République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre :

№ de séries :

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité :Mathématique.

Option :Analyse Fonctionnelle.

Thème

Théorème de Picard p-adique

Présenté par :

- **Lounis Wafa.**
- **Mecemma Imene.**

Devant le jury :

Président	: **T.Zerzaihi**	**Prof.**	Université de Jijel
Encadreur	: **B.Saoudi**	**M.A.A.**	Université de Jijel
Examinateur	: **S.Medjrab**	**M.A.A**	Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

TABLE DES MATIÈRES

Notation

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce travail.

$\mathbb{K}$	:	Un corps.
$\|.\|$	:	Une norme sur un corps $\mathbb{K}$.
p	:	Un nombre premier.
v_p	:	La valuation p-adique.
$S_p(n)$	:	La somme des chiffres de l'écriture de n en base p.
$D^+(a,r)$	:	Le disque fermé de centre a et de rayon r.
$D^-(a,r)$	:	Le disque ouvert de centre a et de rayon r.
$D(a,r)$	:	L'un ou l'autre de ces deux disque.
$C(a,r)$	:	Le cercle de centre a et de rayon r.
$\vert.\vert_p$	:	La valeur absolue p-adique.
$\mathbb{Z}_p$	:	Anneau des entiers p-adique.
$\mathbb{Z}^*{}_p$	:	L'ensemble des éléments inversible de $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{Q}_p$	:	Corps des fractions de $\mathbb{Z}_p$.
$\bar{\mathbb{Q}}_p$	:	La clôture algébrique de corps $\mathbb{Q}_p$.
$\mathbb{C}_p$	:	Le complété de la clôture algébrique de corps $\mathbb{Q}_p$.
$\vert\mathbb{C}_p^*\vert_p$	:	L'ensemble des puissances rationnelles de p.
$\mathcal{A}(D(a,r))$	:	L'ensemble des fonctions analytiques sur $D(a,r)$.
$\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$	:	L'ensemble des fonctions entièrs sur $\mathbb{C}_p$.
$\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[X]$	:	L'ensemble des fonctions entiers transcendantes sur $\mathbb{C}_p$.
$\vert\vert.\vert\vert = \vert.\vert(r)$	:	Le module de maximum.
ϕ_f	:	La fonction de valuation p-adique de f .
$\mathbb{C}_p(X)$	:	L'ensemble des fonction rationnelles sur $\mathbb{C}_p$.
$z(r,f)$	:	Le nombre de zéros de f sur le cercle $\vert x-a\vert_p = r$.

INTRODUCTION

Le plus célèbre théorème de Picard figure dans une note aux Comptes rendus de l'Académie des sciences (C.R.A.S.) de paris, datée du 19 mai 1879, sous sa forme primitive, et dans les Annales de l'École normale supérieure de paris 1880. l'idée de ce théorème est venue du théorème fondamental d'algèbre, aussi appelé théorème de d'Alembert-Gauss qui dit qu'un polynôme de degré n possède exactement n racines dans $\mathbb{C}$. Ce résultat et sous la forme suivante "toute valeur du plan complexe est prise une infinité de fois ".

L'importance de cette théorie est qu'elle peut être généralisée pour déterminer les résultats d'existence et d'unicité pour les équations différentielles. Une autre est qu'il s'agit d'une bonne introduction à la vaste classe de théorème d'existence et d'unicité qui reposent sur des points fixes.

Ce mémoire est reparti sur trois chapitres précédé d'une introduction.

Dans le premier chapitre, on commence par quelques rappels des notions fondamentales du corps non archimédienne muni d'une norme ultra métrique. Ensuite, on construit le corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$. Après, on présente aussi les propriétés topologiques et analytiques de $\mathbb{C}_p$ et on cite par exemple le fait qu'une série converge si et seulement si son terme général tend vers zéro. On termine ce chapitre par les fonctions analytiques complexes p-adiques.

Le deuxième chapitre est réparti sur deux parties. Dans le premier partie on commence par l'inégalité de Cauchy et l'évaluation $M(r, f(x))$ pour un polynôme et pour une fonc-

tion entière transcendent. En suite, on donne la définition de l'ordre des fonctions entières transcendent. À la fin de ce partie, on va démontrer le théorème de Picard dans $\mathbb{C}$ pour les fonctions entières transcendent d'ordre fini entier (**resp.** fini non entier).
Le but principal du deuxième partie est de présenter le Théorème de picard p-adique. Pour cela on a besoin d'un outil important "Polygône de valuation", qui détermine la distribution des zéros des fonctions entières et qui joue un grand rôle pour établir la formule de Jensen.

En fin, dans le troisième chapitre on a appliqué le théorème de Picard p-adique sur la factorisation des fonctions entières. Et on utilise le système

$$\begin{cases} F(x) = \beta \\ F'(x) = 0. \end{cases}$$

Pour étudier la primalité et le pseudo primalité d'une fonction entière transcendante. On termine ce chapitre par la construction des fonctions entières premières et pseudo-premières.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

L'objective de ce chapitre est de donner les notions de base en l'analyse non-archimédienne, qu'il seront très utiles tout au long de ce mémoire.

1.1 Corps normés

Définition 1.1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, une norme sur $\mathbb{K}$ est une application $\|.\| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$ vérifier les conditions suivantes :*

1. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{K}.$
2. $\|x.y\| = \|x\|.\|y\| \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}.$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}$ *(inégalité triangulaire).*

De plus, si la norme vérifie l'inégalité triangulaire forte, ***i.e***

$$\|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|) \quad \forall x, y \in \mathbb{K}.$$

Alors, la norme $\|.\|$ est non-archimédienne et $(\mathbb{K}, \|.\|)$ est un corps non-archimédienne .

Proposition 1.1. *[13] (**Propriétés des triangles isocèles**)*
Soit a et x deux éléments, d'un corps non-archimédienne $(\mathbb{K}, \|.\|)$. On a

$$\|x - a\| < \|a\| \Rightarrow \|x\| = \|a\|.$$

P*reuve*.
Soit $a, x \in \mathbb{K}$ tel que $\|x-a\| < \|a\|$, alors on a

$$\|x\|= \|x-a+a\|\leq \max\{\|x-a\|, \|a\|\} = \|a\|,$$

et

$$\|a\|= \|a-x+x\|\leq \max\{\|a-x\|, \|x\|\} = \|x\|,$$

puisque, si

$$\max\{\|a-x\|, \|x\|\} = \|a-x\|,$$

alors c'est une contradiction avec l'hypothèse.
D'où

$$\|a\|\leq \|x\| \quad et \quad \|x\|\leq \|a\|\Longrightarrow \|x\|= \|a\|.$$

■

Remarque 1.1. *Dans un corps non archimidiènne on a*

$$\|x\| \neq \|y\|\Longrightarrow \|x+y\|= max(\|x\|, \|y\|).$$

Théorème 1.2. *[13] Soit $\|.\|$ une norme sur le corps $\mathbb{K}$, on a $\|.\|$ est non archimédinne si et seulement si pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$:* $\qquad \|n\| \leq 1.$

P*reuve*. On suppose que $\|x+y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$ est vérifie et on montre par récurrence que $\|n\| \leq 1$ pour tout entier $n \geq 0$.
pour $n = 0$; on a $\|n\| = \|0\| = 0 \leq 1$, et pour $n = 1$; $\quad \|n\| = \|1\| = 1 \leq 1$.
On suppose que $\|n\| \leq 1$ et vraie pour $n \geq 0$, et on montre que $\|n+1\| \leq 1$.
On a

$$\|n+1\| \leq \max(\|n\|, \|1\|) \leq 1,$$

d'où

$$\|n+1\| \leq 1,$$

alors $\forall n \in \mathbb{N} : \|n\| \leq 1$.
Pour la deuxième implication on suppose que $\|n\| \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on montre que $\|x+y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$ pour tout $x, y \in \mathbb{K}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned}\|x+y\|^n = \|(x+y)^n\| &= \|\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \|C_n^k\| \|x^k\| \|y^{n-k}\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} 1 \|x\|^k \|y\|^{n-k}.\end{aligned}$$

Et comme on a

$$\|x\| \leq \max(\|x\|, \|y\|) \ et \ \|y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|),$$

alors

$$\|x\|^k \leq (\max(\|x\|, \|y\|))^k \ et \ \|y\|^{n-k} \leq (\max(\|x\|, \|y\|))^{n-k},$$

d'où

$$\begin{aligned} \|x+y\|^n &\leq \sum_{k=0}^{n} (\max(\|x\|, \|y\|))^n \\ &\leq (n+1)(\max(\|x\|, \|y\|))^n, \end{aligned}$$

donc

$$\|x+y\| \leq (n+1)^{\frac{1}{n}} (\max(\|x\|, \|y\|)).$$

Par passage à la limite de n on obtient

$$\|x+y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|).$$

■

Remarque 1.2. *Une norme $\|.\|$ est dit archimédienne si*

$$\sup\{\|n\|, n \in \mathbb{N}\} = +\infty.$$

Définition 1.3. *(La valuation)*.
Soit $\mathbb{K}$ un corps, une valuation v sur $\mathbb{K}$ est une application de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

$$\begin{aligned} &1) \ v(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0, \\ &2) \ v(xy) = v(x) + v(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}, \\ &3) \ v(x+y) \geq \min(v(x), v(y)), \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Exemples 1.1. *$\mathbb{K}[[X]]$ le corps des séries formelles á une variable sur $\mathbb{K}$, pour tout $f \in \mathbb{K}[[X]]$, on a*

$$f(x) = \sum_{n \geq n_0} a_n x^n, \quad a_{n_0} \neq 0.$$

On pose $\mu(f) = n_0$ et $\mu(0) = +\infty$, donc on a μ une valuation sur $\mathbb{K}[[X]]$.
Et si l'on pose $\|f\| = a^{-\mu(f)}$, $a > 0$ on définit une norme non-archimédienne sur le corps $\mathbb{K}[[X]]$.

En effet

1. *Soit $f \in \mathbb{K}[[X]]$, on a*

$$\begin{aligned} \|f\| = 0 &\Leftrightarrow a^{-\mu(f)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a^{\mu(f)}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \mu(f) = \infty \\ &\Leftrightarrow f \equiv 0. \end{aligned}$$

2. *Soit $f, g \in \mathbb{K}[[X]]$, on a*

$$\begin{aligned}\|f.g\| = a^{-\mu(f.g)} = a^{-(\mu(f)+\mu(g))} &= a^{-\mu(f)-v(g)} \\ &= a^{-\mu(f)}a^{-\mu(g)} \\ &= \|f\|.\|g\|.\end{aligned}$$

3. *Soit $f, g \in \mathbb{K}[[X]]$, on a $\|f+g\| = a^{-\mu(f+g)}$. Et comme on a*

$$\mu(f+g) \geq \min(\mu(f), \mu(g)),$$

donc

$$-\mu(f+g) \leq -\min(\mu(f), \mu(g)) = \max\{-\mu(f), -\mu(g)\},$$

alors

$$a^{-\mu(f+g)} \leq \max\{a^{-\mu(f)}, a^{-\mu(g)}\},$$

d'où

$$\|f+g\| \leq \max\{\|f\|, \|g\|\}.$$

1.2 Construction analytique de $\mathbb{Q}_p$

Soit p un nombre premier $(p = 2, 3, 5, ...)$.

1.2.1 Valuation p-adique sur $\mathbb{Q}$

Définition 1.4. *Soit $n \in \mathbb{Z}^*$, la valuation p-adique de n notée par $v_p(n)$, le plus grand entier naturel α tel que p^α divise n.* ***i.e***

$$v_p(n) = \max\{\alpha \in \mathbb{N}, p^\alpha \backslash n\}.$$

Par convention on a : $v_p(0) = +\infty$.

Définition 1.5. *La valuation p-adique sur $\mathbb{Q}$ est l'extension de la valuation p-adique de $\mathbb{Z}$ de la façons suivante :*

$$v_p(\frac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b),$$

avec $a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0$.

Exemple 1.1.
1) $v_2(25) = 0, \quad car \quad 25 = 1 \times 2^0 + 2^3 + 2^4.$
2)*Si $a = p^4 + 3p^6,\ b = 2p^5$ et pour $p \geq 7;$ alors $v_p(\frac{a}{b}) = 4 - 5 = -1.$*

Proposition 1.2. *[14] Pour tout $x, y \in \mathbb{Z}$, on a*

$$1)\ v_p(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0.$$
$$2)\ v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$
$$3)\ v_p(x+y) \geq \min(v_p(x), v_p(y)), \qquad \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

P*reuve*.

i) *Evident* d'aprés la Définition 1.4

ii) On a 2) est trivial, si $x = 0$ ou $y = 0$, et pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^*$ tel que

$$\begin{cases} x = p^{v_p(x)}.n_1, & n_1 \in \mathbb{Z}^* \, et \, (n_1, p) = 1, \\ y = p^{v_p(y)}.n_2, & n_2 \in \mathbb{Z}^* \, et \, (n_2, p) = 1. \end{cases}$$

On a

$$xy = p^{v_p(x)} p^{v_p(y)}.n_1 n_2 = p^{v_p(x)+v_p(y)}.n_1 n_2, \quad et \quad (n_1 n_2, p) = 1.$$

D'où

$$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y).$$

iii) On a 3) est trivial, si $x = 0$ ou bien $y = 0$, et pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^*$ tel que

$$\begin{cases} x = p^{v_p(x)}.n_1, & n_1 \in \mathbb{Z}^* \, et \, (n_1, p) = 1, \\ y = p^{v_p(y)}.n_2, & n_2 \in \mathbb{Z}^* \, et \, (n_2, p) = 1. \end{cases}$$

On a $x + y = p^{v_p(x)}.n_1 + p^{v_p(y)}.n_2$.

a) Supposons que $v_p(x) \leq v_p(y)$, on a

$$x + y = p^{v_p(x)}.n_1 + p^{v_p(y)}.n_2 = p^{v_p(x)} \underbrace{(n_1 + p^{v_p(y)-v_p(x)} n_2)}_{n_3} = p^{v_p(x)}.n_3,$$

d'où

$$v_p(x+y) \geq v_p(x) = \min\{v_p(x), v_p(y)\}.$$

b) Supposons que $\quad v_p(y) \leqslant v_p(x)$

$$x + y = p^{v_p(x)}.n_1 + p^{v_p(y)}.n_2 = p^{v_p(y)} \underbrace{(p^{v_p(x)-v_p(y)}.n_1 + n_2)}_{n_4} = p^{v_p(y)}.n_4,$$

d'où

$$v_p(x+y) \geqslant v_p(y) = \min\{v_p(x), v_p(y)\}.$$

■

Remarque 1.3. *Pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^*$*

$$v_p(x) \neq v_p(y) \Rightarrow v_p(x+y) = \min\{v_p(x), v_p(y)\}.$$

En effet : On prend $v_p(x) < v_p(y)$ on a

$$v_p(x+y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\} \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}^*,$$

c'est -à-dire $v_p(x+y) \geq v_p(x)$.

Il reste montre que $v_p(x) \geq v_p(x+y)$, on a

$$v_p(x) = v_p(x - y + y) \geq \min\{v_p(x + y), v_p(y)\}.$$

Si $\min\{v_p(x + y), v_p(y)\} = v_p(y)$, alors $v_p(x) \geq v_p(y)$. C'est une contraction avec les données, donc $v_p(x) \geq v_p(x + y)$.
D'où on montre l'inégalité.

Proposition 1.3. *La valuation p-adique de la suite $(n!)_{n\geq 0}$ est donnée par :*

$$v_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p - 1}, \quad \forall n \geq 0.$$

Où $S_p(n)$ désigne la somme des chiffres de l'écriture de n en base p.

Preuve. Si $n = 0$, on a $0! = 1$, $v_p(1) = 0$. Sinon

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \Longrightarrow v_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} v_p(k),$$

tel que

$$k = a_i p^i + ... + a_j p^j,\ a_i \neq 0,$$

donc

$$v_p(k) = i.$$

Alors

$$\begin{aligned} k &= a_i p^i + ... + a_j p^j \\ &= p^i + (a_i - 1)p^i + \sum_{s=i+1}^{j} a_s p^s. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} k - 1 &= p^i - 1 + (a_i - 1)p^i + \sum_{s=i+1}^{j} a_s p^s \\ &= (p - 1)\sum_{s=0}^{i-1} p^s + (a_i - 1)p^i + \sum_{s=i+1}^{j} a_s p^s. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} S_p(k - 1) &= (p - 1)\sum_{s=0}^{i-1} 1 + (a_i - 1) + \sum_{s=i+1}^{j} a_s \\ &= i(p - 1) + a_i + \sum_{s=i+1}^{j} a_s - 1 \\ &= i(p - 1) + S_p(k) - 1 \\ &= v_p(k)(p - 1) + S_p(k) - 1. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
v_p(k) &= \frac{S_p(k-1) - S_p(k) + 1}{p-1} \\
v_p(n!) &= \sum_{k=1}^{n} v_p(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_p(k-1) - S_p(k) + 1}{p-1} \\
&= \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{n} S_p(k-1) - S_p(k) + 1 \\
&= \frac{1}{p-1}(-S_p(n) + n) \\
&= \frac{n - S_p(n)}{p-1}.
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.4.
La limite de deux suites $\left(\dfrac{v_p(n)}{n}\right)_{n\geq 0}$ *et* $\left(\dfrac{S_p(n)}{n}\right)_{n\geq 0}$ *tend vers* 0.

En effet

1. *Soit* $n = p^{v_p(n)}.m$ *tel que* $p \nmid m$*, alors*

$$\begin{aligned}
p^{v_p(n)} \leq n &\Longrightarrow \log_p p^{v_p(n)} \leq \log_p n \\
&\Longrightarrow v_p(n) \leq \log_p n \\
&\Longrightarrow \frac{v_p(n)}{n} \leq \frac{\log_p n}{n},
\end{aligned}$$

   Par pasage à la limite, on trouve

$$0 \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{v_p(n)}{n} \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\log_p n}{n}.$$

   Donc

$$0 \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{v_p(n)}{n} \leq 0.$$

   D'où le résultat.

2. *Soit* $n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_t p^t$, $a_k \neq 0 \, et \, a_i \in \{0, ..., p-1\}$.
   On a

$$p^t \leq a_t p^t \leq n,$$

   donc

$$p^t \leq n.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} n \leq \sum_{i=0}^{t}(p-1)p^i &= (p-1)\sum_{i=0}^{t}p^i \\ &= (p-1)\frac{1-p^{t+1}}{1-p} \\ &= p^{t+1}-1 \\ &< p^{t+1}. \end{aligned}$$

Alors

$$p^t \leq n < p^{t+1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \log(p^t) \leq \log(n) < \log(p^{t+1}) &\Longrightarrow t\log(p) \leq \log(n) < (1+t)\log(p) \\ &\Longrightarrow t \leq \frac{\log(n)}{\log(p)} < t+1. \end{aligned}$$

D'où

$$t = \left[\frac{\log(n)}{\log(p)}\right].$$

Après on va montre que $1 \leq S_p(n) \leq (t+1)(p-1)$.

On a

$$n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_t p^t,\ a_t \neq 0 \quad et \quad 0 \leq a_i \leq (p-1),$$

et

$$S_p(n) = a_0 + a_1 + ... + a_t = \sum_{i=0}^{t} a_i.$$

Donc

$$\begin{aligned} (a_t \neq 0 \quad et \quad 0 \leq a_i \leq (p-1)) &\Longrightarrow \sum_{i=0}^{t} a_i \neq 0 \\ &\Longrightarrow S_p(n) \geq 1. \qquad (1.1) \end{aligned}$$

Et on a aussi

$$\begin{aligned} 0 \leq a_i \leq (p-1) &\Longrightarrow 1 \leq \sum_{i=0}^{t} a_i \leq \sum_{i=0}^{t}(p-1) \\ &\Longrightarrow 1 \leq \sum_{i=0}^{t} a_i \leq (t+1)(p-1). \qquad (1.2) \end{aligned}$$

D'où (1.1) et (1.2) on trouve

$$1 \leq S_p(n) \leq (t+1)(p-1).$$

D'autre part on a

$$1+t=\left[\frac{\log(n)}{\log(p)}\right]+1,$$

donc

$$\begin{aligned}(1+t)(p-1) &= \left(\left[\frac{\log(n)}{\log(p)}\right]+1\right)(p-1)\\ &= p\left[\frac{\ln(n)}{\log(p)}\right]+p-\left[\frac{\log(n)}{\log(p)}\right]-1.\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{(1+t)(p-1)}{n}=\frac{p}{n}\left[\frac{\log(n)}{\log(p)}\right]+\frac{p}{n}-\frac{1}{n}\left[\frac{\log(n)}{\log(p)}\right]-\frac{1}{n}.$$

Et on a

$$0\leq\left[\frac{\log(n)}{\log(p)}\right]\leq\frac{\log(n)}{\log(p)}.$$

Donc

$$0\leq\frac{1}{n}\left[\frac{\log(n)}{\log(p)}\right]\leq\frac{1}{n}\frac{\log(n)}{\log(p)}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\ .$$

Alors

$$0=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\leq\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{S_p(n)}{n}\leq\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{p}{n}\left[\frac{\log(n)}{\log(p)}\right]+\frac{p}{n}-\frac{1}{n}\left[\frac{\log(n)}{\log(p)}\right]-\frac{1}{n}\right)=0.$$

D'où le résultat.

1.2.2 Norme p-adique

Définition 1.6. *Une norme p-adique sur $\mathbb{Q}$ est une application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par*

$$|x|_p=\begin{cases} p^{-v_p(x)} & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}$$

tel que $v_p(x)$ représente la valuation p-adique de x.

Remarque 1.5. *La norme p-adique sur $\mathbb{Q}$ est une norme non archimédinne.*

1.2.3 Corps des nombers p-adiques $\mathbb{Q}_p$

Définition 1.7. *Soit p un nombre premier et $|.|_p$ une norme p-adique de $\mathbb{Q}$. La complété de $\mathbb{Q}$ pour cette norme est un corps appelé corps des nombres p-adiques et se note $\mathbb{Q}_p$. Ainsi, les éléments de $\mathbb{Q}_p$ sont les classes d'équivalences des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, muni de la relation suivante*

$$(a_n)\sim(b_n)\Longleftrightarrow\lim_{n\to+\infty}|a_n-b_n|_p=0,$$

et la norme p-adique $|.|_p$ *pour* $a \in \mathbb{Q}_p$*, peut étre prolonger de* $\mathbb{Q}$ *sur tout* $\mathbb{Q}_p$ *de la façon suivante :*

$$|a|_p = \lim_{n\to\infty} |a_n|_p.$$

Remarque 1.6. *[13] L'ensemble* $\mathbb{Z}_p$ *des entiers p-adiques est donné par*

$$\mathbb{Z}_p = \{a \in \mathbb{Q}_p; |a|_p \leq 1\}.$$

Et on note ${\mathbb{Z}^*}_p$ *l'ensemble des entiers p-adiques inversibles dans* $\mathbb{Z}_p$ *;*

$$\mathbb{Z}_p^* = \{a \in \mathbb{Z}_p; |a|_p = 1\}.$$

Le corps $\mathbb{Q}_p$ *est l'ensemble des fractions de* $\mathbb{Z}_p$ *;*

$$\mathbb{Q}_p = \{\frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}_p, b \in \mathbb{Z}_p^*\}.$$

Définition 1.8. *[12] L'ensemble des nombres p-adiques* $\mathbb{Q}_p$*, est défini aussi par*

$$\mathbb{Q}_p = \{\sum_{n\geq k} a_n p^n, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n < p\}.$$

Lemme 1.9. ***(Dédéveloppement de Hensel)****[1]*
Tout $x \in \mathbb{Q}_p$ *admet un unique Développement de Hensel*

$$x = \sum_{n\geq n_0} a_n p^n,$$

où $0 \leq a_n \leq p-1$ *et* $n_0 \in \mathbb{Z}$*, si* $a_{n_0} \neq 0$ *alors* $n_0 = v_p(x)$*.*

1.3 Corps des nombres complexes p-adiques

Définition 1.10. *On dit qu' un corps* $\mathbb{K}$ *est algébriquement clôs si chaque polynôme P(x) dans* $\mathbb{K}[x]$ *de degré n admet n racines dans* $\mathbb{K}$*.*

Exemples 1.2. $\mathbb{R}$ *n'est pas algébriquement clôs car le polynôme*

$$P(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$$

n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}[X]$*.*
Par contre*,* $\mathbb{C}$ *est algébriquement clôs (Théorème fondamentale d'algèbre), pour reprendre l'exemple ci-dessus, on a* $i \in \mathbb{C}$ *et* $-i \in \mathbb{C}$ *qui sont racines du polynôme* $P(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{C}$

Définition 1.11. *Une* ***extension algébrique*** *L sur un corps* $\mathbb{K}$ *est une extension de corps dans laquelle tous les éléments sont algébriques sur* $\mathbb{K}$ *c'est-à-dire sont racines d'un polynôme non nul à coefficients dans* $\mathbb{K}$*. Dans le cas contraire, l'extension est dite* ***transcendante****.*

Définition 1.12. *Une* ***clôture algébrique*** *d'un corps commutatif* $\mathbb{K}$ *est une extension algébrique L de* $\mathbb{K}$ *qui est algébriquement close, c'est-à-dire tout polynôme de degré supérieur ou égal à un, à coefficients dans L, admet au moins une racine dans L.*

Proposition 1.4. *Le corps des nombres p-adiques n'est pas algèbriquement clôs.*
En effet *: pour montrons que* $\mathbb{Q}_p$ *n'est pas algèbriquement clôs, on considèreère le polynôme*

$$P(x) = x^2 - p^{15} \in \mathbb{Q}_p.$$

On a

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\iff x^2 = p^{15} \\ &\iff |x|_p^2 = p^{-15} \\ &\iff |x|_p = p^{\frac{-15}{2}} \\ &\iff v_p(x) = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Et comme pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$, $v_p(x) \in \mathbb{Z}$. *Donc les racines de P(x) ne sont pas dans* $\mathbb{Q}_p$ *alors* $\mathbb{Q}_p$ *n'est pas algèbriquement clôs.*
Pour faire convenablement de l'analyse, il est donc logique de considère une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, *que l'on note* $\bar{\mathbb{Q}}_p$ *et qui n'est pas compléter . Donc nous allons besoin de la complèter pour former un plus grand corps complet, algébriquement clôs.*

Définition 1.13. *Le corps des nombres complexes p-adiques noté* $\mathbb{C}_p$ *est défini comme le complété de la clôture algébrique de* $\mathbb{Q}_p$ *par rapport à la norme p-adique* $|.|_p$.
Ainsi*, en posant*

$$\forall x \in \mathbb{C}_p : \quad |x|_p = \lim_{n\to+\infty} |x_n|_p,$$

où $(x_n)_{n\geq 0}$ *est une suite de Cauchy d'éléments de* $\bar{\mathbb{Q}}_p$ *qui est dans la classe d'équivalence de* x.

Proposition 1.5. *[2] Le corps* $\mathbb{C}_p$ *n'est pas localement compact.*

P*reuve*. Considérons l'équation $x^n - p = 0$,
et soit x_n l'un quelconque de ses racines. Montrons que de cette suite, on ne extraire un sous suite convergente, bien qu'elle soit borne, puisque clairement que la norme p-adique de x_n est inférieur ou égale à un. On a

$$|x_n|_p = p^{-\frac{1}{n}} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} |x_n|_p = \lim_{n\to+\infty} p^{\frac{-1}{n}} = 1,$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad |x_n|_p < 1$.
Soit (x_{n_m}) une sous suite extraire convergente et y sa limite, alors $|y|_p = 1$, mais

$$|x_{n_m} - y|_p = max\{|x_{n_m}|_p, |y|_p\} = |y|_p = 1,$$

et ceci est contradiction, car cette quantité doit tendre vers zéro. ■

Proposition 1.6. *[3] Le corps $\mathbb{C}_p$ possède les propriétés suivantes :*

1. *$\mathbb{C}_p$ est algébriquement clôs.*
2. *$|\mathbb{C}_p^*|_p = \{p^q, q \in \mathbb{Q}\}$.*
3. *$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p \subset \bar{\mathbb{Q}}_p \subset \mathbb{C}_p$.*

1.4 Propriétés topologiques et analytiques sur $\mathbb{C}_p$

1.4.1 Propriétés topologiques

Notation

Soit $a \in \mathbb{C}_p$ et $r > 0$, nous notons

1. $D^+(a,r) = \{x \in \mathbb{C}_p : |x-a|_p \leq r\}$ le disque fermé de centre a et rayon r.
2. $D^-(a,r) = \{x \in \mathbb{C}_p : |x-a|_p < r\}$ le disque ouvert de centre a et rayon r.
3. $D(a,r)$ l'un ou l'autre de ces deux disque.
4. $C(a,r) = \{x \in \mathbb{C}_p : |x-a|_p = r\}$ est le cercle de centre a et rayon r.

Proposition 1.7. *Soient $a, b \in \mathbb{C}_p$ et $r \in]0, +\infty[$, on a les propriétés suivantes :*

P1. *Le cercle est un ensemble ouvert dans $\mathbb{C}_p$.*

P2. *Un disque $D(a,r)$ est un ensemble ouvert et fermé à la fois.*

P3. *Tout point d'un disque est un centre de ce disque.*

P4. *Soient $D(a,r)$ et $D(b,r_0)$ deux disques de $\mathbb{C}_p$, alors il sont disjoints ou l'un est inclus dans l'autre.*

Démonstration

P1. Soient $a, b \in \mathbb{C}_p$, et $r \in]0, +\infty[$. Pour montrer que $C(a,r)$ est un ensemble ouvert on montre que

$$\forall x \in C(a,r), \quad \exists D^-(x,r_0) \subset C(a,r).$$

Soit $x \in C(a,r)$, on choisit r_0 tel que $0 < r_0 < r$, on a

$$\begin{aligned} y \in D^-(x,r_0) &\Longrightarrow |y-x|_p < r_0 < r \\ &\Longrightarrow |y-x|_p < |x-a|_p \\ &\Longrightarrow |y-a+a-x|_p < |x-a|_p \\ &\Longrightarrow |(y-a)+(x-a)|_p < |x-a|_p. \end{aligned}$$

D'après la Proposition 1.1, on obtient $|y-a|_p = |x-a|_p = r$ alors $y \in C(a,r)$. Ce qui montre que $C(a,r)$ est un ensemble ouvert.

P2. i) On a dans un espace métrique tout disque ouvert $D^-(a,r)$ est un ensemble ouvert.

D'autre part pour démontrer que $D^-(a,r)$ est fermé, on montre que $C_{\mathbb{C}_p}^{D^-(a,r)}$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{C}_p$. On a

$$\begin{aligned} C_{\mathbb{C}_p}^{D^-(a,r)} &= \{x \in \mathbb{C}_p : |x-a|_p \geq r\} \\ &= \{x \in \mathbb{C}_p : |x-a|_p > r\} \cup C(a,r) \\ &= C_{\mathbb{C}_p}^{D^+(a,r)} \cup C(a,r). \end{aligned}$$

D'après (**P1**) $C(a,r)$ est un ensemble ouvert et comme $D^+(a,r)$ est un fermè, donc $C_{\mathbb{C}_p}^{D^+(a,r)}$ est un ensemble ouvert, alors $C_{\mathbb{C}_p}^{D^-(a,r)}$ est un ensemble ouvert (dans un espace mètrique union de deux ouvert est un ouvert).

D'où $D^-(a,r)$ est un ensemble fermè.

ii) Dans un espace métrique, le disque fermé $D^+(a,r)$ est un ensemble fermé. D'autre part on a

$$D^+(a,r) = C(a,r) \cup D^-(a,r).$$

Et comme $C(a,r)$ est un ensemble ouvert (d'après **P1**), et $D^-(a,r)$ est un ensemble ouvert (d'après **i)**), alors $D^+(a,r)$ est un ensemble ouvert.

P3. Pour montrer cette propriété, il suffit de montrer que

$$\forall x \in D^-(a,r), D^-(a,r) = D^-(x,r).$$

i) Soit $y \in D^-(a,r)$, donc $|y-a|_p < r$. D'autre part on a

$$|y-x|_p = |(y-a)-(x-a)|_p \leqslant \max\{|y-a|_p, |x-a|_p\} < r,$$

d'où $y \in D^-(x,r), alors D^-(a,r) \subset D^-(x,r)$.

ii) Soit $y \in D^-(x,r)$, donc $|y-x|_p < r$. D'autre part on a

$$|y-a|_p = |(y-x)-(x-a)|_p \leqslant \max\{|y-x|_p, |x-a|_p\} < r,$$

d'où $y \in D^-(a,r)$, alors $D^-(x,r) \subset D^-(a,r)$.

Donc $D^-(a,r) = D^-(x,r)$.

On fait les même étapes pour montrer que si $x \in D^+(a,r)$ on a $D^+(a,r) = D^+(x,r)$.

P4. Soient $D(a,r)$ et $D(b,r_0)$ deux disques de $\mathbb{C}_p$, on montre que

$$D(a,r) \cap D(b,r_0) \neq \varnothing \Longrightarrow D(a,r) \subset D(b,r_0) \quad ou \quad D(b,r_0) \subset D(a,r).$$

Soit $r \leq r_0$ et $x \in D(a,r) \cap D(b,r_0)$, d'après (**P3**). On a

$$D(a,r) = D(x,r) \quad et \quad D(b,r_0) = D(x,r_0)$$

mais $D(x,r) \subset D(x,r_0)$, donc $D(a,r) \subset D(b,r_0)$.

Remarque 1.7. *Le cercle est un ensemble fermé car :*

$$C(a,r) = D^+(a,r) \cap C_{\mathbb{C}_p}^{D^-(a,r)}.$$

1.4.2 Propriétés analytiques

Théorème 1.14. *[9] Une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{C}_p$, $(a_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0.$$

Preuve.
Supposons que $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}_p$ alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, m > n \geq n_0 : |a_m - a_n|_p < \varepsilon.$$

Pour $m = n + 1$ on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon,$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0.$$

Inversement supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geq n_0$ on a $|a_{m+1} - a_m|_p < \varepsilon$.
Pour $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > n \geq n_0$ on a

$$\begin{aligned} |a_m - a_n|_p &= |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + ... - a_{n+1} + a_{n+1} - a_n|_p \\ &\leq \max\{|a_m - a_{m-1}|_p, |a_{m-1} - a_{m-2}|_p, .., |a_{n+1} - a_n|_p\} \\ &< \max\{\varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon\} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}_p$. ∎

Proposition 1.8.
Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}_p$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a, a \in \mathbb{C}_p^*$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0,\ |a_n|_p = |a|_p$.

Preuve. Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}_p$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \neq 0$, alors $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{N}$ est une suite de Cauchy, **i.e**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n \geq n_0 : |a_m - a_n|_p < \varepsilon.$$

D'autre part, on a

$$\forall m, n \geq n_0, ||a_m|_p - |a_n|_p| \leq |a_m - a_n|_p.$$

Donc $(|a_n|_p)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et comme $(\mathbb{R}, |.|)$ complet, alors $(|a_n|_p)_{n\geq 0} \in \mathbb{N}$ converge dans $\mathbb{R}$.

D'après l'hypothèes on a $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|_p \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|_p = l > 0$.
Pour $\varepsilon = \dfrac{l}{2}$ fixé, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1,\ ||a_n|_p - l| < \dfrac{l}{2}$, alors

$$\frac{-l}{2} < |a_n|_p - l < \frac{l}{2},$$

donc

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1 : |a_n|_p > \frac{l}{2}.$$

De même, d'après la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ on obtint que $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy, alors

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall (n,m) \geq N_2 : \quad |a_n - a_m|_p < \frac{l}{2}.$$

Quand $n, m \geq \max(N_1, N_2) = n_0$, on a

$$\begin{cases} |a_m|_p = |a_m - a_n + a_n|_p \leq \max\{|a_m - a_n|_p, |a_n|_p\} = |a_n|_p, \\ |a_n|_p = |a_n - a_m + a_m|_p \leq \max\{|a_n - a_m|_p, |a_m|_p\} = |a_m|_p. \end{cases}$$

Donc

$$|a_n|_p = |a_m|_p \,\forall n, m \geq n_0,$$

alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0 : \quad |a_n|_p = |a_{n_0}|_p = |a|_p.$$

■

Proposition 1.9. *[13] Soit la série* $\sum\limits_{k\geq 0} a_k$ *;* $a_k \in \mathbb{C}_p$*, alors*
$\sum\limits_{k\geq 0}|a_k|_p$ *converge dans* $\mathbb{R} \Longrightarrow \sum\limits_{k\geq 0} a_k$ *converge dans* $\mathbb{C}_p$.

P*reuve*.
On suppose que $\sum\limits_{k\geq 0}|a_k|_p$ converge dans $\mathbb{R}$, alors la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{i\geq 0}|a_i|_p$ est converge, donc elle est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ **i.e**.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n \geq n_0 : |S_m - S_n| < \varepsilon.$$

On a

$$|S_m - S_n| = |\sum_{k\geq n+1}^{m} |a_k|_p| = \sum_{k\geq n+1}^{m} |a_k|_p < \varepsilon.$$

Ce qui implique que $S'_n = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}_p$ ($\mathbb{C}_p$ est complet), alors $(S'_n)_{n\geq 0}$ converge dans $\mathbb{C}_p$.
Donc $\sum\limits_{k\geq 0} a_k$ converge dans $\mathbb{C}_p$. ■

Proposition 1.10. *[13] Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *une série dans* $\mathbb{C}_p$*, On a*

1. $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *converge dans* $\mathbb{C}_p \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p = 0.$
2. $|\sum\limits_{n\geq 0} a_n| \leq \max\limits_{n\geq 0} |a_n|_p.$

P*reuve*.
1) On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} a_k \quad \text{converge dans } \mathbb{C}_p &\Longleftrightarrow S_n \text{ converge dans } \mathbb{C}_p \\
&\overset{\mathbb{C}_p\ complet}{\Longleftrightarrow} (S_n) \text{ de Cauchy dans } \mathbb{C}_p \\
&\Longleftrightarrow \|S_n - S_{n-1}\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Longleftrightarrow \|a_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Longleftrightarrow a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\ .
\end{aligned}$$

2) Si $\sum a_n = 0$, on a le résultat.
Sinon d'après la Proposition 1.8 on a

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \quad |\sum_{n=0}^{\infty} a_n|_p = |\sum_{n=0}^{n_0} a_n|_p.$$

D'autre part on a

$$\max_{0\leq n\leq n_0} |a_n|_p \leq \max_{n\geq 0} |a_n|_p.$$

Donc

$$|\sum_{n=0}^{\infty} a_n|_p = |\sum_{n=0}^{n_0} a_n|_p \leq \max_{0\leq n\leq n_0} |a_n|_p \leq \max_{n\geq 0} |a_n|_p.$$

Ce qui termine la démonstration. ∎

1.5 Fonctions analytiques sur $\mathbb{C}_p$

Dans cette section nous étudions les séries entières et les fonctions analytiques dans le corps des nombres complexes p-adiques.

1.5.1 Séries entières complexes p-adiques

Définition 1.15. *Une série entière dans* $\mathbb{C}_p$ *est une série dont le terme général est* $a_n(x-a)^n$ *où* n *est un entier naturel* $x, a \in \mathbb{C}_p$ *et* $(a_n)_{n\geq 0}$ *est une suite des nombres complexes* p*-adiques appelée suite des coefficients lorsque* a *est fixé.*

Proposition 1.11. *[12]*
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *une série entière, où* $a, a_n \in \mathbb{C}_p$ *on a*

- *La série* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *converge dans* $\mathbb{C}_p$ *si seulement si* $|a_n(x-a)^n|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
- *Si* $|a_n|_p r^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *alors* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *converge dans le disque* $D^+(a,r)$ ***i.e*** *le domaine de convergence d'une série entière complexe p-adique est toujours un disque.*

Définition 1.16. (***Rayon de convergence***)
Le rayon de convergence d'une série entière complexe p-adique $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *qu'on note* R *est défini par*

$$R = \sup\{|x-a|_p ; x \in \mathbb{C}_p \textit{ et } \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n \textit{ converge}\} \in \mathbb{R}^+ \cup +\infty.$$

Proposition 1.12. *[8]* (***Calcul le rayon de convergence***)
Soit R *le rayon de convergence de la série* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *où* $a_n \in \mathbb{C}_p$, *on a*

1. *Si* $a_n \in \mathbb{C}_p^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|_p}{|a_n|_p} = l$, *on a* $R = \dfrac{1}{l}$ *(**formule de d'Alembert**).*
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p} = l$, *on a* $R = \dfrac{1}{l}$ *(**formule de Cauchy**).*
3. $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p}}$ *(**formule d'Hadamard**).*

Théorème 1.17. *[8] Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *une série entière, où* $a_n \in \mathbb{C}_p$ *et* $0 \leq R \leq +\infty$ *on a*

1. *Si* $x \in \mathbb{C}_p$, *tel que* $|x-a|_p < R$, *alors la série* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *converge.*
2. *Si* $x \in \mathbb{C}_p$, *tel que* $|x-a|_p > R$, *alors la série* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *diverge.*
3. *Si* $x \in \mathbb{C}_p$, *tel que* $|x-a|_p = R$, *donc on peut avoir :*
   a) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p R^n = 0$, *alors la série* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *converge sur la totalité du cercle* $C(a,R)$.
   b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p R^n \neq 0$, *alors la série* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *est divergente sur la totalité du cercle* $C(a,R)$.

Remarque 1.8. *Dans le corps complexe* $\mathbb{C}$ *les deux cas 1 et 2 restent vrai. Mais dans le troisième cas on ne peut rien dire **par exemple**, pour la série* $\ln(1+x) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}$.

On a : d'après d'Alembert

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\frac{n}{(-1)^{n+1}}\right|, \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|, \\ &= 1. \end{aligned}$$

Mais, pour $|x| = -1$ *; la série* $-\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *est diverge.*

Et pour $|x| = 1$ *; la série* $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *converge (**Leibniz**) .*

Exemple 1.2.
Soit la série $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{C}_p$. *D'après d'Hadamard on a*

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \lim_{n\to+\infty}\sup\sqrt[n]{|a_n|_p} = \lim_{n\to+\infty}\sup\left|\frac{1}{n!}\right|_p^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sup p^{\frac{v_p(n!)}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\sup p^{\frac{n-S_p(n)}{n(p-1)}} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sup p^{\frac{1}{p-1}(1-\frac{S_p(n)}{n})} \\ &= p^{\frac{1}{p-1}}. \end{aligned}$$

i) *Si* $|x|_p < R$, *alors la série est converge sur* $D^{-}(0, p^{-\frac{1}{p-1}})$.

ii) *Si* $|x|_p = R$, *on a*

$$\begin{aligned} |a_n|_p R^n = \left|\frac{1}{n!}\right|_p p^{\frac{-n}{p-1}} &= p^{v_p(n!)}p^{\frac{-n}{p-1}} \\ &= p^{\frac{n-S_p(n)}{p-1}}p^{\frac{-n}{p-1}} \\ &= p^{\frac{-S_p(n)}{p-1}}. \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on trouve $\lim_{n\to+\infty}|a_n|_p R^n \neq 0$.

Donc la série $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$ *diverge sur le cercle* $C(0, p^{\frac{-1}{p-1}})$.

Par contre la série $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} \in \mathbb{C}[[X]]$ *a un rayon de convergence infini.*

Définition 1.18. ***(Série dérivée d'un série entière complexe*** p***-adique)*** *On appelle série dérivée de la série* $\sum_{n\geq 0}a_n(x-a)^n$, *avec* $a, a_n \in \mathbb{C}_p$, *la série* $\sum_{n\geq 1}na_n(x-a)^{n-1}$.

Proposition 1.13. *[2] La série entière* $\sum_{n\geq 0}a_n(x-a)^n$ *et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.*

P*reuve*.
Soit R_1 est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} na_n(x-a)^{n-1}$
avec $a, a_n \in \mathbb{C}_p$

$$\begin{aligned} R_1^{-1} = \limsup_{n\to+\infty} |na_n|_p^{\frac{1}{n-1}} &= \limsup_{n\to+\infty} (|n|_p^{\frac{1}{n}} |a_n|_p^{\frac{1}{n}}) \\ &= (\limsup_{n\to+\infty} |n|_p^{\frac{1}{n}}).(\limsup_{n\to+\infty} |a_n|_p^{\frac{1}{n}}). \end{aligned}$$

Et comme

$$|n|_p^{\frac{1}{n}} = p^{-\frac{v_p(n)}{n}}.$$

On a

$$R_1^{-1} = (\limsup_{n\to+\infty} p^{-\frac{v_p(n)}{n}})(\limsup_{n\to+\infty} |a_n|_p^{\frac{1}{n}}),$$

on sait que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{v_p(n)}{n} = 0$.
D'ou le résulta. ■

Définition 1.19. ***(Fonction développable en série entière)***
Une fonction f de variable complexe p-adique, définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{C}_p$, est dit ***développable en série entière*** *ou voisinage de a, s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, avec $a, a_n \in \mathbb{C}_p$ du rayon de convergence R strictement positive, tel que*

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n, \forall x \in D^-(a, R).$$

1.5.2 Fonctions analytiques sur $\mathbb{C}_p$

Définition 1.20. *Une fonction $f : D^+(a, r) \longrightarrow \mathbb{C}_p$, avec $r > 0$ et $a \in \mathbb{C}_p$ est dit analytique sur $D^+(a, r)$, s'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}_p$ tel que*

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|r^n = 0 \quad et \quad f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n, \ \forall x \in D^+(a, r).$$

Définition 1.21. *Une fonction $f : D^-(a, r) \longrightarrow \mathbb{C}_p$, avec $r > 0$ et $a \in \mathbb{C}_p$ est dit analytique sur $D^-(a, r)$, si pour tout ρ, tel que $0 < \rho < r$ la restriction de f à $D^+(a, \rho)$ est une fonction analytique sur le disque $D^+(a, \rho)$ et $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, $\forall x \in D^-(a, r)$.*

Proposition 1.14. *Une fonction $f : D^-(a, r) \longrightarrow \mathbb{C}_p$, avec $r > 0$ et $a \in \mathbb{C}_p$ est analytique sur $D^-(a, r)$ s'il existe une suite unique $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}_p$ satisfaisant $|a_n|\rho^n \longrightarrow 0$ pour tout ρ avec $0 < \rho < r$, et $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, $\forall x \in D^-(a, r)$.*

P*reuve*. (Condition nécessaire) Supposons que f soit analytique sur le disque $D^{-}(a, r)$ et montrons que $(a_n)_{n\geq 0}$ est unique.
Soient ρ_1, ρ_2 deux réels, tels que $0 < \rho_1 < \rho_2 < r$ et $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{C}_p$ associéees à f. On a par la définition, pour tout $0 < \rho_1 < r$ (*resp* $0 < \rho_2 < r$), la restriction de la fonction f est analytique sur le disque $D^{+}(a, \rho_1)$ (*resp* $D^{+}(a, \rho_2)$).
Pour $\rho_1 < \rho_2$, on a

$$D^{+}(a, \rho_1) \subset D^{+}(a, \rho_2).$$

D'autre part, on a

$$\forall x \in D^{+}(a, \rho_1), f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n,$$

et

$$\forall x \in D^{+}(a, \rho_2), f(x) = \sum_{n\geq 0} b_n (x-a)^n.$$

D'où

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n = \sum_{n\geq 0} b_n (x-a)^n, \forall x \in D^{+}(a, \rho_1),$$

donc

$$\forall x \in D^{+}(a, \rho_1), \sum_{n\geq 0} (a_n - b_n)(x-a)^n.$$

D'où $a_n = b_n$, pour tout $n \geq 0$.
Alors on montre l'unicité du développement en série des fonctions analytiques sur $D^{+}(a, \rho_1)$.
Condition suffisante
Trivial par la définition, puisque la suite d'éléments de $\mathbb{C}_p$, $(a_n)_{n\geq 0}$ existe, vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|\rho^n = 0$, pour tout ρ; $0 < \rho < r$. Implique que la fonction est analytique sur le disque $D^{+}(a, \rho)$, d'où la résulta sur $D^{-}(a, \rho)$. ■

Remarques 1.1.
1) Une fonction de variable complexe p-adique définie sur un disque $D(a, r)$, où $a \in \mathbb{C}_p$ est dite analytique sur ce disque lorsqu'elle admet un développement en série entière en tout point de $D(a, r)$.
2) Si $R = +\infty$, alors f est analytique sur tout $\mathbb{C}_p$ et on dit que f est entière.

Exemple 1.3.

1. *La fonction* $\exp_p(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ *est analytique sur le disque ouvert* $D^-(x, p^{\frac{-1}{p-1}})$, *et elle n'est pas analytique sur le cercle* $C(0, p^{\frac{-1}{p-1}})$ *(d'après l'Exemple 1.2). Mais* $f(x) = \exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ *est une fonction entière dans* $\mathbb{C}$.
2. *Soit* $\sum_{n\geq 0} p^n x^n \in \mathbb{C}_p[[X]]$ *on a*

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} p^{-n}} = +\infty.$$

Alors la série $\sum_{n\geq 0} p^n x^n$ *converge sur* $\mathbb{C}_p$. *Donc la fonction* $f : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p$ *définie par* $f(x) = \sum_{n\geq 0} p^n x^n$ *est une fonction entière sur* $\mathbb{C}_p$.

Notation 1.1.
1)On note $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ *l'ensemble des fonctions entières sur* $\mathbb{C}_p$ *et* $\mathcal{A}(D(a,R))$ *l'ensemble des fonctions analytiques sur le disque* $D(a,R)$.
2)On note $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{C}_p[x]$ *l'ensemble des fonction entières, qui ne sont pas des polynômes, et qui s'appellent fonctions entière transcendantes.*

Théorème 1.22. *[1] (**Dérivé des fonctions analytiques**)*
On a

1. *L'ensemble* $\mathcal{A}(D(a,R))$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}_p$.
2. *Si* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$ *est un élément de* $\mathcal{A}(D^+(a,R))$*(resp* $\mathcal{A}(D^-(a,R))$*).*
Si f *est continue et dérivable sur* $D(a,R)$ *alors sa dérive* $f' \in \mathcal{A}(D^+(a,R))$*(resp* $\mathcal{A}(D^-(a,R))$*) tel que*

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n (x-a)^{n-1}.$$

Plus généralement si $R > 0$, *alors la série f est une fonction indéfiniment dérivable sur le disque de convergence de* f, *de plus on a*

$$f^{(k)}(x) = k! \sum_{n\geq k} C_n^k a_n (x-a)^{n-k}.$$

CHAPITRE 2

THÉORÈME DE PICARD

L'idée de Théorème de Picard est venu de Théorème fondamental d'algèbre qui dit qu'un polynôme de degré n admet n racines dans $\mathbb{C}$. Dans ce chapitre, on va rappeler quelques résultats de théorème de Picard dans $\mathbb{C}$, et on va étudier ce théorème dans $\mathbb{C}_p$.

2.1 Théorème de Picard dans $\mathbb{C}$

Dans cette partie on donne quelques notions générales de l'analyse complexe (l'inégalité de Cauchy et formule intégrale de Cauchy...). Ensuite, on étude l'ordre d'une fonction entière pour démontrer le petit théorème de Picard complexe.

2.1.1 L'inégalité de Cauchy

Théorème 2.1. *[15] Soit f une fonction analytique dans un disque fermé de centre a et de rayon r tel que :*

$$M(r, f(x)) = \max_{|x-a|\leq r} |f(x)|, \ \forall x \in \mathbb{C}.$$

Alors, on a la relation suivante (connu sous le nom de L'inégalité de Cauchy)

$$|a_n| \leq \frac{M(r, f(x))}{r^n}.$$

Pour démontrer ce théorème on a besoin de lemme suivant :

Lemme 2.2. *[11] Soit f une fonction analytique sur un courbe fermé γ et dans son intérieur, alors pour tout point a appartient à l'intérieur de γ, On a*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(x)}{x-a}dx, \ \forall a \in \mathbb{C}.$$

*Cette expression est appelée **la formule intégrale de Cauchy**, qui admet sous les mêmes hypothèses la généralisation suivante :*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}}dx.$$

P*reuve*. (L'inégalité de Cauchy) Soit C un cercle de centre a et de rayon r. Considérons la série de Taylor de f on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n,$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)(x-a)^n \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(n+1)(n+2)...(n+k)(x-a)^n. \end{aligned}$$

Alors

$$f^{(k)}(a) = a_k k!.$$

D'où

$$f^{(n)}(a) = a_n n!. \tag{2.1}$$

D'autre part, on a selon la formule intégrale de Cauchy

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}}dx.$$

Puisque $|x-a| = r$ et la longueur de C est $2\pi r$, alors

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(a)| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}}dx\right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M(r, f(x))}{r^{n+1}}2\pi r \\ &\leq \frac{n!M(r, f(x))}{r^n}, \end{aligned}$$

et d'après (2.1), $\quad |a_n| = \dfrac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \dfrac{M(r, f(x))}{r^n}.$ ∎

D'après la définition de la fonction $M(r, f(x)) = \max\limits_{|x|\leq r}|f(x)|$, on trouve que cette fonction est une fonction croissante. Il suffit de prend $r_1 > r > 0$ pour voir que $M(r_1, f(x)) \geq M(r, f(x))$, d'après le principle de maximum

2.1.2 Évaluation de $M(r, f(x))$

On va évalue quelque fonction :

- **Pour un polynôme de degré ($n \geq 1$)**, on a $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{M(r, f(x))}{|a_n|r^n} = 1$, **i.e** le comportement et la vitesse de croissance de la fonction $M(r, f(x))$ sont les même que $|a_n|r^n$ au voisinage de $+\infty$.
  En effet : Soit $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n, a_n \neq 0$.
  Si $x \in D^+(0, r)$ ($|x| \leq r$) :

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= |a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n| \\
&\leq |a_0| + |a_1||x| + ... + |a_n||x^n| \\
&\leq |a_0| + |a_1|r + ... + |a_n|r^n.
\end{aligned}$$

Donc
$$|f(x)| \leq |a_n|r^n \left(1 + \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}\frac{1}{r} + ... + \frac{|a_0|}{|a_n|}\frac{1}{r^n}\right).$$

Mais on a
$$\left(\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}\frac{1}{r} + ... + \frac{|a_0|}{|a_n|}\frac{1}{r^n}\right) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc
$$\forall\varepsilon > 0, \exists r_0(\varepsilon), \forall r > r_0(\varepsilon) : \left(\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}\frac{1}{r} + ... + \frac{|a_0|}{|a_n|}\frac{1}{r^n}\right) < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Alors, $\forall|x| \leq r$ et $\forall r > r_0(\varepsilon)$, nous avons aussi

$$|f(x)| \leq |a_n|r^n(1 + \varepsilon). \tag{2.3}$$

D'autre part si x_0 se trouve sur $C(0, r)$ au point x_0, on a

$$\begin{aligned}
|f(x_0)| &= |a_nx_0^n + (a_{n-1}x_0^{n-1}) + ... + a_0)| \\
&\geq |a_n||x_0^n| - |a_{n-1}||x_0^{n-1}| - ... - |a_0| \\
&= |a_n||r^n| - |a_{n-1}||r^{n-1}| - ... - |a_0| \\
&= |a_n|r^n \left[1 - \left(\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}\frac{1}{r} + ... + \frac{|a_0|}{|a_n|}\frac{1}{r^n}\right)\right].
\end{aligned}$$

D'après (2.2), on trouve

$$\forall r > r_o(\varepsilon), \quad |f(x_0)| \geq |a_n|r^n(1 - \varepsilon), \tag{2.4}$$

et d'après la formules (2.3) et (2.4), on obtient

$$\forall|x_0| = r, \quad |a_n|r^n(1 - \varepsilon) \leq |f(x_0)| \leq |a_n|r^n(1 + \varepsilon), \tag{2.5}$$

tel que r est relativement grand et $\varepsilon > 0$.
Puisque l'inégalité (2.3) est vérifiée pour tout $x \in D(0,r)$, on a

$$M(r, f(x)) = \max_{|x|\leq r} |f(x)| \leq |a_n| r^n (1+\varepsilon), \tag{2.6}$$

où $\varepsilon > 0$ et $r > r_0(\varepsilon)$.
D'autre part, l'inégalité (2.4) nous donne

$$M(r, f(x)) = \max_{|x|\leq r} |f(x)| \geq |a_n| r^n (1-\varepsilon), \tag{2.7}$$

où $\varepsilon > 0$ et $r > r_0(\varepsilon)$.
(2.6) et (2.7) impliquent que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r_0(\varepsilon), \forall r \geq r_0 : (1-\varepsilon) \leq \frac{M(r, f(x))}{|a_n| r^n} \leq (1+\varepsilon). \tag{2.8}$$

Donc

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{M(r, f(x))}{|a_n| r^n} = 1. \tag{2.9}$$

D'où résultat (i.e $M(r, f(x)) \simeq |a_n x^n| = |a_n| r^n$).

- **Pour la fonction exponentielle** $(f(x) = e^x)$, on a le même chose pour les fonctions $M(r, e^x)$ et e^r puisque $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{M(r, e^x)}{e^r} = 1$.
En effet : On sait que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

Donc

$$|e^x| \leq 1 + |x| + \frac{|x^2|}{2!} + \frac{|x^3|}{3!} + ... + \frac{|x^n|}{n!} + ..$$

Si $|x| \leq r$, on trouve

$$|e^x| \leq 1 + r + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + ... + \frac{r^n}{n!} + ... = e^r$$

Mais, si on pose $x = r \in D^+(0,r)$, on a

$$e^x = e^r$$

D'où

$$M(r, f(x)) = \max_{|x|\leq r} |e^x| = e^r.$$

Nous avons aussi des cas pour la fonction exponentielle

- **Pour la fonction** e^{x^k} : on a

$$\begin{aligned} e^{x^k} &= 1 + x^k + \frac{x^{2k}}{2!} + \frac{x^{3k}}{3!} + ... + \frac{x^{nk}}{n!} + ... \\ \Longrightarrow |e^{x^k}| &\leq 1 + |x|^k + \frac{|x|^{2k}}{2!} + \frac{|x|^{3k}}{3!} + ... + \frac{|x|^{nk}}{n!} + ... \\ &\leq 1 + r^k + \frac{r^{2k}}{2!} + \frac{r^{3k}}{3!} + ... + \frac{r^{nk}}{n!} + ... = e^{r^k}, \quad \forall |x| \leq r. \end{aligned}$$

Pour $x = r$, on trouve que $e^{x^k} = e^{r^k}$. Alors $M(r, e^{x^k}) = e^{r^k}$.

- **Pour la fonction** e^{e^x}, on utilise les mêmes étapes de la fonction précédent on trouve
$$M(r, e^{e^x}) = e^{e^r}.$$

Théorème 2.3. *Soit f une fonction entière transcendante, et soit $P(x)$ un polynôme quelconque, alors*
$$\lim_{r \longrightarrow +\infty} \frac{M(r, P(x))}{M(r, f(x))} = 0,$$
***i.e** le maximum de $|f(x)|$ tend vers l'infini plus vite que le maximum de module d'un polynôme quelconque $P(x)$.*

Exemple 2.1. *Soit $f(x) = e^x$ et $P(x) = x + x^2$ on a :*
$$\lim_{r \longrightarrow +\infty} \frac{M(r, P(x))}{M(r, f(x))} = \lim_{r \longrightarrow +\infty} \frac{r^2}{e^r} = 0.$$

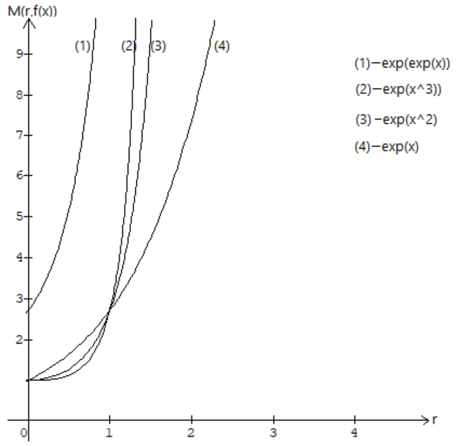
Remarque 2.1. *On remarque d'après les calculs de évaluation $M(r, f(x))$ est tend vers l'infini par une vitesse différente selon la différence entre les fonctions $f(x)$.*
Ces fonctions ont des ordres différents et sont représentées dans le résultat précédent.

1. *Pour la fonction e^x :*
$$M(r, e^x) = e^r.$$
2. *Pour la fonction e^{x^k} :*
$$M(r, e^{x^k}) = e^{r^k}.$$
3. *Pour la fonction e^{e^x} :*
$$M(r, e^{e^x}) = e^{e^r}.$$

D'autre part, on a
$$\lim_{r \to +\infty} \frac{e^r}{e^{r^2}} = 0; \quad \lim_{r \to +\infty} \frac{e^{r^2}}{e^{r^3}} = 0; \quad \lim_{r \to +\infty} \frac{e^{r^k}}{e^{r^{(k+1)}}} = 0; \quad \lim_{r \to +\infty} \frac{e^{r^k}}{e^{e^r}} = 0. \tag{2.10}$$

De ces résultats, nous déduisons que toutes les foncions $M(r, e^x)$, $M(r, e^{x^k})$ et $M(r, e^{e^x})$ tendent vers $+\infty$(d'après le théorème de Liouville), mais la convergence vers $+\infty$ est fait de maniéré différente c'est-à-dire que
$M(r, e^{x^2})$ tend vers $+\infty$ plus vite que $M(r, e^x)$
$M(r, e^{e^x})$ tend vers $+\infty$ plus vite que $M(r, e^{x^k}), (k \in \mathbb{N}^*)$.

Le graphe 2.1 suivant explique la différence des vitesses de convergence vers $+\infty$:



Le graphe 2.1

2.1.3 Ordre d'une fonction entière transcendante

En entrant la fonction logarithme sur les fonctions $e^r, e^{r^2}, ..., e^{r^k}$, on trouve des nouvelles quantités tend vers zéro plus vite que les quantités dans la formule (2.10).
En entrant la fonction logarithme une autre fois, on trouve

$$\frac{\ln\ln M(r, e^{x^2})}{\ln\ln M(r, e^x)} = 2; \quad \frac{\ln\ln M(r, e^{x^3})}{\ln\ln M(r, e^x)} = 3; ... \frac{\ln\ln M(r, e^{x^k})}{\ln\ln M(r, e^x)} = k.$$

Ceci permet de dire que l'ordre de e^{x^k} égal à k, ($k \in \mathbb{N}^*$) (en prenant e^x comme une unité de référence pour l'ordre de croissante).

Définition 2.4. *On notée ρ_f, l'ordre d'une fonction entière transcendent $f(x)$, défini par :*

$$\rho_f = \rho = \lim_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r, f(x))}{\ln\ln M(r, e^x)} = \lim_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r, f(x))}{\ln r}.$$

Exemple 2.2. *Soit $f(x) = e^{e^x}$, on a*

$$\begin{aligned} \frac{\ln\ln M(r, e^{e^x})}{\ln\ln M(r, e^x)} &= \frac{\ln\ln e^{e^r}}{\ln r} \\ &= \frac{r}{\ln r} \\ &= \lim_{r\longrightarrow+\infty} \frac{r}{\ln r} = +\infty. \end{aligned}$$

Alors l'ordre de la fonction $f(x)$ est égale $+\infty$.

Remarque 2.2. *Si la quantité $\frac{\ln\ln M(r, f(x))}{\ln\ln M(r, e^x)}$, n'admet aucune limite quand r tend vers $+\infty$, alors l'ordre de la fonction $f(x)$ est égale à*

$$\lim_{r\longrightarrow+\infty} \sup \frac{\ln\ln M(r, f(x))}{\ln r}.$$

2.1.4 Petit Théorème de Picard

On va montrer le petit théorème de Picard dans le cas de la fonction entière d'ordre fini et non entier, et d'ordre fini et entier. On remplacer l'équation $f(x) = \beta$ par une équation plus générale de la forme $f(x) = \beta P(x)$ où $P(x)$ est un polynôme.

I. Le cas de la fonction entière d'ordre fini et non entier

Théorème 2.5. *Si f est une fonction entière transcendent d'ordre fini et non entier ρ, et $P(x)$ est un polynôme non identiquement nul, alors l'équation*

$$f(x) = \beta P(x).$$

Possède une infinité de solutions pour tout $\beta \in \mathbb{C}$ (sans aucune exception).

Pour démontrer ce théorème on a besoin de Théorème et des lemmes suivants :

Théorème 2.6. *[15] Si la fonction entière f possède uniquement un nombre fini de racines dans tout le plan $\mathbb{C}, a, b, ..., c$ d'ordre de multiplicité $k, l, ..., m$ respectivement, alors $f(x)$ peut s'écrire sous la forme*

$$f(x) = (x-a)^k(x-b)^l...(x-c)^m e^{g(x)} = Q(x)e^{g(x)}.$$

Où $g(x)$ est une fonction entière.

Lemme 2.7. *[15] Si f est une fonction entière transcendante, P et Q deux polynômes de dégrée m et n respectivement et $P(x) \not\equiv 0$, alors l'ordre ρ_1 de la fonction $P(x)f(x)+Q(x)$ égal à l'ordre ρ de la fonction $f(x)$, **i.e** $\rho = \rho_1$.*

Lemme 2.8. *[15] Si $g(x)$ est une fonction entière et $f(x) = e^{g(x)}$ une fonction d'ordre fini, alors g est un polynôme tel que l'ordre de $f(x)$ est nécessairement un entier positif.*

P*reuve*. (Théorème 2.5) Par l'absurde, on suppose qu'il existe β_0 tel que l'équation $f(x) = \beta_0 P(x)$ possède uniquement un nombre fini de solution.
Donc la fonction $f(x) - \beta_0 P(x)$ possède un nombre fini de racines. Et d'après le Théorème 2.6 précédente on a

$$f(x) - \beta_0 P(x) = Q(x)e^{g(x)},$$

donc

$$f(x) = \beta_0 P(x) + Q(x)e^{g(x)}.$$

Où $Q(x)$ est un polynôme non identiquement nul et $g(x)$ est une fonction entière.
D'où d'après le Lemme 2.7, l'ordre de $f(x)$ et l'ordre $e^{g(x)}$ est le même ρ .
Par conséquent, le Lemme 2.8 donne que ρ est un nombre entier. C'est une contradiction avec l'hypothèse du Théorème. ■

II. Le cas de la fonction entière d'ordre fini et entier

Théorème 2.9. *Si f est une fonction entière transcendante d'ordre fini $n \in \mathbb{N}$ et $P(x)$ un polynôme non identiquement nul, alors l'équation*

$$f(x) = \beta P(x). \tag{2.11}$$

Possède une infinité de solutions pour toute $\beta \in \mathbb{C}$ sauf, peut-être pour une seul valeur de β.

Pour démontrer ce Théorème on a besoin de Théorème (2.6) et des Lemmes précédentes avec le Lemme suivant :

Lemme 2.10. *[15] Si $f(x) = P(x)e^{g(x)} + Q(x)$ où, $P(x), g(x)$ et $Q(x)$ sont des polynôme tels que $P(x)$ n'est pas identiquement nul et $\deg g(x) = n$, alors l'ordre de $f(x)$ est égal à n.*

P*reuve*. (**Théorème 2.9**) Par l'absurde, on suppose que le Théorème n'est pas vrai. Alors il existe au moins deux valeurs complexe β_1 et $\beta_2 \neq \beta_1$ tel que l'équation (2.11) possède uniquement un nombre fini de solutions.
Donc, les fonctions entières $f(x) - \beta_1 P(x)$ et $f(x) - \beta_2 P(x)$ possèdent un nombre fini de zéros.
D'où, d'après le Théorème 2.6, on a

$$\begin{cases} f(x) - \beta_1 P(x) = Q_1(x)e^{g_1(x)} \\ \quad et \\ f(x) - \beta_2 P(x) = Q_2(x)e^{g_2(x)} \end{cases} \tag{2.12}$$

Où $Q_1(x)$ *et* $Q_2(x)$ sont deux polynômes non identiquement nuls, $g_1(x)$ *et* $g_2(x)$ sont des fonctions entières.
Et à partir du Lemme 2.7, on a

$$\rho(e^{g_1(x)}) = \rho(e^{g_2(x)}) = \rho(f(x)) = n,$$

de plus les Lemmes 2.8 et 2.9 nous donnent que $g_1(x)$ *et* $g_2(x)$ sont des polynômes de degré $n \geq 1$ (car si $n = 0$ on a $g_1(x)$ *et* $g_2(x)$ sont des constantes et par conséquent on obtient à partir de (2.12) que $f(x)$ est un polynôme).
Par la soustraction de (2.12) on a

$$Q_1(x)e^{g_1(x)} - Q_2(x)e^{g_2(x)} = (\beta_1 - \beta_2)P(x) = P_1(x) \tag{2.13}$$

Où $P_1(x) = (\beta_1 - \beta_2)P(x)$ n'est pas identiquement nul, car $\beta_1 \neq \beta_2$ *et* $P(x) \not\equiv 0$.
Notre but est de démontrer que l'égalité (2.13) n'est pas possible si $Q_1(x), Q_2(x)$ *et* $P_1(x)$

ne sont pas identiquement nuls et $g_1(x)$ *et* $g_2(x)$ sont des polynômes de degré ≥ 1.
Par la dérivation de (2.13) on a

$$[Q_1'(x) + Q_1(x)g_1'(x)]e^{g_1(x)} - [Q_2'(x) + Q_2(x)g_2'(x)]e^{g_2(x)} = P_1'(x). \tag{2.14}$$

En considérant (2.13) et (2.14) comme système d'équations avec comme inconnus $e^{g_1(x)}$ et $e^{g_2(x)}$ pour calculons le déterminant $\det(x)$, alors

$$\begin{aligned}\det(x) &= -Q_1(x)[Q_2'(x) + Q_2(x)g_2'(x)] + Q_2(x)[Q_1'(x) + Q_1(x)g_1'(x)]\\ &= Q_2(x)Q_1'(x) - Q_1(x)Q_2'(x) + Q_1(x)Q_2(x)[g_1'(x) - g_2'(x)]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Donc $\det(x) \not\equiv 0$ car si on pose que $\det(x) \equiv 0$,
et en divisant l'égalité (2.15) sur $Q_1(x)Q_2(x)$, on obtient

$$\frac{Q_1'(x)}{Q_1(x)} - \frac{Q_2'(x)}{Q_2(x)} + [g_1(x) - g_2(x)]' = 0. \tag{2.16}$$

En intégrant dans (2.16), on trouve

$$\ln \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} + g_1(x) - g_2(x) = const = c_1,$$

d'où

$$\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} e^{g_1(x) - g_2(x)} = e^{c_1} = c \neq 0. \tag{2.17}$$

Mais, à partir de (2.12), on a

$$\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} e^{g_1(x) - g_2(x)} = \frac{f(x) - \beta_1 P(x)}{f(x) - \beta_2 P(x)}.$$

Donc, de (2.17), on a

$$\frac{f(x) - \beta_1 P(x)}{f(x) - \beta_2 P(x)} = c.$$

Donc $(1 - c)f(x) = (\beta_1 - \beta_2 c)P(x)$.
Comme on a $\beta_1 \neq \beta_2$, alors $c \neq 1$, d'où

$$f(x) = \frac{\beta_1 - \beta_2 c}{1 - c} P(x).$$

Alors c'est une contradiction avec l'hypothèse que $f(x)$ est transcendante.
En résolvant le système d'équations (2.13) et (2.14) par rapport à $e^{g_1(x)}$ et $e^{g_2(x)}$, on obtient

$$e^{g_1(x)} = \frac{P_1(x)[Q_2'(x) + Q_2(x)g_2'(x)] - P_1'(x)Q_2(x)}{\det(x)},$$

$$e^{g_2(x)} = \frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)[Q_1'(x) + Q_1(x)g_1'(x)]}{\det(x)}.$$

Ces dernières égalités contiennent une contradiction, car on a à gauche des fonctions entières transcendantes (leur ordre ≥ 1) et à droite, on a des fonctions rationnelles, donc polynômiales. Ce qui termine la démonstration de cet Théorème. ■

Exemple 2.3. *Pour la fonction* $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{C}$
On sait que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

De plus e^x *est une fonction entière transcendante d'ordre fini et entier* ($\rho = 1$). *Soit l'équation*

$$e^x = \beta, \quad \beta \in \mathbb{C}. \tag{2.18}$$

On pose $x = u + iv$, *où* $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\beta = |\beta| e^{i \arg \beta}$. *Donc, on obtient*

$$e^{u+iv} = |\beta| e^{iarg\beta} \Rightarrow e^u e^{iv} = |\beta| e^{iarg\beta}.$$

D'où

$$\begin{cases} e^u = |\beta|. \\ v = \arg \beta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

i) Si $\beta = 0$, *alors* $e^u = 0$, *cette équation n'a pas de solution. Donc l'équation (2.18) n'a aucune solution dans* $\mathbb{C}$ *.*

ii) Si $\beta \neq 0$, *alors* $|\beta| \neq 0$, *d'où* $u = \ln |\beta|$, *et pour tout* $k \in \mathbb{Z}$ *on a*

$$x_k = \ln |\beta| + i(\arg \beta + 2\pi k),$$

est une solution de l'équation (2.18), alors l'équation (2.18) a une infinité de solution.

2.2 Théorème de Picard dans $\mathbb{C}_p$

2.2.1 La distribution des zéros des fonctions entières

Théorème 2.11. *[12]* ***(Strassman)***
Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x - a)^n$ *une série entière non nulle avec des coefficient dans* $\mathbb{C}_p$, *et supposons que* $f(x)$ *converge pour tout* $x \in D^+(a, 1)$, *et soit* N *un entier positif défini par les deux conditions*

$$\begin{cases} 1) \ |a_N|_p = \max_{n \geq 0} |a_n|_p; \\ 2) \ |a_n|_p < |a_N|_p, \quad \forall n > N. \end{cases}$$

On a dans ce cas la fonction $f : D^+(a, 1) \longrightarrow \mathbb{C}_p$, *possède au plus* N *zéros dans* $D^+(a, 1)$.

P*reuve*.
La démonstration se fait par récurrence.

1. Pour $N=0$ et d'après cette assertion $|a_0|_p > |a_n|_p,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ on va démontrer que que f n'a aucun zéro dans $D^+(a,1)$ $\quad$ (*i.e.* $f(x) \neq 0,\ \forall x \in D^+(a,1)$).
   On suppose par l'absurde que il existe $\alpha \in D^+(a,1)$ tel que $f(\alpha)=0$, donc on a
   $$0 = f(\alpha) = a_0 + a_1(\alpha - a) + \dots$$
   alors
   $$\begin{aligned} |a_0|_p &= |a_1(\alpha-a) + a_2(\alpha-a)^2 + \dots|_p \\ &\leq \max_{n\geq 1} |a_n(\alpha-a)^n|_p \\ &\leq \max_{n\geq 1} |a_n|_p \\ &< |a_0|_p. \end{aligned}$$
   C'est une contradiction.
2. Supposons que
   $$|a_N|_p = \max_{n\geq 0} |a_n|_p \ \ et\ \ |a_n|_p < |a_N|_p,\ \forall n > N.$$
   On a, si f n'a pas de zéro dans $D^+(a,1)$, alors c'est évident.Et si il existe $\alpha \in D^+(a,1)$, tel que $f(\alpha)=0$ on a, pour tout $x \in D^+(a,1)$:
   $$\begin{aligned} f(x) = f(x) - f(\alpha) &= \sum_{n\geq 1} a_n[(x-a)^n - (a-\alpha)^n] \\ &= (x-\alpha)\sum_{n\geq 1}\sum_{j=0}^{n-1} a_n (x-a)^j (\alpha-a)^{n-1-j} \\ &= (x-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=j+1}^{\infty} a_n (x-a)^j (\alpha-a)^{n-1-j}. \end{aligned}$$
   Posons $k = n-1-j$, donc $n = k+j+1$, on obtient
   $$f(x) = (x-a)\sum_{j\geq 0} b_j (x-a)^j = (x-\alpha) g(x)$$
   où
   $$b_j = \sum_{k\geq 0} a_{j+1+k}(\alpha-a)^k,$$
   et $g(x)$ une série entière de coefficient b_j. Il est facile de voire que $\lim\limits_{j\to+\infty} b_j = 0$. on a
   $$|b_j|_p \leq \max_{k\geq 0} |a_{j+1+k}|_p \leq |a_N|_p,\ \ \forall j \geq 0, \tag{2.19}$$
   de plus
   $$|b_{N-1}|_p = |a_N + a_{N+1}(\alpha-a) + a_{N+2}(\alpha-a)^2 + \dots|_p = |a_N|_p, \tag{2.20}$$
   et si $j > N-1$ on a
   $$|b_j|_p \leq \max_{k\geq 0} |a_{j+1+k}| \leq \max_{j\geq N+1} |a_j|_p < |a_N|_p. \tag{2.21}$$

Donc, d'après les équations (2.19), (2.20) et (2.21) on a

$$\begin{cases} |b_{N-1}|_p = \max |b_j|_p \\ |b_j|_p < |b_{N-1}|_p \ \ \forall j > N-1 \end{cases}$$

Si on applique l'hypothèse de l'induction sur la fonction $g(x)$, on conclut qu'elle possédé au plus $(N-1)$ zéros sur $D^+(a,1)$. Alors $f(x) = (x-\alpha)g(x)$ possédé au plus N zéros sur $D^+(a,1)$.

■

Proposition 2.1. *[2] Soit $f \in \mathcal{A}(D^+(a,r))$ tel que $r > 0$ et $a \in \mathbb{C}_p$ $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ la formule*

$$\|f\| = \max_{x\in D^+(a,r)} |f(x)|_p,$$

est une norme non-archimédienne.

P*reuve*.
Montrons que $\|f\|$ est une norme non-archimédienne

1. Soient $f \in \mathcal{A}(D^+(a,r)),\ r > 0$ et $a \in \mathbb{C}_p$ et $\forall x \in D^+(a,r)$, On a

$$\begin{aligned} \|f\| = 0 &\iff \max_{x\in D^+(a,r)} |f(x)|_p = 0 \\ &\iff |f(x)|_p = 0, \ \ \forall x \in D^+(a,r) \\ &\iff f(x) = 0, \ \ \forall x \in D^+(a,r) \\ &\iff f \equiv 0. \end{aligned}$$

2. Soient $f, g \in \mathcal{A}(D^+(a,r)),\ \ r > 0$ et $a \in \mathbb{C}_p$ et $\forall x \in D^+(a,r)$, on a

$$\begin{aligned} \|fg\| &= \max_{x\in D^+(a,r)} |(fg)(x)|_p \\ &= \max_{x\in D^+(a,r)} |f(x)g(x)|_p \\ &= \max_{x\in D^+(a,r)} |f(x)|_p |g(x)|_p \\ &= \max_{x\in D^+(a,r)} |f(x)|_p \max_{x\in D^+(a,r)} |g(x)|_p \\ &= \|f\|\|g\|. \end{aligned}$$

3. Soient $f, g \in \mathcal{A}(D^+(a,r))$, $r > 0$ et $a \in \mathbb{C}_p$ et pour tout $x \in D^+(a,r)$, on a

$$\|(f+g)(x)\| = \max_{x\in D^+(a,r)} |(f+g)(x)|_p$$

$$\begin{aligned} |(f+g)(x)|_p &= |f(x)+g(x)|_p, \ \ \forall x \in D^+(a,r) \\ &\leq \max\{|f(x)|_p, |g(x)|_p\}, \ \ \forall x \in D^+(a,r). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\max_{x\in D^+(a,r)}|(f+g)(x)|_p &\leq \max_{x\in D^+(a,r)}\{\max\{|f(x)|_p,|g(x)|_p\}\}\\ &=\max\{\max_{x\in D^+(a,r)}\{|f(x)|_p,|g(x)|_p\}\}\\ &=\max\{\max_{x\in D^+(a,r)}|f(x)|_p,\max_{x\in D^+(a,r)}|g(x)|_p\}\\ &=\max\{\|f(x)\|,\|g(x)\|\}.\end{aligned}$$

Donc $\forall x\in D^+(a,r)\quad \|f+g\|\leq \max\{\|f\|,\|g\|\}$.

Alors $\|.\|$ est un norme non-archimédienne.

■

Définition 2.12. *Soit $f\in\mathcal{A}(D^+(a,R))$, avec $R>0$ et $f(x)=\sum_{n\geq 0}a_n(x-a)^n$, on définit le module maximum de f sur $]0,R]$, par la formule*

$$|f|(r)=\max_{n\geq 0}|a_n|_p r^n.$$

Proposition 2.2. *[5] Soit $f(x)=\sum_{n\geq 0}a_n(x-a)^n\in\mathcal{A}(D^+(a,R))$, avec $R>0$. Soit $0<r\leq R$, l'application*

$$f\longrightarrow |f|(r)=\max_{n\geq 0}|a_n|_p r^n \quad \textit{\textbf{(module maximum)}}$$

est une norme non-archimédienne sur $\mathcal{A}(D^+(a,R))$ et on a

$$\max_{x\in D^+(a,r)}|f(x)|_p=|f|(r),$$

cette relation est appelée ***égalité de Cauchy.***

Proposition 2.3. *[2] Soit $f\in\mathcal{A}(D^+(a,R))$ avec $R>0$, $a\in\mathbb{C}_p$ une fonction non nulle, alors*

- ***P.1.*** *La fonction $|f|(r)$ est croissante.*
- ***P.2.*** *Si f a un zéro α dans le disque $D^+(a,R)$, alors la fonction $|f|(r)$ est strictement croissante $\forall r>|\alpha-a|_p$.*
- ***P.3.*** *La fonction $|f|(r)$ est continue.*

P*reuve*.

P.1. On a $|f|(r)=\max_{x\in D^+(a,r)}|f(x)|_p$.

Si $r_1<r_2$, alors

$$\begin{aligned}|f|(r_1)&=\max_{x\in D^+(a,r_1)}|f(x)|_p\\ &\leq \max_{x\in D^+(a,r_2)}|f(x)|_p\\ &=|f|(r_2).\end{aligned}$$

D'où $|f|(r)$ est croissante.

P.2. Soit $r_0 > |\alpha - a|_p$, alors on a $|f|(r_0) = |a_N|r_0^N, \quad N \geq 1$ (en raison de la présence au moins un zéro dans le disque fermé de centre a et de rayon r_0).
Donc $a_N \neq 0$, d'où si $r > r_0$. On a

$$|a_N|_p r^N > |a_N|_p r_0^N.$$

Alors

$$|f|(r) = \max_{n\geq 0} |a_n|_p r^n \geq |a_N|_p r^N > |a_N|_p r_0^N = |f|(r_0).$$

D'où $|f|(r)$ est strictement croissante.

P.3. Soit $f \in \mathcal{A}(D^+(a,R))$, avec $R > 0$. On fixe $r \in]0, R]$, alors $\lim_{n\to+\infty} |a_n|_p r^n = 0$, donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$, tel que

$$\max_{0\leq n<n_1} |a_n|_p r^n = \max_{n\geq 0} |a_n|_p r^n = |f|(r).$$

Donc si $t \in]0, r]$, on a $\lim_{n\to+\infty} |a_n|_p t^n = 0$, de plus on a

$$\max_{0\leq n<n_1} |a_n|_p t^n = \max_{n\geq 0} |a_n|_p t^n = |f|(t).$$

Comme la fonction $t \longrightarrow \max_{n\leq n_1} |a_n|_p t^n = |f|(t)$ est clairement continue, on a le résultat.

$\blacksquare$

Définition 2.13. ***(Fonction de valution** p**-adique)*** *Soit* $f \in \mathcal{A}(D^+(a,R))$*, avec* $R > 0$ *et tel que* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *où* $a, a_n \in \mathbb{C}_p$*, on définit la fonction* ϕ_f *sur* $]-\infty, \log R[$ *par*

$$\begin{aligned} \phi_f :\ I =]-\infty, \log R[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \log r &\longrightarrow \phi_f(\log r) = \log|f|(r) = \max_{n\geq 0}\{\log|a_n|_p + n\log r\}. \end{aligned}$$

Cette fonction est appelée ***la fonction de valuation p-adique*** *de* f *et son graphe est dite* ***polygône de valuation p-adique*** *de* f*.*

Proposition 2.4. *[2] La fonction ϕ_f vérifie les propriétés suivantes*

P1. *C'est une fonction croissante, convexe, continue et affine par morceaux.*

P2. *Si f a un zéro α dans $D^-(a,r)$, ϕ_f est strictement croissante pour*

$$\log r > \log |\alpha - a|_p.$$

P3. *ϕ_f admet des dérivées à droite $\dfrac{d^+\phi_f}{d(\log r)}$ est à gauche $\dfrac{d^-\phi_f}{d(\log r)}$ en tout point $\log r \in I$. et on a*

- $\dfrac{d^+\phi_f}{d(\log r)} = N$ *Le plus grand entier tel que $\phi_f(\log r) = \log |a_N|_p + N \log r$ où N est le nombre des zéros de f dans le disque fermé $D^+(a,r)$.*
- $\dfrac{d^-\phi_f}{d(\log r)} = n$ *Le plus petit entier tel que $\phi_f(\log r) = \log |a_n|_p + n \log r$ où n est le nombre des zéros de f dans le disque ouvert $D^-(a,r)$.*
- *$N - n$ est le nombre des zéros de f sur le cercle $C(a,r)$.*

Exemple 2.4.
Soit $P(x) = \underbrace{(5^3+5^5)}_{a_0} + \underbrace{(5^2+2\times 5^3)}_{a_1} x + \underbrace{(5^2+5^4)}_{a_2} x^2 + \underbrace{(2\times 5^2+5^3)}_{a_3} x^3 \in \mathbb{C}_5[x]$,
on va calculer la fonction de valuation p-adique de cette polynôme

- *Pour* $r = \dfrac{1}{5^2}$, *on a*

$$\begin{aligned} |a_0|_5 r^0 &= 5^{-3} \times 1 = 5^{-3} \\ |a_1|_5 r &= 5^{-2} \times 5^{-2} = 5^{-4} \\ |a_2|_5 r^2 &= 5^{-2} \times 5^{-4} = 5^{-6} \\ |a_3|_5 r^3 &= 5^{-2} \times 5^{-6} = 5^{-8}. \end{aligned}$$

  Donc

$$|P|(\frac{1}{5^2}) = 5^{-3}.$$

  D'où $N = n = 0$, alors P n'aucun zéro sur le disque fermé $D^+(0, 5^{-2})$.

- *Pour* $r = \dfrac{1}{5^1}$, *on a*

$$\begin{aligned} |a_0|_5 r^0 &= 5^{-3} \times 1 = 5^{-3} \\ |a_1|_5 r &= 5^{-2} \times 5^{-1} = 5^{-3} \\ |a_2|_5 r^2 &= 5^{-2} \times 5^{-2} = 5^{-4} \\ |a_3|_5 r^3 &= 5^{-2} \times 5^{-3} = 5^{-5}. \end{aligned}$$

  Donc

$$|P|(\frac{1}{5^1}) = 5^{-3}.$$

  D'où

  $N = 1$, alors P a deux zéros dans le disque fermé $D^+(0, 5^{-1})$.

$n = 0$, *alors P n'a aucun zéros dans le disque ouvert* $D^-(0, 5^{-1})$.

$N - n = 1$, *alors P a deux zéros sur le cercle* $C(0, 5^{-1})$.

- *Pour $r = 1$, on a*

$$\begin{aligned}|a_0|_5 r^0 &= 5^{-3} \times 1 = 5^{-3}\\ |a_1|_5 r &= 5^{-2} \times 1 = 5^{-2}\\ |a_2|_5 r^2 &= 5^{-2} \times 1 = 5^{-2}\\ |a_3|_5 r^3 &= 5^{-2} \times 1 = 5^{-2}.\end{aligned}$$

Donc

$$|P|(1) = 5^{-2}.$$

D'où

$N = 3$, *alors P a trois zéros dans le disque fermé* $D^+(0, 1)$.

$n = 1$, *alors P a un zéros dans le disque ouvert* $D^-(0, 1)$.

$N - n = 2$, *alors P a deux zéro sur le cercle* $C(0, 1)$.

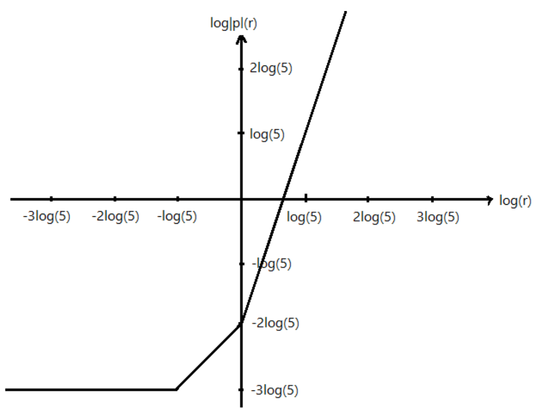
Et comme $\mathbb{C}_p$ algébriquement clôs on a

$$|P|(r) = \begin{cases} 5^{-3} & 0 < r \leq \dfrac{1}{5},\\ 5^{-2} r & \dfrac{1}{5} \leq r \leq 1,\\ 5^{-2} r^3 & r \geq 1.\end{cases}$$

D'où

$$\phi_P = \log |P|(r) = \begin{cases} -3\log 5 & -\infty < \log r \leq -\log 5,\\ -2\log 5 + \log r & -\log 5 \leq \log r \leq 0,\\ -2\log 5 + 3\log r & \log r \geq 0.\end{cases}$$

On va tracer le graphe ϕ_P



Le graphe 2.2 -- Polygone de valution p-adique de la fonction P.

Théorème 2.14. *[4] Soit f une fonction entière p-adique on a :*

$$\frac{|f'|(r)}{|f|(r)} \leq \frac{1}{r},\ \forall r > 0$$

P*reuve*.
Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ donc $f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$, d'où Pour $r > 0$, on a

$$\begin{aligned} |f'|(r) &= \max_{n\geq 1} |a_n n|_p r^{n-1} \\ &= \frac{1}{r} \max_{n\geq 1} |a_n|_p |n|_p r^n \\ &\leq \frac{1}{r} \max_{n\geq 0} |a_n|_p r^n \quad (\mathit{car}\ |n|_p \leq 1) \\ &\leq \frac{1}{r} |f|(r). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

2.2.2 Théorème de Picard p-adique

Dans cette partie, on va prouver le théorème de Picard p-adique, et on utilise certaines propriétés de polygône de valuation.

Théorème 2.15. *[17](**Picard p-adique**)*
Toute fonction entière p-adique non constante prend chaque valeur de $\mathbb{C}_p$. De plus, une fonction entière transcendent p-adique prend chaque valeur de $\mathbb{C}_p$ une infinité de fois (sans aucun exception).

Pour démonter cette Théorème on a besoin de formule de Jensen ;
Notation Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(a, R))$, $R > 0$ et $a \in \mathbb{C}_p, f(a) \neq 0$. Pour tout $r \in]0, R[$ et $\alpha \in D^-(a, r)$, on note

- $z(r, f)$ le nombre de zéros de f sur le cercle $|x - a|_p = r$, où

$$z(r, f) = \sum_{|\alpha - a|_p = r} \max(0, w_\alpha(f)),$$

tel que $w_\alpha(f)$ est un entier relatif, si f a un zéro α d'ordre q alors $w_\alpha(f) = q$, et si $f(\alpha) \neq 0$, $w_\alpha(f) = 0$.

Théorème 2.16. *(**Formule de Jensen**) Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(a, R))$, $R > 0$ et $r \in]0, R[$, tel que f n'a ni zéro en a. Soient $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ les zéros de f (pas nécessairement distincts) sur le disque fermé $D^+(a, r)$. Alors*

$$\log |f|(r) = \log |f(a)|_p + \sum_{|\alpha - a|_p \leq r} w_\alpha(f) \log \frac{r}{|\alpha - a|_p}.$$

P*reuve*.
La démonstration de cette formule est conséquence des propriétés de polygône de valuation p-adique de f.
Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(a,R)), R > 0 \quad et \quad a \in \mathbb{C}_p$ telle que $f(a) \neq 0$. Alors le polygône de valuation de f donne pour tout $r \in]0,R[$

$$\log|f|(r) = \log|f(a)|_p + \sum_{|\alpha - a|_p \leq r} w_\alpha(f) \log \frac{r}{|\alpha - a|_p}. \tag{2.22}$$

Pour montrer l'égalité (2.22), on supposons que les zéros de f sont dans le cercle $C(a,r_i)$ tel que $i \in \{1,k\}$ avec $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k < r$ pour tout $r \in]0,R[$, et le nombre des zéros dans le disque $D^+(a,r_i)$ sont $n_i, i \in \{0,k\}$ avec $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < n$.
On a

$$\log|f|(r) = \max_{n \geq 0}\{\log|a_n|_p + n\log r\},$$

alors pour tout $t \in]0,r]$

$$\begin{aligned}
0 < t \leq r_1 :\ & \log|f|(t) = \log|a_0|_p = \log|f(a)|_p \\
r_1 \leq t \leq r_2 :\ & \log|f|(t) = \log|a_{n_1}|_p + n_1 \log t \\
& \vdots \\
& \vdots \\
r_{k-1} \leq t \leq r_k :\ & \log|f|(t) = \log|a_{n_{k-1}}|_p + n_{k-1}\log t \\
r_k \leq t \leq r :\ & \log|f|(t) = \log|a_{n_k}|_p + n_k \log t.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\log|f|(r) &= [\log|f|(r) - \log|f|(r_k)] + [\log|f|(r_k) - \log|f|(r_{k-1})] + \ldots + [\log|f|(r_2) \\
&\quad - \log|f|(r_1)] + \log|f|(r_1) \\
&= [\log|a_{n_k}|_p + n_k \log r - \log|a_{n_k}|_p - n_k \log r_k] + [\log|a_{n_{k-1}}|_p + n_{k-1}\log r_k \\
&\quad - \log|a_{n_{k-1}}|_p + n_{k-1}\log r_{k-1}] + \ldots + [\log|a_{n_1}|_p + n_1 \log r_2 - \log|a_{n_1}|_p \\
&\quad - n_1 \log r_1] + \log|f(a)|_p \\
&= \log|f(a)|_p + n_k \log\frac{r}{r_k} + n_{k-1}\log\frac{r_k}{r_{k-1}} + \ldots + n_1 \log\frac{r_2}{r_1} \\
&= \log|f(a)|_p + n_k \log\frac{r}{r_k} + n_{k-1}\left(\log\frac{r}{r_{k-1}} - \log\frac{r}{r_k}\right) + \ldots + n_1\left(\log\frac{r}{r_1} - \log\frac{r}{r_2}\right) \\
&= \log|f(a)|_p + (n_k - n_{k-1})\log\frac{r}{r_k} + (n_{k-1} - n_{k-2})\log\frac{r}{r_{k-1}} + \ldots + (n_2 - n_1)\log\frac{r}{r_2} \\
&\quad + (n_1 - n_0)\log\frac{r}{r_1} \\
&= \sum_{i=1}^{k}(n_i - n_{i-1})\log\frac{r}{r_i} + \log|f(a)|_p,
\end{aligned}$$

où $(n_i - n_{i-1})$ le nombre des zéros de f sur le cercle $|x-a|_p = r_i$, donc $\forall r \in]0, R[$ on a

$$\log|f|(r) = \log|f(a)|_p + \sum_{i=1}^{k}(n_i - n_{i-1})\log\frac{r}{r_i}.$$

Donc

$$\log|f|(r) = \log|f(a)|_p + \sum_{|\alpha-a|_p\leq r} w_\alpha(f)\log\frac{r}{|\alpha-a|_p}.$$

■

P*reuve*. (**Théorème 2.15**)

Soit $f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ une fonction entière p-adique, alors

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|_p r^n = 0, \quad \forall r > 0.$$

Donc on a :

$$|f|(r) = \max_{n\geq 0} |a_n| r^n,$$

et

$$\phi_f(\log(r)) = \log|f|(r) = \max_{n\geq 0}\{\log|a_n|_p + n\log r\}.$$

D'après le Théorème 2.16 on sait que les zéros de f apparaissant aux **"coins"** son polygône de valuation, et que $|f|(r) = |a_0|_p$ pour r proche de zéro à condition que $a_0 \neq 0$.
Et comme on a f n'est pas constante, alors pour tout r suffisant grand on a

$$|f|(r) \neq |a_0|_p,$$

donc le polygône a au moins un coin et f a au moins un zéro.
Si f est transcendent, alors f a une infinité de nombre de coefficients non nul.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe r_n tel que pour tout $r \geq r_n$ on a

$$|f|(r) > |a_n|_p r^n.$$

Par conséquent, le polygône de valuation de f a une infinité de coins, et donc f a une infinité de zéros. ■

CHAPITRE 3

APPLICATION DE THÉORÈME DE PICARD SUR LA FACTORISATION DES FONCTIONS ENTIÈRES P-ADIQUES

Dans ce chapitre, on va appliquer le théorème de Picard sur la factorisation des fonctions entières p-adiques .

3.1 Factorisation des fonctions entières p-adiques

Définition 3.1. *Soit F une fonction entière. Si $F(x)$ peut être exprimé sous la forme*

$$F(x) = f(g(x)) = (f \circ g(x)), \tag{3.1}$$

où f et g sont des fonctions entières, alors on appelle l'expression (3.1) une factorisation de F et f, g sont appelés le facteur à gauche et le facteur à droite de F, respectivement.

Définition 3.2. *Si chaque factorisation de F de la forme ci-dessus implique que f ou g est linéaire (**resp.** f ou g est un polynôme), alors F est appelé **première (resp. pseudo -première)**.*

Définition 3.3. *Si chaque factorisation de la forme (3.1) implique que f doit être linéaire lorsque g est transcendante (resp. g doit être linéaire lorsque f est transcendante), alors F est appelé **première à gauche (resp. première à droit).***

Maintenant, on donne quelques résultats sur la factorisation des fonctions entières complexes.

Théorème 3.4. *[18] Soit F une fonction entière transcendante d'ordre finie et R un nombre positif arbitrairement fixe. Supposons que le système*

$$\begin{cases} F(x) = \beta \\ F'(x) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

*a seulement un nombre fini de solution pour tout constant $\beta \in \mathbb{C}$ satisfaisant $|\beta| > R$. Alors F est **pseudo-première.***

Corollaire 3.1. *[18]*

Soit F une fonction entière transcendante d'ordre fini avec au moins un, mais au plus un nombre fini de zéros simples. Supposons que le système (3.2) *a seulement un nombre fini de solution pour toute constante non nulle $\beta \in \mathbb{C}$. Alors F est **première à gauche**.*

Dans la suite, on va présenter les versions p-adiques de Théorème 3.2 et Corollaire 3.1.

Théorème 3.5. *Soit F une fonction entière transcendent. Si pour tout $\beta \in \mathbb{C}_p$ la fonction $F - \beta$ n'a qu'un nombre fini des zéros multiples, alors F est **pseudo-première.***

***Preuve**.* On suppose par l'absurde que F n'est pas pseudo-première, alors F peut être exprimé par la forme $f \circ g$ où f et g sont des fonctions entières transcendent.
Et comme on a $f' \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{C}_p[x]$. Donc f' a au moins un zéro $\alpha \in \mathbb{C}_p$, **i.e :**

$$f'(\alpha) = 0.$$

D'autre parte d'après le Théorème de Picard p-adique l'équation $g(x) - \alpha = 0$ admet une infinité de solution.
Et pour $\beta = f(\alpha) \in \mathbb{C}_p$, donc on a pour tout $w \in \{g^{-1}(\alpha)\}$

$$\begin{cases} (F-\beta)(w) = F(w) - \beta = f \circ g(w) - \beta = f(\alpha) - \beta = 0, \\ et \\ (F-\beta)'(w) = F'(w) = f'(g(w)) \times g'(w) = f'(\alpha) \times g'(w) = 0. \end{cases}$$

D'où tous éléments de $\{g^{-1}(\alpha)\}$ sont des zéros multiples de $F - \beta$. Ce qui contredit l'hypothèse.

$\blacksquare$

Remarque 3.1. *Sur les mêmes conditions de Théorème* 3.5 *on peut facilement démontrer que F est première à gauche.*

En effet :
Supposons que $F = f \circ g$ où $g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[X]$ et $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$. D'après le Théorème 3.5 on a F est pseudo-première, donc f est un polynôme.
Si on suppose que $\deg f \geq 2$, alors $f'(w)$ admet au moins un zéro α.
Puisque on a $g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[X]$, alors d'après le Théorème de Picard p-adique a une infinité des zéros, et l'ensemble $\{g^{-1}(\alpha)\}$ est infini, et pour $\beta = f(\alpha) \in \mathbb{C}_p$ on a $F - \beta$ a une infinité des zéros multiples ce qui contredit l'hypothèse.

Théorème 3.6. *Soit $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[X]$ tel que pour tout $\beta \in \mathbb{C}_p$, la fonction $F - \beta$ a au plus un zéro multiple. Alors F est* ***première.***

Les étapes pour prouver qu'une fonction entière transcendantale donnée F est première sont :

i) F est pseudo-première ?

ii) F ne peut pas être exprimé par $F(x) = P(g(x))$ où F est entier et P est un polynôme de $\deg P \geq 2$?

iii) F ne peut pas être exprimé par $F(x) = h(g(x))$ où $g(x)$ est un polynôme de $\deg \geq 2$ et h une fonction entière ?.

P*reuve*. (Théorème 3.6)
D'après la Remarque 3.1, F est première à gauche. Donc, il reste à montrer que F est première à droit.
Pour cela, supposons que $F(x) = f \circ g$, où $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[X]$ et $g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$.
D'après le Théorème 3.5, F est pseudo première, donc g est un polynôme.
Supposons que $\deg g = d \geq 2$.
On a

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x),$$

et lorsque $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[X]$, alors la fonction $f' \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[X]$. De plus, f' admet une infinie de zéros.
On choisir un élément w tel que $f'(w) = 0$ et $g - w$ a que des zéros simples $\gamma_1, ..., \gamma_d$, Alors, pour $i = 1, ..., d$, on a

$$\begin{cases} F(\gamma_i) = f(w) = \beta \\ (F - \beta)'(\gamma_i) = 0, \end{cases}$$

cela signifie que tous les γ_i sont des zéros multiples de $F - \beta$, donc c'est une contradiction.
Par conséquent, $F(x)$ première à droit. ■

Remarque 3.2. *La fonction $F(x) = e^{e^x}$ est vérifiée les conditions des théorèmes 3.5 et 3.6, mais elle n'est pas pseudo-première dans $\mathbb{C}$ (**resp.** n'est pas première dans $\mathbb{C}$).*

3.2 Construction des fonctions entières premières et pseudo-premières

Dans la suite $|.|$ est désignée à la valeur absolue p-adique $|.|_p$.

Théorème 3.7. *Soit $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ une fonction entière p-adique tel que $a_n \neq 0$, pour tout $n \geq N$. Supposons qu'il existe un entier $n_0 \geq N$ tel que la suite $(|a_n/a_{n+1}|)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante et non bornée. Alors la fonction f est* ***pseudo-première.***

P*reuve*. On pose $r_n = |a_n/a_{n+1}|, \ \forall n \geq 0$, et prend n_0 le plus grand entier tel que : $r_{n_0} > \max\{r_0, ..., r_{n_0-1}\}$.
Dans la suite, on va montrer que f a seulement des zéros simples dans $\mathbb{C}_p \backslash D(0, r_{n_0})$.
En effet, soit $r > r_{n_0}$. On a deux cas :

i) Si $r = r_n$ pour $n \geq n_0 + 1$: on a la suite $(r_k)_{k\geq n_0}$ est strictement croissante, alors $r_{n-1} < r_n < r_{n+1}$.
donc
$$\frac{|a_{n+1}|r_n^{n+1}}{|a_n|r_n^n} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| r_n = 1,$$
d'où $\qquad |a_n|r_n^n = |a_{n+1}|r_n^{n+1}$.
De plus, pour chaque entier $l, \ 0 \leq l \leq n-1$, on a :
$$\frac{|a_l|r_n^l}{|a_n|r_n^n} = \left|\frac{a_l}{a_n}\right| \frac{1}{r_n^{n-l}} = \left|\frac{a_l}{a_{l+1}}\right| ... \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \frac{1}{r_n^{n-l}} < 1.$$
Donc
$$|a_l|r_n^l < |a_n|r_n^n.$$
Enfin, pour tout entier, $l > n+1$, on a :
$$\begin{aligned} \frac{|a_l|r_n^l}{|a_{n+1}|r_n^{n+1}} &= \left|\frac{a_l}{a_{n+1}}\right| r_n^{l-n-1} \\ &< \left|\frac{a_l}{a_{n+1}}\right| \left|\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right| ... \left|\frac{a_{l-1}}{a_l}\right| = 1. \end{aligned}$$
D'où $|f|(r_n) = \max\limits_{l\geq 0} |a_l|r_n^l$ est atteint pour les deux valeurs $l = n$ et $l = n+1$. Cela implique, d'après les propriété de polygône de valuation, que f a seulement un zéro dans le cercle $C(0, r_n)$.

ii) Supposons maintenant que r est différent de r_n pour tout $n > n_0$.
Soit $n \geq n_0$ tel que $r_n < r < r_{n+1}$.

alors, pour tout entier $l,\ 0 \leq l \leq n$:

$$\begin{aligned} |a_l|r^l &= \left|\frac{a_l}{a_{l+1}}\right|\left|\frac{a_{l+1}}{a_{l+2}}\right|...\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right||a_{n+1}|r^l \\ &\leq |a_{n+1}|r_n^{n+1-l}r^l \\ &< |a_{n+1}|r^{n+1}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout entier $l > n+1$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{|a_l|r^l}{|a_{n+1}|r^{n+1}} = \frac{|a_l|}{|a_{n+1}|}r^{l-n-1} &< \frac{|a_l|}{|a_{n+1}|}r_{n+1}^{l-n-1} \\ &\leq \left|\frac{a_l}{a_{n+1}}\right|\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right|..\left|\frac{a_{l-1}}{a_l}\right| = 1. \end{aligned}$$

Alors $|f|(r) = \max_{l\geq 0}|a_l|r^l$ Vérifie seulement pour $l = n+1$.
Cela implique, d'après les propriété de polygône de valuation que f n'a pas de zéro sur le cercle $C(0,r)$.
Alors tous les zéros de f dans $\mathbb{C}_p\backslash D(0, r_{n_0})$ sont simples.
En effet, pour tout $\beta \in \mathbb{C}_p$, il existe $r_\beta > 0$ tel que :

$$|f-\beta|(r) = |f|(r), \quad pour \ \ r > r_\beta.$$

Donc $f-\beta$ admet seulement des zéros simples dans $\mathbb{C}_p\backslash D(0, \max(r_{n_0}, r_\beta))$.
Donc tous les zéros multiples possibles de $f-\beta$ sont dans $D(0, \max(r_{n_0}, r_\beta))$ et son nombre est fini.
En utilisant le Théorème, nous complétons la preuve du Théorème 3.7.

∎

Remarque 3.3. *Si $n_0 = 0$ dans le Théorème 3.7, alors la fonction f est première. Ce résultat et une conséquence de corollaire 1.12 dans* [5].

Rappelons d'abord que, étant donné un nombre réel x, on appelle partie entière de x et on note $E(x)$ l'unique entier tel que $E(x) \leq x < E(x)+1$. On peut facilement montrer que :

Lemme 3.8. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a :*

$$E(x-y) \leq E(x) - E(y) \leq E(x-y)+1.$$

Exemples 3.1. *Soit N un nombre entier ≥ 3 et soit $\alpha \in \mathbb{C}_p$ tel que $|\alpha| < 1$.*
Alors la fonction $f(x) = \sum_{n\geq 0}\alpha^{E((n/N)^N)}x^n$ est une fonction entière pseudo-première.
En effet :

Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, *tel que* $a_n = \alpha^{E((n/N)^N)}$ *pour tout* $n \geq 0$.
On peut vérifier facilement que

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| r_n = \lim_{n\to+\infty} |\alpha^{E((n/N)^N)}| r_n = 0, \qquad \forall r > 0;$$

alors f *est une fonction entière dans* $\mathbb{C}_p$.
Maintenant on va montrer que si n_0 *est un entier* $\geq (2N^{N-1}/(N-1))^{1/(N-2)}$, *la suite* $(|a_n/a_{n+1}|)_{n\geq n_0}$ *est strictement croissante.*
Pour tout $n \geq 0$, *on a :*

$$|a_n/a_{n+1}| = (1/|\alpha|)^{E((n+1/N)^N)-E((n/N)^N)}.$$

Et comme on a la fonction $x \mapsto (1/|\alpha|)^x$ *est strictement croissante, alors d'après le Lemme 3.8 on conclue que :*

$$\left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^{E((\frac{n+1}{N})^N-(\frac{n}{N})^N)} \leq \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \leq \left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^{E((\frac{n+1}{N})^N-(\frac{n}{N})^N)+1}. \tag{3.3}$$

De la même manière, on a aussi :

$$\left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^{E((\frac{n+2}{N})^N-(\frac{n+1}{N})^N)} \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right| \leq \left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^{E((\frac{n+2}{N})^N-(\frac{n+1}{N})^N)+1} \tag{3.4}$$

De (3.3) *et* (3.4) *on résulte que :*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right| - \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \geq \left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^{E((\frac{n+2}{N})^N-(\frac{n+1}{N})^N)} - \left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^{E((\frac{n+1}{N})^N-(\frac{n}{N})^N)+1} \tag{3.5}$$

Mais, par Lemme 3.8, on a :

$$E\left(\left(\frac{n+2}{N}\right)^N - \left(\frac{n+1}{N}\right)^N\right) - E\left(\left(\frac{n+1}{N}\right)^N - \left(\frac{n}{N}\right)^N\right) - 1 \geq$$
$$E\left(\left[\left(\frac{n+2}{N}\right)^N - \left(\frac{n+1}{N}\right)^N\right] - \left[\left(\frac{n+1}{N}\right)^N - \left(\frac{n}{N}\right)^N\right]\right) - 1.$$

Et comme on a

$$\left(\frac{n+2}{N}\right)^N - \left(\frac{n+1}{N}\right)^N = \frac{1}{N^N}\sum_{i=0}^{N-1}(n+2)^i(n+1)^{N-i-1}$$

et

$$\left(\frac{n+1}{N}\right)^N - \left(\frac{n}{N}\right)^N = \frac{1}{N^N}\sum_{i=0}^{N-1} n^i(n+1)^{N-i-1},$$

alors

$$\left[\left(\frac{n+2}{N}\right)^N - \left(\frac{n+1}{N}\right)^N\right] - \left[\left(\frac{n+1}{N}\right)^N - \left(\frac{n}{N}\right)^N\right] = \frac{1}{N^N}\sum_{i=0}^{N-1}(n+1)^{N-i-1}[(n+2)^i - n^i].$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\left[\left(\frac{n+2}{N}\right)^N - \left(\frac{n+1}{N}\right)^N\right] - \left[\left(\frac{n+1}{N}\right)^N - \left(\frac{n}{N}\right)^N\right] &= \frac{2}{N^N}\sum_{i=0}^{N-1}(n+1)^{N-i-1}\sum_{j=0}^{i-1}(n+2)^j n^{i-j-1} \\
&\geq \frac{2}{N^N}\sum_{i=0}^{N-1} n^{N-i-1}\sum_{j=0}^{i-1} n^j n^{i-j-1}, \\
&\geq \frac{2n^{N-2}}{N^N}\sum_{i=0}^{N-1} i \\
&\geq \frac{n^{N-2}(N-1)}{N^{N-1}}.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\left[\left(\frac{n+2}{N}\right)^N - \left(\frac{n+1}{N}\right)^N\right] - \left[\left(\frac{n+1}{N}\right)^N - \left(\frac{n}{N}\right)^N\right] \geq 2.$$

En suit, pour tout $n \geq n_0$ on a

$$E\left(\left(\frac{n+2}{N}\right)^N - \left(\frac{n+1}{N}\right)^N\right) - E\left(\left(\frac{n+1}{N}\right)^N - \left(\frac{n}{N}\right)^N\right) - 1 > 0.$$

Alors pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right| > \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

On complète par l'application du Théorème 3.7.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **Amice.Y**, les nombres p-adique, Presses Universitaire de France, Collection SUP, "Le mathèmaticien", 1975.

[2] **Bézevin J,P**, Dynamique des fractions rationnels p-adique.23 mai 2005.

[3] **Boutabaa.A et Escassut.A**, on uniquenss of p-adic meromorphic functions, **proc.Amer.Math.soc.126(9),2557-2568(1998)**.

[4] **Boutabaa.A** Théorie de Nevanlinna p-adique. Manuscripta Math.67, 251-269(1990).

[5] **Boutabaa.A and J.P. Bézévin,** Decomposition of p-adic meromorphic functions. Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 2, no 1(1995) pp51-60.

[6] **B.Diarra,** analyse p-adique Cours de DEA - Algèbre Commutative FAST - Université du Mali Décembre 1999 - Mars 2000 - Décembre 2000.

[7] **Chi-Tai Chuang and Chung-Chun Yang** Fix-pointsand factorization of meromorphic functions.

[8] **Escassut.A,** Analytic Element in p-adic Analysis, *Wordscientific publiching(1995).*

[9] **Fernando Q.Gouvêa**, p-adic numbers An Introduction (1997).

[10] **Hayman W,K,** Meromorphic functions , *Calaredon press, oxford.(1964).*

[11] **K.Arbenz, A.Wohlhavser** Variables complexe,Ch-1015 lauxinne, 1993

[12] **Katok.S**, real and p-adic analysis, cours notes for math 497 C, Massprogram, fall 2000 (2002).

[13] **Koblitez.N**, p-adic analysis and Zeta function,springer-verlag(1984).

[14] **Pierre Colmez**, les nombres p-adiques, notes du cours de M2.

[15] **P.Dolbeault**, Analyse complexe, Massonparis Milan Barcelone mexico 1990.

[16] **Winckler.B**, Introduction à l'analyse p-adique,(11 Octore 2012).

[17] **William.Cherry**, Topics in p-adic function theory.

[18] **Y.Noda**, on factorization of entire functions. Kodai Math.j.4(1981).480-494.