République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....
№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Etude d'une inclusion différentielle avec des conditions aux limites de Neumann

Présenté par :

- Bouzaout Bouchra .
- Hantit Souad.

Devant le jury :

Président	: Fetouci Nora	M.C.B Université de Jijel
Encadreur	: Affane Doria	M.C.A Université de Jijel
Examinateur	: Boutana Imen	M.C.B Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

Remerciements

D'abord, nous tenons à remercier ALLAH qui nous a données la volonté et la sonté pour finir ce mémoire.

Nous tenons à remercier vivement et chaleureusement nos chéres familles pour leur soutien, leurs patience, leurs encouragement et tout ce qu'elles ont fait pour nous au long de cette période.

Nous remercions chaleureusement notre encadreur M^{ame} **Affane Doria**, pour avoir assumé la responsabilité de nous encadrer, nous orienter et de nous conseiller tout au long de la réalisation de ce travail,

Nous la remercions très sincèrement pour sa compétence. Ses remarquables conseils divers et riches, qui nous ont été d'une grande utilité pour mener à bien ce travail.

Nous tenons à formuler nos remerciements les plus sincères à Mlle **Fetouci Nora**, M.C.B à l'université de Jijel pour avoir accepté la présidence du jury de ce mémoire et pour l'honneur qu'elle nous a fait par sa présence ainsi que M^{ame} **Boutana Imen** , M.C.B à l'université de Jijel pour avoir accepté d'être membre du jury, avoir examiné et corrigé notre mémoire et nous les remercions aussi pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail.

Enfin, nous tenons à exprimer notre reconnaissance à Monsieur Bensouilah Bachir, et à tous les enseignants du département de mathématiques de l'université de Jijel.

BOUCHRA et SOUAD

Dédicace

Je dédie ce modeste mémoire qui est l'accomplissement de longues années d'études, en premier lieu :
A mon très cher père, pour ces conseils, son soutien matériels et moral et pour tous ses efforts et les faveurs qu'il m'a accordé et qui m'ont donné la volonté de réaliser et de finir ce travail.
A ma très chère mère, la femme la plus chère de ma vie, à qui je dois beaucoup pour ses sacrifices, son amour et son soutien matériel et moral et me voir ainsi arriver à ce que je suis devenue aujourd'hui.
Que Dieu les protège
A mon très chères frères **Fakhraddine**
A mes adorables sœurs **Dalal, Farida et Meriem**
Je vous aime et que Dieu vous protège
A tous les personnes qui m'a aidé la plus pendant cette année .
Je te remercent infiniment.
A mes très chères amies .
A mon binôme **Souad**
A toute ma grande famille.
A ceux qui m'ont souhaité la réussite au fond de leurs cœurs.

Dédicace

Je dédie ce modeste mémoire qui est l'accomplissement de longues années d'études, en premier lieu :
A mon très cher père, pour ces conseils, son soutien matériels et moral et pour tous ses efforts et les faveurs qu'il m'a accordé et qui m'ont donné la volonté de réaliser et de finir ce travail.
A ma très chère mère, la femme la plus chère de ma vie, à qui je dois beaucoup pour ses sacrifices, son amour et son soutien matériel et moral et me voir ainsi arriver à ce que je suis devenue aujourd'hui.
Que Dieu les protège
A mon très chères frères **Soufiane, Abd Al aziz et Farouk**
A mes adorables sœurs **Rachida, Radia et Nadjiba**

Je vous aime et que Dieu vous protège
A tous les personnes qui m'a aidé la plus pendant cette année .
Je te remercient infiniment.
A mes très chères amies .
A mon binôme **Bouchra**
A toute ma grande famille.
A ceux qui m'ont souhaité la réussite au fond de leurs cœurs.

Table des matières

Introduction

L'étude des problèmes de mathématiques ou physique, conduit souvent à la résolution d'équations et d'inclusions différentielles. L'étude revient souvent à déterminer les solutions quand elles existent ou à donner une étude analytique permettant de dégager leurs propriétés. Ce travail est consacré à l'étude d'existence de solution pour le problème aux limites de Neumann.

$$\begin{cases} x''(t) \in F(t, x(t), x'(t)), & p.p.\ sur[0,1] \\ x'(0) = r,\ x'(1) = s \end{cases} \tag{1}$$

en dimension infinie où $F : [0,1] \times E \times E \longrightarrow 2^E$ est une multi-application à valeurs fermées, mesurable par rapport à le première variable et Lipschitz continue par rapport à la deuxième variable, et $r, s \in E$.

Le problème valeur aux limite de Neumann a attiré l'attention de nombreux chercheurs, pour les équations différentielles du second ordre, citons par exemple Boucherif et Almalki [6], Guennoun [9], Granas, Guenther et Lee [10], Mawhin et Reize [14], Wang, Cui et Zhang [16] et leurs références.

Dans la littérateur, il y a pues de documents qui traitent l'existence des solutions aux problèmes aux limite de Neumann pour les inclusions différentielles.

Ce mémoire est basé sur le résultat de Aitalioubrahim [2] qui est consacré à l'étude d'existence de solution de pour le problème (1), dans un espace de dimension infini avec F est une multi-application non convexe, où il a utilisé le théorème de point fixe introduit par Covitz et Nadler pour les multi-applications contractantes.

Les théorèmes du point fixe se révèlent être des outils très utilisés. En effet de nombreuses questions liées à l'existence et l'unicité des solutions de certains types d'équations et d' inclusions différentielles, peuvent être important à la question d'existence et d'unicité d'un point fixe pour la multi-application, il existe plusieurs théorèmes de point fixe, on

s'est intéressé dans ce mémoire au théorème de point fixe Nadler et Covitz d'une multi-application d'un espace métrique complet.
L'objectif de notre étude et de donner quelques théorèmes et propositions de mesurabilité et multi-applications.
Notre mémoire est organisé sur un plan structure par deux chapitres.
Le première chapitre :on rappelle quelques notions de base, définitions et les résultats de base concurrent les applications et les multi-applications nous avons utilisé au long de ce travaille.
Le deuxième chapitre : la première partie est consacrée aux fonctions de Green et les propriétés, la fonction de Green utilisé pour détailler les solutions, la deuxième partie trouvé on donne le résultat d'existence de solution pour le problème (1).

Chapitre 1

Notation et Préliminaires

L'objet de ce chapitre est de donner des notions de base, quelques résultats fondamentaux sur les distances, les normes, les espaces et les multi-applications, la plus grande partie de ce chapitre est consacré aux multi-applications, leurs continuité et mésurabilité que nous avons utilisé dans ce mémoire.

1.1 Notations

Nous commençons par les notions utilisées.

Dans la suite de ce travail, on note par

• $\mathbb{R}$ l'intervalle des nombres réelle.

• $\mathbb{N}$ l'intervalle des nombres naturelles.

• $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

• (X, d) un espace métrique et d la distance.

• $P(X)$ l'ensemble de parties de X.

•$P(Y)$ l'ensemble de parties de Y.

• $\mathbb{I}_A$ La fonction caractéristique d'une partie A d' un ensemble donnée, définie par

$$\mathbb{I}_A = \begin{cases} 1 & , si\ x \in A \\ 0 & , si\ x \notin A \end{cases}$$

• (X, Σ) un espace mesurable.

• (X, Σ, μ) un espace mesuré.

• $B(X)$ la tribu borélienne sur X.

• $\mathcal{L}(I)$ la tribu sur I des ensemble mesurable au sens de Lebesgue et dans ce cas μ est la mesure de Lebesgue.

• $L^1(I, E)$ l'espace de Banach de toutes les applications intégrables définie sur I dans E muni de la norme

$$\|u\| = \int_I \|u(t)\| dt.$$

• $C(I, X)$ l'espace de Banach des applications continues $u : I \to E$, muni de la norme de la convergence uniforme, i.e.

$$\|u\|_{C(I,X)} = \sup_{t \in I} ||u(t)||.$$

• $C^1(I, X)$ l'espace de Banach des applications continues différentiables muni de la norme

$$||u||_{C^1(I,X)} = max\{||u||_{C(I,X)}, ||u'||_{C(I,X)}\}.$$

• $\overline{B}(x, r)$ la boule fermée de centre x, et de rayons r et $\overline{B}$ la boule unité fermée.

• $\mathcal{H}$ la distance de Hausdorff.

• $Dom(F)$ le domaine de F.

• $Im(F)$ l'image de F.

• $gph(F)$ le graphe F.

• μ-p.p μ-presque par tout.

• $x_n \longrightarrow x$ la convergence simple dans E.

• $S_{F,u}$ l'ensemble des sélections intégrables de F.

• ∂ la dérivée partielle.

• $\mathcal{P}_{cl}$ la famille des ensembles fermées.

• $x' = \frac{dx}{dt}$ la dérivée première par rapport à t.

• $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$ la dérivée seconde par rapport à t.

• $X \setminus A$ complémentaire de A dans X.

1.2 Quelques définitions

1.2.1 Espace normé

Définition 1.2.1. *une norme sur $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application :*

$$||.|| : E \longrightarrow]0, +\infty[$$
$$x \longmapsto ||x||$$

vérifiant pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$

1. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$,
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

On dit que $(E, ||.||)$ est un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K}$.

Exemple 1.2.2. • *La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$.*
• *Le module est une norme sur $\mathbb{C}$.*

Proposition 1.2.3. *Soit $(E, ||.||)$ un espace normé.*

1. $||0|| = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$
2. *La propriété (2) dans la définition1.2.1 est équivalente à la forme affaiblie suivante : pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $||\lambda x|| \leq |\lambda|||x||$.*

Proposition 1.2.4. *Tout espace vectoriel normé $(E, ||.||)$ de dimension finie est un espace de Banach.*

1.2.2 Espace de Banach

Définition 1.2.5. *Un espace de Banach E est un espace vectoriel normé complet .*

Exemple 1.2.6. $E = \mathbf{C}(I, \mathbb{R})$. *Alors $(E, \|.\|_{C(I,X)})$ est un espace de Banach.*

Proposition 1.2.7. *Sur un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ de dimension finie. Toutes les normes sont équivalentes :*

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2},$$

et

$$||x||_\infty = \sup_{i=\overline{1..n}} |x_i|.$$

1.2.3 Espace métrique

Définition 1.2.8. *Soit X un ensemble non vide, on définit d par*

$$d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty[$$
$$(x, y) \longmapsto d(x, y).$$

On dit que d est une distance sur X si seulement si :

1. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x), \qquad \forall x, y \in E$.
3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z), \qquad \forall x, y, z \in X$.

On appelle espace métrique tout couple (X, d) constitué d' un ensemble X et d'une distance sur X.

Définition 1.2.9. *Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X non vide, la distance d'un point $x \in X$ à l'ensemble A est donnée par*

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

Remarque. *Tout espace métrique est séparé.*

Définition 1.2.10. *Soient (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ et $a \in X$. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément a de X. Si et seulement si,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \geq N \ , d(x_n, a) \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a dans X quand n tend vers infini si et seulement si

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} d(x_n, a) = 0.$$

Définition 1.2.11. *Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans X converge dans X.*

Définition 1.2.12. *Soit X un espace topologique. On dit que X est un espace séparé si pour tous x, $y \in X$, $x \neq y$, il existe V_x, V_y deux voisinage de x et y respectivement tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$.*

Définition 1.2.13. *Soit X un espace topologique. On dit que X est séparable s'il admet un sous ensemble dénombrable par tout dense. X est parfaitement séparable si sa topologie admet une base dénombrable.*

1.3 Application

Dans cette section nous rappelons quelques définitions et quelques théorèmes de base qu' on a utilisé dans les chapitres suivants.

1.3.1 Continuité absolue

Rappelons la définition d'une fonction absolument continue.

Définition 1.3.1. *Soit E un espace de Banach. Une fonction $f : [a, b] \to E$ est dite absolument continue si $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tels que pour toute partition dénombrable de l'intervalle $[a, b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant*

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta,$$

on a

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.3.2. *Toute fonction $f : [a, b] \to E$ est absolument continue si et seulement si elle est l'intégrale de sa dérivée, c'est à dire,*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

Proposition 1.3.3. *Toute fonction absolument continue est continue (la réciproque est fausse).*

Définition 1.3.4. *Soit $f : X \longrightarrow X$ une application. Un élément x de X est dit point fixe de f si $f(x) = x$.*

1.3.2 Mesurabilité

Définition 1.3.5. *Soit X un ensemble non vide, Σ une famille de sous ensembles de X. Σ est dite une tribu sur X si*

1. $\emptyset \in \Sigma$,
2. $A \in \Sigma \Longrightarrow X \setminus A \in \Sigma$,
3. $A_n \in \Sigma \Longrightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

Le couple (X, Σ) est appelé espace mesurable, et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables.
Si X est un espace topologique, la tribu Borélienne sur X notée $B(X)$ est la plus petite tribu contenant la topologie de X.

Définition 1.3.6. *Soient $(X_1, \Sigma_1), (X_2, \Sigma_2)$ deux espaces mesurables et f une application définie sur X_1 à valeurs dans X_2. On dit que f et (Σ_1, Σ_2) -mesurable. Si pour tout $A \in \Sigma_2, f^{-1}(A) \in \Sigma_1$.*
Si X_2 est un espace topologique, une fonction $(\Sigma_1, B(X_2))$ mesurable est dit fonction Borélienne ou Σ_1-mesurable

Proposition 1.3.7. *Soient $(X_1, \Theta_1), (X_2, \Theta_2)$ deux espaces topologiques et $f : X_1 \longrightarrow X_2$. Si f est continue. Alors $f : (X_1, B(\Theta)) \longrightarrow (X_2, B(\Theta_2))$ est mesurable.*

Définition 1.3.8. *Soit (X, Σ) un espace mesurable, alors l'application $\mu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une mesure sur X si*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $\mu(\cup A_n) = \Sigma\mu(A_n)$, *pour toute suite dénombrable d'éléments de Σ deux à deux disjoints.*

Le triplet (X, Σ, μ) est appelé espace mesuré.
Si $\mu(A) \geqslant 0$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une mesure positive et on note $\mu \geqslant 0$, ou l'espace (X, Σ, μ) est positive.
Si $\mu(A) < \infty$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une mesure finie ou que l'espace (X, Σ, μ) est fini.
Si X est un espace topologique, la mesure $\mu : B(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est appelé mesure Borélienne.

Définition 1.3.9. *Soit* (X, Σ, μ) *un espace mesuré avec* $\mu \geqslant 0$. *Soit* A *un sous ensemble de* X, *on dit que* A *est* μ*-négligeable ou négligeable.*
Si $\exists\, B \in \Sigma$, $A \subset B$ *et* $\mu(B) = 0$.
On dit qu'une propriété sur X *est vraie* μ*-presque partout* (μ*.p.p.*), *si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est* μ*-négligeable .*

Définition 1.3.10. *(Tribu de Lebesgue)*
La tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ *notée* $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ *est la tribu complétée de la tribu borélienne* $B(\mathbb{R})$ *pour la mesure de Lebesgue.*

Définition 1.3.11. *(Fonction simple)*
Soient (X, Σ) *un espace mesurable,* $A \subset E$, E *un espace de Banach et* $f : X \longrightarrow E$. *On dit que* f *est une fonction simple si elle de la forme.*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{A_i}(x) x_i,$$

où les $A_i = f^{-1}(x_i), i = 1, ..n$, *sont des éléments deux à deux disjoints de* $\sum$ *et les* $x_i, i = 1, ..n$, *sont des élément distincts de* E
Cette formule est appelée la représentation canonique de f.

Proposition 1.3.12. *Soient* (X, Σ) *un espace mesurable et* $\{f_n\}_{n \geq 1}$ *une suite de fonctions mesurables définies sur* X *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *si* $\{f_n\}_{n \geq 1}$ *converge simplement vers* f *alors* f *est mesurable.*

Théorème 1.3.13. *Soit* (X, Σ, μ) *un espace mesuré fini et* E *un espace de Banach séparable, si* $f : X \longrightarrow E$ *est mesurable. Alors il existe une suite* $\{f_n\}_{n \geq 1}$ *de fonctions simples telle que* $f_n \longrightarrow f \mu$*-p.p. et pour* μ*-presque tout* $x \in E$

$$||f_n(x)|| \leqslant ||f(x)||, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 1.3.14. ***(Théorème de Lebesgue)*** *Soient* $(X, \mathit{\Sigma}, \mu)$ *un espace mesuré et* E *un espace de Banach, soit* (f_n) *une suite de fonctions mesurables définies sur* X *à valeurs dans* E, *si la suite* (f_n) *vérifie*

(i) $f_n \rightarrow f$ μ*.p.p. sur* X,

(ii) il existe une fonction positive $g \in L^1(X, \mathbb{R})$ *telle que, pour tout* $n \in N$,

$$\|f_n(t)\| \leq g(t), \forall t \in X \ \mu - p.p$$

Alors $f_n \to f$ *dans* $L^1(\Omega, X)$,

$$\int_{\Omega} f_n d\mu \to \int f d\mu.$$

Définition 1.3.15. *Soit* φ *une fonction à valeurs réelles, définie sur* $V_s \times (E \setminus A)$, *où* V_s *est un voisinage d'un point* $s \in \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^k$ *et* $A \subset E$ *un sous ensemble* μ*-négligeable. Si pour chaque* $t \in V_s$, *la fonction* $x \longmapsto \varphi(t, x)$ *est* μ*-intégrable sur* E *et si de plus, sur* $V_s \times (E \setminus A)$, *la fonction* φ *admet une dérivée partielle par rapport à* t *vérifiant l'inégalité*

$$|\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x)| \leqslant g(x)$$

où g *est* μ*-intégrable et indépendante de* t, *alors la fonction*

$$t \longmapsto \int \varphi(t, x) d\mu(x)$$

est dérivable au point s *et l'on a*

$$\frac{d}{dt} \int \varphi(s, x) d\mu(x) = \int \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, x) d\mu(x).$$

1.4 Fonction hyperbolique

Définition 1.4.1. • *On appelle cosinus hyperbolique de* x, *qu' on note* $cosh(x)$ *la quantité*

$$\begin{aligned} cosh : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

• *On appelle sinus hyperbolique de* x, *qu' on note* $sinh(x)$ *la quantité*

$$\begin{aligned} sinh : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Propriétés 1.4.2. *La fonction* $cosh(x)$ *est :*

1. *continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *dérivable, et sa dérivée est* $sinh(x)$, *donc* $(cosh(x))' = sinh(x)$.
3. *fonction paire.*

4. $cosh(0) = 1$.

La fonction $sinh(x)$ est :

1. *continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *dérivable, et sa dérivée est $cosh(x)$, donc $(sinh(x))' = cosh(x)$.*
3. *fonction impaire.*
4. *$sinh(0) = 0$.*

1.5 La distance de Hausdorff

Pour définir la continuité au sens de Hausdorff, on a besoin d'introduire la notion de l'écart et la distance de Hausdorff. Pour cela, considérons un espace métrique (X, d). Soit (X, d) un espace métrique, supposons $d(x, y) < \infty$, $\forall x, y \in X$.

Définition 1.5.1. *Soient A, B deux parties de X, on définit l'écart de A sur B, et on note $e(A, B)$, comme suit :*

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A}(\inf_{y \in B} d(x, y)),$$

avec la convention :

$$\sup \emptyset = 0,$$

et

$$\inf \emptyset = +\infty.$$

Définition 1.5.2. *La distance de Hausdorff entre deux parties A et B d'un espace métrique (X, d) est définie par :*

$$\mathcal{H}(A, B) = max(e(A, B), e(B, A)).$$

Proposition 1.5.3. *Soient A, B et C des sous ensembles non vides de X, on a :*

1. *$e(A, \emptyset) = \infty$, si $A \neq \emptyset$,*
2. *$e(\emptyset, B) = 0$,*
3. *$e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$,*
4. *$e(A, B) \leq e(A, C) + e(C, B)$,*

5. $\mathcal{H}(A,B)=0 \Leftrightarrow \overline{A}=\overline{B}$,

6. $\mathcal{H}(A,A)=0$,

7. $\mathcal{H}(A,B)=\mathcal{H}(B,A)$,

8. $\mathcal{H}(A,B)\leq \mathcal{H}(A,C)+\mathcal{H}(C,B)$,

9. $|d(x,A)-d(x,B)|\leq \mathcal{H}(A,B)$, $\forall x\in X$.

Il est clair que $\mathcal{H}$ définie une métrique sur l'ensemble des parties fermées bornées non vides de X.

Proposition 1.5.4. *Si (X,d) est un espace métrique complet, alors $(\mathcal{P}_{cl}(X),\mathcal{H})$ est un espace métrique complet.*

1.6 Multi-application

Définition 1.6.1. *[5]*
Soient Xet Y deux ensembles non vides. On appelle multi-application ou bien fonction multivoque tout application F définie par $F:X\longrightarrow 2^Y$ où $F:X\rightrightarrows Y$.

Définition 1.6.2. *Soit $F:X\longrightarrow 2^Y$ une multi-application. On définit*

- *Le domaine sur X par l'ensemble :*

$$Dom(F)=\Big\{x\in X:\ F(x)\neq\emptyset\Big\}.$$

- *L'image de F qu'on note $Im(F)$, l'ensemble*

$$Im(F)=\bigcup_{x\in X}F(x).$$

- *Si $A\subset X$, on appelle image de A qu'on note $F(A)$, l'ensemble défini par*

$$F(A)=\bigcup_{x\in A}F(x)=\Big\{y\in Y,\exists\, x\in A,\ y\in F(x)\Big\}.$$

- *On appelle graphe de la multi-application F l'ensemble définie par :*

$$gph(F)=\Big\{(x,y)\in X\times Y:\ y\in F(x)\Big\}$$

- *La multi-application inverse $F^{-1}:Y\longrightarrow 2^X$ définie par :*

$$x\in F^{-1}(y)\Leftrightarrow y\in F(x).$$

ou

$$(y,x) \in gph(F)^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in gph(F)$$

Ainsi $\quad dom(F^{-1}) = Im(F) \quad$ *et* $Im(F^{-1}) = dom(F)$.

Exemple 1.6.3. *Considérons la multi-application*

$$\begin{aligned} F : [0,1] &\longrightarrow 2^{\mathbb{R}} \\ x &\longmapsto F(x) =]x,1[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dom(F) &= \{x \in [0,1], F(x) \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in [0,1],]x,1[\neq \emptyset\} \\ &= [0,1[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Im(F) &= \bigcup_{x\in[0,1]} F(x) \\ &= \bigcup_{x\in[0,1]}]x,1[\\ &=]0,1[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} gph(F) &= \{(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}\, y \in F(x)\} \\ &= \{(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R} :\ y \in]x,1[\} \\ &= \{(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R} :\ x < y < 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^{-1} :]0,1[&\longrightarrow [0,1[\\ y &\longmapsto F^{-1}(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in F^{-1}(y) &\Longleftrightarrow y \in F(x) \\ &\Longleftrightarrow y \in]x,1[\\ &\Longleftrightarrow x < y < 1 \\ &\Longleftrightarrow 0 \leq x < y \end{aligned}$$

Alors

$$F^{-1}(y) =]0,y[$$

d'où

$$\begin{aligned} F^{-1} :]0,1[&\longrightarrow [0,1[\\ y &\longmapsto F^{-1}(y) = [0,y[\end{aligned}$$

Définition 1.6.4. *Soit $F : X \longrightarrow 2^Y$ une multi-application et B un sous ensemble de Y. L'image réciproque de B par F notée $F^{-1}(B)$ est définie*

$$F^{-1}(B) = \{x \in X : F(x) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Exemple 1.6.5. *Soit la multi-application*

$$\begin{aligned} F :\mathbb{R} &\longrightarrow 2^{\mathbb{R}} \\ x &\longmapsto F(x) = [x^2, x^2+1] \end{aligned}$$

On a

$$F(\{0,1\}) = \bigcup_{x\in\{0,1\}} F(x) = [0,2], \qquad F(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+ = F(\mathbb{R}_-) = F(\mathbb{R})$$

$$F^{-1}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}, \qquad F^{-1}(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+, \qquad F^{-1}(\mathbb{R}_-^*) = \mathbb{R}_+^*.$$

1.6.1 Quelques opérations sur les multi-applications

Proposition 1.6.6. *Soient F et G deux multi-applications définies par $F : I \longrightarrow 2^E$ et $G : I \longrightarrow 2^E$, alors*

$$\begin{aligned} F \cap G : I &\longrightarrow 2^E \\ t &\longmapsto (F\cap G)(t) = F(t) \cap G(t) \end{aligned}$$

et $G(t) = \overline{F(t)}$ sont des multi-applications.

Exemple 1.6.7. *Soient $F, G : \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$ telle que :*

$$F(x) = [x-1, x+1]$$

et

$$G(x) = [x, x+2].$$

On a

$$\begin{aligned} (F\cap G)(x) &= [x-1,x+1] \cap [x,x+2] \\ &= [x, x+1] \end{aligned}$$

Définition 1.6.8. *Soit $F : X \to P(Y)$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : X \to Y$ vérifiant :*

$$f(x) \in F(x), \ \forall x \in dom(F)$$

Exemple 1.6.9. *Considérons les multi-applications :*

1.

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^* &\longrightarrow 2^{\mathbb{R}} \\ x &\longmapsto F(x) = \{\frac{1}{x}, x\} \end{aligned}$$

on prend

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ f(x) \in F(x)$$

alors f est une sélection de F.

2.

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R} &\longrightarrow 2^{\mathbb{R}} \\ x &\longmapsto G(x) = [-1, 1] \end{aligned}$$

on prend

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \sin(x) \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) \in G(x)$$

alors g est une sélection de G.

1.6.2 Continuité des multi-applications

Définition 1.6.10. *[3] Soient X, Y deux espaces métriques, et $F : X \longrightarrow 2^Y$ une multi-application.*

1. *On dit que F est semi-continue supérieurement au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U tel que $F(x_0) \subset U$, il existe un voisinage Ω de x_0 tel que $F(x) \subset U$, $\forall x \in \Omega$. Autrement dit $F_+^{-1}(U)$ est un voisinage de x_0, tel que $F_+^{-1}(U) = \{x \in X : F(x) \subseteq U\}$.*
   • *On dit que F est semi-continue supérieurement sur X si elle l'est en tout point $x_0 \in X$.*
2. *On dit que F est semi-continue inférieurement au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de X vérifiant $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage Ω de x_0 tel que $F(x) \cap U \neq \emptyset$, $\forall x \in \Omega$. Autrement dit $F^{-1}(U)$ est un voisinage de $x_0 \in X$.*
   • *On dit que F est semi-continue inférieurement sur X si elle l'est en tout point $x_0 \in X$.*
3. *On dit que F est continue au point x_0 si elle est semi-continue supérieurement et semi-continue inférieurement au point x_0, et on dit qu'elle est continue sur X si elle l'est en tout point $x_0 \in X$.*

1.6.3 Semi continuité au sens de Hausdorff

Définition 1.6.11. *On dit que F est :*
• *$\mathcal{H}$-Semi-continue inférieurement ($\mathcal{H}$-s.c.i) en $x_0 \in dom(F)$ si* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} e(F(x_0), F(x)) = 0$.
• *$\mathcal{H}$-Semi-continue supérieurement ($\mathcal{H}$-s.c.s) en $x_0 \in dom(F)$ si* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} e(F(x), F(x_0)) = 0$.
• *Continue au sens de $\mathcal{H}$ en $x_0 \in dom(F)$ si*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} e(F(x), F(x_0)) = 0 \text{ et } \lim_{x \longrightarrow x_0} e(F(x_0), F(x)) = 0.$$

Autrement dit, si elle est $\mathcal{H}$-s.c.i et $\mathcal{H}$-s.c.s en x_0.

Donnons quelques exemples :

Exemple 1.6.12. *Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$ définie par :*

$$F(x) = \begin{cases} \{\frac{x}{|x|}\} & si\ x \neq 0 \\ [-1, 1] & si\ x = 0 \end{cases}$$

Cette multifonction est $\mathcal{H}$-s.c.i (resp $\mathcal{H}$-s.c.s)en tout $x_0 \neq 0$.

En effet ; si $x_0 > 0$ alors pour tout x voisinage de x_0

On a $F(x) = F(x_0) = 1$.

D'où

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} e(F(x_0), F(x)) = \lim_{x \longrightarrow x_0} e(F(x), F(x_0)) = 0.$$

De même, si $x_0 < 0$, on a $F(x) = F(x_0) = -1$,

pour x tend vers de x_0.

Donc Fest continue au sens de Hausdorff en $x_0 \neq 0$. Ici F est $\mathcal{H}$-s.c.s en 0 mais elle n'est pas $\mathcal{H}$-s.c.i.

En effet : comme $F(x) \subset F(0)$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} e(F(x), F(x_0)) = 0$.

Mais pour $x_0 = 0 \in F(0), d(0, F(x)) = 1$, pour tout $x \neq 1$ donc $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} e(F(0), F(x)) = 1$.

1.6.4 Mésurabilité des multi-applications

Pour plus de détails sur la mesurabilité des multi-applications on peut se référer à **[7]** et **[13]**

Définition 1.6.13. *Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique et $F : \Omega \to P(X)$. On dit que F est Σ-mesurable, si pour tout ouvert V de X,*

$$F^{-1}(V) = \{t \in \Omega : \ F(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Exemple 1.6.14. *On a la multi-application*

$$\begin{aligned} F : X &\longrightarrow 2^X \\ t &\longmapsto F(t) = \{a\} \end{aligned}$$

est mesurable. En effet ; soit V un ouvert de X, alors

$$\begin{aligned} F^{-1}(V) &= \{t \in X, F(t) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in X, a \in V\} \\ &= \begin{cases} X, & a \in V \\ \emptyset, & a \notin V \end{cases} \end{aligned}$$

$X, \emptyset$ sont mesurables, donc F est mesurable.

Proposition 1.6.15. *Soient F et G deux espaces mesurables et définie par $F : I \longrightarrow 2^E$ et $G : I \longrightarrow 2^E$. Alors*

1. *$(F \cap G)(t) = F(t) \cap G(t)$ est mesurable.*

2. $G(t) = \overline{F(t)}$ *est mesurable.*

Démonstration. Soit V un ouvert de X.

1. On pose $Z(t) = (F \cap G)(t)$

$$\begin{aligned} Z^{-1}(V) &= \{t \in I, Z(t) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in I, (F \cap G)(t) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in I, (F(t) \cap V \neq \emptyset\} \cap \{t \in I, G(t) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= F^{-1}(V) \cap G^{-1}(V). \end{aligned}$$

   Alors $Z(t)$ est mesurable.

   Donc $F \cap G$ est mesurable.

2.

$$\begin{aligned} G^{-1}(V) &= \{t \in I, G(t) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in I, \overline{F(t)} \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in I, F(t) \cap V \neq \emptyset\} \quad (\text{car} F(t) \subset \overline{F(t)}) \\ &= F^{-1}(V) \in \Sigma. \end{aligned}$$

   donc G est mesurable

■

Théorème 1.6.16. *Soit* (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré avec* $\mu \geq 0, \sigma$*-finie et* $\Sigma\mu$*-complète. Soient* X *un espace métrique complet,* $F : \Omega \to P(X)$ *une multi-application à valeurs non vides fermées, alors les assertion suivantes sont équivalentes :*

1. F *est* Σ*-mesurable.*
2. $gph(F) \in \Sigma \otimes B(X)$.
3. $F^{-1}(B) \in \Sigma$*, pour tout borélien* B *de* X.
4. $F^{-1}(C) \in \Sigma$ *pour tout fermé* C *de* X.

Théorème 1.6.17. ***(Théorème d'existence de sélections mesurables)***.
Soient (Ω, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace métrique complet séparable et* $F : \Omega \to P(X)$ *une multi-application* Σ*-mesurable à valeurs fermées. Alors* F *admet au moins une sélection mesurable.*

Théorème 1.6.18. *Soit* (Ω, Σ, μ) *un espace mesurable. E un espace métrique séparable et soit* $F : \Omega \to P(X)$*. Alors F est mesurable si et seulement si* $\forall x \in E$*, la fonction :*

$$g_x : X \longrightarrow R$$
$$t \longmapsto g_x(t) = d(x, F(t))$$

est mesurable

Théorème 1.6.19. ***(Représentation de Castaing)*** *Soient* (I, Σ)*un espace mesurable,* (X, d) *un espace métrique séparable complet et* $F : I \to 2^X$ *une multi-application à valeurs fermées. Alors, F est mesurable si et seulement si* $dom(F) \in \Sigma$ *et il existe une suite* $(f_n)_n$ *d'applications mesurables telles que pour chaque* $t \in dom(F)$ *on a* $F(t) = \overline{\bigcup \{f_n(t)\}}_n$*.*
On dit que $(f_n)_n$ *est une représentation de Castaing de F*

Démonstration. Comme $dom(F) = F^{-1}(X)$, on peut supposer, sans perdre de généralité, que $dom(F) = I$.
$\Rightarrow$ /
On a

$$F(t) = \overline{\bigcup_n f_n(t)} = \overline{\bigcup_n \{f_n(t)\}}$$

On pose

$$G(t) = \bigcup_n f_n(t)$$

Σ-mesurable puisque f_n est Σ-mesurable alors G Σ-mesurable
d'où $G^{-1}(V) = \bigcup_n f_n^{-1}(V) \in \Sigma$.
D'où $\overline{G} = F$ est Σ mesurable.
$\Leftarrow$ /
Soit $(x_k)_k$ une suite fixée, dense dans X (le choix d'une telle suite est possible grâce à la séparabilité de X). Considérons pour chaque $(k, j) \in \mathbb{N}^2$ la multi-application

$$G_{k,j} : I \longrightarrow 2^X$$
$$t \longmapsto G_{k,j}(t) = \begin{cases} F(t) \cap B(x_k, \frac{1}{2^j}), & si\ t \in F^{-1}(B(x_k, \frac{1}{2^j})) \\ F(t), & sinon \end{cases}$$

et la multi-application $F_{k,j} : I \longrightarrow 2^X$ définie par $F_{k,j}(t) = \overline{G_{k,j}(t)}$. La multi-application $F_{k,j}$ est à valeurs fermées non vides et elle est Σ-mesurable, du fait que $G_{k,j}$ est Σ-mesurable.

En effet, pour tout ouvert V de X

$$\begin{aligned}
G_{k,j}^{-1}(V) &= \{t \in I : G_{k,j}(t) \cap V \neq \emptyset\} \\
&= \{t \in F^{-1}(B(x_k, \frac{1}{2^j}))/F(t) \cap B(x_k, \frac{1}{2^j}) \cap V \neq \emptyset\} \cup \{t \in I \backslash F^{-1}(B(x_k, \frac{1}{2^j}))/F(t) \cap V \neq \emptyset\} \\
&= [F^{-1}(B(x_k, \frac{1}{2^j})) \cap F^{-1}(B(x_k, \frac{1}{2^j})) \cap V] \cup [(I \backslash F^{-1}(B(x_k, \frac{1}{2^j}))) \cap F^{-1}(V)] \in \Sigma
\end{aligned}$$

puisque F est Σ-mesurable. Par conséquent $F_{k,j}$ est Σ-mesurable.
$F_{k,j}$ est Σ-mesurable à valeurs fermées, d'après le théorème 1.6.17 , elle admet une sélection mesurable qu'on note $f_{k,j}$.
Montrons que $F(t) = \overline{\bigcup_{(k,j)\in\mathbb{N}^2} f_{k,j}(t)}$.
Nous avons,

$$f_{k,j}(t) \in F_{k,j}(t), \forall t \in I.$$

Alors

$$\overline{\bigcup_{(k,j)} f_{k,j}(t)} \subset \overline{\bigcup_{(k,j)} F_{k,j}(t)} \subset F(t).$$

Montrons la deuxième inclusion, i.e., $F(t) \subset \overline{\bigcup_{(k,j)} F_{k,j}(t)} \subset f(t)$.
Fixons $t \in I, x \in F(t)$ et $\varepsilon > 0$. Choisissons un entier j tel que $\frac{1}{2^j} < \frac{\varepsilon}{2}$, et choisissons un entier k tel que $d(x_k, x) < \frac{1}{2^j}$.
Nous aurons,

$$x \in B(x_k, \frac{1}{2^j}) \cap F(t)$$

i.e.,

$$t \in F^{-1}(B(x_k, \frac{1}{2^j})),$$

et donc

$$f_{k,j} \in \overline{B}(x_k, \frac{1}{2^j})$$

ce qui implique

$$d(x, f_{k,j}(t)) \leq d(x, x_k) + d(x_k, f_{k,j}(t)) < \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^j} = \frac{2}{2^j} < \varepsilon,$$

donc

$$x \in \overline{\bigcup_{(k,j)} f_{(k,j)}(t)} \Longrightarrow F(t) \subset \overline{\bigcup_{(k,j)} f_{k,j}(t)},$$

d'où

$$F(t) = \bigcup \overline{\{f_n(t)\}}_n.$$

■

Théorème 1.6.20. *Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré avec Σ μ-complète et μ σ-finie. Soit E un espace de Banach séparable et soient $f : X \longrightarrow E$ une application mesurable et $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Alors*

1. *$x \mapsto \overline{B}_E(f(x), \rho(x))$ est une multi-application mesurable.*
2. *Soit $\Gamma : X \longrightarrow 2^E$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Si Γ est mesurable, alors la multi-application $\psi : X \longrightarrow 2^E$ définie par*

$$\psi = \{x \in \Gamma(t) : ||f(t) - x|| = d(f(t), \Gamma(t)\}$$

est mesurable.

Démonstration. 1. Soit $(x_n)_n$ une suite dense dans $\overline{B}(0, 1)$, (le choit x est possible grâce à la séparabilité de E). On pose

$$\sigma_n(t) = f(t) + \rho(t)x_n, \; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

$\sigma_n(.)$ est mesurable car f, ρ sont σ-mesurable. D'autre part

$$\begin{aligned}\overline{B}_E(f(t), \rho(t)) &= f(t) + \rho(t)\overline{B}_E(0, 1)\\ &= f(t) + \rho(t)\{\overline{x_n}\}_n\\ &= \{\overline{f(t) + \rho(t)x_n}\}_n\\ &= \{\overline{\sigma_{n(t)}}\}\end{aligned}$$

D'après le théorème 1.6.19. L'application $t \longmapsto \overline{B}(f(t), \rho(t))$ est mesurable.

2. On pose

$$G(t) = \{x \in \Gamma(t) : ||f(t) - x|| = d(f(t), \Gamma(t)\}$$

Pour montrer que $G(t)$ est mesurable, il suffit de montrer que son graphe est mesurable.

$$\begin{aligned}gph(t) &= \{(t, x) \in X \times E;\; x \in G(t)\}\\ &= \{(t, x) \in X \times E; x \in \Gamma(t), \mathrm{et}||f(t) - x|| = d(f(t), \Gamma(t))\}\\ &= \{(t, x) \in X \times E; x \in \Gamma(t)\} \cap \{(t, x) \in X \times E, ||f - x|| \leq d(f(t), \Gamma(t))\}\\ &= gph(\Gamma) \cap gph(\overline{B}(f(.), \eta(.))).\end{aligned}$$

avec $\eta(t) = d(f(t), \Gamma(t))$

La multi-application Γ étant mesurable alors son graphe est mesurable.

D'autre part, par le théorème 1.6.18 on a la mesurabilité de $t \mapsto d(f(t), \Gamma(t))$, donc $\eta(t)$ est mesurable et d'après la partie 1 $t \mapsto \overline{B}_E(f(t), \eta(.))$est mesurable.
D'ou le $gph(\overline{B}(f(.), \eta(.)))$ est mesurable.
Donc le $gph(G)$ est mesurable.
Alors G est mesurable.

■

Théorème 1.6.21. *[7] Soit (I, Σ) un espace mesurable, E un espace de Banach séparable. Soit $F : I \times E \longrightarrow 2^E$, une multi-application à valeurs fermées, et soit $x : I \longrightarrow E$ une application Σ-mesurable. Alors la multi-application $F(., u(.), u'(.))$ est Σ-mesurable sur I.*

Intégrale d'Aumann

Définition 1.6.22. *[4] Une multi-application $F : I \to P(X)$ est dite Aumann intégrable si l'ensemble S_F des sélections intégrable de F est non vide. Dans ce cas*

$$\int_I F(t)dt = \left\{ \int_I f(t)dt / f \in S_F \right\}$$

tel que

$$S_F = \{f : I \to E, f \in F(t)\}.$$

Propriétés 1.6.23. *Soient X un espace de Banach, $F, G : I \to P(X)$ sont intégrable, alors*

1. $|| \int_I F(t)dt|| \leq \int_I ||F(t)||dt.$
2. $\int_I (F(t) + G(t))dt = \int_I F(t)dt + \int_I G(t)dt.$

1.6.5 Théorème de point fixe

Définition 1.6.24. *Soit $F : X \longrightarrow 2^X$, une multi-application òu (X, d) espace métrique. On dit que F est une contraction s'il existe $k \in [0.1[$ tel que*

$$\mathcal{H}(F(x), F(y) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

Définition 1.6.25. *Soit $F : X \longrightarrow 2^X$, une multi-application, on appelle point fixe de F tout point fixe $x \in X$, tel que :*

$$x \in F(x).$$

1.6.6 Théorème de Covitz et Nadler

Théorème 1.6.26. *[8] Soit $F : X \longrightarrow 2^X$ une multi-application contractante à valeurs fermées avec constante de contraction k. Alors, F admet un point fixe.*

Démonstration. On a F est k-contraction donc

$$\mathcal{H}(F(x), F(y)) \leq kd(x, y), \forall x, y \in X.$$

On choisit $k_1 \in]k, 1[$ et $x_0 \in X$, donc il existe $x_1 \in F(x_0)$ telle que $d(x_0, x_1) > 0$ (si $d(x_0, x_1) = 0$ alors $x_1 = x_0$, d'ou $x_0 \in F(x_0)$, donc x_0 est un point fixe).
On a :

$$\begin{aligned} d(x_1, F(x_1)) &\leq \mathcal{H}(F(x_0), F(x_1)) \\ &\leq kd(x_0, x_1) \end{aligned}$$

alors, il existe $x_2 \in F(x_1)$ telle que

$$d(x_1, x_2) < kd(x_0, x_1),$$

pour $x_0, x_1, x_2 \in X$, $d(x_0, x_1) < \infty$ et $d(x_1, x_2) < \infty$.
Il existe $x_3 \in F(x_2)$ telle que

$$\begin{aligned} d(x_2, x_3) &\leq kd(x_1, x_2), \\ &\leq k^2 d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

il existe $x_4 \in F(x_3)$ telle que

$$\begin{aligned} d(x_3, x_4) &\leq kd(x_2, x_3), \\ &\leq k^3 d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Par récurrence on obtient une suite x_n telle que $x_{n+1} \in F(x_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$d(x_n, x_{n+1}) < k^n d(x_0, x_1).$$

D'ou $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy.
Donc il existe $x \in X, x_n \longrightarrow x$ telle que

$$d(x_n, F(x)) \leq \mathcal{H}(F(x_n), F(x))$$

$$< kd(x_n, x).$$

Alors

$$d(x_n, F(x)) = 0$$

c-à-d

$$x_n \in \overline{F(x)} = F(x)$$

et comme F est fermé, alors

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = x \in F(x).$$

On conclue que F admet un point fixe x. ■

Lemme 1.6.27. *Soit $F : I \times E \longrightarrow 2^E$ une multi-application à valeurs fermées non-vides satisfaisant :*

(i) pour tout $x \in E$, $F(., x)$ est mesurable sur I.

(ii) pour tout $t \in I$, $F(t, .)$ est continue au sens de Hausdorff sur E.

Alors pour toute fonction mesurable $x(.) : I \longrightarrow E$. La multi-application $F(., x(.))$ est mesurable sur I

Démonstration. On choisissez une suite d' application simple. $x_n : I \to E$, telle que : $x_n(t)$ converge vers $x(t)$ presque par tout sur I.
D'après (i) on a $F(., x_n(.))$ est mesurable.
D'après (ii) on a $\lim_{n \to +\infty} F(t, x_n(t)) = F(t, x(t))$ presque par tout sur I
évidement, $F(., x(.))$ est fermé. puisque $F(., x_n(.))$ sont mesurables nous pouvons choisir une suite de sélections mesurables $\{f_{ni}(.)\}_{i \leq 1}$ de $F(., x_n(.))$ tel que : $F(t, x_n(t)) \subset \{\overline{f_{ni}(t), i \geq 1}\}$ cela implique que :
$F(t, x(t)) \subset \{\overline{f_{ni}(t), i \geq 1}\}$.
Donc $F(t, x(t))$ est une multi-application à valeur fermées séparables.

$$X_0 = \overline{\bigcup \{f_{ni}(t), n, i \geqslant 1\}}$$

De plus, pour tout ensemble ouvert $U \subset X$.
On pose $G(t) = F(t, x(t))$

$$\begin{aligned} G^{-1} &= \{t \in I, G(t) \cap U \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in I, F(t, x(t)) \cap U \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

d'aprés la preuve du théorème de représentation de Castaing 1.6.19

$F(t, x(t))$ est mesurable sur I. ■

Chapitre 2

Étude d'existence de solution pour une inclusion différentielle du second ordre avec des conditions aux limites de Neumann

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à étudier d'une inclusion différentielle du second ordre avec des conditions aux limites de la forme :

$$\begin{cases} x''(t) \in F(t, x(t), x'(t)), & p.p.\ t \in [0,1] \\ x'(0) = 0,\ x'(1) = 0 \end{cases}$$

Où E est un espace de Banach séparable, $F : [0,1] \times E \times E \longrightarrow 2^E$ une multi-application à valeurs non vides Hausdorff Lipschitz. On va commencer par un lemme préliminaire où on démontre quelques propriétés de la fonction de Green, on aura besoin dans la démonstration de résultat d'existence de solutions. Cette fonction a été utilisée par plusieurs auteurs pour l'étude des équations et inclusions différentielles de second ordre, nous citons Hartman [12] a fait une étude originale des problèmes à deux conditions aux limites, pour une équation différentielle ordinaire. Dans [1], [11] les auteurs ont généralisé cette étude pour les problèmes avec des conditions aux limites en deux points, pour le même type

d'équations.
On considère $C^1(I,E)$ l'espace de Banach des applications continues différentiables muni de la norme

$$||u(.)||_{C^1} = max\{||u(.)||_C, ||u'(.)||_C\}$$

2.2 Fonction de Green

Lemme 2.2.1. *Soient E un espace de Banach séparable, et $G : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction définie par :*

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{\cosh(1-s)\cosh(t)}{sinh(1)}, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 \\ \frac{\cosh(1-t) cosh(s)}{\sinh(1)}, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

alors on a les résultats suivants :

1. *Si $u \in C^2(I,E)$ avec $u'(0) = u'(1) = 0$, alors*
$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)u''(s)ds, \quad sur\ [0,1] \tag{2.2}$$
2. *$G(.,s)$ est dérivable sur $[0,1]$ pour tout $s \in [0,1]$, est sa dérivée est donnée par*
$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} \frac{\cosh(1-s)\sinh(t)}{sinh(1)}, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 \\ \frac{\sinh(t-1) cosh(s)}{\sinh(1)}, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \tag{2.3}$$
3. *$G(.,.)$ et $\dfrac{\partial G}{\partial t}(.,.)$ vérifient*
$$\sup_{t,s\in[0,1]} |G(t,s)| \leq \lambda$$
et
$$\sup_{t,s\in[0,1]} \Big|\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Big| \leq 1$$
4. *Soit $f \in L^1([0,1],E)$ et $u_f : [0,1] \longrightarrow E$ l'application définie par :*
$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds,$$
alors
$$u_f'(0) = u_f'(1) = 0.$$

De plus, la fonction u_f est dérivable et sa dérivée u'_f vérifie :

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{u_f(t+h)-u_f(t)}{h}=u'_f(t), \tag{2.4}$$

pour tout $t\in[0,1]$.

Par conséquent, u'_f est continue sur $[0,1]$ à valeurs dans E.

Démonstration. 1. **[15]** pour tout $s,t\in[0,1]$

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)u''(s)ds$$

2. pour tout $s\in[0,1]$ et pour tout $h>0$, assez petit avec $t<t+h$ nous avons

$$\frac{G(t+h,s)-G(t,s)}{h}=\begin{cases}\frac{cosh(1-s)}{sinh(1)}[\frac{cosh(t+h)-cosh(t)}{h}], & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1\\ \frac{cosh(s)}{sinh(1)}[\frac{cosh(1-(t+h))-cosh(1-t)}{h}], & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1\end{cases} \tag{2.5}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{G(t+h,s)-G(t,s)}{h}&=\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\\&=\begin{cases}\frac{\cosh(1-s)\sinh(t)}{sinh(1)}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1\\ \frac{\sinh(t-1)cosh(s)}{\sinh(1)}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1\end{cases}\end{aligned}$$

donc $G(.,.)$ est dérivable sur $[0,1]$, et sa valeur est donnée par (2.3) D'après la fonction de G nous avons

On a $0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1$, d'après les propriétés 1.4.2.

Comme $cosh$ et $sinh$ sont des fonction croissantes sur $[0,1]$. Alors,

$$|G(t,s)|=|\frac{\cosh(1-s)\sinh(t)}{sinh(1)}|\leq\lambda$$

et pour $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$

$$|G(t,s)|=|\frac{\cosh(1-s)\sinh(t)}{sinh(1)}|\leq\lambda.$$

Où

$$\lambda=\frac{cosh^2(1)}{sinh(1)},$$

on conclut que

$$\sup_{t,s\in[0,1]}|G(t,s)|\leq\lambda.$$

D'après la définition de la dérivée de $G(t,.)$, il est vérifiée que : $\sup_{t,s\in[0,1]} |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)|$, on a

$$|\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)| = \begin{cases} |\frac{\cosh(1-s)\sinh(t)}{sinh(1)}|, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 \\ |\frac{\sinh(t-1)cosh(s)}{\sinh(1)}|, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

pour $\quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$

$$|\frac{cosh(1-s)sinh(s)}{sinh(1)}| \leq |\frac{\cosh(1-t)\sinh(t)}{sinh(1)}| \leq 1$$

pour $\quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$

$$|\frac{\cosh(1-s)\sinh(s)}{sinh(1)}| \leq |\frac{\cosh(1-t)\sinh(t)}{sinh(1)}| \leq 1$$

Donc

$$\sup_{t,s\in[0,1]} |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)| \leq 1$$

3. Soit $f \in L^1([0,1], E)$ et soit l'application $u_f : [0,1] \to E$ définie par

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \quad \forall t \in [a,b]$$

$$\sup_{t,s\in[0,1]} |G(t,s)| \leq \lambda$$

le théorème 1.3.15 de la convergence dominé nous assure la continuité de u_f sur $[0,1]$. On veut démontrer maintenant que u_f est dérivable. En effet,

a) la fonction $G(t,.)f(.)$ est Lebesgue-intégrable pour tout $t \in [0,1]$.

b) d'après 2), la fonction $G(t,.)$ est dérivable pour tout $t \in [0,1]$, fixé, et donc la fonction $G(t,.)f(.)$ l'est aussi.

c) $||\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)|| \leq ||f(s)||$, pour tout $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$.

En effet, on a

$$\begin{aligned} ||\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)|| &= ||\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)||||f(s)|| \\ &\leqslant 1.||f(s)|| \\ &\leqslant ||f(s)||. \end{aligned}$$

D'aprés les propriétés a), b) et c) nous permettant de conclure, par le théorème 1.3.14, que u_f est dérivable et que sa dérivée u_f' est donnée par

$$u_f'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_0^1 G(t,s)f(s)ds\Big) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds, \forall\, t \in [0,1].$$

D'oú

$$u'_f(0) = 0$$

et

$$u'_f(1) = 0$$

■

Proposition 2.2.2. *[1] Soient E un espace de Banach séparable et $f : [0,1] \longrightarrow E$ une application continue. Alors la fonction*

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \ \forall\, t \in [0,1] \tag{2.6}$$

est la solution dans $C^2([0,1],E)$ du problème

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) = 0, & \forall\, t \in [0,1] \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

2.3 Résultat d'existence

Théorème 2.3.1. *Soient E est un espace be Banach séparable et $F : [0,1]\times E\times E \longrightarrow 2^E$. est une application à valeurs fermées non vides vérifie les propriétés suivante :*

1. *Pour tout $(x,y) \in E \times E, t \longrightarrow F(t,x,y)$ est mesurable et intégrablement bornée.*
2. *Il existe une fonction $m(.) \in L^1([0,1],\mathbb{R}^+)$ tel que pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $x_1, x_2, y \in E$.*

$$\mathcal{H}(F(t,x_1,y), F(t,x_2,y)) \leq m(t) \parallel x_1 - x_2 \parallel .$$

Alors, si $\int_0^1 (1+m(s))ds < \frac{1}{\lambda}$, pour tout $r, s \in E$, le problème

$$\begin{cases} x''(t) \in F(t,x(t),x'(t)), & p.p.\ sur\ [0,1] \\ x'(0) = r, x'(1) = s \end{cases}$$

admet une solution sur $C^2([0,1],E)$.

Démonstration. Soient $r, s \in E$, on introduit la fonction ρ qui est définie par :

$$\begin{aligned} \rho : [0,1] &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto \rho(t) = \frac{1}{2}(s-r)t^2 + rt \end{aligned}$$

et la multi-application $H : [0,1] \times C([0,1], E) \longrightarrow 2^E$ définie par :

$$H\Big(t, u(t)\Big) = u(t) - F\Big(t, u(t) + \rho(t), u'(t) + \rho'(t)\Big) + \Big(s - r\Big) \tag{2.8}$$

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) \in H(t, u(t)), \ p.p. \ sur \ [0,1] \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

On remarque que la fonction $u(t)$ est une solution du problème (2.9), si et seulement si la fonction $x(t) = u(t) + \rho(t)$ est une solution de problème (1), pour tout $t \in [0,1]$.
On a $F(., u(.), u'(.))$ est une multi-application à valeurs fermées, utilisant l'hypothèse (1) et appliquant le lemme 1.6.27.
On conclut que la multi-application $F(., u(.), u'(.))$ est mesurable, donc elle admet une sélection mesurable $f : [0,1] \longrightarrow E$ tel que :

$$f(t) \in F(t, u(t), u'(t)), \forall t \in [0,1].$$

D'après (1) si F est intégrablement bornée alors, $f \in L^1([0,1], E)$.
Donc, on peut définir l'ensemble $S_{F,u}$ par :

$$S_{F,u} = \Big\{ f \in L^1([0,1], E) : f(t) \in F(t, u(t), u'(t)), \ \forall t \in [0,1] \Big\}$$

qui est non vide.
Pour résoudre le problème (2.9) en va utiliser le théorème du point fixe Covitz et Nadler 1.6.26. Considérons une multi-application

$$T : C([0,1], E) \longrightarrow 2^{C([0,1],E)}$$

définie comme suit, pour $u \in C([0,1], E)$,

$$T(u) = \Big\{ z \in C([0,1], E) : z(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)ds, \ \forall t \in [0,1] \ \ et \ \ h \in S_{\mathcal{H},u} \Big\}.$$

avec

$$S_{H,u} = \Big\{ h \in L^1([0,1], E) : h(t) \in \mathcal{H}(t, u(t)), \forall t \in [0,1] \Big\} \neq \emptyset.$$

On va montre que T satisfait les hypothèse du Théorème 1.6.26.

1. T a valeurs fermées non vides. En effet :
   - Pour tout $t \in [0,1]$ et $h \in S_{H,u}$, on a

$$z(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)ds$$

$h \in S_{H,u}$ c'est à dire, $h(s)$ est intégrable bornée et comme $G(t,s)$ est continue bornée.

Alors

$$\int_0^1 G(t,s)h(s)ds < +\infty$$

d'où

$$T(u) \neq \emptyset.$$

   - Pour tout $n \geq 0$ on a :

$z_n \in T(u)$ alors il existe une suite $(h_n) \in S_{\mathcal{H},u}$ tel que :

$$u_n(t) = \int_0^1 G(t,s)h_n(s)ds, \forall\, t \in [0,1]$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n(t) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^1 G(t,s)h_n(s)ds$$

$h_n \in L^1([0,1],E)$, $G(t,s)$ continue et $|G(t,s)|$ bornée, alors d'après le théorème de Lebesgue 1.3.14

$$\begin{aligned} u(t) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} u_n(t) \\ &= \int_0^1 G(t,s)h(s)ds. \end{aligned}$$

Où $h(s) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} h_n(s)$ et $h \in L^1([0,1],E)$

Comme F est à valeurs fermées, alors

$$H(t,u(t)) = u(t) - F(t,u(t)+\rho(t),u'(t)+\rho'(t)) + (s-r)$$

est à valeurs fermées. Donc

$$h(s) \in H(t,u(t))$$

et par conséquent $h \in S_{H,u}$

$$u(t) \in \int_0^1 G(t,s)h(s)ds.$$

On a l'intégrale de Aumann de $G(t,s)H(s,u)$, définie par :

$$\int_0^1 G(t,s)H(s,u)ds = \Big\{ \int_0^1 G(t,s)h(s)ds, h \in S_{H,u)} \Big\}.$$

Alors $\overline{u} \in \int_0^1 G(t,s)H(s,u)ds$. Donc

$$\overline{u}(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)ds$$

Par conséquent $\overline{u} \in T(u)$, donc $T(u)$est fermée, pour tout $u \in C([0,1],E)$.

2. Montres que T est une contraction.

   Soient $u_1, u_2 \in C([0,1],E)$ et considère $z_1 \in T(u_1)$.

   Alors il existe $h_1 \in S_{\mathcal{H},u_1}$ telle que :

$$z_1 = \int_0^1 G(t,s)h_1(s)ds, \forall t \in [0,1]$$

   En utilisant (2.8), on aura

$$h_1(t) = u_1(t) - f_1(t) + (s-r), \forall t \in [0,1].$$

   Où f_1 est une sélection mesurable de F

$$f_1(t) \in F(t,u(t),u'(t))$$

D'autre part, soit $\varepsilon > 0$ et considérons la multi-application à valeurs $U_\varepsilon : [0,1] \longrightarrow 2^E$, donnée par

$$U_\varepsilon(t) = \Big\{ x \in E : \|f_1(t) - x\| \leq m(t)\|u_1(t) - u_2(t)\| + \varepsilon \Big\}.$$

Montrons que U_ε non vide.
Pour tout $t \in [0,1]$, soit $t \in [0,1]$, nous avons

$$\mathcal{H}(F(t,u_1(t),u_1'(t)), F(t,u_2(t),u_2'(t))) \leq m(t)\|u_1(t) - u_2(t)\|.$$

Par conséquent , il existe $x \in F(.,u_2(.),u_2'(.))$ tel que :

$$\|f_1(t) - x\| \leq m(t)\|u_1(t) - u_2(t)\| + \varepsilon.$$

d'où

$$U_\varepsilon(t) \neq \emptyset$$

• Montrons que $U_\varepsilon(t)$ à valeurs fermées.
Soit $t \in [0,1]$ et soit $(x_n)_n$ une suite de $U_\varepsilon(t)$ tels que $(x_n)_n$ converge vers x quand n tend vers infini.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F(t,u(t),u'(t))$, et $x_n \in E$

$$||f(t) - x_n|| = m(t)||u_1(t) - u_2(t)|| + \varepsilon$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} ||f(t)-x_n|| = ||f(t)-x||$$
$$\leq m(t)||u_1(t)-u_2(t)||+\varepsilon$$

(car la norme est continue)

Donc

$$||f(t)-x_n|| = m(t)||u_1(t)-u_2(t)||+\varepsilon$$

Alors $x \in U_\varepsilon(t)$

D' où $U_\varepsilon(t)$ est à valeurs fermées.

Maintenant on va montrer que la multi-application

$$V : t \longrightarrow U_\varepsilon(t) \cap F(t, u_2(t), u_2'(t))$$

est mesurable.

1) D'après la théorème 1.6.21 $t \longmapsto F(t, u(t), u'(t))$ est mesurable D'après le théorème 1.6.20 $t \longmapsto U_\varepsilon$ est mesurable.

Alors l'intersection de deux multi-applications mesurables est mesurable.

D'après la propriété 1.6.15

L'intersection de deux multi-application mesurable est mesurable.

Donc V est mesurable.

Alors, il existe une sélection mesurable $f_2 : [0,1] \longrightarrow E$ tel que, pour tout $t \in [0,1]$, $f_2(t) \in V$. Donc

$$f_2(t) \in F(t, u_2(t), u_2'(t))$$

et $f_2(t) \in U_\varepsilon(t)$. C'est à dire

$$\|f_1(t) - f_2(t) \mid \leq m(t)||u_1(t)-u_2(t)||+\varepsilon.$$

Maintenant, pour tout $t \in [0,1]$, on pose

$$h_2(t) = u_2(t) - f_2(t) + (s-r)$$

et

$$z_2(t) = \int_0^1 G(t,s)h_2(s)ds.$$

Donc

$$\Big|\Big|z_1(t)-z_2(t)\Big|\Big| = \Big|\Big|\int_0^1 G(t,s)h_1(s)ds - \int_0^1 G(t,s)h_2(s)ds\Big|\Big|,\ \forall t \in [0,1]$$

$$= \left|\left| \int_0^1 G(t,s)(u_1(s) - f_1(s) + (s-r) - (u_2(t) - f_2(s) + (s-r))ds \right|\right|$$
$$= \int_0^1 \left|\left| G(t,s)(u_1(s) - f_1(t) - u_2(s) - f_2(s))ds \right|\right|$$
$$\leq \int_0^1 \left|\left| G(t,s) \right|\right| \Big(\left|\left| u_1(s) - u_2(s) \right|\right| + \left|\left| f_1(s) - f_2(s) \right|\right| \Big) ds.$$

D'après le lemme 2.2.1 on a $|G(t,s)| \leq \lambda$ alors

$$\begin{aligned}
\left|\left| z_1(t) - z_2(t) \right|\right| &\leq \lambda \int_0^1 \left|\left| u_1(s) - u_2(s) \right|\right| ds + \lambda \int_0^1 \left|\left| f_1(s) - f_2(s) \right|\right| ds \\
&\leq \lambda \int_0^1 \left|\left| u_1(s) - u_2(s) \right|\right| ds + \lambda \int_0^1 m(s) \left|\left| u_1(s) - u_2(s) \right|\right| ds + \lambda\varepsilon \\
&\leq \lambda \left|\left| u_1(.) - u_2(.) \right|\right|_\infty \int_0^1 (1 + m(s))ds + \lambda\varepsilon.
\end{aligned}$$

pour tout $t \in [0,1]$,

$$\left|\left| z_1 - z_2 \right|\right|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \left|\left| z_1(t) - z_2(t) \right|\right|.$$

Alors

$$\left|\left| z_1 - z_2 \right|\right|_\infty \leq \lambda \left|\left| u_1 - u_2 \right|\right|_\infty \int_0^1 (1 + m(s))ds + \lambda\varepsilon. \tag{2.10}$$

Comme $z_1 \in T(u_1)$ et $z_2 \in T(u_2)$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\Big(T(u_1), T(u_2)\Big) &= max\Big(e(T(u_1), T(u_2)), e(T(u_2), T(u_1))\Big) \\
&= max\left(\sup_{z_1 \in T(u_1)} \Big(\inf_{z_2 \in T(u_2)} d(z_1, z_2) \Big), \sup_{z_2 \in T(u_2)} \Big(\inf_{z_1 \in T(u_1)} d(z_2, z_1) \Big) \right) \\
&\leq d(z_1, z_2) \\
&= \left|\left| z_1 - z_2 \right|\right|
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\Big(T(u_1, T(u_2)\Big) &\leq \left|\left| z_1 - z_2 \right|\right| \\
&\leq \lambda \left|\left| u_1 - u_2 \right|\right|_\infty \int_0^1 \Big(1 + m(s)\Big) ds + \lambda\varepsilon,
\end{aligned}$$

pour ε tend vers 0, on obtient

$$\mathcal{H}\Big(T(u_1, T(u_2)\Big) \leq \lambda \left|\left| u_1 - u_2 \right|\right|_\infty \int_0^1 (1 + m(s))ds$$

Par conséquent, si $\int\limits_0^1 \Big(1 + m(s)\Big) ds < \dfrac{1}{\lambda}$, T est une contraction. D'après le théorème 1.6.26, T admet un point fixe.

Alors, u est une solution de problème (2.9). D' où les problème (1) admet une solution. ■

Conclusion

Cette étude et consacrée d'une part à une étude mathématiques puissant et utile qui est les inclusions différentielles du second ordre.
La démarche a été établie par le lemme préliminaire concerne à la fonction de Green.
Enfin, on a traité un théorème de résultat d'existence de solution dans un espace de Banach séparable de dimension infinie pour une inclusion différentielle du second ordre, nous utilisons le théorème de point fixe de Covitz et Nadler.

Bibliographie

[1] **Affane. D** ; *Quelques problèmes de contrôle optimal pour des inclusions différentielles Thèse de doctorat* ; LMPA, Université de Jijel(2012).

[2] **Aitalioubrahim. M** ; *Neumann Boundary-value problems for differential inclusions in Banach spaces*, Elect. Jou. of Diff. Equations No. 104. pp. 1-5, (2010).

[3] **Aubain. J. P, Cellina. A** ; *Differential inclusions. Set-valued maps an viability theory*, Springer-verlag, Berlin (1984).

[4] **Aumann. J** ; *Integrals of set-valeud function* , Journ. Math. Anal, and Appl. pp. 1-12, (1965).

[5] **Appell. J , Thai. N. H, Zabreiko. P. P** ; *Multi-valued superposition*, Warszawa (1995).

[6] **Boucherif. A, Al-malki. N** ; *Solvability of Neumann boundary-value problems with Carathéodory nonlinearities*, Electrons. J. Differential Equations, pp. 17, (2004).

[7] **Castaing. C, Valadier. M** ; *Convex analysis and mesurable multifunctions*, Lecture Notes inMathematics 580, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1977).

[8] **Covitz. H, Nadler. S. B. J. R** ; Multivalued contraction mapping in generalized metric spaces ; *Israel J. Math*, pp. 5-11, (1970).

[9] **Guennoun. A** ; Existence de solutions aus sens de caratgéodory pour lr problème de Neumann $y'' = f(t, y, y')$, *Canad. J. Math.*, pp. 998-1009, (1991).

[10] **Granas. A, Guenther. R. B, Lee. J. W** ; *Topological transversality II. Application to the Neumann problem for* $y'' = f(t, y, y')$. Pacific J. Math., 104(1), pp. 95-109, (1983).

[11] **Gupta. C. P** ; *Solvability of three-point nonlinear boundary value problem for a second order differential equation*, J. Math. Anal. Appl, pp. 540-551 (1992).

[12] **Hartman. P ;** *Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, New York, London Sydney, (1967).

[13] **Hu. S, Papagiorgiou. N.S**, *Handbook of multivalued analysis. Volume I : Theory. Kluwer, Dordrecht, The Netherlands*, (1997).

[14] **Mawhin. J, Ruiz. D** ; *A strongly nonlinear Neumann problem at resonance with restrictions on the nonlinearity just in one direction*, Topol. Methods in Nonlinear Anal , pp. 114, (2002).

[15] **Sun. J. P, Li. W. T** ; *Multiple positive solutions to second-ordre Neumann boundary-value problems*, Appl. Math. Comput, pp. 187-194, (2003).

[16] **Wang. F, Cui. Y, Zhang. F** ; *Existence and nonexistence results for second-order Neumann boundary-value problem*, Surveys in Mathematic and its Applications, pp. 1079-1084, (2009).