0^n(t_1^n)\|)\int_{t_1^n}^{t} \beta_2(t,s)ds$$

Par intégration sur $[t_1^n, t_2^n]$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{t_1^n}^{t_2^n} \|h_0(t)\|dt \leq \int_{T_0}^{T} \|h_1(t)\|dt &\leq (1+\|x_0^n(t_1^n)\|)\int_{T_0}^{T} \beta_1(t)dt + (1+\|x_0\|)\int_{T_0}^{T}\int_{T_0}^{t_1^n} \beta_2(t,s)ds\,dt \\ &+ (1+\|x_0^n(t_1^n)\|)\int_{T_0}^{T}\int_{t_1^n}^{t} \beta_2(t,s)ds\,dt \\ &\leq (1+\|x_0^n(t_1^n)\|)\int_{T_0}^{T} \beta_1(t)dt + \int_{T_0}^{T}\left(\int_{T_0}^{t_1^n} \beta_2(t,s)ds\ + \int_{t_1^n}^{t} \beta_2(t,s)ds\right)dt \\ &+ (\max\{\|x_0^n(t_1^n)\|, \|x_0\|\})\int_{T_0}^{T}\left(\int_{T_0}^{t_1^n} \beta_2(t,s)ds\ + \int_{t_1^n}^{t} \beta_2(t,s)ds\right)dt \\ &\leq (1+\|x_0^n(t_1^n)\|)\int_{T_0}^{T} \beta_1(t)dt + \int_{T_0}^{T}\int_{T_0}^{t} \beta_2(t,s)ds\,dt \\ &+ (\max\{\|x_0^n(t_1^n)\|, \|x_0\|\})\left(\int_{T_0}^{T}\int_{T_0}^{t} \beta_2(t,s)ds\,dt\right) \\ &\leq (1+\|x_0^n(t_1^n)\|)\int_{T_0}^{T} \beta_1(t)dt + (1+\max\{\|x_0^n(t_1^n)\|, \|x_0\|\})\left(\int_{T_0}^{T}\int_{T_0}^{t} \beta_2(t,s)ds\,dt\right),\end{aligned}$$

d'ou

$$\int_{t_1^n}^{t_2^n} \|h_1(t)\|dt \leq (1+\max\{\|x_0^n(t_1^n)\|, \|x_0\|\})\left(\int_{T_0}^{T} \beta_1(t)dt + \int_{T_0}^{T}\int_{T_0}^{t} \beta_2(t,s)ds\,dt\right).$$

On sait du problème (P_0) ci-dessus que l'application $x_0^n(\cdot)$ est absolument continue, en particulier bornée sur $[T_0, T]$. De plus, puisque $\beta_1(\cdot) \in L^1([T_0, T], \mathbb{R}_+)$ et $\beta_2(\cdot, \cdot) \in L^1(Q_\Delta, \mathbb{R}_+)$, alors $h_1(\cdot)$ est une fonction intégrable donc, $h_1(\cdot) \in L^1([t_1^n, t_2^n], H)$. Les mêmes arguments que ci-dessus montrent que (P_1) admet une solution absolument continue unique notée par

$$x_1^n(\cdot) : [t_1^n, t_2^n] \longrightarrow H, \tag{2.15}$$

satisfaisant l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
&\left\| \dot{x}_1^n(t) + f_1(t, x_0^n(t_1^n)) + \int_{T_0}^{t_1^n} f_2(t, s, x_0)\, ds + \int_{t_1^n}^{t} f_2(t, s, x_0^n(t_1^n))\, ds \right\| \\
&\leq \left\| f_1(t, x_0^n(t_1^n)) + \int_{T_0}^{t_1^n} f_2(t, s, x_0)\, ds + \int_{t_1^n}^{t} f_2(t, s, x_0^n(t_1^n))\, ds \right\| + |\dot{v}(t)| \quad \text{p.p. } t \in [t_1^n, t_2^n] .
\end{aligned}$$

Successivement, pour chaque n, il existe une famille finie d'applications absolument continues $(x_k^n(\cdot))_{0 \leq k \leq n-1}$ et pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$

$$x_k^n(\cdot) : \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right] \longrightarrow H, \tag{2.16}$$

tel que

$$(P_k) : \begin{cases}
-\dot{x}_k^n(t) \in N_{C(t)}(x_k^n(t)) + f_1(t, x_{k-1}^n(t_k^n)) + \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f_2(t, s, x_{j-1}^n(t_j^n))\, ds \\
+ \displaystyle\int_{t_k^n}^{t} f_2(t, s, x_{k-1}^n(t_k^n))\, ds \quad \text{p.p. } t \in \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right], \\
x_k^n(t_k^n) = x_{k-1}^n(t_k^n),
\end{cases} \tag{2.17}$$

lorsque $k = 0$ on pose $x_{-1}^n(T_0) := x_0$.
De plus, pour p.p. $t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]$ on a

$$\begin{aligned}
&\left\| \dot{x}_k^n(t) + f_1(t, x_{k-1}^n(t_k^n)) + \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f_2(t, s, x_{j-1}^n(t_j^n))\, ds + \int_{t_k^n}^{t} f_2(t, s, x_{k-1}^n(t_k^n))\, ds \right\| \\
&\leq \left\| f_1(t, x_{k-1}^n(t_k^n)) + \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f_2(t, s, x_{j-1}^n(t_j^n))\, ds + \int_{t_k^n}^{t} f_2(t, s, x_{k-1}^n(t_k^n))\, ds \right\| + |\dot{v}(t)|.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ on définit $h_k : [t_k^n, t_{k+1}^n] \to H$ par

$$h_k(t) := f_1(t, x_{k-1}^n(t_k^n)) + \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f_2(t, s, x_{j-1}^n(t_j^n))\, ds + \int_{t_k^n}^{t} f_2(t, s, x_{k-1}^n(t_k^n))\, ds,$$

pour tout $t \in \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right]$. Par la linéarité d'intégrale et les conditions de croissances $(\mathcal{H}_{2,1})$, $(\mathcal{H}_{3,1})$ on a

$$\begin{aligned}
\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \|h_k(t)\| dt &\leq \int_{T_0}^{T} \|h_k(t)\| dt \\
&\leq \int_{T_0}^{T} \|f_1(t, x_{k-1}^n(t_k^n))\| dt + \sum_{j=0}^{k-1} \int_{T_0}^{T} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} \|f_2(t, s, x_{j-1}^n(t_j^n))\|\, ds\, dt \\
&+ \int_{T_0}^{T} \int_{t_k^n}^{t} \|f_2(t, s, x_{k-1}^n(t_k^n))\|\, ds\, dt \\
&\leq (1 + \|x_{k-1}^n(t_k^n)\|) \int_{T_0}^{T} \beta_1(t) dt + \sum_{j=0}^{k-1} (1 + \|x_{j-1}^n(t_j^n)\|) \int_{T_0}^{T} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} \beta_2(t, s) ds\, dt \\
&+ (1 + \|x_{k-1}^n(t_k^n)\|) \int_{T_0}^{T} \int_{t_k^n}^{t} \beta_2(t, s) ds\, dt \\
&\leq (1 + \max_{0 \leq j \leq k} \left\|x_{j-1}^n(t_j^n)\right\|) \Big(\int_{T_0}^{T} \beta_1(t) dt + \int_{T_0}^{T} \int_{T_0}^{t} \beta_2(t, s) ds\, dt \Big).
\end{aligned}$$

On sait du problèmes $(P_j)_{0 \leq j \leq k}$ ci-dessus que l'application $x_{k-1}^n(\cdot)$ est absolument continue, donc on particulier bornée sur $[T_0, T]$. De plus, comme $\beta_1(\cdot) \in L^1([T_0, T], \mathbb{R}_+)$ et $\beta_2(\cdot, \cdot) \in L^1(Q_\Delta, \mathbb{R}_+)$, alors $h_k(\cdot)$ est une application intégrable donc $h_k(\cdot) \in L^1([t_k^n, t_{k+1}^n], H)$.

Maintenant, nous utilisons la suite discrète $(x_k^n(.))$ pour construire la suite de fonctions $(x_n(\cdot))_n$ de $[T_0, T]$ à H en prenant sa restriction sur chaque intervalle $I_k^n := [t_k^n, t_{k+1}^n]$ comme suite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x_n(\cdot) : [T_0, T] \longrightarrow H,$$

tel que

$$x_n(t) := x_k^n(t), \text{ si } t \in \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right], k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}. \tag{2.19}$$

Il est clair d'après cette définition que $x_n(\cdot)$ est absolument continue.

Par ailleurs, soit $\theta_n(\cdot) : [T_0, T] \longrightarrow [T_0, T]$ la fonction définie par

$$\begin{cases} \theta_n(T_0) := T_0, \\ \theta_n(t) := t_k^n, \text{ si } t \in \left]t_k^n, t_{k+1}^n\right]. \end{cases} \tag{2.20}$$

On obtient par (2.17), (2.18), (2.19) et (2.20), que

$$\begin{cases} -\dot{x}_n(t) \in N_{C(t)}(x_n(t)) + f_1(t, x_n(\theta_n(t))) + \int\limits_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_n(\theta_n(s)))\, ds \ \text{ p.p. } t \in [T_0, T], \\ \\ x_n(T_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.21}$$

et p.p. $t \in [T_0, T]$ on a

$$\begin{aligned} &\left\| \dot{x}_n(t) + f_1(t, x_n(\theta_n(t))) + \int\limits_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_n(\theta_n(s)))\, ds \right\| \\ &\leq \left\| f_1(t, x_n(\theta_n(t))) + \int\limits_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_n(\theta_n(s)))\, ds \right\| + |\dot{v}(t)|. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Étape 3. Montrons que la suite $(\dot{x}_n(\cdot))$ est uniformément dominée par une fonction intégrable.

Comme $\beta_1(\cdot) \in L^1([T_0, T], \mathbb{R}_+)$ et $\beta_2(\cdot, \cdot) \in L^1(Q_\Delta, \mathbb{R}_+)$ nous supposons sans perte de généralité que

$$\int\limits_{T_0}^{T} \left[\beta_1(\tau) + \int\limits_{T_0}^{\tau} \beta_2(\tau, s)\, ds \right] d\tau < \frac{1}{4}. \tag{2.23}$$

Par construction, on a pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$ et pour p.p. $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$

$$\begin{aligned} &\left\| \dot{x}_n(t) + f_1(t, x_n(t_i^n)) + \sum_{j=0}^{i-1} \int\limits_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f_2(t, s, x_n(t_j^n))\, ds + \int\limits_{t_i^n}^{t} f_2(t, s, x_n(t_i^n))\, ds \right\| \\ &\leq \left\| f_1(t, x_n(t_i^n)) + \sum_{j=0}^{i-1} \int\limits_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f_2(t, s, x_n(t_j^n))\, ds + \int\limits_{t_i^n}^{t} f_2(t, s, x_n(t_i^n))\, ds \right\| + |\dot{v}(t)|. \end{aligned} \tag{2.24}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_n(t)\| &= \Bigg\| \dot{x}_n(t) + f_1(t, x_n(t_i^n)) + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f_2(t, s, x_n(t_j^n))\, ds + \int_{t_i^n}^{t} f_2(t, s, x_n(t_i^n))\, ds \\
&\quad - f_1(t, x_n(t_i^n)) - \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f_2(t, s, x_n(t_j^n))\, ds - \int_{t_i^n}^{t} f_2(t, s, x_n(t_i^n))\, ds \Bigg\| \\
&\le \Bigg\| \dot{x}_n(t) + f_1(t, x_n(t_i^n)) + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f_2(t, s, x_n(t_j^n))\, ds + \int_{t_i^n}^{t} f_2(t, s, x_n(t_i^n))\, ds \Bigg\| \\
&\quad + \Bigg\| f_1(t, x_n(t_i^n)) + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f_2(t, s, x_n(t_j^n))\, ds + \int_{t_i^n}^{t} f_2(t, s, x_n(t_i^n))\, ds \Bigg\|.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité (2.24) on obtient

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_n(t)\| &\le 2 \Bigg\| f_1(t, x_n(t_i^n)) + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f_2(t, s, x_n(t_j^n))\, ds + \int_{t_i^n}^{t} f_2(t, s, x_n(t_i^n))\, ds \Bigg\| + |\dot{v}(t)| \\
&\le 2 \left\| f_1(t, x_n(t_i^n)) \right\| + 2 \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} \left\| f_2(t, s, x_n(t_j^n)) \right\| \, ds + 2 \int_{t_i^n}^{t} \left\| f_2(t, s, x_n(t_i^n)) \right\| \, ds + |\dot{v}(t)|.
\end{aligned}$$

En utilisant les conditions de croissances $(\mathcal{H}_{2,1})$, $(\mathcal{H}_{3,1})$ on trouve

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_n(t)\| &\le 2(1 + \|x_n(t_i^n)\|)\beta_1(t) + 2 \sum_{j=0}^{i-1} (1 + \|x_n(t_j^n)\| \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} \beta_2(t, s)\, ds \\
&\quad + 2(1 + \|x_n(t_i^n)\|) \int_{t_i^n}^{t} \beta_2(t, s)\, ds + |\dot{v}(t)| \\
&\le 2(1 + \max_{0 \le k \le n} \|x_n(t_k^n)\|)\beta_1(t) + 2(1 + \max_{0 \le k \le n} \|x_n(t_k^n)\|) \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} \beta_2(t, s)\, ds \\
&\quad + 2(1 + \max_{0 \le k \le n} \|x_n(t_k^n)\|) \int_{t_i^n}^{t} \beta_2(t, s)\, ds + |\dot{v}(t)| \\
&= |\dot{v}(t)| + 2(1 + \max_{0 \le k \le n} \|x_n(t_k^n)\|)\beta_1(t) + 2(1 + \max_{0 \le k \le n} \|x_n(t_k^n)\|) \int_{T_0}^{t} \beta_2(t, s)\, ds.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

En utilisant encore le fait que $x_n(\cdot)$ est absolument continue, nous obtenons

$$\|x_n(t_{i+1}^n)\| - \|x_n(t_i^n)\| \leq \|x_n(t_{i+1}^n) - x_n(t_i^n)\| = \|\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \dot{x}_n(s)ds\| \leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{x}_n(s)\|ds, \tag{2.26}$$

par suite

$$\|x_n(t_{i+1}^n)\| \leq \|x_n(t_i^n)\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{x}_n(s)\|ds,$$

les relations (2.25) et (2.26) impliquent

$$\begin{aligned}\|x_n(t_{i+1}^n)\| - \|x_n(t_i^n)\| \leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{x}_n(s)\|ds &\leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} |\dot{v}(\tau)|\, d\tau + 2(1 + \max_{0\leq k\leq n} \|x_n(t_k^n)\|) \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \beta_1(\tau)\, d\tau \\ &+ 2(1 + \max_{0\leq k\leq n} \|x_n(t_k^n)\|) \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \int_{T_0}^{\tau} \beta_2(\tau, s)\, ds\, d\tau.\end{aligned}$$

D'oú

$$\begin{aligned}\|x_n(t_{i+1}^n)\| \leq \|x_n(t_i^n)\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} |\dot{v}(\tau)|\, d\tau + 2(1 + \max_{0\leq k\leq n} \|x_n(t_k^n)\|) \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \beta_1(\tau)\, d\tau \\ + 2(1 + \max_{0\leq k\leq n} \|x_n(t_k^n)\|) \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \int_{T_0}^{\tau} \beta_2(\tau, s)\, ds\, d\tau.\end{aligned}$$

Par itérations, on trouve que

$$\begin{aligned}\left\|x_n(t_{i+1}^n)\right\| \leq \|x_0\| + \sum_{k=0}^{i} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} |\dot{v}(\tau)|\, d\tau + 2(1 + \max_{0\leq j\leq n} \left\|x_n(t_j^n)\right\|) \sum_{k=0}^{i} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \beta_1(\tau)\, d\tau \\ + 2(1 + \max_{0\leq j\leq n} \left\|x_n(t_j^n)\right\|) \sum_{k=0}^{i} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \int_{T_0}^{\tau} \beta_2(\tau, s)\, ds\, d\tau.\end{aligned}$$

Cela donne l'inégalité suivant

$$\begin{aligned}\left\|x_n(t_{i+1}^n)\right\| \leq \|x_0\| + \int_{T_0}^{t_{i+1}^n} |\dot{v}(\tau)|\, d\tau + 2(1 + \max_{0\leq k\leq n} \|x_n(t_k^n)\|) \int_{T_0}^{t_{i+1}^n} \beta_1(\tau)\, d\tau \\ + 2(1 + \max_{0\leq k\leq n} \|x_n(t_k^n)\|) \int_{T_0}^{t_{i+1}^n} \int_{T_0}^{\tau} \beta_2(\tau, s)\, ds\, d\tau.\end{aligned} \tag{2.27}$$

La relation (2.27) étant vraie pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, nous avons ce qui suit

$$\max_{0\leq k\leq n} \|x_n(t_k^n)\| \leq \|x_0\| + \int_{T_0}^{T} |\dot{v}(\tau)|\, d\tau + 2(1 + \max_{0\leq k\leq n} \|x_n(t_k^n)\|) \int_{T_0}^{T} \beta_1(\tau)\, d\tau$$

$$+ 2(1 + \max_{0\leq k\leq n} \|x_n(t_k^n)\|) \int_{T_0}^{T}\int_{T_0}^{\tau} \beta_2(\tau, s)\, ds\, d\tau,$$

$$\leq \|x_0\| + \int_{T_0}^{T} |\dot{v}(\tau)|\, d\tau + 2(1 + \max_{0\leq k\leq n} \|x_n(t_k^n)\| \int_{T_0}^{T} \Big[\beta_1(\tau) + \int_{T_0}^{\tau} \beta_2(\tau, s)\, ds\Big] d\tau,$$

par (2.23) on trouve

$$\max_{0\leq k\leq n} \|x_n(t_k^n)\| \leq \|x_0\| + \int_{T_0}^{T} |\dot{v}(\tau)|\, d\tau + \frac{1}{2}(1 + \max_{0\leq k\leq n} \|x_n(t_k^n)\|),$$

implique que

$$\max_{0\leq k\leq n} \|x_n(t_k^n)\| \leq 2\big(\|x_0\| + \int_{T_0}^{T} |\dot{v}(\tau)|\, d\tau + \frac{1}{2}\big).$$

Ceci peut être réécrit comme suit

$$\max_{0\leq k\leq n} \|x_n(t_k^n)\| \leq M, \tag{2.28}$$

où $M := 2\left(\|x_0\| + \int_{T_0}^{T} |\dot{v}(\tau)|\, d\tau + \frac{1}{2}\right)$.

D'autre part, à partir des conditions de croissances de f_1, f_2 ($\mathcal{H}_{2,1}$, $\mathcal{H}_{3,1}$) et (2.28) pour tout t et pour tout n on a

$$\|f_1(t, x_n(\theta_n(t)))\| \leq \beta_1(t)(1 + \|x_n(\theta_n(t))\|) \leq (1+M)\beta_1(t) \text{ pour tout } t \in [T_0, T], \tag{2.29}$$

$$\|f_2(t, s, x_n(\theta_n(s)))\| \leq \beta_2(t, s)(1 + \|x_n(\theta_n(s))\|) \leq (1+M)\beta_2(t, s) \text{ pour tout } (t, s) \in Q_\Delta. \tag{2.30}$$

Par conséquent, les inégalités (2.22), (2.29), (2.30) impliquent que pour presque tout t

$$\big\|\dot{x}_n(t) + f_1(t, x_n(\theta_n(t))) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_n(\theta_n(s)))\, ds\big\|$$

$$\leq \big\|f_1(t, x_n(\theta_n(t)))\big\| + \int_{T_0}^{t} \big\|f_2(t, s, x_n(\theta_n(s)))\big\|\, ds + |\dot{v}(t)|$$

$$\leq (1+M)\left(\beta_1(t) + \int_{T_0}^{t} \beta_2(t, s)\, ds\right) + |\dot{v}(t)|. \tag{2.31}$$

Cela donne

$$\left\|\dot{x}_n(t) + f_1(t, x_n(\theta_n(t))) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_n(\theta_n(s)))\, ds\right\| \leq \alpha(t), \tag{2.32}$$

où

$$\alpha(t) := (1+M)\left(\beta_1(t) + \int_{T_0}^{t} \beta_2(t,s)\, ds\right) + |\dot{v}(t)|.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_n(t)\| &= \Bigg\|\dot{x}_n(t) + f_1(t, x_n(\theta_n(t))) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_n(\theta_n(s)))\, ds - f_1(t, x_n(\theta_n(t))) \\
&\quad - \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_n(\theta_n(s)))\, ds\Bigg\| \\
&\leq \left\|\dot{x}_n(t) + f_1(t, x_n(\theta_n(t))) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_n(\theta_n(s)))\, ds\right\| \\
&\quad + \left\|f_1(t, x_n(\theta_n(t))) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_n(\theta_n(s)))\, ds\right\|
\end{aligned}$$

par la relation (2.32) on trouve

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_n(t)\| &\leq \left\|f_1(t, x_n(\theta_n(t)))\right\| + \left\|\int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_n(\theta_n(s)))\, ds\right\| \\
&\quad + (1+M)\left(\beta_1(t) + \int_{T_0}^{t} \beta_2(t,s)\, ds\right) + |\dot{v}(t)|.
\end{aligned}$$

De (2.30) et (2.29), on conclut alors que

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leq 2(1+M)\left(\beta_1(t) + \int_{T_0}^{t} \beta_2(t,s)\, ds\right) + |\dot{v}(t)|.$$

Ce qui donne pour presque tout t et pour tout n

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leq \gamma(t), \tag{2.33}$$

où

$$\gamma(t) := 2(1+M)\left(\beta_1(t) + \int_{T_0}^{t} \beta_2(t,s)\, ds\right) + |\dot{v}(t)|. \tag{2.34}$$

Étape 4. Montrons la convergence de la suite $(x_n(\cdot))$.

Il suffit de montrer que $x_n(\cdot)$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $(\mathcal{C}(I,H), \|\cdot\|_\infty)$, i.e.,

$$\lim_{n,m\to+\infty} \|x_n(\cdot) - x_m(\cdot)\|_\infty = 0,$$

telle que

$$\|x_n(\cdot) - x_m(\cdot)\|_\infty = \sup_{t\in[T_0,T]} \|x_n(\cdot) - x_m(\cdot)\|.$$

Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Alors pour presque tout $t \in [T_0, T]$, on a

$$\begin{cases} -\dot{x}_n(t) - f_1(t, x_n(\theta_n(t))) - \displaystyle\int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_n(\theta_n(s)))\, ds \in N_{C(t)}(x_n(t)), \\ -\dot{x}_m(t) - f_1(t, x_m(\theta_m(t))) - \displaystyle\int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_m(\theta_m(s)))\, ds \in N_{C(t)}(x_m(t)). \end{cases} \tag{2.35}$$

En utilisant le fait que le cône normal est monotone, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\langle \dot{x}_n(t) + f_1(t, x_n(\theta_n(t))) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_n(\theta_n(s)))\, ds - \dot{x}_m(t) - f_1(t, x_m(\theta_m(t))) \\ &- \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_m(\theta_m(s)))\, ds, x_n(t) - x_m(t)\rangle \leq 0. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} &\langle \dot{x}_n(t) + f_1(t, x_n(\theta_n(t))) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_n(\theta_n(s)))\, ds - \dot{x}_m(t) - f_1(t, x_m(\theta_m(t))) \\ &- \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_m(\theta_m(s)))\, ds, x_n(t) - x_m(t)\rangle \\ &= \langle \dot{x}_n(t) - \dot{x}_m(t), x_n(t) - x_m(t)\rangle + \langle f_1(t, x_n(\theta_n(t))) - f_1(t, x_m(\theta_m(t))), x_n(t) - x_m(t)\rangle \\ &+ \left\langle \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_n(\theta_n(s)))\, ds - \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_m(\theta_m(s)))\, ds, x_n(t) - x_m(t) \right\rangle \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} &\langle \dot{x}_n(t) - \dot{x}_m(t), x_n(t) - x_m(t)\rangle \leq \langle f_1(t, x_n(\theta_n(t))) - f_1(t, x_m(\theta_m(t))), x_m(t) - x_n(t)\rangle \\ &+ \left\langle \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_n(\theta_n(s)))\, ds - \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_m(\theta_m(s)))\, ds, x_m(t) - x_n(t) \right\rangle. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.8.4 (formule de Moreau) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x_n(t)-x_m(t)\|^2 &\leq \|f_1(t,x_n(\theta_n(t)))-f_1(t,x_m(\theta_m(t)))\|\|x_m(t)-x_n(t)\| \\ &\quad + \|x_m(t)-x_n(t)\|\int_{T_0}^{t}\|f_2(t,s,x_n(\theta_n(s)))\,ds - f_2(t,s,x_m(\theta_m(s)))\|\,ds.\end{aligned} \tag{2.36}$$

D'autre part, d'après (2.33) on a

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leq \gamma(t). \tag{2.37}$$

Or $x_n(\cdot)$ est absolument continue, alors on peut écrire

$$\begin{aligned}\|x_n(t)\|-\|x_n(T_0)\| \leq \|x_n(t)-x_n(T_0)\| = \|\int_{T_0}^{t}\dot{x}_n(s)\,ds\| \leq \int_{T_0}^{t}\|\dot{x}_n(s)\|\,ds &\leq \int_{T_0}^{t}\gamma(s)\,ds \\ &\leq \int_{T_0}^{T}\gamma(s)\,ds.\end{aligned}$$

Cela implique

$$\|x_n(t)\|-\|x_n(T_0)\| \leq \int_{T_0}^{T}\gamma(s)\,ds,$$

or

$$\|x_n(t)\| \leq \|x_n(T_0)\| + \int_{T_0}^{T}\gamma(s)\,ds.$$

Par suite pour tout $t\in[T_0,T]$

$$\|x_n(t)\| \leq \eta, \tag{2.38}$$

où

$$\eta := \|x_0\| + \int_{T_0}^{T}\gamma(s)\,ds.$$

Ceci donne pour tout t et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$x_n(t)\in B[0,\eta].$$

Par conséquent

$$x_m(t)\,,x_n(\theta_n(t))\,,x_m(\theta_m(t)) \in B[0,\eta].$$

En appliquant la lipschitzité de $f_1(t,\cdot)$ et $f_2(t,s,\cdot)$ de rapport de Lipschitz $L_1^\eta(\cdot), L_2^\eta(\cdot) \in L^1(I,\mathbb{R}_+)$ sur le sous-ensemble borné $B[0,\eta]$, il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x_n(t)-x_m(t)\|^2 \\
&\leq L_1^\eta(t)\|x_n(\theta_n(t))-x_m(\theta_m(t))\|\|x_n((t))-x_m(t)\| \\
&+\|x_n(t)-x_m(t)\|\int\limits_{T_0}^{t} L_2^\eta(t)\|x_n(\theta_n(s))-x_m(\theta_m(s))\|ds \\
&= L_1^\eta(t)\|x_n((t))-x_m(t)\|\|x_n(\theta_n(t))-x_n(t)+x_n(t)-x_m(t)+x_m(t)-x_m(\theta_m(t))\| \\
&+L_2^\eta(t)\|x_n(t)-x_m(t)\|\Big(\int\limits_{T_0}^{t}\|x_n(\theta_n(s))-x_n(s)+x_n(s)-x_m(s)+x_m(t)-x_m(\theta_m(t))\|ds \\
&\leq L_1^\eta(t)\,\|x_n(t)-x_m(t)\|\,\Big(\,\|x_n(\theta_n(t))-x_n(t)\|+\|x_n(t)-x_m(t)\|+\|x_m(t)-x_m(\theta_m(t))\|\,\Big) \\
&+L_2^\eta(t)\,\|x_n(t)-x_m(t)\|\,\Big(\int\limits_{T_0}^{t}\|x_n(\theta_n(s))-x_n(s)\|\,ds+\int\limits_{T_0}^{t}\|x_n(s)-x_m(s)\|\,ds \\
&+\int\limits_{T_0}^{t}\|x_m(t)-x_m(\theta_m(t))\|\,ds\Big).
\end{aligned}
$$

Par la relation (2.33) on a

$$\|\dot{x}_n(t)\|\leq\gamma(t).$$

Or $x_n(\cdot)$ est absolument continue, alors on peut écrire

$$\|x(t)-x(\theta_n(t))\|=\left\|\int\limits_{\theta_n(t)}^{t}\dot{x}_n(s)\,ds\right\|\leq\int\limits_{\theta_n(t)}^{t}\|\dot{x}_n(s)\|\,ds\leq\int\limits_{\theta_n(t)}^{t}\gamma(s)\,ds.$$

On obtient

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|x_n(t)-x_m(t)\|^2\leq L_1^\eta(t)\,\|x_n(t)-x_m(t)\|^2 \\
&+L_1^\eta(t)\,\|x_n(t)-x_m(t)\|\,\Big(\int\limits_{\theta_n(t)}^{t}\gamma(\tau)d\tau+\int\limits_{\theta_m(t)}^{t}\gamma(\tau)d\tau\Big) \\
&+L_2^\eta(t)\,\|x_n(t)-x_m(t)\|\,\Big(\int\limits_{T_0}^{t}\int\limits_{\theta_n(s)}^{s}\gamma(\tau)d\tau\,ds+\int\limits_{T_0}^{t}\int\limits_{\theta_m(s)}^{s}\gamma(\tau)d\tau\,ds\Big) \\
&+L_2^\eta(t)\,\|x_n(t)-x_m(t)\|\int\limits_{T_0}^{t}\|x_n(s)-x_m(s)\|\,ds.
\end{aligned}
$$

De plus, par l'inégalité (2.38) on a

$$\|x_n(t) - x_m(t)\| \leq \|x_n(t)\| + \|x_m(t)\| \leq 2\eta,$$

cela donne

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x_n(t) - x_m(t)\|^2 \leq L_1^\eta(t)\|x_n(t) - x_m(t)\|^2 \\
&+ 2\eta L_1^\eta(t)\Big(\int_{\theta_n(t)}^{t}\gamma(\tau)d\tau + \int_{\theta_m(t)}^{t}\gamma(\tau)d\tau\Big) + 2\eta L_2^\eta(t)\Big(\int_{T_0}^{t}\Big[\int_{\theta_n(s)}^{s}\gamma(\tau)d\tau + \int_{\theta_m(s)}^{s}\gamma(\tau)d\tau\Big]ds\Big) \\
&+ L_2^\eta(t)\|x_n(t) - x_m(t)\|\int_{T_0}^{t}\|x_n(s) - x_m(s)\|\,ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|x_n(t) - x_m(t)\|^2 \leq 2L_1^\eta(t)\|x_n(t) - x_m(t)\|^2 + 2G_{n,m}(t) + 4\eta L_1^\eta(t)\int_{\theta_m(t)}^{t}\widetilde{G}_{n,m}(s)\,ds \\
+ 2L_2^\eta(t)\|x_n(t) - x_m(t)\|\int_{T_0}^{t}\|x_n(s) - x_m(s)\|\,ds,
\end{aligned} \tag{2.39}$$

où

$$G_{n,m}(t) := 2\eta L_1^\eta(t)\Big(\int_{\theta_n(t)}^{t}\gamma(\tau)d\tau + \int_{\theta_m(t)}^{t}\gamma(\tau)d\tau\Big), \tag{2.40}$$

et

$$\widetilde{G}_{n,m}(s) := \int_{\theta_n(s)}^{s}\gamma(\tau)d\tau + \int_{\theta_m(s)}^{s}\gamma(\tau)d\tau. \tag{2.41}$$

Comme $\gamma(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ et pour tout $t \in I$, on a

$$\theta_n(t), \theta_m(t) \longrightarrow t,$$

alors

$$\lim_{n,m\to+\infty} G_{n,m}(t) = 0, \tag{2.42}$$

et

$$\lim_{n,m\to+\infty} \widetilde{G}_{n,m}(t) = 0. \tag{2.43}$$

Par ailleurs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\theta_n(t)}^{t}\gamma(s)ds \leq \int_{T_0}^{T}\gamma(s)ds, \quad \text{et} \int_{\theta_m(t)}^{t}\gamma(s)ds \leq \int_{T_0}^{T}\gamma(s)ds. \tag{2.44}$$

Nous combinons les relation (2.40), (2.41), (2.44) on obtient

$$|G_{n,m}(t)| \leq 4\eta L_1^\eta(t) \int_{T_0}^{T} \gamma(s)ds \quad \text{et} \quad \left|\widetilde{G}_{n,m}(s)\right| \leq 2 \int_{T_0}^{T} \gamma(s)ds.$$

Donc, il résulte du théorème de convergence dominé (Théorème1.11.1), (2.42), et (2.43) que pour tout, $t \in [T_0, T]$

$$\lim_{n,m\to+\infty} \int_{T_0}^{T} G_{n,m}(t)dt = \int_{T_0}^{T} \lim_{n,m\to+\infty} G_{n,m}(t)dt = 0, \tag{2.45}$$

et

$$\lim_{n,m\to+\infty} \int_{T_0}^{T} \widetilde{G}_{n,m}(t)dt = \int_{T_0}^{T} \lim_{n,m\to+\infty} \widetilde{G}_{n,m}(t)dt = 0. \tag{2.46}$$

Une application de l'inégalité de type Gronwall (Lemme 1.9.3) à travers (2.39) avec

$$\rho(t) = \|x_n(t) - x_m(t)\|^2, K_1(t) = 2L_1^\eta(t), K_2(t) = 2L_2^\eta(t)$$
$$\varepsilon(t) := \varepsilon_{n,m}(t) = 2G_{n,m}(t) + 4\eta L_2^\eta(t) \int_{T_0}^{T} \widetilde{G}_{n,m}(s)\, ds, \epsilon > 0,$$

donne

$$\begin{aligned}
\|x_n(t) - x_m(t)\| \leq & \sqrt{\|x_n(T_0) - x_m(T_0)\|^2 + \epsilon}\, \exp\left(\int_0^t (K(s)+1)\, ds\right) \\
& + \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} \int_{T_0}^{t} \exp\left(\int_s^t (K(\tau)+1)\, d\tau\right) ds \\
& + 2\left(\sqrt{\int_{T_0}^{t} \varepsilon_{n,m}(s)\, ds + \epsilon} - \exp\left(\int_{T_0}^{t} (K(\tau)+1)\, d\tau\right)\sqrt{\epsilon}\right) \\
& + 2\int_{T_0}^{t} (K(s)+1) \exp\left(\int_s^t (K(\tau)+1)\, d\tau\right) \sqrt{\int_{T_0}^{s} \varepsilon_{n,m}(\tau)\, d\tau + \epsilon}\, ds,
\end{aligned}$$

où $K(t) := \max\left\{L_1^\eta(t), L_2^\eta(t)\right\}$ pour tout $t \in [T_0, T]$.
Il est clair que le côté droit de cette dernière inégalité tend vers 0, puisque $x_n(T_0) = x_m(T_0) = x_0$, $\lim_{n,m\to+\infty} \int_{T_0}^{t} \varepsilon_{n,m}(t) = 0$ (par (2.42) et (2.46)), et prenant $\epsilon \to 0$.
Par conséquent

$$\lim_{n,m\to+\infty} \|x_n(\cdot) - x_m(\cdot)\| = 0.$$

L'égalité ci-dessus étant vraie pour tout $t \in [T_0, T]$ il s'ensuite que

$$\lim_{n,m \to +\infty} \sup_{t \in [T_0,T]} \|x_n(\cdot) - x_m(\cdot)\| = 0,$$

par conséquent

$$\lim_{n,m \to +\infty} \|x_n(\cdot) - x_m(\cdot)\|_\infty = 0.$$

Alors, la suite $(x_n(\cdot))$ est de Cauchy dans $(\mathcal{C}([T_0, T], H), \|\cdot\|_\infty)$ et donc converge uniformément sur $[T_0, T]$ vers une fonction $x(\cdot) \in \mathcal{C}([T_0, T], H)$.

Étape 5. Montrons que $x(\cdot)$ est absolument continue.

Par (2.33), nous avons pour presque tout $t \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leq \gamma(t).$$

On peut donc extraire une sous suite de $(\dot{x}_n(\cdot))$ (on peut supposer que cette sous suite encore notée $(\dot{x}_n(\cdot))$) et qui converge faiblement dans $L^1(I, H)$ vers une fonction notée $g(\cdot) \in L^1(I, H)$. Cela équivaut à ce qui suit

$$\int_{T_0}^{T} \langle \dot{x}_n(s), h(s) \rangle \, ds \longrightarrow \int_{T_0}^{T} \langle g(s), h(s) \rangle \, ds, \forall \, h \in L^\infty(I, H).$$

Maintenant fixant $z \in H$ et en écrivant

$$\int_{T_0}^{T} \left\langle \dot{x}_n(s), z \cdot \mathbf{1}_{[T_0,t]}(s) \right\rangle ds = \int_{T_0}^{t} \langle \dot{x}_n(s), z \rangle \, ds = \langle \int_{T_0}^{t} \dot{x}_n(s) ds, z \rangle.$$

D'autre part, on a

$$\int_{T_0}^{T} \left\langle g(s), z \cdot \mathbf{1}_{[T_0,t]}(s) \right\rangle ds = \int_{T_0}^{t} \langle g(s), z \rangle \, ds = \langle \int_{T_0}^{t} g(s) ds, z \rangle.$$

D'après la convergence faible de $(\dot{x}_n(t))$, nous déduisons que

$$\int_{T_0}^{t} \dot{x}_n(s) ds \longrightarrow \int_{T_0}^{t} g(s) \, ds \text{ faiblement dans } H.$$

Cela implique que

$$x_n(T_0) + \int_{T_0}^{t} \dot{x}_n(s) ds \longrightarrow x(T_0) + \int_{T_0}^{t} g(s) \, ds \text{ faiblement dans } H.$$

En utilisant le fait que $x_n(\cdot)$ est absolument continue, on obtient

$$x_n(t) = x_n(T_0) + \int_{T_0}^{t} \dot{x}_n(s) ds \longrightarrow x(T_0) + \int_{T_0}^{t} g(s) \, ds \text{ faiblement dans } H.$$

Comme pour tout $t \in [T_0, T]$

$$x_n(t) \longrightarrow x(t) \text{ fortement dans } H.$$

Alors

$$x_n(t) \longrightarrow x(t) \text{ faiblement dans } H,$$

l'unicité de la limite résulte que

$$x(t) = x(T_0) + \int_{T_0}^{t} g(s)\, ds.$$

Par conséquent $x(\cdot)$ est absolument continue avec $\dot{x}(t) = g(t)$ pour presque par tout $t \in [T_0, T]$, cela implique que

$$\|x(t)\| - \|x(T_0)\| \leq \|x(t) - x(T_0)\| = \|\int_{T_0}^{t} \dot{x}(s)\, ds\| \leq \int_{T_0}^{t} \|\dot{x}(s)\|\, ds \leq \int_{T_0}^{t} \|g(s)\|\, ds,$$

donc

$$\|x(t)\| - \|x(T_0)\| \leq \int_{T_0}^{T} \|g(s)\|\, ds.$$

Par suite pour tout $t \in [T_0, T]$

$$\|x(t)\| \leq \widetilde{\eta} \;\text{ pour tout}\, t \in [T_0, T]\,. \tag{2.47}$$

où

$$\widetilde{\eta} := \|x_0\| + \int_{T_0}^{T} \|g(s)\|\, ds.$$

Étape 6. Montrons que $x(\cdot)$ est une solution de (P_{f_1,f_2}) sur $[T_0, T]$

Pour chaque $t \in I$, comme $\theta_n(t) \longrightarrow t$ pour tout $t \in I$ et $x_n(\cdot)$ converge uniformément vers $x(\cdot)$, alors $x_n(\theta_n(t)) \longrightarrow x(t)$. D'autre part, la continuité des fonctions $f_1(t,\cdot)$ et $f_2(t,s,\cdot)$ sur $B[0,\eta]$ assure que, pour tout $t, s \in I$,

$$f_1(t, x_n(\theta_n(t))) \longrightarrow f_1(t, x(t)) \;\text{ dans } H,$$

$$f_2(t, s, x_n(\theta_n(t))) \longrightarrow f_2(t, s, x(t)) \;\text{ dans } H.$$

Posons pour chaque $t \in [T_0, T]$

$$\begin{cases} y_n(t) := \displaystyle\int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_n(\theta_n(s)))ds \\ y(t) := \displaystyle\int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s))ds. \end{cases}$$

Nous avons montré dans l'étape 5 que $(\dot{x}_n(\cdot))_n$ converge faiblement vers $\dot{x}(\cdot)$ dans $L^1(I,H)$. De plus, par (2.38) et (2.47) on peut choisir un réel $c>0$ tel que, pour chaque n, on a $\|x_n(\theta_n(t))\| \leq c$ et $\|x(t)\| \leq c$ pour tout $t \in [T_0,T]$. Donc, par les hypothèses $(\mathcal{H}_{2,2})$ et $(\mathcal{H}_{3,2})$ il existe $L_1^c(\cdot)$ et $L_2^c(\cdot)$ dans $L^1([T_0,T],\mathbb{R}_+)$ tels que $f_1(t,\cdot)$ et $f_2(t,s,\cdot)$ sont $L_1^c(t)$-Lipschitz et $L_2^c(t)$-Lipschitz respectivement sur $B[0,c]$. Il s'ensuite que

$$\int_{T_0}^{T} \|f_1(t,x_n(\theta_n(t))) - f_1(t,x(t))\| \, dt \leq \int_{T_0}^{T} L_1^c(t) \, \|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| \, dt, \tag{2.48}$$

$$\int_{T_0}^{T} \|y_n(t) - y(t)\| \, dt \leq \int_{T_0}^{T} L_2^c(t) \int_{T_0}^{t} \|x_n(\theta_n(s)) - x(s)\| \, ds \, dt. \tag{2.49}$$

On note que pour chaque $(t,s) \in Q_\Delta$

$$L_1^c(t)\|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| \leq L_1^c(t)\Big(\|x_n(\theta_n(t))\| + \|x(t)\|\Big) \leq 2cL_1^c(t),$$

et

$$L_2^c(t)\int_{T_0}^{t} \|x_n(\theta_n(s)) - x(s)\|ds \leq 2cL_2^c(t)\int_{T_0}^{t} ds \leq 2cL_2^c(t)\int_{T_0}^{T} ds,$$

$$\Downarrow$$

$$L_2^c(t)\int_{T_0}^{t} \|x_n(\theta_n(s)) - x(s)\|ds \leq 2c(T-T_0)L_2^c(t).$$

Puis par (2.48), (2.49) et par le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$f_1(\cdot,x_n(\theta_n(\cdot))) \longrightarrow f_1(\cdot,x(\cdot)) \text{ fortement dans } L^1(I,H),$$

$$y_n(\cdot) \longrightarrow y(\cdot) \text{ fortement dans } L^1(I,H).$$

Cela implique que

$$f_1(\cdot,x_n(\theta_n(\cdot))) \longrightarrow f_1(\cdot,x(\cdot)) \text{ faiblement dans } L^1(I,H),$$

$$y_n(\cdot) \longrightarrow y(\cdot) \text{ faiblement dans } L^1(I,H).$$

Par conséquent

$$\zeta_n(\cdot) := \dot{x}_n(\cdot) + f_1(\cdot,x_n(\theta_n(\cdot))) + y_n(\cdot) \longrightarrow \zeta(\cdot) := \dot{x}(\cdot) + f_1(\cdot,x(\cdot)) + y(\cdot)$$

faiblement dans $L^1(I,H)$.

Par le lemme Mazur (Lemme 1.11.2) il existe une combinaison convexe $\sum\limits_{k=n}^{r(n)} S_{k,n}\zeta_k(\cdot)$, avec

$\sum\limits_{k=n}^{r(n)} S_{k,n} = 1$ et $S_{k,n} \in [0,1]$ pour tout k, n, $\sum\limits_{k=n}^{r(n)} S_{k,n}\zeta_k(\cdot) \longrightarrow \zeta(\cdot)$ fortement dans $L^1(I,H)$. Ainsi, par le Théorème 1.11.3 on peut extraire une sous suite, on peut supposer que $\sum\limits_{k=n}^{r(n)} S_{k,n}\zeta_k(\cdot)$ converge presque partout sur I vers une application $\zeta(\cdot)$.
De plus par (2.21) on a,

$$-\dot{x}_n(t) \in N_{C(t)}(x_n(t)) + f_1(t, x_n(\theta_n(t))) + \int_{T_0}^{t} f_2(t,s,x_n(\theta_n(s)))\, ds \quad \text{p.p. } t \in [T_0, T],$$

alors il existe un ensemble négligeable $N \subset I$ tel que pour tout $t \in I \setminus N$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$-\zeta_n(t) := -\dot{x}_n(t) - f_1(t, x_n(\theta_n(t))) - \int_{T_0}^{t} f_2(t,s,x_n(\theta_n(s)))\, ds \in N_{C(t)}(x_n(t)).$$

Fixons tout $t \in I \setminus N$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Par définition de cône normale, on a alors

$$\langle -\zeta_n(t), z - x_n(t)\rangle \leq 0 \quad \text{pour tout} \quad z \in C(t), \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}
\langle -\zeta(t), z - x(t)\rangle &= \left\langle -\zeta(t) + \sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n}\zeta_k(t) - \sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n}\zeta_k(t), z - x_k(t) + x_k(t) - x(t) \right\rangle \\
&= \left\langle -\zeta(t) + \sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n}\zeta_k(t), z - x(t) \right\rangle + \sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n} \langle -\zeta_k(t), z - x_k(t)\rangle \\
&\quad + \sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n} \langle -\zeta_k(t), -x(t) + x_k(t)\rangle . \\
&\leq \left\langle -\zeta(t) + \sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n}\zeta_k(t), z - x(t) \right\rangle + \sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n} \langle -\zeta_k(t), z - x_k(t)\rangle \\
&\quad + \|x_k(t) - x(t)\| \sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n}\|\zeta_k(t)\|.
\end{aligned}$$

La première expression du second membre de cette dernière égalité tend vers zéro par ce qui précède, et supposons que $\|\zeta_k(t)\| \leq \gamma(t)$, on voit aussi que la troisième expression tend vers zéro. Concernant la deuxième expression , grâce à (2.50), il satisfait l'estimation

$$\sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n}\langle -\zeta_k(t), z - x_k(t)\rangle \leq 0.$$

Ainsi, en passant à limite on obtient

$$\langle -\zeta(t), z - x(t)\rangle \leq 0, \quad \text{pour tout}\, z \in C(t).$$

Cela preuve que

$$-\dot{x}(t) - f_1(t, x(t)) - \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s))ds \in N_{C(t)}(x(t)), \ \ p.p. \ \ t \in [T_0, T].$$

Ainsi que

$$-\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + f_1(t, x(t)) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s))ds, \ \ p.p. \ \ t \in [T_0, T].$$

Considérons maintenant la situation où

$$\int_{T_0}^{T} \left[\beta_1(\tau) + \int_{T_0}^{\tau} \beta_2(\tau, s)\, ds\right] d\tau \geq \frac{1}{4}.$$

On fixe une subdivision de $[T_0, T]$ donné par $T_0, T_1, ..., T_k = T$ tel que, pour tout $0 \leq i \leq k-1$,

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} \left[\beta_1(\tau) + \int_{T_0}^{\tau} \beta_2(\tau, s)\, ds\right] d\tau < \frac{1}{4}.$$

Alors, d'après ce qui précède, il existe une application absolument continue $x_0 : [T_0, T_1] \longrightarrow H$ telle que $x_0(T_0) = x_0$, $x_0(t) \in C(t)$ pour tout $t \in [T_0, T_1]$, et

$$-\dot{x}_0(t) \in N_{C(t)}(x_0(t)) + f_1(t, x_0(t)) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_0(s))\, ds, \ \ p.p. \ \ t \in [T_0, T_1].$$

De même, il existe une application absolument continue $x_1 : [T_1, T_2] \longrightarrow H$ telle que $x_1(T_1) = x_0(T_1)$, $x_1(t) \in C(t)$ pour tout $t \in [T_1, T_2]$, et

$$-\dot{x}_1(t) \in N_{C(t)}(x_1(t)) + f_1(t, x_1(t)) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_1(s))\, ds, \ \ p.p. \ \ t \in [T_1, T_2].$$

Par récurrence , on obtient pour chaque $0 \leq i \leq k-1$ une suite finie d'applications absolument continues $x_i : [T_i, T_{i+1}] \longrightarrow H$ tel que pour chaque $0 \leq i \leq k-1$, $x_i(T_i) = x_{i-1}(T_i)$ et $x_i(t) \in C(t)$ pour tout $t \in [T_i, T_{i+1}]$, et

$$-\dot{x}_i(t) \in N_{C(t)}(x_i(t)) + f_1(t, x_i(t)) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_i(s))\, ds, \ \ p.p. \ \ t \in [T_i, T_{i+1}].$$

On pose $x_{-1}(0) = x_0$ et on définit l'application $x : [T_0, T] \longrightarrow H$ donnée par

$$x(t) = x_i(t), \ \ \text{si} \ \ t \in [T_i, T_{i+1}], \ \ 0 \leq i \leq k-1.$$

Évidemment, $x(\cdot)$ est une application absolument continue vérifiant $x(T_0) = x_0$, $x(t) \in C(t)$ pour tout $t \in [T_0, T]$ et

$$-\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + f_1(t, x(t)) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s))\, ds, \;\; p.p. \;\; t \in [T_0, T], \tag{2.51}$$

ce qui signifie $x(\cdot)$ est une solution de (P_{f_1,f_2}).

<u>Étape 7.</u> Montrons les estimations.

Soit $x(\cdot)$ une solution de (P_{f_1,f_2}).

Prenons $N \subset [T_0, T]$ un ensemble négligeable tel que l'inclusion (2.51) soit vraie pour tout $t \in [T_0, T] \setminus N$. Fixons tout $t \in [T_0, T] \setminus N$. Soit a un réel positif. Comme $C(t)$ est un ensemble convexe et $N_{C(t)}(x(t))$ est un cône alors on a les équivalences suivantes

$$-\dot{x}(t) - f_1(t, x(t)) - \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s))\, ds \in N_{C(t)}(x(t))$$

$$\Updownarrow$$

$$-a\dot{x}(t) - af_1(t, x(t)) - a \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s))\, ds \in N_{C(t)}(x(t))$$

$$\Updownarrow$$

$$x(t) = \mathrm{Proj}_{C(t)}\Big(x(t) - a\dot{x}(t) - af_1(t, x(t)) - a \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s))\, ds\Big).$$

On déduit de cette dernière égalité que

$$a\Big\|\dot{x}(t)+f_1(t, x(t))+\int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s))\, ds\Big\| = d_{C(t)}\Big(x(t)-a\dot{x}(t)-af_1(t, x(t))-a \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s))\, ds\Big).$$

Posons $y = x(t) - a\dot{x}(t) - af_1(t, x(t)) - a \displaystyle\int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s)ds$,

de sorte que par $(\mathcal{H}_1)$,

$$|d_{C(t)}(y) - d_{C(\tau)}(y)| \leq |\upsilon(t) - \upsilon(\tau)| \Rightarrow d_{C(t)}(y) \leq |\upsilon(t) - \upsilon(\tau)| + d_{C(\tau)}(y).$$

Alors

$$\begin{aligned} & a\Big\|\dot{x}(t) + f_1(t, x(t)) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s))\, ds\Big\| \\ & \leq |\upsilon(t) - \upsilon(\tau)| + \Big\|x(t) - x(\tau) - a\dot{x}(t) - af_1(t, x(t)) - a \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s))\, ds\Big\|, \end{aligned}$$

puisque $x(\tau) \in C(\tau)$ pour tout $\tau \in [T_0, T]$. Pour tout $\tau \in [T_0, t[$ avec $\tau < t$, en prenant $a = t - \tau$ on obtient

$$\begin{aligned}
&\Big\|\dot{x}(t) + f_1(t, x(t)) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s))\, ds\Big\| \\
&\leq \frac{|\upsilon(t) - \upsilon(\tau)|}{t - \tau} + \Big\|\frac{x(t) - x(\tau)}{t - \tau} - \dot{x}(t) - f_1(t, x(t)) - \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s))\, ds\Big\|.
\end{aligned}$$

Lorsque $\tau \uparrow t$ donne

$$\begin{aligned}
\Big\|\dot{x}(t) + f_1(t, x(t)) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s))\, ds\Big\| &\leq |\dot{\upsilon}(t)| + \Big\| - f_1(t, x(t)) - \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s))\, ds\Big\| \\
&\leq |\dot{\upsilon}(t)| + \|f_1(t, x(t))\| + \int_{T_0}^{t} \|f_2(t, s, x(s))\|\, ds.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Ceci justifie (2.2). Supposons maintenant

$$\int_{T_0}^{t} \Big[\beta_1(\tau) + \int_{T_0}^{\tau} \beta_2(\tau, s)\, ds\Big] d\tau < \frac{1}{4}.$$

On a de (2.29), (2.30) et (2.32) que les estimations (2.3), (2.4) et (2.5) sont évidemment satisfait (grâce à la continuité de f_1 et f_2).

Si de plus

$$\|f_2(t, s, x)\| \leq g(t, s) + \alpha(t)\|x\|$$

on a de (2.52) et $(\mathcal{H}_{2,1})$ que

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}(t)\| &= \|\dot{x}(t) + f_1(t, x(t)) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s)) - f_1(t, x(t)) - \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s))\| \\
&\leq \|\dot{x}(t) + f_1(t, x(t)) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s))\| + \|f_1(t, x(t)) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s))\| \\
&\leq |\dot{\upsilon}(t)| + 2\|f_1(t, x(t))\| + 2\int_{T_0}^{t} \|f_2(t, s, x(s))\|\, ds \\
&\leq |\dot{\upsilon}(t)| + 2\beta_1(t)(1 + \|x(t)\|) + 2\int_{T_0}^{t} g(t, s)\, ds + 2\alpha(t)\int_{T_0}^{t} \|x(s)\|\, ds,
\end{aligned}$$

alors

$$\|\dot{x}(t)\| \leq |\dot{v}(t)| + 2\beta_1(t) + 2\int_{T_0}^{t} g(t,s)\,ds + 2\beta_1(t)\|x(t)\| + 2\alpha(t)\int_{T_0}^{t}\|x(s)\|\,ds. \tag{2.53}$$

En posant $\rho(t) := \|x_0\| + \int_{T_0}^{t} \|\dot{x}(s)\|\,ds$ alors pour p.p. $t \in [T_0, T]$ $\|x(t)\| \leq \rho(t)$, l'inégalité (2.53) assure que

$$\dot{\rho}(t) \leq |\dot{v}(t)| + 2\beta_1(t) + 2\int_{T_0}^{t} g(t,s)\,ds + 2\beta_1(t)\rho(t) + 2\alpha(t)\int_{T_0}^{t}\rho(s)\,ds.$$

En appliquant le lemme de Gronwall (Lemme1.9.2) avec $\rho(\cdot)$, on obtient

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \leq \rho(t) \leq \|x_0\| \exp\left(\int_{T_0}^{t}(b(\tau)+1)\,d\tau\right) \\ + \int_{T_0}^{t}\left(|\dot{v}(s)| + 2\beta_1(s) + 2\int_{T_0}^{s} g(s,\tau)\,d\tau\right)\exp\left(\int_{s}^{t}(b(\tau)+1)\,d\tau\right)ds,\end{aligned}$$

où $b(\tau) := 2\max\{\beta_1(\tau), \alpha(\tau)\}$ pour presque tous $\tau \in [T_0, T]$.
La dernière inégalité implique que pour tout $t \in [T_0, T]$

$$\|x(t)\| \leq \rho(t) \leq \widetilde{M}, \tag{2.54}$$

où

$$\begin{aligned}\widetilde{M} :=& \|x_0\| \exp\left(\int_{T_0}^{T}(b(\tau)+1)\,d\tau\right) \\ &+ \exp\left(\int_{T_0}^{T}(b(\tau)+1)\,d\tau\right)\int_{T_0}^{T}\left(|\dot{v}(s)| + 2\beta_1(s) + 2\int_{T_0}^{T} g(s,\tau)\,d\tau\right)ds.\end{aligned}$$

De plus par $(\mathcal{H}_{2,1})$ et (2.54), on a pour tout t $\in [T_0, T]$

$$\|f_1(t,x)\| \leq \beta_1(t)(1+\|x\|) \leq \beta_1(t)(1+\widetilde{M}). \tag{2.55}$$

Et pour tout $(t,s) \in Q_\Delta$

$$\|f_2(t,s,x)\| \leq g(t,s) + \alpha(t)\|x\| \leq g(t,s) + \alpha(t)\widetilde{M} \tag{2.56}$$

Par (2.55) et (2.56) on obtient

$$\begin{aligned}\|\dot{x}(t)+f_1(t,x(t))+\int_{T_0}^{t} f_2(t,s,x(s))\| &\leq |\dot{v}(t)|+\|f_1(t,x(t))\|+\int_{T_0}^{t}\|f_2(t,s,x(s))\|\,ds\\ &\leq |\dot{v}(t)|+\beta_1(t)(1+\widetilde{M})+\int_{T_0}^{t} g(t,s)ds+T\alpha(t)\widetilde{M}.\end{aligned}$$

Ce qui donne la validité de (2.6), (2.7), (2.8) et (2.9).

II- Unicité de la solution

Supposons que $x_1(\cdot), x_2(\cdot)$ sont deux solutions de l'inclusion différentielle (P_{f_1,f_2}), alors

$$\begin{cases}-\dot{x}_1(t)\in N_{C(t)}(x_1(t))+f_1(t,x_1(t))+\displaystyle\int_{T_0}^{t} f_2(t,s,x_1(s))ds \qquad \text{p.p. } t\in[T_0,T]\\ x_1(T_0)=x_0\in C(T_0),\end{cases}$$

et

$$\begin{cases}-\dot{x}_2(t)\in N_{C(t)}(x_2(t))+f_1(t,x_2(t))+\displaystyle\int_{T_0}^{t} f_2(t,s,x_2(s))ds \qquad \text{p.p. } t\in[T_0,T]\\ x_2(T_0)=x_0\in C(T_0).\end{cases}$$

Par la monotonicité du cône normal de $C(t)$, on a

$$\langle -\dot{x}_1(t)-f_1(t,x_1(t))-\int_{T_0}^{t} f_2(t,s,x_1(s))\,ds+\dot{x}_2(t)+f_1(t,x_2(t))+\int_{T_0}^{t} f_2(t,s,x_2(s))\,ds,$$
$$x_2(t)-x_1(t)\rangle\leq 0.$$

Cela implique

$$\begin{aligned}\langle \dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t),x_2(t)-x_1(t)\rangle &\leq \langle f_1(t,x_1(t))-f_1(t,x_2(t)),x_2(t)-x_1(t)\rangle\\ &\quad+\langle\int_{T_0}^{t} f_2(t,s,x_1(s))\,ds-\int_{T_0}^{t} f_2(t,s,x_2(s))\,ds,x_2(t)-x_1(t)\rangle\\ &\leq \|f_1(t,x_1(t))-f_1(t,x_2(t))\|\|x_2(t)-x_1(t)\|\\ &\quad+\|x_2(t)-x_1(t)\|\int_{T_0}^{t}\|f_2(t,s,x_1(s))\,ds-f_2(t,s,x_2(s))\|\,ds.\end{aligned}$$

Puisque les applications absolument continue $x_1(\cdot)$ et $x_2(\cdot)$ sont bornées sur $[T_0,T]$, on peut choisir un réel $\eta>0$ tel que, pour chaque $i=1,2$, $\|x_i(t)\|\leq\eta$ pour tout $t\in[T_0,T]$.

Alors selon $(\mathcal{H}_{2,2}), (\mathcal{H}_{3,2})$ cette dernière inégalité assure que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x_2(t)-x_1(t)\|^2 \leq L_1^\eta(t)\|x_2(t)-x_1(t)\|^2 + L_2^\eta(t)\|x_2(t)-x_1(t)\| \int_{T_0}^{t} \|x_2(s)-x_1(s)\|\, ds.$$

Posons

$$\begin{cases} \rho(t) := \|x_2(t)-x_1(t)\|^2, \\ K_1(t) := 2L_1^\eta(t), \\ K_2(t) := 2L_2^\eta(t), \end{cases}$$

alors

$$\dot{\rho}(t) \leq K_1(t)\rho(t) + K_2(t)\sqrt{\rho(t)} \int_{T_0}^{t} \sqrt{\rho(s)}\, ds. \tag{2.57}$$

On applique l'inégalité différentielle de type Gronwall (Lemme 1.9.3) à travers (2.57) avec $\varepsilon(\cdot), \epsilon > 0$ arbitraire on obtient

$$\begin{aligned}
\sqrt{\rho(t)} \leq \sqrt{\rho(T_0)+\epsilon}\, \exp\left(\int_{T_0}^{t} (K(s)+1)\, ds\right) + \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}\int_{T_0}^{t} \exp\left(\int_{s}^{t} (K(\tau)+1)\, d\tau\right) ds \\
+ 2\left(\sqrt{\int_{T_0}^{t} \varepsilon(s)\, ds + \epsilon} - \sqrt{\epsilon}\, \exp\left(\int_{T_0}^{t} (K(\tau)+1)\, d\tau\right)\right) \\
+ 2\int_{T_0}^{t} (K(s)+1) \exp\left(\int_{s}^{t} (K(\tau)+1)\, d\tau\right) \sqrt{\int_{T_0}^{s} \varepsilon(\tau)\, d\tau + \epsilon}\, ds.
\end{aligned}$$

Où $K(t) := \max\{L_1^\eta(t), L_2^\eta(t)\}$ pour tout $t \in [T_0, T]$.

On prend $\epsilon \longrightarrow 0$ et $\varepsilon(t) \longrightarrow 0$, il découle que

$$\|x_2(t)-x_1(t)\| \leq 0.$$

Cela implique clairement que

$$\|x_2(t)-x_1(t)\| = 0.$$

Par suite

$$x_2(t) = x_1(t).$$

Ce qui justifie l'unicité.

Ce qui complète la preuve. ■

2.3 Stabilité de solution

Proposition 2.3.1. *Supposons que les hypothèses du Théorème 2.2.2 (dans le cas 3) soient vérifiées. Pour chaque $a \in C(T_0)$, notons $x_a(\cdot)$ l'unique solution du processus de rafle intégro-différentiel*

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + f_1(t, x(t)) + \int\limits_{T_0}^{t} f_2(t, s, x(s))\, ds \quad p.p.\ \ t \in [T_0, T], \\ x(T_0) = a \in C(T_0). \end{cases}$$

Alors, l'application $\psi : a \longrightarrow x_a(\cdot)$ de $C(T_0)$ vers l'espace $\mathcal{C}([T_0, T], H)$ muni de la norme de convergence uniforme (supremum) est lipschitzienne sur tout sous-ensemble borné de $C(T_0)$.

Preuve.
Soit M un réel positif fixe quelconque. Nous allons montrer que ψ est Lipschitzienne sur $C(T_0) \cap B[0, M]$.
D'après le théorème 2.2.2 (cas 3), il existe un réel M_1 dépendant uniquement de M tel que, pour tout $z \in C(T_0) \cap B[0, M]$ et pour presque tout $(t, s) \in Q_\Delta$

$$\|\dot{x}_z(t)+f_1(t, x_z(t))+\int\limits_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_z(s))\, ds\| \leq \varphi(t) :=|\dot{v}(t)|+(1+M_1)\beta_1(t)+\int\limits_{T_0}^{t} g(t, s)\, ds+T\alpha(t)M_1.$$

De plus

$$\begin{aligned}\|\dot{x}_z(t)\| &\leq \|\dot{x}_z(t) + f_1(t, x_z(t)) + \int\limits_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_z(s))\, ds\| + \|f_1(t, x_z(t))\| + \int\limits_{T_0}^{t} \|f_2(t, s, x_z(s))\|\, ds \\ &\leq |\dot{v}(t)| + 2(1 + M_1)\beta_1(t) + 2\int\limits_{T_0}^{t} g(t, s)\, ds + 2T\alpha(t)M_1.\end{aligned}$$

Alors

$$\|\dot{x}_z(t)\| \leq |\dot{v}(t)| + 2(1 + M_1)\beta_1(t) + 2\int\limits_{T_0}^{t} g(t, s)\, ds + 2T\alpha(t)M_1. \tag{2.58}$$

Or $x_z(\cdot)$ est absolument continue. Il résulte que

$$\|x_z(t)\| \leq \underbrace{\|z\| + \int\limits_{T_0}^{t} \|\dot{x}_z(t)\|}_{\eta}. \tag{2.59}$$

Grâce aux inégalités (2.58) et (2.59), pour certain $\eta > 0$ ne dépendant que de M, pour tout $z \in C(T_0) \cap B[0, M]$ et pour tout $t \in [T_0, T]$, on a

$$x_z(t) \in B[0, \eta]. \tag{2.60}$$

Fixons $a, b \in C(T_0) \cap M\mathbb{B}$. Par la monotonicité du cône normal, on a pour presque tout $(t, s) \in Q_\Delta$

$$\Big\langle -\dot{x}_a(t) - f_1(t, x_a(t)) - \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_a(s))\, ds + \dot{x}_b(t) + f_1(t, x_b(t)) + \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_b(s))\, ds, x_b(t) - x_a(t) \Big\rangle$$
$$\leq 0,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\langle \dot{x}_b(t) - \dot{x}_a(t), x_b(t) - x_a(t) \rangle &\leq \langle f_1(t, x_a(t)) - f_1(t, x_b(t)), x_b(t) - x_a(t) \rangle \\
&\quad + \left\langle \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_a(s))\, ds - \int_{T_0}^{t} f_2(t, s, x_b(s))\, ds, x_b(t) - x_a(t) \right\rangle \\
&\leq \| f_1(t, x_a(t)) - f_1(t, x_b(t)) \| \| x_b(t) - x_a(t) \| \\
&\quad + \| x_b(t) - x_a(t) \| \int_{T_0}^{t} \| f_2(t, s, x_a(s)) - f_2(t, s, x_b(s)) \|\, ds.
\end{aligned}$$

Puisque, par les hypothèses $(\mathcal{H}_{2,2})$ et $(\mathcal{H}_{3,2})$, il existe des fonctions positives $L_1^\eta(\cdot)$ et $L_2^\eta(\cdot) \in L^1([T_0, T], \mathbb{R})$ telles que $f_1(t, \cdot)$ et $f_2(t, s, \cdot)$ sont $L_1^\eta(t)$-Lipschitz, $L_2^\eta(t)$-Lipschitz respectivement sur $B[0, \eta]$, la dernière inégalité avec (2.60) et la formule de Moreau, impliquent que pour presque tous $t \in [T_0, T]$,

$$\frac{d}{dt} \| x_b(t) - x_a(t) \|^2 \leq 2L_1^\eta(t) \| x_b(t) - x_a(t) \|^2 + 2L_2^\eta(t) \| x_b(t) - x_a(t) \| \int_{T_0}^{t} \| x_b(s) - x_a(s) \|\, ds.$$

En appliquant l'inégalité différentielle de type Gronwall (Lemme 1.9.3), avec $\varepsilon(\cdot), \epsilon > 0$ arbitraire on obtient

$$\begin{aligned}
\| x_b(t) - x_a(t) \| &\leq \sqrt{\| b - a \|^2 + \epsilon}\, \exp\left(\int_{T_0}^{t} (K(s) + 1)\, ds \right) + \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} \int_{T_0}^{t} \exp\left(\int_{s}^{t} (K(\tau) + 1)\, d\tau \right) ds \\
&\quad + 2 \left(\sqrt{\int_{T_0}^{t} \varepsilon(s)\, ds + \epsilon} - \sqrt{\epsilon}\, \exp\left(\int_{T_0}^{t} (K(\tau) + 1)\, d\tau \right) \right) \\
&\quad + 2 \int_{T_0}^{t} (K(s) + 1) \exp\left(\int_{s}^{t} (K(\tau) + 1)\, d\tau \right) \sqrt{\int_{T_0}^{s} \varepsilon(\tau)\, d\tau + \epsilon}\, ds.
\end{aligned}$$

où $K(t) := \max\left\{L_1^\eta(t), L_2^\eta(t)\right\}$ pour tout $t \in [T_0, T]$.
Prend $\epsilon \longrightarrow 0$, $\varepsilon(\cdot) \longrightarrow 0$, il résulte que

$$\|x_b(t) - x_a(t)\| \leq \|b - a\| \exp\left(\int_{T_0}^{t} (K(s) + 1)\, ds\right).$$

L'égalité ci-dessus étant vraie pour tout $t \in [T_0, T]$, il s'ensuite que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|x_b(t) - x_a(t)\| \leq \|b - a\| \exp\left(\int_{T_0}^{t} (K(s) + 1)\, ds\right).$$

Par conséquent

$$\|x_b(t) - x_a(t)\|_\infty \leq \|b - a\| \exp\left(\int_{T_0}^{t} (K(s) + 1)\, ds\right).$$

D'où le résultat. ■

Chapitre 3

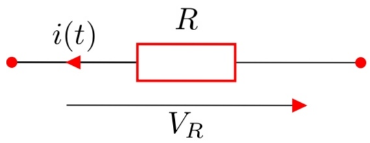
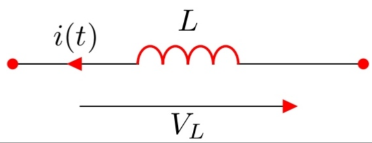
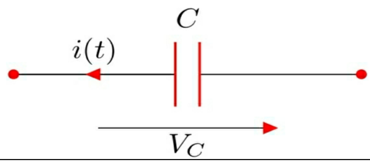
Applications aux circuits électriques non-réguliers

Dans ce chapitre, nous illustrons le lien entre le processus de rafle intégro-différentiel et les systèmes dynamiques non lisses à travers des problèmes de complémentarité différentiel. Ce type de problèmes ont fait l'objet d'un fort intérêt en raison de leurs applications dans divers domaines précisément les circuits électriques non-réguliers. Le circuit électrique est constitué de fils connecter les autres éléments tel que les sources de courant, les résistances, les condensateurs, les inductances, et les diodes (dans notre étude supposés idéales).

Dans la première partie de ce chapitre nous citons quelques éléments de circuit électrique avec leurs caractéristiques Ampère-volt. Dans la deuxième partie nous présentons deux lois fondamentales pour l'analyse des circuits. Enfin, nous donnons des applications de nos résultats principaux présentés au chapitre 2, en particulier le Théorème 2.2.2 pour prouver l'existence et l'unicité de solution d'un circuit électrique.

3.1 La caractéristique Ampère-Volt

Les dispositifs électriques sont décrits en termes de la caractéristique Ampère-Volt qui est une fonction exprimant la différence du potentiel v aux bornes du dispositif en fonction du courant i traversant le dispositif, le tableau suivant illustre la caractéristique Ampère-Volt de quelques éléments de circuit.

Éléments	Symboles	Caractéristiques Ampère-Volt
Résistance		$V_R(t) = Ri(t)$, $R > 0$, est une résistance donnée
Inductance		$V_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$, $L > 0$, est une inductance donnée
Condensateur		$V_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(s)ds$, $C > 0$, est une capacité donnée

3.2 La diode

La diode est un dipôle non linéaire et polarisé (courant unidirectionnel) qui possède deux modes de fonctionnement : bloquée et passante. Donc, le sens de branchement d'une diode a une importance sur le fonctionnement du circuit électrique dans lequel elle est placée. Le modèle de diode idéal est un interrupteur, lorsque la diode est polarisée en direct, elle agit comme une interrupteur fermée et lorsqu'elle est polarisée en inverse, elle agit comme une interrupteur ouverte (voir le tableau 3.1). La caractéristique Ampère-Volt d'un modèle de diode idéal est donné par la relation : $V_D \in N_{R_+}(i_D)$. En effet

$$\begin{cases} i_D(t) \geq 0, V_D(t) \leq 0 \\ i_D(t) \perp V_D(t). \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq i_D(t) \perp - V_D(t) \geq 0 \Leftrightarrow \mathbb{R}_+ \ni i_D(t) \perp - V_D(t) \in (\mathbb{R}_+)^*.$$

Selon la loi de complémentarité, nous avons $V_D(t) \in N_{R_+}(i_D(t))$.

Mode de fonctionnement	passante (polarisation direct)	bloquée (polarisation inverse)
Courant à travers la tension / Aux bornes	$i_D > 0$, $v_D = 0$	$i_D = 0$, $v_D < 0$
La diode ressemble à	Court circuit	circuit ouvert

TABLE 3.1 – Caractéristique d'une diode idéal.

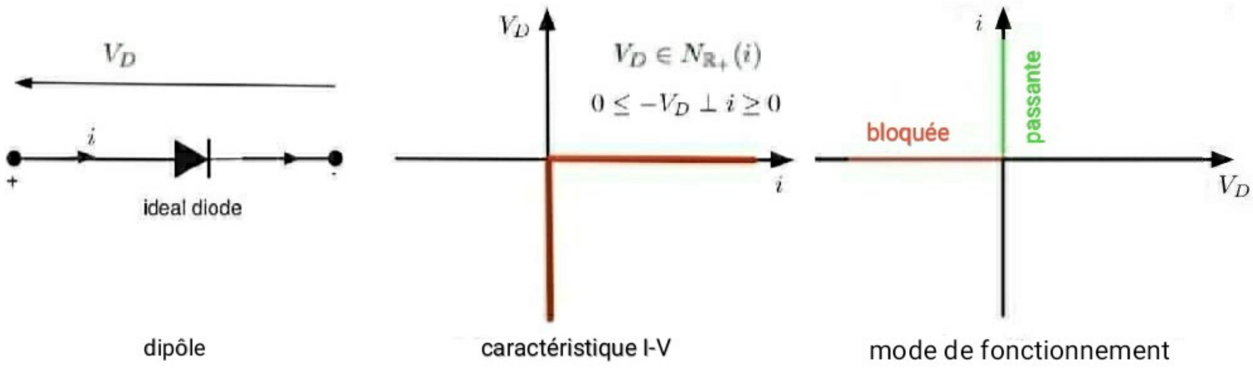


FIGURE 3.1 – Modele de diode idéal.

3.3 Les lois de Kirchhoff

Les lois de Kirchhoff sont deux lois fondamentales pour l'analyse des circuits électriques.

- **La loi des nœuds (loi des courants)** : La somme des courants qui entrent à un nœud est égale a la somme des courants qui sortent par la même nœud. Ou encore pour un nœud la somme algébrique des courants est nulle.
  Par exemple, la loi des nœuds dans le schéma ci-dessous donne : $i_1+i_3+i_4 = i_2+i_5$.

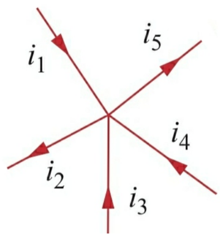


FIGURE 3.2 – Illustration de la loi des nœuds.

- **La loi des mailles (loi des tensions)** : La somme algébrique des tensions rencontrées en parcourant une maille fermée dans un sens prédéfini est nulle.
  Par exemple, la loi des mailles dans le circuit ci-dessous donne :$V_L + V_R + V_C = 0$.

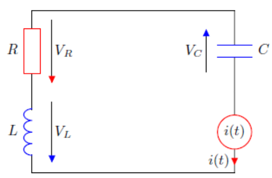


FIGURE 3.3 – Illustration de la loi des mailles.

3.4 Applications aux circuits électriques non-réguliers

Dans cette section nous donnons quelques applications du Théorème 2.2.2 dans les circuits électriques contenant des dispositifs non-réguliers comme les diodes.

3.4.1 Application au circuit électrique en D1

Considérons le circuit électrique représenté sur la figure 3.4 qui est composé d'une résistance de charge $R > 0$, une inductance $L > 0$, une condensateur avec la capacité variable dans le temps $C(t) \neq 0$, une diode idéale et une source de courant absolument continue $i(t) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$.

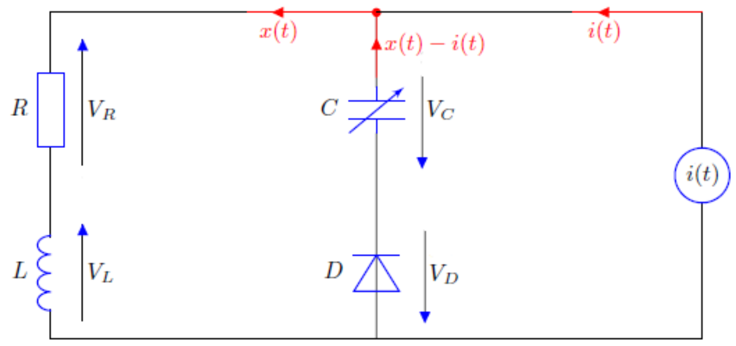


FIGURE 3.4 – Circuit électrique RCDL.

En utilisant la deuxième loi de Kirchhoff, on obtient

$$V_R + V_L + V_C + V_D = 0 \Leftrightarrow V_R + V_L + V_C = -V_D.$$

Par la caractéristique Ampère-Volt de chaque élément de circuit, on trouve

$$Rx(t) + L\dot{x}(t) + \frac{1}{C(t)} \int_0^t (x(s) - i(s))ds \in -N_{\mathbb{R}_+}(x(t) - i(t)).$$

Comme

$$N_{\mathbb{R}_+}(x(t) - i(t)) = N_{[0,+\infty[+i(t)-i(t)}(x(t) - i(t)) = N_{[i(t),+\infty[}(x(t)).$$

Alors

$$-L\dot{x}(t) \in N_{[i(t),+\infty[}(x(t)) + Rx(t) + \frac{1}{C(t)} \int_0^t (x(s) - i(s))ds.$$

Par conséquent, la dynamique de ce circuit est donnée par

$$-\dot{x}(t) \in N_{[i(t),+\infty[}(x(t)) + \frac{R}{L}x(t) + \int_0^t \frac{1}{LC(t)}(x(s) - i(s))ds. \tag{3.1}$$

Proposition 3.4.1. *Supposons que* $i : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction absolument continue et* $C : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$*, est une fonction continue. Alors pour toute condition initiale* $x(0) = x_0 \in K(0)$*, le problème* (3.1) *admet une unique solution absolument continue* $x(\cdot)$*.*

Preuve.
Posons

$$K(t) := i(t) + [0, +\infty[,\ \ f_1(t, x(t)) = \frac{R}{L}x(t),\ \ f_2(t, s, x(s)) = \frac{1}{LC(t)}(x(s) - i(s)).$$

On sait que l'inclusion (3.1) peut être réécrit dans le cadre de notre probleme (P_{f_1,f_2}) comme

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{K(t)}(x(t)) + f_1(t, x(t)) + \displaystyle\int_0^t f_2(t, s, x(s))ds \quad \text{p.p. } t \in [0,T], \\ \\ x(0) = x_0 \in K(0). \end{cases}$$

Montrons maintenant les hypothèses de Théorème 2.2.2.

($\mathcal{H}_1$) Il est clair que pour tout $t \in [0,T]$, le sous-ensemble $K(t)$ de $\mathbb{R}$ est convexe fermé. Ensuite, montrons que l'ensemble $K(t)$ bouge de façon absolument continue. soient $t, s \in [0,T]$ et $z \in K(t)$ on a

$$\begin{aligned} z \in K(t) &\Longleftrightarrow z \in [0, +\infty[+i(t) \\ &\Longleftrightarrow z \in \underbrace{[0, +\infty[+i(s)}_{K(s)} + i(t) - i(s) \\ &\Longleftrightarrow z \in K(s) + i(t) - i(s). \end{aligned} \tag{3.2}$$

<u>Si $i(t) \geq i(s)$</u>

la relation (3.2) implique que

$$z \in K(s) + |i(t) - i(s)| \Longrightarrow z \in K(s) + |i(t) - i(s)|\mathbb{B}_{\mathbb{R}},$$

comme $i(t)$ est absolument continue, alors il suffit de prend $v(t) := i(t)$.
D'où

$$K(t) \subset K(s) + |v(t) - v(s)|\mathbb{B}_{\mathbb{R}}.$$

Si $i(t) < i(s)$

la relation (3.2) implique que

$$z \in K(s) - |i(t) - i(s)| \Longrightarrow z \in K(s) + |i(t) - i(s)|\mathbb{B}_{\mathbb{R}}.$$

Alors

$$K(t) \subset K(s) + |v(t) - v(s)|\mathbb{B}_{\mathbb{R}}.$$

Où

$$v(t) := i(t).$$

Par conséquent, $K(t)$ bouge de manière absolument continue. Ce qui traduit bien l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$.

$(\mathcal{H}_2)$ Clair que La fonction $f_1(\cdot, x)$ est mesurable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$(\mathcal{H}_{2,1})$ Soient $t, s \in [0, T]$ et $x \in \bigcup_{t\in[0,T]} K(t)$. On a

$$|f_1(t, x)| = \left|\frac{R}{L}x\right| = \frac{R}{L}|x| \leq \overbrace{\frac{R}{L}}^{\beta_1}(1 + |x|).$$

$(\mathcal{H}_{2,2})$ Soient $t \in [0, T]$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$|f_1(t, x) - f_1(t, y)| = \left|\frac{R}{L}x - \frac{R}{L}y\right| = \frac{R}{L}|x - y|.$$

Alors la fonction $f_1(t, \cdot)$ est lipschitzienne de rapport $\frac{R}{L}$.

$(\mathcal{H}_3)$ Clair que La fonction $f_2(\cdot, \cdot, x)$ mesurable pour tout $x \in \mathbb{R}$..

$(\mathcal{H}'_{3,1})$ Soient $t, s \in [0, T]$ et $x \in \bigcup_{t\in[0,T]} K(t)$. On a

$$|f_2(t, s, x)| = \left|\frac{1}{LC(t)}(x - i(s))\right| \leq \overbrace{\frac{1}{LC(t)}}^{\alpha(t)}|x| + \overbrace{\frac{1}{LC(t)}|i(s)|}^{g(t,s)}.$$

$(\mathcal{H}_{3,2})$ Soient $t, s \in [0, T]$ et $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$|f_2(t, s, x) - f_2(t, s, y)| = \left|\frac{1}{LC(t)}(x - i(s)) - \frac{1}{LC(t)}(y - i(s))\right| = \frac{1}{LC(t)}|x - y|.$$

Alors la fonction $f_2(t, \cdot)$ est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{LC(t)}$.

Toutes les hypothèses de Théorème 2.2.2 sont satisfaites, alors le problème (P_{f_1,f_2}) admet unique solution absolument continue.

Ce qui complète la preuve. ■

3.4.2 Application au circuit électrique en D2

Considérons le système électrique représenté sur la figure 3.5 qui est composé de trois résistances $R_1 \geq 0$, $R_2 \geq 0$, deux inductances $L_1 \geq 0$, $L_2 \geq 0$, trois condensateurs avec les capacités variables dans le temps $C_1(t) \neq 0$, $C_2(t) \neq 0$ et $C_3(t) \neq 0$, deux diodes idéales et une source de courant absolument continue $i(t) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$.

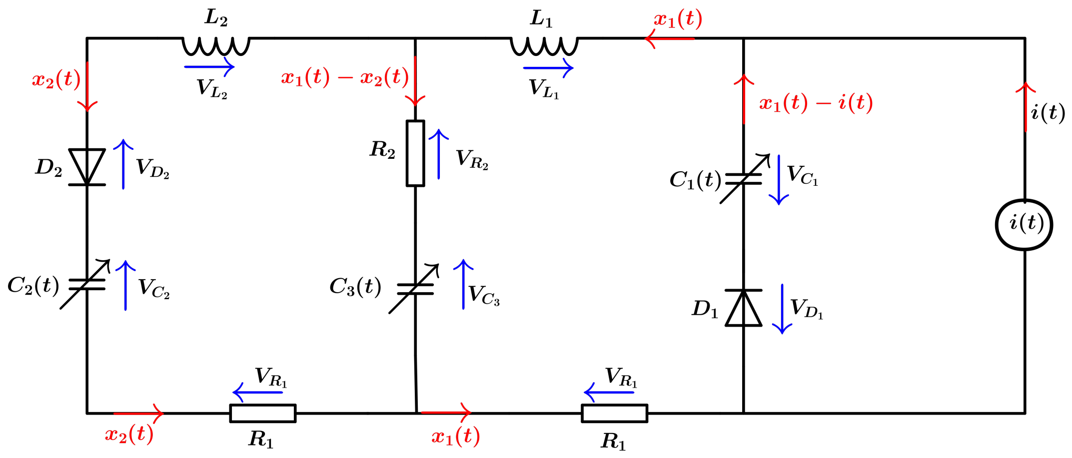


FIGURE 3.5 – Circuit électrique avec résistances, inductances, condensateurs et diodes.

Pour déterminé la dynamique de ce circuit, on suit les même étapes quant a fait dans la section ci-dessus.
En utilisant la deuxième loi de Kirchhoff, on obtient

$$\begin{cases} V_{R_1} + V_{R_2} + V_{L_1} + V_{C_1} + V_{C_3} + V_{D_1} = 0 \\ V_{R_1} - V_{R_2} + V_{L_2} + V_{C_2} - V_{C_3} + V_{D_2} = 0. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} V_{R_1} + V_{R_2} + V_{L_1} + V_{C_1} + V_{C_3} = -V_{D_1} \in -N_{\mathbb{R}_+}(x_1(t) - i(t)) \\ V_{R_1} - V_{R_2} + V_{L_2} + V_{C_2} - V_{C_3} = -V_{D_2} \in -N_{\mathbb{R}_+}(x_2(t)). \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} R_1 x_1(t) + R_2(x_1(t) - x_2(t)) + L_1 \dot{x}_1(t) + \dfrac{1}{C_1(t)} \displaystyle\int_0^t (x_1(s) - i(s)) ds + \dfrac{1}{C_3(t)} \displaystyle\int_0^t x_1(s) - x_2(s) ds \\ \in -N_{[0,+\infty[+i(t)-i(t)}(x_1(t) - i(t)) \\ R_1 x_2(t) - R_2(x_1(t) - x_2(t)) + L_2 \dot{x}_2(t) + \dfrac{1}{C_2(t)} \displaystyle\int_0^t x_2(s) ds - \dfrac{1}{C_3(t)} \displaystyle\int_0^t (x_1(s) - x_2(s)) ds \\ \in -N_{\mathbb{R}_+}(x_2(t)). \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} (R_1+R_2)x_1(t) - R_2x_2(t) + L_1\dot{x}_1(t) + (\frac{1}{C_1(t)} + \frac{1}{C_3(t)})\int_0^t x_1(s)ds - \dfrac{1}{C_3(t)}\int_0^t x_2(s)ds \\ -\frac{1}{C_1(t)}\int_0^t i(s)ds \in -N_{[i(t),+\infty[}(x_1(t)) \\ (R_1+R_2)x_2(t) - R_2x_1(t) + L_2\dot{x}_2(t) + (\frac{1}{C_2(t)} + \frac{1}{C_3(t)})\int_0^t x_2(s)ds - \dfrac{1}{C_3(t)}\int_0^t x_1(s)ds \in -N_{\mathbb{R}_+}(x_2(t)). \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} -L_1\dot{x}_1(t) \in N_{[i(t),+\infty[}(x_1(t)) + (R_1+R_2)x_1(t) - R_2x_2(t) + \left(\frac{1}{C_1(t)} + \frac{1}{C_3(t)}\right)\int_0^t x_1(s)ds \\ -\frac{1}{C_3(t)}\int_0^t x_2(s)ds - \dfrac{1}{C_1(t)}\int_0^t i(s)ds \\ -L_2\dot{x}_2(t) \in N_{\mathbb{R}_+}(x_2(t)) + (R_1+R_2)x_2(t) - R_2x_1(t) + (\frac{1}{C_2(t)} + \frac{1}{C_3(t)})\int_0^t x_2(s)ds - \dfrac{1}{C_3(t)}\int_0^t x_1(s)ds. \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} -\dot{x}_1 \in N_{[i(t),+\infty[}(x_1) + \frac{R_1+R_2}{L_1}x_1(t) - \frac{R_2}{L_1}x_2(t) + (\frac{1}{L_1C_1(t)} + \frac{1}{L_1C_3(t)})\int_0^t x_1(s)ds \\ -\frac{1}{L_1C_3(t)}\int_0^t x_2(s)ds - \dfrac{1}{L_1C_1(t)}\int_0^t i(s)ds \\ -\dot{x}_2(t) \in N_{\mathbb{R}_+}(x_2(t)) + \frac{R_1+R_2}{L_2}x_2(t) - \frac{R_2}{L_2}x_1(t) + (\frac{1}{L_2C_2(t)} + \frac{1}{L_2C_3(t)})\int_0^t x_2(s)ds - \dfrac{1}{L_2C_3(t)}\int_0^t x_1(s)ds. \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} -\dot{x}_1(t) \\ -\dot{x}_2(t) \end{pmatrix}}^{-\dot{x}(t)} \in N_{[i(t),+\infty[\times[0,+\infty[}(x(t)) + \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{R_1+R_2}{L_1} & -\frac{R_2}{L_1} \\ -\frac{R_2}{L_2} & \frac{R_1+R_2}{L_2} \end{pmatrix}}^{A_1}\overbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}}^{x(t)}$$

$$+\int_0^t \Bigg[\overbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{L_1C_1(t)} + \frac{1}{L_1C_3(t)} & -\frac{1}{L_1C_3(t)} \\ -\frac{1}{L_2C_3(t)} & \frac{1}{L_2C_2(t)} + \frac{1}{L_2C_3(t)} \end{pmatrix}}^{A_2(t)}\overbrace{\begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix}}^{x(s)} - \frac{1}{L_1C_1(t)}\overbrace{\begin{pmatrix} i(s) \\ 0 \end{pmatrix}}^{w(s)}\Bigg]ds.$$

La dynamique de ce circuit est donc donnée par

$$-\dot{x}(t) \in N_{[i(t),+\infty[\times[0,+\infty[}(x(t)) + A_1x(t) + \int_0^t A_2(t)x(s) - \frac{1}{L_1C_1(t)}w(s)ds. \tag{3.3}$$

Proposition 3.4.2. *Supposons que $i : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction absolument continue et $C_k : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$, $k = 1,2,3$ sont des fonctions continues. Alors pour toute condition initiale $x(0) = x_0 \in C(0)$, le problème* (3.3) *admet une unique solution absolument continue $x(\cdot)$.*

Preuve. posons $w(t) = (i(t),0)^t$, $C(t) := w(t) + [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, $f_1(t,x) = A_1 x$, $f_2(t,s,x) = A_2(t)x - \frac{1}{L_1 C_1(t)} w(s)$.
Donc (3.3) peut être réécrit dans le cadre de notre probleme (P_{f_1,f_2}) comme

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + f_1(t,x(t)) + \int\limits_0^t f_2(t,s,x(s))ds \quad \text{p.p.} \quad \in [0,T], \\ x(0) = x_0 \in C(0). \end{cases}$$

Montrons maintenant les hypothèses de Théorème 2.2.2. En effet,

$(\mathcal{H}_1)$ Il est clair que pour tout $t \in [0,T]$, le sous ensemble $C(t)$ de $\mathbb{R}^2$ est convexe fermé. Ensuite, montrons que l' ensemble $C(t)$ bouge de façon absolument continue.
posons $C = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, alors $C(t) = C + w(t)$.
soient $t,s \in [0,T]$ et $z \in C(t)$ on a

$$\begin{aligned} z \in C(t) &\Longleftrightarrow z \in C + w(t) \\ &\Longleftrightarrow z \in \underbrace{C + w(s)}_{C(s)} + w(t) - w(s) \\ &\Longleftrightarrow z \in C(s) + w(t) - w(s). \end{aligned}$$

Mais

$$\|w(t) - w(s)\| = \sqrt{(i(t) - i(s))^2} = |i(t) - i(s)|,$$

cela donne

$$w(t) - w(s) \in |i(t) - i(s)|\mathbb{B}_{\mathbb{R}^2},$$

alors

$$z \in C(s) + |i(t) - i(s)|\mathbb{B}_{\mathbb{R}^2},$$

d'où

$$C(t) \subset C(s) + |i(t) - i(s)|\mathbb{B}_{\mathbb{R}^2}.$$

Par conséquent

$$C(t) \subset C(s) + |v(t) - v(s)|\mathbb{B}_{\mathbb{R}^2},$$

tel que

$$v(t) := i(t).$$

Ce qui traduit bien l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$.

$(\mathcal{H}_2)$ Clair que La fonction $f_1(t,\cdot)$ mesurable pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

$(\mathcal{H}_{2,1})$ Soient $t, s \in [0,T]$ et $x \in \bigcup\limits_{t\in[0,T]} C(t)$. On a

$$\|f_1(t,x)\| = \|A_1(t)x\| \leq \|A_1(t)\|\|x\| \leq \overbrace{\|A_1(t)\|}^{\beta_1(t)}(1+\|x\|).$$

$(\mathcal{H}_{2,2})$ Soient $t \in [0,T]$ et $x, y \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\|f_1(t,x) - f_1(t,y)\| = \|A_1(t)x - A_1(t)y\| \leq \|A_1(t)\|\|x-y\|.$$

Alors la fonction $f_1(t,\cdot)$ est lipschitzienne de rapport $L_1(t) := \|A_1(t)\|$.

$(\mathcal{H}_3)$ Clair que La fonction $f_2(t,s,\cdot)$ est mesurable pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

$(\mathcal{H'}_{3,1})$ Soient $t, s \in [0,T]$ et $x \in \bigcup\limits_{t\in[0,T]} C(t)$. On a

$$\|f_2(t,s,x)\| = \|A_2(t)x - \frac{1}{L_1C_1(t)}w(s)\| \leq \overbrace{\|A_2(t)\|}^{\alpha(t)}\|x\| + \overbrace{\frac{1}{L_1C_1(t)}\|w(s)\|}^{g(t,s)}.$$

$(\mathcal{H}_{3,2})$ Soient $t, s \in [0,T]$ et $x, y \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\|f_2(t,s,x) - f_2(t,s,y)\| = \|A_2(t)x - \frac{1}{L_1C_1(t)}w(s) - A_2(t)y + \frac{1}{L_1C_1(t)}w(s)\| \leq \|A_2(t)\|\|x-y\|.$$

Alors la fonction $f_2(t,s,\cdot)$ est lipschitzienne de rapport $L_2(t) := \|A_2(t)\|$.

Toutes les hypothèses de Théorème 2.2.2 sont satisfaites. Cela assure l'existence et l'unicité de solution absolument continue pour le problème (P_{f_1,f_2}).
Ce qui complète la preuve. ■

Conclusion

Dans ce mémoire on a démontré le caractère bien posé du processus de rafle intégro-différentiel

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + f_1(t, x(t)) + \int\limits_0^t f_2(t, s, x(s))ds \quad \text{p.p.} \quad \in [T_0, T], \\ x(0) = x_0 \in C(0). \end{cases}$$

L'application des raisonnement qui existent dans les littératures sont inapplicables a cause de la présence de la perturbation intégrale qui dépend de deux temps t, s.
Pour surmonter ces difficultés, une nouvelle approche a été développée dans ce mémoire qui se base sur :

- nouvelle inégalité de type Gronwall.
- discrétisation adéquate pour la perturbation intégrale.

Bibliographie

[1] **V. Acary, B. Brogliato**, *Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems. Applications in Mechanics and Electronics*, vol. 35, LNACM. Springer, Berlin, 2008.

[2] **V. Acary, O. Bonnefon, B. Brogliato**, *Nonsmooth Modeling and Simulation for Switched Circuits*, Springer, Lecture notes in electrical engineering, vol.69, 2011.

[3] **S. Adly,** *A Variational Approach to Non smooth dynamics. Applications in Unilateral Mechanics and Electronics,* Springer, Cham, 2017.

[4] **S. Adly, T. Haddad, L. Thibault,** *Convex sweeping process in the framework of measure differential inclusions and evolution variational inequalities,* Math. Program. Ser, 2014.

[5] **J. P. Aubin, A. Cellina,** *Differential inclusions-set-valued maps and viability theory*, Springer, Berlin, 1984.

[6] **H. H. Bauschke, Patrick L. Combettes auth**, *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*, Springer, cham, 2017.

[7] **A. Bouach, T. Haddad, L. Thibault**, Nonconvex integro-differential sweeping process with applications arXiv :2102.11987, 2021.

[8] **A. Bouach, T. Haddad, L. Thibault,** *On the discretization of truncated integro-differential sweeping process and optimal control*, to appear in *J. Optim. Theory Appl,* 2022, DOI : 10.1007/s10957-021-01991-z.

[9] **H. Brezis,** *Analyse fonctionnelle Théorie et application,* Masson, Paris, 1983.

[10] **H. Brezis,** *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert,* 1973.

[11] **G. Colombo, C. Kozaily**, *Existence and Uniqueness of Solutions for an Integral Perturbation of Moreau's Sweeping Process*, J. Convex Anal. 27, 2020.

[12] **J. Diestel, J. J. Uhl,** *Vector Measures,* Math.Surveys, vol.15, Amer.Math.Soc., 1977.

[13] **J. F. Edmond, L. Thibault,** *Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process*, Math. Program. 104, 2005.

[14] **I. Ekeland, R. Témam,** *Analyse convexe et problèmes variationnels,* Siam, 1999.

[15] **J. Ferrera**, *An Introduction to nonsmooth Analysis*, Elsevier, 2014.

[16] **M. Kecis**, *Contributions aux problèmes variationnels et aux inclusions différentielles*,Thèse de Doctorant, Université 8 Mai 1945 Guelma, 2021.

[17] **M. Kunze, M.D.P. Monteiro Marques**, *An introduction to Moreau's sweeping process*, Impacts in mechanical systems (Grenoble, 1999), Lecture Notes in Phys., 551, Springer, Berlin, 2000.

[18] **B. Maury, J. Venel**, *Un modèle de mouvement de foule*, ESAIM Proc, 18, 2007.

[19] **B. S. Mordukhovich**, *Variational Analysis and Generalized Differentiation*, I : Basic Theory, II : Applications. Springer, Berlin, 2006.

[20] **J. J. Moreau,** *Rafle par un convexe variable I, Sém. Anal.* Convexe, Montpellier, Exposé 15, 1971.

[21] **R. T. Rockafellar, R. J. B. Wets**, *Variational Analysis*, Springer, Berlin, 1998.

[22] **A. Sadiku**, *Analyse des circuits électriques,* Boeck, 2012.

[23] **R. E. Showalter**, *Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, 1997.

[24] **D. E. Stewart**, *Dynamics with Inequalities : Impacts and Hard Constraints*, Siam , Philadelphia, 2011.