REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE JIJEL

Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie

Département de mathématiques

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité Mathématiques

Option Analyse

Thème

Etude d'une inclusion différentielle avec somme de deux perturbations

par

SABRINA IZZA

Soutenu le :29/04/2010 Devant le Jury :

Président	A. AIBECHE	Prof.	Univ.	Sétif
Rapporteur	D. AZZAM-LAOUIR	Prof.	Univ.	Jijel
Examinateurs	M. DENCHE	Prof.	Univ.	Constantine
	T. ZERZAIHI	M.C.	Univ.	Jijel
	W. CHICOUCHE	M.C.	Univ.	Jijel

LABORATOIRE DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES(LMPA)

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE DE JIJEL
Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie
Département de mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité Mathématiques
Option Analyse

Thème

Etude d'une inclusion différentielle avec somme de deux perturbations

par

SABRINA IZZA

Soutenu le : 29/04/2010 Devant le Jury :

Président	A. AIBECHE	Prof.	Univ.	Sétif
Rapporteur	D. AZZAM-LAOUIR	Prof.	Univ.	Jijel
Examinateurs	M. DENCHE	Prof.	Univ.	Constantine
	T. ZERZAIHI	M.C.	Univ.	Jijel
	W. CHICOUCHE	M.C.	Univ.	Jijel

LABORATOIRE DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES(LMPA)

Remerciements

Je commence avant tout par remercier vivement Madame Dalila AZZAM-LAOUIR professeur à l'université de Jijel, d'avoir acceptée de me proposer le sujet de ce mémoire, de m'avoir guidée et conseillée jusqu'à ce que ce travail voit enfin le jour et soit entre vos mains aujourd'hui.

De plus, je remercie Monsieur Lionel THIBAULT qui nous a reçus à l'université Montpellier II, en France, qui a été très généreux en conseils durant toute la période de notre séjour dans son laboratoire, qui a eu aussi la gentillesse de lire ce modeste travail et d'ajouter sa petite touche personnelle. J'ai eu beaucoup de plaisir à discuter mathématiques et à travailler avec lui.

Je remercie enfin tous les membres du jury. Son président, M. Aissa AIBECHE professeur à l'université de Sétif pour qui j'ai une grande estime, ainsi que les autres membres, M. Mohamed DENCHE professeur à l'université de Constantine, Mme Wided CHICOUCHE et M. Tahar ZERZAIHI tout deux maîtres de conférences à l'université de Jijel, de m'avoir fait l'honneur de corriger, commenter et noter ce travail.

Table des matières

Introduction

En général, en abordant des problèmes scientifiques dans plusieurs domaines, physique, chimie, économétrie, contrôle optimal...etc, on se ramène à résoudre des équations différentielles de types et d'ordres différents, tout selon la situation qui se présente devant nous. Et pour divers raisons, comme la difficulté de prouver l'existence de solution de certains problèmes de cauchy, apparûs dans les années **30** et **40** , un aspect plus généralisé des équations différentielles ordinaires, les inclusions différentielles dont le second membre est un ensemble, plus précisément une multi-application. C'est à dire, on a introduit une multi-application pour pouvoir contourner cette difficulté. Bien plus tard, dans les années **70**, **J.J Moreau** donna naissance à un nouveau type d'inclusions où le second membres cette fois ci, est un cône normal qu'on appela processus de la rafle et qui a été très utile dans la résolution des systèmes dynamiques unilatéraux, tels des problèmes d'élasto-plasticité et de frottements secs. Donnons l'exemple qui a amené **J.J Moreau** à introduire le processus de la rafle dans le cas convexe.
Considérons un grand anneau en mouvement avec une petite balle à l'interieur, quand l'anneau s'arrête de bouger à l'instant $t = 0$, le mouvement de la balle dépendant de l'anneau, celle ci restera au début sur place, après elle ballayera l'interieur de l'anneau avec une vitesse de façon à rester dedans. Remplaçons l'anneau et son interieur par un quelconque ensemble fermé convexe, mathématiquement le probléme devient

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)), \ p.p \ sur[0,T] \ et \quad u(0) = u_0 \in C(0) \tag{1}$$

ici $C(t)$ est un ensemble convexe fermé et représente l'anneau à l'instant t, $u(t)$ donne la position de la balle à ce même instant, enfin $N_{C(t)}(u(t))$ est le cône normal à l'ensemble

$C(t)$ à la position $u(t)$. L'inclusion(**1**) devient tout simplement l'expréssion de la vitesse de la balle $\dot{u}(t)$, en un point à l'interieur de l'anneau à tout instant t.
Depuis, plusieurs auteurs ont étudié l'existence des solutions de ce type d'inclusions du premier et second ordre perturbé et non perturbé sous des hypothèses de convexité et non convexité. En particulier, le problème d'existence de solutions du processus de la rafle du second ordre

$$\ddot{u}(t) \in -N_{C(u(t))}(\dot{u}(t)), \quad \dot{u}(t) \in C(t) \tag{2}$$

avec des valeurs convexes et non convexes a été étudié pour la première fois par **C. Castaing.**
Voici deux autres exemples d'applications du processus de la rafle. Le premier est une application à un problème de frottement donné par **M. C. Kaadoud** [17]. Il est du premier ordre et il consiste en l'étude du mouvement d'un point matériel $q \in \mathbb{R}^2$ dans le repère (O, e_1, e_2) pendant un intervalle de temps $I = [0, T]$. Le point q est rappeler vers un point mobile de mouvement donné par une force $\overrightarrow{F}$ vérifiant

$$\overrightarrow{F}(t) = -k'(q(t) - a(t)),$$

la fonction $a(t) = (a_1(t), a_2(t))$, avec $t \in I$, est supposée continue (resp. continue à droite). De plus le point q est confiné dans la région permise $x_2 \leq 0$, par une paroi régide fixe P d'équation $x_2 = 0$.
On suppose que pour tout t dans I, $a_2(t) > 0$ (ce qui signifie qu'on a un contact persistant et que le frottement de q avec P est sec de type Coulomb. On néglige l'inertie de q, c'est à dire l'évolution est traité comme quasi-statique. Alors

$$\overrightarrow{F}(t) + \overrightarrow{R}(t) = \overrightarrow{0}, \quad \textit{pour tout } t \in I,$$

où $\overrightarrow{R}(t)$ est la réaction exercéé par P sur q. Soient $v_+(\varepsilon, 0)$ et $v_-(\varepsilon, 0)$ les coefficients de frottement respectifs au point $(\varepsilon, 0)$ de P, pour les vitesses de glissement positives et négatives.
Les fonctions $\varepsilon \mapsto v_+(\varepsilon, 0)$ et $\varepsilon \mapsto v_-(\varepsilon, 0)$ sont supposées majorées par une constante M,

Lipschitziennes de rapports respectifs K_1 et K_2 et pour tout (t, ε) dans $I \times \mathbb{R}$, $[-a_2(t)v_+(\varepsilon, 0), a_2(t)v_-(\varepsilon, 0)]$ est d'interieur non vide. On travail dans le cas d'un frottement non nécessairement isotrope ($v_+ \neq v_-$) ni homogène. Le frottement sec de type Coulomb nous permet d'avoir :

(1) la vitesse $\dfrac{dq}{|dq|}$ est dans la paroi P,

(2) la composante normale R_N de la réaction est dirigée selon la normale rentrante dans la région permise, i.e. $R_N \leq 0$,

(3) Il existe dans l'espace $\mathbb{R}^2$ un cône convexe fermé C contenant le vecteur unité normal N dirigée vers la région permise, dit cône de frottement au point de contact considéré.

Une formulation de la loi de coulomb est

$$-\frac{dq}{|dq|} \in N_D(R_T)$$

où D est la projection orthogonale sur P de la section plane du cône, à distance R_N de P.

Cette formulation d'après **J. J. Moreau** est équivalente à

$$-\frac{dq}{|dq|} \in Proj_P N_{C(q(t))}(R(t)).$$

où $N_{C(q(t))}(R(t))$ est le cône normal sortant à C au point R.

Le second exemple a fait l'objet d'une étude présentée par **J. Venel et B. Maury** [16] et qui schématise un mouvement de foule, où on s'intéresse à la modélisation de situations d'évacuation, plusieurs personnes se trouvent dans une salle contenant des obstacles et veulent se diriger vers la sortie. Ce modèle repose sur deux principes.

1) On définit un champ de vitesses souhaitées, vitesses qu'auraient les individus en l'absence des autres. Cette vitesse dépend de la position de la personne par rapport à la sortie et aux différents obstacles se trouvant dans la pièce.

2) Les personnes, lors de leurs déplacements se gènent mutuellement et rencontrent des obstacles, leur vitesse réelle est différente de leur vitesse souhaitée.

Dans ce modèle, la vitesse réelle est la projection euclidienne de la vitesse souhaitée sur l'ensemble des vitesses admissibles.

Les N personnes sont assimilés à des disques de rayon r, repérés par les coordonnées de leurs centres, $q = (q_1, ..., q_N) \in \mathbb{R}^{2N}$. Ce vecteur position doit appartenir à un ensemble de configuration admissible

$$Q_0 = \{q \in \mathbb{R}^{2N} / \ \forall i, j, \ i \neq j \ et \ D_{ij}(q) = |q_i - q_j| - 2r \geq 0\},$$

(On peut ajouter des contraintes liées à la présence d'obstacles, ce qui n'a pas été fait dans cet exemple).

La vitesse souhaitée des N personnes est $U(q) = (u_0(q_1), ..., u_0(q_N)) \in \mathbb{R}^{2N}$. Un individu se déplaçant avec cette vitesse minimise la distance à parcourir pour atteindre la sortie. La vitesse réelle notée u respecte la contrainte de non chevauchement des disques. On introduit le cône des vitesses admissibles en q

$$C_q = \{v \in \mathbb{R}^{2N}, \ \forall i < j \ D_{ij}(q) = 0 \Rightarrow G_{ij}.v \geq 0\}$$

où $G_{ij}(q) = \nabla D_{ij}(q)$ et son cône polaire est

$$\begin{aligned} N_q = C_q^0 &= \{w \in \mathbb{R}^{2N}, \ \forall v \in C_q \, v.w \leq 0\} \\ &= \{-\Sigma \mu_{ij} G_{ij}(q), \ \mu_{ij} \geq 0, \ \mu_{ij} = 0 \ si \ D_{ij}(q) > 0\}. \end{aligned}$$

Enfin, en précisant le lieu de vitesse réelle et vitesse souhaitée (second point du modèle), on aboutit à une équation d'évolution sur la position,

$$u = P_{cq} U \Leftrightarrow u = (\mathbb{I}_d - P_{N_q})U \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow u + P_{N_q} U = U \quad (4)$$

$$\Rightarrow \dot{q} + N_q \ni U(q) \quad (5)$$

Théoriquement, le cas particulier (personnes dans un couloir ou une seule personne dans une pièce convexe), l'ensemble des configurations admissibles Q_0 est convexe et en conséquence, on peut montrer que N est un opérateur maximal monotone dont la théorie permet de conclure à l'existence et à l'unicité d'une solution à l'équation d'évolution **(5)**, vérifiant la condition initiale $q(0) = q_0 \in Q_0$.

Néaumoins, dans les cas plus généraux, personnes multiples dans une pièce quelconque, Q_0 n'est plus convexe et on ne peut plus appliquer la théorie précédente. En revanche, il est prox-régulier au sens suivant
Q_0 est prox-régulier s'il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout point $\tilde{q}$ à distance $d < r$ de Q_0, La projection de $\tilde{q}$ sur Q_0 soit bien définie.
Le problème dans ce cas s'inscrit dans le cadre des processus de la rafle introduit par **Moreau**. Cependant la présence d'un second membre U et la non régularité de Q_0 nécéssitent l'utilisation d'un résultat très récent pour obtenir l'existence de solutions.

Ce mémoire est partagé en trois chapitre. Dans le premier on énonce tous les résultats et définitions dont nous avons eu besoin, c'est à dire, des rappels sur la mesurabilité des fonctions univoques et multivoques, sur la continuité de ces dernières...etc. Aussi, nous avons consacré une grande partie de ce chapitre à définir et donner des résultats très importants sur les sous-différentiels et les cônes normaux pour pouvoir définir les ensembles normalement réguliers et normalement r-prox-réguliers, qui ont été introduit par **Clarke** ([14]), puisque notre résultat principal est basé sur des hypothèses de normale r-prox-régularité.
Le **chapitre 2** a été bati dans son ensemble autour de quelques résultats d'équivalence entre deux types d'inclusions et à démontrer deux d'entre eux, qui ont été d'ailleurs énoncés et démontrés dans [22] et [15]. Les deux inclusions en question sont l'une du type processus de la rafle

$$\dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)), \quad x(0) = x_0 \in C(0) \tag{6}$$

et l'autre admet pour second membre un sous-différentiel de la fonction distance

$$\dot{x}(t) \in -\dot{a}(t)\partial d(x(t), C(t)), \quad x(0) = x_0 \in C(0) \tag{7}$$

où $C(.)$ est une multi-application absolument continue à valeurs r-prox-régulières avec r un réel strictement positif.

Nous avons montré l'équivalence entre **(6)** et **(7)** dans le cas où toutes les deux sont perturbées par une même multi-application Φ. En suite cette même equivalence a été prouvée dans un cas beaucoup plus général.

Dans le **Chapitre 3**, nous énonçons notre résultat principal qui se caractérise par une étude d'existence des solutions pour une inclusion différentielle du second ordre gouvernée par un processus de la rafle avec somme de deux perturbations établi dans un espace H de dimension finie, de la forme

$$(\mathcal{P}_{F,G}) \begin{cases} -\ddot{u}(t) \in N_{K(u(t))}(\dot{u}(t)) + F(t, u(t), \dot{u}(t)) + G(t, u(t), \dot{u}(t)), \; p.p.t \in [0,T]; \\ \dot{u}(t) \in K(u(t)), \quad \forall t \in [0,T]; \\ u(0) = u_0, \; \dot{u}(0) = v_0. \end{cases}$$

où $N_{K(u(t))}(\dot{u}(t))$ est le cône normal à $K(u(t))$ au point $\dot{u}(t)$, $K(u(t))$ un ensemble r-prox-régulier, F et G deux multi-applications définies de $[0,T] \times H \times H$ dans H avec T un réel positif, F semicontinue supérieurement et G semicontinue mixte, c'est à dire, quand $G(t,x,y)$ est convexe $G(t,.,.)$ est semicontinue supérieurement et quand $G(t,x,y)$ est non convexe $G(t,.,.)$ est semi continue inférieurement sur un certain voisinage de (x,y). Pour les idées de notre démonstration nous nous sommes inspirés des articles [2] et[4].

Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce travail.

Soient E un espace de Banach, E' son dual topologique, $\langle .,. \rangle$ leur produit de dualité, et $\|.\|$ la norme de E.

- $\sigma(E, E')$ la topologie faible sur E
- $\overline{\mathbf{B}}_E$ la boule unité fermée de E.
- Si A est un sous ensemble de E alors $\overline{A}$ est la fermeture de A.
- coA est l'enveloppe convexe de A.
- $\delta(., A)$ la fonction indicatrice de A, définie sur E par

$$\delta(x, A) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in A \\ +\infty & sinon \end{cases}$$

- La fonction polaire asociée à $\delta(., A)$, appelée aussi fonction d'appui de A, est la fonction $\delta^*(., A)$, définie sur E' par

$$\delta^*(x', A) = \sup_{x \in A} \langle x', x \rangle, \quad \forall x' \in E'.$$

Notons que, si A est un convexe fermé de E, nous avons la relation suivante

$$d(x, A) = \sup_{x' \in \overline{\mathbf{B}}_{E'}} [\langle x', x \rangle - \delta^*(x', A)], \quad \forall x \in E$$

avec

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|,$$

est la distance du point x à l'ensemble A.

Soit H un espace de Hilbert et soit A un sous ensemble fermé convexe de H.

On note par

- $Proj_A(x)$, la projection de $x \in H$ sur A, définie par

$$y \in Proj_A(x) \Leftrightarrow y \in A \quad et \quad \langle x - y, y - a\rangle \geq 0 \quad \forall a \in A.$$

- $N_A(y)$, le cône normal à A au point y (il s'agit du cône des normales sortantes), défini par

$$\zeta \in N_A(y) \Leftrightarrow y \in A \quad et \quad \langle \zeta, y\rangle = \delta^*(\zeta, A)$$

et nous avons

$$y \in Proj_A(x) \Leftrightarrow x - y \in N_A(y).$$

-χ_A, la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble donné, définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On note aussi par

- $\mathbf{C}_E([0,T])$ l'espace de Banach des applications continues $u : [0,T] \to E$, muni de la topologie de la norme sup, i.e., $\|u\|_{\mathbf{C}_E} = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|$.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous allons introduire toutes les notations et résultats que nous avons utilisés tout au long de ce mémoire, c'est à dire, toutes les définitions et théorèmes qui nous sont indisponsables pour une bonne étude des multi-applications et du processus de la rafle dans le cas non convexe.

1.1 Quelques notions de mesurabilité

Cette section est consacrée à des résultats de mesurabilité dans le cas univoque, pour plus de détails ce référer à [9], [20] ou [21]

Définition 1.1.1 *Soient* $\mathbf{X}$ *un ensemble non vide,* Σ *une famille de sous ensembles de* $\mathbf{X}$*, alors* Σ *est dite une tribu sur* $\mathbf{X}$ *si*

1) $\emptyset \in \Sigma$

2) $A \in \Sigma \Rightarrow \mathbf{X} \setminus A \in \Sigma$

3) $A_n \in \Sigma, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \Sigma$

Le couple $(\mathbf{X}, \Sigma)$ est appelé espace mesurable et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables.

Si la troisième relation est vraie pour les unions finies seulement, on dit que Σ est une *algèbre* sur $\mathbf{X}$.
Si $\mathbf{X}$ est un espace topologique, la *tribu Borélienne* sur $\mathbf{X}$ notée $\mathcal{B}(\mathbf{X})$ est la plus petite tribu contenant la topologie de $\mathbf{X}$.

Définition 1.1.2 *Soient $(\mathbf{X}_1, \Sigma_1)$, $(\mathbf{X}_2, \Sigma_2)$ deux espaces mesurables et g une application définie sur $\mathbf{X}_1$ à valeurs dans $\mathbf{X}_2$. On dit que g est (Σ_1, Σ_2)-mesurable si pour tout $A \in \Sigma_2$, $g^{-1}(A) \in \Sigma_1$.*
Si $\mathbf{X}_2$ est un espace topologique, une fonction $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbf{X}))$-mesurable est dite fonction Borélienne.

Définition 1.1.3 *Soient $(\mathbf{X}, \Sigma)$ un espace mesurable et M un espace métrique. Alors une application $g : \mathbf{X} \longrightarrow M$, est dite fortement mesurable ou Bochner mesurable si g est $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbf{X}))$-mesurable et $g(\mathbf{X})$ est séparable.*

Définition 1.1.4 *Soient $(\mathbf{X}, \Sigma)$ un espace mesurable et M un espace métrique, on dit que l'application $f : \mathbf{X} \longrightarrow M$ est Σ-étagée (resp. dénombrablement Σ-étagée) si f est $(\Sigma, \mathcal{B}(M))$-mesurable et $f(\mathbf{X})$ fini (resp. dénombrable).*

Lemme 1.1.1 *Sous les notations de la définition (1.1.4) nous avons équivalence entre les caractérisations suivantes*

- *f est Bochner mesurable.*
- *Il existe une suite de fonctions Σ-étagées définies sur $\mathbf{X}$ à valeurs dans M, convergeant simplement vers f.*
- *Il existe une suite de fonctions dénombrablement Σ-étagées définies sur $\mathbf{X}$, à valeurs dans M convergeant uniformément sur $\mathbf{X}$ vers f.*

1.2 Rappels sur les mesures

Définition 1.2.1 *Soit* $(\mathbf{X}, \Sigma)$ *un espace mesurable. Alors la fonction* $\nu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *est une mesure sur* $\mathbf{X}$ *si*

1) $\nu(\emptyset) = 0$ *;*

2) $\nu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \nu(A_n)$ *pour toute suite dénombrable d'éléments de* Σ *deux à deux disjoints.*

Le triplet $(\mathbf{X}, \Sigma, \nu)$ est appelé espace mesuré.

Si $\nu(A) \geq 0$, pour tout $A \in \Sigma$. On dit que ν est une mesure positive et on note $\nu \geq 0$ ou que l'espace $(\mathbf{X}, \Sigma, \nu)$ est positif.

Si $\nu(A) < +\infty$ pour tout $A \in \Sigma$. On dit que ν est une mesure finie, ou que l'espace $(\mathbf{X}, \Sigma, \nu)$ est fini.

si $\mathbf{X}$ est un espace topologique, la mesure $\nu : \mathcal{B}(\mathbf{X}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est appelée mesure Borélienne.

Définition 1.2.2 *Soient* $\mathbf{X}$ *un espace topologique séparé et* ν *une mesure Borélienne. Alors* ν *est dite régulière si pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un ouvert* C *et un fermé* G *de* $\mathbf{X}$, *tels que* $G \subset A \subset C$ *et* $\nu(C \setminus G) \leq \varepsilon$.

Une mesure Borélienne finie et régulière est appelée mesure de Radon.

Définition 1.2.3 *Soit* $(\mathbf{X}, \Sigma, \nu)$ *un espace mesuré avec* $\nu \geq 0$ *et* Z *un sous ensemble de* $\mathbf{X}$. *On dit que* Z *est* ν*-négligeable s'il existe* $A \in \Sigma$ *tel que* $Z \subset A$ *et* $\nu(A) = 0$.
On dit qu'une propriété sur $\mathbf{X}$ *est vraie* ν*-presque partout (*ν*.p.p) si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est* ν*-négligeable.*

La tribu ν-complétée de Σ notée Σ_ν est la tribu engendrée par Σ et les ensembles ν-négligeables, i.e. ;

$$\Sigma_\nu = \Big\{ A \cup Z / \ A \in \Sigma \text{ et } Z \text{ ensemble } \nu - \text{négligeable} \Big\}.$$

La tribu Σ est dite complète si $\Sigma = \Sigma_\nu$, c'est à dire, si tout ensemble ν-négligeable appartient à Σ.

Définition 1.2.4 *Soit $(\mathbf{X}, \Sigma, \nu)$ un espace mesuré avec ν finie, notons $\Sigma^* = \Sigma_\nu$. Soit $\nu^* : \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $\nu^*(A \cup Z) = \nu(A)$ pour tout $A \in \Sigma$ et tout Z ν-négligeable.*
Alors, $(\mathbf{X}, \Sigma^*, \nu^*)$ est un espace mesuré avec ν^* finie et complète. De plus, on a $\nu^* = \nu$ sur Σ.
$(\mathbf{X}, \Sigma^*, \nu^*)$ est appelée l'extension de Lebesgue de l'espace mesuré $(\mathbf{X}, \Sigma, \nu)$.

Théorème 1.2.1 *Soient $\mathbf{X}$ un espace topologique compact, Σ une algèbre sur $\mathbf{X}$ et $\nu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction additive, régulière et bornée.*
Soit $\widetilde{\Sigma}$ la plus petite tribu sur $\mathbf{X}$ contenant Σ. Alors, il existe une mesure unique $\widetilde{\nu} : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ régulière, bornée et qui prolonge ν à $\widetilde{\Sigma}$.

1.3 Mesure de Borel et de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Soient t_0 , t_1 deux nombres réels tels que $t_0 < t_1$, $J = [t_0, t_1]$ et Σ la famille des sous ensembles de J de la forme $\{t_0\} = [t_0, t_0]$, $]t', t'']$ pour tout $t_0 \leq t' \leq t'' \leq t_1$ et les unions finies de ces intervalles. Il est clair que Σ est une algèbre sur J.
Définissons, $\nu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\nu(\{t_0\}) = 0, \quad \nu(]t', t'']) = t'' - t' \text{ et } \quad \nu(\bigcup_{j=1}^{k} A_j) = \sum_{j=1}^{k} \nu(A_j)$$

avec $k \in \mathbb{N}$ et A_j des intervalles disjoints de la forme considérée.
La mesure ν est une mesure additive, régulière et bornée. Par le théorème **1.2.1** elle admet une unique extension à $\widetilde{\Sigma}$ qui est la plus petite tribu sur J contenant Σ et qui n'est autre que la tribu Borélienne, $\mathcal{B}(J)$. Cette extension notée $\widetilde{\nu}$ est appelée mesure de Borel sur J.
Soit (J, Σ^*, ν^*) l'extension de Lebesgue de $(J, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\nu})$ alors les éléments de Σ^* sont appelés ensembles Lebesgue mesurables de J et ν^* la mesure de Lebesgue sur J.
On notera par

- $\mathcal{L}(I)$ la tribu de Lebesgue sur I.
- μ ou dt la mesure de Lebesgue.
- $\mathbf{L}^1_E(I)$ l'espace des applications Lebesgue-Bochner intégrables définies sur I à valeurs dans l'espace de Banach E, c'est à dire, les applications Lebesgue-Bochner mesurables et telles que $\int f d\mu$ est finie.

Définition 1.3.1 *Soient (J,Σ) un espace mesurable, X, Y deux espaces topologiques et $f : J\times X \to Y$. On dit que f est une application de Carathéodory si $f(.,x)$ est Σ-mesurable pour tout $x \in X$, fixé et $f(t,.)$ est continue pour tout $t \in J$, fixé.*

1.4 Théorème d'Ascoli-Arzelà

Théorème 1.4.1 *Soit J un espace métrique compact, Y un espace métrique complet, et H un sous ensemble de $\mathbf{C}(J,Y)$ l'espace des applications continues définies sur J à valeurs dans Y muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors, H est relativement compact si et seulement si H est équicontinu et $H(x)$ est relativement compact avec*

$$H(x) = \Big\{ f(x) / \, f \in H \Big\}.$$

Le théorème qui suit est une conséquence du théorème d'Ascoli-Arzelà, voir [1] et[3] pour la démonstration.

Théorème 1.4.2 *Soient J un sous ensemble compact de $\mathbb{R}$, E un espace de dimension finie et soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions absolument continues définies sur J à valeurs dans E, satisfaisant les conditions suivantes*

1) $\forall t \in J$, $(f_n(t))_n$ est un sous ensemble relativement compact de E.

2) Il existe une fonction à valeurs réelles positives $h \in \mathbf{L}^1_E(J)$ telle que $\|\dot{f}_n(t)\| \leq h(t)$ presque partout sur J.

Alors, il existe une sous suite de (f_n) (qu'on note aussi (f_n)) et qui converge vers une fonction absolument continue $f : J \to E$ au sens suivant *a)* (f_n)*converge uniformément vers* f.

b) $(\dot{f}_n)$ *converge faiblement vers* f *dans* $\mathbf{L}^1_E(J)$, *c'est à dire,* $(\dot{f}_n)$ *converge vers* f $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$.

1.5 Quelques résultats de compacité

Les résultats de cette section ont été souvent utilisés dans la démonstration de nos théorèmes et nous les avons pris des références [10] et [18].

Théorème 1.5.1 ***(Théorème d'Eberlein-Šmulian)***
Soit S *un sous ensemble d'un espace de Banach* E. *Alors, les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) S *est faiblement (relativement) séquentiellement compact.*

ii) S *est faiblement (relativement) compact.*

Théorème 1.5.2 ***(Théorème de Mazur)***
Soit E *un espace de Banach et* A *un sous ensemble compact de* E. *Alors,* $\overline{co}(A)$ *est compacte.*

Théorème 1.5.3 ***(Théorème de Banach-Mazur)***
Soit (x_n) *une suite d'éléments d'un espace de Banach* E *convergeant faiblement vers* x. *Alors, il existe une suite* (z_n) *(où* z_n *est une combinaison convexe des éléments* x_n, x_{n+1},...*) convergeant fortement vers* x.

Lemme 1.5.1 ***(Lemme de Mazur)***
Pour tout sous ensemble convexe d'un espace de Banach E, *la fermeture forte coincide avec la fermeture faible.*

1.6 Multi-applications ou multifonctions

1.6.1 Définition d'une multi-application

Définition 1.6.1 *Soient X, Y deux ensembles non vides. Une multi-application (ou fonction multivoque) F définie sur X à valeurs dans Y est une application qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous ensemble $F(x)$ de Y. On note $F : X \rightrightarrows Y$ ou $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ (où $\mathcal{P}(Y)$ est l'ensemble des parties de Y).*

On note par

- $Dom(F)$ le domaine d'une multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ et est donné par

$$Dom(F) = \Big\{x \in X \;/\; F(x) \neq \emptyset\Big\}.$$

- $gph(F)$ le graphe de F défini par

$$gph(F) = \Big\{(x,y) \in X \times Y \;/\; x \in D(F)\;; y \in F(x)\Big\}.$$

- Enfin, l'image de F notée $\mathcal{I}m(F)$ est donnée par

$$\mathcal{I}m(F) = \bigcup_{x \in Dom(F)} F(x).$$

Définition 1.6.2 *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle* ***sélection*** *de F toute application $f : X \to Y$ vérifiant $f(x) \in F(x)$, $\forall x \in X$.*

1.6.2 Mesurabilité d'une multi-application

Pour plus de détails sur cette partie se référer à [12].

Définition 1.6.3 *Soient (J, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique et $\Gamma : J \rightrightarrows X$ une multi-application. On dit que Γ est $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$-mesurable, ou tout simplement Σ-mesurable, si pour tout ouvert V de X on a*

$$\Gamma^{-1}(V) = \Big\{t \in J \;/\; \Gamma(t) \cap V \neq \emptyset\Big\} \in \Sigma.$$

Définition 1.6.4 *Une multi-application $\Gamma : J \rightrightarrows X$ est dite intégrablement bornée ou scalairement intégrable si Γ est mesurable et la fonction $t \mapsto |\Gamma((t)|$ appartient à $L^1_{\mathbb{R}}(J)$.*

Théorème 1.6.1 ***(Théorème d'existence de sélections mesurables)***
Soient (J, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable et $F : J \rightrightarrows X$ une multi-application Σ-mesurable à valeurs fermées. Alors, F admet au moins une sélection mesurable.

1.6.3 Distance de Hausdorff

Définition 1.6.5 *Soient A, B deux sous ensembles d'un espace métrique (X, d). L'écart entre A et B est défini par*

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B)$$

avec

$$d(a, B) = d_B(a) = \inf_{b \in B} d(a, b),$$

et la distance de Hausdorff entre A et B est définie par

$$\mathcal{H}(A, B) = \max\{e(A, B),\ e(B, A)\}.$$

Proprietés

1) $e(A, \emptyset) = +\infty$, si $A \neq \emptyset$

2) $e(\emptyset, B) = 0$

3) $e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$

4) $e(A, B) \leq e(A, C) + e(C, B)$

5) $\mathcal{H}(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$

6) $\mathcal{H}(A, B) \leq \mathcal{H}(A, C) + \mathcal{H}(C, B)$.

Remarque 1.6.1 *Si on note par $P_f(X)$ l'ensemble des parties fermées de X, alors $P_f(X)$ muni de la distance de Hausdorff est un espace métrique.*

Définition 1.6.6 *Soient E un espace de Banach, A une partie de E et f une fonction définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

1) On appelle fonction polaire associée à f et on note f^* la fonction définie sur E' à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ par

$$x' \mapsto f^*(x') = \sup_{x \in E}[\langle x', x\rangle - f(x)].$$

2) On appelle fonction indicatrice de A et on la note $\delta(., A)$ la fonction définie de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ par

$$\delta(x, A) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in A \\ +\infty & \quad sinon. \end{cases}$$

3) On appelle fonction d'appui de A, la fonction polaire associée à $\delta(., A)$, et qu'on note $\delta^*(., A)$ et qui est définie sur E' par

$$\delta^*(x', A) = \sup_{x \in E}[\langle x', x\rangle - \delta(x, A)] = \sup_{x \in A}\langle x', x\rangle.$$

Corollaire 1.6.1 *Soit E un espace de Banach. Si A est un convexe fermé de E, nous avons la relation suivante*

$$d(x, A) = \sup_{x' \in \overline{\mathbf{B}}_{E'}} [\langle x', x\rangle - \delta^*(x', A)], \quad \forall x \in E.$$

Corollaire 1.6.2 *Soit E un espace de Banach et A, B deux parties non vides, convexes et fermées de E. Alors,*

$$e(A, B) = \sup_{x' \in \overline{\mathbf{B}}_{E'}} [\delta^*(x', A) - \delta^*(x', B)]$$

et

$$\mathcal{H}(A, B) = \sup_{x' \in \overline{\mathbf{B}}_{E'}} |\delta^*(x', A) - \delta^*(x', B)|.$$

1.6.4 Continuité des multi-applications

Pour plus de détails sur les résultats de cette section voir [1], [5] ou [18].

Définition 1.6.7 *Soient X, Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors, F est dite semicontinue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y vérifiant $F(x_0) \subset V$ il existe un ouvert U de X tel que $x_0 \in U$ et $F(x) \subset V$, $\forall x \in U$.*

On dit que F est s.c.s sur X, si elle est s.c.s en tout point $x \in X$.

On a les propriétés suivantes

Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.

1) Si F est *s.c.s* à valeurs fermées alors, son graphe est fermé.

Donc si F est *s.c.s* à valeurs fermées, $\limsup_{x' \to x} F(x') \subset F(x)$.

2) Si Y est compact, F à valeurs compactes et $gph(F)$ est fermé dans $X \times Y$. Alors, F est *s.c.s*.

Définition 1.6.8 *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors F est dite semicontinue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y vérifiant $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, il existe un ouvert U de X tel que $x_0 \in U$ et $F(x) \cap V \neq \emptyset$, $\forall x \in U$.*

On dit que F est s.c.i sur X, si elle est s.c.i en tout point $x \in X$.

Définition 1.6.9 *Soient X, Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est continue (resp. Lipschitzienne de rapport $\lambda > 0$), si pour tout $x \in X$ on a,*

$$\lim_{x' \to x} \mathcal{H}(F(x), F(x')) = 0$$

(resp. pour tout $x, x' \in X$ on a,

$$\mathcal{H}(F(x), F(x')) \leq \lambda d_X(x, x')),$$

où $\mathcal{H}$ est la distance de Hausdorff et d_X la distance sur X.

Définition 1.6.10 *On dit qu'une application $f : [a, b] \to E$ est absolument continue si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tels que pour toute partition dénombrable de $[a, b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant*

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta$$

on a,

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.6.2 *Une application $f : [a,b] \to E$ est absolument continue si et seulement si elle est l'intégrale de sa propre dérivée. C'est à dire,*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(t)dt.$$

Définition 1.6.11 *Soient $T > 0$ et $C : [0,T] \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que C est absolument continue si pour tout $y \in Y$ et tout $t, t' \in [0,T]$ on a*

$$|d(y, C(t)) - d(y, C(t'))| \leq |a(t) - a(t')| \tag{1.1}$$

où $a : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction absolument continue satisfaisant $\dot{a}(t) \neq 0$ p.p sur $[0,T]$.

Observons que la relation **(1.1)** nous donne pour $t \geq t'$

$$|d(y, C(t)) - d(y, C(t'))| \leq \int_{t'}^{t} |\dot{a}(s)|ds.$$

On peut alors supposer (en remplaçant $\dot{a}$ par $|\dot{a}|$ si c'est nécessaire) que $\dot{a}(t) \geq 0$, $\forall t \in [0,T]$.

Remarques 1.6.1

- *On voit bien qu'une fonction absolument continue est continue par contre la réciproque est fausse.*
- *Une multi-application Lipschitzienne est une multi-application absolument continue.*

Le résultat qui va suivre est un théorème de fermeture pour une multi-application semicontinue supérieurement qui a été utilisé dans la démonstration de notre théorème principal.

Théorème 1.6.3 *(Théorème [VI-4] chap3 dans [12])*
Soient E un espace de Banach séparable, X un espace topologique et Φ une multi-application définie sur $[0,T] \times X$ à valeurs non vides, convexes, compactes dans E et telle que pour tout $t \in [0,T]$ fixé, $\Phi(t,.)$ est semicontinue supérieurement.
Soit (x_n), x des applications définies sur $[0,T]$ à valeurs dans X. (y_n), y des applications définies sur $[0,T]$ à valeurs dans E. Supposons que
a) $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$, *p.p sur* $[0,T]$;
b) (y_n) *converge vers* y, $\sigma(L^1_E, L^\infty_{E'})$;
c) $y_n(t) \in \Phi(t, x_n(t))$ *p.p sur* $[0,T]$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
Alors, $y(t) \in \Phi(t, x(t))$ *p.p sur* $[0,T]$.

Théorème 1.6.4 *Soit X un espace métrique, Y un espace de Banach séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs convexes compactes. Alors,*
(i) F est $\mathcal{B}(X)$-mesurable si est seuleument si pour chaque $\xi \in X'$ sa fonction d'appui $\delta^*(\xi, F(.))$ est $\mathcal{B}(X)$-mesurable.
(ii) F est semicontinue supérieurement si est seuleument si pour chaque $\xi \in X'$ sa fonction d'appui $\delta^*(\xi, F(.))$ est semicontinue supérieurement.

1.7 Théorèmes du point fixe de Kakutani-Ky Fan

Dans cette section nous énonçons deux théorèmes du point fixe dans le cas multivoque que nous avons utilisés. Pour leurs démonstrations voir par exemple [18].

Théorème 1.7.1 *Soient X un espace topologique séparé localement convexe, S un sous ensemble non vide convexe compact de X et $F : S \rightrightarrows S$ une multi-application semicontinue supérieurement à valeurs non vides convexes fermées. Alors, F admet un point fixe dans S, c'est à dire, il existe $x \in S$ tel que $x \in F(x)$.*

Le théorème qui suit nous donne une forme faible du théorème précédent.

Théorème 1.7.2 *Soient E un espace de Banach, S un sous ensemble non vide convexe faiblement compact de E et $F : S \rightrightarrows S$ une multi-application faiblement-faiblement semi-continue supérieurement et à valeurs non vides, convexes, faiblement compactes. Alors, F admet un point fixe dans S.*

1.8 Gradients généralisés

Dans ce paragraphe on va définir des outils de base que nous avons utilisés dans notre travail, tels le gradient généralisé de Clarke, les cônes normaux et tangents et aussi mettre en évidence les relations entre ces concepts.
Tous nos résultats seront établis dans un espace de Banach. Pour plus de détails se référer à [13].

Définition 1.8.1 ***(Dérivée directionnelle généralisée de Clarke)***
Soit H un espace de Banach et $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x} \in H$ de rapport $k > 0$, i.e., il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|f(x) - f(x')| \leq k\|x - x'\|$ pour tout $x, x' \in \bar{x} + \varepsilon \mathbf{B}_H$. Alors, la dérivée directionnelle au sens de Clarke de f au point $\bar{x}$ dans la direction v, notée par $f^o(\bar{x}; v)$ est définie par

$$f^0(\bar{x}; v) = \limsup_{\substack{x \to \bar{x} \\ t \searrow 0}} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

où x est un vecteur de H et t un scalaire positif.

Remarque 1.8.1 *Notons que cette définition ne suppose pas l'existence d'une quelconque limite mais juste l'existence d'une limite sup.*

Proposition 1.8.1 *Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x} \in H$ de rapport $k > 0$. Alors*
(a) *la fonction $v \mapsto f^0(\bar{x}; v)$ est finie, positivement homogène, sous-additive et satisfait*

$$|f^0(.; v)| \leq k\|v\|, \quad \text{pour tout } v \in H.$$

(b) $f^0(.;.)$ est semicontinue supérieurement comme fonction de $(\bar{x}, v)$, et $f^0(\bar{x}, .)$ est Lipschitziènne sur H, de rapport k.

(c) $f^0(\bar{x}; -v) = (-f)^0(\bar{x}; v)$.

Démonstration

-**(a) 1)** montrons que f^0 est positivement homogène, c'est à dire que, pour tout réel positif λ

$$f^0(\bar{x}; \lambda v) = \lambda f^0(\bar{x}; v)$$

on a

$$f^0(\bar{x}; \lambda v) = \limsup_{\substack{x \to \bar{x} \\ t \searrow 0}} \frac{f(x + t\lambda v) - f(x)}{t}. \tag{1.2}$$

Posons $\lambda t = s$. Alors, quand $t \to 0$ on a $s \to 0$ et **(1.2)** devient

$$\begin{aligned} f^0(\bar{x}; \lambda v) &= \limsup_{\substack{x \to \bar{x} \\ s \searrow 0}} \lambda \frac{f(x + sv) - f(x)}{s} \\ &= \lambda \limsup_{\substack{x \to \bar{x} \\ s \searrow 0}} \frac{f(x + sv) - f(x)}{s} \\ &= \lambda f^0(\bar{x}; v). \end{aligned}$$

-**(a) 2)** montrons maintenant qu'elle est sous-additive, c'est à dire que

$$f^0(\bar{x}; v + w) \leq f^0(\bar{x}; v) + f^0(\bar{x}; w)$$

on a

$$\begin{aligned} f^0(\bar{x}; v + w) &= \limsup_{\substack{x \to \bar{x} \\ t \searrow 0}} \frac{f(x + t(v + w)) - f(x)}{t} \\ &= \limsup_{\substack{x \to \bar{x} \\ t \searrow 0}} \frac{f(x + t(v + w)) - f(x + tw) + f(x + tw) - f(x)}{t} \\ &\leq \limsup_{\substack{x \to \bar{x} \\ t \searrow 0}} \frac{f(x + t(v + w)) - f(x + tw)}{t} + \limsup_{\substack{x \to \bar{x} \\ t \searrow 0}} \frac{f(x + tw) - f(x)}{t} \\ &= \limsup_{\substack{y \to \bar{x} \\ t \searrow 0}} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t} + \limsup_{\substack{x \to \bar{x} \\ t \searrow 0}} \frac{f(x + tw) - f(x)}{t}, \quad \textit{avec } y = x + tw \\ &= f^0(\bar{x}; v) + f^0(\bar{x}; w). \end{aligned}$$

-(a) 3) on a

$$\begin{aligned}
|f^0(\bar{x};v)| &= \left|\limsup_{\substack{x\to\bar{x}\\ t\searrow 0}} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}\right| \\
&\leq \limsup_{\substack{x\to\bar{x}\\ t\searrow 0}} \left|\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}\right| \\
&\leq \limsup_{\substack{x\to\bar{x}\\ t\searrow 0}} \frac{k\,\|x+tv-x\|}{t} \\
&= \limsup_{\substack{x\to\bar{x}\\ t\searrow 0}} \frac{kt\,\|v\|}{t} \\
&= k\|v\|.
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de **(a)**.

-(b)1) Soient (x_i) une suite quelconque convergente vers x

$$f^0(x_i,v) = \limsup_{\substack{y_i\to x_i\\ t_i\searrow 0}} \frac{f(y_i+t_iv)-f(y_i)}{t_i}$$

avec $\|y_i - x_i\| \leq \dfrac{1}{i}$ et $t_i \to 0$ quand $i \to \infty$. Alors par définition de la limite sup on a, pour tout i,

$$f^0(x_i,v) - \frac{1}{i} \leq \frac{f(y_i+t_iv)-f(y_i)}{t_i}$$

par suite

$$\limsup_{i\to\infty}(f^0(x_i,v) - \frac{1}{i}) \leq \limsup_{i\to\infty}\left(\frac{f(y_i+t_iv)-f(y_i)}{t_i}\right)$$

ainsi

$$\limsup_{i\to\infty}\ f^0(x_i,v) \leq f^0(x,v),$$

en d'autres termes, $f^0(.,v)$ est semicontinue supérieurement.

-(b)2) Montrons que $f^0(\bar{x},.)$ est Lipschitzienne

Soient v et w deux éléments de X.

on a

$$|f(y+tv)-f(y+tw)| \leq kt\|v-w\|$$

qu'on peut écrire aussi

$$f(y+tv) - f(y+tw) \leq kt\|v-w\|$$

par suite on a

$$f(y+tv) - f(y) - [f(y+tw) - f(y)] \leq kt\|v-w\|$$

d'où

$$\frac{f(y+tv) - f(y)}{t} \leq k\|v-w\| + \frac{f(y+tw) - f(y)}{t}$$

Par passage à la limite on obtient

$$\limsup_{\substack{y \to x \\ t \searrow 0}} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t} \leq k\|v-w\| + \limsup_{\substack{y \to x \\ t \searrow 0}} \frac{f(y+tw) - f(y)}{t}$$

c'est à dire,

$$f^0(x,v) \leq k\|v-w\| + f^0(x,w)$$

ainsi

$$f^0(x,v) - f^0(x,w) \leq k\|v-w\|$$

En permutant v et w de place on montre de la même manière que

$$f^0(x,w) - f^0(x,v) \leq k\|v-w\|$$

finalement on a

$$|f^0(x,v) - f^0(x,w)| \leq k\|v-w\|$$

c'est à dire que f^0 est Lipschitzienne de rapport k

-**(c)** on a

$$f^0(\bar{x}, -v) = \limsup_{\substack{y \to \bar{x} \\ t \searrow 0}} \frac{f(y-tv) - f(y)}{t} \tag{1.3}$$

Posons $u = y - tv$ alors, **(1,3)** devient

$$\begin{aligned} f^0(\bar{x}, -v) &= \limsup_{\substack{u \to \bar{x} \\ t \searrow 0}} \frac{f(u) - f(u+tv)}{t} \\ &= \limsup_{\substack{u \to \bar{x} \\ t \searrow 0}} \frac{-f(u+tv) - (-f(u))}{t} \\ &= \limsup_{\substack{u \to \bar{x} \\ t \searrow 0}} \frac{(-f)(u+tv) - (-f)(u)}{t} \\ &= (-f)^0(\bar{x}, v). \end{aligned}$$

Et c'est ce qu'il fallait démontrer.

Définition 1.8.2 ***(Gradient généralisé au sens de Clarke)***
Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x} \in H$, de rapport $k > 0$. Le gradient généralisé de f au point $\bar{x}$ noté $\partial^C f(\bar{x})$ est le sous ensemble de H' (dual de H) défini par

$$\partial^C f(\bar{x}) = \Big\{ \xi \in H' : f^0(\bar{x}; v) \geq \langle \xi, v \rangle \text{ pour tout } v \in H \Big\}.$$

Notons qu'il existe une définition plus généralisée du sous-differentiel au sens de Clarke donnée dans le cas où f est une fonction semicontinue inférieurement. La voici

Définition 1.8.3 *Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semicontinue inférieurement (s.c.i) et soit $\bar{x}$ un point de H où f est finie.*
Le sous-différentiel au sens de Clarke de f au point $\bar{x}$ est défini par

$$\partial^C f(\bar{x}) = \Big\{ \xi \in H' : \ \langle \xi, h \rangle \leq f^{\uparrow}(\bar{x}, h) \ , \ \forall h \in H \Big\},$$

où $f^{\uparrow}(\bar{x}, h)$ est la derivée directionnelle généralisée de Rockaffellar donnée par

$$f^{\uparrow}(\bar{x}, h) = \limsup_{\substack{x' \to_f \bar{x} \\ t \searrow 0}} \inf_{h' \to h} \frac{f(x' + th') - f(x')}{t},$$

où $x' \to^f \bar{x}$ veut dire $x' \to \bar{x}$ et $f(x') \to f(\bar{x})$.

Remarque 1.8.2 *Si $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$, $f^{\uparrow}(\bar{x}, h)$ coincide avec la dérivée directionnelle de Clarke, $f^0(\bar{x}, h)$ définie par*

$$f^0(\bar{x}, h) = \limsup_{\substack{x' \to_f \bar{x} \\ t \searrow 0}} \frac{f(x' + th) - f(x')}{t}.$$

On note par $\|\xi\|_*$ la norme de $\xi \in H'$ définie par

$$\|\xi\|_* = \sup\left\{|\langle \xi, v \rangle|,\ v \in H \text{ et } \|v\| \leq 1\right\} = \sup_{v \in \bar{\mathbf{B}}_H} \langle \xi, v \rangle.$$

La proposition suivante résume quelques importantes propriétés du gradient généralisé.

Proposition 1.8.2 *Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x} \in H$, de rapport $k > 0$. Alors,*

(a) $\partial^C f(\bar{x})$ est un sous ensemble non vide, convexe, faiblement compact de H' et $\|\xi\|_* \leq k$, pour tout $\xi \in \partial^C f(\bar{x})$.

(b) Pour tout $v \in H$, on a

$$f^0(\bar{x}, v) = \max\left\{\langle \xi, v \rangle : \xi \in \partial^C f(\bar{x})\right\}.$$

Démonstration

$\partial^C f(\bar{x})$ est non vide, car la proposition **1.8.1** nous assure que $f^0(\bar{x}, .)$ est positivement homogène, sous-additive est majorée. Alors, d'après le théorème de Hahn-Banach on sait qu'il existe au moins une forme linéaire sur H qui la majore.

Montrons que le sous-différentiel est convexe

Soient ξ_1 et ξ_2 deux éléments de $\partial^C f(\bar{x})$, alors

$$\begin{aligned}
\langle \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2, v \rangle &= \lambda\langle \xi_1, v \rangle + (1-\lambda)\langle \xi_2, v \rangle \\
&\leq \lambda f^0(\bar{x}, v) + (1-\lambda) f^0(\bar{x}, v) \\
&= f^0(\bar{x}, v).
\end{aligned}$$

ainsi

$$\langle \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2, v \rangle \in \partial^C f(\bar{x}),$$

d'où, $\partial^C f(\bar{x})$ est convexe.

Montrons que $\partial^C f(\bar{x})$ est faiblement compact

Sachant que $\forall \xi \in \partial^C f(\bar{x})$ on a, $\langle \xi, v\rangle \leq f^0(\bar{x}, v)$, on obtient par la proposition **1.8.1** $|\langle \xi, v\rangle| \leq k\|v\|$. Le théorème d'Alaoglu nous assure la faible compacité de $\partial^C f(\bar{x})$.

Il nous reste à montrer que $\|\xi\|_* \leq k$, $\forall \xi \in \partial^C f(\bar{x})$, on a

$$\|\xi\|_* = \sup\{\langle \xi, v\rangle;\ v \in X, \|v\| \leq 1\}.$$

Or $\langle \xi, v\rangle \leq f^0(\bar{x}, v)$ pour tout $v \in X$, par suite

$$\sup\{\langle \xi, v\rangle;\ v \in X, \|v\| \leq 1\} \leq f^0(\bar{x}, v) \leq k\|v\| \leq k,$$

c'est à dire, $\|\xi\|_* \leq k$.

Montrons (b)

Supposons qu'il existe v tel que

$$f^0(\bar{x}, v) > \max\{\langle \xi, v\rangle; \xi \in \partial f(\bar{x})\}.$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire ξ majorée par $f^0(\bar{x}, v)$ et lui est égale en v.

Il s'ensuit que ξ est dans $\partial f(\bar{x})$. Alors, $f^0(\bar{x}, v) > \langle \xi, v\rangle = f^0(\bar{x}, v)$, ce qui est absurde. D'où **(b)**.

Proposition 1.8.3 *Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x} \in H$, de rapport $k > 0$. Alors,*

(a) *$\xi \in \partial^C f(\bar{x})$ si et seulement si $f^o(\bar{x}, v) \geq \langle \xi, v\rangle$ pour tout $v \in H$.*

(b) *Soient (x_i) et (ξ_i) deux suites respectivement dans H et H' telles que $\xi_i \in \partial^C f(x_i)$. Supposons que (x_i) converge vers $\bar{x}$ et que ξ est un point d'adhérence de (ξ_i) pour la topologie faible*. Alors, on a $\xi \in \partial^C f(\bar{x})$. (i.e., la multi-application $\partial^C f(.)$ est faiblement* fermée) ;*

(c) *On a la caractérisation suivante,*

$$\partial^C f(\bar{x}) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcup_{y \in \bar{x} + \delta \mathbf{B}_H} \partial^C f(y).$$

(d) Si H est de dimension finie. Alors $\partial^C f(.)$ est semicontinue supérieurement au point $\bar{x}$.

Démonstration

(a) Elle est évidente d'après la proposition **1.8.2**.

(b) Etant donné un élément quelconque $v \in H$, il existe une sous suite de la suite numérique $\langle \xi_i, v \rangle$, qui converge faiblement vers $\langle \xi, v \rangle$ (qu'on notera de la même manière).
D'autre part, on a d'après **(a)** $f^0(x_i, v) \geq \langle \xi_i, v \rangle$ et comme $f^0(., v)$ est semcontinue supérieurement, alors $f^0(x, v) \geq \langle \xi, v \rangle$.
Par suite $\xi \in \partial f(\bar{x})$ puisque v est arbitraire dans H, toujours d'après l'assertion **(a)**.
(c) est une conséquence directe de **(b)**.
(d) si $\partial^C f(.)$ n'était pas semicontinue supérieurement, alors on peut construire une suite (x_i) convergeant vers x, et une autre (ξ_i) convergeant vers ξ telles que pour tout $i \in \mathbb{N}$ on ait $\xi_i \in \partial f(x_i)$. Cependant $\xi \notin \partial f(x)$, qui est en contradiction avec **(b)**.
Ce qui établit **(d)**.

1.8.1 Relations entre dérivées et sous-différentiels

On va rappeller certains résultats et définitions afin de pouvoir poursuivre l'étude du gradient généralisé, le résultat principal est que $\partial^C f$ peut être réduit à un singleton si f est C^1 et au sous-différentiel dans le cas de l'analyse convexe.

Dérivées classiques

Soit g une application de H dans un autre espace de Banach Y, la dérivée directionnelle (unilatérale) de g au point x dans la direction v est donnée par

$$g'(x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{g(x+tv) - g(x)}{t},$$

quand cette limite existe.

On dit que g admet une dérivée au sens de Gâteaux (ou qu'elle est Gâteaux différentiable) au point x et on la note $Dg(x)$, si pour tout v dans H, $g'(x,v)$ existe et est égale à $\langle Dg(x), v\rangle$. Ce qui est équivalent à dire que le quotient différntiel converge pour tout v, et on a

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{g(x+tv)-g(x)}{t} = \langle Dg(x), v\rangle.$$

De plus, $Dg(x)$ est un élément de $\mathcal{L}(H,Y)$ l'espace des applications linéaires continues de H dans Y.

Définition 1.8.4 *Une fonction réelle f définie sur H est Fréchet-différentiable au point $\bar{x} \in H$, s'il existe $\xi \in H'$ tel que*

$$\lim_{\substack{y\to\bar{x}\\ y\neq\bar{x}}} \frac{f(y)-f(\bar{x})-\langle \xi, y-\bar{x}\rangle}{\|y-\bar{x}\|} = 0.$$

Remarques 1.8.1

Si on remplace ensembles finis par ensembles compacts, la dérivée $Dg(x)$ est bien connue et c'est la dérivée au sens de Hadamard.

Enfin, quand on considère les ensembles bornés, $Dg(x)$ sera la dérivée au sens de Fréchet.

Quand $H = \mathbb{R}^n$, la différentiabilité au sens de Fréchet et de Hadamard sont équivalentes.

Et quand g est localement Lipschitzienne au point x, la différentiabilité au sens de Fréchet et de Hadamard coincident.

Définition 1.8.5 ***(Différentiabilité stricte)***

On dit que $g : H \to Y$ avec Y un espace de Banach, admet une dérivée stricte au point $\bar{x}$ notée $D_s g(\bar{x})$, si pour tout v on a

$$\lim_{\substack{x'\to\bar{x}\\ t\searrow 0}} \frac{g(x'+tv)-g(x')}{t} = \langle D_s g(\bar{x}), v\rangle.$$

Cette dérivée est un élément de $\mathcal{L}(H,Y)$. De plus la convergence est uniforme par rapport à v sur les ensembles compacts.

Proposition 1.8.4 *Soit g une application définie sur un voisinage de $\bar{x} \in H$ à valeurs dans un espace de Banach Y et soit ξ un élément de $\mathcal{L}(H, Y)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) g est strictement différentiable au point $\bar{x}$ et $D_s g(x) = \xi$.

(b) g est localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$ et pour tout v dans H on a

$$\lim_{\substack{x' \to \bar{x} \\ t \searrow 0}} \frac{g(x'+tv) - g(x')}{t} = \langle \xi, v \rangle.$$

Définition 1.8.6 *On dit que $g : H \longrightarrow Y$ avec Y un espace de Banach, est strictement différentiable au sens de Gâteaux au point $\bar{x}$, si la dérivée au sens de Gâteaux existe sur un voisinage de $\bar{x}$ et est continue comme application de H dans $\mathcal{L}(H, Y)$.*

Corollaire 1.8.1 *Si l'application g définie sur H à valeurs dans un espace de Banach Y est continuement différentiable au point $\bar{x}$. Alors g est strictement différentiable au point $\bar{x}$ et donc localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$.*

Proposition 1.8.5 *Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$ et admet une dérivée au sens de Gâteaux (ou Hadamard, ou Fréchet, ou stricte) $Df(\bar{x})$. Alors $Df(\bar{x}) \in \partial^C f(\bar{x})$.*

Proposition 1.8.6 *Si $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement différentiable au point $\bar{x}$. Alors f est localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$ et $\partial^C f(\bar{x}) = \{D_s f(\bar{x})\}$.*
Inversement, si $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ est localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$ et $\partial^C f(\bar{x})$ est réduit à un singleton $\{\xi\}$. Alors f est strictement différentiable au point $\bar{x}$ et $D_s f(\bar{x}) = \xi$.

Corollaire 1.8.2 *Si $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ est localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$ et H de dimension finie. Alors $\partial^C f(x)$ sera réduit à un singleton, pour tout x dans $\bar{x} + \varepsilon \mathbf{B}_H$ si et seulement si f est continuement différentiable sur $\bar{x} + \varepsilon \mathbf{B}_H$.*

Proposition 1.8.7 *Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur un ouvert convexe U de H et localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$. Alors, $\partial^C f(\bar{x})$ coincide avec le sous-différentiel au sens de l'analyse convexe au point $\bar{x}$ et $f^0(\bar{x}, v)$ coincide avec la dérivée directionnelle $f'(\bar{x}, v)$ pour tout $v \in H$.*

Proposition 1.8.8 *Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne sur tout ouvert U de H. Alors, f est convexe sur U si et seulement si la multi-application $\partial^C f(.)$ est monotone, c'est à dire, si et seulement si*

$$\langle x - x', \xi - \xi' \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } x, x' \in U,\ \xi \in \partial^C f(x),\ \xi' \in \partial^C f(x').$$

Proposition 1.8.9 *Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$.*

1) $(f+g)^0(\bar{x}, v) \leq f^0(\bar{x}; v) + g^0(\bar{x}; v)$ où $g : H \to \mathbb{R}$ est une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$.

2) $\partial^C (f+g)(\bar{x}) \subset \partial^C f(\bar{x}) + \partial^C g(\bar{x})$ pour tout $\bar{x} \in H$.

3) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on a $(\alpha f)^0(\bar{x}, v) = \alpha f^0(\bar{x}, v)$,
et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\partial^C(\alpha f)(\bar{x}) = \alpha \partial^C f(\bar{x})$.

4) Si f admet un minimum ou un maximum local en $\bar{x}$. Alors, $0 \in \partial^C f(\bar{x})$.

Démonstration

1) On a

$$\begin{aligned}
(f+g)^0(\bar{x}, v) &= \limsup_{\substack{x \to \bar{x} \\ t \searrow 0}} \frac{(f+g)(x+tv) - (f+g)(x)}{t} \\
&= \limsup_{\substack{x \to \bar{x} \\ t \searrow 0}} \frac{f(x+tv) + g(x+tv) - f(x) - g(x)}{t} \\
&\leq \limsup_{\substack{x \to \bar{x} \\ t \searrow 0}} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} + \limsup_{\substack{x \to \bar{x} \\ t \searrow 0}} \frac{g(x+tv) - g(x)}{t} \\
&= f^0(\bar{x}, v) + g^0(\bar{x}, v).
\end{aligned}$$

Et c'est ce qu'il fallait démontrer.

2) D'après **1)** on a

$$(f+g)^0(\bar{x}, v) \leq f^0(\bar{x}, v) + g^0(\bar{x}, v)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\delta^*(\partial^C(f+g)(\bar{x}),v) &= (f+g)^0(\bar{x},v) \\
&\leq f^0(\bar{x},v)+g^0(\bar{x},v) \\
&= \sup\ \{\langle\xi,v\rangle,\xi\in\partial^C f(\bar{x})\}+\sup\{\langle\xi,v\rangle,\xi\in\partial^C f(\bar{x})\} \\
&= \sup\ \{\langle\xi,v\rangle,\xi\in[\partial^C f(\bar{x})+\partial^C g(\bar{x})]\} \\
&= \delta^*(\partial^C f(\bar{x})+\partial^C g(\bar{x}),v).
\end{aligned}$$

par suite

$$\delta^*(\partial^C(f+g)(\bar{x}),v)\leq\delta^*(\partial^C f(\bar{x})+\partial^C g(\bar{x}),v) \tag{1.4}$$

Sachant que si $\delta^*(C,\xi)\leq\delta^*(D,\xi)$, alors on a $C\subset D$.

D'aprés **(1.4)** il s'ensuit,

$$\partial^C(f+g)(\bar{x})\subset\partial^C f(\bar{x})+\partial^C g(\bar{x}).$$

3) Si α est un réel positif, on a par définition

$$\begin{aligned}
(\alpha f)^0(\bar{x},v) &= \limsup_{\substack{x\to\bar{x}\\ t\searrow 0}}\frac{(\alpha f)(x+tv)-(\alpha f)(x)}{t} \\
&= \limsup_{\substack{x\to\bar{x}\\ t\searrow 0}}\frac{\alpha\ [f(x+tv)-f(x)]}{t} \\
&= \alpha.\limsup_{\substack{x\to\bar{x}\\ t\searrow 0}}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t} \\
&= \alpha\ f^0(\bar{x},v).
\end{aligned}$$

Montrons que $\partial^C(\alpha f)(\bar{x})=\alpha\ \partial^C f(\bar{x})$

Si $\alpha\geq 0$. Comme pour $\alpha=0$ le résultat est évident, on s'intéresse juste au cas où α est strictement positif.

Soit $\xi\in\partial^C(\alpha f)(\bar{x})$, ce qui est équivalent à dire que

$$\begin{aligned}
(\alpha f)^0(\bar{x}, v) \geq \langle \xi, v\rangle, \forall v \in H &\Leftrightarrow \alpha f^0(\bar{x}, v) \geq \langle \xi, v\rangle, \forall v \in H \\
&\Leftrightarrow f^0(\bar{x}, v) \geq \langle \frac{1}{\alpha}\xi, v\rangle, \forall v \in H \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}\xi \in \partial^C f(\bar{x}) \\
&\Leftrightarrow \xi \in \alpha\, \partial^C f(\bar{x})
\end{aligned}$$

C'est à dire

$$\partial^C(\alpha f)(\bar{x}) = \alpha\, \partial^C f(\bar{x}).$$

Pour montrer le résultat quand $\alpha \leq 0$ il suffit de le faire pour $\alpha = -1$ i.e., $\partial^C(-f)(\bar{x}) = -\partial^C f(\bar{x})$. Soit alors,

$$\begin{aligned}
\xi \in \partial^C(-f)(\bar{x}) &\Leftrightarrow (-f)^0(\bar{x}, v) \geq \langle \xi, v\rangle, \forall v \in H \\
&\Leftrightarrow f^0(\bar{x}, -v) \geq \langle \xi, v\rangle, \forall v \in H \\
&\Leftrightarrow f^0(\bar{x}, -v) \geq \langle -\xi, -v\rangle, \forall v \in H \\
&\Leftrightarrow f^0(\bar{x}, v') \geq \langle \xi', v'\rangle, \forall v' \in H \textit{ avec } v' = -v \textit{ et } \xi' = -\xi \\
&\Leftrightarrow \xi' \in \partial^C f(\bar{x}) \\
&\Leftrightarrow -\xi \in \partial^C f(\bar{x}) \\
&\Leftrightarrow \xi \in -\partial^C f(\bar{x}) \\
&\Leftrightarrow \partial^C(-f)(\bar{x}) = -\partial^C f(\bar{x}).
\end{aligned}$$

4) Comme on a $\partial^C(-f) = -\partial^C f$, il suffit de montrer le résultat pour $\bar{x}$ un minimum local. Or, dans ce cas il est evident que pour tout v dans H on a, $f^0(\bar{x}, v) \geq 0$. Alors, $\xi = 0$ est dans $\partial^C f(\bar{x})$ (d'après la proposition **1.8.3(a)**)

1.8.2 Régularité des fonctions

Définition 1.8.7 *On dit que $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ est régulière au point $\bar{x}$ si*

i) *Pour tout v la dérivée unilatérale usuelle $f'(\bar{x}, v)$, existe;*

ii) *Pour tout v, $f'(\bar{x}, v) = f^o(\bar{x}, v)$.*

Proposition 1.8.10 *Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$.*

(a) Si f est strictement différentiable au point $\bar{x}$, alors f est régulière au point $\bar{x}$.

(b) Si f est convexe, alors f est régulière au point $\bar{x}$.

(c) Une combinaison linéaire finie (par des scalaires positifs) de fonctions régulières au point $\bar{x}$ est régulière au point $\bar{x}$.

(d) Si f admet une dérivée au sens de Gâteaux et est régulière au point $\bar{x}$, alors $\partial^C f(\bar{x}) = \{Df(\bar{x})\}$.

Démonstration

(a) f est strictement différentiable au point $\bar{x}$. Alors, d'après la proposition **1.8.6** on a $\partial^C f(\bar{x}) = \{D_s f(\bar{x})\}$.

d'autre part

$$\begin{aligned} f^0(\bar{x}, v) &= \delta^*(\partial^C f(\bar{x}), v) \\ &= \sup\{\langle \xi, v\rangle, \xi \in \partial^C f(\bar{x})\} \\ &= \sup\{\langle \xi, v\rangle, \xi = D_s f(\bar{x})\} \\ &= \langle D_s f(\bar{x}), v\rangle \\ &= f'(\bar{x}, v). \end{aligned}$$

Alors, f est régulière.

(b) f est convexe. D'où, d'après la proposition **1.8.7** on a $f'(\bar{x}, v)$ existe pour tout v. De plus, $f'(\bar{x}, v) = f^0(\bar{x}, v)$. Alors, f est régulière.

(c) On montre le résultat pour une combinaison de deux fonctions, il sera facile de généraliser à une combinaison de plusieurs.

Soient f_1 etf_2 deux fonctions régulières en $\bar{x}$.

Sachant que si f est régulière et que s est un scalaire positif alors sf est aussi régulière, il suffit donc de montrer que $f_1 + f_2$ est régulière

on a,

$$(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2' = f_1^0 + f_2^0 \geq (f_1 + f_2)^0$$

Et comme on a toujours

$$(f_1 + f_2)' \leq (f_1 + f_2)^0$$

d'où l'égalité

$$(f_1 + f_2)' = (f_1 + f_2)^0$$

Ce qui traduit la régularité de $f_1 + f_2$ au point $\bar{x}$

(d) Si f admet une dérivée au sens de Gateaux et est régulière au point $\bar{x}$ alors, d'une part on a $f'(\bar{x}, v) = \langle Df(\bar{x}), v\rangle$ et d'une autre $f'(\bar{x}, v) = f^0(\bar{x}, v)$. D'où $f^0(\bar{x}, v) = \langle Df(\bar{x}), v\rangle$, ainsi $Df(\bar{x}) \in \partial^C f(\bar{x})$.

Proposition 1.8.11 ***(Théorème de la valeur moyenne)***

Si $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction localement Lipschitzienne sur un voisinage ouvert contenant le segment de droite $[x, y]$, alors il existe $z \in [x, y]$ et $\xi \in \partial^C f(z)$ satisfaisant

$$f(y) - f(x) = \langle \xi, y - x\rangle.$$

Proposition 1.8.12 ***(Règle de la chaine)***

Soient $F : H \longrightarrow \mathbb{R}^n$ localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$ (i.e. ; $F = (f_1, f_2, ...f_n)$ et $f_i : H \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$ sont localement Lipschitziennes pour tout i).

Soit $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ localement Lipschitzienne au voisinage de $F(\bar{x})$. Alors, la fonction $g \circ F$ est localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$.

De plus,

$$\partial^C(g \circ F)(\bar{x}) \subset \overline{co}^w\{\partial^C(\langle\xi, F(.)\rangle)(\bar{x})\ ,\ \xi \in \partial^C g(F(\bar{x}))\}$$

où $\overline{co}^w$ désigne l'enveloppe convexe fermée faible.

Proposition 1.8.13 ***(Règle du point maximum)***

Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$, le maximum d'un nombre fini de fonctions localement Lipschitziennes au voisinage de $\bar{x}$, c'est à dire, $f(\bar{x}) = \max\{f_n(\bar{x}),\ n = \overline{1, N}\}$ avec f_n localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$, pour tout n. Alors, f est localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$ et satisfait

$$\partial^C f(\bar{x}) \subset \overline{co}^w\{\partial^C f_n(\bar{x});\ n \in I(\bar{x})\}$$

où $I(\bar{x})$ est l'ensemble des indices n pour les quels $f(\bar{x}) = f_n(\bar{x})$.

1.9 Autres concepts de sous-différentiels

Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$.

Définition 1.9.1 ***(Le sous-différentiel au sens de Frechet)***
Le sous-différentiel au sens de Fréchet de f au point $\bar{x}$, $\partial^F f(\bar{x})$ est donné par l'ensemble de tous les $\xi \in H'$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ vérifiant

$$\langle \xi, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}) + \varepsilon \|x - \bar{x}\|$$

pour tout $x \in \bar{x} + \delta \overline{\mathbf{B}}_H$.

Définition 1.9.2 ***(Le sous-différentiel proximal)***
Le sous-différentiel proximal au point $\bar{x}$, $\partial^P f(\bar{x})$ est défini par l'ensemble de tous les $\xi \in H'$ pour les quels il existe deux nombres réels $\sigma > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$\langle \xi, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}) + \sigma \|x - \bar{x}\|^2$$

pour tout $x \in \bar{x} + \delta \overline{\mathbf{B}}_H$.

Remarquons que nous avons toujours,

$$\partial^P f(x) \subset \partial^C f(x).$$

En effet, soit $\xi \in \partial^P f(\bar{x})$ alors, il existe deux réels $\sigma > 0$ et $\delta > 0$ tels que $\forall x \in \bar{x} + \delta \mathbf{B}_H$, on a

$$\langle \xi, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}) + \sigma \|x - \bar{x}\|^2 \tag{1.5}$$

Or $x \in \bar{x} + \delta \mathbf{B}_H$ entraine $x - \bar{x} = \delta w$ avec $w \in \mathbf{B}_H$ par suite **(1.5)** devient

$$\langle \xi, \delta w \rangle \leq f(x) - f(x - \delta w) + \sigma \|\delta w\|^2,$$

ainsi

$$\delta \langle \xi, w \rangle \leq f(x) - f(x - \delta w) + \sigma \delta^2 \|w\|^2$$
$$\langle \xi, w \rangle \leq \frac{f(x) - f(x - \delta w)}{\delta} + \sigma \delta \|w\|^2$$

par passage à la limite sup et en posant $x - \delta w = u$ on obtient

$$\begin{aligned}\langle \xi, w\rangle &\leq \limsup_{\substack{u\to\bar{x}\\ \delta\searrow 0}} \Big[\frac{f(u+\delta w) - f(u)}{\delta} + \sigma\delta\|w\|^2\Big] \\ &= \limsup_{\substack{u\to\bar{x}\\ \delta\searrow 0}} \Big[\frac{f(u+\delta w) - f(u)}{\delta}\Big] \\ &= f^0(\bar{x}, w)\end{aligned}$$

On a donc $\forall w \in \mathbf{B}_H$, $\langle \xi, w\rangle \leq f^0(\bar{x}, w)$. Comme pour tout $v \in H$, $\dfrac{v}{\|v\|} \in \mathbf{B}_H$, d'après ce qui précède on a

$$\begin{aligned}\langle \xi, \frac{v}{\|v\|}\rangle &\leq f^0(\bar{x}, \frac{v}{\|v\|}) \\ &= \frac{1}{\|v\|}\, f^0(\bar{x}, v),\end{aligned}$$

par suite,

$$\|v\|\ \langle \xi, \frac{v}{\|v\|}\rangle \leq f^0(\bar{x}, v)$$

c'est à dire,

$$\langle \xi, v\rangle \leq f^0(\bar{x}, v)$$

enfin $\xi \in \partial^C f(\bar{x})$, en d'autres termes, $\partial^P f(\bar{x}) \subset \partial^C f(\bar{x})$

Par convention on pose, $\partial^P f(x) = \partial^C f(x) = \emptyset$ quand $f(x)$ est infini.

Notons aussi que $\partial^C f(x)$ est un convexe fermé, par contre $\partial^P f(x)$ est un convexe pas nécessairement fermé.

1.10 Cônes tangents et normaux à des ensembles non convexes

1.10.1 Cône tangent au sens de Clarke

On donne ici la définition du cône tangent au sens de Clarke $T_S^C(\bar{x})$ (où S est un sous ensemble de H et $\bar{x} \in S$) qui joue un rôle important dans l'analyse non lisse.

Définition 1.10.1 *Soient S un sous ensemble non vide de H et $\bar{x} \in S$.*
Un vecteur $v \in H$ est tangent à S au point $\bar{x}$ si on a, $d_S^0(\bar{x}, v) = 0$.
L'ensemble de tout les vecteurs tangents à S est noté $T_S^C(\bar{x})$ et appelé cône tangent de Clarke à S au point $\bar{x}$.

Remarque 1.10.1 *Il est clair que c'est juste la nature locale de S au voisinage de $\bar{x}$ qui est prise en considération dans cette définition.*
Une conséquence immédiate de la proposition (1.8.1) est que $T_S^C(\bar{x})$ est un cône convexe fermé de H. (En particulier, $T_S^C(\bar{x})$ contient toujours 0).

Soit maintenant une caractérisation séquentielle de $T_S^C(\bar{x})$.

Proposition 1.10.1

$$T_S^C(\bar{x}) = \Big\{ v \in H, \forall t_n \searrow 0, \forall x_n \to^S \bar{x}, \exists v_n \to v \quad t.q \quad x_n + t_n v_n \in S \quad \forall n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

où $x_n \to^S \bar{x}$ veut dire que $x_n \to \bar{x}$ et $x_n \in S$ pour tout n.

1.10.2 Cône normal au sens de Clarke

Il existe plusieurs manières de définir le cône normal à S au point $\bar{x}$ au sens de Clarke et nous avons choisi la suivante, étant donné que nous avons déjà défini le cône tangent au sens de celui ci, $T_S^C(\bar{x})$.

Définition 1.10.2 *Soit S un sous ensemble non vide de H et $\bar{x} \in S$.*
Le cône normal à S au point $\bar{x}$ au sens de Clarke noté, $N_S^C(\bar{x})$ est défini par

$$N_S^C(\bar{x}) = \Big\{ \xi \in H'; \langle \xi, v \rangle \leq 0, \forall v \in T_S^C(\bar{x}) \Big\}.$$

Nous avons la caractérisation de $N_S^C(\bar{x})$ en terme de gradient généralisé.

Proposition 1.10.2

$$N_S^C(\bar{x}) = cl\Big\{ \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial^C d_S(\bar{x}) \Big\}$$

où cl est la fermeture faible.*

Corollaire 1.10.1 *Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$ et qui atteint un minimum en dehors de S au point $\bar{x}$. Alors, $0 \in \partial^C f(\bar{x}) + N_S^C(\bar{x})$.*

Proposition 1.10.3 *Si S est un ensemble convexe. Alors, $N_S^C(\bar{x})$ coincide avec le cône des normales dans le sens de l'analyse convexe.*

Corollaire 1.10.2 *Si S est convexe. Alors, $v \in T_S^C(\bar{x})$ si et seulement si $d_S^0(\bar{x}, v) = d'_S(\bar{x}, v) = 0$.*

Corollaire 1.10.3 *Soient H_1, H_2 deux espaces de Banach et $H = H_1 \times H_2$, et soit $\bar{x} = x_1 \times x_2 \in C_1 \times C_2$ avec $C_i \subset H_i$ pour tout $i = 1, 2$. Alors,*

$$T_{C_1 \times C_2}^C(\bar{x}) = T_{C_1}^C(x_1) \times T_{C_2}^C(x_2),$$

et

$$N_{C_1 \times C_2}^C(\bar{x}) = N_{C_1}^C(x_1) \times N_{C_2}^C(x_2).$$

Maintenant donnons une autre caractérisation du sous-différentiel au sens de Clarke et qui utilise le cône normal de celui-ci.
Définissons avant tout l'épigraphe d'une fonction

Définition 1.10.3 *Soit f une fonction définie de H dans $\mathbb{R}$. On appelle épigraphe de f et on note $Epif$ le sous ensemble de $H \times \mathbb{R}$ défini par*

$$Epif = \big\{ (x, r) \in H \times \mathbb{R};\ f(x) \leq r \big\}$$

Théorème 1.10.1 *Soit f une fonction Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$. Alors,*
(i) L'épigraphe de $f^0(\bar{x},.)$ est $T^C_{Epif}(\bar{x}, f(\bar{x}))$. C'est à dire, (v,r) est dans $T^C_{Epif}(\bar{x}; f(\bar{x}))$ si et seulement si $r \geq f^0(\bar{x}, v)$.
(ii) f est régulière au point $\bar{x}$ si et seulement si $Epif$ est régulier en $(\bar{x}, f(\bar{x}))$.

Corollaire 1.10.4 *Soit f une fonction Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$. Alors, un élément $\xi \in H'$ est dans $\partial^C f(\bar{x})$ si et seulement si $(\xi, -1)$ est dans $N^C_{Epif}(\bar{x}, f(\bar{x}))$*

1.10.3 Cône normal proximal

Pour définir le cône normal proximal nous avons besoin de la définition suivante

Définition 1.10.4 *(Projection sur S).*
Soit $\bar{u} \notin S$, on définit $Proj_S(\bar{u})$ la projection de $\bar{u}$ sur S (qui peut être vide) comme l'ensemble de tout les $\bar{x} \in S$ dont la distance à $\bar{u}$ est minimale, c'est à dire,
$\|\bar{u} - \bar{x}\| = d_S(\bar{u})$. *D'où,*

$$Proj_S(\bar{u}) = \Big\{\bar{x} \in S, d_S(\bar{u}) = \|\bar{u} - \bar{x}\|\Big\}.$$

La caractérisation géomètrique de cette définition est la suivante

$$\bar{x} \in Proj_S(\bar{u}) \Leftrightarrow \begin{cases} \{\bar{x}\} \subset S \cap \mathbf{B}(\bar{u}, \|\bar{u} - \bar{x}\|) \\ et \\ S \cap int\{\mathbf{B}(\bar{u}, \|\bar{u} - \bar{x}\|)\} = \emptyset. \end{cases}$$

Le vecteur $\bar{u} - \bar{x}$ peut déterminer la direction de la normale proximale à S au point $\bar{x}$. Tout multiple non négative $\xi = r(\bar{u} - \bar{x}), r > 0$ d'un tel vecteur est appelé normal proximal à S au point $\bar{x}$.

L'ensemble de tous ces vecteurs est appelé le cône normal proximal à S au point $\bar{x} \in S$ et noté, $N^P_S(\bar{x})$ i.e.,

$$N^P_S(\bar{x}) = \Big\{\xi \in H' : \exists r > 0,\ \bar{x} \in Proj(\bar{x} + r\xi)\Big\},$$

en d'autres termes,

$$N^P_S(\bar{x}) = \Big\{\xi \in H' : \exists r > 0,\ d_S(\bar{x} + r\xi) = r\|\xi\|_*\Big\}.$$

Remarque 1.10.2 *Quand $\bar{x} \notin S$, le cône normal proximal à S, $N_S^P(\bar{x})$ est indéfini. Par contre lorsqu'on a $\bar{x} \in S$ avec $\bar{x} \notin Proj_S(\bar{u})$ pour tout $\bar{u} \notin S$ (i.e.; qu'il n'existe pas de point $\bar{u}$ en dehors de S tel que $\bar{x} \in Proj_S(\bar{u})$ ce qui est le cas quand $\bar{x} \in intS$) on pose* $N_S^P(\bar{x}) = \{0\}$.

1.10.4 Cône normal au sens de Fréchet

Soient S un sous ensemble non vide de H et $\bar{x} \in S$. Le vecteur $\xi \in H'$ est normal à S au point $\bar{x}$ au sens de Fréchet, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\langle \xi, x - \bar{x} \rangle \leq \varepsilon \|x - \bar{x}\|$$

pour tout $x \in (\bar{x} + \delta \mathbf{B}_H) \cap S$.
On notera l'ensemble de tous ces vecteurs par $N_S^F(\bar{x})$.

1.10.5 Régularité des ensembles

Dans le but d'établir la relation entre le concept géométrique défini précédemment et celui qu'on connait dans l'analyse lisse nous avons besoin de définir la régularité des ensembles.
Rappelons avant tout la définition du cône contingent $K_S(\bar{x})$ des tangentes à l'ensemble S en un point $\bar{x}$.

Définition 1.10.5 *Un vecteur v dans H est dans $K_S(\bar{x})$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t \in]0, \varepsilon[$ et un point w dans $v + \varepsilon \mathbf{B}_H$ tels que $\bar{x} + tw \in S$ ($\bar{x} \in clS$ nécessairement).*

Il vient immédiatement que $T_S^C(\bar{x})$ est toujours contenu dans $K_S(\bar{x})$, ce dernier n'est pas convexe cependant.

Définition 1.10.6 *L'ensemble S est régulier en $\bar{x}$, si on a $T_S^C(\bar{x}) = K_S(\bar{x})$.*

Théorème 1.10.2 *Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$ et supposons que $0 \notin \partial^C f(\bar{x})$. Si S est défini par $\{y \in H/f(y) \leq f(\bar{x})\}$, alors on a, $\{v \in H;\ f^0(\bar{x}, v) \leq 0\} \subset T_S(\bar{x})$.*

Corollaire 1.10.5 *On a l'inclusion suivante*

$$N_S^C(\bar{x}) \subset \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial^C f(\bar{x}).$$

Si f est régulière, on a l'égalité.

Proposition 1.10.4 *Soit un point $\bar{x}$ dans S. Alors,*

$$\partial^C \delta_S(\bar{x}) = N_S^C(\bar{x})$$

respectivement

$$\partial^P \delta_S(\bar{x}) = N_S^P(\bar{x})$$

et δ_S est régulière au point $\bar{x}$ si et seulement si S est régulier au point $\bar{x}$.

Démonstration

D'aprés le corollaire **(1.10.4)** on a

$$\xi \in \partial^C \delta_S(\bar{x}) \Leftrightarrow (\xi, -1) \in N_{Epi\delta_S}^C(\bar{x}, 0).$$

ce qui est équivalent à $\xi \in N_S^C(\bar{x})$ et $-1 \in (0, \infty)$ d'après le corollaire **(1.10.3)** car $Epi(\delta_S) = S \times [0, \infty)$.

La seconde égalité s'obtient en utilisant un résultat similaire pour le cône normal proximal. L'assertion de régularité découle immédiatement de la définition.

Proposition 1.10.5 *On a toujours les inclusions suivantes*

$$N_S^P(\bar{x}) \subset N_S^F(\bar{x}) \subset N_S^C(\bar{x}).$$

Démonstration

Soit $\xi \in N_S^P(\bar{x}) = \partial^P \delta_S(\bar{x})$. Alors, il existe $\varrho, \sigma > 0$ tels que pour tout $x \in \bar{x} + \varrho \mathbf{B}_H$ on a

$$\langle \xi, x - \bar{x} \rangle \leq \delta_S(x) - \delta_S(\bar{x}) + \sigma \|x - \bar{x}\|^2$$

Si de plus $x \in S$ alors, l'inégalité prècédente devient

$$\langle \xi, x - \bar{x} \rangle \leq \sigma \|x - \bar{x}\|^2 \leq \sigma \varrho \|x - \bar{x}\|$$

ainsi $\xi \in N_S^F(\bar{x})$.

En d'autres termes $N_S^P(\bar{x}) \subset N_S^F(\bar{x})$.

Montrons maintenant que $N_S^F(\bar{x}) \subset N_S^C(\bar{x})$.

Soit $\xi \in N_S^F(\bar{x})$. Alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \sigma > 0$ tels que

$$\langle \xi, x - \bar{x} \rangle \leq \varepsilon \|x - \bar{x}\|$$

pour tout $x \in (\bar{x} + \sigma \mathbf{B}_H) \cap S$.

Or, $x - \bar{x} = \sigma w$ avec $w \in \mathbf{B}_H$, on aura donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \sigma > 0, \quad \langle \xi, \sigma w \rangle \leq \varepsilon \sigma \|w\| \ et\ w \in \mathbf{B}_H,$$

ce qui équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \sigma > 0, \quad \sigma \langle \xi, w \rangle \leq \varepsilon \sigma \|w\| \ et\ w \in \mathbf{B}_H,$$

par suite

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \langle \xi, w \rangle \leq \varepsilon \|w\| \leq \varepsilon \ et\ w \in \mathbf{B}_H,$$

d'où, $\langle \xi, w \rangle \leq \varepsilon \|w\| \leq 0,\ et\ w \in \mathbf{B}_H$.

D'une autre part, $\forall v \in H$ on a, $\dfrac{v}{\|v\|} \in \mathbf{B}_H$. Alors

$$\begin{aligned} \langle \xi, \frac{v}{\|v\|} \rangle \leq 0 &\Rightarrow \frac{1}{\|v\|} \langle \xi, v \rangle \leq 0 \\ &\Rightarrow \langle \xi, v \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

On vient de montrer que, si $\xi \in N_S^F(\bar{x})$ on a toujours $\langle \xi, v \rangle \leq 0$, $\forall v \in H$, donc en particulier pour $v \in T_S^C(\bar{x})$ i.e. $\xi \in N_S^C(\bar{x})$ ainsi $N_S^F(\bar{x}) \subset N_S^C(\bar{x})$

Par conséquent on pose, $N_S^P(\bar{x}) = N_S^F(\bar{x}) = N_S^C(\bar{x}) = \emptyset$ si $\bar{x} \notin S$.

Pour tout sous ensemble S non vide, fermé, convexe et tout point $\bar{x} \in S$. Tous les cônes coincident avec $N_S(\bar{x})$.
$N_S^F(\bar{x})$ et $N_S^C(\bar{x})$ sont des cônes fortement fermés dans H.
$N_S^P(\bar{x})$ est un cône convexe dans H.

1.10.6 Ensembles normalement réguliers

Définition 1.10.7 *Soit S un ensemble non vide fermé de H et soit $\bar{x} \in S$.*
On dit que S est normalement régulier au sens de Fréchet au point $\bar{x}$ si on a

$$N_S^F(\bar{x}) = N_S^C(\bar{x}).$$

On dit que S est normalement régulier au sens de Fréchet s'il est régulier en tout point.

Remarque 1.10.3 *Etant donné que l'inclusion $N_S^P(\bar{x}) \subset N_S^F(\bar{x})$ est toujours vraie, on en déduit alors que la régularité normale proximale implique toujours la régularité normale au sens de Fréchet.*
L'implication inverse n'est pas toujours vraie.

1.10.7 Ensembles prox-réguliers

C'est une classe d'ensembles qui a apparue récemment et pour laquelle tout les concepts de régularité sont vérifiés (aprés la classe des ensembles convexes). Elle a été introduite par Clarke et al [14].
Ce paragraphe va être consacré à l'étude des ensembles proximalement lisses (où equivallemment les ensembles r-prox-régliers).
Commençons par les définir.

Définition 1.10.8 *Soit S un sous ensemble fermé de H.*
On dit que S est r-prox-régulier (où équivalemment proximalement lisse) s'il existe $r > 0$, tel que la fonction distance $d_S(.)$ soit continuement différentiable sur la courrone de la forme

$$U(r) = \Big\{u \in H : \ 0 < d_S(u) < r\Big\}.$$

Proposition 1.10.6 *Soit $r \in]0, +\infty]$. Un ensemble S est dit r-prox-régulier si et seulement si pour tout $x \in S$ et tout $0 \neq \xi \in N_S^P(x)$ on a*

$$\langle \frac{\xi}{\|\xi\|}, y - x \rangle \leq \frac{1}{2r} \|y - x\|^2, \ \forall y \in S.$$

Remarques 1.10.1

- *L'union de deux ensembles convexes n'est pas nécessairement convexe, par contre elle est prox-régulière.*
- *On fait la convention $\frac{1}{r} = 0$ pour $r = +\infty$*
- *Remarquons que pour $r = +\infty$, l'uniforme r-prox-régularité de S est équivalente à Sa convexité.*

Dans ce qui suit nous énonçons quelques résultats, qui sont d'importantes conséquences de la prox-régularité dont nous aurons besoin dans la démonstration de notre théorème principal. Pour plus de détails voir [14] et [19].

Proposition 1.10.7 *Soit S un sous ensemble non vide fermé de H et soit $r \in]0, +\infty]$. Si S est uniformément r-prox-régulier. Alors,*

i) Pour tout $\bar{x} \in H$, vérifiant $d(\bar{x}, S) < r$ on a, $Proj_S(\bar{x}) \neq \emptyset$.

ii) $\partial^P d_S(\bar{x}) = \partial^C d_S(\bar{x})$ en tout point $\bar{x} \in H$ satisfaisant $d(\bar{x}, S) < r$.

Dans ce cas, $\partial d(\bar{x}, S) = \partial^P d(\bar{x}, S) = \partial^C d(\bar{x}, S)$ est un sous ensemble convexe fermé de H'.

iii) Pour tout $x_i \in S$ et tout $v_i \in N_S^P(x_i)$ avec $\|v_i\| \leq \rho$ et $i = 1, 2$ on a

$$\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\|x_1 - x_2\|^2.$$

Une conséquence de (***iii***) est qu'on a pour les ensembles r-prox-réguliers le cône normal proximal à S coincide avec tous les cônes normaux qui sont contenus dans le cône normal au sens de Clarke en tout point $\bar{x} \in S$, c'est à dire que

$$N_S^P(\bar{x}) = N_S^C(\bar{x}).$$

Dans ce cas on pose

$$N_S(\bar{x}) = N_S^P(\bar{x}) = N_S^C(\bar{x})$$

Proposition 1.10.8 *Soit S un sous ensemble non vide fermé de H et soit $r \in]0, +\infty]$. Supposons que S est uniformément r-prox-régulier. Alors,*

$$\begin{cases} \textit{pour tout } \bar{x} \in S \quad \textit{et tout } \xi \in \partial d(\bar{x}, S), \textit{ on a} : \\ \langle \xi, \bar{x} - x' \rangle \leq \dfrac{2}{r} \|x' - \bar{x}\|^2 + d(\bar{x}, S) \\ \textit{pour tout } x' \in H \textit{ vérifiant } d(x', S) \leq r. \end{cases}$$

Proposition 1.10.9 *Voir [8]*

Soit S un sous ensemble non vide de H et soit $r \in]0, +\infty]$. Si S est uniformément r-prox-régulier, alors pour tout $\bar{x} \in H$ on a,

$$\overline{\mathbf{B}}_H \cap N_S(\bar{x}) = \partial d(\bar{x}, S).$$

Démonstration

Commençons par montrer l'inclusion

$$\partial d(\bar{x}, S) \subset \overline{\mathbf{B}}_H \cap N_S(\bar{x})$$

Soit $\xi \in \partial^P d_S(\bar{x})$. Alors, il existe $\sigma > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $x' \in \bar{x} + \delta \mathbf{B}_H$.

$$\langle \xi, x' - \bar{x} \rangle \leq \sigma \|x' - \bar{x}\|^2 + d_S(x') - d_S(\bar{x}) = \sigma \|x' - \bar{x}\|^2 + d_S(x')$$

Ainsi, pour tout $x' \in S \cap (\bar{x} + \delta \mathbf{B}_H)$ on a

$$\langle \xi, x' - \bar{x} \rangle \leq \sigma \|x' - \bar{x}\|^2$$

Ce qui nous assure que $\xi \in N_S^P(\bar{x})$ et comme l'inclusion $\partial^P d_S(\bar{x}) \subset \overline{\mathbf{B}}_H$ est toujours vérifiée on obtient alors, $\xi \in N_S^P(\bar{x}) \cap \overline{\mathbf{B}}_H$.

Montrons maintenant l'inclusion inverse.

C'est à dire, $N_S^P(\bar{x}) \cap \overline{\mathbf{B}}_H \subset \partial^P d_S(\bar{x})$.

Soit $\xi \in N_S^P(\bar{x})$ avec $\|\xi\| \leq 1$. Alors, il existe $\sigma > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$\langle \xi, x' - \bar{x} \rangle \leq \sigma \|x' - \bar{x}\|^2 \quad \textit{pour tout} \quad x' \in S \cap (\bar{x} + \delta \mathbf{B}_H). \tag{1.6}$$

Fixons maintenant $\gamma = \min\{1, \frac{\delta}{3}\}$, fixons aussi z dans $\bar{x} + \gamma \mathbf{B}_H$ et choisissons y_z tel que

$$\|y_z - z\| \leq d_S(z) + \|z - \bar{x}\|^2 \tag{1.7}$$

Alors, $y_z \in (\bar{x} + \delta \mathbf{B}_H)$ puisque **(1.7)** nous donne

$$\|y_z - \bar{x}\| \leq \|y_z - z\| + \|z - \bar{x}\| \leq 3\|z - \bar{x}\| \leq 3\gamma \leq \delta$$

ainsi on a

$$\begin{aligned}
\langle \xi, z - \bar{x} \rangle &= \langle \xi, y_z - \bar{x} \rangle + \langle \xi, z - y_z \rangle \\
&\leq \sigma \|y_z - \bar{x}\|^2 + \|y_z - z\| \quad \textit{d'après } \mathbf{(1.6)} \\
&\leq 9\sigma \|z - \bar{x}\|^2 + d_S(z) + \|z - \bar{x}\|^2 \quad \textit{d'après } \mathbf{(1.7)} \\
&\leq d_S(z) - d_S(\bar{x}) + (9\sigma + 1)\|z - \bar{x}\|^2.
\end{aligned}$$

ainsi $\xi \in \partial^P d_S(\bar{x})$. En d'autres termes, $N_S^P(\bar{x}) \cap \overline{\mathbf{B}}_H \subset \partial^P d_S(\bar{x})$.
Ce qui achève la démonstration.

Soient $X(r)$ et $Y(r)$ les ensembles définis par

$$X(r) = \Big\{ u \in H : \ d(u, S) \leq r \Big\}$$

et

$$Y(r) = \Big\{ u \in H : \ d(u, S) \geq r \Big\}.$$

Le théorème qui suit résume quelques caractérisations de la r-prox-régularité.

Théorème 1.10.3 *Soit $r \in]0, +\infty]$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) $d(., S)$ est continuement différentiable sur $U(r)$.

2) $Proj_S(u) \neq \emptyset$, $\forall u \in U(r)$ et la dérivée au sens de Gâteaux de $d(., S)$ existe.

3) $Proj_S(u) \neq \emptyset$, $\forall u \in U(r)$ et pour tout $r' \in]0, r[$ on a,

$$d(u, S) + d(u, Y(r')) = r', \quad \forall u \in U(r').$$

4) $\forall r' \in]0, r[$ et $u \in H$, tels que $d(u, S) = r'$ on a, $N^P_{X(r')}(u) \neq \emptyset$.

5) $\partial^P d(u, S) \neq \emptyset$ pour tout u dans $U(r)$.

Corollaire 1.10.6 *Un ensemble fermé S contenu dans H est convexe si et seulement si il est r-prox régulier pour tout r positif.*

Corollaire 1.10.7 *Un sous ensemble S de H est convexe si et seulement si il satisfait les deux conditions suivantes pour tout $u \in H \setminus S$*

1) $Proj_S(u) \neq \emptyset$.

2) La dérivée au sens de Gâteaux $d'(u, S)$ existe.

Théorème 1.10.4 *Soit S un ensemble r-prox-régulier pour un certain r positif. Alors, ce qui suit est vérifié.*

1) Soit $r' \in]0, r[$ alors, $Proj_S(.)$ est Lipschitzienne de rapport $\dfrac{r}{r - r'}$ sur $U(r')$.

2) Pour tout u et w dans $U(r)$ on a

$$\langle u - w, Proj_S(u) - Proj_S(w) \rangle \geq 0. \tag{1.8}$$

3) $d'(., S)$ est locallement Lipschitzienne sur $U(r)$.

Corollaire 1.10.8 *Soit S un sous ensemble convexe, fermé de H. Alors $Proj_S(.)$ est Lipschitzienne de rapport 1 sur H. De plus, (1.8) est vérifiée et $d'(., S)$ est localement Lipschitzienne.*

Théorème 1.10.5 *Soit S un sous ensemble de H. Supposons que S est faiblement fermé et soit r un réel positif. Alors, les assertions du théorème **(1.10.3)** sont vérifiées et sont équivalentes à*

6) $Proj_S(u)$ est un singleton pour tout u dans $U(r)$.

Corollaire 1.10.9 *Un sous ensemble faiblement fermé $S \subseteq H$ est convexe si et seulement si $Proj_S(u)$ est un convexe pour tout $u \notin S$.*

Corollaire 1.10.10 *Supposons que $H = \mathbb{R}^n$ et soit r un réel positif. Alors, les assertions des théorèmes* ***(1.10.3)*** *et* ***(1.10.5)*** *sont équivalentes à chacune des conditions suivantes,*

7) La dérivée au sens de Gâteaux $d'(u, S)$ existe en tout point u dans $U(r)$.

8) $d(., S)$ est strictement différentiable sur $U(r)$.

9) $d(., S)$ est régulière sur $U(r)$.

Enonçons maintenant un théorème qui va nous être utile dans la démonstration de notre théorème principal.

Théorème 1.10.6 *(Théorème de séparation)*
soit K un sous ensemble non vide d'un espace de Banach H. Alors,

$$\overline{co}(K) = \Big\{x \in H / \; \forall x' \in H', \; \langle x, x' \rangle \leq \delta^*(x', K)\Big\}.$$

Chapitre 2

Théorème d'équivalence entre le problème avec contrainte et le problème sans contrainte

2.1 Introduction

Ce chapitre sera consacré aux énoncés et démonsrations de certains résultats d'équivalence entre un problème sans contrainte et un autre avec contrainte, dont le dernier a été utilisé dans la preuve de notre résultat principal.
Les trois premier théorèmes ont été démontrés par L. Thibault dans [22] et le dernier à été récement démontré dans [15].

2.2 Théorèmes d'équivalence

Considérons un retard fini $r > 0$ et introduisons d'une façon classique, pour tout $t \in [0, T]$ et tout $x :]-r, T] \to H$, l'application $x_t :]-r, 0] \to H$ avec $x_t(s) = x(t+s)$.
Si on note par $\mathcal{C}_T$ (resp. $\mathcal{C}_0$ l'espace de Banach des applications continues définies de $]-r, T]$ (resp. $]-r, 0]$) dans H, alors, l'application $(t, x) \mapsto x_t$ est continue sur $[0, T] \times \mathcal{C}_T$.

Les résultats de ce chapitre seront énoncés sous les hypothèses suivantes.

Soient H un espace de Hilbert séparable, soit $T > 0$, et $C : I = [0,T] \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides fermées satisfaisant

(A_1) $\forall t \in I$, $C(t)$ est $\rho(t)$-prox-régulier pour $\rho(t)$ un nombre strictement positif.

(A_2) C est absolument continue, i.e., il existe une fonction positive absolument continue $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$|d(e,C(t)) - d(e,C(s))| \leq |a(t) - a(s)|$$

pour tout $e \in H$ et $s,t \in I$.

Parfois on considerera l'hypothèse plus faible suivante

(A_3) $C(t)$ admet une rétraction absolument continue

$$d(e,C(t)) - d(e,C(s)) \leq a(t) - a(s)$$

pour tout $e \in H$ et $s,t \in I$ avec $s \leq t$ et la fonction a définie comme dans (A_2).

Considérons les deux inclusions suivantes, avec la contrainte $x(t) \in C(t)$ pour tout $t \in [0,T]$, qui est implicite dans l'inclusin **(I)**.

$$\dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)), \quad x(0) = x_0 \in C(0) \quad \textbf{(I)}$$

$$\dot{x}(t) \in -\dot{a}(t)\partial d(x(t),C(t)), \quad x(0) = x_0 \in C(0) \quad \textbf{(II)}$$

Proposition 2.2.1 *Soit H un espace de Hilbert séparable et soit C une multi-application vérifiant l'assersion (A_3). Si $x(.)$ est solution de l'inclusion **(I)** et si tous les ensembles $C(t)$ sont normalement réguliers, alors, $x(.)$ est aussi une solution absolument continue de l'inclusion différentielle **(II)**.*

Théorème 2.2.1 *Soient H un espace de Hilbert et C une multi-application définie de $[0,T]$ dans H, vérifiant les assertions (A_1) et (A_2). Supposons de plus qu'on a*

$$2\int_0^t \dot{a}(s)ds < \rho(t) \quad \textit{pour tout } t \in [0,T].$$

*Alors, l'application $x(.)$ est solution de l'inclusion différentielle avec contrainte **(I)** si et seulement si elle est solution de l'inclusion différentielle sans contrainte **(II)**.*

Voici maintenant un résultat qui nous sera utile pour la démonstration du théorème **2.2.3**

Théorème 2.2.2 *(Voir [1], [6])*
Soit H un espace de Hilbert et soit $F : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs convexes compactes. Supposons que $F(.,x)$ est semicontinue supérieurement pour tout x fixé dans H, $F(t,.)$ mesurable pour tout t fixé dans $[0,T]$ et telle que $F(t,x) \subset \mathcal{K}$ pour tout $(t,x) \in [0,T] \times H$ où $\mathcal{K}$ est un certain sous ensemble convexe compact de H.
Alors, il existe une application Lipschitzienne $x : [0,T] \to H$ telle que $\dot{x}(t) \in F(t,x(t))$ presque partout sur $[0,T]$ et $x(0) = x_0$.

Nous allons donner ci-dessous l'énoncé et la démonstration d'un théorème d'équivalence dont nous avons tiré les idées pour prouver notre résultat du **chapitre 3**.

Théorème 2.2.3 *Soit H un espace de Hilbert séparable, soient $T > 0$ et $C : I = [0,T] \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides fermées satisfaisant les hypothèses (A_1)et (A_2).*
Soit $\Phi : I \times \mathcal{C}_0 \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides, convexes, faiblement compactes. Supposons que Φ est $\mathcal{L}[0,T] \otimes \mathcal{B}(\mathcal{C}_0)$-mesurable, qu'elle est semicontinue supérieurement par rapport à la seconde variable et qu'il existe une fonction positive intégrable $m(.)$ définie sur $[0,T]$ telle que pour tout $u \in \mathcal{C}_0$,

$$|\Phi(t,u)| = \sup\{\|e\|,\ e \in \Phi(t,u)\} \leq m(t).$$

Alors, l'application $x \in \mathcal{C}_0$ qui est absolument continue sur $[0,T]$ est solution de l'inclusion avec contrainte

$$\dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) + \Phi(t,x_t) \quad \textbf{\textit{(III)}}$$

avec $x = \varphi$ sur $]-r,0]$ (où $\varphi \in \mathcal{C}_0$ est fixé, satisfaisant $\varphi(0) \in C(0)$) si et seulement si elle est solution de l'inclusion sans contrainte

$$\dot{x}(t) \in -\dot{w}(t)\partial d(x(t),C(t)) + \Phi(t,x_t) \quad \textbf{\textit{(IV)}}$$

avec

$$w(t) = \int_0^t (\dot{a}(s) + m(s))ds$$

et

$$2\int_0^t w(s)ds < \rho(t)$$

pour tout $t \in]0, T[$.

De plus, l'ensemble des solutions est non vide lorsque H est de dimension finie.

Démonstration

Suposons que l'application $x(.)$ est solution de (**III**).

La multi-application Φ est à valeurs convexes faiblement compactes et est mesurable alors, d'après le théorème d'existence de sélections mesurables, Φ admet au moins une.

Soit donc $z(.)$ une sélection de $t \mapsto \Phi(t, x_t)$ (i.e., $z(t) \in \Phi(t, x_t)$, $\forall t \in [0, T]$) telle que

$$\dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) + z(t). \tag{2.1}$$

Posons

$\zeta(t) = \displaystyle\int_0^t z(s)ds$, $D(t) = C(t) - \zeta(t)$ et $y(t) = x(t) - \zeta(t)$.

Vérifions que $D(t)$ est normalement régulier pour tout $t \in [0, T]$.

On a $D(t)$ est $\rho(t)$-prox-régulier puisque $C(t)$ l'est aussi. En effet, pour tout $y, y' \in D(t)$ il existe $x, x' \in C(t)$ tels que $y = x + \zeta(t)$ et $y' = x' + \zeta(t)$, ainsi

$$\langle \frac{\xi}{\|\xi\|}, y - y' \rangle = \langle \frac{\xi}{\|\xi\|}, x - x' \rangle,$$

et comme $C(t)$ est $\rho(t)$-prox-régulier alors,

$$\langle \frac{\xi}{\|\xi\|}, y - y' \rangle \le \frac{1}{2\rho(t)}\|x - x'\|^2 = \frac{1}{2\rho(t)}\|y - y'\|^2,$$

il s'ensuit que pour tout $y' \in D(t)$ on a,

$$\langle \frac{\xi}{\|\xi\|}, y - y' \rangle \le \frac{1}{2\rho(t)}\|y - y'\|^2, \quad \forall y \in D(t),$$

c'est à dire, $D(t)$ est $\rho(t)$-prox-régulier. D'où

$$N^P_{D(t)}(x) = N^C_{D(t)}(x).$$

Or, nous avons l'inclusion qui est toujours vérifiée

$$N^P_{D(t)}(x) \subset N^F_{D(t)}(x) \subset N^C_{D(t)}(x)$$

ce qui entraine l'égalité

$$N^P_{D(t)}(x) = N^F_{D(t)}(x) = N^C_{D(t)}(x).$$

En d'autres termes, on vient de montrer que $D(t)$ est normalement régulier pour tout $t \in [0,T]$.

D'autre part, pour $s,t \in [0,T]$ avec $s \leq t$ et pour $e \in H$, nous avons

$$\begin{aligned}
|d(e,D(t)) - d(e,D(s))| &= |d(e,C(t)-\zeta(t)) - d(e,C(s)-\zeta(s))| \\
&= |d(e+\zeta(t),C(t)) - d(e+\zeta(s),C(s))| \\
&= |\inf_{y\in C(t)} \|e+\zeta(t)-y\| - d(e+\zeta(s),C(s)| \\
&= |\inf_{y\in C(t)} \|e+\zeta(t)-\zeta(s)+\zeta(s)-y\| - d(e+\zeta(s),C(s)| \\
&\leq |\inf_{y\in C(t)} \|e+\zeta(s)-y\| + \|\zeta(s)-\zeta(t)\| - d(e+\zeta(s),C(s)| \\
&= |d(e+\zeta(s),C(t)) + \|\zeta(s)-\zeta(t)\| - d(e+\zeta(s),C(s))| \\
&\leq \|\zeta(s)-\zeta(t)\| + |d(e+\zeta(s),C(t)) - d(e+\zeta(s),C(s))| \\
&\leq \|\zeta(s)-\zeta(t)\| + |a(t)-a(s)| \\
&\leq \|\int_s^t z(\tau)d\tau\| + |\int_s^t \dot{a}(\tau)d\tau| \\
&\leq \int_s^t \|z(\tau)\|d\tau + \int_s^t |\dot{a}(\tau)|d\tau \\
&\leq \int_s^t m(\tau)d\tau + \int_s^t \dot{a}(\tau)d\tau \\
&= \int_s^t (m(\tau)+\dot{a}(\tau))d\tau \\
&= \int_s^t \dot{w}(\tau)d\tau = |w(t)-w(s)|.
\end{aligned}$$

Ainsi D est une multi-application absolument continue.

Enfin, nous avons

Par suite **(2.2)** peut être écrite aussi de la façon suivante

$$\dot{x}(t) - z(t) \in -\dot{w}(t)\partial d(x(t), C(t))$$

c'est à dire

$$\dot{x}(t) \in -\dot{w}(t)\partial d(x(t), C(t)) + z(t)$$

et puisque $z(t) \in \Phi(t, x_t)$ alors

$$\dot{x}(t) \in -\dot{w}(t)\partial d(x(t), C(t)) + \Phi(t, x_t).$$

On conclut donc que $x(.)$ est solution de **(IV)**.

Montrons maintenant l'implication inverse.

Supposons que $x(.)$ est solution de l'inclusion **(IV)**, c'est à dire,

$$\dot{x}(t) \in -\dot{w}(t)\partial d(x(t), C(t)) + \Phi(t, x_t),$$

comme précédemment, soit $z(.)$ une sélection mesurable de Φ, telle que pour tout $t \in [0, T]$ on ait

$$\dot{x}(t) \in -\dot{w}(t)\partial d(x(t), C(t)) + z(t), \tag{2.3}$$

et définissons les applications $\zeta(.), D(.)$ et $y(.)$ pour tout $t \in [0, T]$ exactement comme pour la première implication.

Nous avons déjà montré que $D(t)$ est $\rho(t)$-prox-régulier et que D est absolument continue, i.e.,

$$|d(e, D(t)) - d(e, D(s))| \leq |w(t) - w(s)|,$$

de plus, supposons que

$$2\int_0^t \dot{w}(s)ds < \rho(t),$$

et observons que **(2.3)** est équivalente à

$$\dot{x}(t) - z(t) \in -\dot{w}(t)\partial d(x(t), C(t))$$

en d'autres termes

$$\dot{y}(t) \in -\dot{w}(t)\partial d(y(t), D(t))$$

et que $y(0) \in D(0)$. D'où, d'après le théorème **2.2.1**,

$$\dot{y}(t) \in -N_{D(t)}(y(t)) = -N_{C(t)}(x(t))$$

et comme $\dot{y}(t) = \dot{x}(t) - z(t)$ on a alors

$$\dot{x}(t) - z(t) \in -N_{C(t)}(x(t)),$$

ainsi

$$\dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) + z(t),$$

c'est à dire,

$$\dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) + \Phi(t, x_t),$$

d'où $x(.)$ est solution de l'inclusion avec contrainte **(III)**.
Il nous reste à montrer qu'en dimension finie, l'inclusion **(III)** admet au moins une solution $x(.) \in \mathcal{C}_T$ qui est absolument continue sur $[0, T]$. Pour cela, utilisons le fait que la multi-application à valeurs convexes compactes définie sur $[0, T] \times H$ par $(t, e) \mapsto -\dot{w}(t)\partial d(e, C(t))$ est $\mathcal{L}([0, T]) \otimes \mathcal{B}(H)$-mesurable et semicontinue supérieurement par rapport à la seconde variable.
Notons que pour tout $x(.) \in \mathcal{C}_T$ et tout $t \in [0, T]$, on a $x(t) = x_t$, posons alors, pour tout $(t, u) \in [0, T] \times \mathcal{C}_0$,

$$\Phi_0(t, u) = -\dot{w}(t)\partial d(u(0), C(t)) + \Phi(t, u)$$

par suite **(IV)** devient

$$\dot{x}(t) \in \Phi_0(t, x_t) \quad \textbf{(V)}$$

La dernière inclusion est une inclusion différentielle classique sans contraintes et avec retard. En effet, le second membre est une multi-application à valeurs convexes compactes, mesurable puisque elle est la somme de deux multi-applications mesurables. De même elle est semicontinue supérieurement.

D'une autre part, nous avons, pour tout $e \in \Phi_0(t,u)$

$\|e\| \leq \dot{w}(t) + m(t)$, en d'autres termes $\Phi_0(t,u)$, est contenue dans $(\dot{w}(t) + m(t))\overline{\mathbf{B}}_H$.

Par conséquent, d'après le théorème **2.2.4**, l'inclusion **(V)** admet au moins une solution. ce qui nous assure que l'ensemble des solutions est non vide.

Ainsi s'achève la démonstration du théorème.

Enfin, nous allons enoncer et démontrer le denier résultat d'équivalence qui à servi dans la démonstration de notre théorème principal

Théorème 2.2.4 *Soient H un espace de Hilbert, T, T_0 deux nombres réels positifs avec $T > T_0$, et $C : [T_0, T] \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides fermées vérifiant les deux hypothèses suivantes*

$(\mathbf{A}_1')$ $\forall t \in [T_0, T]$, *l'ensemble $C(t)$ est ρ-prox-régulier pour un certain $\rho \in]0, +\infty]$ fixé.*

$(\mathbf{A}_2')$ *C est absolument continue, i.e., il existe une fonction absolument continue positive $a : [T_0, T] \to \mathbb{R}_+$ telle que*

$$|d(x, C(t)) - d(y, C(s))| \leq \|x - y\| + |a(t) - a(s)|$$

pour tout $x, y \in H$ et $s, t \in [T_0, T]$.

Alors, une application absolument continue $x(.)$ est solution de l'inclusion différentielle avec contrainte (implicitement sujette à la contrainte $x(t) \in C(t)$ pour tout $t \in [T_0, T]$)

$$-\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) \text{ p.p. } t \in [T_0, T], \quad x(T_0) = x_0 \in C(T_0) \quad \textbf{\textit{(VI)}}$$

si et seulement si elle est solution de l'inclusion différentielle sans contrainte

$$-\dot{x}(t) \in |\dot{a}(t)| \partial d(x(t), C(t)), \text{ p.p. } t \in [T_0, T], \quad x(T_0) = x_0 \in C(T_0). \quad \textbf{\textit{(VII)}}$$

Démonstration

En considérant la **proposition 2.2.1**, il suffit de montrer que toute solution de l'inclusion **(VII)** est aussi solution de l'inclusion **(VI)**.

Soit alors $x(.)$ une solution de **(VII)**.

Il est clair que d'après la proposition **1.10.2**, il suffit de montrer que $x(t) \in C(t)$ pour tout $t \in [T_0, T]$.

Rappelons que $\dot{a}(.) \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([T_0, T])$, alors

$$\lim_{\lambda(A)\to 0} \int_A |\dot{a}(t)|dt = 0$$

où λ est la mesure de Lebesgue.

Considérons maintenant un réel $\delta > 0$ telque

$$\int_A |\dot{a}(t)|dt < \frac{\rho}{2}$$

pour tout ensemble Lebesgue mesurable $A \subset [T_0, T]$ telque $\lambda(A) < \delta$.

Fixons un entier N pour lequel on a $\dfrac{T - T_0}{N} < \delta$. Soit la subdivision de $[T_0, T]$ donnée par $T_0, T_1, ..., T_N = T$ et pour tout $i \in \{0, 1, ..., N\}$,

$$T_i = T_0 + i\Big[\frac{T - T_0}{N}\Big].$$

Pour tout $i = 1, ..., N$ notons par $x^i(.)$ la restriction de $x(.)$ à $[T_{i-1}, T_i]$. i.e., $x^i = x_{|[T_{i-1}, T_i]}$.

Observons que $x^1 : [T_0, T_1] \to H$ est solution de l'inclusion différentielle sans contrainte

$$-\dot{x}^1(t) \in |\dot{a}(t)|\partial d(x^1(t), C(t)) \quad p.p.t \in [T_0, T_1] \quad x^1(T_0) = x_0 \in C(T_0)$$

et comme

$$2\int_{T_0}^{T_1} |\dot{a}(t)|dt < \rho$$

puisque $T_1 - T_0 = \dfrac{T - T_0}{N} < \delta$, d'après le théorème d'equivalence **2.2.1** l'application $x^1(.)$ satisfait aussi $x^1(t) \in C(t)$ pour tout $t \in [T_0, T_1]$.

Supposons maintenant, que pour tout $k = 1, ..., i - 1$, on a, $x^k(t) \in C(t)$ pour tout $t \in [T_{k-1}, T_k]$. Comme $x^{i-1}(T_{i-1}) = x(T_{i-1}) = x^i(T_{i-1})$, l'application $x^i : [T_{i-1}, T_i] \to H$ est solution de l'inclusion différentielle

$$-\dot{x}^i(t) \in |\dot{a}(t)|\partial d(x^i(t), C(t)) \quad p.p.t \in [T_{i-1}, T_i], \quad x^i(T_{i-1}) = x^{i-1}(T_{i-1}) \in C(T_{i-1})$$

or, $2\displaystyle\int_{T_{i-1}}^{T_i} |\dot{a}(t)|dt < \rho$, puisque on a $T_{i-1} - T_i = \dfrac{T - T_0}{N} < \delta$.

En utilisant encore une fois le théorème **2.2.1**, on obtient $x^i(t) \in C(t)$ pour tout $t \in [T_{i-1}, T_i]$.

Par suite, pour tout $i = 1, ..., N$ on a, $x^i(t) \in C(t)$ pour tout $t \in [T_{i-1}, T_i]$,

D'où

$$x(t) \in C(t) \quad \textit{pour tout } t \in [T_0, T]$$

ainsi $x(.)$ est solution de **(VI)**.

Chapitre 3

Résultat d'existence pour le processus de la rafle avec somme de deux perturbations

3.1 Introduction

Avant d'énoncer notre théorème principal nous allons tout d'abord introduire un résultat que nous avons utilisé dans notre démonstration. Il s'agit d'une conséquence d'un théorème d'existence d'une multi-sélection pour une multi-application à valeurs non convexes, démontré par Tolstonogov, **Théorème 2.1** dans [23].

Théorème 3.1.1 *Soit H un espace de dimension finie, et soit $M : [0,T] \times H \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs fermées satisfaisant les hypothèses suivantes*
(i) M est $\mathcal{L}([0,T]) \otimes \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(H)$-mesurable.
(ii) Pour tout $t \in [0,T]$ et tout $(x,y) \in H \times H$ tels que $M(t,x,y)$ est convexe, $M(t,.,.)$ est semicontinue supérieurement et quand $M(t,x,y)$ est non convexe $M(t,.,.)$ est semi-continue inférieurement sur un certain voisinage de (x,y).
(iii) Il existe une fonction de Carathéodory $\zeta : [0,T] \times H \times H \to \mathbb{R}_+$ intégrablement bornée et telle que $M(t,x,y) \cap \overline{\mathbf{B}}_H(0, \zeta(t,x,y)) \neq \emptyset$, pour tout $(t,x,y) \in [0,T] \times H \times H$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout compact $K \subset \mathbf{C}_H([0,T])$, il existe une multi-application $\Phi : K \rightrightarrows \mathbf{L}^1_H([0,T])$ à valeurs non vides convexes, fermées et qui admet un graghe fortement faiblement séquentiellement fermé, telle que pour tout $u \in K$ et tout $\varphi \in \Phi(u)$ nous avons

$$\varphi(t) \in M(t, u(t), \dot{u}(t))$$

$$\|\varphi(t)\| \leq \zeta(t, u(t), \dot{u}(t)) + \varepsilon$$

pour presque tout $t \in [0,T]$.

3.2 résultat d'existence pour le processus de la rafle avec somme de deux perturbations

Nous sommes maintenant en mesure de donner notre résultat principal.

Théorème 3.2.1 *Soit H un espace de dimension finie et T un réel strictement positif*

- *Soit $K : H \rightrightarrows H$ une multi-application satisfaisant les hypothéses suivantes.*

(H_1) $\forall x \in H$, $K(x)$ est non vide fermé dans H et est uniformément ρ-prox-régulier pour un certain ρ fixé dans $]0, +\infty]$.

(H_2) K est Lipschitzienne de rapport $\lambda > 0$.

(H_3) $l = \sup_{x \in H} |K(x)| < +\infty$.

- *Soit $F : [0,T] \times H \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs convexes fermées, Lebesgue mesurable sur $[0,T]$, semicontinue supérieurement sur $H \times H$ et telle qu'il existe des fonctions positives Lebesgue mesurables $m_1(.)$, $p_1(.)$, $q_1(.)$ définies sur $[0,T]$ et vérifiant $F(t,x,y) \subset (m_1(t) + p_1(t)\|x\| + q_1(t)\|y\|)\overline{\mathbf{B}}_H$ pour tout $(t,x,y) \in [0,T] \times H \times H$.*
- *Soit $G : [0,T] \times H \times H \rightrightarrows H$ une autre multi-application vérifiant*

(i) G est $\mathcal{L}([0,T]) \otimes \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(H)$-mesurable.

(ii) $\forall t \in [0,T]$, $\forall (x,y) \in H \times H$ tels que $G(t,x,y)$ est convexe, $G(t,.,.)$ est semicontinue supérieurement et quand $G(t,x,y)$ est non convexe $G(t,.,.)$ est semicontinue inférieure-

ment sur un certain voisinage de (x, y).

(iii) *Il existe des fonctions positives Lebesgue mesurables* $m_2(.)$, $p_2(.)$, $q_2(.)$ *définies sur* $[0, T]$ *et vérifiant* $G(t, x, y) \subset (m_2(t) + p_2(t)\|x\| + q_2(t)\|y\|)\overline{\mathbf{B}}_H$ *pour tout* $(t, x, y) \in [0, T] \times H \times H$.

Soient $u_0 \in H$, $v_0 \in K(u_0)$ *et supposons que pour tout* $t \in [0, T]$, *nous avons*

$$\|v_0\| + (\lambda l + 2M(t))T \leq l \tag{3.1}$$

avec

$$M(t) = (m_1(t) + m_2(t)) + (p_1(t) + p_2(t))(\|u_0\| + lT) + (q_1(t) + q_2(t))l + \frac{1}{2}.$$

Alors, il existe deux applications Lipschitziennes $u, v : [0, T] \to H$ *telles que*

$$\begin{cases} u(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t v(s)ds, \ \forall t \in [0, T]; \\ -\dot{v}(t) \in N_{K(u(t))}(v(t)) + F(t, u(t), v(t)) + G(t, u(t), v(t)) \ p.p \ sur \ [0, T]; \\ v(t) \in K(u(t)), \ \forall t \in [0, T]; \\ u(0) = u_0, \ v(0) = v_0, \end{cases}$$

avec

$$\|\dot{v}(t)\| \leq \lambda l + 2M(t) \quad p.p. \ t \in [0, T].$$

En d'autres termes, il existe une solution Lipschitzienne pour le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}_{F,G}) \begin{cases} -\ddot{u}(t) \in N_{K(u(t))}(\dot{u}(t)) + F(t, u(t), \dot{u}(t)) + G(t, u(t), \dot{u}(t)), \ p.p.t \in [0, T]; \\ \dot{u}(t) \in K(u(t)), \quad \forall t \in [0, T]; \\ u(0) = u_0, \ \dot{u}(0) = v_0. \end{cases}$$

Démonstration.

<u>Etape 1</u>

Posons $I = [0, T]$; $M_i(t) = m_i(t) + p_i(t)(\|u_0\| + lT) + q_i(t)l + \dfrac{1}{4} \quad (i = 1, 2)$,
et observons que $M(.) = M_1(.) + M_2(.)$.

Considérons aussi les ensembles suivants

$$\mathcal{X} = \Big\{ u \in \mathbf{C}_H(I)/\ u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds, \forall t \in I\ et\ \|\dot{u}(t)\| \leq l,\ p.p\ sur\ I \Big\},$$

$$\mathcal{U} = \Big\{ v \in \mathbf{C}_H(I)/\ v(t) = v_0 + \int_0^t \dot{v}(s)ds \quad \forall t \in I\ et\ \|\dot{v}(t)\| \leq \lambda l + 2M(t),\ p.p\ sur\ I \Big\},$$

$$\mathcal{K}_i = \Big\{ h \in \mathbf{L}^1_H(I)/\ \|h(t)\| \leq M_i(t),\ p.p\ sur\ I \Big\} \quad (i = 1, 2),$$

$$\mathcal{K} = \Big\{ h \in \mathbf{L}^1_H(I)/\ \|h(t)\| \leq M(t),\ p.p\ sur\ I \Big\}.$$

Les ensembles $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{K}$ *et* $\mathcal{K}_i$ $(i = 1, 2)$ sont convexes, ce qui est aisé à vérifier.

Montrons que $\mathcal{X}$ est compact.

Nous avons pour tout $t \in I$,

$$\mathcal{X}(t) = \Big\{ u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds \quad et\ \|\dot{u}(t)\| \leq l,\ p.p\ sur\ I \Big\}$$

qu'on peut écrire aussi

$$\mathcal{X}(t) = \Big\{ u(t),\ u \in \mathcal{X} \Big\}$$

$\mathcal{X}(t)$ est borné parce que, pour tout $t \in I$ et tout $u \in \mathcal{X}$ on a

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|\dot{u}(s)\|ds \leq \|u_0\| + l.T.$$

Aussi $\overline{\mathcal{X}(t)} \subset H$ qui est de dimension finie, alors $\mathcal{X}(t)$ est relativement compact.

D'une autre part, $\mathcal{X}$ est équicontinu, En effet,

pour tout $u \in \mathcal{X}$, et pour tout $t, s \in I$ nous avons

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(s)\| &= \|u_0 + \int_0^t \dot{u}(\tau)d\tau - u_0 - \int_0^s \dot{u}(\tau)d\tau\| \\ &= \| \int_s^t \dot{u}(\tau)d\tau\| \\ &\leq \int_s^t \|\dot{u}(\tau)\|d\tau \\ &\leq \int_s^t l d\tau = l|s - t| \end{aligned}$$

on aura alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall t, s \in I$ tels que $|t - s| < \delta \Rightarrow \|u(t) - u(s)\| \leq \varepsilon$, il suffit de prendre $\delta < \frac{\varepsilon}{l}$ d'où l'équicontinuité de $\mathcal{X}$. Enfin, d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà (**1.4.1**), on conclut que $\mathcal{X}$ est relativement compact.

Montrons maintenant que $\mathcal{X}$ est fermé dans $\mathbf{C}_H(I)$.

Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{X}$ convergeant vers $u \in \mathbf{C}_H(I)$.

On a $(u_n)_n \subset \mathcal{X}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}_n(s)ds$ avec $\|\dot{u}_n(t)\| \leq l$ presque partout sur I.

D'une autre part, $(\dot{u}_n(.))$ est bornée dans $\mathbf{L}_H^\infty(I)$ et donc compacte par rapport à la topologie faible*, $\sigma(\mathbf{L}_H^\infty, \mathbf{L}_H^1)$. On peut lui extraire une sous suite qu'on notera aussi $(\dot{u}_n(.))$ convergeant faiblement* vers une fonction v dans $\mathbf{L}_H^\infty(I)$. Ainsi, $\forall y \in \mathbf{L}_H^1(I)$

$$\langle \dot{u}_n(.), y(.)\rangle \rightarrow \langle v(.), y(.)\rangle.$$

Soit $z \in \mathbf{L}_{H'}^\infty(I) = \mathbf{L}_H^\infty(I) \subset \mathbf{L}_H^1(I)$, alors

$$\langle \dot{u}_n(.), z(.)\rangle \rightarrow \langle v(.), z(.)\rangle$$

d'où, $(\dot{u}_n(.))_n$ converge faiblement ou $\sigma(\mathbf{L}_H^1(I), \mathbf{L}_H^\infty(I))$ vers $v(.)$ dans $\mathbf{L}_H^1(I)$. En posant $w(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds$, on voit bien que w est absolument continue avec $\dot{w}(.) = v(.)$ p.p et $\|\dot{w}(t)\| = \|v(t)\| \leq l$ puisque l'ensemble $\{y \in \mathbf{L}_H^1(I),\ \|y(t)\| \leq l\}$ est convexe fortement fermé dans $\mathbf{L}_H^1(I)$, donc il est faiblement fermé dans $\mathbf{L}_H^1(I)$.

En conclusion nous avons pour tout $y(.) \in \mathbf{L}_H^\infty(I)$

$$\lim_{n\to\infty} \langle \dot{u}_n(.), y(.)\rangle = \langle v(.), y(.)\rangle$$

ce qui est équivalent à

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle \dot{u}_n(s), y(s)\rangle ds = \int_0^T \langle v(s), y(s)\rangle ds,$$

en particulier pour $y(.) = \chi_{[0,t]}(.).e_j \in \mathbf{L}_H^\infty(I)$ avec $(e_j)_j$ une base de H.

D'où,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle \dot{u}_n(s), \chi_{[0,t]}(s).e_j\rangle ds = \int_0^T \langle v(s), \chi_{[0,t]}(s).e_j\rangle ds$$

qui entraine

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \langle \dot{u}_n(s), e_j\rangle ds = \int_0^t \langle v(s), e_j\rangle ds$$

par suite

$$\langle \lim_{n\to\infty}\int_0^t \dot{u}_n(s)ds,\ e_j\rangle = \langle \int_0^t v(s)ds,\ e_j\rangle, \quad \forall j.$$

on en déduit alors

$$\lim_{n\to\infty}(u_0 + \int_0^t \dot{u}_n(s)ds) = u_0 + \int_0^t v(s)yds.$$

i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds = w(t).$$

ainsi $w = u$, c'est à dire, $u \in \mathcal{X}$ par conséquent $\mathcal{X}$ est fermé donc compact dans $\mathbf{C}_H(I)$.

En utilisant les mêmes arguments ci-dessus, on voit bien que $\mathcal{U}$ est compact dans $\mathbf{C}_H(I)$.

Et il est évident que les ensembles $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}_i$ $(i = 1, 2)$ sont faiblement compacts dans $\mathbf{L}^1_H(I)$.

Par le théorème **3.1.1**, il existe des multi-applications $\Phi_i : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathbf{L}^1_H(I)$ $(i = 1, 2)$ à valeurs non vides convexes fermées, de graphes fortement faiblement séquentiellement fermés et telles que pour tout $u \in \mathcal{X}$ et tout $\varphi \in \Phi_1(u)$ nous avons

$$\varphi(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t))$$

et

$$\begin{aligned}\|\varphi(t)\| &\le m_1(t) + p_1(t)\|u(t)\| + q_1(t)\|\dot{u}(t)\| + \frac{1}{4}\\ &\le m_1(t) + p_1(t)(\|u_0\| + lT) + q_1(t)l + \frac{1}{4}\\ &= M_1(t)\end{aligned}$$

pour presque tout $t \in I$.

Et pour tout $u \in \mathcal{X}$ et tout $\varphi \in \Phi_2(u)$ nous avons

$$\varphi(t) \in G(t, u(t), \dot{u}(t))$$

et

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t)\| &\leq m_2(t) + p_2(t)\|u(t)\| + q_2(t)\|\dot{u}(t)\| + \frac{1}{4} \\
&\leq m_2(t) + p_2(t)(\|u_0\| + lT) + q_2(t)l + \frac{1}{4} \\
&= M_2(t)
\end{aligned}$$

pour presque tout $t \in I$.

Ces deux dernières inégalités montrent que Φ_i $(i = 1, 2)$ est à valeurs faiblement compactes dans $\mathbf{L}^1_H(I)$.

Considérons maintenanant la multi-application $\Phi : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathbf{L}^1_H(I)$, où

$$\Phi(.) = \Phi_1(.) + \Phi_2(.).$$

Il est évident que Φ est à valeurs non vides convexes fermées dans $\mathcal{K}$.

En effet, $\forall f \in \mathcal{X}$, on a $\Phi(f) = \Phi_1(f) + \Phi_2(f)$ et sachant que la somme de deux convexes est convexe alors, $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ est à valeurs convexes.

Aussi, $\forall f \in \mathcal{X}$ et $\forall \varphi \in \Phi(f)$ on a $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ avec $\varphi_i \in \Phi_i(f)$ $(i = 1, 2)$,

et $\|\varphi_i(t)\| \leq M_i(t)$ $(i = 1, 2)$ alors $\Phi_i(f) \subset \mathcal{K}_i$ $(i = 1, 2)$.

D'où, $\Phi(f) = \Phi_1(f) + \Phi_2(f) \subset \mathcal{K}$ et $\mathcal{K}$ faiblement compact.

Soit $(u_n)_n$ une suite de $\Phi(f) \subset \mathcal{K}$, donc on peut lui extraire une sous suite qu'on notera de la même manière et qui converge faiblement vers une application $u \in \mathcal{K}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = x_n + y_n$ avec $x_n \in \Phi_1(f)$ et $y_n \in \Phi_2(f)$. En d'autres termes, $(x_n)_n \subset \Phi_1(f)$ qui est faiblement compact, alors $(x_n)_n$ converge faiblement vers une limite x dans $\Phi_1(f)$. De même pour $(y_n)_n$, elle converge faiblement vers y dans $\Phi_2(f)$. Par suite

$$u_n = x_n + y_n \rightharpoonup x + y \in \Phi_1(f) + \Phi_2(f) = \Phi(f) \Rightarrow x + y \in \Phi(f)$$

et $u_n \rightharpoonup u$, par l'unicité de la limite on a $u = x + y \in \Phi(f)$, il s'ensuit que $\Phi(f)$ est faiblement fermé et comme il est convexe, on conclut qu'il est fortement fermé. C'est à dire, Φ est à valeurs convexes fermées faiblement compactes.

De plus, le graphe de Φ est fortement faiblement séquentiellement fermé.

En effet, soit $(x_n, y_n)_n$ une suite de $gph\Phi$ convergeant vers une limite (x, y) dans $\mathcal{X} \times \mathbf{L}^1_H(I)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $y_n \in \Phi(x_n) = \Phi_1(x_n) + \Phi_2(x_n)$ alors, il existe deux suites $(y^i_n)_n \subset \Phi_i(x_n) \subset \mathcal{K}_i$ qui convergent vers y_i, $(i = 1, 2)$ et $y_n = y^1_n + y^2_n$. Or, d'après le théorème **3.1.1**, le graphe de Φ_i est fortement faiblement séquentiellement fermé, alors, $y_i \in \Phi_i(x)$, par ailleurs on a

$$y_n = y^1_n + y^2_n \longrightarrow y_1 + y_2$$

d'où,

$$y = y_1 + y_2 \in \Phi_1(x) + \Phi_2(x) = \Phi(x),$$

donc (x, y) est dans $gph\Phi$.

Ainsi, le graphe de Φ est fortement faiblement séquentiellement fermé

Etape 2

Introduisons maintenant la multi-application $\Psi : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathbf{C}_H([0, T])$ définie par,

$$\Psi(f) = \Big\{u \in \mathbf{C}_H([0,T])/\ \exists v \in \mathcal{U},\ u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds,\ \forall t \in I;$$

$$-\dot{v}(t) \in (\lambda l + M(t))\partial d(\dot{f}(t), K(f(t))) + h(t), p.p.sur\ I,\ h \in \Phi(f)\Big\}$$

Ψ ainsi définie est à valeurs non vides convexes compactes.

En effet, observons que pour tout $f \in \mathcal{X}$ la multi-application $K \circ f$ est Lipschitzienne de rapport λl, puisque $\forall t, t' \in I$ on a,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}((K\circ f)(t),(K\circ f)(t')) &= \mathcal{H}(K(f(t)),K(f(t')))\\
&\leq \lambda\|f(t)-f(t')\|\\
&= \lambda\|u_0+\int_0^t \dot{f}(\tau)d\tau - u_0 - \int_0^{t'}\dot{f}(\tau)d\tau\|\\
&= \lambda\|\int_t^{t'}\dot{f}(\tau)d\tau\| \leq \lambda\int_t^{t'}\|\dot{f}(\tau)\|d\tau\\
&\leq \lambda\int_t^{t'} l d\tau = \lambda l|t-t'|
\end{aligned}
$$

d'où

$$\mathcal{H}((K\circ f)(t),(K\circ f)(t')) \leq \lambda l|t-t'|$$

i.e., $K\circ f$ est une multi-application Lipschitzienne de rapport λl.
Comme $K(f(t))$ est ρ-prox-régulier, alors $\partial d(\dot{f}(t),K(f(t)))$ est un convexe fermé non vide.

D'une autre part, pour tout $f\in\mathcal{X}$, la multi-application $t\mapsto\partial d(\dot{f}(t),K(f(t)))$ est mesurable. Pour le montrer, considérons la fonction β définie de $H\times H$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\beta(x,y)=d(x,K(y)).$$

et remarquant que pour tout $x\in H$, $y\mapsto\beta(x,y)$ est Lipschitzienne et que la fonction

$$t\mapsto\beta(\dot{f}(t),f(t))=d(\dot{f}(t),K(f(t)))$$

est mesurable, puisque on a $(K\circ f)(.)$ est Lipschitzienne donc absolument continue et alors mesurable.
Soit maintenant la multi-application Λ de I dans H définie par

$$\Lambda(t)=\partial d(\dot{f}(t),K(f(t))).$$

Et montrons que sa fonction d'appui, $t \mapsto \delta^*(v, \Lambda(t))$ pour tout $v \in H$, est mesurable.

On a pour tout $t \in I$

$$\delta^*(v, \Lambda(t)) = \limsup_{\substack{S \to K(f(t)) \\ h \searrow 0}} \frac{d(\dot{f}(t), S + hv) - d(\dot{f}(t), S)}{h} \tag{3.2}$$

$$= \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{(S \subset V(K(f(t)), \frac{1}{n}) \\ 0 < h < \frac{1}{n}}} \frac{d(\dot{f}(t), S + hv) - d(\dot{f}(t), S)}{h} \tag{3.3}$$

Sachant que, si $\phi : X \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et D une partie dense dans $A \subset X$, alors

$$\sup_D \phi = \sup_A \phi.$$

Puisque $S \subset V(K(f(t)), \frac{1}{n})$ alors $S = K(f(t)) + A$ où $A \subset \frac{1}{n} D$ et D est une partie dense dénombrable dans $\mathbf{B}_H$.

Aussi $]0, \frac{1}{n}[\cap \mathbb{Q}$ est dense dans $]0, \frac{1}{n}[$, alors l'égalité **(3.3)** devient

$$\delta^*(v, \Lambda(t)) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{A \subset \frac{1}{n} D \\ r \in]0, \frac{1}{n}[\cap \mathbb{Q}}} \frac{d(\dot{f}(t), K(f(t)) + A + rv) - d(\dot{f}(t), K(f(t)) + A)}{r}$$

et on a la fonction

$$t \mapsto \left[d(\dot{f}(t), K(f(t)) + A + rv) - d(\dot{f}(t), K(f(t)) + A) \right]$$

est mesurable pour tout r et A fixés.

D'autre part, r et A parcourent respectivement $]0, \frac{1}{n}[\cap \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{n} D$ qui sont des parties dénombrables.

Alors

$$t \mapsto \sup_{\substack{A \subset \frac{1}{n} D \\ r \in]0, \frac{1}{n}[\cap \mathbb{Q}}} \frac{d(\dot{f}(t), K(f(t)) + A + rv) - d(\dot{f}(t), K(f(t)) + A)}{r}$$

est une fonction mesurable.

De même

$$t \mapsto \inf_{n \in \mathbb{N}} \left[\sup_{\substack{A \subset \frac{1}{n} D \\ r \in]0, \frac{1}{n}[\cap \mathbb{Q}}} \frac{d(\dot{f}(t), K(f(t)) + A + rv) - d(\dot{f}(t), K(f(t)) + A)}{r} \right]$$

est aussi une fonction mesurable.

C'est à dire,

$$t \mapsto \delta^*(v, \Lambda(t))$$

est mesurable.

Par suite, Λ est mesurable, car sa fonction d'appui est mesurable, donc la multi-application

$$t \mapsto -[(\lambda l + M(t))\partial d(\dot{f}(t), K(f(t))) + h(t)]$$

est aussi mesurable à valeurs convexes fermées. D'après le théorème d'existence de sélections mesurables, il existe une application $\gamma : I \to H$ mesurable telle que

$$\gamma(t) \in -[(\lambda l + M(t))\partial d(\dot{f}(t), K(f(t))) + h(t)],$$

pour tout $t \in I$.

Considérons alors l'application $v : I \to H$ définie par

$$v(t) = v_0 + \int_0^t \gamma(s)ds,$$

ainsi

$$\dot{v}(t) \in -[(\lambda l + M(t))\partial d(\dot{f}(t), K(f(t))) + h(t)],$$

et $\|\dot{v}(t)\| \leq \lambda l + 2M(t)$ puisque $\partial d(\dot{f}(t), K(f(t))) \subset \overline{\mathbf{B}}_H$ et $h \in \Phi(f)$. Ce qui assure que $v \in \mathcal{U}$.

Par conséquent, l'application $u \in \mathbf{C}_H(I)$ définie par $u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds$ appartient à $\Psi(f)$, d'où la non vacuité des valeurs de Ψ.

• **Montrons que Ψ est à valeurs convexes.**

Soient $f \in \mathcal{X}$, u_1, $u_2 \in \Psi(f)$ et $\alpha \in [0,1]$. Alors, il existe v_1, v_2 dans $\mathcal{U}$ telles que

$$u_1(t) = u_0 + \int_0^t v_1(s)ds \quad et \quad u_2(t) = u_0 + \int_0^t v_2(s)ds \quad \forall t \in I$$

avec

$$-\dot{v}_i(t) \in (\lambda l + M(t))\partial d(\dot{f}(t), K(f(t))) + h_i(t), \; p.p. \; sur \; I, \quad h_i \in \Phi(f). \quad (i = 1, 2) \quad (3.4)$$

D'où

$$\begin{aligned}\alpha u_1(t)+(1-\alpha)u_2(t) &= \alpha\Big(u_0+\int_0^t v_1(s)ds\Big)+(1-\alpha)\Big(u_0+\int_0^t v_2(s)ds\Big), \quad \forall t\in I\\ &= u_0+\int_0^t\Big(\alpha v_1(s)+(1-\alpha)v_2(s)\Big)ds, \quad \forall t\in I\end{aligned}$$

et comme $\mathcal{U}$ est convexe on conclut que $v=\alpha v_1+(1-\alpha)v_2\in\mathcal{U}$.

D'une autre part, nous avons par **(3.4)**

$$-\dot{v}_i(t)-h_i(t)\in(\lambda l+M(t))\partial d(\dot{f}(t),K(f(t))),\ (i=1,2)$$

puisque le sous différentiel est convexe, nous obtenons

$$-\Big(\alpha\dot{v}_1(t)+(1-\alpha)\dot{v}_2(t)\Big)-\Big(\alpha h_1(t)+(1-\alpha)h_2(t)\Big)\in(\lambda l+M(t))\partial d(\dot{f}(t),K(f(t)))$$

par suite

$$-\Big(\alpha\dot{v}_1(t)+(1-\alpha)\dot{v}_2(t)\Big)\in(\lambda l+M(t))\partial d(\dot{f}(t),K(f(t)))+\Big(\alpha h_1(t)+(1-\alpha)h_2(t)\Big)$$

$\Phi(f)$ étant convexe, alors l'application $h=\alpha h_1+(1-\alpha)h_2\in\Phi(f)$.

Et $v(t)=\alpha v_1(t)+(1-\alpha)v_2(t)$ nous donne $\dot{v}(t)=\alpha\dot{v}_1(t)+(1-\alpha)\dot{v}_2(t)$.

En conclusion

$$-\dot{v}(t)\in(\lambda l+M(t))\partial d(\dot{f}(t),K(f(t)))+h(t),\ p.p.\quad h\in\Phi(f).$$

ce ci montre que $u=\alpha u_1+(1-\alpha)u_2\in\Psi(f)$. D'où la convexité des valeurs de Ψ.

• Remarquons maintenant que pour tout $f\in\mathcal{X}$, $\Psi(f)\subset\mathcal{X}$.

En effet, pour tout $u\in\Psi(f)$, il existe une application $v\in\mathcal{U}$ telle que

$$u(t)=u_0+\int_0^t v(s)ds,\ \forall t\in I$$

et

$$-\dot{v}(t)\in(\lambda l+M(t))\partial d(\dot{f}(t),K(f(t)))+h(t),\ p.p.\quad h\in\Phi(f),$$

avec $\dot{u}(t) = v(t)$ et $\|\dot{v}(t)\| \leq \lambda l + 2M(t)$, or $v(t) = v_0 + \int_0^t \dot{v}(s)ds$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\|v(t)\| &= \|v_0 + \int_0^t \dot{v}(s)ds\| \\
&\leq \|v_0\| + \int_0^t \|\dot{v}(s)\|ds \\
&\leq \|v_0\| + \int_0^t (\lambda l + 2M(s))ds.
\end{aligned}$$

Par la relation **(3.1)** nous avons

$$\lambda l + 2M(s) \leq \frac{l - \|v_0\|}{T}$$

par suite

$$\begin{aligned}
\|v(t)\| &\leq \|v_0\| + \int_0^t \frac{l - \|v_0\|}{T}ds \\
&\leq \|v_0\| + \frac{l - \|v_0\|}{T}\int_0^t ds \\
&\leq \|v_0\| + \frac{l - \|v_0\|}{T}T \\
&= l,
\end{aligned}$$

d'où $u \in \mathcal{X}$, c'est à dire $\Psi(f) \subset \mathcal{X}$.

- **Montrons que Ψ est à valeurs compactes**

Puisque $\mathcal{X}$ est compact et $\Psi(f) \subset \mathcal{X}$ pour tout $f \in \mathcal{X}$, il suffit de montrer que Ψ est à valeurs fermées. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $\Psi(f)$ convergeant vers $u \in \mathbf{C}_H(I)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $v_n \in \mathcal{U}$ telle que

$$u_n(t) = u_0 + \int_0^t v_n(s)ds, \quad \forall t \in I$$

et

$$-\dot{v}_n(t) \in \big(\lambda l + M(t)\big)\partial d(\dot{f}(t), K(f(t))) + h_n(t), \ p.p.sur\ I \quad avec \quad h_n \in \Phi(f).$$

Or $(v_n)_n \subset \mathcal{U}$ qui est compact donc on peut lui extraire une sous suite qu'on notera aussi $(v_n)_n$, qui converge uniformément vers $v \in \mathcal{U}$ et $(\dot{v}_n)_n$ convergera faiblement (ou

$\sigma(\mathbf{L}^1_H, \mathbf{L}^\infty_H)$) vers $\dot{v} \in \mathbf{L}^1_H(I)$, d'après la conséquence du théorème d'Ascoli-Arzelà (théorème **1.4.1**). De même $(h_n)_n \subset \Phi(f)$ qui est faiblement compact donc on peut lui extraire une sous suite qu'on notera de la même manière et qui converge faiblement vers une application $h \in \Phi(f)$. D'où, la suite $(\dot{v}_n + h_n)_n$ converge faiblement vers l'application $\dot{v} + h \in \mathbf{L}^1_H(I)$.

D'autre part, on a $\dot{v}_n(t) + h_n(t) \in -\big(\lambda l + M(t)\big)\partial d(\dot{f}(t), K(f(t)))$ et comme $K(f(t))$ est ρ-prox-régulier alors $-\big(\lambda l + M(t)\big)\partial d(\dot{f}(t), K(f(t)))$ est un convexe fermé. Par le lemme de Mazur on obtient

$$\dot{v}(t) + h(t) \in -\big(\lambda l + M(t)\big)\partial d(\dot{f}(t), K(f(t))),\ \textit{p.p. sur } I.$$

En d'autres termes

$$-\dot{v}(t) \in \big(\lambda l + M(t)\big)\partial d(\dot{f}(t), K(f(t))) + h(t),\ \textit{p.p. sur } I \quad \textit{et } h \in \Phi(f). \tag{3.5}$$

De plus, $\|\dot{v}(t)\| \le \lambda l + 2M(t)$, c'est à dire $v \in \mathcal{U}$ et

$$\begin{aligned} u(t) &= \lim_{n\to\infty} u_n(t) = u_0 + \int_0^t \lim_{n\to\infty} v_n(s)ds \\ &= u_0 + \int_0^t v(s)ds \end{aligned}$$

En conclusion on a $u(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t v(s)ds$ et $v \in \mathcal{U}$ avec $\dot{v}(t)$ vérifiant **(3.5)**, c'est à dire $u \in \Psi(f)$, donc $\Psi(f)$ est fermé. Ce qui traduit la compacité de $\Psi(f)$.

Enfin, montrons que la multi-application Ψ est semicontinue supérieurement

Puisque Ψ est à valeurs compactes dans $\mathcal{X}$, alors pour montrer qu'elle est semicontinue supérieurement il suffit de montrer que son graphe noté $gph(\Psi)$ est fermé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

Nous avons,

$$gph(\Psi) = \Big\{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \ / \ y \in \Psi(x)\Big\}.$$

Soit $(x_n, y_n)_n$ une suite de $gph(\Psi)$ convergeant vers $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \in \Psi(x_n)$, par conséquent, il existe $v_n \in \mathcal{U}$ telle que, $y_n(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t v_n(s)ds$ pour tout

$t \in [0,T]$ et

$$-\dot{v}_n(t) \in \big(\lambda l + M(t)\big)\partial d(\dot{x}_n(t), K(x_n(t))) + h_n(t),\ p.p.\ sur\ I\ et\ h_n \in \Phi(x_n).$$

Comme $(v_n)_n \subset \mathcal{U}$, on peut lui extraire une sous suite convergente qu'on notera de la même manière et qui converge vers une application $v \in \mathcal{U}$ et telle que $(\dot{v}_n)_n$ converge faiblement vers l'application $\dot{v}$ pour la topologie $\sigma(\mathbf{L}^1_H, \mathbf{L}^\infty_H)$ dans $\mathbf{L}^1_H(I)$.
De même, $(h_n)_n \subset \Phi(x_n) \subset \mathcal{K}$ et $\mathcal{K}$ est $\sigma(\mathbf{L}^1_H, \mathbf{L}^\infty_H)$-compact, donc on peut extraire à $(h_n)_n$ une sous suite qu'on notera toujours $(h_n)_n$ et qui converge faiblement vers une application $h \in \Phi(x)$, car $gph(\Phi)$ est fortement faiblement séquentiellement fermé. Nous obtenons

$$\dot{v}_n(t) + h_n(t) \in -(\lambda l + M(t))\partial d(\dot{x}_n(t), K(x_n(t)))$$

avec $(\dot{v}_n + h_n)$ *convergeant faiblement vers* $\dot{v} + h \in \mathbf{L}^1_H(I)$.
Par suite, d'après le lemme de Mazur, on a pour presque tout $t \in I$,

$$\dot{v}(t) + h(t) \in \bigcap_n \overline{co}\Big\{\dot{v}_k(t) + h_k(t),\ k \geq n\Big\}.$$

Fixons t dans I et μ dans H, puis posons

$$A_n = \Big\{\dot{v}_k(t) + h_k(t),\ k \geq n\Big\}.$$

D'après le **théorème 1.10.6** on a

$$\langle \dot{v}(t) + h(t), \mu\rangle \leq \delta^*(\mu, A_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

d'où

$$\langle \dot{v}(t) + h(t), \mu\rangle \leq \sup_{k\geq n}\langle \dot{v}_k(t) + h_k(t), \mu\rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ainsi

$$\begin{aligned}\langle \dot{v}(t) + h(t), \mu\rangle &\leq \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geq n}\langle \dot{v}_k(t) + h_k(t), \mu\rangle \\ &= \limsup_{n\to\infty}\langle \dot{v}_n(t) + h_n(t), \mu\rangle \\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\delta^*(-(\lambda l + M(t))\partial d(\dot{x}_n(t), K(x_n(t))), \mu),\end{aligned}$$

puisque $\dot{v}_n(t) + h_n(t) \in -(\lambda l + M(t))\partial d(\dot{x}_n(t), K(x_n(t)))$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Or l'application $(z, x) \mapsto \delta^*(-(\lambda l + M(t))\partial d(x, K(z)), \mu)$ est semicontinue supérieurement pour tout $\mu \in H$, alors par la relation entre la semicontinuité d'une multi-application et cette relation avec la fonction d'appui (Théorème **1.6.4** et la Propriété **(2)** de la définition **1.6.7**), on a

$$\limsup_{n\to\infty} \delta^*(-(\lambda l + M(t))\partial d(\dot{x}_n(t), K(x_n(t))), \mu) \leq \delta^*(-(\lambda l + M(t))\partial d(\dot{x}(t), K(x(t))), \mu).$$

Ainsi

$$\langle \dot{v}(t) + h(t), \mu \rangle \leq \delta^*(-(\lambda l + M(t))\partial d(\dot{x}(t), K(x(t))), \mu).$$

D'autre part, en utilisant cette dernière inégalité et comme elle est vérifiée pour tout $\mu \in H$, on obtient

$$\langle \dot{v}(t) + h(t), -\mu \rangle \leq \delta^*(-(\lambda l + M(t))\partial d(\dot{x}(t), K(x(t))), -\mu).$$

d'où

$$-\langle \dot{v}(t) + h(t), \mu \rangle \leq -\delta^*(-(\lambda l + M(t))\partial d(\dot{x}(t), K(x(t))), \mu).$$

par suite

$$\langle \dot{v}(t) + h(t), \mu \rangle \geq \delta^*(-(\lambda l + M(t))\partial d(\dot{x}(t), K(x(t))), \mu).$$

ce qui entraine

$$\langle \dot{v}(t) + h(t), \mu \rangle = \delta^*(-(\lambda l + M(t))\partial d(\dot{x}(t), K(x(t))), \mu).$$

Sachant que $\partial d(\dot{x}(t), K(x(t)))$ est un convexe fermé, on a alors d'après le corollaire **1.6.1**

$$d(\dot{v}(t) + h(t), K(x(t))) = \sup_{\mu \in \overline{\mathbf{B}}_H} [\langle \dot{v}(t) + h(t), \mu \rangle - \delta^*(-(\lambda l + M(t))\partial d(\dot{x}(t), K(x(t))), \mu)] = 0.$$

par conséquent

$$\dot{v}(t) + h(t) \in \overline{-(\lambda l + M(t))\partial d(\dot{x}(t); K(x(t)))} = -(\lambda l + M(t))\partial d(\dot{x}(t); K(x(t))),$$

on conclut que

$$\dot{v}(t) + h(t) \in -(\lambda l + M(t))\partial d(\dot{x}(t); K(x(t))),$$

ainsi

$$-\dot{v}(t) \in (\lambda l + M(t))\partial d(\dot{x}(t), K(x(t))) + h(t), \text{ } p.p. \text{ } sur \text{ } I \quad avec \text{ } h \in \Phi(x).$$

Enfin, on a

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} y_n(t) = v_0 + \int_0^t v(s)ds, \quad \forall t \in I$$

avec $v \in \mathcal{U}$ et

$$-\dot{v}(t) \in (\lambda l + M(t))\partial d(\dot{x}(t), K(x(t))) + h(t), \text{ } p.p.sur \text{ } I \quad et \text{ } h \in \Phi(x)$$

Ce qui prouve que $y \in \Psi(x)$, i.e., $(x, y) \in gph(\Psi)$, d'où la fermeture du graphe de Ψ. En d'autres termes Ψ est semicontinue supérieurement.

En appliquant le théorème de Kakutani à la multi-application Ψ on obtient l'existence d'un point fixe $f \in \Psi(f)$. Donc $\exists v \in \mathcal{U}$ telle que

$$f(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds$$

par suite $\dot{f} = v$ et

$$-\dot{v}(t) \in (\lambda l + M(t))\partial d(v(t), K(f(t))) + h(t), \text{ } p.p. \text{ } sur \text{ } I \quad et \text{ } h \in \Phi(f),$$

c'est à dire

$$-\big(\dot{v}(t) + h(t)\big) \in (\lambda l + M(t))\partial d(v(t), K(f(t))), \text{ } p.p. \text{ } sur \text{ } I \quad et \text{ } h \in \Phi(f). \tag{3.6}$$

posons $z(t) = \displaystyle\int_0^t h(s)ds$, $D(t) = K(f(t)) + z(t)$ et $w(t) = v(t) + z(t)$.

On a $D(t)$ est ρ-prox-régulier car $K(f(t))$ est ρ-prox régulier.

De plus, D est absolument continue. En effet,

$$\begin{aligned}
|d(x, D(t)) - d(y, D(s))| &= |d(x, K(f(t)) + z(t)) - d(y, K(f(s)) + z(s))| \\
&= |d(x - z(t), K(f(t))) - d(y - z(s), K(f(s)))| \\
&\leq \|x - z(t) - y + z(s)\| + \lambda l|t - s| \\
&\leq \|x - y\| + \|z(t) - z(s)\| + |\lambda lt - \lambda ls| \\
&\leq \|x - y\| + \|\int_s^t h(\tau)d\tau\| + \int_s^t \lambda l d\tau \\
&\leq \|x - y\| + \int_s^t (\|h(\tau)\| + \lambda l)d\tau \\
&\leq \|x - y\| + \int_s^t (M(\tau) + \lambda l)d\tau.
\end{aligned}$$

Soit $a(t) = \lambda lt$ et $\zeta(t) = \int_0^t (\dot{a}(s) + M(s))ds$, alors **(3.6)** devient

$$-(\dot{v}(t) + h(t)) \in (\dot{a}(t) + M(t))\partial d(v(t), K(f(t)))\ p.p.\ sur\ I \quad h \in \Phi(f), \tag{3.7}$$

et comme on a $d(v(t), K(f(t))) = d(w(t), D(t))$, **(3.7)** peut s'écrire aussi sous la forme

$$-\dot{w}(t) \in \dot{\zeta}(t)\partial d(w(t), D(t)),\ p.p.\ sur\ I,\ avec\ w(0) = v_0. \tag{3.8}$$

Le théorème **2.2.4**, nous donne

$$-\dot{w}(t) \in N_{D(t)}(w(t))\ p.p.\ sur\ I,\ avec\ w(0) = v_0, \tag{3.9}$$

Or $N_{D(t)}(w(t)) = N_{K(f(t))}(v(t))$, ainsi **(3.9)** est équivalente à

$$-(\dot{v}(t) + h(t)) \in N_{K(f(t))}(v(t))\ p.p.\ sur\ I,\ avec\ v(0) = v_0, \tag{3.10}$$

avec la contrainte $v(t) \in K(f(t))$, implicitement donnée dans l'inclusion **(3.10)**.

D'où

$$-\dot{v}(t) \in N_{K(f(t))}(v(t)) + h(t)\ p.p.\ sur\ I,\ avec\ v(0) = v_0, \tag{3.11}$$

on a donc,

$$u(t) = f(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds$$

$$\dot{u}(t) = v(t) \quad et \quad \ddot{u}(t) = \dot{v}(t)$$

par suite,

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds$$

avec

$$\begin{cases} -\ddot{u}(t) \in N_{K(u(t))}(\dot{u}(t)) + h(t), \ p.p. \quad et \ h \in \Phi(u) \\ \dot{u}(t) \in K(u(t)) \ , \ \forall t \in I \\ u(0) = u_0 \quad et \quad \dot{v}(0) = v_0, \end{cases}$$

puisque $h \in \Phi(u) = \Phi_1(u) + \Phi_2(u)$, alors, $h = h_1 + h_2$ avec $h_i \in \Phi_i(u)$ $(i = 1, 2)$ i.e., $h_1(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t))$ et $h_2(t) \in G(t, u(t), \dot{u}(t))$, ce-ci donne

$$\begin{cases} u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds, \ \forall t \in I, \\ -\ddot{u}(t) \in N_{K(u(t))}(\dot{u}(t)) + h_1(t) + h_2(t) \ p.p \ sur \ I, \\ \dot{u}(t) \in K(u(t)), \ \forall t \in I, \\ u(0) = u_0, \ \dot{u}(0) = v_0, \end{cases}$$

en d'autres termes on a

$$\begin{cases} -\ddot{u}(t) \in N_{K(u(t))}(\dot{u}(t)) + F(t, u(t), \dot{u}(t)) + G(t, u(t), \dot{u}(t)) \ p.p \ sur \ I, \\ \dot{u}(t) \in K(u(t)), \ \forall t \in I, \\ u(0) = u_0, \ \dot{u}(0) = v_0, \end{cases}$$

avec pour tout $t \in I$,

$$\|\ddot{u}(t)\| \leq \lambda l + 2M(t).$$

Conclusion

Le problème $(\mathcal{P}_{F,G})$ admet au moins une solution $u \in \mathbf{C}_H^1(I)$.

Conclusions et perspectives

Dans ce mémoire nous avons étudié un problème du type processus de la rafle du second ordre sous des hypothèses de prox-régularité, perturbé par la somme de deux multi-applications l'une semicontinue supérieurement et l'autre semicontinue mixte.
Pour le futur proche nous envisageons de faire l'étude d'un problème similaire, mais du premier ordre. Dans un premier temps, il sera perturbé par une seule multi-application semicontinue supérieurement et l'espace H de dimension infinie. Problèmes**(I)** et **(II)**

$$\textbf{(I)}\begin{cases} -\dot{u}((t)) \in N_{C(u(t))}(u(t)) + F(u(t)), \ p.p. \ sur \ I \\ u(t) \in C(u(t)) \ , \ \forall t \in I \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

$$\textbf{(II)}\begin{cases} -\dot{u}(t)) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + F(t,u(t)), \ p.p. \ sur \ I \\ u(t) \in C(t,u(t)) \ , \ \forall t \in I \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

Ensuite, comme dans le résultat démontré dans ce mémoire, on perturbe par la somme de deux multi-applications, l'une semicontinue supérieurement et l'autre semicontinue mixte, mais, cette fois-ci l'espace H sera de dimension finie. Problèmes **(III)** et **(IV)**

$$\textbf{(III)}\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(u(t))}(u(t)) + F(u(t)) + G(u(t)), \ p.p. \ sur \ I \\ u(t) \in C(u(t)) \ , \ \forall t \in I \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

$$\textbf{(IV)}\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + F(t,u(t)) + G(t,u(t)), \ p.p. \ sur \ I \\ u(t) \in C(t,u(t)) \ , \ \forall t \in I \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Nous avons aussi en tête le projet de faire une approche différente d'un autre résultat qui a été énoncé récement par **C. Castaing, A. G. Ibrahim** et **M. Yarou** dans [11].
Problème **(V)**

Problème (**V**)

$$(\mathbf{V})\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) \; p.p. \; sur \; [0,T], \\ \dot{u}(t) \in \mathbf{L}^{\infty}_{H}([0,T]), \quad u(t) \in C(t,u(t)), \; \forall t \in [0,T], \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Bibliographie

[1] **J. P. Aubin and A. Cellina**, Differential inclusions set-valued maps and viability theory. *Springer-Verlag, Berlin (1984).*

[2] **D. Azzam-Laouir**, Mixed semicontinuous perturbation of nonconvex sweeping process. *Electronic journal of qualitative theory of differential equations (2008) No 37 pp.1-9.*

[3] **D. Azzam-Laouir**, Polycopié, cours d'analyse multivoque. *Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Université De Jijel (2008).*

[4] **D. Azzam-Laouir, S. Lounis and L. Thibault**, Existence solutions for second-order differential inclusions with nonconvex perturbations. *Applicable Analysis, Vol. 86. No 10. (2007), pp. 1199-1210.*

[5] **G. Beer**, Topologies on closed and closed convex sets. *Kluwer Academic Publishers (1993).*

[6] **M. Bounkhel**, Nonconvex Differential Inclusions. *Symposium-scool on ordinary Différential Equations, 2006.*

[7] **M. Bounkhel and A. Jofré**, Subdifferential stability of the distance function and its applications to nonconvex economies and equilibrium. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis. Vol 5 (2004) No 3, pp. 331-347.*

[8] **M. Bounkhel and L. Thibault**, On various notions of regularity of sets in nonsmooth analysis. *Nonlinear Analysis. Vol. 48, (2OO2) pp. 223-246.*

[9] **A. Bouzid et J. Calbux**, Théorie de la mesure et de l'intégration. *Publication de l'université de Rouen, 1993.*

[10] **H. Brezis**, Analyse fonctionnelle, théorie et applications. *Masson, 1983.*

[11] **C. Castaing, A. G. Ibrahim and M. Yarou**, Some cotributions to nonconvex sweeping process. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis. Vol. 10. No 1 (2009), pp. 1-20.*

[12] **C. Castaing and M. Valadier**, Convex analysis and measurable multifunctions. *Lectures Notes in Mathematics 580, Springer-Verlag, Berlin (1977).*

[13] **F. H. Clarke**, Optimization and nonsmooth analysis. *Wiley-intersience, Wiley and sons. New York (1983).*

[14] **F. H. Clarke, R. J. Sterne and P. R. Wolenski**, Proximal smoothness and the lower-C^2 properties. *Journal of Convexe Analysis. Vol 2 (1995) No1/2, pp. 117-144.*

[15] **T. Haddad, L. Thibault**, Mixed semicontinuous perturbations of nonconvex sweeping process. *Maths. Program., Ser. B (2010) 123 : 225-240.*

[16] **B. Maury, J. Venel**, Un modèle de mouvement de foule. *SAIM :PROCEEDINGS, July 2007, vol.18, pp.143-152.*

[17] **M. C. Kaadoud**, Résolution de problèmes de rafle et application à un problème de frottement. *Journal of the Juliusz Schauder Center, Vol. 18, (2001), pp. 89-102.*

[18] **M. Kisielewicz**, Differential inclusions and optimal control. *Kluwer Academic Publishers, 1991.*

[19] **R. A. Poliquin, R. T. Rockafellar and L. Thibault**, Local differentiability of distance functions. *Trans. Amer. math. soc. Vol 352 (2000) No 11, pp. 5232-5249.*

[20] **W. Rudin**, Analyse réelle et complexe. *Hermann, Paris, 1997.*

[21] **L. Schwartz**, Analyse III. *Hermann, Paris, 1998.*

[22] **L. Thibault**, Sweeping process with regular and nonregular sets. *Journal of Differential Equations (2003) No 193 pp.1-26.*

[23] **A. A. Tolstogonov**, Solutions of a differential inclusion with unbouded right-hand side. *(Russian) sibirsk. mat Zh.29.No 5, pp.212-225, 241 translation in siberian Maths.J.29 No 5.(1988) pp. 857-868.*

RESUME

Dans ce mémoire, nous avons tout d'abord, commencé par énoncer et démontrer deux résultats élaborés par L.Thibault, qui traitent d'une équivalence entre les solutions d'un processus de la rafle non convexe et une inclusion différentielle dont le second membre est un sous-différentiel de la fonction distance.

Dans un deuxième temps, en usant de l'une de ces équivalences, nous avons traité l'existence des solutions d'une inclusion différentielle du second ordre gouvernée par un processus de la rafle sous des hypothèses de non convexité dans un espace de Hilbert de dimension finie. Processus qui de plus est perturbé par la somme de deux multi-applications l'une semi-continue supérieurement et l'autre semi-continue mixte.

Un résultat important a été obtenu et démontré dans ce sens.

ABSTRACT

In this paper, we first begun by state and prove two results developed by L. Thibault, who treats an equivalence between the solutions of a non-convex sweeping process and a differential inclusion whose second member is a sub-differential of the distance function.

In a second step, using one of this equivalence, we have treated the existence of solutions of a differential inclusion of second-order governed by a non convex sweeping process in a Hilbert space of finite dimension. Moreover, this Process is disturbed by the sum of two set-valued maps one is upper semi-continuous and the other mixed semi-continuous.

An important result was obtained and demonstrated in this direction.

الملخص

في هذا العمل بدأنا في الأول بإعطاء نتيجة وضعها **L.Thibault** و التي تعالج التكافؤ بين حلول نسق النشل غير محدب و احتواء تفاضلي طرفه الثاني شبه تفاضلي بالنسبة لتابع المسافة.

في المرحلة الثانية وباستخدام هذا التكافؤ ندرس وجود الحلول لاحتواء تفاضلي من الدرجة الثانية موجه بنسق النشل تحت شرط عدم التحدب في فضاء هلبرتي ذو بعد منته، هذه العملية التي تكون مضطربة بمجموع تابعين متعددي القيم، الأول نصف مستمر علويا والآخر نصف مستمر مختلط حيث نقوم في هذا الإطار بتقديم وبرهان نتيجة مهمة.