

# الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BENYAHIA JIJEL

Faculté des sciences et de la technologie

Département d'électrotechnique

N° : ...../2022

## **MEMOIRE DE MASTER**

**DOMAINE: Scienceset Technologies**

**FILIERE: électrotechnique**

**SPECIALITE: électromécanique**

### **Thème**

**Modélisation de déformation des matériaux  
ferromagnétique sous forces non-magnétique**

**Présenté Par :**

**Karim. BADACHE**

**Encadré Par : Ammar BOULASSEL**

**Housse Eddine. BOUDELIOU**

**Date de soutenance :13 /07 /2022**

#### **Jury de Soutenance**

**Président : ALLAG. H**

**Grade: PR**

**Univ MSB jijel**

**Encadreur : BOULASSEL. A**

**Grade : MAA**

**Univ MSB jijel**

**Examineur : KIMOUCHE. Ab**

**Grade : MAA**

**Univ MSB jijel**

**Promotion :2021 /2022**

## Remerciement

Je remercie dieu de nous avoir donné la force pour  
Accomplir ce travail.

Je remercie mon encadreur

*M<sup>r</sup>* : Boulassel Ammar pour son aide, son  
Encouragement  
Et sa patience.

Et je n'oublie pas tous les enseignants du  
Département d'électromécanique .

## *Dédicace*

*Je dédie ce travail à tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce travail.*

*Mes parent **Ahcen** et **nadia mrimache***

*Et me tous frères,*

*Et mes sœur*

*Et tout ma famille*

*Et tous mes amies*

## *Dédicace*

*Je dédie ce travail à tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce travail.*

*Mes parent hocine et zaghda bouyegh*

*Et me tous frères,*

*Et mes sceur wassila et wissam*

*Et chahinez ou*

*Et tout ma famille*

*Et tous mes amies surtout sofiane et rafik et zino et yasser*

*Et*

# SOMMAIRE

<b>Introduction générale</b> .....	<b>1</b>
...	
<b>Chapitre 1 : Généralités sur l'élasticité</b>	
<b>Introduction</b> .....	<b>3</b>
<b>1.1 Types des matériaux ferromagnétiques</b> .....	<b>3</b>
1.1.1 Matériaux ferromagnétiques doux .....	<b>3</b>
1.1.2 Matériaux ferromagnétiques durs .....	<b>3</b>
<b>1.3 Hypothèses caractéristiques représentent le comportement des matériaux élastiques</b>	<b>4</b>
a- Hypothèses d'ordre physique .....	<b>4</b>
b- Hypothèses d'ordre géométrique .....	<b>4</b>
c- Hypothèses et principes ayant un caractère mécanique .....	<b>4</b>
<b>1.4 Equations d'élasticité plane</b> .....	<b>5</b>
<b>1.4.1 Déformation plane</b> .....	<b>5</b>
1.4.1.1 Relations cinématiques .....	<b>5</b>
1.4.1.2 Relations constitutionnelles .....	<b>6</b>
1.4.1.3 Equations d'équilibre .....	<b>8</b>
1.4.1.4 Conditions aux limites .....	<b>9</b>
1.4.1.5 Contraintes et déformations initiales .....	<b>11</b>
<b>1.4.2 Contrainte plane</b> .....	<b>12</b>
<b>1.5 Forces d'origine non magnétique</b> .....	<b>13</b>
1.5.1 Forces surfaciques .....	<b>14</b>
1.5.2 Forces volumiques .....	<b>14</b>
<b>Conclusion</b> .....	<b>15</b>
<b>Chapitre 2 : Méthode des intégrales aux frontières pour les problèmes élastiques bidimensionnelle</b>	
<b>2 Introduction</b> .....	<b>16</b>
<b>2.1 Identité réciproque de Betti</b> .....	<b>16</b>
a- Déformation ordinaire .....	<b>17</b>
b- Contrainte plane .....	<b>17</b>
<b>2.2 Solution fondamentale</b> .....	<b>18</b>
<b>2.3 Contraintes dues à une force unitaire concentrée</b> .....	<b>23</b>

---

<b>2.4 Contraintes aux limites dues à une force unitaire concentrée</b> .....	24
<b>2.5 Représentation intégrale de la solution</b> .....	25
<b>2.6 Equations intégrales aux frontières</b> .....	27
<b>2.7 Représentation intégrale des contraintes</b> .....	31
<b>2.7 Solution numérique des équations intégrales aux frontières</b> .....	33
<b>2.7.1 Evaluation des quantités inconnue aux frontières</b> .....	33
2.7.2 Evaluation des déplacements à l'intérieur du corps.....	34
2.7.3 Evaluation des contraintes à l'intérieur du corps.....	35
2.7.4 Evaluation des contraintes sur la frontière.....	35
<b>2.8 Forces du corps</b> .....	36
2.8.1 Evaluation numérique directe.....	36
2.8.2 Evaluation à l'aide d'une solution particulière.....	37
2.8.3 Transformation des intégrales de domaine en intégrales de frontière.....	38
a- Forces du corps ayant une distribution arbitraire.....	39
b- Forces du corps dérivées d'une fonction potentielle.....	40
<b>Conclusion</b> .....	41
<b>Chapitre 3 : Application et résultats</b>	
<b>3-1 Introduction</b> .....	42
<b>3-2 Application de la MEIF sur une poutre soumise à des contraintes extérieures</b> ...	42
<b>3-3 Application de la MEIF sur une conduite soumise à des pressions à l'intérieur</b> ...	45
<b>Conclusion</b> .....	52
<b>Conclusion générale</b> .....	53
<b>Références et Bibliographiques</b> .....	54

# **Introduction générale**



## Introduction générale

La science qui s'occupe avec le calcul de l'élasticité et de la plasticité et avec l'étude du comportement des structures soumises aux divers genres de charges et des contraintes, porte aujourd'hui le nom de mécanique des structures [1]. Elle est maintenant divisée dans une série de disciplines scientifiques : la statique des constructions, la résistance des matériaux, la dynamique des constructions, la théorie de l'élasticité, la théorie de la plasticité, lesquelles étaient appartenant à la mécanique théorique [2].

Depuis toujours, un corps solide soumis à l'action des forces extérieures subit des déformations ou des déplacements relatifs. Si les déformations sont petites, ne dépassant pas une certaine valeur limite, après enlèvement des forces extérieures elles disparaissent. On dit que le corps est parfaitement élastique. De cette hypothèse toute la théorie de l'élasticité a été développée et utilisée depuis longtemps dans le calcul des structures [1,4].

Le développement de cette théorie à travers le temps est dû essentiellement aux phénomènes importants [3,4]: ROBERT HOOKE (1635-1703) a formulé la loi de la proportionnalité entre l'effort et la déformation. En même temps JAQUE BERNOULLI (1654-1705) a établi l'équation de l'axe d'une poutre déformée (soumise à la flexion). COULOMB (1736-1806) s'est occupé de la torsion des poutres, de la flexion, de la poussée du terrain, de la statique des poutres courbes (arcs), etc. LEONHARD EULER (1707-1783) a étudié, en principal, le flambement élastique mais, c'est lui aussi celui qui a impulsé le développement des méthodes analytiques de calcul. Au développement de la théorie de l'élasticité ont contribué LOUIS NAVIER (1785-1836), A.L.CAUCHY (1789-1857), G.LAME : (1795-1875), BARRE DE SAINT-VENANT (1797-1886), etc. Voilà seulement quelques noms parmi les milliers qui se sont occupé de ce domaine de la mécanique des structures.

Le premier chapitre est consacré à la théorie de l'élasticité, pour la mécanique des solides, qui passe toujours par des hypothèses simplificatrices, décrivons les états plane de contrainte et de déformation dans le cadre des problèmes de l'élastostatique linéaire, passons toujours par la loi de Hooke.

Le deuxième chapitre, traite la méthode des équations d'intégrales des frontières (MEIF). La solution fondamentale est basée sur la fonction (l'identité) de Green, la méthode directe des

équations intégrales des frontières est appliquée, avec l'introduction des conditions aux limites mixtes (Dirichlet et Neumann). Généralement, on cherche la solution lorsqu'un point  $P$  se situe à l'intérieur de domaine  $\Omega$ , à l'extérieur et sur la limite (la frontière), cela grâce à l'identité de Green. On trouve trois types de solution, les équations qui constituent la solution peuvent être combinées en une seule équation générale dépend d'un coefficient arbitraire ( $p$ ), ce dernier dépend de la position du point  $p$ . L'équation générale s'écrit sous forme intégrale, ici les éléments aux frontières utilisés sont constantes. La résolution d'un système d'équations par séparation des inconnus à partir des quantités connues, on trouve deux sous-systèmes égaux droite et gauche, on déplace tous les inconnus sur le côté gauche et on résout finalement un système d'équations linéaire.

Le dernier chapitre est consacré à l'application numérique des méthodes déjà vues aux chapitres précédents, un problème simple de l'état plan de contrainte sera traité dans ce chapitre, un corps sous forme d'une poutre encastré sur les deux cotés sous précontraintes sur son côté haut sera étudié dans un premier temps, une deuxième application se sera sur la détermination des déformations d'une conduite rectangulaire sous pression interne uniforme, traitons le problème de l'état plan de déformation. Ces deux types des problèmes sont traités comme un problème de l'électrostatique, avec l'introduction des conditions aux limites (déplacements, précontraintes) sur les côtés de la structure a étudiée.

L'examinassions numériques de ces méthodes donne des bons résultats. On finit ces chapitres par des conclusions.

# **Chapier 1 :**

# **Généralités sur l'élasticité**

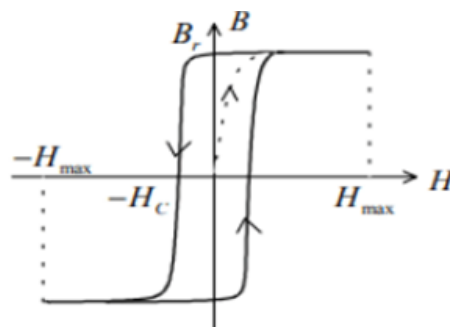
## 1. Introduction

Ce chapitre représente premièrement, les différents types des matériaux ferromagnétiques ainsi des hypothèses simplificatrices expliquant la loi de Hooke, la relation linéaire entre les déformations et ses contraintes, par la suite, la représentation des états plane de contrainte et de déformation est décrite aussi. Les déformations seront engendrées seulement par des forces d'origine non magnétique soit surfacique ou volumique.

### 1.1 Types des matériaux ferromagnétiques :

#### 1.1.1 Matériaux ferromagnétiques doux :

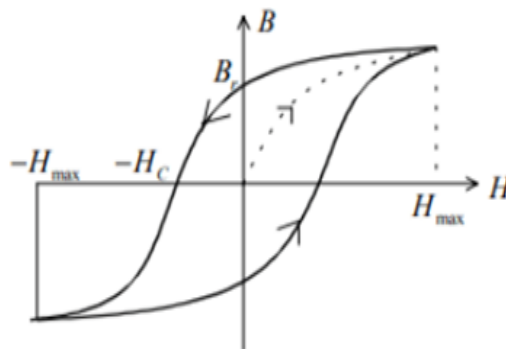
Ces matériaux forment un sous-groupe des matériaux ferromagnétiques, ils sont capables de s'aimanter lorsqu'ils sont soumis à un champ magnétique extérieur. La particularité des matériaux ferromagnétiques doux est que l'action de créer ou d'annuler l'aimantation dans le matériau nécessite moins d'énergie que pour les matériaux ferromagnétiques durs. [5]



**Figure 1.1** : Cycle d'hystérésis de matériaux ferromagnétique doux

#### 1.1.2 Matériaux ferromagnétiques durs :

Forment le deuxième sous-groupe des matériaux ferromagnétiques. Ils possèdent une aimantation naturelle présentée en absence de champ magnétique extérieur.



**Figure 1.2** : Cycle d'hystérésis de matériaux ferromagnétique dur

Comme pour les autres matériaux ferromagnétiques, les ferromagnétiques durs ont la particularité de s'aimanter fortement en présence d'un champ magnétique extérieur. On distingue les ferromagnétiques durs des ferromagnétiques doux par leurs propriétés magnétiques, telles que la forme de leur cycle d'hystérésis. Le cycle d'hystérésis des ferromagnétiques doux est fin et allongé vers le haut, alors que celui des ferromagnétiques durs est aplati et allongé sur l'axe des abscisses.

La dureté mécanique et la dureté magnétique sont deux propriétés différentes et non liées. Les matériaux ferromagnétiques durs sont à la base des aimants permanents, et notamment des aimants à forte puissance. [5]

### 1.3 Hypothèses caractéristiques représentent le comportement des matériaux élastiques :

Ces caractéristiques représentent les hypothèses où principes admises, afin de pouvoir exprimer les résultats – expérimentalement obtenus – à l'aide des relations de calcul.

#### a- Hypothèses d'ordre physique :

L'hypothèse de l'élasticité parfaite admet le comportement parfaitement élastique des matériaux avec lesquels on travaille dans la résistance des matériaux ;

L'hypothèse de l'élasticité linéaire admet une proportionnalité directe entre les forces et les déformations, jusqu'à la limite élastique ; cette liaison est appelée loi de Hooke ;

L'hypothèse de l'anisotropie admet que tous les matériaux sont isotropes, c'est-à-dire qu'ils possèdent les mêmes propriétés physiques et mécaniques dans toutes les directions autour d'un point ;

L'hypothèse de l'homogénéité qui admet que dans n'importe quel point de matériel on trouve les mêmes propriétés.

#### b- Hypothèses d'ordre géométrique :

L'hypothèse de la continuité et de la compacité selon laquelle les matériaux n'ont aucune discontinuité et le matériel est compact ;

L'hypothèse des petites déformations selon laquelle les déformations sont suffisamment petites, par rapport aux dimensions des corps ; c'est pour cela qu'en exprimant l'équilibre d'un corps on ne tient pas compte d'eux ;

L'hypothèse de Bernoulli admet n'importe quelle section plane avant d'être sollicitée, reste plane aussi après avoir été sollicitée (après déformation du corps).

#### c- Hypothèses et principes ayant un caractère mécanique :

L'hypothèse de l'état initial précise qu'avant de soumettre un corps à l'action d'un système de charges extérieures, aucune particule matérielle n'est chargée ; autrement dit, il y a aucune contrainte initiale. Le principe de la localisation des effets, ou le principe de Saint-Venant, précise que si dans une zone limitée du corps on applique un système de charges, alors les efforts

décroissent rapidement quand on s'éloigne de la zone considérée. De pareils systèmes produisent donc des effets locaux.

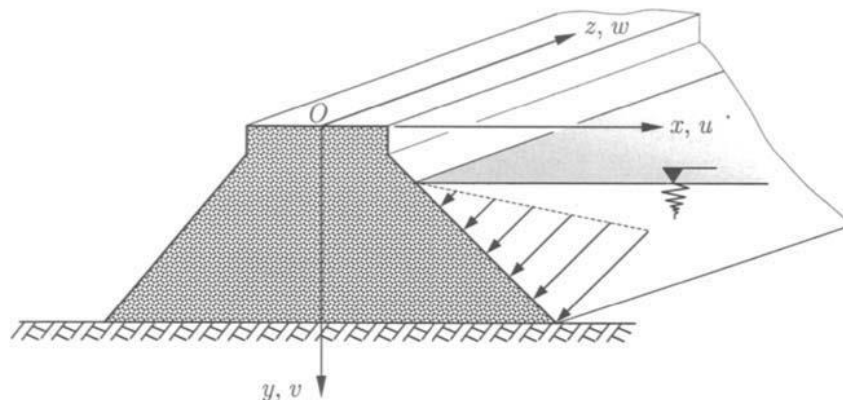
## 1.4 Equations d'élasticité plane

### 1.4.1 Déformation plane

La déformation plane en élasticité linéaire est considérée comme le cas pour lequel :

- L'une des trois composantes de déplacement, disons  $w$  le long de l'axe ( $oz$ ), est constante.
- Les deux autres déplacements,  $u$  et  $v$  le long des axes ( $ox$ ) et ( $oy$ ), respectivement, ne sont que des fonctions des deux variables  $x$  et  $y$ .

Cet état de déformation apparaît dans des formes prismatiques ou cylindriques corps infiniment longues (pratiquement très longues), dont l'axe coïncide avec l'axe ( $oz$ ), et le chargement est normal à cet axe et indépendant de la variable  $z$  (Figure 1.3). Un autre exemple de déformation plane est la déformation qui se produit dans un plan passant par l'axe d'une cylindre circulaire (plan diamétral) lorsque le chargement est axisymétrique et ne varie pas dans la direction axiale.



**Figure 1.3 :** Coupe-transversale d'un barrage long sous déformation plane.

#### 1.4.1.1 Relations cinématiques

Les conditions mentionnées précédemment sont exprimées mathématiquement comme :

$$w = C, u = u(x, y), v = v(x, y) \quad (1.1)$$

Où  $C$  est une constante arbitraire.

Ainsi, les composantes du tenseur de déformation sont [7,8]

]

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= 0, \gamma_{xz} = 0, \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

### 1.4.1.2 Relations constitutionnelles

En supposant qu'un matériau linéairement élastique et isotrope, les relations constitutives pour la déformation plane sont :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda(\sigma_x + \sigma_y) + 2\mu\varepsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda(\sigma_x + \sigma_y) + 2\mu\varepsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda(\sigma_x + \sigma_y) \\ \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= 0 \\ \tau_{yz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Où,  $\lambda$  et  $\mu$  sont les constantes de Lamé, qui sont liées aux constantes élastiques  $E$ ,  $G$  et  $\nu$  à travers les expressions suivantes

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.4)$$

On conclut facilement en combinant les deux équations (1.2) et (1.3) que les composantes non nulles du tenseur des contraintes ne sont fonction que des variables  $x$  et  $y$ .

Les équations (1.3) peuvent être résolues pour les composantes de déformation, donnant

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (1.5 \text{ a})$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (1.5 \text{ b})$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (1.5 \text{ c})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (1.5 \text{ d})$$

$$\gamma_{xz} = 0 \quad (1.5 \text{ e})$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad (1.5 \text{ f})$$

L'équation (1.5c) donne  $\sigma_x = \nu(\sigma_z + \sigma_y)$

En remplaçant cette expression par  $\sigma_z$  dans les équations. (1.5a) et (1.5b), on obtient les deux équations pour les déformations normales suivantes :

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_x + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right) \text{ Et } \varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_y + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right)$$

Où, les paramètres suivants :

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu} \text{ et } \bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (1.6)$$

Nous trouvons que :

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{\bar{E}}{2(1+\bar{\nu})} \text{ et } \lambda = \frac{\bar{\nu}\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2} \quad (1.7)$$

Les composantes de déformation peuvent alors s'écrire :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \bar{\nu}\sigma_y) \quad (1.8a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \bar{\nu}\sigma_x) \quad (1.8b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\bar{\nu})}{\bar{E}} \tau_{xy} \quad (1.8c)$$

Les constantes élastiques  $\bar{E}$  et  $\bar{\nu}$  sont appelées constantes élastiques effectives. Les constantes élastiques effectifs permettent d'utiliser des équations de même forme pour les problèmes de déformation plane et de contrainte plane.

Les équations (1.8) sont combinées dans une équation matricielle comme

$$\{\varepsilon\} = |S|\{\sigma\} \quad (1.9)$$

Où  $\{\varepsilon\}$  et  $\{\sigma\}$  sont respectivement appelés vecteurs de déformation et de contrainte, et ils sont définis comme

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

Et



$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

La matrice [S] est connue sous le nom de matrice de conformité ou de flexibilité et elle a la forme

$$[S] = \frac{1}{\bar{E}} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\nu} & 0 \\ \bar{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \bar{\nu}) \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

La résolution de l'équation (1.9) pour le vecteur contrainte  $\{\sigma\}$ , on obtient

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (1.13)$$

Où

$$[C] = [S]^{-1} = \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\nu}^2} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\nu} & 0 \\ \bar{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \bar{\nu}) \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

La matrice [C] est appelée matrice de rigidité.

La forme composante de l'équation (1.13) est :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\nu}^2} (\varepsilon_x + \bar{\nu}\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\nu}^2} (\varepsilon_y + \bar{\nu}\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{\bar{E}}{2(1 - \bar{\nu})} \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

### 1.4.1.3 Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre pour un solide tridimensionnel sont [8]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \quad (1.16a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \quad (1.16b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0 \quad (1.16c)$$

Où  $b_x, b_y$  et  $b_z$  sont les composantes de la force corporelle par unité de volume. Pour le problème de déformation plane, ces trois composantes sont

$$b_x = b_x(x, y), b_y = b_y(x, y), b_z = 0 \quad (1.17)$$

En tenant compte du fait que les composantes de contrainte sont indépendantes de  $z$  et en utilisant l'équation (1.3), nous nous concluons facilement que la dernière des équations (1.16) est identiquement satisfaite, tandis que les deux premières deviennent

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

La substitution des équations (1.15) dans les équations (1.18) et en utilisant les équations (1.2), nous dérivons l'équilibre équations en termes de composants de déplacement comme

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{G} b_x &= 0 \\ \nabla^2 v + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{G} b_y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ Dans } \Omega \quad (1.19)$$

En remplaçant  $\bar{\nu}$  de l'équation (1.6), nous obtenons les équations gouvernantes du problème de déformation plane sous la forme

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{G} b_x &= 0 \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{G} b_y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ Dans } \Omega \quad (1.20)$$

Les équations (1.20) sont connues sous le nom les équations d'équilibre de Navier pour le problème élasto-statique plan d'un corps occupant le domaine bidimensionnel  $\Omega$ .

#### 1.4.1.4 Conditions aux limites

La solution des équations (1.19) doit satisfaire les conditions aux limites prescrites sur la frontière  $\Gamma$  du corps, qui sont basées soit sur les déplacements  $u$  et  $v$ , soit sur les contraintes de tractions aux limites  $t_x$  et  $t_y$ . Les conditions aux limites peuvent être classées dans les quatre types suivants :

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad u &= \bar{u}, \quad v = \bar{v} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \\ (ii) \quad u &= \bar{u}, \quad t_y = \bar{t}_y \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \\ (iii) \quad t_x &= \bar{t}_x, \quad v = \bar{v} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \\ (iv) \quad t_x &= \bar{t}_x, \quad t_0 = \bar{t}_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_4 \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Où  $\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2 \sqcup \Gamma_3 \sqcup \Gamma_4$ . Les quantités prescrites sont désignées par un au-dessus de la barre. L'une des parties de frontières quelconque  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$  peut être identique à l'ensemble de la frontière  $\Gamma$ , c'est-à-dire que les conditions aux limites ne peuvent être que d'un seul type. Les

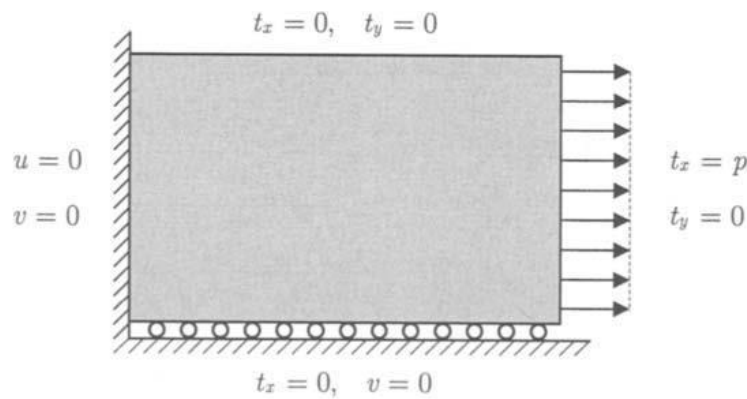
conditions aux limites sont mélangées, si les différentes conditions aux limites sont prescrites sur deux ou plusieurs parties de la frontière, il faut faire attention lorsque  $\Gamma_4 = \Gamma$ . Dans ce cas, les contraintes aux limites  $\bar{t}_x$  et  $\bar{t}_y$  ne peuvent pas être prescrites arbitrairement, mais ils doivent assurer l'équilibre global du corps, à savoir

$$\int_{\Omega} b_x d\Omega + \int_{\Gamma} t_x ds = 0$$

$$\int_{\Omega} b_y d\Omega + \int_{\Gamma} t_y ds = 0$$

$$\int_{\Omega} (xb_y - yb_x) d\Omega + \int_{\Gamma} (xt_y - yt_x) ds = 0$$

Pour ce type de conditions aux limites, la solution des équations de Navier n'est pas déterminée de manière unique car il contient un mouvement de corps rigide arbitraire. Un exemple de conditions aux limites pour un corps infiniment long de section rectangulaire est illustré à la **figure 1.4**. [9]



**Figure 1.4** : Conditions d'appui et de chargement sur la frontière d'un domaine rectangulaire

Les relations entre les contraintes aux limites  $t_x$ ,  $t_y$  et les composantes de contrainte  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  peuvent être dérivées à partir de l'équilibre d'un corps élémentaire infinitésimal sur la frontière (tétraèdre de Cauchy [7]). En deux dimensions, ces relations sont

$$\left. \begin{aligned} t_x &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ t_y &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

où  $n_x$  et  $n_y$  sont les cosinus directeurs du vecteur unitaire normal à la frontière. Si les composants de contrainte dans équations (1.22) sont remplacés par les expressions de l'équation

(1.3) puis les relations cinématiques (1.2) sont employées, on arrive aux expressions basées sur le déplacement suivant pour les contraintes aux limites

$$\begin{aligned} t_x &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_x + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial v}{\partial x} n_y \right) + \mu \frac{\partial u}{\partial n} \\ t_y &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_x + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} n_x + \frac{\partial v}{\partial y} n_y \right) + \mu \frac{\partial u}{\partial n} \end{aligned} \quad (1.23)$$

#### 1.4.1.5 Contraintes et déformations initiales

Dans de nombreux problèmes, un état initial de contrainte ou de déformation peut être présent, qui est dû à variations de température ou autres causes. Par exemple, on considère un état initial de déformation, dont les composants sont désignés par [9]

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (1.24)$$

En désignant par  $\{\varepsilon_t\}$  la déformation totale, la déformation élastique  $\{\varepsilon_c\}$  est obtenue en soustrayant la déformation initiale de la déformation totale, c'est-à-dire

$$\{\varepsilon_c\} = \{\varepsilon_t\} - \{\varepsilon_0\} \quad (1.25)$$

Au moyen de l'équation (1.13), on obtient

$$\{\sigma_c\} = [C]\{\varepsilon_c\} = [C](\{\varepsilon_t\} - \{\varepsilon_0\})$$

Où

$$\{\sigma_c\} = [C]\{\varepsilon_t\} - [C]\{\varepsilon_0\} = \{\sigma_t\} - \{\sigma_0\} \quad (1.26)$$

Où les contraintes  $\{\sigma_0\} = [C]\{\varepsilon_0\}$  sont les contraintes initiales. Lorsque la déformation initiale est due à une variation de température, elle est

$$\{\varepsilon_0\} = \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.27)$$

Où  $\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique et  $\Delta T$  la variation de température.

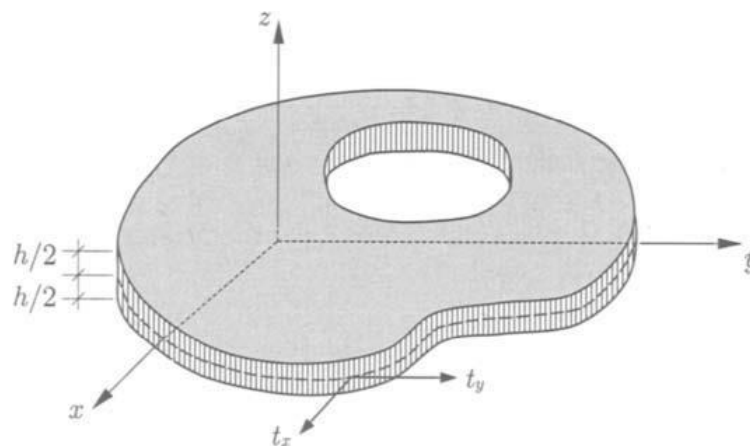
Les contraintes initiales résultantes sont

$$\{\sigma_0\} = [C]\{\varepsilon_0\} = \frac{E}{1-\bar{\nu}} \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.28)$$

### 1.4.2 Contrainte plane

La théorie de l'élasticité plane est appliquée à un autre problème pratiquement à une grande importance, à celle de l'analyse des plaques minces soumises à un chargement dans un plan. Tel que l'état de contrainte se produit dans le cisaillement.

On considère un corps élastique mince, dont l'épaisseur  $h$  est très petit par rapport aux deux autres dimensions (figure 1.5). [9]



**Figure 1.5 :** Représentation d'un corps élastique mince

La charge est dû aux efforts des solides  $b_x$ ,  $b_y$  et aux contraintes de tractions aux limites  $t_x$ ,  $t_y$ . Les contraintes de tractions sont généralement supposées pour être distribuées symétriquement par plan moyen du corps, de plus, la variation le long de l'épaisseur  $h$  soit considérée comme constante. Dans ce cas, l'état de contrainte résultant n'est pas indépendant de la composant  $z$ , mais, si l'épaisseur  $h$  est très petite, il est exactement préférable de supposer que [7]  $\sigma_x = 0$ ,  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = 0$

La longueur de l'épaisseur éthy les restes de composantes de contrainte ne dépendent pas de la variable  $z$ , c'est-à-dire  $\sigma_x = \sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y = \sigma_y(x, y)$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)$

Ainsi, les équations constitutives deviennent

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

Et les équations d'équilibre sont réduites à deux pour le cas de déformation plane,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

Nous remarquons que les équations (1.29) et (1.30) sont de forme identique aux équations (1.8) et (1.18). Par conséquent, toutes les équations de contrainte plane peuvent être obtenues par les équations respectives de déformation plane, si les constantes élastiques effectives  $\bar{E}$  et  $\bar{\nu}$  sont remplacées par  $\nu$  et  $E$ . Ainsi, nous avons les constantes élastiques

$$u = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.31a)$$

$$\lambda^* = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad (1.31b)$$

Où  $\lambda^*$  joue le rôle de la constante de Lamé.

Les équations constitutives obtenues sont

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad (1.32)$$

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (1.33)$$

$$[S] = \frac{1}{\bar{E}} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

Les équations d'équilibre de Navier

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1+\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{G} b_x &= 0 \\ \nabla^2 v + \frac{1+\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{G} b_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

Contraintes de traction aux limites

$$\left. \begin{aligned} t_x &= \lambda^* \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_x + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial v}{\partial x} n_y \right) + \mu \frac{\partial u}{\partial n} \\ t_y &= \lambda^* \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_x + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} n_x + \frac{\partial v}{\partial y} n_y \right) + \mu \frac{\partial u}{\partial n} \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

Contraintes initiales dues à la variation de température

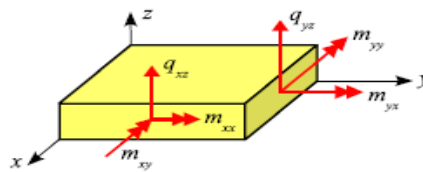
$$\{\sigma_0\} = \frac{E \alpha \Delta T}{1-\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

### 1.5 Forces d'origine non magnétique :

Un matériau est sollicité à la traction ou à la compression lorsqu'il soumise à deux types de forces qui sont :

#### 1.5.1 Forces surfaciques :

On considère un élément de plaque infiniment petit, limité par un cycle perpendiculaire au plan moyen de section droite rectangulaire et dont les faces sont parallèles à x ou y. **Figure 1.6** [6]



**Figure 1.6** : Efforts résultants

Les forces et moments résultantes (efforts par unité longueur) sont définis successivement par :

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_{xz} \\ q_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (1.39)$$

$$M = \begin{Bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} z dz \quad (1.40)$$

$\{q\}$  et  $\{m\}$  s'expriment respectivement en N/m et N

#### 1.5.2 Forces volumiques :

On a

$$V = S \times L \quad (1.41)$$

V : Volume de matériaux,

S : Surface du coté,

L : Longueur de matériau

Si la longueur de matériau est fixée, les forces volumiques sont le produit des forces surfaciques et la longueur de matériau, dans ce cas les forces s'expriment en N/m<sup>3</sup>

**Conclusion**

La théorie de l'élasticité repose donc sur la détermination état de contraintes ou de déformation à l'intérieur d'un corps solide soumis à des forces de volume et/ou à des forces de surface. La détermination de cet état revenait généralement à la recherche de certaines fonctions représentant les composantes de déplacements. Ces fonctions doivent satisfaire l'équation différentielle d'équilibre en tout point du corps et aussi satisfaire certaines conditions aux limites de ce corps.



# **Chapitre 2 :**

**Méthode des intégrales aux frontières  
pour les problèmes élastiques  
bidimensionnelle**

## Chapitre 2 : Méthode des intégrales aux frontières pour les problèmes élastiques bidimensionnelles

---

### 2. Introduction

Ce chapitre présente la méthode des intégrales de frontières (MIF) pour la résolution de problèmes élastostatiques linéaires en deux dimensions. Ici, le problème est formulé en termes de deux inconnues de base qui sont les deux composantes du déplacement. Par conséquent, les équations d'intégrales aux limites résultantes sont deux et elles sont couplées. La conséquence est que l'établissement de la solution fondamentale ainsi que sa forme est beaucoup plus compliquée. Les deux problèmes d'élasticité plane, à savoir la déformation plane et la contrainte plane, seront étudiées dans ce chapitre.

La dérivation de la représentation intégrale de la solution pour les problèmes d'élasticité bidimensionnelle nécessite l'établissement d'une identité réciproque pour l'opérateur de Navier, l'équation (1.19). L'identité réciproque de Betti joue ce rôle.

### 2.1 Identité réciproque de Betti

Il peut être facilement dérivé du théorème connu de Betti pour la réciprocité des travaux, qui est valable pour la théorie linéaire d'élasticité. Pour cela, on considère un corps élastique occupant le volume  $V$  de l'espace tridimensionnel et délimité par la surface  $S$ . De plus, on considère deux états de contrainte dus à deux distributions différentes des forces corporelles et des grandeurs aux limites (déplacements et tractions). Nous désignons les déplacements, les forces corporelles et les tractions pour les deux états de contrainte comme suit :[9]

#### Etat (I)

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

#### Etat (II)

$$\mathbf{u}^* = \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b}^* = \begin{Bmatrix} b_x^* \\ b_y^* \\ b_z^* \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{t}^* = \begin{Bmatrix} t_x^* \\ t_y^* \\ t_z^* \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Selon le théorème de Betti, le travail produit par les déplacements d'état (I) et les forces d'état (II) est égal au travail produit par les déplacements d'état (II) et les forces d'état (I). Cela peut être exprimé comme

**Chapitre 2 : Méthode des intégrales aux frontières pour les problèmes élastiques  
bidimensionnelles**

---

$$\int_v^\infty u \cdot b^* dV + \int_s^\infty u \cdot t^* dS = \int_v^\infty u^* b dV + \int_s^\infty u^* t dS \quad (2.3)$$

Où, en utilisant les équations (2.1) et (2.2)

$$\begin{aligned} & \int_v^\infty (u \cdot b_x^* + v \cdot b_y^* + w b_z^*) dV + \int_s^\infty (u \cdot t_x^* + v \cdot t_y^* + w t_z^*) dS \\ &= \int_v^\infty u^* \cdot b_x + v^* \cdot b_y + w^* \cdot b_z dV + \int_s^\infty (u^* \cdot t_x + v^* \cdot t_y + w^* \cdot t_z) dS \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pour le problème plan on distingue les deux cas suivants :

**a-Déformation ordinaire :** On considère la partie du corps cylindrique coupée par les deux plans  $z$  et  $z+1$ , c'est-à-dire une tranche d'épaisseur unitaire. Dans ce cas, c'est  $b_z = 0$ ,  $b_z^* = 0$  à l'intérieur du corps,  $t_z = 0$ ,  $t_z^* = 0$  sur la surface cylindrique et en vertu des équations (1.22) ou (1.23) il est  $t_x = t_y = 0$ ,  $t_x^* = t_y^* = 0$  sur les sections planes. De plus, en tenant compte du fait que  $w = c$ ,  $w^* = c^*$  sur les sections planes et, par conséquent, les travaux produits sur celles-ci sont d'amplitude égale mais de signe opposé, l'équation (2.4) devient [9]

$$\begin{aligned} & \int_\Omega^\infty (u \cdot b_x^* + v \cdot b_y^*) d\Omega + \int_\Gamma^\infty (u \cdot t_x^* + v \cdot t_y^*) dS \\ &= \int_\Omega^\infty u^* \cdot b_x + v^* \cdot b_y d\Omega + \int_\Gamma^\infty (u^* \cdot t_x + v^* \cdot t_y) dS \end{aligned} \quad (2.5)$$

**b- Contrainte plane :** On considère une plaque mince d'épaisseur constante  $h$ . Dans ce cas, c'est  $b_z = 0$ ,  $b_z^* = 0$  à l'intérieur du corps et  $t_z = 0$ ,  $t_z^* = 0$  sur toute la surface  $S$  et en vertu des équations (2.37) c'est  $t_x = t_y = 0$ ,  $t_x^* = t_y^* = 0$  sur les sections planes. Par conséquent, l'équation (2.4) prend la forme de l'équation (2.5) lorsqu'il est appliqué à ce corps.

De plus, si le corps force dans l'équation (2.5) sont remplacés par leurs expressions des équations (1.19), on obtient l'identité réciproque de l'opérateur de Navier [9]

$$\begin{aligned} & \int_\Omega^\infty \{ [u \cdot N_x(u^*, v^*) + v \cdot N_y(u^*, v^*)] - [u^* \cdot N_x(u, v) + v^* \cdot N_y(u, v)] \} d\Omega \\ &= - \int_\Gamma^\infty [(u \cdot t_x^* + v \cdot t_y^*) - (u^* \cdot t_x + v^* \cdot t_y)] dS \end{aligned} \quad (2.6)$$

Où les opérateurs  $N_x(\dots)$  et  $N_y(\dots)$  sont définis sur la base des équations (1.19) comme :

**Chapitre 2 : Méthode des intégrales aux frontières pour les problèmes élastiques  
bidimensionnelles**

---

$$\left. \begin{aligned} N_x(u, v) &= -G \left[ \nabla^2 u + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] \\ N_y(u, v) &= -G \left[ \nabla^2 v + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

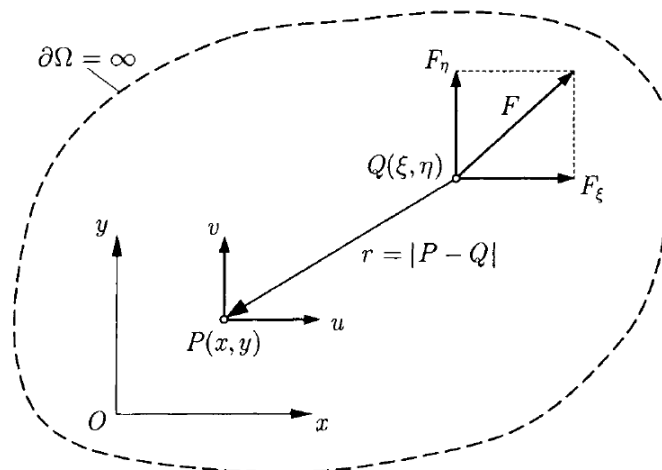
Les équations (2.7) sont valables pour la déformation plane. Rappelons que pour les contraintes planes  $\bar{\nu}$  doit être remplacé par  $\nu$ .

### 2.2 Solution fondamentale

Afin de dériver les équations intégrales de frontières relatives au problème élasto-statique plan, il est nécessaire d'établir d'abord la solution fondamentale des équations de Navier. (1.19). Du point de vue physique, la solution fondamentale exprime les déplacements produits dans un corps plan infini par une force de corps unitaire concentrée. Cette solution est attribuée à Kelvin et c'est pourquoi elle est connue dans la littérature sous le nom de solution de Kelvin. Il peut être établi selon la procédure décrite ci-dessous.

Considérons la force concentrée  $\mathbf{F}(F_\xi, F_\eta)$ ,  $|\mathbf{F}| = 1$ , appliquée au point  $Q(\xi, \eta)$  du plan (voir la figure 2.4). Il apparaît que les composantes  $F_\xi$  et  $F_\eta$  de la force  $\mathbf{F}$  sont les cosinus directeurs du vecteur unitaire représentant cette force. La densité des forces corporelles produites par la force  $\mathbf{F}$  en un point  $P(x, y)$  peut être représentée à l'aide de la fonction delta. Ainsi, nous avons

**Figure 2.4** [9]



**Figure 2.4** Force unitaire concentrée  $\mathbf{F}(F_\xi, F_\eta)$  appliquée en point  $Q(\xi, \eta)$  du plan.

$$\mathbf{b} = \delta(P - Q)\mathbf{F} \quad (2.8)$$

Où

**Chapitre 2 : Méthode des intégrales aux frontières pour les problèmes élastiques  
bidimensionnelles**

---

$$\left. \begin{aligned} b_x &= \delta(P - Q)F_\varepsilon \\ b_y &= \delta(P - Q)F_\eta \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Dans ce cas, les équations (1.19) s'écrivent

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{G} \delta(P - Q)F_\varepsilon &= 0 \\ \nabla^2 v + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{G} \delta(P - Q)F_\eta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

La solution fondamentale pour l'opérateur de Navier est une solution singulière des équations (2.10), que l'on peut établir en exprimant les composantes du déplacement en fonction des fonctions de Galerkin.

Ainsi, nous fixons

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= \frac{2}{1+\bar{\nu}} \nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ 2Gv &= \frac{2}{1+\bar{\nu}} \nabla^2 \psi - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Où  $\phi = \phi(x, y)$  et  $\psi = \psi(x, y)$  sont les fonctions de Galerkin. Ils représentent les composantes d'un vecteur, dit vecteur de Galerkin [10].

Présentation des équations (2.11) dans les équations d'équilibre (2.10), on arrive à :

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 \phi &= -1(1 + \bar{\nu})\delta(P - Q)F_\varepsilon \\ \nabla^4 \psi &= -1(1 + \bar{\nu})\delta(P - Q)F_\eta \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Où

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad \text{est l'opérateur bi-harmonique.}$$

Par conséquent, les équations (2.11) sont une solution aux équations (2.10), si les fonctions  $r$  et  $g$  représentent des solutions particulières singulières des équations. (2.12). Ces solutions peuvent être établies par le travail comme suit :

La première équation des équations (2.12) s'écrit

$$\nabla^2 \phi = -1(1 + \bar{\nu})\delta(P - Q)F_\varepsilon \quad (2.13)$$

Où il a été imposé

$$\nabla^2 \phi = \Phi \quad (2.14)$$

## Chapitre 2 : Méthode des intégrales aux frontières pour les problèmes élastiques bidimensionnelles

---

Equation (2.13), Ainsi, une solution particulière singulière de cette équation est

$$\Phi = -\frac{(1+\bar{\nu})}{2\pi} (\ln r - Q) F_{\varepsilon}$$

Où  $r = |P - Q|$  et  $\beta$  est une constante arbitraire. En conséquence, l'équation (2.14) devient

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{(1+\bar{\nu})}{2\pi} (\ln r - Q) F_{\varepsilon}$$

Puisque la solution est indépendante de l'angle polaire au point source Q, on peut écrire pour  $r \neq 0$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Phi}{dr} \right) = -\frac{(1+\bar{\nu})}{2\pi} (\ln r - Q) F_{\varepsilon} \quad (2.15)$$

Deux intégrations consécutives donnent

$$\Phi = -\frac{(1+\bar{\nu})}{2\pi} F_{\varepsilon} \left[ \frac{r^2}{4} \ln r + \frac{1}{4} (b-1) r^2 + C \ln r + D \right] \quad (2.16)$$

Où C et D sont des constantes arbitraires. Puisque nous nous intéressons à une solution particulière, nous pouvons poser  $B=1$  et  $C=D=0$  pour que la solution ait la plus simple forme. Ainsi, nous avons

$$\Phi = -\frac{(1+\bar{\nu})}{8\pi} F_{\varepsilon} r^2 \ln(r) \quad (2.17)$$

De même, on obtient

$$\Phi = -\frac{(1+\bar{\nu})}{8\pi} F_{\eta} r^2 \ln r \quad (2.18)$$

Substitution des équations (2.17) et (2.18) dans les expressions (2.11) donne la solution fondamentale pour les équations de Navier. Comme nous le verrons dans la section suivante, la solution fondamentale pour (i)  $F_{\varepsilon} = 1, F_{\eta} = 0$  et (ii)  $F_{\varepsilon} = 0, F_{\eta} = 1$  est nécessaire pour dériver les équations intégrales aux limites. Par conséquent, la dérivation des expressions de la solution fondamentale est limitée à ces deux cas.

**a-**  $F_{\varepsilon} = 1, F_{\eta} = 0$

Nous avons

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -\frac{(1+\bar{\nu})}{8\pi} r^2 \ln r \\ \psi &= 0 \\ \nabla^2 \phi &= -\frac{(1+\bar{\nu})}{2\pi} (\ln r + 1) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= -\frac{(1+\bar{\nu})}{8\pi} (2\ln r + 2r_x^2 + 1) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} &= -\frac{(1+\bar{\nu})}{8\pi} 2r_x r_y \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Dans les expressions précédentes et dans ce qui suit,  $r_x$  et  $r_y$  expriment les dérivées de la distance  $r$  par rapport à  $x$  et  $y$  respectivement, et sont données par  $r_x = \frac{\xi-x}{r}$ ,  $r_y = \frac{\xi-y}{r}$  Qui satisfont évidemment la relation  $r_x^2 + r_y^2 = 1$ . Les équations (2.19) sont remplacées dans les expressions (2.11) pour donner

$$\left. \begin{aligned} U_{x\varepsilon} &= -\frac{1}{8\pi G} \left[ (3 - \bar{\nu}) \ln r - (1 + \bar{\nu}) r_x^2 + \frac{(7-\bar{\nu})}{2} \right] \\ U_{y\varepsilon} &= \frac{1}{8\pi G} (1 + \bar{\nu}) r_x r_y \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Où  $U_{x\varepsilon}$  et  $U_{y\varepsilon}$  représentent respectivement les déplacements  $u$  et  $v$ . Le premier indice indique la direction du déplacement, tandis que le second la direction de la force unitaire (Voir la figure 2.5).

**b-**  $F_\varepsilon = 1$ ,  $F_\eta = 0$

En suivant la même procédure que dans le cas (a.), on obtient

$$\left. \begin{aligned} \phi &= 0 \\ \psi &= -\frac{(1+\bar{\nu})}{8\pi} r^2 \ln(r) \\ \nabla^2 \psi &= -\frac{(1+\bar{\nu})}{2\pi} (\ln(r) + 1) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= -\frac{(1+\bar{\nu})}{8\pi} (2\ln(r) + 2r_y^2 + 1) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= -\frac{(1+\bar{\nu})}{8\pi} 2r_x r_y \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

En suivant la même procédure que dans le cas (a.), on obtient

$$\left. \begin{aligned} U_{xy} &= \frac{1}{8\pi G} (1 + \bar{\nu}) r_x r_y \\ U_{yy} &= -\frac{1}{8\pi G} \left[ (3 - \bar{\nu}) \ln r - (1 + \bar{\nu}) r_y^2 + \frac{(7-\bar{\nu})}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

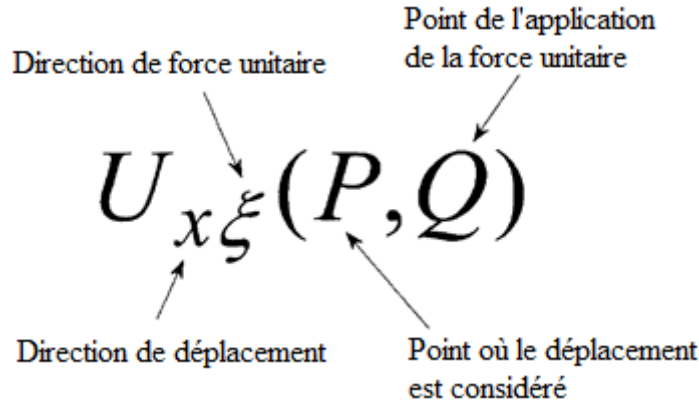
En utilisant la notation indicielle pour les coordonnées des points P et Q, i.e.  $x_1$ ,  $x_2$  et  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  respectivement, l'équations (2.20) et (2.22) peuvent s'écrire

**Chapitre 2 : Méthode des intégrales aux frontières pour les problèmes élastiques  
bidimensionnelles**

---

$$\left[ U_{ij} = -\frac{1}{8\pi G} [C_1 \delta_{ij} \ln r - C_2 r_i r_j + C_3 \delta_{ij}] \right] \quad (2.23)$$

Où



**Figure 2.5** Composantes de la solution fondamentale de l'élasticité bidimensionnelle.

$$C_1 = 3 - \bar{\nu}, \quad C_2 = 1 + \bar{\nu}, \quad C_3 = \frac{7 + \bar{\nu}}{2} \quad (2.24)$$

La constante  $C_3$  peut être omise, elle ne produit que des déplacements de corps rigides, qui n'influencent pas sur les contraintes et les déformations.

L'équation (2.23) peut également être écrite sous forme matricielle comme

$$U(P, Q) = \begin{bmatrix} U_{x\xi} & U_{x\eta} \\ U_{y\xi} & U_{y\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Les composantes de la solution fondamentale représentent les composantes d'un tenseur du second ordre à deux points [10,11] connu sous le nom de tenseur de Green [12].

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad r_x = -r_\xi, r_y = -r_\eta$$

On peut facilement trouver que le tenseur défini ci-dessus est symétrique par rapport aux points P et Q. Cela signifie que ses composantes ne changent pas, si le rôle des deux points est inter-changé. A savoir, P devient le point où la force est appliquée (point source) et Q le point où le déplacement est évalué (point de champ). Ainsi, il est  $U(P, Q) = U(Q, P)$

Où

$$\begin{bmatrix} U_{x\xi} & U_{x\eta} \\ U_{y\xi} & U_{y\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{\xi x} & U_{\eta y} \\ U_{\xi y} & U_{\eta x} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$



## Chapitre 2 : Méthode des intégrales aux frontières pour les problèmes élastiques bidimensionnelles

Cette symétrie exprime la loi de Betti-Maxwell pour la réciprocité des déplacements.

### 2.3 Contraintes dues à une force unitaire concentrée

Les expressions des composantes de contrainte dues à la force unitaire peuvent être évaluées en utilisant les équations (1.3). On distingue encore deux cas :

**a.**  $F_\varepsilon = 1, F_\eta = 0$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x\varepsilon} &= \lambda(U_{x\varepsilon,x} + U_{y\varepsilon,y}) + 2\mu U_{x\varepsilon,x} \\ \sigma_{y\varepsilon} &= \lambda(U_{x\varepsilon,x} + U_{x\varepsilon,y}) + 2\mu U_{x\varepsilon,y} \\ \tau_{xy\varepsilon} &= \mu(U_{x\varepsilon,x} + U_{x\varepsilon,y}) \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Substitution d'équations (2.20) dans les équations ci-dessus, donne

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x\varepsilon} &= \frac{A_1}{r} (A_2 r_x + 2r_x^3) \\ \sigma_{y\varepsilon} &= \frac{A_1}{r} (-A_2 r_y + 2r_x r_y^2) \\ \tau_{xy\varepsilon} &= \frac{A_1}{r} (A_2 r_y + 2r_x^2 r_y) \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Où

$$A_1 = -\frac{1+\bar{\nu}}{4\pi}, \quad A_2 = \frac{1-\bar{\nu}}{1+\bar{\nu}} \quad (2.29)$$

**b.**  $F_\varepsilon = 0, F_\eta = 1$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x\eta} &= \lambda(U_{x\eta,x} + U_{y\eta,y}) + 2\mu U_{x\eta,x} \\ \sigma_{y\eta} &= \lambda(U_{x\eta,x} + U_{x\eta,y}) + 2\mu U_{x\eta,y} \\ \tau_{xy\eta} &= \mu(U_{x\eta,x} + U_{x\eta,y}) \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Substitution d'équations (2.20) dans les équations ci-dessus, donne

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x\eta} &= \frac{A_1}{r} (-A_2 r_y + 2r_y r_x^2) \\ \sigma_{y\eta} &= \frac{A_1}{r} (A_2 r_y + 2r_y^3) \\ \tau_{xy\eta} &= \frac{A_1}{r} (A_2 r_x + 2r_y^2 r_x) \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Si la notation indicielle est employée pour les coordonnées, c'est-à-dire  $x_1, x_2$  alors les équations (2.28) et (2.31) se réduisent à [13]

$$\sigma_{ijk} = \frac{A_1}{r} [A_2 (\delta_{ik} r_j + \delta_{ik} r_i - \delta_{ij} r_k) + 2r_i r_j r_k] \quad (i, j, k=1,2) \quad (2.32)$$

## Chapitre 2 : Méthode des intégrales aux frontières pour les problèmes élastiques bidimensionnelles

L'indice  $k = 1,2$  se rapporte aux directions  $\varepsilon$  et  $\eta$  de la force unitaire, respectivement. Il convient de noter que  $\sigma_{11} = \sigma_x, \sigma_{22} = \sigma_y, \sigma_{12} = \tau_{xy}$ .

### 2.4 Contraintes aux limites dues à une force unitaire concentrée

Les expressions des tractions sur la frontière dues à la force concentrée peuvent être dérivées à l'aide de l'équation. (1.22). Nous distinguons deux cas :

**a.**  $F_\varepsilon = 1, F_\eta = 0$

$$T_{x\varepsilon} = \sigma_{y\eta}n_x + \tau_{xy}n_y$$

$$T_{y\varepsilon} = \sigma_{xy\varepsilon}n_x + \sigma_{y\varepsilon}n_y$$

Ou en utilisant les équations (2.28)

$$\left. \begin{aligned} T_{x\varepsilon} &= \frac{A_1}{r} (A_2 + 2r_x^2)r_n \\ T_{y\varepsilon} &= \frac{A_1}{r} (2r_x r_y r_n + A_2 r_t) \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

**b.**  $F_\varepsilon = 0, F_\eta = 1$

$$T_{x\eta} = \sigma_{x\eta}n_x + \tau_{xy\eta}n_y$$

$$T_{y\eta} = \sigma_{xy\eta}n_x + \sigma_{y\eta}n_y$$

En utilisant les équations (2.31)

$$\left. \begin{aligned} T_{x\eta} &= \frac{A_1}{r} (2r_x r_y r_n - A_2 r_t) \\ T_{y\eta} &= \frac{A_1}{r} (A_2 + 2r_y^2)r_n \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Où  $r_n = r_x n_x + r_y n_y$  exprime la dérivée de  $r$  dans la direction de la normale extérieure à la courbe (frontière) passant par le point  $(x, y)$  et  $r_t = -r_x n_x + r_y n_y$  la dérivée le long de la tangente à cette courbe. Les vecteurs  $n$  et  $t$  définissent un système d'axes droitier.

En utilisant la notation indicielle, les équations (2.33) et (2.34) se réduisent à [13]

$$T_{ik} = \frac{A_1}{r} [A_2 (\delta_{ik} r_{ik} + 2r_i r_k) r_n + A_2 (r_i n_k - r_k n_i)] \quad (i, k = 1,2) \quad (2.35)$$

**Chapitre 2 : Méthode des intégrales aux frontières pour les problèmes élastiques  
bidimensionnelles**

---

**2.5 Représentation intégrale de la solution**

La représentation intégrale de la solution pour le problème élasto-statique bidimensionnel est dérivée de l'identité réciproque (2.5) en considérant comme état (II) l'état de contrainte produit par une force corporelle unitaire au point Q. La force unitaire est appliquée d'abord dans le sens  $\varepsilon$  puis dans le sens  $\eta$ .

**a.**  $F_\varepsilon = 1, F_\eta = 0$

Dans ce cas, l'état (II) à l'intérieur du domaine  $\Omega$  est défini comme

$$b_x^* = \delta(P - Q), \quad b_y^* = 0$$

$$u^* = U_{x\varepsilon}(P, Q), \quad v^* = U_{y\varepsilon}(P, Q)$$

Où  $p \in \Omega$  et  $p \in \Gamma$

En introduisant les expressions ci-dessus dans l'équation (2.5) et en tenant compte du fait que

$$\int_{\Omega} u b_x^* d\Omega = \int_{\Omega} u(P)(P - Q)\delta d\Omega_p = u(Q)$$

On obtient la représentation intégrale de la solution pour le déplacement dans la direction x aux points Q à l'intérieur du domaine  $\Omega$  sous la forme suivante

$$u(Q) = \int_{\Omega} [U_{x\varepsilon}(P, Q)b_x(P) + U_{y\varepsilon}(P, Q)b_y(P)] d\Omega_p + \int_{\Gamma} [U_{x\varepsilon}(P, Q)t_x(P) + U_{y\varepsilon}(P, Q)t_y(P)] dS_p - \int_{\Gamma} [T_{x\varepsilon}(P, Q)t_x(P) + T_{y\varepsilon}(P, Q)v_y(P)] dS_p$$

(2.36)

**b.**  $F_\varepsilon = 0, F_\eta = 1$

Dans ce cas, à l'intérieur du domaine  $\Omega$  c'est

$$b_x^* = 0, \quad b_y^* = \delta(P - Q)$$

$$u^* = U_{x\eta}(P, Q), \quad v^* = U_{y\eta}(P, Q)$$

Et à la frontière  $\Gamma$

$$t_x^* = T_{x\eta}(P, Q), \quad t_y^* = U_{y\eta}(P, Q)$$

## Chapitre 2 : Méthode des intégrales aux frontières pour les problèmes élastiques bidimensionnelles

En introduisant les expressions ci-dessus dans l'équation (2.5) et en tenant compte du fait que

$$\int_{\Omega}^{\infty} v b_y^* d\Omega = \int_{\Omega}^{\infty} v (P)(P - Q) \delta d\Omega_p = v(Q)$$

Nous trouvons

$$\begin{aligned} u(Q) = & \int_{\Omega}^{\infty} [U_{x\eta}(P, Q)b_x(P) + U_{y\eta}(P, Q)b_y(P)] d\Omega_p + \int_{\Gamma}^{\infty} [U_{x\eta}(P, Q)t_x(P) + \\ & U_{y\eta}(P, Q)t_y(P)] dS_p - \int_{\Gamma}^{\infty} [T_{x\eta}(P, Q)t_x(P) + T_{y\eta}(P, Q)v_y(P)] dS_p \end{aligned} \quad (2.37)$$

Les équations (2.36) et (2.37) représentent la représentation intégrale de la solution aux équations d'élasticité plane de Navier. Nous remarquons que le rôle des points  $P(x, y)$  et  $Q(\varepsilon, \eta)$  dans ces équations a été transformé par réciprocity. Ainsi, le point  $Q(\varepsilon, \eta)$  est maintenant le point de champ et  $P(x, y)$  le point source. Le vecteur  $n$  dans les expressions (2.33) et (2.34) de  $T_{x\varepsilon}, T_{y\varepsilon}, T_{x\eta}$  et  $T_{y\eta}$  est normal à la frontière au point  $p \in \Gamma$  où la charge est appliquée. Pour des raisons de cohérence, la notation initiale est restaurée. Par conséquent,  $p \in \Gamma$  ou  $p \in \Omega$  désigneront des points de champ, tandis que  $Q \in \Omega$  ou  $q \in \Gamma$  désigneront des points sources, c'est-à-dire des points où des forces unitaires sont appliquées. Ainsi, les équations (2.36) et (2.37) peuvent être réécrites sous cette notation et à le même temps peut être combiné dans une seule équation matricielle comme.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u(P) \\ v(P) \end{Bmatrix} = & \int_{\Omega}^{\infty} \begin{bmatrix} U_{\varepsilon x}(P, Q) & U_{\eta x}(P, Q) \\ U_{\varepsilon y}(P, Q) & U_{\eta y}(P, Q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_{\varepsilon} \\ b_{\eta} \end{Bmatrix} d\Omega_Q + \int_{\Gamma}^{\infty} \begin{bmatrix} U_{\varepsilon x}(q, P) & U_{\eta x}(q, P) \\ U_{\varepsilon y}(q, P) & U_{\eta y}(q, P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{\varepsilon} \\ t_{\eta} \end{Bmatrix} dS_q \\ & - \int_{\Gamma}^{\infty} \begin{bmatrix} U_{\varepsilon x}(q, P) & U_{\eta x}(q, P) \\ U_{\varepsilon y}(q, P) & U_{\eta y}(q, P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{\varepsilon} \\ v_{\eta} \end{Bmatrix} dS_q \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ce changement de notation nécessite le remplacement des dérivées  $r_x$  et  $r_y$  dans les équations. (2.20), (2.32), (2.33) et (2.34) avec  $r_{\varepsilon}$  et  $r_{\eta}$ , respectivement, sans toutefois changer de signe. Ainsi, nous avons

$$\left. \begin{aligned}
 U_{\varepsilon x} &= -\frac{1}{8\pi G} \left[ (3 - \bar{\nu}) \ln r - (1 + \bar{\nu}) r_{\varepsilon}^2 + \frac{(7 - \bar{\nu})}{2} \right] \\
 U_{\eta y} &= U_{\varepsilon y} = \frac{1}{8\pi G} (1 + \bar{\nu}) r_{\varepsilon} r_{\eta} \\
 U_{\eta x} &= -\frac{1}{8\pi G} \left[ (3 - \bar{\nu}) \ln r - (1 + \bar{\nu}) r_{\eta}^2 + \frac{(7 - \bar{\nu})}{2} \right] \\
 T_{\varepsilon x} &= \frac{A_1}{r} (A_2 + 2r_{\varepsilon}^2) r_n \\
 T_{\eta x} &= \frac{A_1}{r} (2r_{\varepsilon} r_{\eta} r_n - A_2 r_t) \\
 T_{\varepsilon y} &= \frac{A_1}{r} (2r_{\varepsilon} r_{\eta} r_n - A_2 r_t) \\
 T_{\eta y} &= \frac{A_1}{r} (A_2 + 2r_{\eta}^2) r_n
 \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

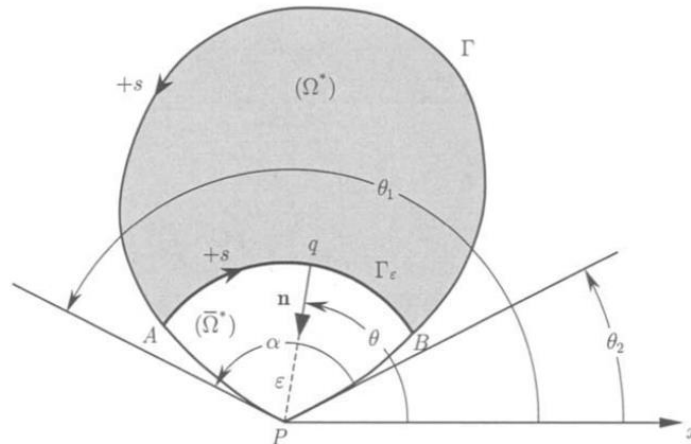
Où  $r_n = r_{\varepsilon} n_x + r_{\eta} n_y$  et  $r_t = -r_{\varepsilon} n_y + r_{\eta} n_x$

En utilisant la notation indicielle pour les deux directions, c'est-à-dire  $x_1, x_2$  l'équation (2.38) est réduite à [13]

$$u_i(P) = \int_{\Omega}^{\infty} U_{ji} b_j d\Omega + \int_{\Gamma}^{\infty} (U_{ji} t_j - T_{ji} b_i) dS \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.40)$$

## 2.6 Equations intégrales aux frontières

Les équations intégrales aux limites pour le problème à résoudre sont produites en laissant le point  $p \in \Omega$  dans les équations. (2.38) se déplacer vers un point  $p \in \Gamma$ . Nous remarquons à partir des équations (2.30), (2.32), (2.33) et (2.34) que les noyaux dans les intégrales de frontière des équations (2.34) sont singuliers, c'est-à-dire qu'ils présentent un comportement singulier lorsque  $p \in \Omega \rightarrow p \in \Gamma$  car  $r \rightarrow 0$  lorsque  $p \rightarrow q$ . Par conséquent, il est nécessaire d'examiner le comportement des intégrales de frontière dans les équations (2.34), lorsque l'on fait coïncider le point  $p \in \Omega$  avec un point  $p \in \Gamma$ . Figure 2.6 [9]



**Figure 2.6** Définitions géométriques liées à un point de coin P d'une frontière non lisse.

## Chapitre 2 : Méthode des intégrales aux frontières pour les problèmes élastiques bidimensionnelles

Nous examinons le cas général d'une frontière non lisse et nous supposons que  $P \equiv q$  est un point d'angle (voir Fig. 2.6). Considérons ensuite le domaine  $\Omega^*$ , qui résulte de  $\Omega$  en soustrayant un petit secteur circulaire de centre  $P$ , de rayon  $\varepsilon$  et confiné par les arcs  $PA$  et  $PB$ . On note l'arc de cercle  $AB$  par  $\Gamma_\varepsilon$  et la somme des arcs  $AP$  et  $PB$  par  $l$ . La normale extérieure à  $\Gamma_\varepsilon$  coïncide avec le rayon. De plus,  $\alpha$  est l'angle entre les deux tangentes à la frontière au point  $P$ .

Evidemment, il est  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_\varepsilon = 0$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Gamma - l) = \Gamma$  et les segments  $PA$  et  $PB$  deviennent tangentes à la frontière au point  $P$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

En utilisant la notation ci-dessus, nous appliquons la relation de réciprocité (2.5) pour le domaine  $\Omega^*$  avec (a) :  $b_x^* = \delta(P - Q)$ ,  $b_y^* = 0$ , (b) :  $b_x^* = 0$ ,  $b_y^* = \delta(Q - P)$  où  $p \in \Omega^*$ ,  $Q \in \bar{\Omega} \equiv \Omega - \Omega^*$ . Dans les deux cas la charge unitaire est appliquée au point  $P(x, y)$ . Puisque le point  $P$  se trouve en dehors du domaine, les intégrales du domaine dans le côté gauche de l'équation (2.5) disparaissent. En utilisant la notation indicielle, nous pouvons écrire

$$\int_{\Gamma-l}^{\infty} T_{ji}(P, Q) t_j(P) dS_q + \int_{\Gamma_\varepsilon}^{\infty} T_{ji}(P, Q) v_j(P) dS_q = \int_{\Omega^*}^{\infty} U_{ji}(P, Q) b_j(P) d\Omega_Q + \int_{\Gamma-l}^{\infty} U_{ji}(P, Q) t_j(q) dS_q + \int_{\Gamma_\varepsilon}^{\infty} U_{ji}(P, Q) t_j(q) dS_q \quad (2.41)$$

Nous allons examiner le comportement des intégrales dans l'équation (2.41) pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Il est évident qu'à la limite, les intégrales de ligne sur  $\Gamma - l$  deviennent des intégrales sur  $\Gamma$ , tandis que les intégrales de domaine sur  $\Omega^*$  deviennent des intégrales sur  $\Omega$ . Par conséquent, il reste à examiner le comportement des intégrales sur  $\Gamma_\varepsilon$ . À savoir,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon}^{\infty} U_{ji} t_j dS \quad (2.42)$$

Et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon}^{\infty} T_{ji} u_j dS \quad (2.43)$$

Examinons d'abord les intégrales (2.42) dont les noyaux sont la solution fondamentale  $U_{ji}$ .

En utilisant le théorème de la valeur moyenne du calcul intégral, les intégrales (2.42) peuvent être écrites sous forme développée comme suite :

$$\left. \begin{aligned} & t_\varepsilon(q^*) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma}^{\infty} U_{\varepsilon x} dS + t_\eta(q^*) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma}^{\infty} U_{\eta x} dS \\ & t_\varepsilon(q^*) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma}^{\infty} U_{\varepsilon y} dS + t_\eta(q^*) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma}^{\infty} U_{\eta y} dS \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

**Chapitre 2 : Méthode des intégrales aux frontières pour les problèmes élastiques  
bidimensionnelles**

---

Où  $q^*$  est un point sur  $T_\varepsilon$ , généralement différent pour chacun des quatre termes. Évidemment  $c$ 'est  $q^* \rightarrow p \equiv P$ , quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Sur la base des équations (2.20) et (2.22), nous notons que les intégrales dans les équations. (2.7) impliquent des termes des formes suivantes

$$I_1 = \int_{\Gamma}^{\infty} \ln r dS, I_2 = \int_{\Gamma}^{\infty} r_\varepsilon^2 dS, I_3 = \int_{\Gamma}^{\infty} r_\varepsilon r_\eta dS, I_4 = \int_{\Gamma}^{\infty} r_\eta^2 dS$$

D'où :

$$I_1 = \int_{\Gamma_\varepsilon}^{\infty} \ln r dS = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \varepsilon \ln r d(-\vartheta) = \varepsilon \ln \varepsilon (\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

Qui, à la limite, donne

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon}^{\infty} \ln(r) dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\vartheta_1 - \vartheta_2) (\varepsilon \cdot \ln \varepsilon) = 0, \text{ et par conséquent } I_1 = 0$$

Il reste à trouver les limites des trois autres intégrales. On peut écrire  $r_\varepsilon = \cos \theta$  et  $r_\eta = \sin \theta$

Ainsi,

$$I_2 = \int_{\Gamma}^{\infty} r_\varepsilon^2 dS = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \cos^2 \theta \varepsilon d(-\vartheta) = -\varepsilon \left[ \frac{\vartheta}{2} + \frac{\sin 2\vartheta}{4} \right]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$$

$$I_3 = \int_{\Gamma}^{\infty} r_\varepsilon r_\eta dS = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \cos \theta \sin \theta \varepsilon d(-\vartheta) = \varepsilon \left[ \frac{\cos 2\vartheta}{4} \right]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$$

$$I_4 = \int_{\Gamma}^{\infty} r_\eta^2 dS = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sin^2 \theta \varepsilon d(-\vartheta) = -\varepsilon \left[ \frac{\vartheta}{2} - \frac{\sin 2\vartheta}{4} \right]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$$

Et par conséquent  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 = 0$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_3 = 0$  et  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_4 = 0$

Ainsi, la dernière intégrale de l'équation (2.42) s'annule pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  et les trois intégrales restantes dans le membre droit de l'équation (2.41) varient continûment lorsque le point  $p \in \Omega$  se rapproche du point  $p \in \Gamma$ .

**Chapitre 2 : Méthode des intégrales aux frontières pour les problèmes élastiques  
bidimensionnelles**

---

En utilisant à nouveau le théorème de la valeur moyenne du calcul intégral, les intégrales (2.43) avec des noyaux  $T_{ji}$  peuvent être écrites sous forme développée comme

$$\left. \begin{aligned} & u(q^*) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon}^\infty T_{\varepsilon x} dS + v(q^*) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon}^\infty T_{\eta x} dS \\ & u(q^*) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon}^\infty T_{\varepsilon y} dS + v(q^*) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon}^\infty T_{\eta y} dS \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

Où  $q^*$  est un point sur  $\Gamma_\varepsilon$ , généralement différent dans chacun des quatre termes. En se référant à la figure 2.6, nous remarquons que  $\phi = \text{angle}(r, n) = \pi$ , où  $r \equiv \varepsilon$ . Par conséquent,

$$r_n = \cos \phi = -1 \quad , \quad r_t = \sin \phi = 0$$

Par conséquent, en utilisant les équations (2.34), (2.35) et (2.39) et en tenant compte que :

$ds = rd(-\theta) = -\varepsilon d\theta$  (Voir la figure 2.6), on obtient

$$\varepsilon_{\varepsilon x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon}^\infty T_{\varepsilon x} dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon}^\infty \frac{A_1}{r} (A_2 + 2r_\varepsilon^2) r_n ds = \frac{1+\bar{\nu}}{8\pi} \left[ \frac{4}{1+\bar{\nu}} [\vartheta]_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} + [\sin 2\vartheta]_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \right] \quad (2.47)$$

$$\varepsilon_{\eta x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon}^\infty T_{\eta x} dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon}^\infty \frac{A_1}{r} (2r_\varepsilon r_\eta r_n + A_2 r_t) ds = \frac{1+\bar{\nu}}{8\pi} [\cos 2\vartheta]_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \quad (2.48)$$

$$\varepsilon_{\varepsilon y} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon}^\infty T_{\varepsilon y} dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon}^\infty \frac{A_1}{r} (2r_\varepsilon r_\eta r_n - A_2 r_t) ds = -\frac{1+\bar{\nu}}{8\pi} [\cos 2\vartheta]_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \quad (2.49)$$

$$\varepsilon_{\eta y} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon}^\infty T_{\eta y} dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon}^\infty \frac{A_1}{r} (A_2 + 2r_\varepsilon^2) r_n ds = \frac{1+\bar{\nu}}{8\pi} \left[ \frac{4}{1+\bar{\nu}} [\vartheta]_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} - [\sin 2\vartheta]_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \right] \quad (2.50)$$

Evidemment, aux points P où la frontière est lisse, il est

$$[\vartheta]_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} = \vartheta_1 - \vartheta_2 = \pi$$

$$[\cos 2\vartheta]_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} = \cos 2\vartheta_1 - \cos 2\vartheta_2 = \cos 2(\vartheta_2 + \pi) - \cos 2\vartheta_2 = 0$$

$$[\sin 2\vartheta]_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} = \sin 2\vartheta_1 - \sin 2\vartheta_2 = \sin 2(\vartheta_2 + \pi) - \sin 2\vartheta_2 = 0$$

Les équations (2.48) à (2.50) deviennent

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\varepsilon x} &= \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_{\eta x} = 0 \\ \varepsilon_{\varepsilon y} &= 0, \quad \varepsilon_{\eta y} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

Les équations (2.48) à (2.51) deviennent



$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\varepsilon x} & \varepsilon_{\eta x} \\ \varepsilon_{\varepsilon y} & \varepsilon_{\eta y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} U_{\varepsilon x} & U_{\eta x} \\ U_{\varepsilon y} & U_{\eta y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_{\varepsilon} \\ b_{\eta} \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} U_{\varepsilon x} & U_{\eta x} \\ U_{\varepsilon y} & U_{\eta y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{\varepsilon} \\ t_{\eta} \end{Bmatrix} dS - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} T_{\varepsilon x} & T_{\eta x} \\ T_{\varepsilon y} & T_{\eta y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

Ou en utilisant la notation indicielle

$$\varepsilon_{ji} u_i(P) = \int_{\Omega} U_{ji} b_i d\Omega + \int_{\Gamma} (U_{ji} t_i - T_{ji} b_i) dS \quad (2.53)$$

Apparemment, c'est  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij}$  aux points p où la frontière est lisse.

## 2.7 Représentation intégrale des contraintes

Les composantes de contrainte  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  en un point P(x,y) à l'intérieur du domaine  $\Omega$  sont dérivées des équations (1.3). Ainsi, en introduisant les composants de déplacement u et v à partir des équations. (2.38), ce qui donne

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \int_{\Omega} \{ [\lambda(U_{\varepsilon x,x} + U_{\eta y,y}) + 2\mu U_{\varepsilon x,x}] b_{\varepsilon} + [\lambda(U_{\eta x,x} + U_{\eta y,y}) + 2\mu U_{\eta x,x}] b_{\eta} \} d\Omega + \\ & \int_{\Gamma} \{ [\lambda(U_{\varepsilon x,x} + U_{\eta y,y}) + 2\mu U_{\varepsilon x,x}] t_{\varepsilon} + [\lambda(U_{\eta x,x} + U_{\eta y,y}) + 2\mu U_{\eta x,x}] t_{\eta} \} dS - \int_{\Gamma} \{ [\lambda(U_{\varepsilon x,x} + \\ & U_{\varepsilon y,y}) + 2\mu U_{\varepsilon x,x}] u + [\lambda(U_{\eta x,x} + U_{\eta y,y}) + 2\mu U_{\eta x,x}] v \} dS \end{aligned} \quad (2.54)$$

On place

$$\begin{cases} \sigma_{x\varepsilon} = \lambda(U_{\varepsilon x,x} + U_{\eta y,y}) + 2\mu U_{\varepsilon x,x} \\ \sigma_{x\eta} = \lambda(U_{\eta x,x} + U_{\eta y,y}) + 2\mu U_{\eta x,x} \end{cases} \quad (2.55)$$

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{x\varepsilon} = \lambda(T_{\varepsilon x,x} + T_{\eta y,y}) + 2\mu T_{\varepsilon x,x} \\ \bar{\sigma}_{x\eta} = \lambda(T_{\eta x,x} + T_{\eta y,y}) + 2\mu T_{\eta x,x} \end{cases} \quad (2.56)$$

L'équation (2.53) devient

$$\sigma_x = \int_{\Omega} \{ [\sigma_{x\varepsilon}] b_{\varepsilon} + [\sigma_{x\eta}] b_{\eta} \} d\Omega + \int_{\Gamma} \{ [\sigma_{x\varepsilon}] t_{\varepsilon} + [\sigma_{x\eta}] t_{\eta} \} dS - \int_{\Gamma} \{ [\bar{\sigma}_{x\varepsilon}] u + [\bar{\sigma}_{x\eta}] v \} dS \quad (2.57)$$

Les grandeurs  $\sigma_{x\varepsilon}$  et  $\sigma_{x\eta}$  expriment les contraintes  $\sigma_x$ , au point (x,y)  $\in \Omega$  pour les charges unitaires appliquées au point ( $\varepsilon, \eta$ ) dans les directions (ox) et (oy), respectivement (voir les équations (2.27) et (2.30)). De même, les grandeurs  $\bar{\sigma}_{x\varepsilon}$  et  $\bar{\sigma}_{x\eta}$  expriment les contraintes  $\sigma_x$  au point(x,y)  $\in \Omega$  en raison des déplacements unitaires appliqués au point ( $\varepsilon, \eta$ ) dans les directions (ox) et (oy) respectivement.

De même, on obtient

$$\sigma_x = \int_{\Omega}^{\infty} \{[\sigma_{y\varepsilon}]b_{\varepsilon} + [\sigma_{y\eta}]b_{\eta}\}d\Omega + \int_{\Gamma}^{\infty} \{[\sigma_{y\varepsilon}]t_{\varepsilon} + [\sigma_{y\eta}]t_{\eta}\}d\Omega - \int_{\Gamma}^{\infty} \{[\bar{\sigma}_{y\varepsilon}]u + [\bar{\sigma}_{y\eta}]v\}d\Omega \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \int_{\Omega}^{\infty} \{[\tau_{xy\varepsilon}]b_{\varepsilon} + [\tau_{xy\eta}]b_{\eta}\}d\Omega + \int_{\Gamma}^{\infty} \{[\tau_{xy\varepsilon}]t_{\varepsilon} + [\tau_{xy\eta}]t_{\eta}\}d\Omega \\ - \int_{\Gamma}^{\infty} \{[\bar{\tau}_{xy\varepsilon}]u + [\bar{\tau}_{xy\eta}]v\}d\Omega \end{aligned} \quad (2.59)$$

Où

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{y\varepsilon} &= \lambda(U_{\varepsilon x,x} + U_{\eta y,y}) + 2\mu U_{\varepsilon y,y} \\ \sigma_{y\eta} &= \lambda(U_{\eta x,x} + U_{\eta y,y}) + 2\mu U_{\eta y,y} \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{y\varepsilon} &= \lambda(T_{\varepsilon x,x} + T_{\eta y,y}) + 2\mu T_{\varepsilon y,y} \\ \bar{\sigma}_{y\eta} &= \lambda(T_{\eta x,x} + T_{\eta y,y}) + 2\mu T_{\eta y,y} \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy\varepsilon} &= \mu(U_{\varepsilon x,y} + U_{\eta y,x}) \\ \tau_{xy\eta} &= \mu(U_{\eta x,y} + U_{\eta y,x}) \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_{xy\varepsilon} &= \mu(T_{\varepsilon x,y} + T_{\eta y,x}) \\ \bar{\tau}_{xy\eta} &= \mu(T_{\eta x,y} + T_{\eta y,x}) \end{aligned} \right\} \quad (2.63)$$

Les contraintes  $\sigma_{y\varepsilon}, \sigma_{y\eta}, \tau_{xy\varepsilon}$  et  $\tau_{xy\eta}$  sont données par les équations (2.29) et (2.31), alors que,  $\bar{\sigma}_{y\varepsilon}, \bar{\sigma}_{y\eta}, \bar{\tau}_{xy\varepsilon}, \bar{\tau}_{xy\eta}$  sont dérivés en introduisant les équations. (2.33) et (2.34) dans les équations. (2.55), (2.60) et (2.62), et en effectuant les différenciations impliquées. Ainsi, on obtient

$$\bar{\sigma}_{x\xi} = \frac{A_3}{r^2} [2r_{,x}r_{,xn}(1-4r_{,x}^2) + (2r_{,x}^2+1)n_x]$$

$$\bar{\sigma}_{x\eta} = \frac{A_3}{r^2} (-8r_{,x}^2r_{,y}r_{,n} + 2r_{,x}r_{,y}n_x + n_y)$$

$$\bar{\sigma}_{y\xi} = \frac{A_3}{r^2} (-8r_{,y}^2r_{,x}r_{,n} + 2r_{,x}r_{,y}n_y + n_x)$$

$$\bar{\sigma}_{y\eta} = \frac{A_3}{r^2} [2r_{,y}r_{,n}(1-4r_{,y}^2) + (2r_{,y}^2+1)n_y]$$

$$\bar{T}_{xy\xi} = \bar{\sigma}_{xn}$$

$$\bar{T}_{xy\xi} = \bar{\sigma}_{y\xi}$$

Si  $A_3 = -2\mu A_1$

## Chapitre 2 : Méthode des intégrales aux frontières pour les problèmes élastiques bidimensionnelles

### 2.7 Solution numérique des équations intégrales aux frontières

#### 2.7.1 Evaluation des quantités inconnues aux frontières

Les équations intégrales aux frontières sont résolues à l'aide de la méthode des intégrales aux frontières en éléments constants aux frontières. La frontière est divisée en N éléments constants. Ainsi la répartition des déplacements et contraintes sont pris constants sur chaque élément et égaux à leur valeur au point nodal, qui se situe au milieu de l'élément. Désignant par  $\{u\}^i = \{u^t u^i\}^T$  et  $\{t\}^i = \{t_x^x t_y^i\}^T$ , les déplacements et les contraintes au  $i^{\text{ème}}$  nœud et en tenant compte du fait que la frontière est lisse au point nodal de l'élément constant, l'équation (2.51) peut s'écrire :

$$\frac{1}{2} \{u\}^i + \sum_{j=1}^N [\bar{H}]^{ij} \{u\}^j = \sum_{j=1}^N [G]^{ij} \{t\}^j + \{F\}^i \quad (2.64)$$

si

$$[G]^{ij} = \begin{bmatrix} \int_{T_j} U_{\xi x}(q, p_i) ds_q & \int_{T_j} U_x(q, p_i) ds_q \\ \int_{T_j} U_{\xi y}(q, p_i) ds_q & \int_{T_j} U_{ny}(q, p_i) ds_q \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$$[\bar{H}]^{ij} = \begin{bmatrix} \int_{T_j} U_{\xi x}(q, p_i) ds_q & \int_{T_j} U_x(q, p_i) ds_q \\ \int_{T_j} U_{\xi y}(q, p_i) ds_q & \int_{T_j} U_{ny}(q, p_i) ds_q \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Et

$$\{F\}^i = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} [U_{\xi x}(Q, p_i) b_{\xi}(Q) + U_{\eta z}(Q, p_i) b_{\eta}(Q)] d\Omega_Q \\ \int_{\Omega} [U_{\xi y}(Q, p_i) + U_{ny}(Q, p_i) b_{\eta}(Q)] d\Omega_Q \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Avec  $p_i, q \in T$  et  $Q \in \Omega$ .

L'équation (2.64) relie les déplacements du  $i^{\text{ème}}$  nœud aux déplacements et les contraintes de tous les nœuds, y compris l' $i^{\text{ème}}$  nœud.

Appliquer l'équation (2.64) à tous les points nodaux de frontière donne 2N équations, qui peut être défini sous forme de matrice comme suite :  $[H] \{u\} = [G] \{t\} + \{F\}$ , où  $[H] = [\bar{H}] + \frac{1}{2}[I]$ .

Les dimensions des matrices  $[\bar{H}]$  et  $[G]$  sont  $2N \times 2N$ , et celles des vecteurs  $\{u\}$ ,  $\{t\}$  et  $\{F\}$  sont  $2N$ . Ils sont définis comme suite :

$$[G] = \begin{bmatrix} [G]^{11} & \dots & [G]^{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [G]^{N1} & \dots & [G]^{NN} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

**Chapitre 2 : Méthode des intégrales aux frontières pour les problèmes élastiques  
bidimensionnelles**

---

$$[\hat{H}] = \begin{bmatrix} [\hat{H}]^{11} & \dots & [G]^{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\hat{H}]^{N1} & \dots & [\hat{H}]^{NN} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Et

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \{u\}^1 \\ \{u\}^1 \\ \vdots \\ \{u\}^N \end{Bmatrix}, \quad \{t\} = \begin{Bmatrix} \{t\}^1 \\ \{t\}^1 \\ \vdots \\ \{t\}^N \end{Bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \{F\}^1 \\ \{F\}^1 \\ \vdots \\ \{F\}^N \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

Les équations  $2N$  dans la matrice de l'équation (2.68) contiennent  $4N$  valeurs limites, que soit  $2N$  valeurs de déplacements et  $2N$  valeurs de tractions. Cependant, un total de  $2N$  valeurs est connu à partir des conditions aux limites. Par conséquent, les équations (2.28) peuvent être utilisées pour déterminer les valeurs inconnues  $2N$  aux limites. Ça devrait être noté que le réarrangement des inconnues est nécessaire pour les conditions aux limites mixtes.

Alors, le système d'équations linéaires de  $2N$  inconnues suivant est obtenu

$$[A]\{X\} = \{R\} + \{F\} \quad (2.71)$$

Où  $[A]$  est une matrice carrée de dimensions  $2N \times 2N$ ,  $\{X\}$  est le vecteur comprenant les valeurs inconnues aux limites de dimension  $2N$  et  $\{R\}$  est un vecteur résultant comme la somme des colonnes des matrices  $[G]$  et  $[H]$  multipliée par les valeurs connues aux limites. Les colonnes issues des matrices  $[H]$  et  $[G]$  ont des signes inversés, lorsqu'ils sont déplacés de l'autre côté de l'équation.

Une attention particulière doit être portée dans le cas où seules des contraintes aux frontières sont prescrites, cela lorsque le vecteur  $\{t\}$  dans l'équation (2.68) est connue. Pour les conditions aux limites de ce type, (cas (iv) des équations (1.21)), les déplacements ne sont pas déterminés uniquement, car ils incluent également un mouvement de corps rigide. Cela se reflète dans la matrice  $[H]$  dont le rang est  $2N-3$  et donc non inversable. Pour surpasser ce problème, nous restreignons le mouvement du corps rigide. A cet effet, le corps est soutenu en mettant trois éléments du vecteur  $\{u\}$  égaux à zéro. L'attention devrait être payée dans la sélection des éléments afin d'exclure toutes les déterminations cinématiques infinitésimales du corps, qui conduirait à une matrice mal conditionnée  $[A]$ .

### 2.7.2 Evaluation des déplacements à l'intérieur du corps

Le système des équations (2.71) est résolu pour les valeurs des déplacements et des contraintes inconnues aux frontières. Par la suite, toutes les quantités aux limites sont connues et, par conséquent, les déplacements en tout point  $P(x, y_i)$  à l'intérieur du domaine  $\Omega$  peuvent être évalué à l'aide de l'équation. (2.38), qui après discrétisation devienne :

$$\{u\}^i = \sum_{j=1}^N [G]^{ij} \{t\}^j - \sum_{j=1}^N [\widehat{H}]^{ij} \{u\}^j + \{F\}^i \quad (2.72)$$

Les matrices  $[G]^{ij}$  et  $[\widehat{H}]^{ij}$  ainsi que le vecteur  $\{F\}^i$  sont évalués selon les équations (2.68), (2.69) et (2.70), respectivement, avec  $P \in \Omega$  à la place de  $p_i \in T$ .

L'exposant  $i$  appartient maintenant au point  $P_i(x_i, y_i)$  à l'intérieur de  $\Omega$  et non pas à l'un des nœuds aux frontières.

### 2.7.3 Evaluation des contraintes à l'intérieur du corps

Les contraintes en tout point  $P_i(x_i, y_i)$  à l'intérieur du domaine  $\Omega$  sont évaluées en utilisant les équations (2.94), (2.95) et (2.96), qui après discrétisation s'écrivent

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix}^i = \sum_{j=1}^N [\sigma]^{ij} \{t\}^j - \sum_{j=1}^N [\bar{\sigma}]^{ij} \{u\}^j + \{s\}^i \quad (2.73)$$

Les matrices  $[\sigma]^{ij}$  et  $[\bar{\sigma}]^{ij}$  ainsi que le vecteur  $\{s\}^i$  sont calculés à partir de des relations suivantes :

$$[\sigma]^{ij} = \begin{bmatrix} \int_{T_j} \sigma_{\xi x}(q, p_i) ds_q & \int_{T_j} \sigma_{x\eta}(q, p_i) ds_q \\ \int_{T_j} \sigma_{\xi y}(q, p_i) ds_q & \int_{T_j} \sigma_{\xi y\eta}(q, p_i) ds_q \\ \int_{T_j} T_{\xi xy}(q, p_i) ds_q & \int_{T_j} \sigma_{nxy}(q, p_i) ds_q \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

$$[\bar{\sigma}]^{ij} = \begin{bmatrix} \int_{T_j} \bar{\sigma}(q, p_i) ds_q & \int_{T_j} \bar{\sigma}_{x\eta}(q, p_i) ds_q \\ \int_{T_j} \bar{\sigma}(q, p_i) ds_q & \int_{T_j} \bar{\sigma}_{\xi y\eta}(q, p_i) ds_q \\ \int_{T_j} \bar{T}_{\xi xy}(q, p_i) ds_q & \int_{T_j} \bar{T}_{nxy}(q, p_i) ds_q \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

$$\{s\}^i = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} [\sigma_{\xi}(Q, p_i) b_{\xi}(Q) + \sigma_{\eta}(Q, p_i) b_{\eta}(Q)] d\Omega_Q \\ \int_{\Omega} [\sigma_{\xi}(Q, p_i) b_{\xi}(Q) + \sigma_{\eta}(Q, p_i) b_{\eta}(Q)] d\Omega_Q \\ \int_{\Omega} [T_{xy\xi}(Q, p_i) b_{\xi}(Q) + T_{xy\eta}(Q, p_i) b_{\eta}(Q)] d\Omega_Q \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

### 2.7.4 Evaluation des contraintes sur la frontière

Les contraintes  $\sigma_x, \sigma_y$  et  $T_{xy}$  sur la frontière peuvent être évaluées à partir des équations (2.60), (2.61) et (2.62) en faisant approcher le point  $P \in \Omega$  du point  $P \in T$ . Ceci, n'est pas

## Chapitre 2 : Méthode des intégrales aux frontières pour les problèmes élastiques bidimensionnelles

recommandé en raison des difficultés résultant du comportement des intégrales de ligne comme  $P \in \Omega$  passe à  $P \in T$  et d'autre part le besoin de traiter les lignes singuliers et les lignes hyper-singulières dans l'intégrale. Pour cette raison, la technique qui suit est préférée, elle est beaucoup plus simple et directe.

Les dérivées des déplacements  $u$  et  $v$  le long de la tangente à la frontière sont donnés comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x} n_y + \frac{\partial u}{\partial y} n_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial x} n_y + \frac{\partial v}{\partial y} n_x \end{aligned} \quad (2.77)$$

Ces dérivées peuvent être calculées à partir des valeurs limites de  $u$  et  $v$  à travers la différenciation numérique.

On collecte les équations (1.23) et (2.77), on peut écrire

$$\begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)n_x & \mu n_y & \mu n_y \lambda n_x \\ \lambda n_y & \mu n_x & \mu n_x (\lambda + 2\mu) n_y \\ -n_y n_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n_y n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ v_t \\ v_t \end{Bmatrix} \quad (2.78)$$

En tenant compte que  $n_x^2 + n_y^2 = 1$ , on peut facilement montrer que le déterminant de la matrice des coefficients dans Équation (2.78) est

$$D = -\mu(\lambda + 2\mu) \neq 0 \quad (2.79)$$

Par conséquent, les dérivées de  $u$  et  $v$  par rapport à  $x$  et  $y$  peuvent toujours être évaluées et les contraintes peuvent être calculées à partir des expressions

$$\sigma_x = \lambda (u_x + v_y) + 2\mu u_x$$

$$\sigma_y = \lambda (u_x + v_y) + 2\mu v_y$$

$$T_x = \mu (u_y + v_x) + 2\mu u_x$$

### 2.8 Forces du corps

Il est clair à partir des équations (2.75) et (2.76) que la conséquence des forces corporelles nécessite l'évaluation des intégrales de domaine. Ces intégrales peuvent être traitées dans l'une des manières suivantes :

#### 2.8.1 Evaluation numérique directe

Le domaine  $\Omega$  est discrétisé en cellules et l'intégration est effectuée à l'aide d'une procédure développée. Cette méthode, cependant, a deux inconvénients. Le premier est qu'il diminue l'efficacité des calculs de la méthode des intégrales de frontière en faisant intervenir le problème difficile de la discrétisation des domaines.

## Chapitre 2 : Méthode des intégrales aux frontières pour les problèmes élastiques bidimensionnelles

Bien sûr, le problème n'apparaît pas aussi complexe que dans le MEF, où le corps continu est approximé par la discrétisation. Dans le MIF, la discrétisation n'est employé que pour approximer l'intégrale par une somme. De même pour l'hypothèse de valeur constante de l'intégrale sur chaque cellule (élément fini discontinu) donne une bonne approximation pour l'intégrale. Ce fait est une conséquence de la valeur moyenne du théorème de calcul intégral.

Le deuxième inconvénient de l'intégration de domaine provient à partir des équations (1.20), (1.22), (2.28), (2.31) et (2.71) dont les intégrales se comportent comme  $\ell n(r)$ ,  $1/r$ ,  $1/r^2$  ou  $1/r^3$ , où  $r = |P - Q|$ . Ces intégrales deviennent singulières ou hyper-singulières, lorsque le point P se trouve sur la cellule au quelle l'intégration est effectuée, car le point Q se trouve également sur la même cellule et donc r prendra entre autres la valeur  $r = 0$ . Plusieurs des méthodes ont été développées pour l'évaluation de ces intégrales [14]. Une méthode relativement simple mais efficace et précise est celle développée par Katsikadelis [15], qui convertit les intégrales de domaine singulier ou hyper-singulier en intégrales de ligne régulière sur le bord de la cellule.

### 2.8.2 Evaluation à l'aide d'une solution particulière

Dans ce cas, la solution des équations de Navier, l'équation (1.19), est obtenue comme la somme de deux solutions

$$u = u_0 + u_1, v = v_0 + v_1 \quad (2.81)$$

où  $u_0, u_1$  est la solution de l'équation homogène et  $v_0, v_1$  est la solution particulière et l'une des équations non homogènes. En utilisant la notation des équations (1.7) pour les opérateurs différentiels, les équations de Navier s'écrivent

$$\left. \begin{aligned} N_x(u, v) &= b_x \\ N_y(u, v) &= b_y \end{aligned} \right\} \text{ dans } \Omega \quad (2.82)$$

En utilisant les équations. (2.81) et en tenant compte du fait que les opérateurs  $N_x, N_y$  sont linéaire, on peut obtenir la solution  $u_0$  et  $v_0$  à partir du problème aux limites suivant

$$\left. \begin{aligned} N_x(u_0, v_0) &= b_x \\ N_y(u_0, v_0) &= b_y \end{aligned} \right\} \text{ dans } \Omega \quad (2.83)$$

Et

$$(i) \quad u_0 = \bar{u} - u_1, v_0 = \bar{v} - v_1 \quad \text{sur } T_1 \quad (2.84a)$$

$$(ii) \quad u_0 = \bar{u} - u_1, (t_y)_0 = \bar{t}_y - t_y^1 \quad \text{sur } T_2 \quad (2.84b)$$

$$(iii) \quad (t_x)_0 = \bar{t}_x - t_x^1, v_0 = \bar{v} - v_1 \quad \text{sur } T_3 \quad (2.84c)$$

$$(iv) \quad (t_x)_0 = \bar{t}_x - t_x^1, (t_y)_0 = \bar{t}_y - t_y^1 \quad \text{sur } T_4 \quad (2.84d)$$

## Chapitre 2 : Méthode des intégrales aux frontières pour les problèmes élastiques bidimensionnelles

Les types de conditions aux limites ci-dessus résultent des équations (1.21) lorsque ceux-ci sont exprimé en termes de  $u_0$  et  $v_0$ . Les composantes de contraintes  $t_x^1$  et  $t_y^1$  sont obtenues à partir des équations (1.23), si  $u$  et  $v$  sont remplacés par  $u_1, v_1$ .

La solution particulière est obtenue à partir des équations 
$$\begin{cases} N_x(u_1, v_1) = b_x \\ N_y(u_1, v_1) = b_y \end{cases}$$

Il est évident que la détermination de la solution particulière doit prévenir la solution des équations homogènes. La solution particulière peut être obtenue à partir des équations (2.11)

$$\begin{aligned} 2G u_1 &= \frac{2}{1+\bar{\nu}} \nabla^2 \phi_1 - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \\ 2G v_1 &= \frac{2}{1+\bar{\nu}} \nabla^2 \psi_1 - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.85)$$

Les fonctions  $\phi_1, \psi_1$  sont les composantes du vecteur de Galerkin et elles sont déterminées comme une solution particulière des équations suivantes

$$\nabla^1 \phi_1 = -(1 + \bar{\nu}) b_x \quad (2.86a)$$

$$\nabla^1 \psi_1 = -(1 + \bar{\nu}) b_y \quad (2.86b)$$

Les équations (2.86a) et (2.86b) représentent l'équation de flexion d'une plaque mince soumise aux charges transversales  $-(1 + \bar{\nu}) b_x$ , et  $-(1 + \bar{\nu}) b_y$ , respectivement. Une solution particulière de ces équations peut être obtenue en utilisant la méthode présentée dans [16].

En introduisant les variables

$$z = x + iy \quad \text{et} \quad \bar{z} = x - iy \quad (2.87)$$

L'équation (2.86a) est transformée en :

$$16 \frac{\partial^4 \bar{\Phi}_1}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = b_x(z, \bar{z}) \quad (2.88)$$

Où, il a été posé

$$\bar{\Phi}_1 = -\frac{\phi_1}{(1+\bar{\nu})} \quad (2.89)$$

La solution particulière  $\bar{\Phi}_1(z, \bar{z})$  est facilement obtenue en intégrant successivement quatre fois l'équation (2.88). Puisque nous recherchons une solution particulière, les fonctions d'intégration arbitraires résultantes peuvent être négligées, par la suite, la substitution de  $z$  et  $\bar{z}$  et en utilise les équations (2.87) donne  $\bar{\Phi}_1(x, y)$ . De même, nous trouvons la solution particulière  $\bar{\Psi}_1(x, y)$  de l'équation (2.86b).

### 2.8.3 Transformation des intégrales de domaine en intégrales de frontière



## Chapitre 2 : Méthode des intégrales aux frontières pour les problèmes élastiques bidimensionnelles

Cette méthode est plus proche de la logique de la méthode des intégrales de frontières, car l'intégration de domaine est évitée et le caractère pur de frontière de la méthode est conservé. La transformation des intégrales de domaine aux intégrales de ligne peuvent être accomplies par différentes techniques. Deux méthodes vont être présentées dans la suite. L'un est général et ils' applique aux forces du corps ayant une distribution arbitraire, tandis que l'autre est utilisé pour les forces du corps dérivées d'une fonction potentielle.

### a- Forces du corps ayant une distribution arbitraire

Tout d'abord, en utilisant la procédure présentée dans la section précédente, nous déterminons une solution  $u_1, v_1$  pour les équations de Navier

$$N_x(u_1, v_1) = b_x$$

$$N_y(u_1, v_1) = b_y$$

Ensuite, la relation réciproque (2.5) est employée consécutivement pour

$$(i) \quad u = u_1, \quad v = v_1 \text{ et } u^* = U_{\xi x}, \quad v^* = U_{\eta x}$$

$$(ii) \quad u = u_1, \quad v = v_1 \text{ et } u^* = U_{\xi y}, \quad v^* = U_{\eta y}$$

Et ayant à l'esprit que la solution fondamentale  $U_{\xi y}, U_{\eta y}, U_{\eta x}, U_{\xi x}$  satisfait l'équation

$$\left. \begin{aligned} N_x(U_{\xi x}, U_{\eta x}) &= \delta(Q - p) \\ N_y(U_{\xi x}, U_{\eta x}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.90a)$$

$$\left. \begin{aligned} N_x(U_{\xi y}, U_{\eta y}) &= 0 \\ N_y(U_{\xi y}, U_{\eta y}) &= \delta(Q - p) \end{aligned} \right\} \quad (2.90b)$$

On obtient les composantes  $F_x$  et  $F_y$  du vecteur (2.85) comme suit :

$$F_x(p) = \xi_{11} u_1(p) + \xi_{21} v_1(p) - \int_T [U_{\xi x}(q, p) t_{\xi}^1(q) + U_{\eta x}(q, p) t_{\eta}^1(q)] d_{sq} \\ + \int_T [T_{\xi x}(q, p) u_1(q) + T_{\eta x}(q, p) v_1(q)] d_{sq} \quad (2.91)$$

$$F_y(p) = \xi_{11} u_1(p) + \xi_{22} v_1(p) - \int_T [U_{\xi y}(q, p) t_{\xi}^1(q) + U_{\eta y}(q, p) t_{\eta}^1(q)] d_{sq} \\ + \int_T [T_{\xi y}(q, p) u_1(q) + T_{\eta y}(q, p) v_1(q)] d_{sq} \quad (2.92)$$

Où les coefficients  $\xi_y$  prennent la valeur  $\xi_y = \delta_y$  pour  $p \in \Omega$ , tandis que pour  $P \in T$ , ils sont évalués à partir des équations (2,56)-(2,59). Si la frontière est lisse au point  $P \in T$ , il est  $\xi_y = \frac{1}{2} \delta_{ij}$ .

Il convient de noter que les équations (2.91) et (2.92) sont valables pour les forces de corps  $b_{\xi}$  et  $b_{\eta}$  qui sont répartis sur tout le domaine  $\Omega$ . Si,  $b_{\xi}$  ou  $b_{\eta}$  n'agissent que sur une sous-région  $\Omega^* \subset \Omega$ , alors pour les points P en dehors de  $\Omega^*$  c'est  $\xi_y = 0$  et donc les termes en dehors des intégrales



## Chapitre 2 : Méthode des intégrales aux frontières pour les problèmes élastiques bidimensionnelles

---

$$\int_{\Omega} (U_{\xi x, \xi} + U_{\eta x, \eta}) V d\Omega = -\frac{2(1-\bar{\nu})}{8\pi G} \int_{\Omega} (\ell n(r))_{,\xi} V d\Omega \quad (2.96)$$

De plus,  $\Phi = \frac{1}{4} r^2 \ell n r$ , d'où  $\nabla^2 \Phi_{,\xi} = (\ell n r)_{,\xi}$ , Puis en appliquant l'identité de Green

$$\int_{\Omega} (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v) d\Omega = \int_{\Omega} (v \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial v}{\partial n} u) ds$$

pour  $u=V$  et  $u=\Phi_{,\xi}$ , on trouve :

$$\int_{\Omega} \nabla^2 V \Phi_{,\xi} d\Omega = \int_T (V \frac{\partial \Phi_{,\xi}}{\partial n} - \Phi_{,\xi} \frac{\partial V}{\partial n}) ds \quad (2.97)$$

Maintenant, l'équation (2.95) peut être écrite sous forme finale comme suite :

$$F_x = \frac{(1-\bar{\nu})}{4\pi G} \int_T (V \frac{\partial \Phi_{,\xi}}{\partial n} - \Phi_{,\xi} \frac{\partial V}{\partial n}) ds + \int_T (U_{\xi x} \eta_x + U_{\eta x} \eta_y) ds \quad (2.98)$$

Même chose la contribution des forces dans la direction (oy) peut être obtenue seulement en termes de l'intégrale à la frontière comme suite :

$$F_y = \frac{(1-\bar{\nu})}{4\pi G} \int_T (V \frac{\partial \Phi_{,n}}{\partial n} - \Phi_{,n} \frac{\partial V}{\partial n}) ds + \int_T (U_{\xi y} \eta_x + U_{\eta y} \eta_y) ds \quad (2.99)$$

### Conclusion

La méthode des intégrales aux frontières est une méthode semi-analytique, utilisée généralement pour la résolution des problèmes statique et linéaire.

Dans le cas électrostatique, la méthode des intégrales aux frontières est compliquée, à cause des matrices pleines, de plus la solution à deux inconnus concernant les déplacements.

# **Chapitre 3 :**

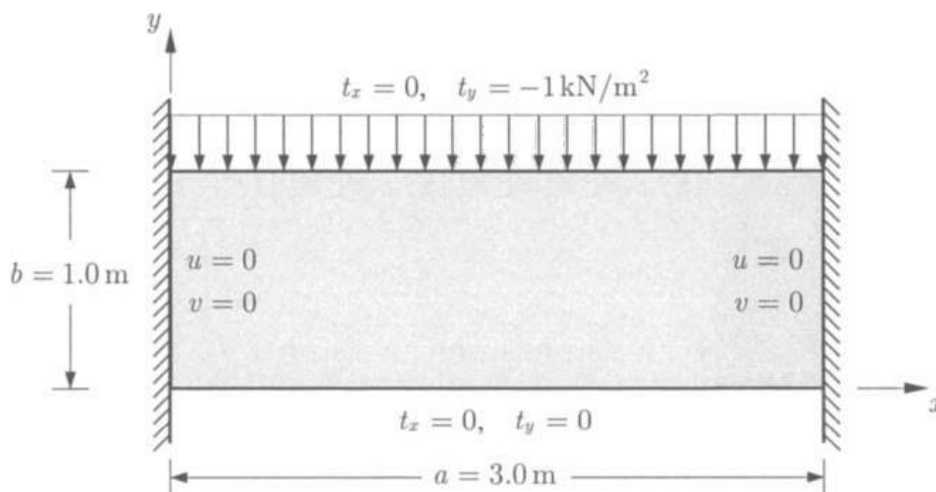
## **Application et résultats**

### 3-1 Introduction :

Le but de cette application est de modéliser le problème d'élasticité pour les deux états de déformation et de contrainte, dans un premier temps on modélise un problème simple, c'est le cas de l'état plane de contrainte, le corps considéré est une poutre large, dont sa largeur n'est pas assez large si on y compare par sa profondeur. La deuxième application rentée dans la modélisation de l'état plane de déformation, l'application est assez compliquée par rapport à la première, c'est le cas d'une conduite soumise à des précontraintes de compression (pression des fluides) à ses extrémités internes. Les calculs des valeurs de contraintes et de déformations sont faits par la méthode des équations intégrales aux frontières (MEIF).

### 3-2 Application de la MEIF sur une poutre soumise à des contraintes extérieures

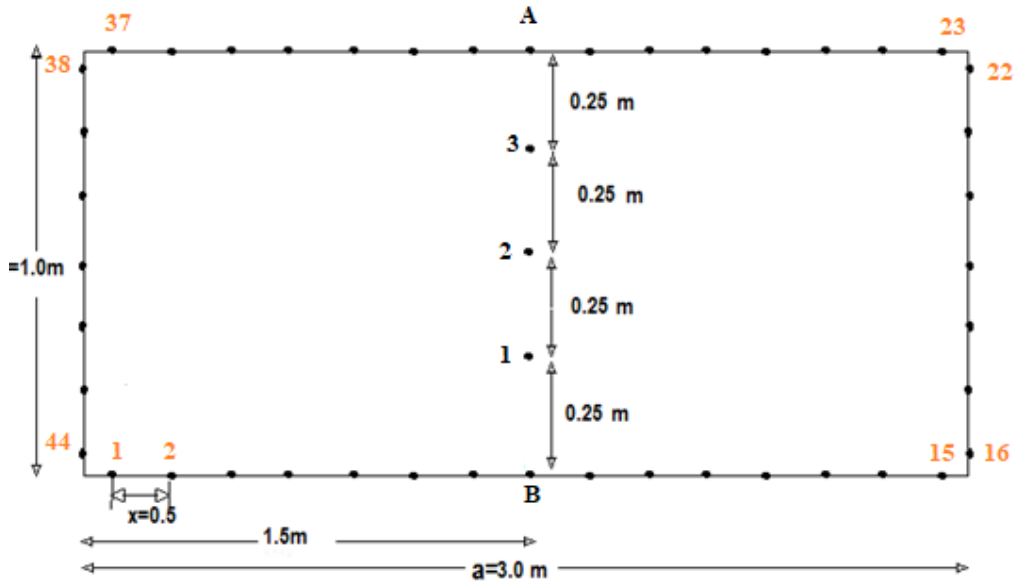
La poutre est encastree à ses deux extrémités. Son épaisseur est  $h = 0.1\text{m}$ , le matériau à un module de Young  $E=2 \times 10^5 \text{KN/m}^2$  et un coefficient de poisson  $\nu = 0.20$ , tous les données géométriques et les conditions aux limites sont illustrés dans la figure 3.1.



**Figure 3.1** Poutre étudiée sous contraintes de compression.

Les résultats sont obtenus après discrétisation de la structure par l'utilisation de 44 éléments aux frontières qui sont illustrés sur la figure 3.2.

Les frontières horizontales (supérieure et inférieure) sont divisées en  $N_x = 15$  éléments de frontière, cependant, les frontières verticales (droit et gauche) sont divisées en  $N_y = 7$  éléments.



**Figure.3.2** Discrétisation de poutre encastée en 44 éléments de frontières.

Le tableau 3.1 présente les valeurs calculées de déplacement  $v$  et les contraintes  $\sigma_x$  dans la section à  $x=1.5\text{m}$ , pour plusieurs valeurs de nombre des éléments de frontières  $N$ , elles sont comparées par des valeurs obtenues par la méthode des éléments fins de la théorie des poutres Timoshenko [8].

**Tableau 3.1 :** Comparaison entre les valeurs dans les points internes et de frontière en fonction de nombre d'éléments  $N$ .

Points	Nombre des nœuds $N$ aux frontières (MEIF)						FEM	Théorie des poutres
	44	244	404	532	804	1604		

**Déplacement  $v \times 10^{-4}$**

A	-0.1381	-0.2633	-0.2766	-0.2815	-0.2864	-0.2911	-0.2924	
2	-0.1252	-0.2495	-0.2627	-0.2675	-0.2754	-0.2771	-0.2783	-2.2885
B	-0.1140	-0.2392	-0.2525	-0.2574	-0.2623	-0.2670	-0.2682	

**Contraintes  $\sigma_x$  (N/m<sup>2</sup>)**

A	-1.250	-2.491	-2.614	-2.660	-2.706	-2.750	-2.630	-2.250
3	-0.581	-1.055	-1.106	-1.124	-1.143	-1.161	-1.170	-1.125
2	-0.092	-0.090	-0.090	-0.090	-0.090	-0.090	-0.089	0.000
1	0.394	0.872	0.923	0.961	0.961	0.979	0.986	1.125
B	1.061	2.259	2.383	2.475	2.475	2.519	2.450	2.250

La déflexion de point 2 est donnée par l'expression :

$$v_2 = \frac{q\alpha^4}{384EI} \left[ 1 + 8K(1 + \nu) \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right]$$

Où :  $k$  est le coefficient de forme de la section ( $k=1.5$  pour les sections rectangulaires) et  $q$  est la charge par unité de longueur ( $q = -h t_y$ ).

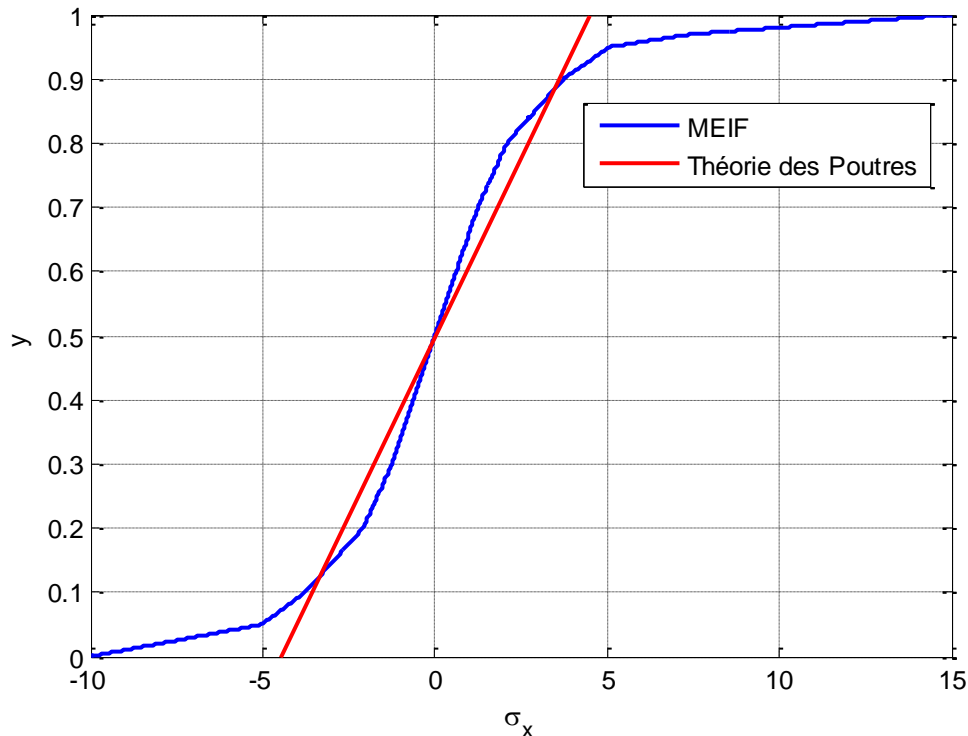
Pour la théorie des poutres, les contraintes  $\sigma_x$  est calculées par l'expression :

$$\sigma_x = (M/I)(0.5 - y)$$

Où :  $M = \frac{q\alpha^2}{24}$  est le moment d'inertie dans la section.

On remarque pour  $N=44$  éléments de frontière, que ce nombre est insuffisant pour une solution adéquate. La convergence de la méthode des intégrales aux frontières est achevées pour  $N=1604$  pour ( $N_x=501$ ,  $N_y=301$ ), ou pour la méthode des éléments finis [24,25] est achevées avec 432 élément triangulaires.

Finalement, la distribution de  $\sigma_x$  dans la section en  $x = 3.0m$  est illustrée sur la figure 3.3.



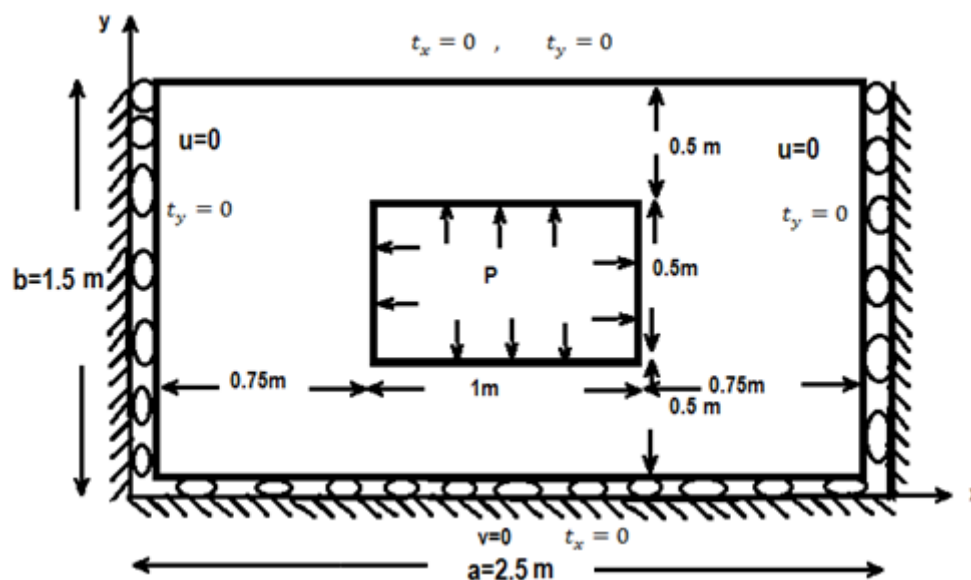
**Figure 3.3** :Distribution de  $\sigma_x$  à la section transversale  $x=3.0$ .

La figure montre que la méthode des équations intégrales aux frontières se rapproche à celle de la théorie des poutres.

### 3-3 Application de la MEIF sur une conduite soumise à des pressions à l'intérieur

La conduite de la figure 3.4, possède une section uniforme est totalement assez allongé dans la direction (oz), ce qui produit un état plan de déformation. Le module de Young de matériaux est  $E=2.10^5 \text{KN/m}^2$  et le coefficient de Poisson est  $\nu = 0.2$ .

La poutre est soumise à des pressions  $=1 \text{MPa}$ , dans ses frontières internes, elles sont distribuées uniformément.



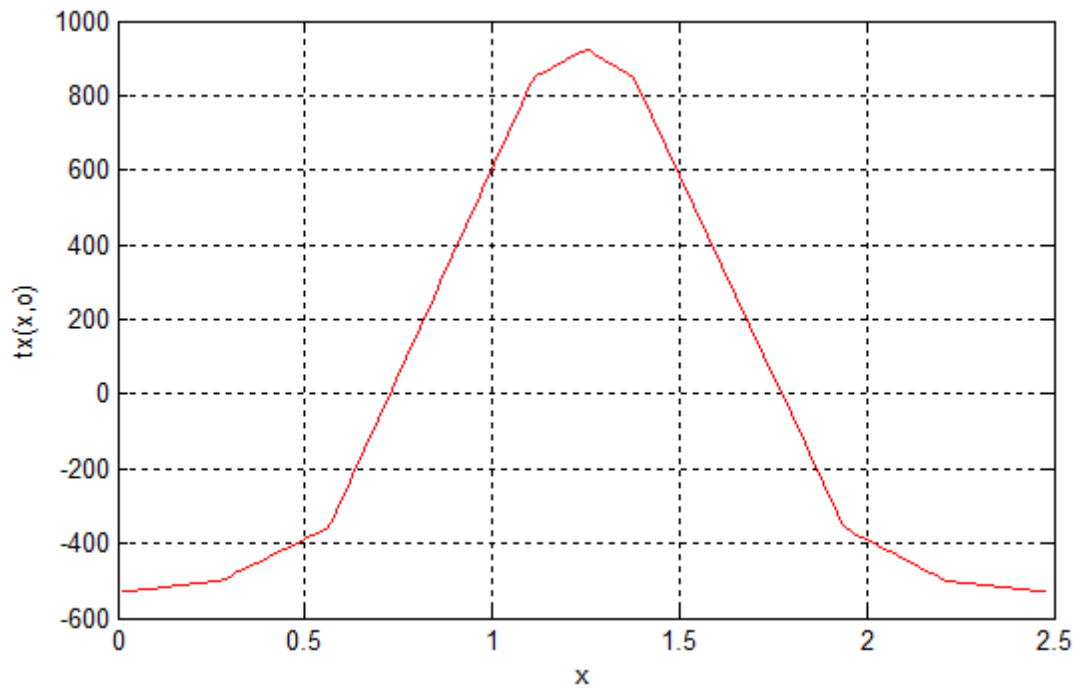
**Figure 3.4 :** Conduite sous pression uniforme, données géométriques et conditions aux limites.

Les résultats ci-après sont obtenus par l'utilisation de  $N=348$  éléments de frontières, les frontières externes de la conduite, sont discrétisées en  $N1=284$  éléments de frontières, dont  $Nx = 2 \times 91$  éléments et  $Ny = 2 \times 51$  éléments. Les frontières internes de la conduite sont discrétisées en  $N2=64$  éléments :  $Nx = 2 \times 21$  éléments et  $Ny = 2 \times 11$  éléments.

Les nœuds discrétisés dans les milieux horizontale et verticale du corps de la conduite sont 28 points, dont 18 nœuds suivant l'axe ( $Ox$ ) et 10 suivant l'axe ( $Oy$ ).

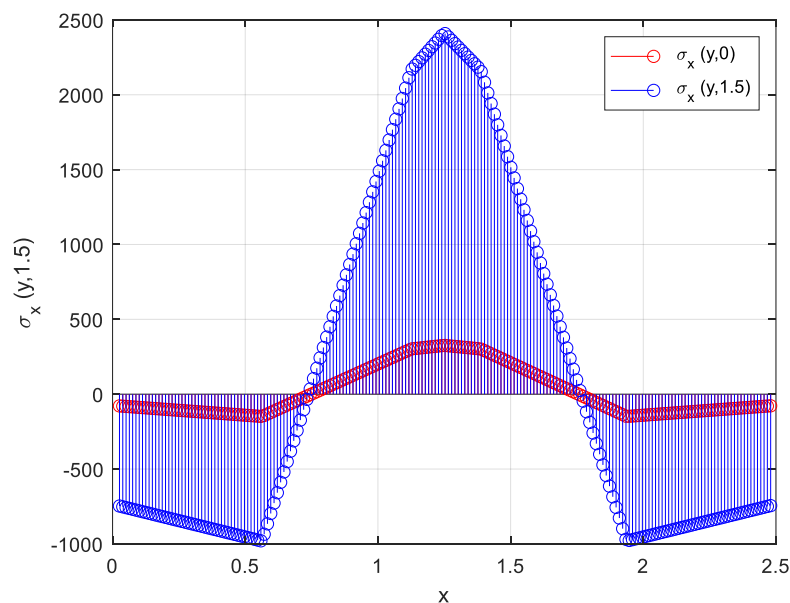


La distribution des précontraintes  $t_y$  obtenue le long de la frontière à  $y=0$  m est représentée sur la figure 3.5, en remarque une distribution symétrique des précontraintes.

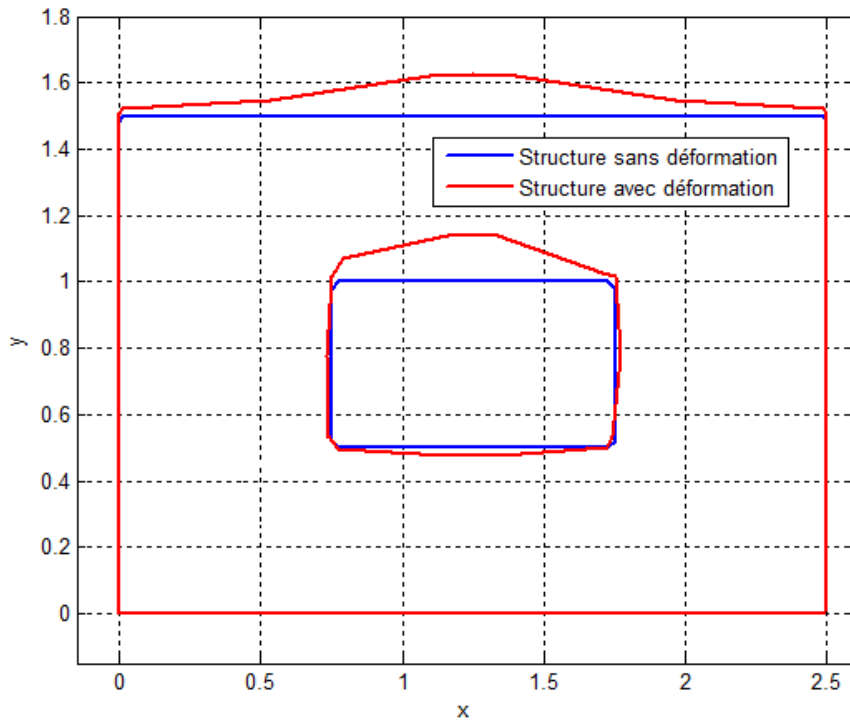


**Figure 3.5 :** Distribution de  $t_y$  le long de la frontière à  $y=0$  m.

Les calculs de la composante longitudinale des contraintes, sont représentés sur la figure 3.6, à  $y=0$  m et à  $y=1.5$  m.

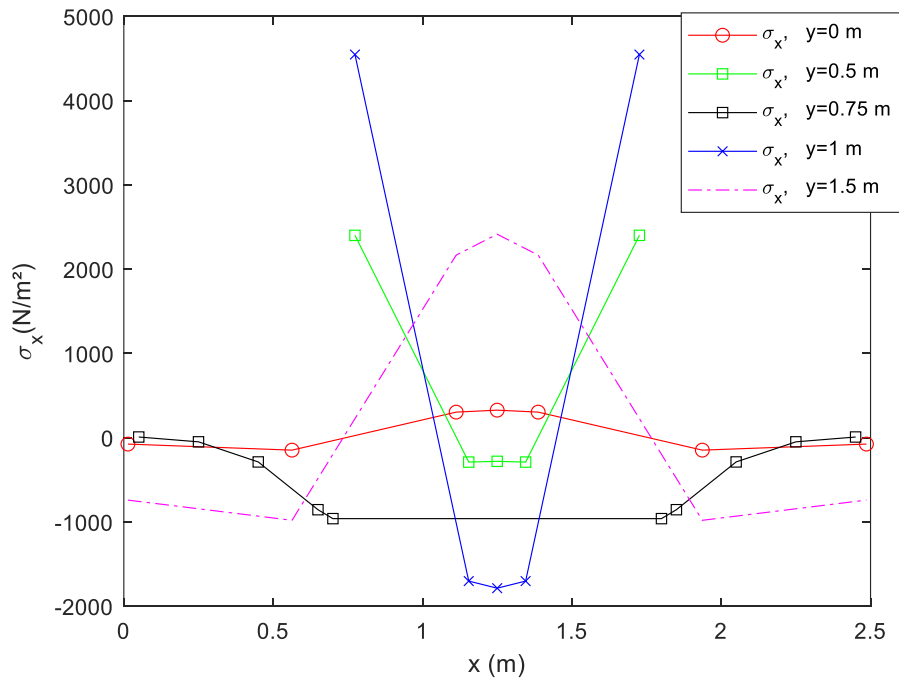


**Figure 3.5 :** Distribution de  $\sigma_x$  dans la section en  $x = 2,5$  m



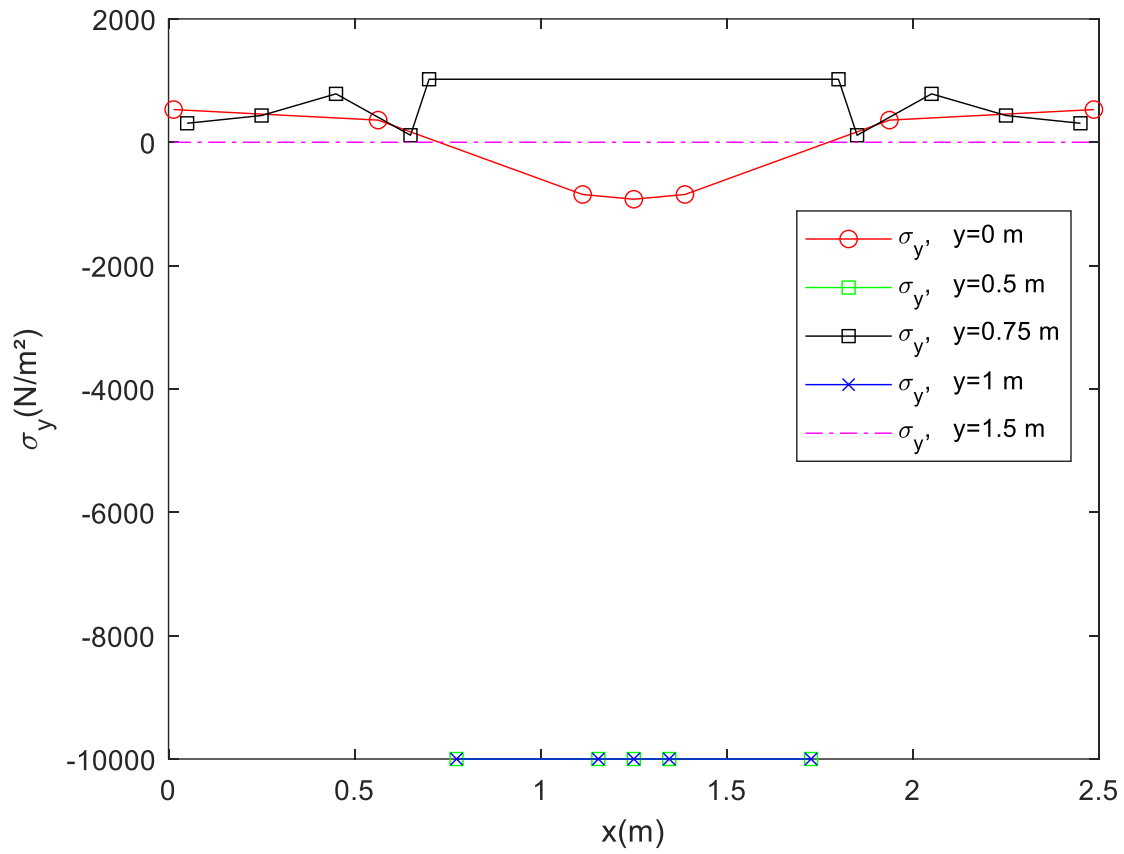
**Figure3.6 :** Structure de la conduite avant et après déformation.

En remarque dans la figure 3.6, que la déformation conduite dans sa partie intérieure sur tous les côtés du rectangle intérieur de la conduite, aussi à l'extérieur dans la partie supérieure de la surface de la conduite. La déformation interne de la conduite est due aux différentes forces appliquées sur la circonférence du rectangle intérieur vers le rectangle extérieur verticalement et horizontalement selon le côté.



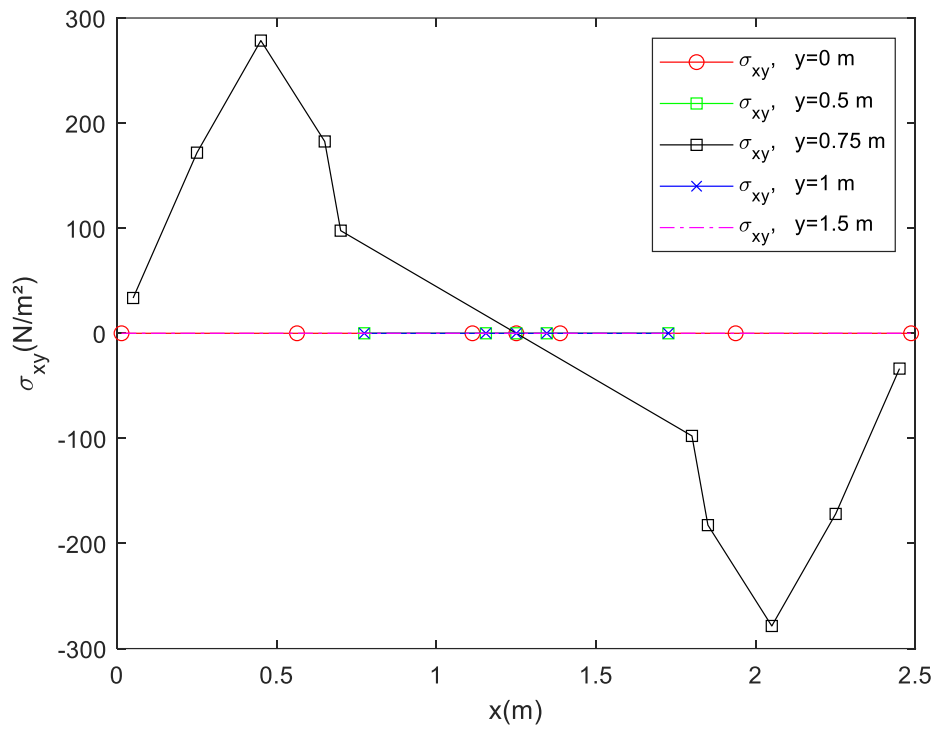
**Figure 3.7 :** Distribution de  $\sigma_x$  dans la section en  $x = 2.5 \text{ m}$

Sur la figure 3.7, nous voyons cinq courbes de contrainte  $\sigma_x$  symétriques par rapport à la droite  $x=1.25\text{m}$



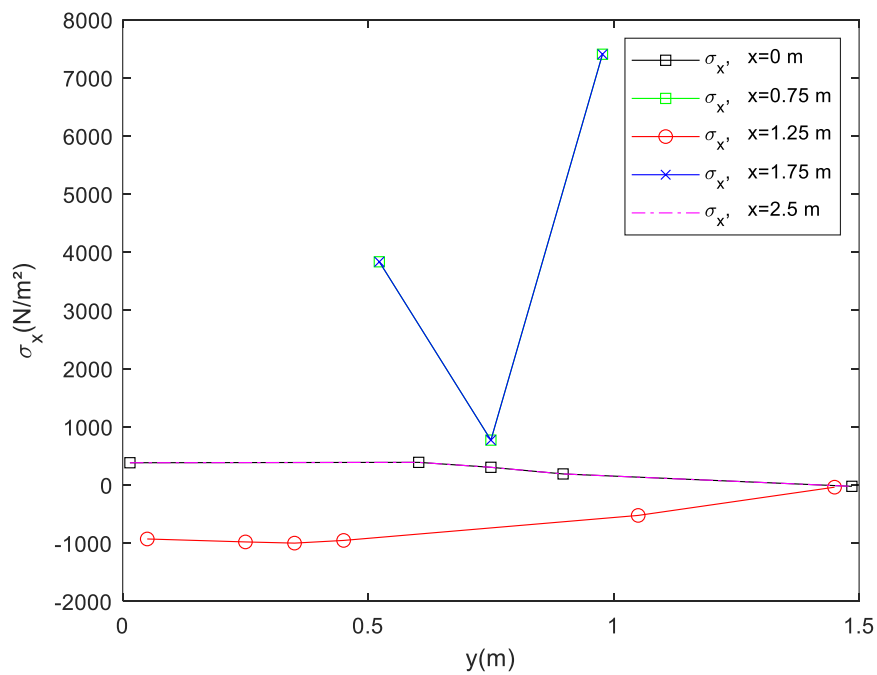
**Figure 3.8 :** Distributions de  $\sigma_y$  dans la section en  $x = 2.5$  m

Sur la figure 3.8, nous voyons cinq courbes de contrainte  $\sigma_y$  symétriques par rapport à la droite  $x=1.25$  m.



**Figure3.9 :** Distribution de  $\sigma_{xy}$  dans la section en  $x = 2.5$  m

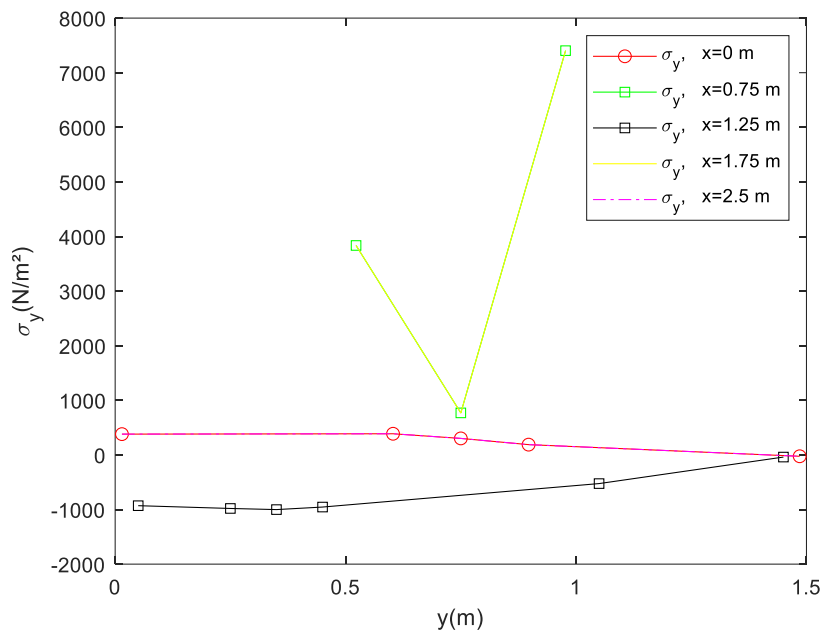
Dans la figure 3.9 cinq courbes de contraintes  $\sigma_{xy}$  sont symétriques par rapport aux coordonnées du point (1.25m ; 0m).



**Figure3.10 :** Distribution de  $\sigma_x$  dans la section en  $y = 1.5$  m

On note sur la figure3.10, la courbe  $\sigma_{x'}(x = 0.75)$  est identique à  $\sigma_{x'}(x = 1.75m)$  et la courbe  $\sigma_{x'}(x = 0m)$  est identique aussi à celle  $\sigma_{x'}(x = 2.5m)$  est qui est au-dessus de l'axe des abscisses.

La courbe sous l'axe des abscisses  $\sigma_{x'}(x = 1.25)$  symétrique par rapport au point  $(1.25m ; 0m)$  avec la courbe  $\sigma_{x'}(x = 2.5m)$ .

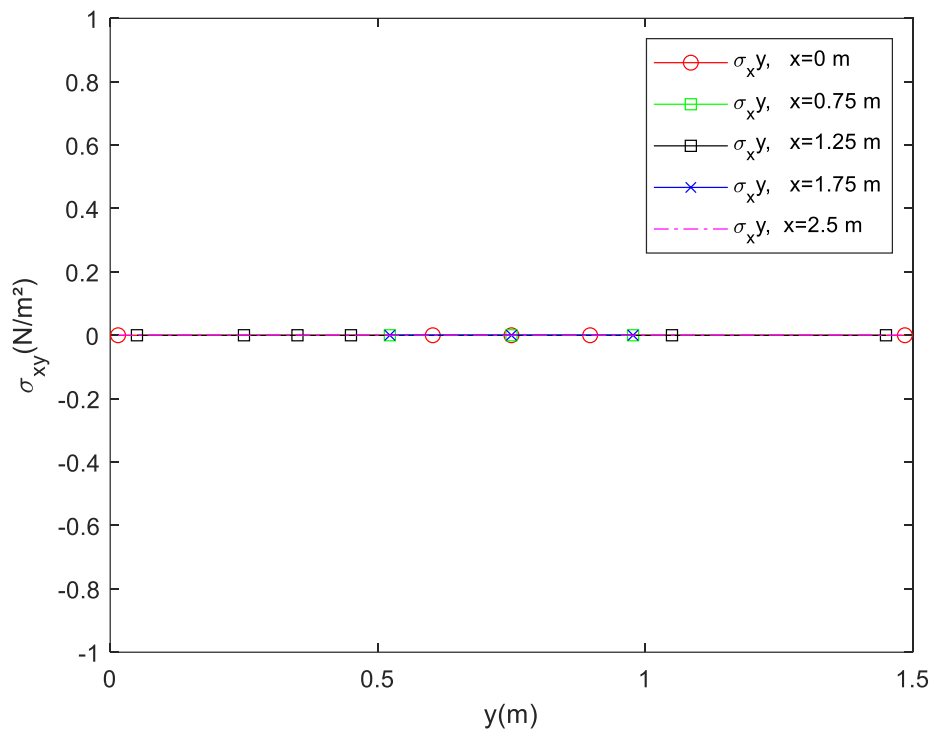


**Figure3.11** : distribution de  $\sigma_y$  dans la section en  $y = 1.5 m$

On note sur la figure3.11, La courbe  $\sigma_{x'}(x = 0.75m)$  est identique à celle de  $\sigma_{x'}(x = 1.75m)$  et la courbe  $\sigma_{x'}(x = 0m)$  est identique à celle de  $\sigma_{x'}(x = 2.5m)$  est qui est au-dessus de l'axe des abscisses.

La courbe sous l'axe des abscisses  $\sigma_{x'}(x = 1.25m)$  symétrique par rapport au point

$(1.25m ; 0m)$  avec a courbe  $\sigma_{x'}(x = 2.5m)$ .



**Figure 3.12 :** Distribution de  $\sigma_{xy}$  dans la section en  $y = 1.5$  m.

Nous pouvons voir sur la figure 3.12, que toutes les courbes s'ajustent sur l'axe des abscisses.

### Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié deux applications différentes : la poutre et la conduite.

Dans la première application, nous avons étudié la déformation de la poutre avec une division de la circonférence intérieure et extérieure avec peu de points par rapport à la deuxième application.

Comme pour la deuxième application, nous avons étudié la pression interne et externe de la conduite, mais de gros points de pression ont été divisés, plus importants que la première application, et nous avons constaté une plus grande déformation de la conduite.

Mais nous remarquons que la pression est l'opposé de l'extension et plus le matériau auquel la pression ou la déformation est appliquée est différent, plus l'intensité de la force appliquée au matériau est différente pour déformation.

# **Conclusion générale**



Le travail présenté dans ce projet de fin d'étude consiste à étudier les phénomènes de l'élasticité et nous sommes concentrés sur la simplification de ce domaine sur la méthode des intégrales de frontières (MIF) et avons également pu résoudre certaines des problèmes qui se posent dans les matériaux et atteindre leur représentation et simplifier avec des courbes graphiques

On a une liaison entre la déformation et la contrainte s'appelle la loi de Hooke Et dans le domaine de l'élasticité, nous avons une relation de corrélation directe (proportionnel) entre la déformation et la contrainte.

La méthode des intégrales de frontière permet de ramener l'étude du comportement global d'une structure (relation entre sollicitation, forces ou moments, et déplacements) à celle du comportement local des matériaux les composant (relation entre contrainte et déformation) l'objectif est de concevoir la structure déformation admissible et de coût financier acceptable

La méthode MEIF est l'une des meilleures méthodes pour modéliser les matériaux ferromagnétiques sous forces non magnétiques En conclusion, cette étude basée sur la méthode intégrée à la frontière a permis de confirmer la robustesse et la précision d'une telle approche pour traiter des problèmes non linéaires Transitoires avec limites libres D'une part dans le cadre potentiel, la méthode était bonne Amélioration des conditions transitoires en couplant une technologie précise de "suivi du temps «Et rapidement. En revanche, une brèche s'est ouverte, tant d'un point de vue artisanal Implémentation théorique et numérique, vers la résolution d'équations complètes de Navier Stokes

# **Références et Bibliographiques**

- [1] Frey, François "Analyse des structures et milieux continus, volume 2 : mécanique des structures ", presses polytechniques et universitaire romandes, lausanne, 1994
- [2] Mariotti, Christian ; Monasse, Laurent "De la mécanique générale au discontinu : approche unifiée de l'élasticité ", presses des ponts, Paris, 2011.
- [3] François, Dominique ; Pineau, André ; Zaoui, André "Elasticité et plasticité ", Lavoisier, Paris, 2009.
- [4] Poincaré, Henri "Leçons sur la théorie de l'élasticité ", J. Gabay, Paris, DL 2008
- [5] M. Corveon, « *circuit électrique magnétiques* » haute école d'ingénierie et de gestion du canton de Vaud
- [6] [Elasticité Yves Debarb Institut Universitaire de Technologie du Mans  
Département Génie Mécanique et Productique  
<http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html> [24 mars 2006 - 31 mai 2011] Livre BEM
- [7] Ugural, A.C. et Fenster, S.K., 1995. Résistance avancée et élasticité appliquée, 3e édition, Prentice Hall PTR, New Jersey.
- [8] Timoshenko, S. et Goodier, J.N., 1951. Théorie de l'élasticité, 2e édition, McGraw Hill, New York.
- [9] John T. Katsikadelis " BOUNDARY ELEMENTS" Department of Civil Engineering, National Technical University of Athens, Athens, Greece, 2002, ELSEVIER AMSTERDAM - LONDON - NEW YORK - OXFORD - PARIS - TOKYO BOSTON - SAN DIEGO - SAN FRANCISCO - SINGAPORE - SYDNEY
- [10] Malvern, L.E., 1969. Introduction à la mécanique d'un milieu continu, Prentice Hall, Englewood, New Jersey.
- [11] Lass, H., 1950. Analyse vectorielle et tensorielle, McGraw-Hill, New York.
- [12] Kupradze, V.D., 1965. Méthodes potentielles dans la théorie de l'élasticité, Israël Programme de traductions scientifiques, Jérusalem.
- [13] Banerjee, P.K. and Butterfield, R., 1981. Boundary Elements in Engineering Science, McGraw-Hill, New York.
- [14] Sladek, V. and Sladek, J. (eds.), 1998. Singular integrals in Boundary Element Methods, Computational Mechanics Publications, Southampton.
- [15] Katsikadelis, J.T., 1994. The Analog Equation Method. A Powerful BEM based Solution Technique for Linear and Nonlinear Engineering Problems,

in: Brebbia, C.A. (ed.), Boundary Element XVI, pp.167-183, Computational Mechanics Publications, Southampton.

[16] Katsikadelis, J.T. and Armenakas, A.E., 1989. A New Boundary Equation Solution to the Plate Problem, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.56, pp.364-374.

[17] Katsikadelis, J.T., 1998. Unpublished notes.

[18] Boversi, A.P., 1965. Elasticity in Engineering Mechanics, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[19] Fung, Y.C., 1965. Foundations in Solids Mechanics, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[20] Wang, C.T., 1953. Applied Elasticity, McGraw-Hill, New York.

[21] Novozhilov, V.V., 1961. Theory of Elasticity, Pergamon Student editions, Oxford.

[22] Muskhelishvili, N.I., 1963. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, 4 th edition, P. Noordhoff Ltd., Groningen-The Netherlands.

Chapter 7 The BEM for Two-Dimensional Elastostatic Problems 281

[23] Sokolnikoff, I., 1950. Mathematical Theory of Elasticity, 2 nd edition, McGraw-Hill, New York.

[24] J.F. Lmbert, « analyse des structures par éléments finis » cepadus, paris.1984

[25] Sladek, V. and Sladek, J. (eds.), 1998. Singular hltegrals in Boundary Element Methods, Computational Mechanics Publications, Southampton.

## Résumé :

Dans cet article, nous avons traité de la modélisation du problème d'élasticité de deux états de contrainte et de déformation selon la méthode des intégrales aux frontières (MIF). Et représenter certains problèmes et comprendre ce qui arrive aux objets élastiques lorsqu'ils sont exposés à des forces non magnétiques.

L'étude a été menée dans le domaine de la flexibilité uniquement.

**Mots clés :** modélisation, élasticité , contrainte, déformation, force non magnétique

## Abstract:

In this article, we dealt with the modeling of the problem of elasticity of two states of stress and deformation according to the method of integrals with the borders (MIF)

And represent some problems and understand what happens to elastic objects when exposed to non-magnetic forces.

The study was conducted in the area of flexibility only.

**Key words:** modeling, elasticity, stress, deformation , non-magnetic forces

## الملخص:

في هذا المقال ، تناولنا نمذجة مشكلة المرونة حالتين من الإجهاد والتشوه وفقاً لطريقة التكاملات مع الحدود (MIF) وتمثيل بعض المشاكل وفهم ما يحدث للأجسام المرنة عند تعرضها لقوى غير مغناطيسية. أجريت الدراسة في مجال المرونة فقط.

**الكلمات المفتاحية:** مرونة, نمذجة, الإجهاد, التشوه, قوى غير مغناطيسية