

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BENYAHIA JIJEL

Faculté des sciences et de la technologie

Département d'Électrotechnique

N° :..... /2022

## **MEMOIRE DE MASTER**

**DOMAINE: Sciences et Technologies**

**FILIERE: Electromécanique**

**SPECIALITE: Electromécanique**

### **Thème**

**Contribution à la modélisation en 2D des systèmes de  
lévitation magnétique passive**

**Présenté Par :**

**BOUAMOUCHE MOHAMMED**

**Encadré Par :**

**CHOUIKHI LOTFI**

**Date de soutenance. 12/07/2022**

#### **Jury de Soutenance**

**Président : AMIOUR DOUNIA**

**Grade ..... Univ MSB jijel**

**Encadreur : CHOUIKHI LOTFI**

**Grade..... Univ MAA jijel**

**Examinateur 1 : KIMOUCHE ABDELGHANI**

**Grade..... Univ MAA jijel**

**Promotion : 2021 /2022**

## REMERCIEMENTS

NOUS REMERCIONS ALLAH NOTRE DIEU LE TOUT PUISSANT DE  
NOUS AVOIR DONNÉ PATIENCE, SANTÉ ET VOLONTÉ TOUT AU  
LONG DE NOS ÉTUDES.

NOUS TENONS À REMERCIER TOUT PARTICULIÈREMENT  
NOTRE ENCADREURE MR. CHOUIKHI LOTFI POUR CES  
CONSEILS QUI NOUS ONT ÉTÉ PRÉCIEUX AINSI QUE TOUTES  
LES SUGGESTIONS ET REMARQUES QU'ILS ONT FORMULÉ TOUT  
AU LONG DE CE TRAVAIL.

NOS REMERCIEMENTS S'ADRESSENT ÉGALEMENT À TOUTES  
LES PERSONNES QUI ONT COLLABORÉ À LA RÉALISATION DE  
CE TRAVAIL.

# DÉDICACES

NOUS DÉDIONS CE MODESTE TRAVAIL À

À NOS TRÈS CHERS PARENTS À NOS FRÈRES ET SOEURS

À MES PROCHEs

À TOUS MES AMIS SANS EXCEPTION

À TOUS CEUX QUI ME CONNAIS

# Table des matières

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

## CHAPITRE I :Suspension magnétique, fondement et domaine d'utilisation

I.1. Introduction .....	2
I.2 les suspensions magnétiques .....	2
I.2.1 Présentation générale .....	2
I.2.2 Domaine d'utilisation .....	4
I.2.3 Application des suspensions magnétiques.....	5
I.2.3 Différent types de suspension magnétiques.....	7
I.2.3.1 Les suspensions magnétiques passives.....	7
I.2.3.1.a Les palier à aimants permanents .....	7
I.2.3.1.b Les palier à reluctance variable .....	9
I.2.3.2 Les paliers actifs .....	9
I.2.3.3 Les palier à supraconducteurs.....	11
I.2.3.4 La sustentation par courant de Foucault .....	11
I.2.4 caractéristiques des suspensions magnétiques.....	11
I.2.4.1 Comparaison palier magnétique- palier ‘classique’ .....	11
I.2.4.2 Comparaison actif-passif .....	13
I.3 Conclusion.....	13

## CHAPITRE II: Aimants permanents pour lévitation magnétique

II.1 Introduction.....	15
II.2 Quelques dates .....	15
II.3 Principaux matériaux pour aimant permanents.....	15
II.3.1 Notions générales sur les matériaux magnétiques.....	15
II.3.2 Caractéristiques magnétiques .....	16
II.3.2.1 cycles d’hystérésis.....	17
II.3.2.1.a cycles J(H) .....	18
II.3.2.1.b cycles B(H).....	19

II.3.2.2 Produit $(B \times H)_{\max}$ .....	21
II.4 Les aimant industriel et le fonctionnement en répulsion .....	22
II.4.1 propriétés des aimants terres rares.....	23
II.4.1.a Aimant de type samarium-cobalt.....	23
II.4.1.b Aimants de type NdFeB .....	23
II.5 Conclusion.....	26

### **CHAPITRE III: Calcul en 2D les interactions entre aimants permanents**

III.1 Introduction .....	27
III.2 Méthode de dipôles magnétiques .....	27
III.2.1 Méthode de dipôles magnétiques en 2D .....	28
a- Approche théorique .....	28
b- Recherche de toutes les configurations possibles.....	29
b-1 raideur d'un palier magnétique.....	29
b-1-1 Centreur magnétique .....	30
b-1-2 Butée magnétique.....	30
b-2 aimantation axiale et aimantation radiale .....	30
III.3 Principe des sources équivalentes.....	32
III.3.1 Calcul du champ magnétique dû à un volume aimanté en un point extérieur à l'aimant .....	32
III.4 Méthode des charges équivalentes appliquée en 2D « Approche Coulombienne ».....	35
III.4.1 Calcul du potentiel scalaire .....	36
III.4.2 Calcul de l'induction magnétique .....	36
III.4.3 Forces entre deux aimants permanents .....	37
III.4.3.a Aimantation des deux aimants parallèles .....	37
III.4.3.a.1 Application aux paliers magnétiques passifs .....	38
III.4.3.b Aimantation des deux aimants perpendiculaires.....	42
III.4.3.c Aimantation inclinée .....	43
III.4.3.c.1 Un des aimants a une aimantation inclinée .....	43

III.4.3.c .2 Les deux aimants ont des aimantations inclinées.....	44
III.4.4 Calcul du couple exercé par rapport au centre de l'aimant.....	45
III.4.4 .1 Cas où l'aimantation des deux aimants est parallèle.....	45
Exemple d'application .....	48
III.4.4 .2 Cas l'aimantation des deux aimants est perpendiculaire .....	49
III.5 Conclusion .....	53
Conclusion générale .....	54
Annexe	
Références	
Résumé	

## Liste des figures

### CHAPITRE I : Suspension magnétique, fondement et domaine d'utilisation

Figure I. 1 Pompe turbo-moléculaire sur suspension magnétique .....	3
Figure I. 2 train sur suspension magnétique.....	3
Figure I. 3 chopper de particules .....	6
Figure I. 4 Centreur à aimant permanent .....	7
Figure I. 5 Butée à aimant permanent .....	7
Figure I. 6 Instabilité angulaire d'un centreur.....	8
Figure I. 7 Passage d'un palier circulaire à un palier linéaire .....	8
Figure I. 8 Centreur à reluctance variable .....	9
Figure I. 9 forces magnétiques sur les dents .....	9
Figure I. 10 Principe d'une butée active .....	10
Figure I. 11 centreur actif.....	10

### CHAPITRE II : Aimants permanents pour lévitation magnétique

Figure II. 1 Cycle d'hystérésis .....	16
Figure II. 2 Cycle hystérésis J et B en fonction de H .....	17
Figure II. 3 Cycle J(H) pour un aimant permanent (a) Cycle complet (b) courbe de désaimantation .....	18
Figure II. 4 Passage de la caractéristique J(H) à la courbe B(H).....	19
Figure II. 5 $(B \times H)_{\max}$ de la courbe de désaimantation.....	22
Figure II. 6 Evolution des performances des aimants permanents .....	23
Figure II. 7 Coût en fonction de l'énergie fournie par les principales .....	24
Figure II. 8 Aimant Samarium-cobalt .....	24
Figure II. 9 Aimant NdFeB [1] .....	25
Figure II. 10 Cycles d'hystérésis pour un aimant permanent idéal.....	26

### CHAPITRE III : Calcul en 2D les interactions entre aimants permanents

Figure III. 1 Dipolaire magnétique élémentaire et isolé .....	27
Figure III. 2 Configuration de deux barreaux aimantés.....	29
Figure III. 3 Dix configurations de centreurs magnétiques .....	31
Figure III. 4 Dix configurations de centreurs magnétiques .....	31
Figure III. 5 Notation utilisée pour le calcul du champ magnétique .....	32

<b>Figure III. 6</b> Equivalence entre aimantation (a)Distribution de charges (b) la répartition des courants ampériens (c) .....	35
<b>Figure III. 7</b> Barreau aimanté.....	35
<b>Figure III. 8</b> Représentation d'un aimant par les pôles magnétique en 2D .....	36
<b>Figure III. 9</b> Représentations de deux aimants à aimantation parallèle .....	37
<b>Figure III. 10</b> Présentation en 2D d'un centreur de type A1 .....	39
<b>Figure III. 11</b> Force axiale tracer pour un déplacement axial de la bague intérieure d'un centreur.....	39
<b>Figure III. 12</b> Raideur axiale tracer pour un déplacement axial de la bague intérieure d'un centreur de type A1 .....	39
<b>Figure III. 13</b> raideur axiale tracer pour un déplacement axial de la bague intérieure d'un centreur de type A1 .....	40
<b>Figure III. 14</b> Centreur de type E1 en 2D .....	41
<b>Figure III. 15</b> Force axiale tracer pour un déplacement axial de la de la bague intérieure d'un centreur de type E1 .....	41
<b>Figure III. 16</b> Force axiale tracer pour un déplacement axial de la bague intérieure d'un centreur de type E1 .....	42
<b>Figure III. 17</b> Représentation de deux aimants à aimantation perpendiculaire .....	42
<b>Figure III. 18</b> Décompositions d'un système à aimantation inclinée .....	43
<b>Figure III. 19</b> Décomposition d'un système à deux aimantations inclinées .....	45
<b>Figure III. 20</b> Représentation de deux aimants à aimantation parallèle .....	46
<b>Figure III. 21</b> Forces exercées sur l'aimant en mouvement (aimantation parallèle) .....	48
<b>Figure III. 22</b> Couples exercées sur l'aimant en mouvement (aimantation parallèle).....	49
<b>Figure III. 23</b> Représentation de deux aimants à aimantation perpendiculaire .....	49
<b>Figure III. 24</b> Forces exercées sur l'aimant en mouvement (aimantation perpendiculaire) ...	51
<b>Figure III. 25</b> Couples exercées sur l'aimant en mouvement (aimantation perpendiculaire).	52
<b>Figure III. 26</b> Représentation des Nœuds magnétiques en 2D .....	53

## Liste des tableaux

<b>Tableau III. 1</b> Données du centreur .....	38
<b>Tableau III. 2</b> Les résultats des raideurs magnétiques.....	40

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

## Introduction générale

Dans le domaine industriel la place des aimants permanents est devenue incontournable ces derniers temps, en particulier les aimants de type terre rare. Cette position, les aimants permanents la doivent aux caractéristiques particulières qu'ils peuvent offrir aux utilisateurs, tel que, la rigidité de l'aimantation, le fonctionnement en circuit ouvert sans risque de désaimantation et encore grâce à l'importance de l'énergie fournie qui peut engendrer des forces d'interactions considérables. Une des applications de ce type des matériaux, est la suspension ou la lévitation magnétique dans les systèmes électromécaniques. Il existe plusieurs types de suspension (lévitation) magnétique, et le choix de tel type ou de l'autre revient aux critères sélectionnés par le concepteur. Si on considère le critère coût comme exemple, la suspension passive est le meilleur modèle adopté. Mais du point de vue stabilité le choix est en faveur de la suspension supraconductrice (annexe B) [1].

Dans ce mémoire, l'essentiel du travail est porté sur la détermination et le calcul des quantités magnétiques tel que, le champ, l'énergie, la force et le couple d'interaction entre les aimants permanents, en prenant les paliers magnétiques et les systèmes de suspension passive en générale comme application. Ce manuscrit est composé de trois chapitres, le premier est consacré à l'état de l'art et la présentation des différents types de suspensions magnétiques et leurs domaines d'applications.

Le deuxième chapitre est dédié aux aimants permanents et leurs places dans les systèmes à suspension magnétique. Pour ce faire on commence par présenter les principales caractéristiques magnétiques et quelques critères de fonctionnement.

Le troisième et dernier chapitre, est consacré aux calculs des énergies et des forces en deux dimensions (2D) en utilisant l'approche coulombienne qui est basée sur le principe des sources équivalentes. Nous commençons par un premier modèle analytique qui représente un système de deux aimants permanents dont les aimantations sont parallèles, perpendiculaires ou dirigées dans des directions quelconques. En dernier lieu, nous présentons une nouvelle approche de calcul analytique des couples entre deux aimants permanents dont on va développer les différentes grandeurs magnétiques à partir de l'énergie magnétostatique de notre système.

Nous terminons par des conclusions générales et des perspectives ouvrant ainsi la porte à des travaux futurs.

CHAPITRE I

SUSPENSION MAGNÉTIQUE,

FONDEMENT ET DOMAINE

D'UTILISATION

## **I.1. Introduction**

La lévitation d'un corps, sans aucun contact matériel avec le milieu ambiant, a tout le temps suscité la fascination d'une grande partie du public. Mais ce n'est que depuis des dizaines d'années que le phénomène de la lévitation sous la plupart de ses formes est bien maîtrisé. Le mot lévitation a souvent été utilisé à tort et à travers et prête confusion. Une définition incomplète du terme lévitation peut être formulée comme suit « tout objet, quelle que soit sa nature, lévite s'il est suspendu en équilibre stable sous l'action de forces sans qu'il soit en contact direct avec son environnement proche ». D'autres décrivent la lévitation d'un objet ou d'un être, comme étant le fait de rester en suspension au-dessous du sol ou se déplacer sous l'effet d'une force, plus forte ou égale à la gravité. Si on prend en compte la dernière définition, on peut dire que le sens de la lévitation est le général que celui de la suspension, car on peut offrir au corps en question une certaine liberté de déplacement selon la nature des applications. La plupart des auteurs ne font la différence dans l'utilisation des termes lévitation, suspension, palier...etc.

Plusieurs environnements existent pour réaliser une lévitation (air, gaz et milieu liquide), néanmoins l'usage le plus courant concerne l'air ambiant. Plusieurs formes peuvent caractériser la lévitation, qui dépendent de la nature des forces mises en jeu pour stabiliser notre objet. Enfin, plusieurs types de lévitations se offrent à nous telle que ; lévitation magnétique, aérodynamique, électrostatique, acoustique ou encore lumineuse [2].

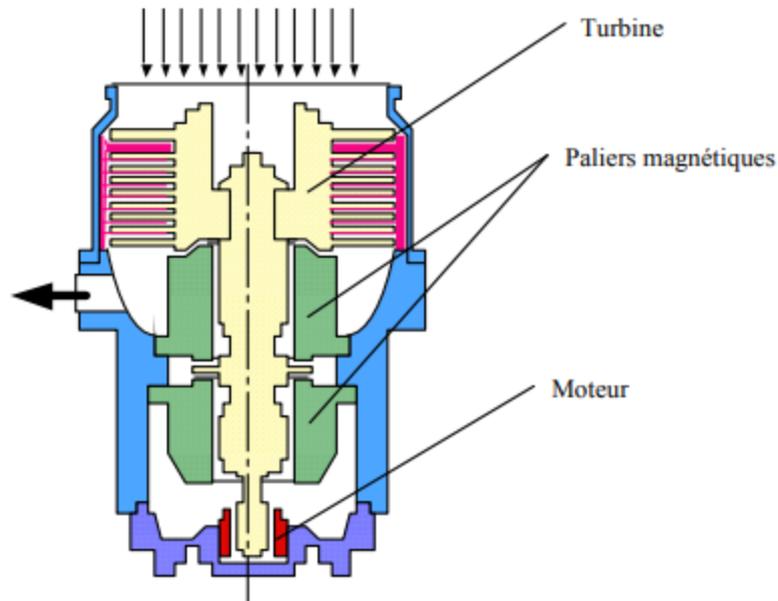
Dans ce chapitre, il sera question de lévitation d'origine magnétique.

## **I.2 les suspensions magnétiques**

### **I.2.1 Présentation générale**

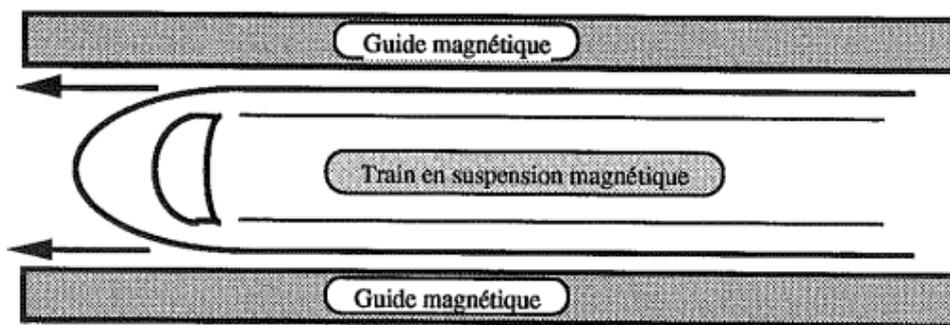
Par définition une suspension magnétique est un dispositif de contrôle pour l'ensemble de degrés de liberté d'une pièce sous l'effet d'un champ magnétique. En général, la suspension contrôle cinq degrés de liberté et la motorisation pilote le dernier degré.

Pour une pièce en rotation (figure I.1), une turbine par exemple, les trois degrés de libertés en translation ainsi que deux degrés en rotation sont assurés par la suspension magnétique. Le dernier degré de liberté en rotation qui permet à la turbine de tourner au tour de l'axe de révolution est contrôlé par un moteur



**Figure I. 1** Pompe turbo-moléculaire sur suspension magnétique [3]

Pour un système linéaire (figure I.2), un train sur suspension magnétique, il est nécessaire de contrôler trois rotations ainsi que deux translation (sa hauteur, et son centrage par rapport aux rails), le dernier degré de liberté étant piloté par un moteur linéaire.



**Figure I. 2** train sur suspension magnétique

Ces deux exemples illustrent des suspensions magnétiques dont tous les degrés de liberté sont contrôlés magnétiquement. Malheureusement, il n'est pas toujours le cas. Il existe des solutions hybrides qui font appel à des paliers magnétiques et mécaniques simultanément. On cite comme exemple, des centrifugeuses assurant leur fonctionnement grâce à des centreurs magnétiques ainsi que des butées mécaniques. Ces solutions hybrides présentent des performances moins efficaces que les systèmes totalement magnétiques, mais sont beaucoup plus simple à réaliser et moins onéreux.

### I.2.2 Domaine d'utilisation

Les paliers magnétiques passifs sont utilisés dans les domaines où les paliers mécaniques atteignent leurs limites :

- **Domaine des hautes vitesses :** dans des vitesses de rotation assez élevées les roulements à billes ont deux problèmes majeurs, le premier est mécanique, le deuxième lié aux échauffements. La rupture mécanique dans les paliers magnétiques permet d'atteindre des vitesses nettement supérieures, ceci dit, l'absence de contact mécanique du rotor engendré par la force de centrifuge elle-même proportionnelle à la vitesse de rotation. L'effet balourd pose un sérieux problème dans les suspensions mécanique, à cause du problème d'équilibrage dû aux difficultés à coïncider l'axe de rotation des paliers avec l'axe d'inertie de la partie tournante, ce qui entraîne des vibrations importantes du palier mécanique. Le remède à cette situation, est l'utilisation des paliers magnétiques, car l'axe d'inertie peut coïncider avec l'axe de rotation.
- **Domaine des atmosphères spécifiques ou du vide :** Dans ce cas les paliers mécaniques ne peuvent pas être utilisés, car leur fonctionnement nécessite une lubrification régulière des billes, ce qui est prohibé dans des atmosphères spécifiques.
- **Domaine où les frottements doivent être minimisés :** Grâce à l'absence de contact entre le stator et le rotor dans une suspension entièrement magnétique, les frottements sont inexistants. Néanmoins, dans certaines configurations la genèse de variations de champs donne naissance à des pertes par courants induits et des pertes par hystérésis. Ces pertes engendrées par la rotation sont assimilables à des frottements fluides, en revanche, les paliers magnétiques ne possèdent pas de frottements secs.
- **Domaine dans lequel l'usure doit être minimisée :** comme les paliers magnétiques ne possèdent pas de contact entre les pièces mobiles et les pièces statiques, leur durée de vie est illimitée (en temps normal). Cet avantage peut être appréciable dans un dispositif tel qu'un satellite où les paliers d'un système tournant ne peuvent pas être remplacés régulièrement, ou encore l'absence d'usure, qui présente un avantage intéressant, dans le sens où, la poussière n'est pas tolérée dans les atmosphères spécifiques par exemple.
- **Domaine dans lequel une grande précision est requise :** un palier magnétique actif, contrôlé par un asservissement permet de positionner la partie mobile avec une grande

précision. Cette dernière dépend de la qualité des capteurs utilisés et n'est dans pas sujette aux modifications des contraintes extérieures.

- **Domaine dans lequel la variation de température est importante :** une suspension magnétique, réalisée avec des matériaux appropriés, est capable de fonctionner à des températures extrêmes. Elle peut ainsi être soumise à des températures basses proches du zéro absolu ou bien être utilisée dans des températures élevée en sortie de turbine par exemple.

### I.2.3 Application des suspensions magnétiques

Les domaines d'application des suspensions magnétiques sont très différents. Elles peuvent supporter des pièces d'à peine quelques grammes telles que des disques de compteurs électriques jusqu'à des machines de plusieurs tonnes que certains compresseurs. Les pièces sustentées peuvent être immobiles ou soumises à des vitesses élevées (centrifugeuse, turbine...). Les principales applications sont les suivantes :

- **Le spatial :** Une partie des recherches menés dans le domaine des paliers magnétiques a été réalisé par des entreprise telles que l'aérospatiale en France ou la NASA aux USA. Sa principale application concerne la mise en œuvre de volants d'inertie permettant la stabilisation des satellites ou encore d'emmagasiner de l'énergie.
- **L'usinage :** atteignant des vitesses de rotation difficilement accessible dans le cas le plus conventionnel (palier mécanique), la suspension magnétique équipe aujourd'hui les broches d'usinage pour faire tourner des outils de coupes (rectification et fraisage). Ces broches atteignent des vitesses allant de 15000 à 150000 tr/min. En dehors de leurs performances en termes de vitesse, les paliers magnétiques présentent une grande précision en rotation lors de l'usinage.
- **Les turbocompresseurs :** ce sont des machines à grande vitesse, il existe des gammes de 2 MW à 20000 tr/min et jusqu'à 25 MW à 7000 tr/min. Leur utilisation est dédiée principalement à l'industrie du gaz (production, transport et stockage). Les magnétiques actifs apportent des solutions aux problèmes de vibration, d'alignement, de joint et de maintenance.
- **Les turboexpander :** dans le domaine gazier ces machines permettent la détente des gaz, et utilisés essentiellement dans les opérations de traitement, de refroidissement, de purification, de séparation ou liquéfaction. Ces machines sont

généralement rapides et puissantes : de 10 000 tr/min à 50 000 tr/min et quelques centaines de KW où plusieurs MW.

- **Les pompes turbomoléculaires** : elles permettent d'obtenir un vide très poussé grâce à une turbine tournant à grande vitesse. Le vide obtenu peut atteindre  $10^{-10}$  mbar. Les paliers magnétiques sont utilisés dans des pompes turbomoléculaires car ils permettent d'atteindre des vitesses élevées (100 000 tr/min) sans polluer l'atmosphère environnante avec un lubrifiant. La suspension peut être active partiellement passive, les deux solutions existent dans l'industrie.
- **Les centrifugeuses** : grâce à leur vitesse de rotation extrêmement élevée les centrifugeuses arrivent à séparer des substances de densités différentes. Elles rendent possible l'enrichissement de l'uranium à un taux que peu d'autres méthodes peuvent atteindre. Là encore, le rôle du palier magnétique est de permettre d'atteindre des vitesses importantes tout en respectant le milieu environnant. En général, ce sont des paliers passifs qui sont utilisés dans cette application.
- **Les chopper de particules** : ils sont utilisés dans les laboratoires de physique pour filtrer des particules d'énergie différentes. Ils sont constitués d'un disque muni de fentes tournant à grande vitesse (figure I.3). Selon la largeur des fentes, l'épaisseur du disque et la vitesse de rotation, le chopper ne laisse passer que des particules ayant une énergie donnée. Les particules trop lentes ou trop rapides sont déviées par des bords des fentes ou les autres disques.

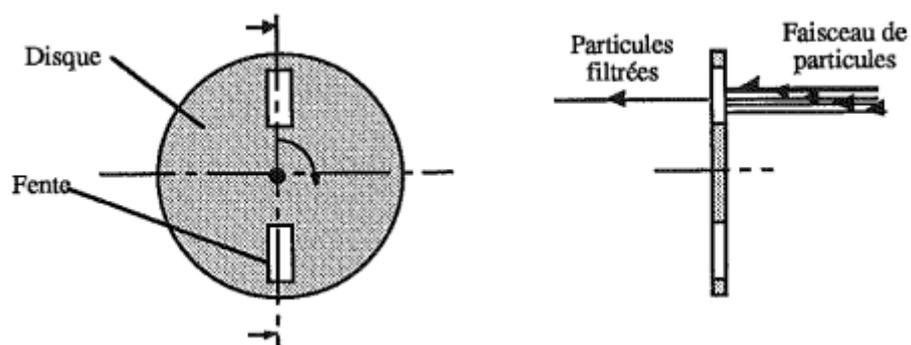


Figure I. 3 chopper de particules

- **Train à sustentation magnétique** : nous avons jusqu' alors décrit que des systèmes tournants. Or, de la même manière qu'une machine tournante peut être mise à plat pour obtenir un moteur linéaire, il est possible de dérouler un palier magnétique afin d'obtenir un guidage linéaire. C'est par ce type de système que

les suspensions magnétiques sont connues du grand public, car elles permettent à des trains expérimentaux de léviter au de dessus de leurs voies.

### I.2.3 Différent types de suspension magnétiques

#### I.2.3.1 Les suspensions magnétiques passives

Les paliers magnétiques passifs sont les plus simples à réaliser. Ils sont autonomes, leur fonctionnement ne nécessite aucun apport d'énergie venant de l'extérieur, comme les paliers magnétiques actifs, ni un refroidissement comme les paliers supraconducteurs. Néanmoins ils ne peuvent être utilisés seuls pour des raisons de stabilité (voir ci-après). Les palier magnétiques passifs doivent donc être associés à un système mécanique ou n neutre type de palier magnétique. Les paliers magnétiques passifs sont deux types : les paliers à aimants permanents et les paliers à réductances variables.

##### I.2.3.1.a Les palier à aimants permanents

Ils sont constitués au minimum de deux bagues d'aimants permanents en interaction, l'une des bagues est fixe et l'autre solidaire du rotor (figure I.4)

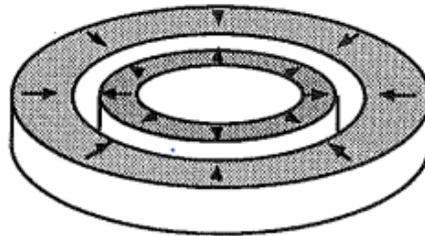


Figure I. 4 Centreur à aimant permanent

En fonction des directions d'aimantation des deux bagues il est possible d'obtenir, avec la même géométrie, soit un centreur, soit une butée (figure I.5).

Si la bague intérieure se décale radialement, la bague extérieure la repousse vers le centre, il s'agit donc d'un centreur.

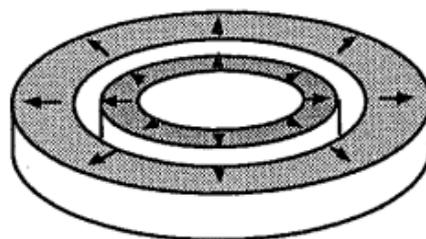
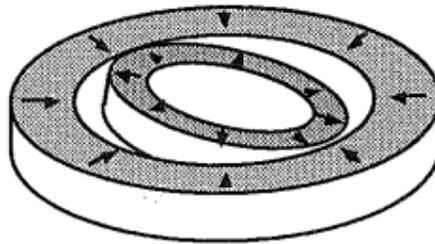


Figure I. 5 Butée à aimant permanent

Si la bague intérieure se décale axialement, la bague extérieure l'attire dans son plan de symétrie, il s'agit donc d'une butée.

On peut néanmoins mettre en évidence des problèmes d'instabilités liés à ces paliers. Si dans le cas de la butée, la bague intérieure se décale radialement, elle est violemment attirée par la bague extérieure. Si la bague intérieure est déplacée axialement, elle sera éjectée par la bague extérieure. Le centreur est donc instable axialement. De même, lorsque la bague intérieure du centreur est décalée angulairement, la bague extérieure exerce des forces qui tendent à créer une rotation plus importante. Le centreur est aussi instable angulairement.

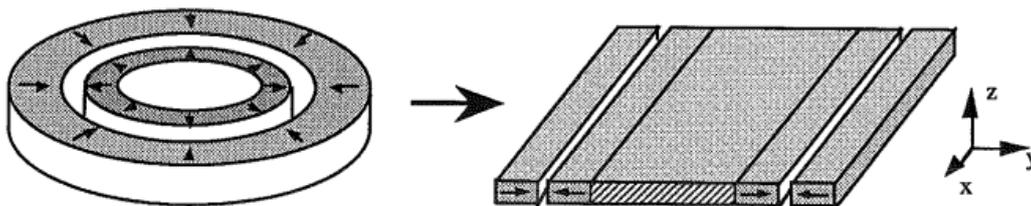


**Figure I. 6** Instabilité angulaire d'un centreur

En conclusion, nous pouvons retenir la simplicité de réalisation d'un centreur passif et d'une butée passive. Néanmoins, leur utilisation est rendue délicate par les différentes instabilités qui peuvent survenir. Nous verrons d'ailleurs par la suite (voir le théorème d'Earnshaw, annexe B) qu'une stabilité est impossible à obtenir avec ce type de palier.

Nous n'avons représenté pour l'instant que des paliers circulaires. Les structures peuvent être linéarisées en déroulant les aimants (figure I.7).

Les centreurs circulaires se transforment en centreur linéaire. Les caractéristiques de ces derniers sont semblables : centrage latéral, instabilité suivant l'axe 'oz' et instabilité angulaire. Le seul changement s'opère au niveau des degrés de liberté. Le degré de liberté angulaire qui permet la rotation du palier circulaire se transforme en degré de liberté en translation qui permet le mouvement suivant l'axe 'ox'.



**Figure I. 7** Passage d'un palier circulaire à un palier linéaire

### I.2.3.1.b Les palier à reluctance variable

Dans ce cas aussi, on a affaire à des systèmes passifs. Par conséquent ils n'ont besoin d'aucune source d'énergie extérieure pour fonctionner. Bien qu'ils puissent comporter des aimants, ces aimants ne fonctionnent pas sur le principe d'interaction directe entre aimants. Ils sont composés de deux circuits magnétiques indépendants. L'un des circuits est lié au rotor tandis que l'autre est fixé au stator. (Figure I.8).



Figure I. 8 Centreur à reluctance variable

Les circuits magnétiques sont composés de dents en vis-à-vis. La moitié de ces dents est placées sur la partie statique du palier tandis que l'autre l'est sur la partie mobile. Une différence de potentiel magnétique est créée entre ces dents soit par un aimant soit par éventuellement par une bobine. Mais dans ce cas nous ne pouvons plus parler de palier passif. Cette différence de potentiel crée un flux magnétique qui circule entre les dents. Lorsque l'on décale latéralement ces dernières l'une des par rapport à l'autre, on observe dans le même temps un allongement des lignes de champs et donc une variation de l'énergie du système. Les dents cherchent à se réaligner pour minimiser cette énergie.

Nous pouvons constater que les forces d'interaction peuvent être assimilées à une pression magnétique, seules les faces latérales des dents sont à l'origine du recentrage (figure I.9)

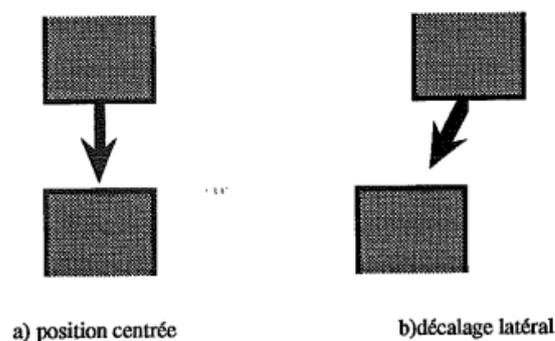


Figure I. 9 forces magnétiques sur les dents

### I.2.3.2 Les paliers actifs

Les paliers actifs sont des électroaimants dont le courant est asservi pour maintenir la partie mobile du circuit magnétique dans une position fixée. Ils ont besoin d'un apport d'énergie pour fonctionner. Pour alimenter chacun des actionneurs constituant un palier actif, il faut

une alimentation de puissance, une commande et capteur de position. L'exemple le plus simple est celui de la butée de la (figure I.10).

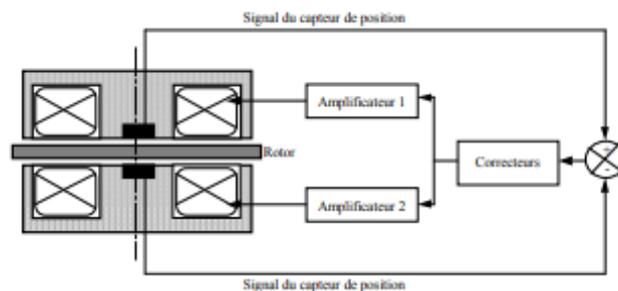


Figure I. 10 Principe d'une butée active

Nous remarquons la nécessité de mettre en œuvre deux électroaimants pour constituer une butée. Cela s'explique par le fait qu'un électroaimant ne peut exercer que des forces d'attraction. Pour asservir un axe, soit deux directions, il faut donc deux actionneurs.

Grâce aux asservissements, la position peut être réglée avec une grande précision. Les limitations sont dues aux capteurs, aux saturations (matériaux ou puissance) et à la dynamique de l'asservissement.

Pour pouvoir obtenir une suspension complète, il faut associer deux centreurs et une butée.

Chaque centreur est constitué de quatre actionneurs et asservis deux axes de liberté (figure I.11)

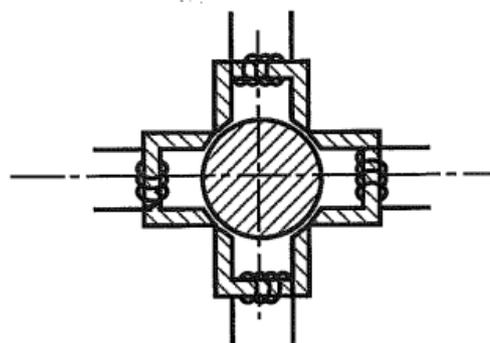


Figure I. 11 centreur actif

Les paliers magnétiques actifs sont à priori applicables à tout type de système mécanique à condition d'être correctement dimensionné. Par contre, si leur structure est simple dans le principe (pas d'instabilité puisque correctement asservis), leur mise en œuvre est assez lourde. Une suspension magnétique nécessite le contrôle de cinq degrés de liberté, donc de dix directions. Cela peut entraîner la mise en œuvre de dix actionneurs, dix capteurs, dix

amplificateurs de puissances et cinq commandes reliées entre elles pour tenir compte du couplage mécanique.

Les systèmes actifs permettent de supporter de très fortes contraintes dans toutes les directions. C'est la raison pour laquelle certaines machines de plusieurs tonnes utilisées dans l'industrie lourde sont équipées de paliers actifs. Pour ce type d'application aucun palier magnétique passif ne peut prétendre remplacer le palier actif.

### **I.2.3.3 Les palier à supraconducteurs**

Ils sont à l'état d'étude dans les laboratoires. Ils fonctionnent sur le principe des courants induits. Lorsque l'on déplace un aimant près d'un conducteur, il se crée des courants induits à l'intérieur de ce dernier qui tentent de s'opposer au mouvement.

Dans un conducteur classique, l'énergie fournie par le milieu extérieur pour rapprocher l'aimant du conducteur est dissipée par effet joule dans celui-ci. Dans un conducteur parfait, la résistivité est nulle. Au lieu d'être dissipée, l'énergie est donc stockée sous forme de champ magnétique induit (auto-inductance). Si l'aimant est libéré de toutes contraintes extérieures, il peut revenir à sa place antérieure afin que le système retrouve son état d'énergie initiale. Nous obtenons alors une suspension magnétique complète sans ni apport d'énergie. Les supraconducteurs dit « haut température », doivent encore être maintenus à une température d'environ  $-70^{\circ}\text{C}$ .

### **I.2.3.4 La sustentation par courant de Foucault**

Selon le principe de Lenz, tout conducteur soumis à un champ variable est parcouru par un courant produisant un champ induit tendant à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance. Des interactions naissent entre la partie induit et la partie inductrice.

C'est sur ce principe qu'est basé le fonctionnement de la machine asynchrone dont l'induit (rotor) produit un champ venant s'opposer au champ inducteur du stator. Dans certaines conditions, le rotor de la machine asynchrone peut ainsi être en sustentation magnétique stable. Malheureusement, les courants induits produisent dans ce cas des pertes par induction qui chauffe la partie suspendue.

## **I.2.4 caractéristiques des suspensions magnétiques**

### **I.2.4.1 Comparaison palier magnétique- palier 'classique'**

Les paliers magnétiques se distinguent de tous les autres paliers par leur absence total de contact, qu'il soit solide, liquide ou gazeux. Leurs principaux avantages ont été énumérés

précédemment. Toutefois, un roulement à billes ou un palier hydrodynamique ne se remplace directement par un palier magnétique. Déterminons par un calcul rapide l'encombrement d'un palier actif, capable de sustenter une charge donnée, et comparons-le à celui d'un palier plus traditionnel. La force due à la pression magnétique ( $p$ ) sur la surface ( $S$ ) d'un électroaimant s'écrit :

$$F = p.S \text{ avec } p = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$B$  : induction à la surface de l'électroaimant.

Quand l'induction magnétique dans l'entrefer vaut 1T, on obtient une pression magnétique de 4bars. Pour soulever une pièce d'une tonne avec un champ de 1T, il est donc nécessaire d'avoir une surface utile de 250 cm<sup>2</sup>. Le palier est généralement plus encombrant car toute sa surface ne correspond pas à sa surface utile d'un seul actionneur (un centreur contient quatre actionneurs). A titre d'exemple, nous donnons les caractéristiques d'un palier de compresseur industriel [2].

- Géométrie : Diamètre : 240mm (au niveau de l'entrefer).  
Longueur : 192 mm  
Entrefer : 0.8 mm
- Charge nominale : 8200N (0.82t)
- Charge maximum : 14000N (1.4t)

Ce palier a un volume environ 8 fois supérieur à celui d'un palier hydrodynamique admettant les mêmes charges. Néanmoins, si l'on considère l'infrastructure nécessaire au fonctionnement de ces paliers, lubrification pour les uns, commande électrique pour les autres, les paliers magnétiques peuvent être dans certain cas être moins volumineux que les paliers hydrodynamiques.

Une autre grande différence entre palier magnétique et palier mécanique provient des surcharges admissibles par les paliers. Un roulement à bille peut parfaitement accepter une courte surcharge très supérieure à sa charge maximale. Un palier magnétique, par contre, ne peut, même durant un laps de temps très court, supporter une charge supérieure à sa charge maximum. De plus un palier actif est limité par un temps de réponse minimum.

### **I.2.4.2 Comparaison actif-passif**

Rappelons qu'une suspension magnétique entièrement passive est instable. La comparaison ne se fera donc qu'entre une suspension partiellement passive et une suspension entièrement active. Avec une suspension partiellement passive, certains degrés de liberté ne sont pas contrôlés par l'asservissement mais par des paliers passifs fonctionnant comme des ressorts. Une modification de la position de la partie suspendue crée une force de rappel dépendant de la raideur du palier. Ce type de palier serait par exemple tout à fait inadapté sur une broche de machine-outil car la pièce à usiner se déplacerait lors de l'usinage. Par contre, lorsque la partie mobile possède des degrés de libertés qui acceptent de légers décalages ou qui ne sont pas soumis à des variations de forces élevées, il devient fort intéressant d'utiliser des paliers passifs. Leur simplicité de fabrication ainsi que l'absence d'électronique d'asservissement permettent la réalisation de suspension à des prix de revient des inférieurs.

Néanmoins, bien plus simple à réaliser, les structures partiellement passives sont délicates à concevoir car de nombreux problèmes d'équilibre, de stabilité, d'amortissement et de motorisation doivent être résolus.

## **I.3 Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons présenté un état de l'art sur les différents types de suspension magnétique, en passant par quelques réalisations, les avantages et les inconvénients relative à la stabilité, de coût...etc.

La suite de ce mémoire, sera dédiée principalement aux calculs des interactions entre les aimants permanents pour les suspensions magnétiques passives. Pour cela on va commencer par citer les différents types d'aimants employés, leurs principales caractéristiques et en dernier la possibilité de fonctionner en circuit ouvert.

CHAPITRE II

SUSPENSION MAGNÉTIQUE,

FONDEMENT ET DOMAINE

D'UTILISATION

## II.1 Introduction

Le palier magnétique passif sous toutes ses formes travaillent en circuit ouvert, c'est-à-dire sans circuit magnétique de fermeture de flux. Donc, un champ coercitif suffisamment important doit caractériser les aimants permanents constituant ces paliers magnétiques. Concrètement ils doivent présenter une polarisation  $J$  (ou aimantation  $M$ ) aussi élevée que possible. Dans ce deuxième chapitre nous allons étudier les propriétés et le comportement de quelque aimant industriel potentiellement intéressant pour servir ces systèmes paliers magnétiques passifs.

## II.2 Quelques dates

Le mot **Aimant** doit son origine au latin « Adamas » qui signifie fer, diamant. En effet, les premiers aimants connus -déjà du temps des Grecs- étaient à base de fer ; c'était la pierre d'aimant en magnétite, oxyde de fer naturel utilisé comme minerai. Vers le XIIe siècle apparaissent en Europe les premiers aimants artificiels en fer, et peu de progrès ont été faits dans ce domaine jusque vers les années 1930. Les matériaux utilisés étaient alors des aciers durs martensitiques au chrome, au tungstène ou au cobalt, caractérisés par la traditionnelle forme en U. Les progrès technologiques réalisés au cours des quatre-vingts dernières années ont complètement révolutionné les possibilités des aimants permanents. De nouveaux types ont été découverts, synthétisés et industrialisés, avec des performances telles que les applications ont pu se multiplier dans de nombreux domaines, de l'automobile à l'électroacoustique, de l'horlogerie à l'industrie minière, de l'électroménager au jouet, etc. On estime en effet à l'heure actuelle qu'un logement moderne utilise plus de cinquante aimants allant de la fermeture de la porte du réfrigérateur au rotor du moteur du presse-citron. Il en est de même pour l'automobile et certaines voitures comprennent plusieurs kilogrammes d'aimants pour une centaine de fonctions différentes. C'est ainsi qu'environ 300 000 t d'aimants permanents sont utilisées dans le monde chaque année, entraînant une concurrence internationale sévère entre les différents constructeurs, de plus en plus obligés de faire appel à l'automatique et à la robotique pour rester compétitifs, en particulier dans le domaine grand public [4]

## II.3 Principaux matériaux pour aimants permanents

### II.3.1 Notions générales sur les matériaux magnétiques

En électrotechnique les matériaux utilisés ont des caractéristiques magnétiques classés en deux grandes parties :

- Les matériaux magnétiques **durs**, sont les aimants permanents.

- Les matériaux magnétiques **doux** qui nécessitent une excitation extérieure pour manifester ses propriétés magnétiques.

Sous l'action d'un champ électromagnétique extérieur  $\vec{H}$ , le matériau magnétique se voit créer une induction magnétique  $\vec{B}$  propre à lui, qui est une conséquence de la polarisation de ses domaines. Ces derniers sont de petites régions dans lesquelles les dipôles s'orientent localement dans la même direction. Lors de la suppression de ce champ extérieur, dans le cas des matériaux magnétiques durs il reste une **polarisation permanente** appelée rémanence, alors que dans le second cas (matériaux magnétique doux) il ne reste pratiquement pas.

Le **cycle d'hystérésis** qui caractérise chaque type de matériaux est donné par la courbe  $B = f(H)$ . La figure II.1 illustre l'allure de ces courbes pour les deux cas qui nous intéressent.

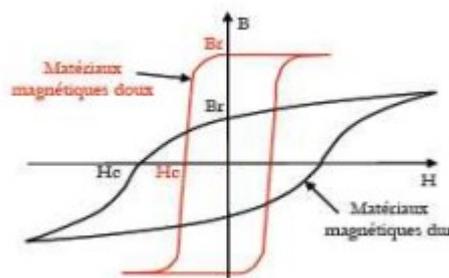


Figure II. 1 Cycle d'hystérésis

### II.3.2 Caractéristiques magnétiques

Généralement les aimants permanents sont représentés par leurs cycles d'hystérésis, en particulier le deuxième quadrant de ce cycle nommé **courbe de désaimantation**, et qui présente les propriétés suivantes :

- **Induction rémanente  $B_r$**  : c'est l'induction subsistant dans le matériau à excitation magnétique nulle. C'est la polarisation intrinsèque de l'aimant.
- **Champ coercitif  $H_c$**  : c'est l'intensité du champ magnétique nécessaire pour démagnétiser complètement l'induction du matériau. La stabilité de l'aimant est proportionnelle à la valeur de  $H_c$ .
- **Produit d'énergie volumique  $(BH)_{max}$**  : donne la valeur énergétique de l'aimant par unité de volume.

- Les points  $H_m$  et  $B_m$  du **point de fonctionnement optimal** représentent le produit  $(BH)_{\max}$ . Le classement et le choix de l'utilisateur des aimants reposent sur les paramètres précités en l'occurrence l'induction rémanente, le champ coercitif et le produit d'énergie volumique maximal.

Dans la partie qui suit, on va aborder l'influence de chaque paramètre appuyé par le modèle électromagnétique correspondant.

### II.3.2.1 cycles d'hystérésis

Les cycles d'hystérésis traduisent les caractéristiques magnétiques d'un matériau magnétique, et qui sont données par  $\vec{J}(H)$  et  $\vec{B}(H)$  (Figure II.2), obtenus par l'application d'un champ magnétique extérieur  $\vec{H}$ .

$\vec{H}$  : Champ magnétique en ampère par mètre (A/m).

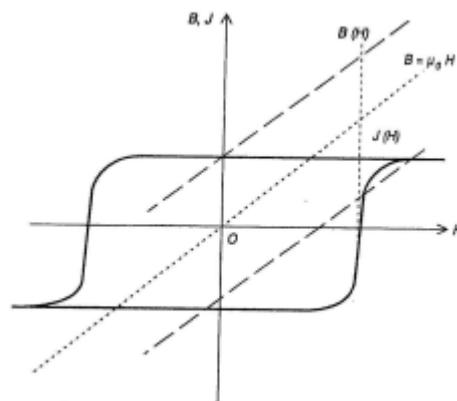
$\vec{j}$  : Polarisation magnétique, en teslas (T)

$\vec{B}$  : Induction magnétique, en teslas (T)

À l'intérieur de l'aimant ces trois grandeurs sont reliées par la relation :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{j} \quad (\text{II.1})$$

La constante  $\mu_0$  représente la perméabilité du vide :  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-10} \text{H/m}$



**Figure II. 2** Cycle hystérésis J et B en fonction de H

Pour un bon matériau magnétique dur, en dehors des zones de variations du champ magnétique où la polarisation de l'aimant se retourne, cette dernière est pratiquement constante. Une variation  $\Delta H$  du champ magnétique engendre une variation  $\Delta B$  de l'induction magnétique qui est donnée par :

$$\Delta B = \mu_0 \Delta H \tag{II.2}$$

La perméabilité apparente de l'aimant est pratiquement égale à celle de l'air  $\mu_0$ . Il faut noter aussi qu'on utilise parfois l'aimantation  $\vec{M}$  (A/m) au lieu de la polarisation  $\vec{J}$  (T) pour caractériser l'aimant. En réalité ces deux grandeurs sont équivalentes et liées par la relation :

$$\vec{J} = \mu_0 \vec{M} \tag{II.3}$$

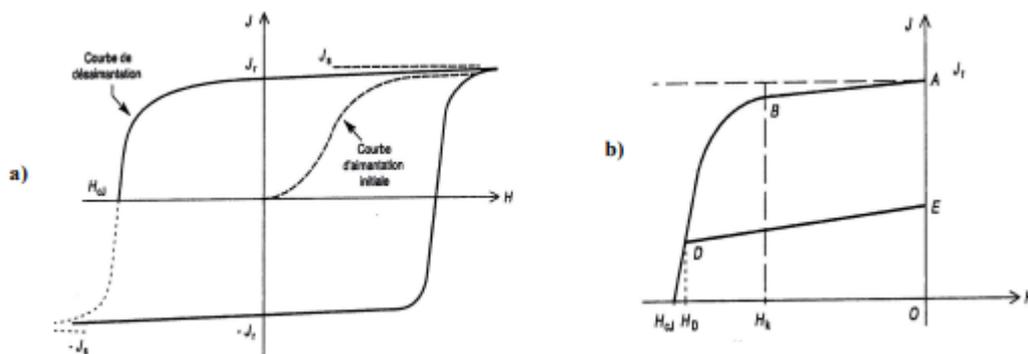
L'induction  $\vec{B}$  prend la forme :

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \tag{II.4}$$

### II.3.2.1.a cycles J(H)

Les points les plus remarquables de ce cycle sont donnés sur la figure II.3 où on trouve :

- ✓  $J_s$  : la polarisation à saturation, obtenue quand un champ magnétique H intense est appliqué dans la direction de l'aimantation.
- ✓  $J_r$  : polarisation rémanente, obtenue quand le champ H est annulé.
- ✓  $H_{cJ}$  : champ coercitif de la polarisation, obtenue lors de l'application d'un champ magnétique H en sens inverse de la polarisation J et pour laquelle celle-ci est globalement nulle.



**Figure II. 3** Cycle J(H) pour un aimant permanent (a) Cycle complet (b) courbe de désaimantation [1]

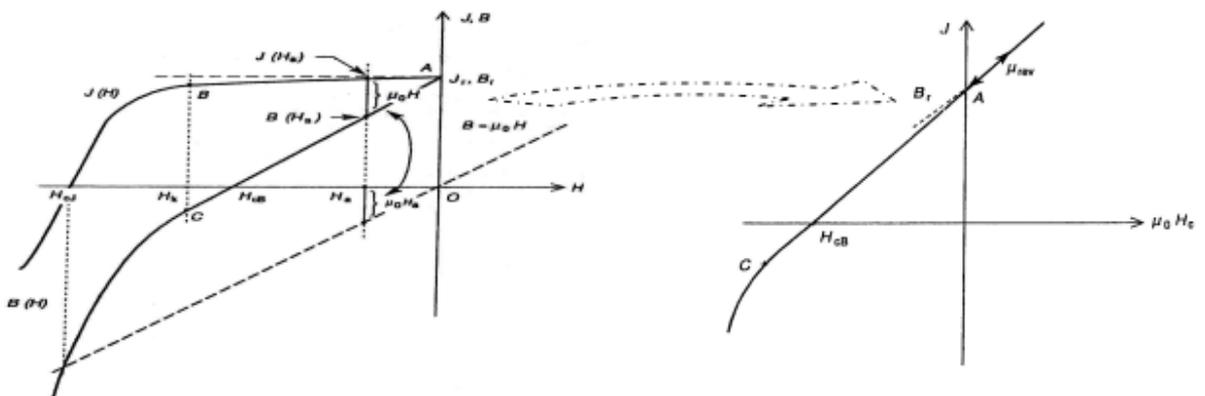
Si on augmente encore le champ magnétique H appliqué, mais dans le sens inverse, l'aimant va se re-aimanter à saturation avec la polarisation  $-J_s$ . Si on repart encore une fois vers le sens positif du champ, la partie inférieure de cycle va se former en passant par  $H_c$  en atteignant la valeur à saturation correspondant à  $J_s$ . Ce cycle présente le caractère magnétique de l'aimant. En réalité, le point de fonctionnement de l'aimant se situe généralement dans le deuxième quadrant du cycle J(H) (J positif et H négatif). D'ailleurs,

les fabricants d'aimants permanents donnent des caractéristiques correspondantes à cette partie du cycle appelée **courbe de désaimantation**. (Figure II.3 (b)).

A partir de la figure II.3.b, on remarque d'après le deuxième quadrant que la courbe  $J(H)$  reste pratiquement linéaire, c'est-à-dire avec une désaimantation légère et réversible (Segment AB), et cela tant que le champ magnétique appliqué ne dépassant pas la valeur  $H_k$ . La pente du segment AB se caractérise par la constante  $\chi_{rév}$  appelée **susceptibilité magnétique réversible**. La désaimantation **devient** irréversible en arrivant au coude de la caractéristique. En appliquant un champ de valeur  $H_D$  plus grande que  $H_k$ , les moments magnétiques de l'aimant commencent à retourner de manière irréversible c'est-à-dire, en annulant ce champ le point de fonctionnement va prendre un chemin secondaire suivant la droite DE et parallèle au segment AB. La valeur du point  $H_k$  est très importante pour la caractéristique car elle détermine la **limite de la réversibilité** de l'aimantation. C'est le champ maximal que peut supporter l'aimant sans désaimantation et  $H_k$  est appelé champ critique [5] [6] [7].

**II.3.2.1.b cycles B(H)**

Généralement on utilise les aimants permanents comme source de flux magnétiques. Pour l'électrotechnicien, la caractéristique  $B(H)$  donne l'induction créée par l'aimant en fonction du champ appliqué (Figure II.4). Cette caractéristique est fournie par le fabricant.



**Figure II. 4** Passage de la caractéristique  $J(H)$  à la courbe  $B(H)$

En utilisant l'équation (II.1), dans le cas où  $B$ ,  $H$  et  $J$  sont collinaires, cela donne :

$$B = \mu_0 H + J \tag{II.5}$$

Pour chaque valeur du champ  $H_a$ ,  $B(H_a)$  s'obtient en ajoutant à  $J(H_a)$  la valeur  $\mu_0 H$  (Figure II.4). Le segment AB de la partie réversible de la caractéristique  $J(H)$ , se transforme en segment AC dans la courbe  $B(H)$ . Les points les plus intéressants de  $B(H)$  sont mentionnés sur la figure II.4 où on peut voir :

- ✓  $B_r$  : induction rémanente, qui persiste même en absence du champ magnétique.
- ✓  $H_{cB}$  : champ coercitif d'induction ; dans ce point l'induction créée par l'aimant est globalement nulle.
- ✓  $\chi_{rév}$  : perméabilité réversible ; représentée par la pente de la partie réversible (segment AC). Pour une variation donnée  $\Delta H$  du champ magnétiques, la variation de l'induction  $\Delta B$  est donnée par :

$$\Delta B = \chi_{rév} \mu_0 \Delta H \quad (\text{II.6})$$

Pour des aimants relativement modernes,  $\chi_{rév}$  est souvent de l'ordre de 1.05 à 1.2. Leur comportement est proche de l'aimant idéal pour lequel la polarisation est totalement constante  $\chi_{rév} = 1$ .

On notera que seule la polarisation  $J$  peut atteindre une valeur limite dite de saturation. En revanche l'induction  $B$  ne s'arrêtera pas d'augmenter tant que le champ  $H$  augmente. Le point  $H_k$  caractérise toujours la limite de réversibilité qu'il faut respecter. Pour les aimants dont  $H_k$  est très élevé, il peut même être supérieur à  $H_{cB}$  (Figure II.4). On remarque que, dans la partie  $[H_k, H_{cB}]$ , l'induction  $B$  est négative bien que l'aimantation reste intacte. En pratique,  $H_{cB}$  n'est qu'un point de la caractéristique de désaimantation, sans indication physique particulière sur l'état de l'aimantation de l'aimant, contrairement à valeur de  $H_c J$  pour laquelle l'aimant est globalement désaimanté.  $\chi_{rév}$  qui est donnée par les fabricants nous permet de calculer la variation de l'induction  $B$  en fonction du champ  $H$  (pente du segment AC). Aussi elle nous permet de déterminer la pente  $\chi_{rév}$  de la variation réversible de la polarisation  $J$  en fonction du champ  $H$  (segment AB). En effet, sur cette partie de caractéristique on peut écrire :

$$B = \mu_{rév} \mu_0 H + J_r = \mu_0 H + J \quad (\text{II.7})$$

Ce qui donne :

$$J = \mu_0 (\mu_{rév} - 1) H + J_r = \chi_{rév} \mu_0 H + J_r \quad (\text{II.8})$$

La pente de la partie réversible de  $J(H)$  est donnée par la susceptibilité magnétique  $\chi_{rév}$  :

$$\chi_{rév} = (\mu_{rév} - 1) \quad (\text{II.9})$$

Cette susceptibilité est souvent de l'ordre de 0.05 à 0.2 pour les aimants nouvelles générations.

### II.3.2.2 Produit $(B \times H)_{\max}$

Pour pouvoir différencier entre les différents types d'aimants permanents, on utilise souvent le produit  $(B \times H)_{\max}$  [4] [5]. Dans les circuits magnétiques, ces aimants créent de l'induction magnétique dans l'entrefer. Il est aisé de montrer que l'énergie produite dans cet entrefer est proportionnelle au produit «  $B \times H \times V$  », où  $V$  représente le volume de l'aimant. Pour des raisons de coût, le volume de l'aimant doit être minimal, en revanche, au point de son fonctionnement le produit « induction-champ » soit être au maximum. Il s'agit du point  $(B \times H)_{\max}$  repéré sur la courbe  $B(H)$ . Ce point ne traduit pas forcément un fonctionnement optimal dans beaucoup de systèmes, cependant il reste un critère prépondérant pour distinguer les différentes nuances d'aimants permanents. Le produit  $(B \times H)_{\max}$  correspond à une énergie volumique qui s'exprime en joule par mètre cube. Dans le cas d'un aimant idéal  $\mu_{rév} = 1$ , et le champ critique assez élevé  $\mu_0 \times H_k > 1/2B_r$ , on peut montrer que :

$$(B \times H)_{\max} = \frac{B_r^2}{4\mu_0} \quad (\text{II.10})$$

Ce qui nous permet d'écrire pour le point  $(B \times H)_{\max}$  :

$$\begin{cases} B = \frac{B_r}{2} \\ H = \frac{1}{\mu_0} \times \frac{B_r}{2} \end{cases}$$

Graphiquement ce point peut s'obtenir en traçant la courbe de la variation du produit  $(B \times H)$  en fonction de  $B$  (Figure II.5), où encore en traçant les lignes d'isovaleurs de ce même produit. Pour avoir le produit  $(B \times H)$  le plus élevé possible, l'aimant doit avoir une induction rémanente élevée et une zone de fonctionnement réversible qui s'étend au moins jusqu'au point  $(B \times H)_{\max}$ .

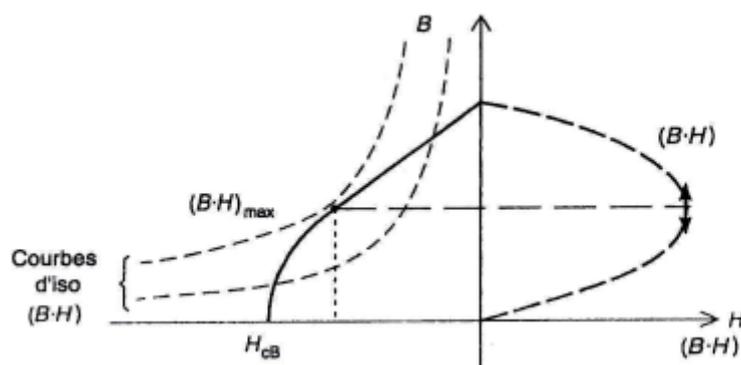


Figure II. 5  $(B \times H)_{\max}$  de la courbe de désaimantation

#### II.4 Les aimant industriel et le fonctionnement en répulsion

Les familles de matériaux à aimant ayant débouché sur une production industrielle notables ne sont pas nombreuses. Ce sont, par ordre chronologique d'apparition : les AlNiCo (fin des années 1930), les ferrites durs (dans les années 1950), la familles des aimants samariumcobalt qui a donné naissance à deux groupes d'aimants différents, les SmCo5 (fin des années 1960) et les Sm(CoFeCuZr)7-8 souvent désignés comme « 2-17 » (fin des années 1970), et la famille des néodyme-fer-bore ou NdFeB (milieu des années 1980). Dans les deux dernières familles -contrairement aux autres-, des éléments de terre rare Sm et Nd s'ajoute au magnétisme du fer et du cobalt, donnant naissance à une seule famille appelée la famille des terres rares.

Les aimants permanents permettent de créer des forces de répulsion relativement grandes en comparaison de leur propre poids. Les aimants fonctionnant dans de telles conditions sont soumis à des champs inverses élevés ; ils doivent donc posséder un champ coercitif important. Leur aimantation doit être aussi rigide que possible car les aimants sont placés dans un champ magnétique extérieur. Les aimants ferrites ont été les premiers à être utilisés en répulsion, en particulier pour la lévitation du disque tournant des compteurs électriques. Les forces de frottement, qui interdisent le comptage des très faibles consommations, sont ainsi réduites au minimum. Alors que dans les années 1960 la plupart des compteurs étaient équipés de ce système, de nos jours il n'est plus guère utilisé [5].

De nos jours, beaucoup de systèmes électromagnétiques à aimants permanents utilisent des aimants terres rares.

## II.4.1 propriétés des aimants terres rares

### II.4.1.a Aimant de type samarium-cobalt

Comme nous l'avons vu précédemment, cette famille se compose de deux types d'aimant, les  $\text{SmCo}_5$  et les  $\text{Sm}_2\text{Co}_{17}$ . Ces matériaux sont relativement chers, mais ils possèdent des caractéristiques magnétiques remarquables. L'une des particularités des  $\text{SmCo}_5$  est d'avoir un champ coercitif énorme, de l'ordre de 2000 kA/m. Ce matériau est très difficile à désaimanter. L'aimantation est particulièrement rigide et pratiquement insensible aux champs extérieurs. C'est l'aimant idéal pour les systèmes fonctionnant en répulsion comme les paliers magnétiques, les systèmes de centrifugation gazeuse, les pompes turbomoléculaires, ou les volants de stabilisation des satellites [4]. L'induction rémanente de ce type d'aimant est de l'ordre de 0,9 T, et  $(BH)_{\text{max}}$  vaut environ entre 160 jusqu'à 280 kJ/m<sup>3</sup>, Figure II.6.

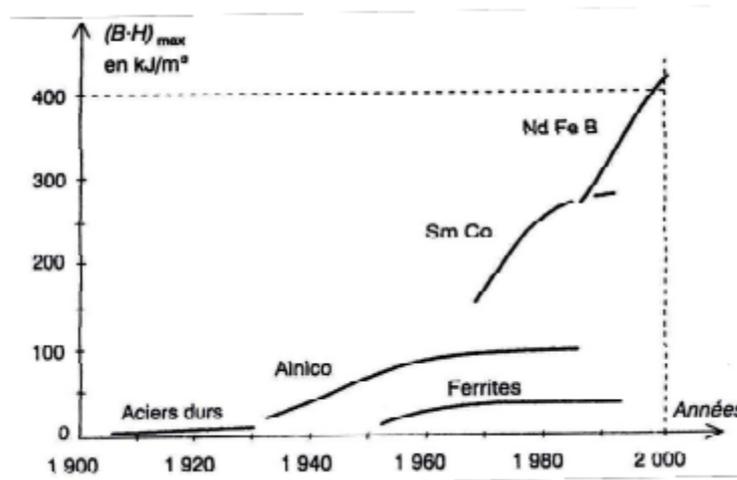
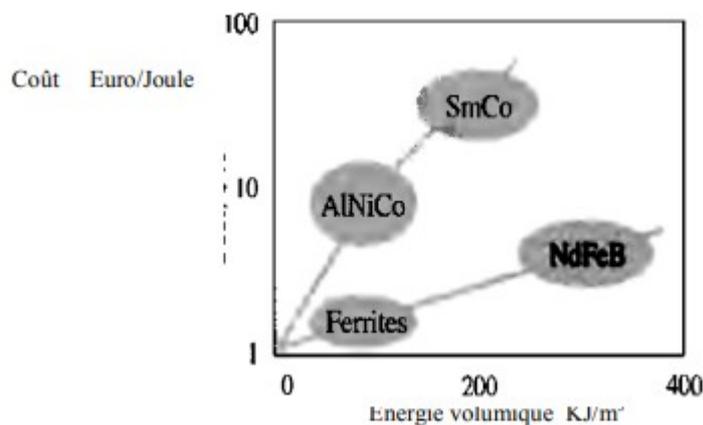


Figure II. 6 Evolution des performances des aimants permanents

### II.4.1.b Aimants de type NdFeB

Les aimants NdFeB frittés possèdent de sérieux atouts : tout d'abord leur aimantation très élevée dépasse 1,4 T pour les nuances les plus performantes, leur produit  $(BH)_{\text{max}}$  franchit les 400 kJ/m<sup>3</sup> (Figure II.6). Leur coût est plus réduit que celui des samarium-cobalt, car ils ne contiennent pas (ou peu) de cobalt, et le prix du néodyme est plus réduit que celui du samarium, étant beaucoup plus abondant. La Figure II.7, présente un diagramme où l'énergie maximale disponible est portée en fonction du prix de revient par joule des quatre familles d'aimants permanents industriels, les aimants NdFeB fournissent l'énergie au meilleur coût et, de ce fait, se partagent la plus grande part du marché (en valeur, pas en tonnage où les ferrites sont toujours les leaders incontestés). Figure II.7 Le Coût en fonction d'énergie fournie des principales familles d'aimants permanents

industriels, les aimants NdFeB fournissent l'énergie au meilleur coût et, de ce fait, se partagent la plus grande part du marché (en valeur, pas en tonnage où les ferrites sont toujours les leaders incontestés).



**Figure II. 7** Coût en fonction de l'énergie fournie par les principales

Des nuances à champ coercitif plus élevé sont fabriqués (HC supérieur à 1000 kA/m à 20°C), mais leur induction rémanente est plus réduite. La production totale d'aimant NdFeB frittés a dépassé 50 000 tonnes par an. On peut montrer, quelques échantillons aimants terre rares réalisés par la société chinoise « Rare Earth Magnet Company », Figure II.8 et Figure II.9).



**Figure II. 8** Aimant Samarium-cobalt



**Figure II. 9** Aimant NdFeB [1]

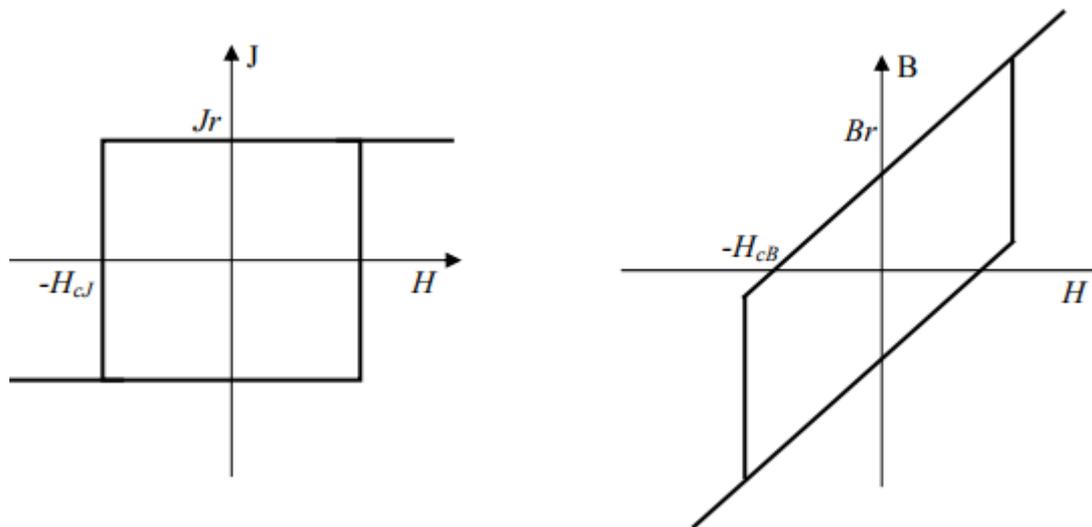
Les principales utilisations des NdFeB dépendent des nuances utilisées.

- NdFeB frittés à Jr élevé : actionneur de tête de lecture pour disque dur, haut-parleur ;
- NdFeB fritté à HC élevé : moteur à courant continu, moteur synchrone, accouplement magnétique, capteurs (ABS) ;
- NdFeB lié : moteur d'entraînement de disque dur, moteur pas à pas.

L'inconvénient majeur des aimants NdfeB, et qu'ils sont assez sensibles à la corrosion. Une protection de surface après usinage est nécessaire, dont la nature dépendra de la température de fonctionnement. [1]

## II.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vu les critères les plus importants que doit présenter les aimants permanents pour un usage industriel. Parmi les quatre familles des aimants permanents, la plus importante est celle des terres rares à cause des performances qui peuvent fournir en termes de rigidité en aimantation, et de leur énorme énergie potentielle ainsi que les champs coercitifs qui les rend réfractaire aux champs démagnétisant. Ces caractéristiques ainsi que d'autres, cités tout au long de ce chapitre leur donne une place de choix au même titre que les aimants permanents dit « presque parfait » dont les cycles d'hystérésis sont donnés par la figure II.10.



**Figure II. 10** Cycles d'hystérésis pour un aimant permanent idéal

Ces aimants presque parfaits présentant des caractéristiques linéaires, peuvent être étudiés plus facilement, en utilisant les modèles mathématiques engendrés par des lois d'électromagnétisme.

Le prochain chapitre est dédié à la modélisation des aimants permanents, dont le souci est de calculer les grandeurs magnétiques issues des interactions dans des systèmes de paliers magnétiques passifs en 2D, et en tenant en compte les principales caractéristiques des aimants permanents idéaux.

**CHAPITRE III**

**CALCUL EN 2D LES**

**INTERACTIONS ENTRE**

**AIMANTS PERMANENTS**

### III.1 Introduction

L'utilisation de matériaux à champ coercitif élevé de type terre rare (aimant permanent) a permis de concevoir des systèmes où ces matériaux travaillent en circuit ouvert ou même en répulsion. La rigidité de leur aimantation permet de remplacer l'aimant par des densités de charges magnétiques sur ses pôles. Les champs et forces peuvent alors être calculés en utilisant des méthodes analytiques inspirées de celle de l'électrostatique.

Dans la littérature plusieurs formulations de calcul des forces magnétiques se présentent à nous [8][9][10]. Le point commun de toutes ces méthodes est qu'elles sont basées le calcul numérique (élément finis, différences finies. etc). Ce type de formulation est très adapté aux systèmes à aimants permanents, peut considérer des géométries complexes et la saturation des matériaux magnétiques. En revanche cela engendre une taille importante du problème à traiter ce qui nécessite l'utilisation d'ordinateurs relativement puissant.

Dans ce chapitre, nous nous sommes basé sur le principe des sources équivalentes pour calculer analytiquement les forces d'interaction entre deux aimants permanents. Il s'avère que cette approche présente d'excellents résultats. Cette dernière repose sur le fait qu'on puisse remplacer le champ créé par l'aimant par une distribution volumique et surfacique de ses sources. Ces distributions présentent un équivalent parfait du système où les grandeurs magnétiques sont équivalentes à celle engendrés par l'aimant. Sur le plan extérieur les données telles que le champ et l'induction magnétique produits par ces modèles sont parfaitement équivalents à celle de l'aimant. Pour ces méthodes, les sources de champ peuvent être, soit des courants, soit des charges magnétiques, soit une combinaison des deux [6].

### III.2 Méthode de dipôles magnétiques

A une distance assez grande devant les dimensions d'un aimant isolé, le champ créé par cet aimant peut être assimilé à celui d'un moment magnétique concentré au centre de l'aimant Figure III.1.

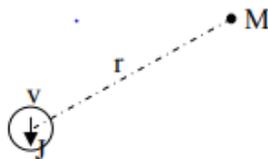


Figure III. 1 Dipolaire magnétique élémentaire et isolé

Un aimant ponctuel de volume  $v_1$  et polarisé par une aimantation  $J$  crée en un point  $M$  de l'espace un potentiel scalaire :

$$V_1(M) = \frac{v_1}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{\vec{J} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (\text{III.1})$$

Le champ magnétique au point  $M$  :

$$\vec{H}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \quad (\text{III.2})$$

L'énergie d'interaction avec un second aimant de volume  $v_2$  est :

$$W_1 = -\vec{J}_2 \cdot \vec{H}_1 v_2 \quad (\text{III.3})$$

La force entre les deux aimant est donnée par :

$$\vec{F}_{12} = -\overrightarrow{\text{grad}}W_1 \quad (\text{III.4})$$

Les raideurs magnétiques dans les trois directions :

$$K = - \begin{bmatrix} \frac{dF_x}{dx} \\ \frac{dF_y}{dy} \\ \frac{dF_z}{dz} \end{bmatrix} \quad (\text{III.5})$$

### III.2.1 Méthode de dipôles magnétiques en 2D

Dans cette partie une nouvelle approche est proposée, cette dernière concerne le calcul des paliers magnétiques à aimant permanents. La méthode repose sur des approximations citées dans la référence [15], et nous permet de réaliser un certain nombre de configurations axisymétriques qui concernent les centreurs et les butées magnétiques, et en plus d'apporter une analyse très flexible des paliers magnétiques passifs.

#### a- Approche théorique

Considérons deux barreaux infiniment longs d'aimantations rigides  $J$  Figure III.2 :

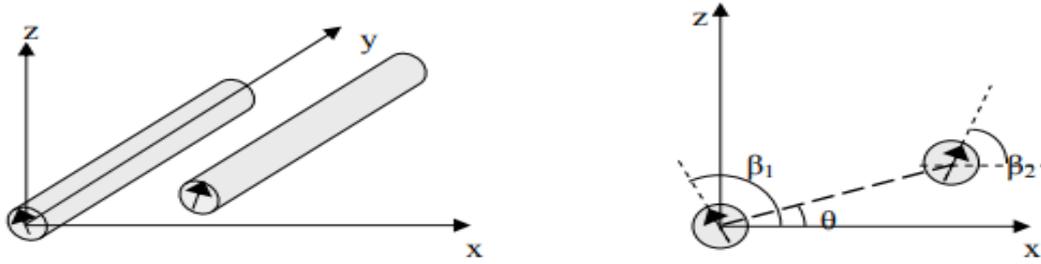


Figure III. 2 Configuration de deux barreaux aimantés

Le champ magnétique crée par le premier barreau dans le vide est donné par :

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{2\pi\mu_0} J_1 \iint \left[ \frac{\cos(\theta - \beta_1)}{r_{12}^2} \vec{\mu}_r + \frac{\sin(\theta - \beta_1)}{r_{12}^2} \vec{\mu}_\theta \right] dS_1 \quad (III.6)$$

L'énergie d'interaction avec un autre barreau d'aimantation rigide  $J_2$  :

$$dW = -\vec{J}_2 \cdot \vec{H}_1 \cdot dv_2 \quad (III.7)$$

Par unité de longueur on trouve :

$$\frac{W}{L} = \frac{J_1 J_2}{2\pi\mu_0} \iint \frac{-1}{r_{12}^2} \cos(\beta_1 + \beta_2 - 2\theta) dS_1 dS_2 \quad (III.8)$$

Les forces engendrées s'obtiennent en dérivant l'énergie :

$$\begin{aligned} \frac{F_x}{L} &= \frac{J_1 J_2}{2\pi\mu_0} \iint \frac{-2}{r_{12}^3} \cos(\beta_1 + \beta_2 - 3\theta) dS_1 dS_2 \\ \frac{F_z}{L} &= \frac{J_1 J_2}{2\pi\mu_0} \iint \frac{2}{r_{12}^3} \sin(\beta_1 + \beta_2 - 3\theta) dS_1 dS_2 \end{aligned} \quad (III.9)$$

En dérivant encore les forces par rapport au déplacement on aura les expressions des raideurs magnétiques :

$$\begin{aligned} \frac{K_x}{L} &= \frac{J_1 J_2}{2\pi\mu_0} \iint \frac{-6}{r_{12}^4} \cos(\beta_1 + \beta_2 - 4\theta) dS_1 dS_2 \\ K_z &= -K_x \end{aligned} \quad (III.10)$$

## b- Recherche de toutes les configurations possibles

### b-1 raideur d'un palier magnétique

Les expressions que nous venons d'obtenir pour le couplage de deux aimant infiniment longs permettent de calculer la raideur d'un palier magnétique. Si  $p$  représente le périmètre du palier (mesuré en pratique au niveau de l'entrefer, on a alors :

$$K_z = -2K_r = P \iint \frac{J_1 J_2}{2\pi\mu_0 r_{12}^4} \cos(\beta_1 + \beta_2 - 4\theta) dS_1 dS_2 \quad (\text{III.11})$$

Si de plus l'entrefer est supérieur ou égal aux dimensions des sections des aimants, alors l'expression de la raideur se simplifie en :

$$K_z = -2K_r = P \frac{J_1 J_2}{2\pi\mu_0 R^4} \cos(\beta_1 + \beta_2 - 4\theta) S_1 S_2 \quad (\text{III.12})$$

### b-1-1 Centreur magnétique

Si l'expression approchée peut être considérée, alors  $k_r$  sera maximum quand

$$\beta_1 + \beta_2 - 4\theta = \pi[2\pi] \quad (\text{III.13})$$

Cette relation permet de déduire l'ensemble des dispositions possibles de deux bagues aimantées, qui réalisent un centreur magnétique.

### b-1-2 Butée magnétique

Pour une butée magnétique, on cherche à obtenir une stabilité axiale aussi élevée que possible ; ceci correspond au maximum de  $k_z$ . Or l'expression que l'expression de  $k_z$  montre que le maximum est atteint pour :

$$\beta_1 + \beta_2 - 4\theta = 0[2\pi] \quad (\text{III.14})$$

La comparaison entre centreur et butée montre que si la disposition géométrique est la même ( $\theta$  identique), il suffit de retourner l'aimantation de l'un des aimants pour transformer un centreur en butée, et réciproquement.

## b-2 aimantation axiale et aimantation radiale

Le nombre de configuration de base qu'il possible d'obtenir est très important. Mais en pratique, on sait fabriquer facilement des aimants d'aimantation axiale et on sait réaliser des bagues aimantées radialement. Les autres types d'aimantation (aimantation conique) sont plus difficiles à réaliser et n'ont peu d'intérêt. Se limiter aux bagues aimantées axialement et radialement signifie que  $\beta_1$  et  $\beta_2$  ne peuvent prendre que les valeurs :  $0, \pi/2, \pi$  et  $3\pi/2$ . Il faut aussi noter le fait de retourner les deux aimantations ne modifie le type de palier magnétique.

Pour un palier magnétique, la relation :  $\beta_1 + \beta_2 - 4\theta = \pi[2\pi]$  permet d'obtenir les configurations suivantes :

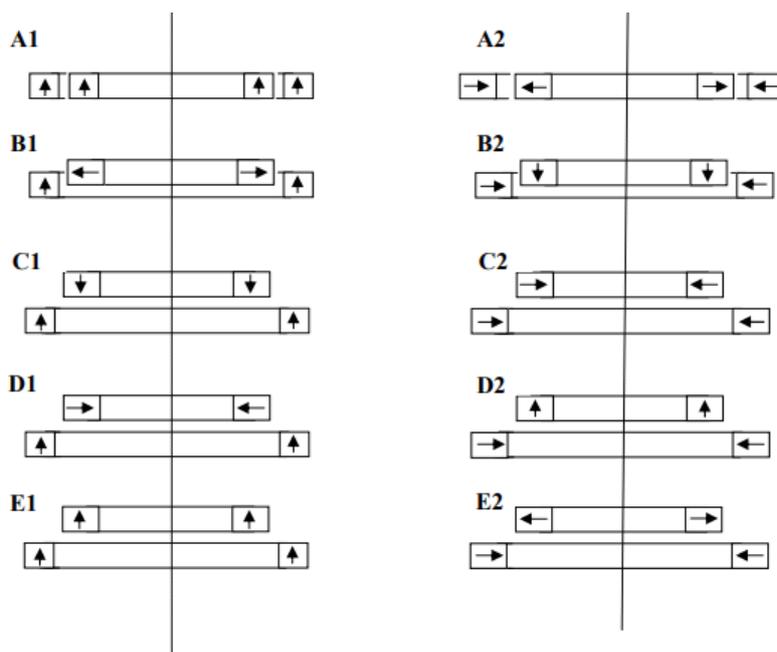


Figure III. 3 Dix configurations de centres magnétiques

Pour les butées magnétiques la relation précédente devient :  $\beta_1 + \beta_2 - 4\theta = 0[2\pi]$ , ainsi les dix configurations découlant de cette relation sont les suivantes :

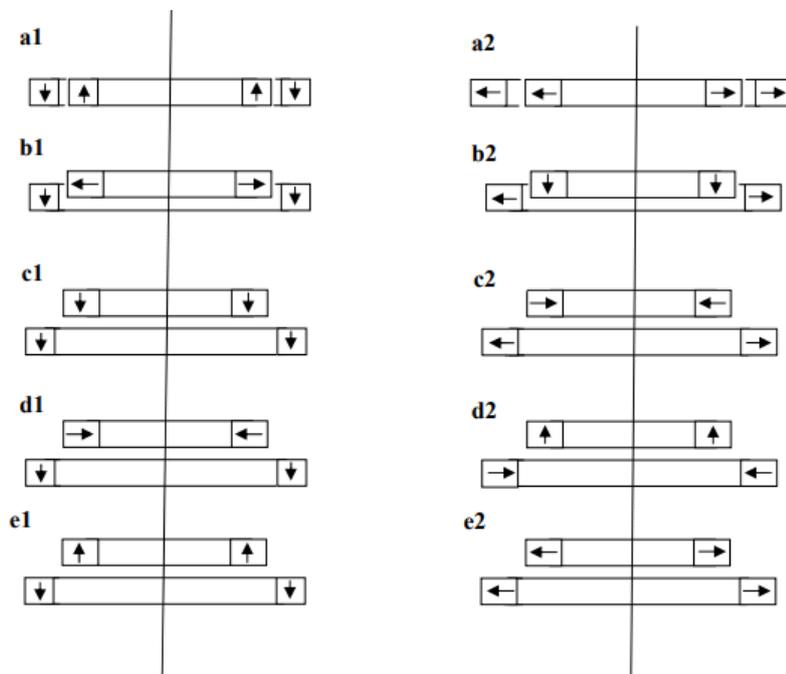


Figure III. 4 Dix configurations de centres magnétiques

### III.3 Principe des sources équivalentes

#### III.3.1 Calcul du champ magnétique dû à un volume aimanté en un point extérieur à l'aimant

Dans le référentiel  $(O,x,y,z)$ , un volume aimanté  $(v')$ , avec une aimantation  $\vec{J}(\vec{r}')$  est supposée connue en chaque point et un observateur  $M(\vec{r})$  Figure III.5 . On s'intéresse aux seules grandeurs magnétiques liées à la présence du volume aimanté et on suppose l'observateur situé à l'extérieur de la matière aimantée, donc dans le vide.

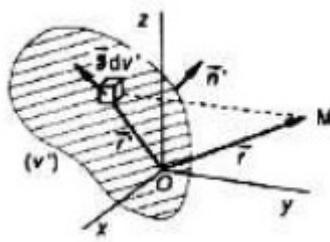


Figure III. 5 Notation utilisée pour le calcul du champ magnétique

Chaque élément de volume  $dv'$  se comporte comme un moment élémentaire  $d\vec{M}$ :

$$d\vec{M} = \vec{J}(\vec{r}') dv' / \mu_0 \quad (\text{III.15})$$

Le champ d'induction magnétique  $\vec{B}(\vec{r})$  au point M, dérive à la fois d'un potentiel scalaire  $\mu_0 V(\vec{r})$  comme suivant :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (\text{III.16})$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (\text{III.17})$$

Les expressions précédentes peuvent être remplacées par les intégrales mathématiques qui représentent le potentiel scalaire et vectoriel :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left[ \iint \frac{\vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{n}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' + \iiint \frac{-\text{div}(\vec{J})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right] \quad (\text{III.18})$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[ \iint \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{n}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' + \iiint \frac{\overline{\text{rot}}(\vec{J})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right], \quad (\text{III.19})$$

Avec  $S'$  représente la surface du volume aimanté  $V'$  et le vecteur unitaire toujours orienté vers l'extérieur.

A partir des expressions précédentes on peut démontrer que :

- Pour calculer le potentiel scalaire  $V(\vec{r})$  d'où dérive le champ d'induction magnétique  $\vec{H}$ , on peut utiliser la loi de coulomb en remplaçant l'aimantation  $\vec{J}(\vec{r}')$  par une distribution de pôle magnétique fictif comprenant :

-Une répartition volumique pôle avec une densité :

$$\rho^* = -\text{div}(\vec{J}) \quad (\text{III.20})$$

-Une répartition surfacique de pôle avec une densité :

$$\sigma^* = (\vec{J} \cdot \vec{n}) \quad (\text{III.21})$$

- Pour calculer le potentiel vecteur  $\vec{A}(\vec{r})$  d'où dérive le champ d'induction  $\vec{B}$ , on peut utiliser la formule de Biot et Savart en remplaçant la distribution d'aimantation  $\vec{J}(\vec{r}')$  par une distribution de courants Ampériens qui comprennent :

-Une répartition volumique avec une densité :

$$\vec{J}^* = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{J})/\mu_0 \quad (\text{III.22})$$

-Une répartition surfacique avec une densité :

$$\vec{k}^* = \vec{J} \times \vec{n}' \quad (\text{III.23})$$

Ces deux représentations sont que des modèles mathématiques sans existence physique réelle. Néanmoins ils permettent de calculer non seulement un champ vu par l'observateur, mais aussi, forces, couples...etc. [1]

Dans nos applications on va considérer que des aimants idéals, par conséquent des simplifications s'imposent concernant les expressions des potentiels scalaires et vectoriels (Equations (III.18) et (III.19)).

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left[ \iint \frac{\vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{n}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' \right], \text{ car } \text{div}(\vec{J}) = 0 \quad (\text{III.24})$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[ \iint \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{n}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' \right], \text{ car } \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{J}) = 0 \quad (\text{III.25})$$

Si on peut considérer la continuité du milieu aimanté, alors les Expressions (III.16), (III.17), (III.18) et (III.19) restent définies partout, ce qui nous permet de calculer en tout point de la matière :

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{V}(\vec{r})) \quad (\text{III.26})$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}(\vec{r})) \quad (\text{III.27})$$

On appelle  $\vec{H}(\vec{r})$  le champ d'excitation au point  $\vec{M}(\vec{r})$  et  $\vec{B}(\vec{r})$  le champ d'induction. Ces deux grandeurs sont étroitement liées aux deux modèles utilisant le moment magnétique, le modèle polaire d'une part et le modèle ampérien d'autre part. Ils ne sont évidemment pas indépendants l'un par rapport à l'autre, car tous les deux liés à la répartition de  $\vec{J}(\vec{r}')$ . Helmholtz [17][18], avec son théorème mathématique nous permet d'établir une relation directe entre  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  et  $\vec{J}$ , cette dernière valable en tout point de l'espace.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{H}(\vec{r}) + \vec{J}(\vec{r}) \quad (\text{III.28})$$

Dans la suite on va s'intéresser uniquement aux calculs des grandeurs magnétiques à l'extérieur de l'aimant à aimantation rigide. Cela nous permettra d'établir les énergies d'interactions et les forces entre des systèmes construits à partir d'aimants permanents.

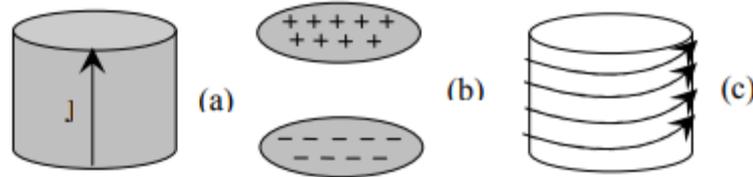
Pour bien illustrer les deux représentations, on va prendre comme exemple un aimant de forme cylindrique dont l'aimantation est axiale Figure III.6.a Ce dernier peut être représenté par une distribution de charges sur la surface de ses pôles. Figure III.6.b

Par convention, les pôles de l'aimant où le flux est sortant et appelé 'pôle nord', il est représenté par des charges positives (+). Comme au 'pôle sud', il correspond au flux entrant et est représenté par des charges négatives (-), le champ magnétique peut être calculé à partir de cette distribution de charges équivalentes. La densité de charges équivalentes est donnée par l'équation(III.21):

$$\sigma = |\vec{J}|$$

Par la représentation ampérienne, l'aimantation est remplacée par une nappe de courant qui circule autour de l'aimant Figure III.6.c. On les appelle « courants ampérien ». A partir de là l'aimant peut être assimilé à un solénoïde parcouru une densité linéique de courant l'équation (III.21):

$$j = \frac{|\vec{J}|}{\mu_0}$$

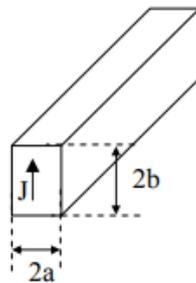


**Figure III. 6** Equivalence entre aimantation (a) Distribution de charges (b) la répartition des courants ampériens (c)

Ces modèles et avec une aimantation supposée rigide, représentent parfaitement les aimants de type terre rare. Pour un aimant NdFeB où  $J=1.25T$  et 1cm de hauteur, la densité de courant ampérien  $J = 10^6 A/m$ , ce qui donne un courant total de  $10^4 A$  sur la surface extérieure de l'aimant. Créer un tel champ avec un solénoïde parcouru par un courant électrique est impossible pour des systèmes de taille centimétrique, cela permet de rendre incontournable l'utilisation des aimants permanents dans des systèmes miniatures.

### III.4 Méthode des charges équivalentes appliquée en 2D « Approche Coulombienne »

Les calculs purement analytiques des forces et raideurs magnétiques sont très peu dans la littérature. Les travaux qu'on puisse trouver sont celles de la référence [15][22][23], et la plus grande partie de ces derniers est axée sur l'analyse dynamique des systèmes actifs mené au LEG par [11]. Dans sa thèse on trouve les expressions analytiques des forces et de leurs dérivées, générées par deux aimants parallèles infiniment longs et de sections rectangulaires. Les matériaux utilisés sont supposés avoir une aimantation rigide et insensible à toute agression extérieure. Se basant sur le modèle coulombien, l'aimant peut être représenté par une densité superficielle  $\sigma$  de charge équivalente à la masse magnétique de ce dernier. Dans le vide  $\sigma = J \cdot n$ , où  $n$  est la normale à la surface de l'aimant. L'aimantation est supposée parallèle à l'un des côtés de la section rectangulaire de l'aimant :



**Figure III. 7** Barreau aimanté

Ainsi l'aimant peut être représenté figure III.8 :

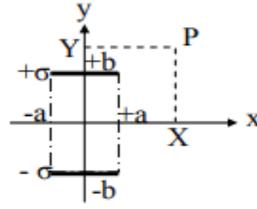


Figure III. 8 Représentation d'un aimant par les pôles magnétique en 2D

### III.4.1 Calcul du potentiel scalaire

A partir de l'équation III.16, et après développement de la première intégrale, le potentiel au P prend la forme suivante :

$$V = \int_{-a}^a \frac{\sigma \cdot dx}{2\pi\mu_0} \ln\left(\frac{r}{b}\right) \quad (III.29)$$

Le potentiel scalaire  $V(p)$  crée par l'aimant :

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\mu_0} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j} \varphi(U_i, V_j)$$

$$\varphi(U, V) = U \cdot \ln(U^2 + V^2) + 2 \cdot V \cdot \text{tg}^{-1}\left(\frac{U}{V}\right) \quad (III.30)$$

$$U_i = X - (-1)^i a \quad V_j = Y - (-1)^j b$$

### III.4.2 Calcul de l'induction magnétique

Le champ magnétique peut se calculer à partir de la relation  $\vec{H} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ . Ses expressions sont données par :

$$H = \frac{-\sigma}{4\pi\mu_0} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j} \psi(U_i, V_j)$$

Avec :

$$H_x, \quad \psi(U_i, V_j) = \ln(U^2 + V^2) \quad (III.31)$$

$$H_y, \quad \psi(U_i, V_j) = 2 \cdot \text{tg}^{-1}\left(\frac{U}{V}\right)$$

$$U_i = X - (-1)^i a \quad V_j = Y - (-1)^j b$$

Dans le vide, et l'extérieur de l'aimant l'induction magnétique vaut  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , et son expression est donnée par :

$$B = \frac{\sigma}{4\pi} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j} \psi(U_i, V_j)$$

$$B_x, \quad \psi(U_i, V_j) = \ln(U^2 + V^2)$$

$$B_y, \quad \psi(U_i, V_j) = 2 \cdot \text{tg}^{-1} \left( \frac{U}{V} \right)$$
(III.32)

### III.4.3 Forces entre deux aimants permanents

L'énergie entre deux aimants permanents en interaction est donnée par :

$$W_{12} = \int V_1 \cdot \sigma_2 \cdot dS_2$$
(III.33)

Les forces exercées entre les deux aimants sont déduites par :

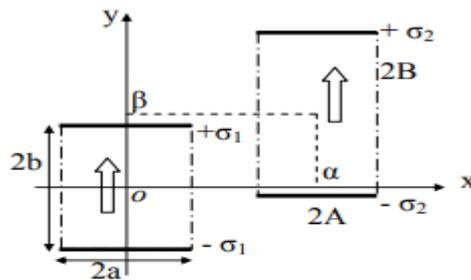
$$\vec{F}_{12} = -\overrightarrow{\text{grad}} W_{12}$$
(III.34)

D'où les expressions des composantes de la force :

$$F_x = - \int \sigma_2 \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \cdot dS_2$$

$$F_y = - \int \sigma_2 \cdot \frac{\partial V}{\partial y} \cdot dS_2$$
(III.35)

#### III.4.3.a Aimantation des deux aimants parallèles



**Figure III. 9** Représentations de deux aimants à aimantation parallèle

Dans le cas où l'aimantation des deux aimants est parallèle Figure III.9, les deux forces par unité de longueur, appliquées sur le deuxième aimant sont données par :

$$\frac{F_{x//}}{L} = \int_{x=\alpha-A}^{x=\alpha+A} \left( -\sigma_2 \frac{d[V(x, \beta + B)]}{dx} + \sigma_2 \frac{d[V(x, \beta - B)]}{dx} \right) dx$$

$$\frac{F_{y//}}{L} = \int_{x=\alpha-A}^{x=\alpha+A} \left( -\sigma_2 \frac{d[V(x, \beta + B)]}{dy} + \sigma_2 \frac{d[V(x, \beta - B)]}{dy} \right) dx$$
(III.36)

On obtient alors :

$$\frac{F_{//}}{L} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{4\pi\mu_0} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 (-1)^{i+j+k+l} \varphi(U_{ij}, V_{kl})$$

$$F_{x//}, \quad \varphi(U_{ij}, V_{kl}) = -U_{ij} \ln(U_{ij}^2 + V_{kl}^2) - 2 \cdot V_{kl} \cdot \text{tg}^{-1} \left( \frac{U_{ij}}{V_{kl}} \right) \quad (\text{III.37})$$

$$F_{y//}, \quad \varphi(U_{ij}, V_{kl}) = -V_{ij} \ln(U_{ij}^2 + V_{kl}^2) - 2 \cdot U_{kl} \cdot \text{tg}^{-1} \left( \frac{U_{ij}}{V_{kl}} \right)$$

$$U_{ij} = \alpha + (-1)^j A - (-1)^i a \quad V_{kl} = \beta + (-1)^l B + (-1)^k b$$

En dérivant les forces  $F_x$  et  $F_y$  respectivement par rapport aux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  on obtient les raideurs magnétiques :

$$K_x = -\frac{dF_x}{d\alpha}$$

$$K_y = -\frac{dF_y}{d\beta} \quad (\text{III.38})$$

Ce qui donne pour les raideurs magnétiques :

$$K_{//} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{4\pi\mu_0} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 (-1)^{i+j+k+l} \varphi(U_{ij}, V_{kl})$$

$$K_{x//}, \quad \varphi(U_{ij}, V_{kl}) = \ln(U_{ij}^2 + V_{kl}^2)$$

$$K_{y//}, \quad \varphi(U_{ij}, V_{kl}) = -\ln(U_{ij}^2 + V_{kl}^2) \quad (\text{III.39})$$

Pour les systèmes axisymétriques le calcul des forces s'obtient en multipliant l'équation (III.37) par le périmètre du système.

### III.4.3.a.1 Application aux paliers magnétiques passifs

Comme application on va prendre deux exemples de palier magnétiques, le premier en fonctionnement centreur et de type A1 et le second en butée et de type E1.

- **Centreur à bague concentrique de type A1**
- Les dimensions du centreur magnétique de type A1 Figure(III.10), cet exemple est similaire à celui traité dans [14]

**Tableau III. 1** Données du centreur

Section de l'aimant	Entrefer	Rayon moyen
a=5mm, b=10mm	e =1mm	r <sub>m</sub> =35mm

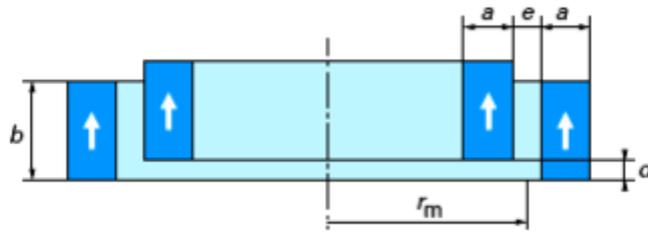


Figure III. 10 Présentation en 2D d'un centreur de type A1

A partir des équations (III.37) et (III.39), multipliées par le périmètre moyen  $2\pi r_m$  on peut calculer les forces et les raideurs pour un déplacement axial de l'anneau intérieur d'une distance allant de 0 à 10mm. Les figures ci-dessous représentent les résultats obtenus par la programmation des expressions sou l'environnement Matlab.

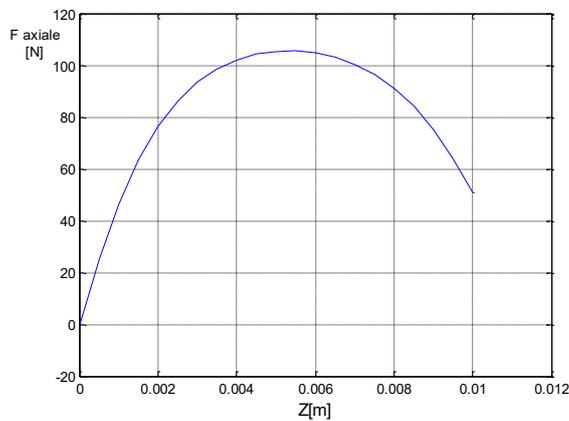


Figure III. 11 Force axiale tracer pour un déplacement axial de la bague intérieure d'un centreur

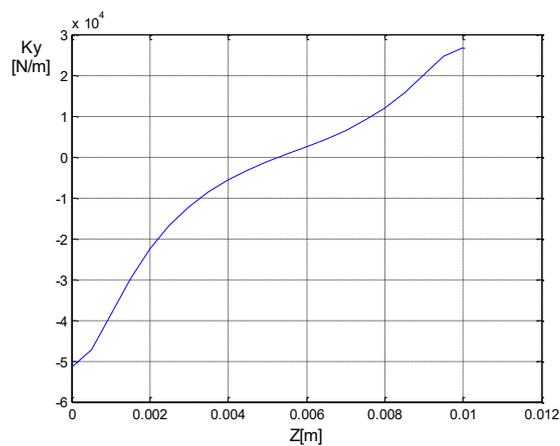
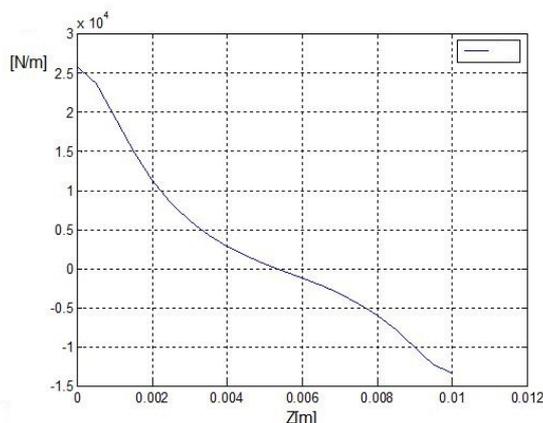


Figure III. 12 Raideur axiale tracer pour un déplacement axial de la bague intérieure d'un centreur de type A1



**Figure III. 13** raideur axiale tracer pour un déplacement axial de la bague intérieure d’un centreur de type A1

D’après l’évolution de la force, on remarque que cette dernière est répulsive ( $K_z < 0$ ) et atteint son maximum à une valeur qui représente la moitié de  $b$ , ensuite elle devient attractive ( $K_z > 0$ ), et a tendances à ramener la bague intérieure à sa position centrée.

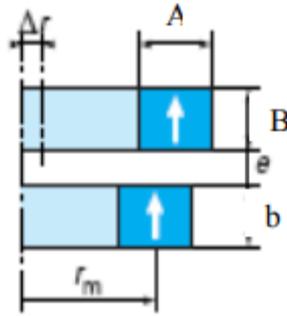
Concernant les raideurs magnétiques, et d’après ses courbes nous remarquons que l’égalité  $K_z = -2K_r$  est vérifiée, toutefois elles ne sont pas parfaitement linéaires. En comparant ces résultats avec celle obtenus dans la référence [14], on remarque qu’on a les mêmes forces et raideurs pour les cas suivants :  $z=0\text{mm}$  et  $z=1\text{mm}$ .

**Tableau III. 2** Les résultats des raideurs magnétiques

		Résultats de la référence [yonnet]	Résultats de calcul sur matlab
Z=0mm	$F_z[\text{N}]$	0	0
	$K_z[\text{N/m}]$	$25.7 \cdot 10^3$	$25.7512 \cdot 10^3$
Z=1mm	$F_z[\text{N}]$	46.9	46.4945
	$K_z[\text{N/m}]$	$19.2 \cdot 10^3$	$19.2183 \cdot 10^3$

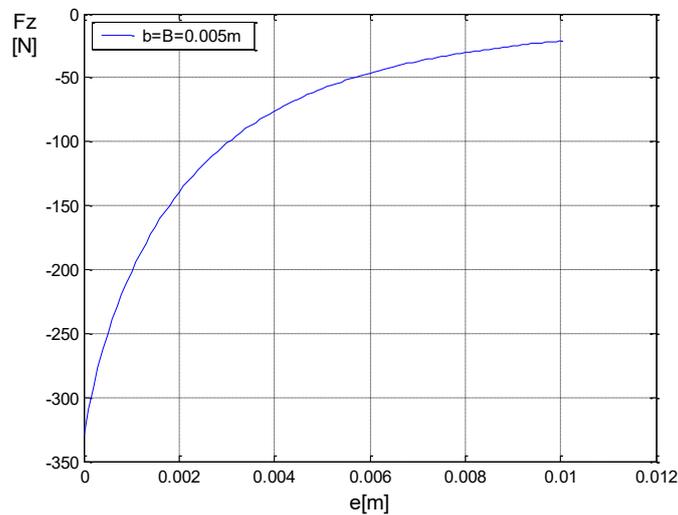
**- Centreur à bague concentrique de type E1**

Dans cette application il s’agit d’un centreur de type E1, constitué de deux bagues identiques en position superposées, dont ses dimensions sont les mêmes que la bague extérieure de la précédente application figure (III.11) :



**Figure III. 14** Centreur de type E1 en 2D

On trace la force axiale  $F_z$  en fonction du déplacement de la couronne supérieure figure (III.14) :



**Figure III. 15** Force axiale tracer pour un déplacement axial de la de la bague intérieure d'un centreur de type E1

D'après la courbe en bleu, on remarque que la force de contact ( $F_z$ ) est inversement proportionnelle à la distance qui sépare les deux couronnes aimantées. Les résultats présentés sont validés par la référence [14]. Une étude paramétrique de notre système permet de constater qu'une hauteur de quelques mètres des bagues permet d'atteindre la force maximale, au-delà cette dernière elle reste constante.

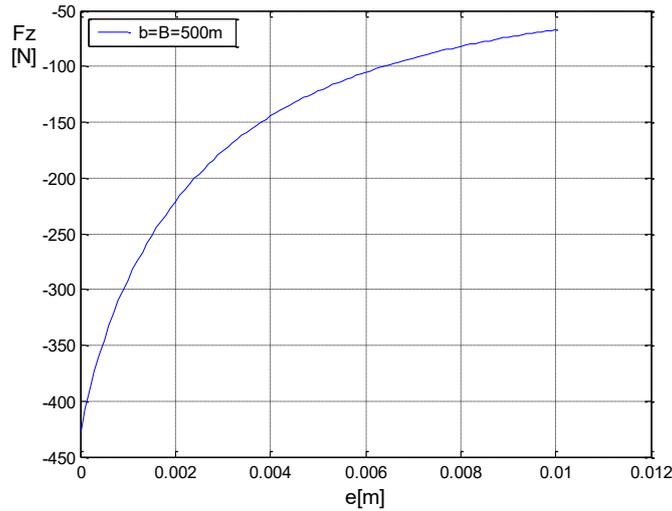


Figure III. 16 Force axiale tracer pour un déplacement axial de la bague intérieure d’un centreur de type E1

Pour les butées, le retournement du sens de l’aimantation de l’une des couronnes aimantées par rapport au centreur, engendre l’inversement du sens de la force de contact.

**III.4.3.b Aimantation des deux aimants perpendiculaires**

Dans ce cas de figure, où les vecteurs aimantations des deux cubes sont perpendiculaires, les forces  $F_x$  et  $F_y$  appliquées sur le second aimant sont données par :

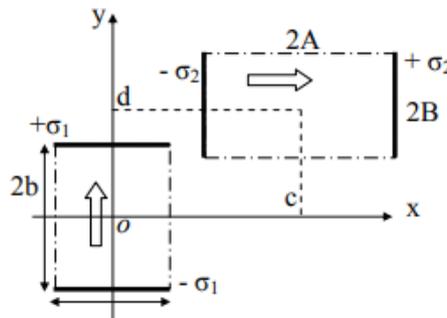


Figure III. 17 Représentation de deux aimants à aimantation perpendiculaire

Dans le cas où les vecteurs aimantations sont perpendiculaires, les forces  $f_x$  et  $f_y$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \frac{F_{x\perp}}{L} &= \int_{x=\beta+B}^{y=\beta+B} \left( -\sigma_2 \frac{d[V(\alpha - A, y)]}{dx} + \sigma_2 \frac{d[V(\alpha + A, y)]}{dx} \right) dy \\ \frac{F_{y\perp}}{L} &= \int_{y=\beta+B}^{y=\beta+B} \left( -\sigma_2 \frac{d[V(\alpha - A, y)]}{dy} + \sigma_2 \frac{d[V(\alpha - A, y)]}{dy} \right) dy \end{aligned} \tag{III.40}$$

Ce qui donne :

$$\frac{F_{\perp}}{L} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{4\pi\mu_0} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 (-1)^{i+j+k+l} \varphi(U_{ij}, V_{kl})$$

$$F_{x_{\perp}}, \quad \varphi(U_{ij}, V_{kl}) = -V_{kl} \ln(U_{ij}^2 + V_{kl}^2) - 2 \cdot U_{ij} \cdot \text{tg}^{-1} \left( \frac{U_{ij}}{V_{kl}} \right) \quad (\text{III.41})$$

$$F_{y_{\perp}}, \quad \varphi(U_{ij}, V_{kl}) = U_{ij} \ln(U_{ij}^2 + V_{kl}^2) + 2 \cdot V_{kl} \cdot \text{tg}^{-1} \left( \frac{U_{ij}}{V_{kl}} \right)$$

$$U_{ij} = \alpha + (-1)^j A - (-1)^i a \quad V_{kl} = \beta + (-1)^l B + (-1)^k b$$

On remarque d'après ces dernières expressions et celles des équations (...), les relations suivantes :

$$F_{x_{\perp}} = F_{y_{//}} \quad (\text{III.42})$$

$$F_{y_{\perp}} = -F_{x_{//}}$$

Pour les raideurs on procède de la même manière que dans le cas parallèle, ce qui nous donne :

$$K_{\perp} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{4\pi\mu_0} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 (-1)^{i+j+k+l} \psi(U_{ij}, V_{kl})$$

$$K_{x_{\perp}}, \quad \psi(U_{ij}, V_{kl}) = 2 \cdot \text{tg}^{-1} \left( \frac{U_{ij}}{V_{kl}} \right) \quad (\text{III.43})$$

$$K_{y_{\perp}}, \quad \psi(U_{ij}, V_{kl}) = -2 \cdot \text{tg}^{-1} \left( \frac{U_{ij}}{V_{kl}} \right)$$

### III.4.3.c Aimantation inclinée

#### III.4.3.c.1 Un des aimants a une aimantation inclinée

Dans le cas où la direction de l'aimantation de l'un des aimants est inclinée d'un angle  $\theta$ , le système peut être représenté comme étant la superposition de deux modèles, le premier parallèle et le deuxième perpendiculaire Figure (III.19)

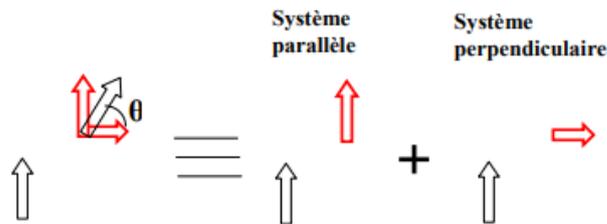


Figure III. 18 Décompositions d'un système à aimantation inclinée

Les expressions des forces dans ce cas peuvent être donnés par :

$$\frac{F_{inc}}{L} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{4\pi\mu_0} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 (-1)^{i+j+k+l} \varphi(U_{ij}, V_{kl})$$

$$F_{xinc}, \quad \varphi(U_{ij}, V_{kl}) = F_{x\perp} \cos\theta + F_{x//} \sin\theta \quad (\text{III.44})$$

$$F_{yinc}, \quad \varphi(U_{ij}, V_{kl}) = F_{y\perp} \cos\theta + F_{y//} \sin\theta$$

$$U_{ij} = \alpha + (-1)^j A - (-1)^i a \quad V_{kl} = \beta + (-1)^l B + (-1)^k b$$

Les expressions complètes prennent la forme suivante :

$$F_{xinc}, \varphi(U_{ij}, V_{kl}) = \left( -V_{kl} \ln(U_{ij}^2 + V_{kl}^2) - 2 \cdot U_{ij} \cdot \text{tg}^{-1} \left( \frac{V_{kl}}{U_{ij}} \right) \right) \cos\theta + \left( -U_{ij} \ln(U_{ij}^2 + V_{kl}^2) - 2 \cdot V_{kl} \cdot \text{tg}^{-1} \left( \frac{U_{ij}}{V_{kl}} \right) \right) \sin\theta$$

$$F_{yinc}, \varphi(U_{ij}, V_{kl}) = \left( -U_{ij} \ln(U_{ij}^2 + V_{kl}^2) - 2 \cdot V_{kl} \cdot \text{tg}^{-1} \left( \frac{U_{ij}}{V_{kl}} \right) \right) \cos\theta + \left( -V_{kl} \ln(U_{ij}^2 + V_{kl}^2) - 2 \cdot U_{ij} \cdot \text{tg}^{-1} \left( \frac{V_{kl}}{U_{ij}} \right) \right) \sin\theta$$

Les expressions des raideurs prennent la forme suivante :

$$K = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{4\pi\mu_0} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 (-1)^{i+j+k+l} \psi(U_{ij}, V_{kl})$$

$$K_{xinc}, \psi(U_{ij}, V_{kl}) = K_{x\perp} \cos\theta + K_{x//} \sin\theta \quad (\text{III.45})$$

$$K_{yinc}, \psi(U_{ij}, V_{kl}) = K_{y\perp} \cos\theta + K_{y//} \sin\theta$$

Ce qui donne les expressions entendues :

$$K_{xinc}, \varphi(U_{ij}, V_{kl}) = \left( 2 \cdot \text{tg}^{-1} \left( \frac{U_{ij}}{V_{kl}} \right) \right) \cos\theta + \left( \ln(U_{ij}^2 + V_{kl}^2) \right) \sin\theta$$

$$K_{yinc}, \varphi(U_{ij}, V_{kl}) = - \left( 2 \cdot \text{tg}^{-1} \left( \frac{U_{ij}}{V_{kl}} \right) \right) \cos\theta - \left( \ln(U_{ij}^2 + V_{kl}^2) \right) \sin\theta$$

### III.4.3.c .2 Les deux aimants ont des aimantations inclinées

Dans ce cas, on va se retrouver avec quatre combinaisons de systèmes entre aimantations parallèles et perpendiculaires au lieu de deux, comme présenté sur la figure suivante :

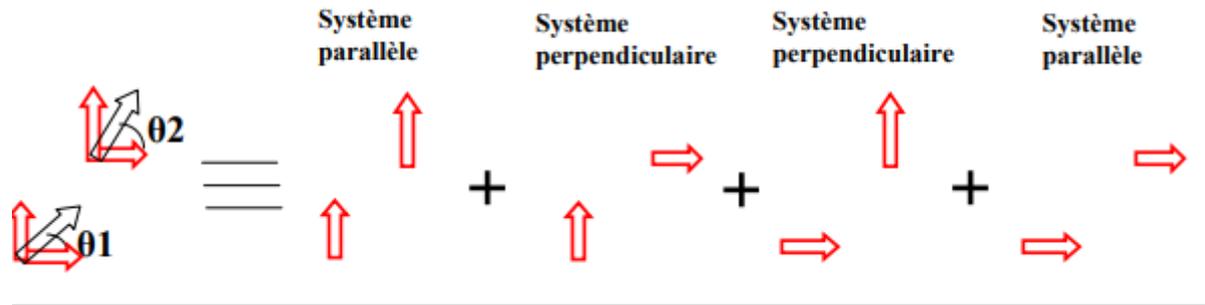


Figure III. 19 Décomposition d'un système à deux aimantations inclinées

### III.4.4 Calcul du couple exercé par rapport au centre de l'aimant

Dans cette partie de ce mémoire, et après les calculs analytiques des forces magnétiques d'interactions en 2D entre deux aimants permanents développé dans la partie précédente, nous allons présenter les expressions analytiques et les étapes de calculs des couples exercés entre ces aimants permanents dans un premier temps où l'aimantation est parallèle et dans un second où elle est perpendiculaire.

#### III.4.4 .1 Cas où l'aimantation des deux aimants est parallèle

L'expression générale du couple exercé sur l'un des deux aimants est donnée par :

$$\vec{\Gamma} = \frac{J \cdot J'}{4\pi\mu_0} \iint \begin{pmatrix} r'_Y B_z - r'_Z B_y \\ r'_Z B_x - r'_X B_z \\ r'_X B_y - r'_Y B_x \end{pmatrix} dS \quad (\text{III.46})$$

Avec

$$\vec{r}' = r'_x \vec{i} + r'_y \vec{j} + r'_z \vec{k} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \quad (\text{III.47})$$

En considérant le système de la figure (III.19), dont l'aimantation est parallèle avec une longueur longitudinale  $L$  suffisamment longue, le vecteur  $\vec{r}'$  se simplifie comme suit :

$$\vec{r}' = r'_y \vec{j} + r'_z \vec{k} = Y\vec{j} + Z\vec{k} \quad (\text{III.48})$$

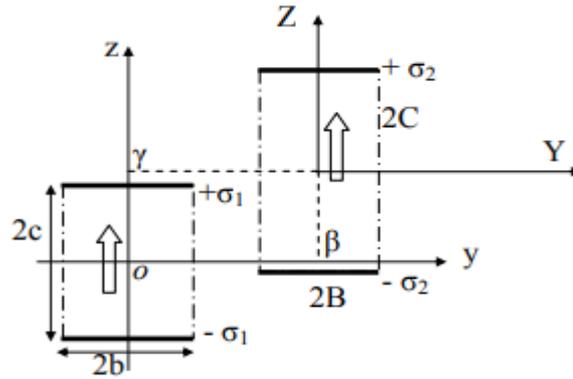


Figure III. 20 Représentation de deux aimants à aimantation parallèle

Pour les composantes de l'induction :

$$\vec{B} = B_Y \vec{j} + B_Z \vec{k} \tag{III.49}$$

En remplaçant dans l'équation (III.46), la composante du couple restante est suivant la direction X et donnée par :

$$\vec{\Gamma}_X = \frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \int_{-B}^B (r'_Y B_Z - r'_Z B_Y) dY \tag{III.50}$$

Ce qui donne :

$$\vec{\Gamma}_X = \frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \int_{-B}^B (Y \cdot B_Z - Z \cdot B_Y) dY \tag{III.51}$$

Cette dernière expression est composée de deux :

$$\frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \int_{-B}^B (Y \cdot B_Z) dY \tag{III.52}$$

Et :

$$\frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \int_{-B}^B (-Z \cdot B_Y) dY \tag{III.53}$$

Pour le deuxième aimant les charges se situent sur les bords -C et +C. En prenant en compte cette considération dans l'équation (III.53), cette intégrale est équivalente à :

$$\frac{J \cdot J'}{4\pi\mu_0} \int_{-B}^B (-Z \cdot B_Y) dY = \frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{k+l+p+q} [-C(-1)^q \Phi_Y(V_{kl}, W_{pq})] \tag{III.54}$$

Avec :

$$\frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{k+l+p+q} [-C(-1)^q \phi_Y(V_{kl}, W_{pq})] = F_{Y//} \quad (\text{III.55})$$

$F_{Y//}$ , et la forces suivant l'axe Y.

Pour la deuxième intégrale, et puisqu'elle est différente, on procède par un calcul intégral par partie.

$$\frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \int_{-B}^B (Y \cdot B_z) dY = \frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \left( \left[ Y \cdot \int_{-B}^B B_z dY \right]_{-B}^B - \int_{-B}^B \left( \int_{-B}^B B_z dY \right) dY \right) \quad (\text{III.56})$$

La première partie du calcul donne :

$$\frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \left( \left[ Y \cdot \int_{-B}^B B_z dY \right]_{-B}^B \right) = \frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \left( \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{k+l+p+q} [-B(-1)^l \phi_Z(V_{kl}, W_{pq})] \right) \quad (\text{III.57})$$

Avec :

$$\frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{k+l+p+q} \phi_Z(V_{kl}, W_{pq}) = F_{Z//} \quad (\text{III.58})$$

La deuxième intégrale est aussi calculée et donne :

$$\frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \left( \int_{-B}^B \left( \int_{-B}^B B_z dY \right) dY \right) = \frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \left( \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{k+l+p+q} \left[ \frac{W}{2} \phi_Y(V_{kl}, W_{pq}) - \frac{V}{2} \phi_Z(V_{kl}, W_{pq}) \right] \right) \quad (\text{III.59})$$

Finalement, le couple suivant la direction X est donné par :

$$\vec{\Gamma}_X = \frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{k+l+p+q} \tau_X(V_{kl}, W_{pq}) \quad (\text{III.60})$$

Avec :

$$\tau_x = \left( C(-1)^q - \frac{W}{2} \right) \phi_Y - \left( B(-1)^l - \frac{V}{2} \right) \phi_Z \quad (\text{III.61})$$

Avec  $\phi_Y$  et  $\phi_Z$  expriment les composantes des forces :

$$\begin{aligned} F_{Y//}, \quad \phi_Y(V_{kl}, W_{pq}) &= -V_{kl} \ln(V_{kl}^2 + W_{pq}^2) - 2 \cdot W_{pq} \cdot \text{tg}^{-1} \left( \frac{V_{kl}}{W_{pq}} \right) \\ F_{Z//}, \quad \phi_Z(V_{kl}, W_{pq}) &= W_{pq} \ln(V_{kl}^2 + W_{pq}^2) + 2 \cdot V_{kl} \cdot \text{tg}^{-1} \left( \frac{V_{kl}}{W_{pq}} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.62})$$

$$V_{kl} = \beta + (-1)^l B - (-1)^k b \quad , \quad W_{pq} = \gamma + (-1)^q C + (-1)^p c$$

**Exemple d'application**

Le dispositif choisit est constitué de deux aimants permanents identiques. L'aimantation est orientée suivant l'axe Z-figure III.19

On fait bouger le deuxième aimant suivant l'axe Y, et on trace à chaque instant les valeurs des forces et du couple appliqués sur ce dernier.

Les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par le même dispositif réalisé en utilisant la référence [19].

Les données complètes de l'application sont les suivantes :

$b=B=5\text{mm}$  et  $c=C=5\text{mm}$ .

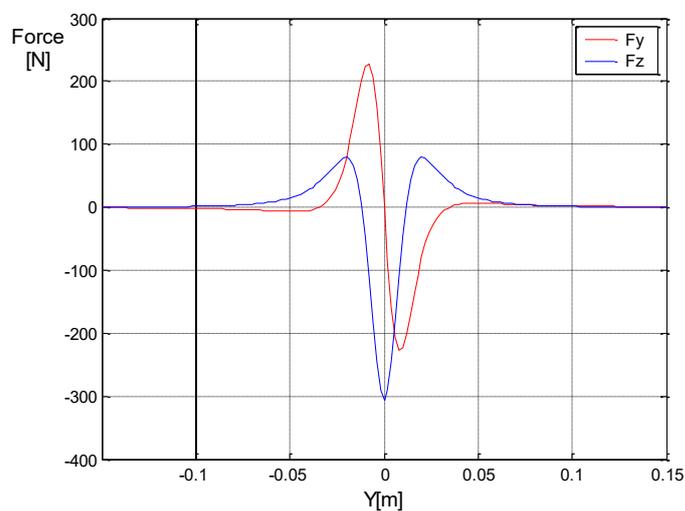
Longueur :  $L=1\text{m}$ .

Les polarisations :  $J=J'=1\text{T}$ .

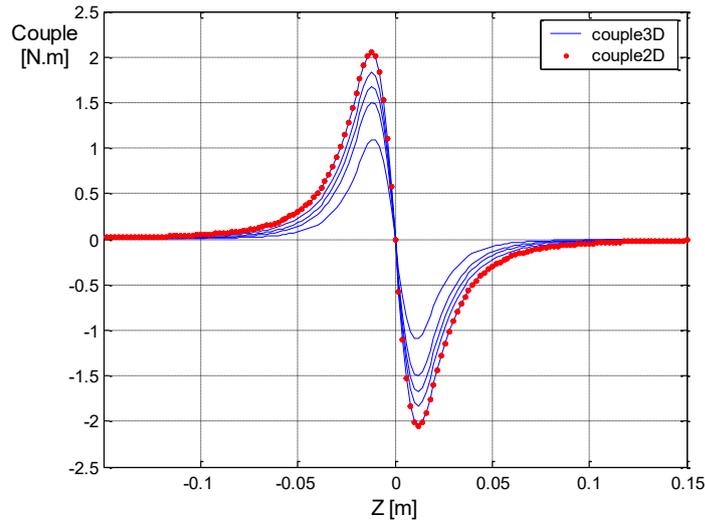
Distance :  $\gamma=20\text{mm}$ .

Le deuxième aimant fait un mouvement rectiligne de  $\beta=-150\text{mm}$  à  $\beta=150\text{mm}$ .

Les forces et le couple calculés sont en figure III.20 et figure III.21



**Figure III. 21** Forces exercées sur l'aimant en mouvement (aimantation parallèle)

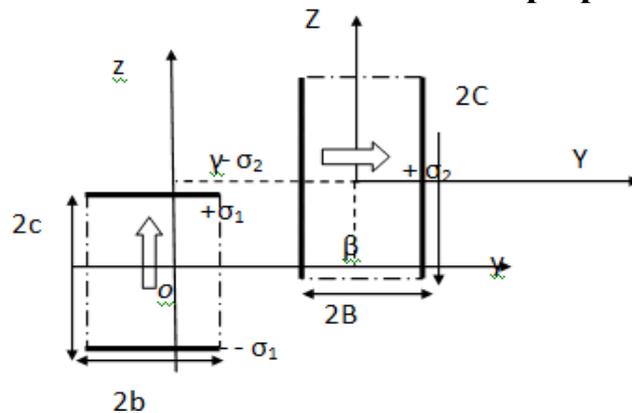


**Figure III. 22** Couples exercées sur l’aimant en mouvement (aimantation parallèle)

D’après la figure (III.20) on constate à cause du déplacement, la force  $F_y$  atteint un maximum avant que l’aimant en déplacement soit complètement superposé avec le premier. Au centre sa valeur est nulle, ensuite elle reprend les mêmes valeurs mais dans le sens opposé et cela à cause de la symétrie de déplacement. La force  $F_z$  est à son maximum dans la position où les deux aimants sont parfaitement en face.

Pour valider l’allure du couple figure III.21 en fonction du déplacement, nous avons choisi la référence [19]. La courbe en rouge est obtenue à partir des expressions du couple en 2D en l’occurrence l’équation (III.60). Les courbes en bleu sont données par le modèle 3D [19] pour différentes longueurs des aimants en interaction ( $A=0.02$  mètre jusqu’à  $A=1$  mètre, avec  $A=a$ ). On constate qu’à partir d’un mètre les deux courbes (en rouge et en bleu) se superposent, ce qui valide nos résultats.

**III.4.4 .2 Cas de l’aimantation des deux aimants est perpendiculaire**



**Figure III. 23** Représentation de deux aimants à aimantation perpendiculaire

Dans ce cas, les deux aimantations sont en parallèle l'une par rapport à l'autre, donc l'équation (III.50), prend la forme suivante :

$$\vec{\Gamma}_X = \frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \int_{-C}^C (Y \cdot B_Z - Z \cdot B_Y) dZ \quad (III.63)$$

En suivant les mêmes étapes que le cas parallèle on trouve :

$$\frac{J \cdot J'}{4\pi\mu_0} \int_{-C}^C (Y \cdot B_Z) dZ = \frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{k+l+p+q} [B(-1)^l \Phi_Z(V_{kl}, W_{pq})] \quad (III.64)$$

La deuxième intégrale se fera en utilisant toujours le calcul intégral par partie :

$$\frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \int_{-C}^C (-Z \cdot B_Y) dZ = \frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \left( \left[ -Z \cdot \int_{-C}^C B_Y dZ \right]_{-C}^C + \int_{-C}^C \left( \int_{-C}^C B_Y dZ \right) dZ \right) \quad (III.65)$$

La première partie du calcul donne :

$$\frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \left( \left[ -Z \cdot \int_{-C}^C B_Z dZ \right]_{-C}^C \right) = \frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \left( \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{k+l+p+q} [-C(-1)^q \Phi_Y(V_{kl}, W_{pq})] \right) \quad (III.66)$$

La seconde intégrale est aussi calculée est donne :

$$\begin{aligned} & \frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \left( \int_{-C}^C \left( \int_{-C}^C B_Y dZ \right) dZ \right) = \\ & \frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \left( \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{k+l+p+q} \left[ \frac{W}{2} \Phi_Y(V_{kl}, W_{pq}) - \frac{V}{2} \Phi_Z(V_{kl}, W_{pq}) + V_{kl} W_{pq} \left( \text{tg}^{-1} \left( \frac{V_{kl}}{W_{pq}} \right) + \text{tg}^{-1} \left( \frac{W_{pq}}{V_{kl}} \right) \right) \right] \right) \quad (III.67) \end{aligned}$$

D'après les expressions (III.66) et (III.67), le couple suivant X sera exprimé :

$$\vec{\Gamma}_X = \frac{J \cdot J' \cdot L}{4\pi\mu_0} \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{k+l+p+q} \tau_X(V_{kl}, W_{pq}) \quad (III.68)$$

Avec :

$$\tau_x = \left( -C(-1)^q + \frac{W}{2} \right) \Phi_Y + \left( B(-1)^l - \frac{V}{2} \right) \Phi_Z + V_{kl} W_{pq} \left( \text{tg}^{-1} \left( \frac{V_{kl}}{W_{pq}} \right) + \text{tg}^{-1} \left( \frac{W_{pq}}{V_{kl}} \right) \right) \quad (III.69)$$

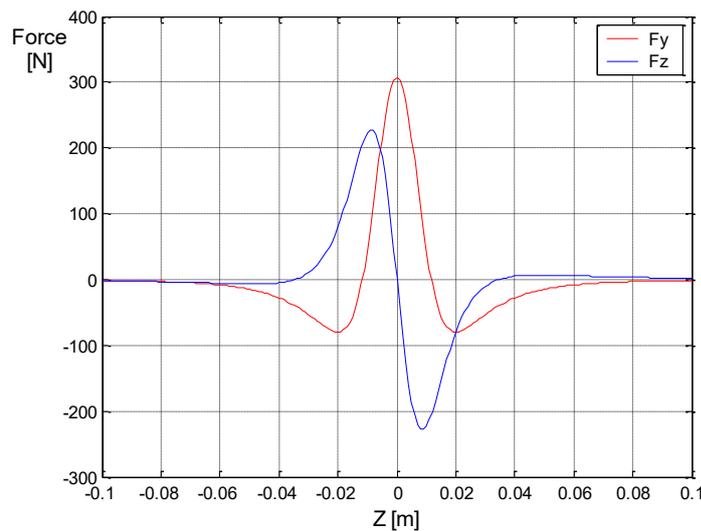
Avec  $\Phi_Y$  et  $\Phi_Z$  expriment les composantes des forces :

$$\begin{aligned}
 F_{Y\perp}, \quad \phi_Y(V_{kl}, W_{pq}) &= W_{pq} \ln(V_{kl}^2 + W_{pq}^2) + 2 \cdot V_{kl} \cdot \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{V_{kl}}{W_{pq}}\right) \\
 F_{Z\perp}, \quad \phi_Z(V_{kl}, W_{pq}) &= V_{kl} \ln(V_{kl}^2 + W_{pq}^2) + 2 \cdot W_{pq} \cdot \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{V_{kl}}{W_{pq}}\right) \\
 V_{kl} &= \beta + (-1)^l B - (-1)^k b \quad , \quad W_{pq} = \gamma + (-1)^q C + (-1)^p c
 \end{aligned}
 \tag{III.70}$$

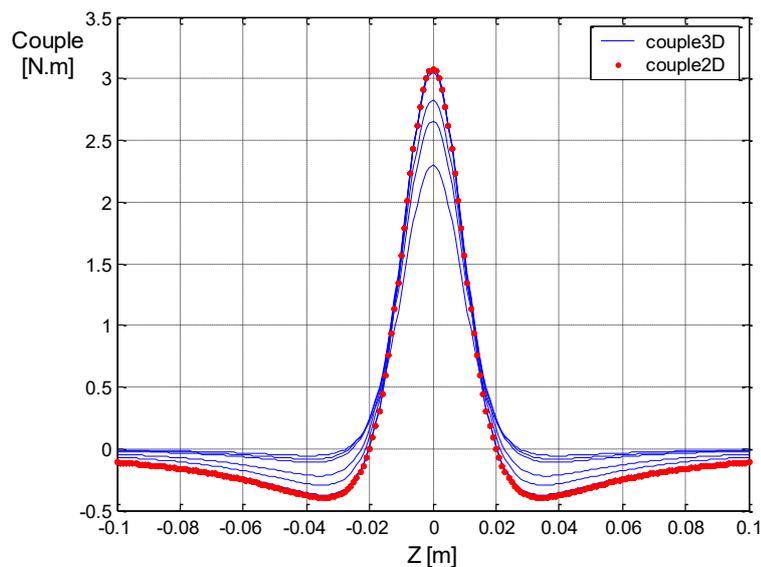
### Exemple d'application

On va prendre l'exemple d'application précédent, le seul changement s'opère sur le deuxième aimant, où la direction de son aimantation devient suivant l'axe 'Y'.

Les résultats de calcul concernant les forces et le couple sont donnés sur les figures suivantes :



**Figure III. 24** Forces exercées sur l'aimant en mouvement (aimantation perpendiculaire)



**Figure III. 25** Couples exercées sur l'aimant en mouvement (aimantation perpendiculaire)

Dans la figure (III.25), la courbe en rouge est obtenue à partir des expressions 2D en l'occurrence l'expression (III.68). Les courbes en bleu sont obtenues à partir des équations du modèle 3D pour différentes longueurs des aimants en interaction ( $A=0.02$  mètre jusqu'à  $A=1$  mètre et  $A=a$ ). On remarque qu'à partir d'une longueur d'un mètre, une superposition totale des deux courbes est obtenue ce qui valide nos résultats.

### Remarque importante

On constate d'après les expressions du couple (cas parallèle et cas perpendiculaire), qu'il est lié aux forces mises en jeu, et il est exprimé en fonction des coins des aimants que Bancel [21] les appelés les 'nœuds magnétiques'. Ces derniers donnent une nouvelle représentation de l'aimantation considérée comme rigide, cette rigidité nous permet de la remplacer par des surfaces chargées dont découle le calcul de toutes les grandeurs magnétiques intervenantes dans le système. En outre, la représentation la moins connue de nous tous est que ces surfaces chargées peuvent être remplacées par des pôles ponctuels (nœuds magnétiques) sur les coins de chaque aimant permanent. Le potentiel scalaire, le champ magnétique et encore toutes les interactions magnétiques (énergies, forces, couples, etc) peuvent être calculés à partir de ces nœuds magnétiques chargés positivement ou négativement d'une façon alternée pour deux nœuds adjacents. La figure suivante représente le même système de deux barreaux aimantés en interaction en utilisant la notion des nœuds magnétiques.

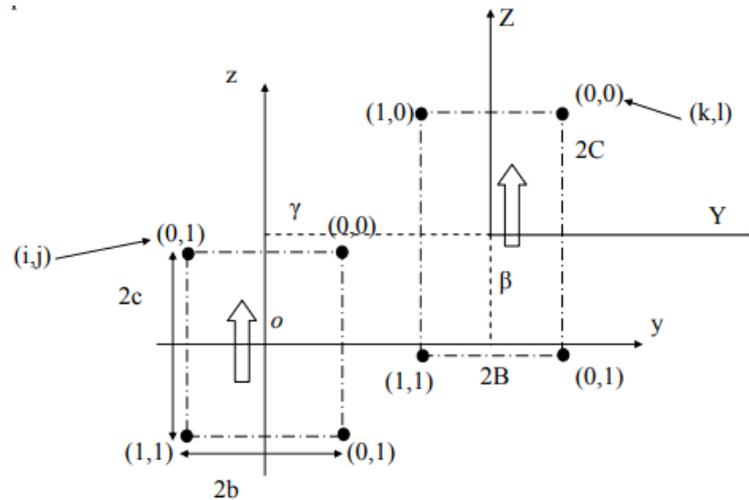


Figure III. 26 Représentation des Nœuds magnétiques en 2D

### III.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons commencé par présenter la méthode des dipôles magnétiques pour calculer des grandeurs électromagnétiques, et donner les différentes configurations possibles pour les paliers magnétiques passifs et cela sous des conditions bien définies. Ensuite nous avons utilisé le modèle des sources équivalente, plus précisément la méthode dites des charges ou des pôles équivalents (modèle coulombienne), pour calculer les différentes grandeurs magnétiques aussi bien les forces et les raideurs magnétiques d'interaction entre deux aimants permanents. Nous avons constaté que cette approche est bien adaptée aux paliers magnétiques passifs construits à partir d'aimants permanents modernes. On a vu aussi qu'à partir des études des forces magnétiques entre deux aimants permanents, pour des aimantations parallèles ensuite en quadrature, qu'on peut déduire les calculs pour des aimantations orientée d'une manière arbitraire. La dernière partie de ce chapitre est dédiée aux développements analytiques des couples en 2D pour un système constitué de deux aimants permanents à aimantation parallèle ensuite perpendiculaire. Les expressions trouvées sont validées par des modèles analytiques en 3D trouvés dans la bibliographie.

# **CONCLUSION GÉNÉRALE**

### Conclusion générale

L'objectif de ce mémoire de fin d'étude était de développer des modèles analytiques afin de calculer les quantités magnétiques mises en jeu dans les systèmes à aimants permanents, tel que le potentiel scalaire, l'énergie, les forces et les raideurs. Ces résultats peuvent être appliqués aux suspensions magnétiques passives et aussi à d'autres dispositifs contenant des parties ferromagnétiques à haute perméabilité.

La contribution dans ce mémoire dans le domaine de calcul analytique en 2D :

- Utiliser la méthode des dipôles magnétiques, pour trouver toutes les configurations possibles qui assurent la stabilité des paliers magnétiques passifs en fonctionnement centré ou buté.
- Donner des expressions analytiques compactes permettant le calcul des forces magnétiques pour un système à aimant permanent à aimantation inclinée et cela en synthétisant le modèle à aimantation parallèle avec celui en quadrature.
- Calcul des couples agissants au centre des aimants, dans un premier temps pour le cas où l'aimantation est parallèle et dans un second pour celui perpendiculaire, sans oublier d'aborder la notion dite des « nœuds magnétiques », et en prenant le soin de valider tous les résultats trouvés.

Ces expressions ouvrent la porte à d'autres disciplines plus intéressantes l'une que l'autre à savoir la conception et l'optimisation des dispositifs à aimants permanents.

# ANNEXE

# **ANNEXE A**

## A. Etude statique des suspensions

### A.1 Stabilité statique

#### A.1.1 Equilibre statique

Rappelons tout d'abord à quelle condition un corps est en équilibre

Les premières conditions nécessaires est que ce corps, s'il est immobile, soit soumis à des forces et des moments dont la somme soit nulle (principe fondamental de la dynamique appliqué au cas d'une accélération nulle).

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \sum \vec{M}_{ext} = \vec{0} \quad (\text{A.1})$$

#### A.1.2 - Critères de stabilité statique

Les critères d'équilibre ne sont malheureusement pas suffisants pour assurer la stabilité. Etudions le cas d'une bille posée sur une calotte sphérique (figure A.1).

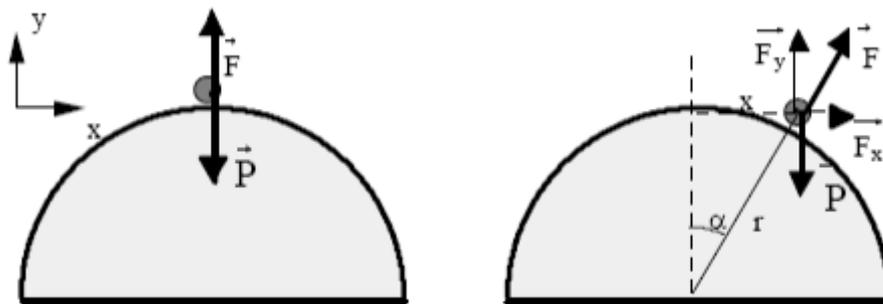


Figure A.1 Instabilité d'une bille sur une calotte

Lorsqu'elle repose sur le haut de la sphère, la bille est en équilibre. La force exercée par la sphère compense exactement son poids. Pourtant, la bille ne reste pas sur le sommet car l'équilibre est instable. Cette instabilité, évidente à l'œil, se traduit aussi mathématiquement ;

$$F_y = p \text{ et } F \text{ perpendiculaire à la calotte sphérique} \Rightarrow F_x = p \tan \alpha \text{ d'où: } F_x = x p/r$$

Le calcul de la dérivée de la force autour de la position d'équilibre donne une valeur fixe :

$$\frac{dF_x}{dx} = \frac{P}{r}$$

Cette valeur est positive, ce qui veut dire qu'un déplacement d'une quantité  $dx$  va entraîner une force  $dF_x$  de même sens qui renforcera le déplacement. Nous sommes donc en présence d'une instabilité. Pour la prendre en compte, nous utiliserons par la suite les notions de raideur définies comme suit :

$$\vec{K} = - \begin{vmatrix} \frac{dF_x}{dx} \\ \frac{dF_y}{dy} \\ \frac{dF_z}{dz} \end{vmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Il est possible de définir de la même façon la raideur angulaire :

$$\vec{K}_\theta = - \begin{vmatrix} \frac{dM_{\theta x}}{dx} \\ \frac{dM_{\theta y}}{dy} \\ \frac{dM_{\theta z}}{dz} \end{vmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Pour un système, quand sa raideur est positive, peut être comparé à un ressort car il s'oppose au déplacement. Par contre, quand sa raideur est négative il favorise l'écartement par rapport à la position d'équilibre. Avec les définitions prises, une raideur négative suivant une composante entraîne donc une instabilité suivant cette même composante. Pour qu'une suspension magnétique soit en équilibre stable, il faut donc qu'elle puisse équilibrer l'ensemble des actions extérieures mais aussi que toutes les raideurs engendrées par les forces et les moments extérieurs à la partie suspendue, soient supérieures ou égales à 0. Donc les conditions de stabilité seront :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ext} &= \vec{0} \quad , \quad \sum \vec{M}_{ext} = \vec{0} \\ &\text{et} \\ K_x &> 0, K_y > 0, K_z > 0 \\ M_{\theta x} &> 0, M_{\theta y} > 0, M_{\theta z} > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

La suspension doit impérativement respecter ces huit conditions pour pouvoir fonctionner.

# **ANNEXE B**

## Théorème d'Earnshaw

### B.I corps à aimantation rigide (aimants permanents)

Le théorème d'Earnshaw peut aisément être étendu aux matériaux à aimantation rigide (aimants permanents) plongés dans un champ magnétostatique.

Démonstration : Soit un corps de volume  $V$  et d'aimantation rigide  $J$ , soumis à un champ extérieur statique  $H$ . L'énergie de l'interaction entre l'aimant et le champ s'écrit :

$W_i = - \iiint \vec{j} \cdot \vec{H} dv$	(B.1)
---	-------

La force d'interaction est obtenue en dérivant l'énergie :

$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}W_i$	(B.2)
--	-------

Les raideurs, quant à elles, sont obtenues en dérivant chacune des composantes de la force. La somme des raideurs est donc égale à la divergence de la force :

$\sum k_i = -\text{div}\vec{F}$	(B.3)
---------------------------------	-------

Ce qui donne :

$\sum k_i = -\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} W_i) = \Delta W_i$	(B.3)
---	-------

De (B.I), le laplacien de l'énergie s'écrit :

$\Delta W_i = -\Delta \iiint \vec{j} \cdot \vec{H} dv$	(B.4)
--	-------

Nous sommes toujours dans le cas  $J$  constant alors :

$\Delta W_i = - \iiint \vec{j} \cdot \Delta \vec{H} dv$	(B.5)
---	-------

Comme le laplacien de  $H$  est nul cela implique :

$k_x + K_y + K_z = 0$	(B.6)
-----------------------	-------

La somme des raideurs des aimants plongés dans un champ extérieur statique est égale à zéro. Cette relation ne peut être vérifiée que si l'une des raideurs au moins est inférieure ou égale à zéro. Dans ce cas, au moins un des trois axes de translation de l'aimant sera instable. Par conséquent il est impossible de réaliser une suspension stable uniquement à base d'aimants.

Ces propriétés restent valables pour des bobines parcourues par un courant constant car elles sont alors équivalentes à un aimant.

## B.II Corps conducteur non magnétique

Un conducteur de conductivité  $\sigma$ , parcouru par un courant induit  $j$ , engendre un champ magnétique dans tout l'espace. L'énergie totale s'écrit alors :

$W = \frac{1}{2} \iiint \vec{B} \cdot \vec{H} dv$	(B.7)
---	-------

$B$  et  $H$  : l'induction et le champ magnétiques en un point de l'espace.

$\sum K = -\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} W) = \Delta W$	(B.8)
---	-------

Ce qui donne :

$k_x + K_y + K_z = \iiint \Delta(\vec{B} \cdot \vec{H})$	(B.9)
--	-------

Alors :

$k_x + K_y + K_z = \iiint \text{div}(\vec{B} \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} + \vec{H} \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \iiint \text{div}(\vec{B} \times \vec{j})$	(B.10)
--	--------

Le courant est nul en dehors du conducteur, cette équation s'écrit :

$k_x + K_y + K_z = \iiint (\vec{j} \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} - \vec{B} \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j}) = \iiint \left( \mu_0 j^2 + \sigma \mu_0^2 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) dv$	(B.11)
--	--------

Donc :

$k_x + K_y + K_z = \iiint \left( \mu_0 j^2 + \sigma \mu_0^2 \frac{\partial H^2}{\partial t} \right) dv$	(B.12)
---	--------

1<sup>er</sup> Cas : Conducteur placé dans un champ magnétostatique :

$k_x + K_y + K_z = \iiint (\mu_0 j^2) dv$	(B.13)
---	--------

L'unique moyen d'avoir un courant induit qui ne s'annule pas dans un champ statique est que le conducteur ait une résistivité nulle. Un supraconducteur vérifie donc :

$k_x + K_y + K_z > 0$	(B.14)
-----------------------	--------

Il n'y a pas donc d'impossibilité à ce qu'un corps de résistivité nulle soit soumis à des raideurs positives suivant ses trois axes de translation. Un supraconducteur peut donc être stable dans un champ magnétostatique.

2<sup>ième</sup> cas: Le conducteur est placé dans un champ magnétodynamique

En supposant que le champ soit sinusoïdal et le conducteur est parcouru par des courants sinusoïdaux :

$$H = H_{eff}\sqrt{2} \sin\omega t \quad j = j_{eff}\sqrt{2} \sin\omega t$$

La somme des raideurs s'écrit alors :

$k_x + K_y + K_z = \iiint \left( \mu_0 j_{eff}^2 \sin^2(\omega t - \phi) + \sigma \mu_0^2 H_{eff}^2 \frac{\partial \sin^2 \omega t}{\partial t} \right) dv$	(B.15)
---	--------

Après calcul de la valeur moyenne des sommes des raideurs, on trouve :

$k_x + K_y + K_z = \iiint (\mu_0 j^2) dv$	(B.16)
---	--------

En conclusion, un conducteur placé dans un champ magnétodynamique est soumis à des raideurs dont la somme est toujours positive en moyenne. Chacune des raideurs peut donc être positive et entraîner la stabilité suivant les trois axes de translation. Un conducteur peut donc être stable dans un champ magnétodynamique.

RÉFÉRENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

## Références bibliographiques

- [1] ALLAG H. "Modèles et calcul des systèmes de suspension magnétique passive- Développement et calculs analytiques en 2D et 3D des interactions entre les aimants permanents- *Thèse de doctorat de l'université de Grenoble, 2010.*
- [2] DELAMARRE J. "Suspensions magnétiques partiellement passives", *thèse de doctorat de l'INPG, 1994.*
- [3] FAURE F. "Suspension magnétique pour volant d'inertie". *Thèse de doctorat de l'université de Grenoble, 2010*
- [4] LEPRINCE-RINGUET F., "Aimants permanents ; Matériaux et Applications ", Techniques de l'Ingénieur, traité Génie électrique
- [5] YONNET J. P., "Matériaux Magnétiques Durs", Sous-Chapitre 9.11.2, PRATIQUE DES MATERIAUX INDUSTRIELS, LES REFERENCIELS DUNOD, Novembre, 2000.
- [6] BRISSONNEAU P., "Magnétisme et matériaux magnétiques pour l'électrotechnique ", Edition Hermès, 1997.
- [7] DURAND E., "Magnétostatique", Masson et Cie, Paris, 1968.
- [8] CARPENTER C. J., "Surface-integral methods of calculating forces on magnetized iron parts", IEEE Monogr., Vol. 342, pp. 19-28, 1959.
- [9] COULOMB J. L., "Analyse tridimensionnelle des champs électriques et magnétiques par la méthode des éléments finis". *Thèse de doctorat d'état Es-Sciences, Grenoble, 1981.*
- [10] REYNE G., "Analyse théorique et expérimentale des phénomènes vibratoires d'origine électromagnétiques ", thèse de 3ème cycle de l'INPG, Grenoble, 1987.
- [11] YONNET P. "Etude des paliers magnétiques passifs". *Thèse de doctorat de INPG, 1980.*
- [12] H.J. WIESMANN and K.BACHMANN : "Magnetic properties of permanent magnets, and characteristics of Electromagnetic systems".
- [13] A.J.HARISSON: "An optimized 50 Nms momentum wheel utilizing magnetic repulsion bearing". Proceedings of ADCS conference, Noordwijk (1977), PP 389-393.
- [14] YONNET J. P., "Paliers et butées magnétiques passifs", Techniques de l'Ingénieur, traité Génie Electrique. 82.

- [15] ] YONNET J., “Permanent magnet bearing and coupling”, *IEEE Trans. Magn.*, Vol.17, pp. 1169-1173, 1981.
- [17] BROWN W.F., “Principes de ferromagnétisme”, (Traduit de l’anglais par J.C. Doukhan), *Dunod*, 1970.
- [18] PANOFSKY W. K. H., PHILLIPS M., “Classical Electricity and Magnetism”, *Addison Wesley*. 1956.
- [19] ALLAG H, “Three-Dimensional Analytical Calculation of Permanent Magnet Interactions by “Magnetic Node Representation”IEEE Transactions on Magnetics (Volume: 47, Issue: 8, Aug. 2011)
- [20] ALLAG H. “Analytical calculation of the torque exerted between two perpendicularly Sep. 1984. [4] F. Bancel, “Magnetic nodes,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, magnetized magnets”, *journal of applied physics* 109, 07E107 (2011).
- [21] BANCEL F, “Magnetic nodes,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 32, pp. 2155–2161, 1999.
- [22] FURLANI E. P., “A formula for the levitation force between magnetic disks”. *IEEE Trans. Magn*, Vol 29, pp. 4165-4169.
- [23] FURLANI E. P., “Permanent magnet in electromagnetic devices, materials, Analysis and applications”, *Academic., Elsevier., New York., 2001.*

---

## Résumé

Les systèmes de lévitation magnétique fonctionnant grâce aux dispositifs de positionnement (palier magnétiques passifs), où les forces de guidage entre la partie fixe et la partie mobile travaillent en attraction ou en répulsion. Dans ce contexte, et après avoir énuméré les différents types de suspensions magnétiques, les calculs des interactions entre aimants permanents de forme carrée ont été présentés.

La méthode des dipôles magnétiques nous a permis de réaliser un calcul approché des paliers magnétiques passifs et aboutir aux différentes configurations possibles. L'approche coulombienne quant à elle nous a conduit à un calcul complet, et mettre en évidence un modèle analytique de calcul d'énergies, des forces, des raideurs et des couples pour des systèmes à aimant permanent.

**Mots clés :** Force, raideur, aimant permanent, palier magnétique passif.

---

## PASSIVE MAGNETIC SUSPENSION

### Abstract

Passive magnetic bearings are positioning devices, where the guiding forces between the fixed part and the moving work in attraction or repulsion. In this context, and after listing the different types of magnetic suspension, the calculations of the interactions between square-shaped permanent magnets have been presented.

The magnetic dipole method made it possible to develop an approximate calculation for passive magnetic bearing, and lead to different possible configurations. The Coulomb approach, for its part, led us to full calculation and to highlight an analytic model of calculation the energy, the forces, the stiffness and the torque for magnetic bearing system.

**Keywords:** Force, stiffness, torque, permanent magnet, passive magnetic bearing.

---

### التلخيص

تعمل أنظمة الرفع المغناطيسية بفضل أجهزة تحديد المواقع (المحامل المغناطيسية السلبية)، حيث تعمل قوى التوجيه بين الجزء الثابت والجزء المتحرك في الجذب أو التنافر. في هذا السياق، وبعد سرد الأنواع المختلفة من المعلقات المغناطيسية، تم تقديم حسابات التفاعلات بين المغناطيس الدائم على شكل مربع. سمحت لنا طريقة ثنائيات الأقطاب المغناطيسية بإجراء حساب تقريبي للمحامل المغناطيسية السلبية والوصول إلى التكوينات المختلفة الممكنة. في غضون ذلك، قادنا نهج كولوم إلى حساب كامل، وتبسيط الضوء على نموذج تحليلي لحساب الطاقات والقوى والصلابة وعزم الدوران لأنظمة المغناطيس الدائم.

**الكلمات المفتاحية:** القوة، الصلابة، المغناطيس الدائم، المحمل المغناطيسي السلبية.