République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel-

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ......
№ de séries : ......

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Inclusion différentielle fractionnaire dans un espace de Banach

Présenté par :

- Boutaoui Aya
- Boukeffous Chahla

Devant le jury :

Président :	Nadir Arada	M.C.A.	Université de Jijel
Encadreur :	Fatine Aliouane	M.C.A.	Université de Jijel
Examinateur :	Soumia Saidi	M.C.A.	Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

Remerciements

En tout premier lieu, nous remercions le bon ***Dieu****, tout puissant, d'avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.*

Nous tenons à exprimer nos remerciements les plus vifs et nos gratitudes à notre encadreur ***ALIOUANE Fatine*** *qui a su nous guider et nous aider dans ce travail avec beaucoup de tact et de gentillesse et qui nous a permis de découvrir un domaine très intéressant celui du calcul fractionnaire.*

On exprime toute nos reconnaissances à Monsieur ***N. ARADA*** *pour avoir bien voulu accepter de présider le jury de ce mémoire et à l'examinatrice Madame* ***S. SAIDI*** *pour avoir accepter d'être membre de ce jury.*

Afin de n'oublier personne, nos vifs remerciements s'adressent à tous ceux qui nous ont aidé à la réalisation de ce modeste travail.

Dédicace

Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, le respect, la reconnaissance, c'est tout simplement que, je dédie ce mémoire de Master à :

*À Mon très cher Père **Allaoua** : Aucune dédicace ne saurait exprimer l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours pour toi. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être.*

*À Ma tendre Mère **Messaouda** : Tu représentes pour moi la source de tendresse et l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager. Tu as fait plus qu'une mère puisse faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leurs vie et leurs études.*

Ce travail est le fruit des vs sacrifices que vous avez consenti pour mon éducation et ma formation le long des années.

*À mon cher frère **Heytem** et sa petite famille.*

*À ma chère sœur **Oumayma** et sa petite famille.*

*À mes chères frères **Mouhamed Moukhtar** et **Abd rahman**.*

À mon Mari et ma belle famille.

*À ma collègue **Chahla** et tous les membres de ma promotion..*

*À tous mes enseignants depuis mes premières années d'études surtout le Docteur **ALIOUANE Fatine**.*

À mes oncles et mes tantes.

*À mes cousins et cousines surtout **Asma** pour son encouragement.*

À tous ceux qui me sens chers et que j'ai omis de citer.

AYA

Dédicace

*Je dédie ce travail qui n'aurait jamais pu voir le jour sans le soutien indéfectible et sans limite de mes chers parents **Ahmed** et **Zohra Chermat** qui ne cessent de me donner avec amour le nécessaire pour que je puisse arriver à ce que je suis aujourd'hui. Que dieux vous protège et que la réussite soit toujours à ma portée pour que je puisse vous combler de bonheur.*
Je dédie aussi ce travail à :

*- Ma grand-mère **Fatma**.*

*- Mes frères **Walid** et sa femme **Amina**, **Zine Eddine** et **Houssam Eddin**.*

*- Ma sœur **Fatima Zahraa** et son mari **Rabeh** et ses enfants **Aymen,Iylaf** et sa petite **Maria**.*

*- Mon encadreur Melle **Fatine Aliouane**, et tout les prof du département de mathématique.*

*- Ma chère et mon binôme **Aya**, mes proches amies **Raghda**, **Rahma**, **Farida**, **Abir**, et mes collègues et tous ceux qui m'estiment.*

*- Mes oncles **Mohamed**, **Farhat** et **Rachid** et leur famille, mes tantes.*

- Tous mes cousins et cousines.

CHAHLA

TABLE DES MATIÈRES

Notations

Espaces

$\mathbb{N}$	L'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{N}^*$	L'ensemble des nombres naturels non nuls.
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	L'ensemble des nombres complexes.
$[a,b]$	Intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémité a et b.
(T,Σ)	Espace mesurable.
(T,Σ,μ)	Espace mesuré.
(X,d)	Espace métrique.
$(E,\|.\|)$	Espace de Banach.
$E^{'}$	Dual de E.
$\mathcal{L}$([a,b])	Tribu de Lebesgue.
$\mathcal{B}$(X)	Tribu borélienne.
$L^p_E([a,b])$	L'ensemble $\{f:[a,b]\longrightarrow E$ mesurable, $\|f\|_p<+\infty\}$ muni de la norme $\|f\|_p=\left(\int_a^b\|f(t)\|^p d\mu(t)\right)^{1/p}$.
$L^\infty_E([a,b])$	L'ensemble $\{f:[a,b]\longrightarrow E$ mesurable, $\|f\|_\infty<+\infty\}$ muni de la norme $\|f\|_\infty=\inf\{c\geq 0/\ \|f(t)\|\leq c\ \mu-p.p\}$.
$C_E([a,b])$	L'espace des fonctions continues sur $[a,b]$.
$AC([a,b])$	L'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$.
$c(E)$	l'ensemble de tous les sous-ensembles non vides fermés de E.
$bc(E)$	l'ensemble de tous les sous-ensembles fermés bornés non vides de E.

Symboles et fonctions

$Re(z)$	Partie réelle d'un nombre complexe z.
$\mathcal{P}(Y)$	Ensemble des partie de Y.
$\mathcal{R}es(f..)$	Résidus d'une fonction f.
$\frac{df}{dt}$ où f'	Dérivée d'une fonction f.
$\frac{d^n f}{dt^n}$ où $f^{(n)}$	Dérivée $n^{i\grave{e}me}$ d'une fonction f.
$\left(I_a^\alpha f\right)(t)$	Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction f au point t.
$\left(D_a^\alpha f\right)(t)$	Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction f au point t.
$\left({}^C D_a^\alpha f\right)(t)$	Dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α d'une fonction f au point t.
$\mathcal{L}[.](s)$	Transformée de Laplace.
$\Gamma(.)$	Fonction Gamma.
$B(.)$	Fonction bêta.
$[\alpha]$	Partie entier du nombre α

Distances

$B_E(0,1)$	Boule unité ouverte de E.
$d(x,A)$	Distance entre x et l'ensemble A définie par $d(x,A) = \inf_{y\in A} \|x-y\|$.
$e(A,B)$	Ecart entre A et B donnée par $e(A,B) = \sup_{x\in A} d(x,B)$.
$d_H(A,B)$	Distance de Hausdorff entre A et B donnée par $d_H(A,B) = \max(e(A,B), e(B,A))$.

INTRODUCTION

Le terme "calcul fractionnaire" n'est pas nouveau. Il s'agit d'une généralisation de la différentiation et l'intégration d'ordre entier à la différentiation et l'intégration d'ordre non entier.

Bien que le calcul différentiel classique fournit des outils puissants pour la modélisation d'un bon nombre de phénomènes étudiés par les sciences appliquées, ces outils ne permettent pas de tenir compte de la dynamique anormale que présentent certains systèmes complexes rencontrés dans la nature ou dans les interactions de la société.

L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale de la fin du 17 ème siècle jusqu'à nos jours. Les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin des années 1695 quand l'Hospital a soulevé une question à Leibnitz en s'interrogeant sur la signification de $\frac{d^n y}{dx^n}$ lorsque $n = 1/2$. Leibnitz, dans sa réponse, voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et a écrit à l'Hospital :"... cela conduirait à un paradoxe à partir duquel, un jour, on aura tirer des conséquences utiles". Il a fallu attendre les années 1990 pour voir apparaître ces premières "conséquences utiles". La première tentative sérieuse de donner une définition logique à la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neufs documents sur ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le nom "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories on fait leur apparition comme celle de Grunwald (1867-1872), Letnikov (1868-1872), Laplace (1812), Fourier (1822), Abel (1823-1826), etc.

A cette époque il n'y avait presque pas d'applications pratiques de cette théorie, et c'est pour cette raison qu'elle a été considérée comme une théorie abstraite ne contenant que des manipulation mathématiques peu utiles. Le passage des formulations mathématiques pures à des applications a commencé à voir le jour depuis les années 1990, où les équations différentielles fractionnaires sont apparues dans plusieurs domaines tels que la physique, la biologie, la mécanique, etc (Voir les ouvrages de [16], [6], etc).

Ce mémoire se compose de trois chapitres. Dans le premier, nous donnons des notions préliminaires issues de l'analyse et de l'analyse multivoque.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude des propriétés essentielles des intégrales et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo ainsi qu'à la relation qui les lie. Finalement, au troisième chapitre, on s'intéresse à l'application de ces notions à l'étude du problème aux limites suivant

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})\begin{cases} D^{\alpha}u(t) \in F(t, u(t), D^{\alpha-1}u(t)), & p.p.\ t \in [0,1], \\ I^{\beta}u(t)|_{t=0} = 0, & u(1) = \int_0^1 u(t)dt. \end{cases}$$

où $\alpha \in (1,2]$, $\beta \in [0, 2-\alpha]$ sont des constantes données, D^{α} (resp. I^{β}) est la dérivée (resp. intégrale) fractionnaire de Riemann-Liouville et $F : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides et fermées, E étant un espace de Banach séparable. Des propriétés topologiques de l'ensemble des solutions sont aussi présentées.

Les inclusions différentielles fractionnaires ont été étudiées pour la première fois par El-Sayed et Ibrahim dans [11]. Récemment, plusieurs résultats qualitatifs pour les inclusions différentielles fractionnaires ont été obtenus dans [8], [9]. Il existe une littérature importante dans le cas de l'inclusion

$$D^{\alpha}u(t) \in F(t, u(t)),\ \ p.p.\ t \in [0,1]. \tag{1}$$

Cependant, très peu d'études sont disponibles dans le cas de l'inclusion $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et quelques théorèmes de base qui nous seront utiles dans les chapitres suivants.

1.1 Applications absolument continues

Définition 1.1. *[13] Soit E un espace vectoriel normé. Une fonction $f : [a, b] \to E$ est dite absolument continue si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que pour toute partition dénombrable de l'intervalle $[a, b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant*

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (b_k - a_k) < \delta$$

on a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|f(b_k) - f(a_k)\| \leq \varepsilon.$$

Théorème 1.2. *[13] Une fonction $f : [a, b] \to E$ est absolument continue si, et seulement si, elle est l'intégrale de sa dérivée i.e.,*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

Remarque 1.3. *[13]*

- Une fonction absolument continue est continue.

- Si f est absolument continue, il existe une fonction Lebesgue intégrable g sur $[a,b]$ telle que pour tout $x \in [a,b]$,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)dt.$$

L'espace de toutes les fonction absolument continues définies sur $[a,b]$ est notée $AC([a,b])$.

1.2 Fonctions Eulériennes

Dans cette section, nous présentons la fonction Gamma et la fonction Bêta. Ces deux fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire (voir [2]).

1.2.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma a été introduite par le mathématicien suisse Léone Euler (1707-1783) dans son objectif de généraliser le factoriel à des valeurs non entières.

Définition 1.4. *La fonction Gamma est une fonction qui prolonge naturellement le factoriel aux nombres réels, et même aux nombres complexes $x \in \mathbb{C}$ tel que $Re(x) > 0$. On définit la fonction Gamma par*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{1.1}$$

Lemme 1.5. *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$. Alors,*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{1.2}$$

et plus généralement,

$$\Gamma(z+n+1) = \prod_{0 \leq j \leq n} (z+j)\Gamma(z). \tag{1.3}$$

Lemme 1.6. *Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \tag{1.4}$$

Cas particuliers.

$$\Gamma(1) = 1.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Remarque 1.7. *Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{1.5}$$

Le théorème suivant montre que la fonction Γ, initialement définie sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$ et satisfaisant l'équation fonctionnelle (1.2), admet un prolongement analytique sur l'ensemble des nombres complexes, excepté pour $z = 0, -1, -2, -3, ...$ qui sont des pôles.

Théorème 1.8. *(Prolongement sur $\mathbb{C}/\ \mathbb{Z}$) La fonction Γ s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les seules singularités sont des pôles simples aux entiers négatifs $z = 0; -1; -2; -3; ...$, où elle a pour résidus*

$$\mathcal{R}es(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}. \tag{1.6}$$

1.2.2 La fonction Bêta

Définition 1.9. *La fonction Bêta est définie pour tous les nombres complexes x et y des parties réelles strictement positives par*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt. \tag{1.7}$$

Remarque 1.10. *Par le changement de variable $s = 1 - t$, on remarque que*

$$B(x,y) = B(y,x). \tag{1.8}$$

Théorème 1.11. *Soient $x, y \in \mathbb{C}$ tels que $Re(x) > 0$ et $Re(y) > 0$, on a*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{1.9}$$

1.3 La distance de Hausdorff

Définition 1.12. *[7] Soient A, B deux sous-ensembles d'un espace métrique (X,d). L'écart entre A et B est défini par*

$$e(A,B) = \sup_{a \in A} d(a,B),$$

avec

$$d(a,B) = \inf_{b \in B} d(a,b).$$

La distance de Hausdorff entre A et B est alors définie par

$$d_H(A,B) = max\left(e(A,B), e(B,A)\right).$$

Proposition 1.13. *[7] Soient A, B, $C \subset X$*

1. $e(A,\emptyset) = \infty$ *si* $A \neq \emptyset$,
2. $e(\emptyset, B) = 0$,
3. $e(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$,
4. $e(A,B) \leq e(A,C) + e(C,B)$,
5. $d_H(A,B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$,
6. $d_H(A,B) \leq d_H(A,C) + d_H(C,B)$,
7. $|d(x,A) - d(x,B)| \leq d_H(A,B), \;\; \forall x \in X$.

1.4 Notions sur les multi-applications

Les résultats suivants sont pris de la référence [7].

Définition 1.14. *Soient X, Y deux ensembles non vides. On appelle **multi-application** F définie sur X à valeurs dans Y toute application qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous ensemble $F(x)$ de Y et on note $F : X \rightrightarrows Y$ ou $F : X \to P(Y)$.*

- *On appelle **domaine** (effectif) de la multi-application F, qu'on note $dom(F)$, le sous ensemble de Y défini par*

$$dom(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}.$$

- *On appelle **l'image** de F, noté $Im(F)$, l'ensemble défini par*

$$Im(F) = \{y \in Y : \exists x \in X \;\; tel\, que \;\; y \in F(X)\}.$$

- *On appelle **graphe** de F, qu'on note $gph(F)$, le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par*

$$gph(F) = \{(x,y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

- *La multi-fonction **inverse** $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ est définie par*

$$x \in F^{-1}(y) \Longleftrightarrow y \in F(x).$$

Définition 1.15. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application et soit V un ouvert de Y*

- *On appelle **image réciproque large** de V, qu'on note par $F^{-1}(V)$, le sous-ensemble de X défini par*
$$F^{-1}(V) = \{x \in X : F(x) \bigcap V \neq \emptyset\}.$$
- *On appelle **image réciproque étroite** de V, qu'on note par $F_+^{-1}(V)$, le sous-ensemble de X défini par*
$$F_+^{-1}(V) = \{x \in X : F(x) \subseteq V\}.$$

Définition 1.16. *[8] Soit E un espace de Banach. La multi-application $F : E \rightrightarrows \mathcal{P}(E)$ à valeurs non vides fermées est une λ-contraction s'il existe $0 < \lambda < 1$ tel que pour tous $u, v \in E$*
$$d_H(F(u), F(v)) \leq \lambda \|u - v\|. \tag{1.10}$$

1.5 Les multi-applications mesurables

Pour plus de détails, voir la référence [7].

Définition 1.17. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace topologique et*

$F : T \rightrightarrows X$ une multi-application.

On dit que F est Σ-mesurable si, et seulement si, pour tout ouvert V de X, $F^{-1}(V) \in \Sigma$.

Théorème 1.18. *Soit (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique séparable et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *F est Σ-mesurable.*
2. *Pour chaque $x \in X$, la fonction*
$$\begin{aligned} g_x : & T \longrightarrow \mathbb{R} \\ & t \longrightarrow d(x, F(t)) \text{ est } \Sigma\text{-mesurable.} \end{aligned}$$

Définition 1.19. *Soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. On suppose $dom(F) = T$*

On appelle sélection de F toute application $f : T \longrightarrow X$ telle que
$$f(t) \in F(t) \text{ pour tout } t \in T.$$

Théorème 1.20. *(Existence de sélection mesurable)*
Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application mesurable à valeurs non vides fermées. Alors, F admet une sélection mesurable i.e., il existe $f : T \to X$ mesurable telle que $f(t) \in F(t)$, pour tout $t \in T$.

Théorème 1.21. *Soient (T, Σ, μ) un espace mesuré avec μ $\sigma-$finie, on suppose que Σ est $\mu-$complète et X un espace métrique séparable. Soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1) *F est Σ-mesurable.*

2) *$gph(F) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$.*

Proposition 1.22. *Si F_1 et F_2 sont des multi-applications mesurables à valeurs non vides compactes, la multi-application $t \longmapsto F_1(t) \bigcap F_2(t)$ est mesurable.*

Théorème 1.23. *Soit (T, Σ) un espace mesurable, (X, d) un espace métrique complet séparable et soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Alors F est mesurable si, et seulement si, il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ d'applications mesurables telle que pour tout $t \in I$*

$$F(t) = \overline{\{f_n(t)\}}_{n\geq 1}.$$

1.6 Fonction intégrable au sens de Bochner

Soient (T, Σ, μ) un espace mesuré de mesure μ finie. (Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [15]).

Définition 1.24. *Une fonction mesurable $f : T \longrightarrow E$ est dite intégrable au sens de Bochner si et seulement si*

$$\int_T \|f\| d\mu < \infty.$$

Corollaire 1.25. *Si $f : T \longrightarrow E$ est une fonction intégrable au sens de Bochner et $A \in \Sigma$, alors*

$$\|\int_A f(x) d\mu\| \leqslant \int_A \|f(x)\| d\mu.$$

Corollaire 1.26. *Si $f, g : T \longrightarrow E$ sont deux fonctions intégrables au sens de Bochner et si pour tout $A \in \Sigma$ $\int\limits_A f d\mu = \int\limits_A g d\mu$, alors*

$$f(x) = g(x) \quad pour \quad \mu\text{-}presque\ tout\ x \in T.$$

Théorème 1.27. *Soit $f : T \longrightarrow E$ une fonction intégrable au sens de Bochner et soit $G : E \to F$ un opérateur linéaire continu, où F est un espace de Banach. Alors Gf est une fonction intégrable au sens de Bochner à valeurs dans F, et on a*

$$G\left(\int\limits_T f(x)d\mu\right) = \int\limits_T Gf(x)d\mu.$$

En particulier, si $x' \in E'$ et $f : T \longrightarrow E$ est une fonction intégrable au sens de Bochner, alors $x \longmapsto \langle f(x), x' \rangle$ est intégrable et

$$\left\langle \int\limits_T f(x)d\mu, x' \right\rangle = \int\limits_T \langle f(x), x' \rangle d\mu.$$

Théorème 1.28. *[3] Si f et g sont deux fonctions Bochner-intégrables et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors $\alpha f + \beta g$ est aussi Bochner intégrable et*

$$\int_A (\alpha f + \beta g)d\mu = \alpha \int_A f d\mu + \beta \int_A g d\mu.$$

De plus, si E est un espace de Banach et que f et g sont deux fonctions Bochner-intégrables satisfaisant $f(\omega) \leq g(\omega)$ pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$, alors

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$$

pour chaque $A \in \Sigma$.

Théorème 1.29. *(Fubini)[17] Si f est une fonction Bochner-intégrable sur $X \times Y$, Alors la fonction $\int f dy$ est déterminée presque partout sur X et Bochner-intégrable sur X. De même, la fonction $\int f dx$ est déterminée presque partout sur Y. En outre,*

$$\int\int f dx dy = \int dx \int f dy = \int dy \int f dx.$$

Théorème 1.30. *(Tonelli).[17] Si f est une fonction Bochner-mesurable sur $X \times Y$, et l'intégrale double $\int dx \int |f| dy$ existe, alors*

$$\int\int f dx dy = \int dx \int f dy = \int dy \int f dx,$$

Théorème 1.31. *[17] Si f et g sont deux fonctions Bochner-mesurables dans un espace euclidien X et Y respectivement (l'une de ces fonctions à valeur réel), alors le produit $f(x)g(y)$ est Bochner-mesurable dans $X \times Y$.*

1.7 Théorèmes de point fixe

Définition 1.32. *[13](Mesure non-atomique) Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré et soit $A \in T$ un ensemble mesurable tel que $\mu(A) > 0$. On dit que μ est une mesure non-atomique s'il existe $B \subset A$ tel que $\mu(A) > \mu(B) > 0$.*

Exemple 1.33. *La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est non-atomique.*

Définition 1.34. *[13] Soient X un espace topologique et A un sous-ensemble de X. On dit que A est un rétract de X s'il existe une rétraction $r : X \longrightarrow A$, i.e. $r(x) = x$, pour tout $x \in A$.*

Observons que A est un rétract de X si et seulement si l'opérateur id_A possède une extension continue sur X.

Définition 1.35. *[13] Un rétract absolu pour une famille $\mathcal{Y}$ d'espaces topologiques (ou AR, de l'anglais absolute retract) est un élément de $\mathcal{Y}$ qui est un rétract de tout élément de $\mathcal{Y}$ dans lequel il est fermé.*

Exemple 1.36. *Tout segment de $\mathbb{R}$ en est un rétract.*
Tout rétract d'un rétract absolu est un rétract absolu.

Définition 1.37. *[13](Ensemble décomposable) Soit $S \subseteq L^p_E([a, b])$. On dit que S est décomposable si pour tout ensemble mesurable A et tous $u, v \in S$*

$$u\mathbb{1}_A + v\mathbb{1}_{E/A} \in S.$$

Théorème 1.38. *[10](Théorème de Covitz-Nadler)*
Soit (X, d) un espace métrique complet. Si $F : X \to c(X)$ est une contraction alors F admet un point fixe i.e., il existe $z \in X$ tel que $z \in F(z)$.

Nous désignons par $Fix(F)$ l'ensemble de tous les points fixes de la multi-application F.

Théorème 1.39. *[5](Bressan-Cellina-Fryszkowski)*
Soient (T, Σ, μ) un espace mesuré avec μ une mesure finie, positive et non-atomique, X un espace métrique séparable, E un espace de Banach et soit $(\lambda, u) \longrightarrow \phi_\lambda(u)$ une multi-application continue à valeurs décomposables de $X \times L^1_E(T) \longrightarrow bc(X)$. Supposons que ϕ_λ est une contraction par rapport à u i.e., il existe $0 < \alpha < 1$ tel que

$$d_H(\phi_\lambda(u), \phi_\lambda(v)) \leq \alpha\|u - v\|_1,$$

pour tous $u, v \in L^1_E(T)$ *et pour tout* $\lambda \in X$. *Alors l'ensemble des points fixes*

$$Fix(\phi_\lambda) = \{u, u \in \phi_\lambda(u)\},$$

est un rétract absolu. Un rétract peut-être choisi indépendant continuellement de λ, *à savoir, il existe une fonction continue* $g : X \times L^1_E(T) \longrightarrow L^1_E(T)$ *telle que*

$$g(\lambda, u) \in Fix(\phi_\lambda) \, pour \, tout \, u \in L^1_E(T)$$

et

$$g(\lambda, u) = u \, pour \, tout \, u \in Fix(\phi_\lambda).$$

CHAPITRE 2

CALCUL FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre nous donnons un aperçu sur le calcul fractionnaire. On se restreint aux deux approches des dérivées fractionnaires les plus populaires et les plus pratiques : l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo, ainsi que leurs propriétés principales.

2.1 Intégrale fractionnaire

Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}([a,b])$. On note pour tout $x > a$

$$I_a^1 f(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

donc

$$\begin{aligned} I_a^1\left(I_a^1 f\right)(x) &= \int_a^x \int_a^t f(s)dsdt \\ &= \int_a^x \int_s^x f(s)dtds \\ &= \int_a^x (x-s)f(s)ds \\ &\equiv I_a^2 f(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_a^1\left(I_a^2 f\right)(x) &= \int_a^x \int_a^t \int_a^s f(\tau)d\tau ds dt \\
&= \int_a^x \int_a^t \int_\tau^t f(\tau) ds d\tau dt \\
&= \int_a^x \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau dt \\
&= \int_a^x f(\tau) \int_\tau^x (t-\tau) dt d\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_a^x (x-\tau)^2 f(\tau) d\tau \\
&\equiv I_a^3 f(x).
\end{aligned}$$

Par itération sur n, on aboutit à

$$\begin{aligned}
I_a^n f(x) &= \int_a^x \int_a^{t_1} ... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n ... dt_2 dt_1 \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-s)^{n-1} f(s) ds.
\end{aligned}$$

Utilisant la fonction Gamma et généralisant cette dernière équation au cas d'un réel $\alpha > 0$, on a la définition suivante

Définition 2.1. *[1] Soit $f \in L_E^1([a,b])$. Les intégrales*

$$_aI_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha-1} ds, \quad t > a \tag{2.1}$$

$$_tI_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b f(s)(s-t)^{\alpha-1} ds, \quad t < b \tag{2.2}$$

sont appelées, l'intégrale fractionnaire à gauche et à droite de Riemann-Liouville d'ordre α (respectivement).

Par convention, on a : $_aI_t^0 = {}_tI_b^0 = I$, où I est l'opérateur identité.

Dans la suite, on va opter pour la définition (2.1) et on note I_a^α au lieu de $_aI_t^\alpha$ et si $a = 0$ par I^α.

Théorème 2.2. *[4] Soit $f \in L_E^1([a,b])$ et soit $\alpha > 0$. Alors $I_a^\alpha f(t)$ existe presque partout sur $[a,b]$, et $I_a^\alpha f \in L_E^1([a,b])$.*

Preuve. Soient $\Omega = [a,b]^2$ et $k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$k(t,s) = \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} & si \quad a \leq s \leq t \leq b \\ 0 & si \quad a \leq t \leq s \leq b \end{cases}$$

Alors $k(\cdot,\cdot)$ est mesurable sur Ω, et nous avons

$$\begin{aligned} \int_a^b k(t,s)dt &= \int_a^s k(t,s)dt + \int_s^b k(t,s)dt \\ &= \int_s^b (t-s)^{\alpha-1}dt \\ &= \frac{(b-s)^\alpha}{\alpha} \end{aligned}$$

D'après le Théorème 1.31, on a $f(s)\mathbb{1}_{[a,b]}(s) = f(s)$ sur Ω est fortement (Bochner) mesurable sur $Omega$. Il est clair que $k(t,s)$ est finie presque partout sur $Omega$, et est une fonction mesurable à valeurs réelles. Par conséquent

$$k(t,s)f(s)\mathbb{1}_{[a,b]}(s) = k(t,s)f(s) \quad sur \quad \Omega$$

est une fonction fortement Bochner-mesurable. De plus,

$$\begin{aligned} \int_a^b \Big\| \int_a^b k(t,s)f(s)ds \Big\| dt &\leq \int_a^b \left(\int_a^b |k(t,s)| \, \|f(s)\| ds \right) dt \\ &= \int_a^b \|f(s)\| \left(\int_a^b |k(t,s)| dt \right) ds \\ &= \int_a^b \|f(s)\| \frac{(b-s)^\alpha}{\alpha} ds \\ &\leq \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha} \int_a^b \|f(s)\| ds \\ &= \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha} \|f\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Par le Théorème de Tonelli 1.30, la fonction $H : \Omega \longrightarrow E$ telle que $H(t,s) = k(t,s)f(s)$ est Bochner intégrable sur Ω.

Par le Théorème de Fubini 1.29, nous déduisons que $t \longmapsto \displaystyle\int_a^b k(t,s)f(s)ds$ est une fonction Bochner intégrable sur $[a,b]$. Ainsi $(I_a^\alpha f)(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds$ est Bochner intégrable sur $[a,b]$, et existe presque partout sur $[a,b]$. ■

Lemme 2.3. *[4] Soit $f \in L^1_E([a,b])$ et soit $\alpha \geq 1$. Alors $I^\alpha_a f \in C_E([a,b])$.*

Preuve. **(i)** Le cas $\alpha = 1$. Nous avons

$$(I^1_a f)(t) = \int_a^t f(s)ds. \tag{2.3}$$

Soient $t, s \in [a,b]$ tels que $t \geq s$ et $t \longrightarrow s$. On observe que

$$\begin{aligned}
\Big\|(I^1_a f)(t) - (I^1_a f)(s)\Big\| &= \left\| \int_a^t f(\tau)dt - \int_a^s f(\tau)d\tau \right\| \\
&= \left\| \int_a^s f(\tau)d\tau + \int_s^t f(\tau)d\tau - \int_a^s f(\tau)d\tau \right\| \\
&= \left\| \int_s^t f(\tau)d\tau \right\| \\
&\leq \int_s^t \Big\|f(\tau)\Big\|d\tau = \int_a^t \|f(\tau)\|d\tau - \int_a^s \|f(\tau)\|dt \underset{t\to s}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

car $t \longmapsto \displaystyle\int_a^t \|f(s)\|ds$ est continue sur $[a,b]$.

(ii) Si $\alpha > 1$. Soient $t, s \in [a,b]$ tels que $t \geq s$ et $t \longrightarrow s$.

Observons que

$$\Big\|I^\alpha_a f(t) - I^\alpha_a f(s)\Big\| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau - \int_a^s (s-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau \right\|$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_a^s (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau + \int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau - \int_a^s (s-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau \right\|$$

par le Théorème 1.28, on trouve

$$\begin{aligned}
&\|I^\alpha_a f(t) - I^\alpha_a f(s)\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^s \Big|(t-\tau)^{\alpha-1} - (s-\tau)^{\alpha-1}\Big| \|f(\tau)\|d\tau + \int_s^t |t-\tau|^{\alpha-1} \|f(\tau)\|d\tau \right] \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^s \Big|(t-\tau)^{\alpha-1} - (s-\tau)^{\alpha-1}\Big| \|f(\tau)\|d\tau + (t-s)^{\alpha-1} \|f\|_1 \right].
\end{aligned}$$

Comme $t \longrightarrow s$ on a $(t-\tau)^{\alpha-1} \longrightarrow (s-\tau)^{\alpha-1}$, Ainsi

$$\Big|(t-\tau)^{\alpha-1} - (s-\tau)^{\alpha-1}\Big| \longrightarrow 0,$$

et on a aussi

$$\Big|(t-\tau)^{\alpha-1} - (s-\tau)^{\alpha-1}\Big| \leq 2(b-a)^{\alpha-1}.$$

Donc

$$\left|(t-\tau)^{\alpha-1}-(s-\tau)^{\alpha-1}\right|\|f(\tau)\| \leq 2(b-a)^{\alpha-1}\|f(\tau)\| \in L^1_E([a,b]), \tag{2.4}$$

de plus $\left|(t-\tau)^{\alpha-1}-(s-\tau)^{\alpha-1}\right|\|f(\tau)\| \longrightarrow 0$ comme $t \longrightarrow s$ pour tout $\tau \in [a,b]$. Alors par le Théorème de convergence dominé de Lebesgue on conclut que, quand $t \longrightarrow s$

$$\int_a^s \left|(t-\tau)^{\alpha-1}-(s-\tau)^{\alpha-1}\right|\|f(\tau)\|d\tau \longrightarrow 0.$$

Par conséquence, pour $t \longrightarrow s$

$$\|I_a^\alpha f(t) - I_a^\alpha f(s)\| \longrightarrow 0.$$

Il résulte que $I_a^\alpha f \in C_E([a,b])$

$\blacksquare$

Exemple 2.4. *1. Soit $f(t)=c$ une fonction définie sur $[a,b]$. On a*

$$\begin{aligned}\left(I_a^\alpha f\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} c ds\\ &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds\\ &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds\\ &= \frac{c(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.\end{aligned}$$

2. Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t)=ct^r$ telle que $r>-1$ et $c\in\mathbb{R}$. On a

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} cs^r ds$$

En utilisant le changement de variable $s=tx$ et la fonction Bêta on obtient

$$\begin{aligned}I^\alpha f(t) &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-tx)^{\alpha-1} t^{r+1} x^r dx\\ &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha+r}\int_0^1 x^r (1-x)^{\alpha-1} dx\\ &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha+r} B(\alpha, r+1)\\ &= \frac{c\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha+r+1)} t^{\alpha+r}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

3. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{kt}$, $k > 0$. On a par la relation* (2.1)

$$(I^{\alpha}_{-\infty} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{t} (t-s)^{\alpha-1} e^{ks} ds.$$

Posons $x = t - s$,

$$\begin{aligned}
(I^{\alpha}_{-\infty} f)(t) &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_{+\infty}^{0} x^{\alpha-1} e^{k(t-x)} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{k(t-x)} dx \\
&= \frac{e^{kt}}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-kx} dx.
\end{aligned}$$

Maintenant pour $y = kx$, on aura

$$\begin{aligned}
(I^{\alpha}_{-\infty} f)(t) &= \frac{e^{kt}}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} \Big(\frac{y}{k}\Big)^{\alpha-1} e^{-y} \frac{1}{k} dy \\
&= \frac{e^{kt}}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} \frac{1}{k^{\alpha}} dy \\
&= k^{-\alpha} \frac{e^{kt}}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy \\
&= k^{-\alpha} \frac{e^{kt}}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha) \\
&= k^{-\alpha} e^{kt}.
\end{aligned}$$

Théorème 2.5. *[4] Soient $\alpha, \beta \geq 0$ et $f \in L^1_E([a,b])$. Alors*

$$I^{\alpha}_{a}\Big(I^{\beta}_{a} f\Big) = I^{\alpha+\beta}_{a} f = I^{\beta}_{a}\Big(I^{\alpha}_{a} f\Big) \tag{2.6}$$

est vérifiée presque partout sur $[a,b]$. Si de plus $f \in C_E([a,b])$ ou $\alpha + \beta \geq 1$, alors cette identité est vraie sur $[a,b]$.

Autrement dit, la famille $\{I^{\alpha}_{a} f, \alpha > 0\}$ possède la propriété des semi-groupes.

Preuve. Puisque $I^0_a = I$ (opérateur identité), si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ ou les deux sont nulles l'énoncé du théorème est trivialement vrai. Nous supposons donc que $\alpha, \beta > 0$. Nous observons que

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}_{a} I^{\beta}_{a} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{t} (t-s)^{\alpha-1} (I^{\beta}_{a} f(s)) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{t} (t-s)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{a}^{s} (s-x)^{\beta-1} f(x) dx \right) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{a}^{t} \int_{a}^{s} (t-s)^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1} f(x) dx ds.
\end{aligned}$$

Les intégrales existent presque partout sur $[a, b]$ (Théorème 2.2). Si $I_a^\alpha I_a^\beta f(t), I_a^{\alpha+\beta} f(t)$ existent, on peut appliquer le Théorème de Fubini et on aura (par le changement $s = x + \tau(t-x)$)

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_x^t (t-s)^{\alpha-1}(s-x)^{\beta-1} f(x) ds dx$$

alors

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha I_a^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_0^1 (t-x-\tau(t-x))^{\alpha-1}(\tau^{\beta-1}(t-x)^{\beta-1})(t-x) f(x) d\tau dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_0^1 (t-x)^{\alpha+\beta-1}(1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1} f(x) d\tau dx \\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-x)^{\alpha+\beta-1} f(x) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-x)^{\alpha+\beta-1} f(x) dx \\
&= I_a^{\alpha+\beta} f(t).
\end{aligned}$$

Donc $I_a^\alpha I_a^\beta f(t) = I_a^{\alpha+\beta} f(t)$ est vraie presque partout sur $[a, b]$.

Par le Lemme 2.3, si $f \in C_E([a, b])$, alors $I_a^\beta f \in C_E([a, b])$, donc $I_a^\alpha I_a^\beta f \in C_E([a, b])$ et $I_a^{\alpha+\beta} f \in C_E([a, b])$. Enfin, si $f \in L_E^1([a, b])$ et $\alpha + \beta \geq 1$; par le Lemme 2.3 ; $I_a^{\alpha+\beta} f(t)$ est définie et existe pour tout $x \in [a, b]$. Appliquant le Théorème de Fubini comme précédemment, $I_a^{\alpha+\beta} f(t) = I_a^\alpha I_a^\beta f(t)$, pour tout $t \in [a, b]$. D'où le Théorème. ■

Proposition 2.6. *(Intégration par parties pour les intégrales fractionnaires)[1]*
Soit $\alpha > 1$, pour $\phi \in L_{\mathbb{R}}^1([a, b])$ et $\psi \in L_{\mathbb{R}}^1([a, b])$ alors

$$\int_a^b \phi(\tau) I_a^\alpha \psi(\tau) d\tau = \int_a^b \psi(\tau) I_b^\alpha \phi(\tau) d\tau \tag{2.7}$$

Preuve. On a par le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}
\int_a^b \phi(\tau) I_a^\alpha \psi(\tau) d\tau &= \int_a^b \phi(\tau) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^\tau (\tau-x)^{\alpha-1} \psi(x) dx d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^\tau \phi(\tau)(\tau-x)^{\alpha-1} \psi(x) dx d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \psi(x) \int_x^b \phi(\tau)(\tau-x)^{\alpha-1} d\tau dx \\
&= \int_a^b \psi(x) I_b^\alpha \phi(x) dx
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

Proposition 2.7. *Soit $f \in AC([a,b])$, alors les règles du calcul suivants sont valides*

$$i)\ I_a^{\alpha+1}\Big(f'(t)\Big) = I_a^\alpha f(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(a). \tag{2.8}$$

$$ii)\ \frac{d}{dt} I_a^\alpha f(t) = I_a^\alpha\Big(f'(t)\Big) + \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(a). \tag{2.9}$$

Preuve. **i)** Par la définition 2.1, on a (en utilisant une intégration par parties)

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha+1}\Big(f'(t)\Big) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^\alpha f'(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (t-s)^\alpha f(s)\Big|_a^t + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \\ &= \frac{-(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(a) + \frac{\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \end{aligned}$$

ii) En utilisant le changement de variable $s = t - x^{1/\alpha}$ dans la relation (2.1), on obtient

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{(t-a)^\alpha} f(t - x^{1/\alpha}) dx.$$

Donc pour tout $t > a$,

$$\frac{d}{dt}\Big(I_a^\alpha f(t)\Big) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\alpha(t-a)^{\alpha-1} f(a) + \int_0^{(t-a)^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} f(t - x^{1/\alpha}) dx\right]$$

Renversant le changement de variable $s = t - x^{1/\alpha}$, on trouve

$$\frac{d}{dt}\Big(I_a^\alpha f(t)\Big) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\alpha(t-a)^{\alpha-1} f(a) + \alpha \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \frac{d}{dt} f(s) ds\right]$$

Donc

$$\frac{d}{dt} I_a^\alpha f(t) = \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(a) + I_a^\alpha\left(\frac{d}{dt} f(t)\right).$$

■

Théorème 2.8. *[22] Soit $\alpha > 0$ et soit $(f_k)_{k=1}^\infty$ une suite de fonctions continues uniformément convergentes sur $[a,b]$, alors on peut intervertir l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et le signe limite comme suit*

$$\lim_{k\to\infty} (I_a^\alpha f_k)(x) = [I_a^\alpha(\lim_{k\to\infty} f_k)](x)$$

En particulier, la suite $(I_a^\alpha f_k)_{k=1}^\infty$ est uniformément convergente.

Preuve. Soit $x \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned}
\int_a^x \|(x-t)^{\alpha-1} f_k(t)\| dt &= \int_a^x \|(x-t)^{\alpha-1} f_k(t)\| dt \\
&= \int_a^x |x-t|^{\alpha-1} \|f_k(t)\| dt \\
&\leq \int_a^x |x-t|^{\alpha-1} \sup_{t\in[a,b]} \|f_k(t)\| dt \\
&= ||f_k||_\infty \left[\frac{-(x-t)^\alpha}{\alpha}\right]_a^x \\
&\leq ||f_k||_\infty \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha}, \alpha > 0
\end{aligned}$$

Par le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, il vient que

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \left(I_a^\alpha f\right)(x) &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f_k(t) dt \quad = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \lim_{k\to\infty} f_k(t) dt \\
&= I_a^\alpha (\lim_{k\to\infty} f_k)(x).
\end{aligned}$$

$\left(f_k\right)_{k\geq 0}$ étant convergente uniformément sur $[a, b]$. Soit donc f sa limite.

Soit $x \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned}
\|I_a^\alpha f_k(x) - I_a^\alpha f(x)\| &= \left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f_k(t) dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (f_k(t) - f(t)) dt\right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \|f_k(t) - f(t)\| dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} ||f_k - f||_\infty (x-a)^\alpha \\
&\leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} ||f_k - f||_\infty.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\sup_{x\in[a,b]} \|(I_a^\alpha f_k(x) - I_a^\alpha f(x))\| \leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} ||f_k - f||_\infty$$

et un passage à la limite nous donne

$$\lim_{k\to\infty} ||I_a^\alpha f_k - I_a^\alpha f||_\infty = 0.$$

■

Proposition 2.9. *[21] Soit $\alpha > 0$. Alors la transformée de Laplace de $I^\alpha f(t)$ est*

$$\mathcal{L}[I_a^\alpha f](s) = s^{-\alpha} \mathcal{L}[f](s), \quad s > 0. \tag{2.10}$$

Preuve. Par la relation (2.1),

$$\mathcal{L}[I_a^\alpha f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} I_a^\alpha f(t)dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-st} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau dt, \quad s > 0. \tag{2.11}$$

Changeant l'ordre d'intégration (Théorème de Fubini) du côté droit de (2.11) on peut écrire

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(\tau) \int_\tau^\infty (t-\tau)^{\alpha-1} e^{-st} dt d\tau, \quad s > 0. \tag{2.12}$$

Par un changement de variable $t - \tau = \frac{u}{s}$, l'intégrale suivant se réduit à

$$\begin{aligned} \int_\tau^\infty (t-\tau)^{\alpha-1} e^{-st} dt &= \frac{e^{-s\tau}}{s^\alpha} \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-su} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{e^{-s\tau}}{s^\alpha}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

Cette dernière et les équations (2.11), (2.12) implique (2.10). ■

2.2 Dérivées fractionnaires

2.2.1 Dérivées de Riemann-Liouville

Soient $x > a$ et $0 < \alpha < 1$. Soit $f \in AC([a,b])$. On cherche $\phi \in AC([a,b])$ solution de l'équation d'Abel

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\phi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = f(x). \tag{2.13}$$

Changeant x par t et t par s dans (2.13), on trouve

$$\int_a^x \left[\frac{1}{(x-t)^\alpha} \int_a^t \frac{\phi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \right] dt = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \tag{2.14}$$

En utilisant le Théorème de Fubini, on aura

$$\begin{aligned} &\int_a^x \left(\int_s^x \frac{\phi(s)}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}} dt \right) ds = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \\ \Rightarrow &\int_a^x \phi(s) \underbrace{\int_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}}}_{I} ds = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \qquad (2.15) \end{aligned}$$

Calculant l'intégrale I par un changement de variable $t = s + y(x - s)$, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (x - y(x-s) - s)^{-\alpha}(y(x-s))^{\alpha-1}(x-s)dy \\ &= \int_0^1 (1-y)^{-\alpha}y^{\alpha-1}dy \\ &= B(\alpha, 1-\alpha) \\ &= \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha). \end{aligned}$$

Donc (2.14) devient

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\int_a^x \phi(s)ds = \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt.$$

Alors

$$\int_a^x \phi(s)ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt$$

Pour toute fonction $\phi \in AC([a,b])$

$$\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt.$$

Pour plus de détails voir [19]

Définition 2.10. *[16] Soit f une fonction Bochner intégrable sur $[a,b]$. Les dérivées fractionnaires à droite (resp. à gauche) d'ordre $0 < \alpha < 1$ sont définies respectivement par*

$$(D^\alpha_{a^+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)(x-t)^{-\alpha}dt. \tag{2.16}$$

$$(D^\alpha_{b^-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)(t-x)^{-\alpha}dt. \tag{2.17}$$

Dans la suite, on utilise l'équation (2.16), et on note simplement $D^\alpha_a f$.

Si $a = 0$ on utilise la notation $D^\alpha f$.

Exemple 2.11. *1. Soit $f(x) = (x-a)^\gamma, \gamma > -1$. On a*

$$\begin{aligned} (D^\alpha_a f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)(x-t)^{-\alpha}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (t-a)^\gamma(x-t)^{-\alpha}dt. \end{aligned}$$

Le changement de variable $t = a + y(x-a)$, nous mène à

$$\begin{aligned}
(D_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^1 (x-a)^{-\alpha}(1-y)^{-\alpha}y^\gamma(x-a)^\gamma(x-a)dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\left[(x-a)^{\gamma-\alpha+1}\int_0^1 y^\gamma(1-y)^{-\alpha}dy\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\left[(x-a)^{\gamma-\alpha+1}B(\gamma+1,1-\alpha)\right] \\
&= \frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha+2)}\frac{d}{dx}(x-a)^{\gamma-\alpha+1} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+2)}(\gamma-\alpha+1)(x-a)^{\gamma-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{(\gamma-\alpha+1)\Gamma(\gamma-\alpha+1)}(\gamma-\alpha+1)(x-a)^{\gamma-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}(x-a)^{\gamma-\alpha}.
\end{aligned}$$

2. Soit $f(x) = x^{\gamma-1}$. Pour $0 < \alpha < \gamma$,

$$D^\alpha(x^{\gamma-1}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x t^{\gamma-1}(x-t)^{-\alpha}dt$$

Par le changement de variable $t \mapsto yx$ on trouve

$$\begin{aligned}
D^\alpha(x^{\gamma-1}) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}x^{\gamma-\alpha}\int_0^1 y^{\gamma-1}(1-y)^{-\alpha}\,dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}x^{\gamma-\alpha}B(\gamma,-\alpha+1) \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}(\gamma-\alpha)x^{\gamma-\alpha-1} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}x^{\gamma-\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Considérons deux cas particuliers importants,

1) $\gamma = 1$. *Dans ce cas*

$$D^{\alpha}1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha}$$

Rappelant que (Théorème 1.8)

$$\Gamma(t) = \infty \quad si \;\; t = 0, -1, -2, ...$$

Donc

$$D^{\alpha}1 = 0 \quad si \;\; \alpha = 1, 2, 3, ...$$

2) *Et pour* $\alpha = \gamma$, *il est clair que* $D^{\gamma}(x^{\gamma-1}) = 0$.

Remarque 2.12. *En général la dérivée fractionnaire d'une constante n'est pas égale à zéro. En effet, soit* $f \equiv c$, c *une constante*

$$(D_a^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)(x-t)^{-\alpha} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x c(x-t)^{-\alpha} dt.$$

Alors

$$(D_a^{\alpha} f)(x) = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} dt$$

$$= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left(\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)$$

$$= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}.$$

Définition 2.13. *[23] Soit* $f \in L_E^1([a,b])$, *soient* $\alpha > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $n = [\alpha] + 1$. *La dérivée de Riemann-Liouville d'ordre* α *est donnée par*

$$D_a^{\alpha} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \Big(I_a^{n-\alpha} f \Big)(x). \tag{2.18}$$

Si $\alpha = 0$,

$$D_a^0 f(x) = \frac{d}{dx} \Big(I_a^1 f \Big)(x) = f(x).$$

Remarque 2.14. *1) La dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction $x \longmapsto e^{bx}$, est donnée par*

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{bx} = b^n e^{bx}.$$

Liouville a étendu cette définition pour inclure les dérivées d'ordre arbitraire α

$$D_a^\alpha e^{bx} = b^\alpha e^{bx}.$$

Il a aussi utilisé le développement en série pour collecter toutes les fonctions exponentielles, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{b_n x}, b_n > 0$ et $c_n \in \mathbb{R}$ d'où

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(x) &= D_a^\alpha \bigg(\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{b_n x} \bigg) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Big(D_a^\alpha e^{b_n x} \Big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n b_n^\alpha e^{b_n x} \end{aligned}$$

2) D'après ce qui précède, on a

$$D_a^\alpha (\cos bx) = b^\alpha \cos \left(bx + \alpha \frac{\pi}{2} \right)$$
$$D_a^\alpha (\sin bx) = b^\alpha \sin \left(bx + \alpha \frac{\pi}{2} \right)$$

Théorème 2.15. *[22] Soient f et g deux fonctions Bochner-intégrables dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ existent presque partout. Alors pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $D_a^\alpha(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x)$ existe presque partout et on a*

$$(D_a^\alpha(\lambda_1 f + \lambda_2 g))(x) = \lambda_1 (D_a^\alpha f)(x) + \lambda_2 (D_a^\alpha g)(x). \tag{2.19}$$

Preuve. Soient $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $f, g \in L_E^1([a, b])$.

Donc pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 f + \lambda_2 g \in L_E^1([a, b])$, par le Théorème 2.2, $I_a^{n-\alpha}\Big(\lambda_1 f + \lambda_2 g\Big)(x)$ existe presque partout $x \in [a, b]$. D'où $D_a^\alpha\Big(\lambda_1 f + \lambda_2 g\Big)$ existe et en vertu de la linéarité de l'intégral, on déduit la relation (2.19). ■

Théorème 2.16. *[22] Soit $\alpha > 0$, alors pour tout $f \in L_E^1([a, b])$,*

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f = f \tag{2.20}$$

presque partout. Si en outre il existe une fonction $g \in L^1([a, b])$ telle que $f = I_a^\alpha g$, alors

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f = f$$

presque partout dans $[a, b]$.

Preuve. Soit $f \in L^1_E([a,b])$. En utilisant la Définition 2.13 et la relation (2.6)

$$D^\alpha_a I^\alpha_a f(t) = \frac{d^n}{dx^n} I^{n-\alpha}_a I^\alpha_a f(t) = \frac{d^n}{dx^n} I^n_a f(t) = f(t)$$

D'autre part, soit $g \in L^1_E([a,b])$ telle que $f = I^\alpha_a g$. D'après la relation (2.20), on obtient

$$I^\alpha_a D^\alpha_a f(t) = I^\alpha_a (D^\alpha_a I^\alpha_a g(t)) = I^\alpha_a (g(t)) = f(t).$$

$\blacksquare$

Lemme 2.17. *[12] Soient $f \in AC([a,b])$ et $0 < \alpha < 1$ alors $D^\alpha_a f$ existe presque partout dans $[a,b]$. De plus $D^\alpha_a f \in L^r_{\mathbb{R}}([a,b])$ telle que $1 \leq r < \frac{1}{\alpha}$ et*

$$D^\alpha_a f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt \right].$$

Preuve. Utilisant la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et le fait que $f \in AC([a,b])$, on trouve

$$\begin{aligned} D^\alpha_a f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} \left[f(a) + \int_a^t f'(\tau) d\tau \right] dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(a) dt + \int_a^x \int_a^t (x-t)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau dt \right]. \end{aligned}$$

Le Théorème de Fubini permet d'écrire

$$\begin{aligned} D^\alpha_a f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[\frac{f(a)}{(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha+1} + \int_a^x f'(\tau) \int_\tau^x (x-t)^{-\alpha} dt d\tau \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f'(\tau)}{1-\alpha} (x-\tau)^{-\alpha+1} d\tau \right]. \end{aligned}$$

Les règles standards de la différentiation des intégrales paramétrées nous mènent au résultat. Soit $1 \leq r < \frac{1}{\alpha}$

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b \left| D^\alpha_a f(x) \right|^r dx \right)^{1/r} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\int_a^b \left[\left| \frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} \right| dt \right]^r dx \right]^{1/r} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\left(\int_a^b \left(\left| \frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} \right| \right)^r dx \right)^{1/r} + \left(\int_a^b \left(\int_a^x \left| \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} \right| dt \right)^r dx \right)^{1/r} \right]. \end{aligned}$$

Alors

$$\left(\int_a^b \left|D_a^\alpha f(x)\right|^r dx\right)^{1/r} \leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[|f(a)|\left(\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha r}}\right)^{1/r} + \left(\int_a^b \left(\int_a^x \left|f'(t)(x-a)^{-\alpha}\right| dt\right)^r dx\right)^{1/r}\right]$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\left(\frac{|f(a)|}{1-\alpha r}(b-a)^{1-\alpha r}\right)^{1/r} + \left(\int_a^b (x-a)^{-\alpha r}\left|f(x)-f(a)\right|^r dx\right)^{1/r}\right]$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{|f(a)|}{1-\alpha r}(b-a)^{1-\alpha r}\right]^{1/r} + \left[2\|f\|_\infty \frac{1}{1-\alpha r}(b-a)^{1-\alpha r}\right]^{1/r}$$

$$< \infty, \quad si \;\; r < 1/\alpha.$$

■

Remarque 2.18. *Comme exemple de base, nous citons pour $\lambda > -1$ et $\alpha > 0$,*

$$D^\alpha t^\lambda = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}\, t^{\lambda-\alpha},$$

donnant en particulier $D^\alpha t^{\alpha-m} = 0$, $m = 1, 2, .., N$ pour N un entier supérieure ou égal à $[\alpha]$. En effet, pour $\lambda > -1$ et $n = [\alpha] + 1$

$$D^\alpha t^\lambda = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t \frac{s^\lambda}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\;\; ds$$

En utilisant le changement de variable $s = y\,t$, on trouve

$$\begin{aligned}
D^\alpha t^\lambda &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^1 y^\lambda t^{n-\alpha+\lambda}(1-y)^{n-\alpha-1}\, dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n} t^{n-\alpha+\lambda}\int_0^1 y^\lambda (1-y)^{n-\alpha-1}\, dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n} t^{n-\alpha+\lambda} B(\lambda+1, n-\alpha) \\
&= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda-1)}\frac{d^n}{dt^n} t^{n-\alpha+\lambda}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
D^\alpha t^{\alpha-m} &= \frac{\Gamma(\alpha-m+1)}{\Gamma(n-m-1)}\frac{d^n}{dt^n} t^{n-m} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2.2.2 Dérivée de Caputo

Définition 2.19. *[23] Soient $[a,b] \subset \mathbb{R}$, E un espace de Banach, $\alpha > 0$, $n = [\alpha]$. Soit $f : [a,b] \longrightarrow E$ telle que $f^{(n)} \in L^1_E([a,b])$. La dérivée fractionnaire de Caputo-Bochner d'ordre α de f est donnée par*

$$\left({}^C D_a^\alpha f\right)(t) = I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(t), \tag{2.21}$$

i.e.

$$\left({}^C D_a^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds,\ t > a. \tag{2.22}$$

Exemple 2.20. **(1)** *Soit $f(t) = (t-a)^\gamma$ avec $\gamma > 0$. Pour $0 < \alpha \leq 1$, on a*

$$\begin{aligned}\left({}^C D_a^\alpha f\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} ((t-a)^\gamma)^{(n)}(s)ds. \end{aligned}\tag{2.23}$$

Sachant que $(\gamma > n)$

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^\gamma &= \gamma(\gamma-1)(\gamma-2)...(\gamma-n+1)(t-a)^{\gamma-n} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-n+1)}(t-a)^{\gamma-n}.\end{aligned}$$

Remplaçant cette dernière relation dans (2.23), on aura

$$\left({}^C D_a^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-n+1)}(s-a)^{\gamma-n}ds.$$

En utilisant le changement de variable $s = a + y(t-a)$, il vient que

$$\begin{aligned}\left({}^C D_a^\alpha f\right)(t) &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\gamma-n+1)} \int_0^1 (t-a)^{n-\alpha-1}(1-y)^{n-\alpha-1} y^{\gamma-n}(t-a)^{\gamma-n}(t-a)dy \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\gamma-n+1)}(t-a)^{\gamma-\alpha} \int_0^1 y^{\gamma-n}(1-y)^{n-\alpha-1}dy \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\gamma-n+1)} \frac{\Gamma(\gamma-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}(t-a)^{\gamma-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}(t-a)^{\gamma-\alpha}.\end{aligned}$$

(2) *Soit $f \equiv c$, tel que c est une constante et $n \geq 1$*

$$\begin{aligned}\left({}^C D_a^\alpha f\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{dt^n}\Big(c\Big) ds \\ &= 0.\end{aligned}$$

Nous remarquons que

$${}^C D_a^\alpha(c) \neq D_a^\alpha(c).$$

Remarque 2.21. **1)** *Par la Définition 2.19 et le Théorème 2.5 on a*

$$\begin{aligned}\left(I_a^\alpha\, {}^C D_a^\alpha f\right)(t) &= \left(I_a^\alpha I_a^{n-\alpha} f^{(n)}\right)(t) \\ &= \left(I_a^{\alpha+n-\alpha} f^{(n)}\right)(t) \\ &= \left(I_a^n f^{(n)}\right)(t). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Notons que

$$\left(I_a^n f^{(n)}\right)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f^{(n)}(s) ds$$

existe pour presque tout $t \in [a, b]$ (Théorème 2.2).

Et par (2.24), on déduit que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left({}^C D_a^\alpha f\right)(s) ds = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f^{(n)}(s) ds,$$

pour presque tout $t \in [a, b]$.

Théorème 2.22. *[4] Si $n-1 < \alpha < n$ où $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\lim_{\alpha \longrightarrow n} \left({}^C D_a^\alpha f(t)\right) = f^{(n)}(t), \tag{2.25}$$

$$\lim_{\alpha \longrightarrow n-1} \left({}^C D_a^\alpha f(t)\right) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a) \tag{2.26}$$

Preuve. Par la relation (2.21),

$${}^C D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)(s)}}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds.$$

Utilisant l'intégration par parties, on obtient

$${}^C D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[f^{(n)}(a) \frac{(t-a)^{n-\alpha}}{(n-\alpha)} + \frac{1}{n-\alpha} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(s) ds \right],$$

Il résulte (moyennant la relation $\Gamma(n-\alpha+1) = (n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)$)

$$ {}^{C}D_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left[f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha} + \int_a^t f^{(n+1)}(s)(t-s)^{n-\alpha} ds\right] $$

$$ \begin{aligned} \lim_{\alpha \longrightarrow n} {}^{C}D_a^{\alpha} f(t) &= \lim_{\alpha \longrightarrow n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left[f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha} + \int_a^t f^{(n+1)}(s)(t-s)^{n-\alpha} ds\right] \\ &= \lim_{\alpha \longrightarrow n} f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(s) ds \\ &= f^{(n)}(t). \end{aligned} $$

D'autre part,

$$ \begin{aligned} \lim_{\alpha \longrightarrow n-1} {}^{C}D_a^{\alpha} f(t) &= \lim_{\alpha \longrightarrow n-1} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left[f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha} + \int_a^t f^{(n+1)}(s)(t-s)^{n-\alpha} ds\right] \\ &= (t-a) f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(s)(t-s) ds, \end{aligned} $$

par l'intégration par partie, on trouve

$$ \begin{aligned} \lim_{\alpha \longrightarrow n-1} {}^{C}D_a^{\alpha} f(t) &= (t-a) f^{(n)}(a) + f^{(n)}(s)(t-a)\Big|_a^t + \int_a^t f^{(n)}(s) ds \\ &= \int_a^t f^{(n)}(s) ds = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a). \end{aligned} $$

■

Définition 2.23. *[4] Soient $[a,b] \subset \mathbb{R}$, E un espace de Banach et $0 < \alpha \leq 1$. $f : [a,b] \longrightarrow E$ telle que $f' \in L^1_E([a,b])$. La dérivée fractionnaire de Caputo-Bochner d'ordre α de f est donnée par*

$$ \left({}^{C}D_a^{\alpha} f\right)(t) = I_a^{1-\alpha} f'(t) \tag{2.27} $$

i.e.

$$ ({}^{C}D_a^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds, \quad \forall t \in [a,b] \tag{2.28} $$

Il est clair que

$$ ({}^{C}D_a^{1} f)(t) = f'(t) \tag{2.29} $$

Proposition 2.24. *[21] Soit $m-1 < \alpha \leq m, m = 1, 2, ...$ alors la la transformée de Laplace de $D^{\alpha} f(t)$ est*

$$ \mathcal{L}[D^{\alpha} f](s) = s^{\alpha} \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{m-1} (D^k I^{m-\alpha} f)(0) s^{m-1-k}. \tag{2.30} $$

Preuve. On utilise l'équation $D^\alpha = D^m I^{m-\alpha}$ et la proposition 2.9, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[D^\alpha f](s) &= \mathcal{L}[D^m I^{m-\alpha} f](s) \\ &= s^m \mathcal{L}[I^{m-\alpha} f](s) - \sum_{k=0}^{m-1} (D^k I^{m-\alpha} f)(0) s^{m-1-k}) \\ &= s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{m-1} (D^k I^{m-\alpha} f)(0) s^{m-1-k})\end{aligned}$$

■

Lemme 2.25. *[22] Soit $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha]$. Supposons que ${}^C D_a^\alpha f$ et $D_a^\alpha f$ existent alors*

$${}^C D_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right]. \tag{2.31}$$

Preuve. D'après la Définition 2.13

$$\begin{aligned}D_a^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \big(t-a\big)^k \right] &= \frac{d^n}{dt^n} I_a^{n-\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \big(t-a\big)^k \right] \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \big(s-a\big)^k \right] ds,\end{aligned}$$

en utilisant l'intégration par partie

$$\begin{aligned}I_a^{n-\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \big(t-a\big)^k \right] &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{-(t-s)^{n-\alpha}}{(n-\alpha)} \left[f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \big(s-a\big)^k \right] \Bigg|_{s=a}^{s=t} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{(t-s)^{n-\alpha}}{(n-\alpha)} \left[\frac{d}{ds} f(s) - \frac{d}{ds} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \big(s-a\big)^k \right] ds \\ &= I_a^{n-\alpha+1} \frac{d}{dt} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \big(t-a\big)^k \right].\end{aligned}$$

De la même façon, par itération sur n, on a

$$\begin{aligned}I_a^{n-\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \big(t-a\big)^k \right] &= I_a^{n-\alpha+n} \frac{d^n}{dt^n} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \big(t-a\big)^k \right] \\ &= I_a^n I_a^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \big(t-a\big)^k \right]\end{aligned}$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \big(t-a\big)^k$ est un pôlynome de degré $n-1$, alors

$$I_a^{n-\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \big(t-a\big)^k \right] = I_a^n I_a^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t)$$

Donc,

$$D_a^\alpha\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)(a)}}{k!}\Big(t-a\Big)^k\right]=\frac{d^n}{dt^n}I_a^nI_a^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f(t)$$

$$=I_a^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f(t)$$

$$= {}^CD_a^\alpha f(t)$$

■

D'après le Lemme précédent, on aura

Lemme 2.26. *[22] Soient $\alpha \geq 0$ et $n=[\alpha]$. Supposons que $f \in L_E^1([a,b])$ telle que ${}^CD_a^\alpha f$ et $D_a^\alpha f$ existent. De plus, Supposons que $f^{(k)}(a)=0$ pour $k=0,1,...,n-1$ (c'est-à-dire que nous supposons que f a un n-uplet nul en a). Alors,*

$$D_a^\alpha f = {}^CD_a^\alpha f.$$

CHAPITRE 3

PROBLÈME AUX LIMITES

Soit E un espace de Banach séparable. On considère l'inclusion différentielle fractionnaire suivante

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})\begin{cases} D^{\alpha}u(t) & \in F(t,u(t),D^{\alpha-1}u(t)), \;\; p.p. \;\, t\in I, \\ I^{\beta}u(t)|_{t=0} & = \lim\limits_{t\to 0}\displaystyle\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}u(s)ds = 0, \quad u(1) = \int_0^1 u(t)dt, \end{cases}$$

où $\alpha \in]1,2]$, $\beta \in [0,2-\alpha]$ sont des constantes, $I=[0,1]$, Γ est la fonction de Gamma, D^{α} est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et $F : I\times E\times E \rightrightarrows E$ une multi-fonction à valeurs non vides fermées [18].

Dans le cas $\alpha = 2$, l'inclusion différentielle est du second ordre.

Pour la démonstration de nos résultats, ou aura besoin du lemme suivant (qui découle de la définition 2.13 et la remarque 2.18 dans le cas $E = \mathbb{R}$).

Lemme 3.1. *Soit $\alpha > 0$, la solution générale de l'équation différentielle fractionnaire $D^\alpha x(t) = 0$ est donnée par*

$$x(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + ... + c_n t^{\alpha-n}, \tag{3.1}$$

telle que $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ et $n = [\alpha] + 1$.

Remarque 3.2. *Puisque $D^\alpha I^\alpha x(t) = x(t)$, pour tout $x \in C_E(I)$, on a*

$D^\alpha(I^\alpha D^\alpha x(t) - x(t)) = 0$ et par le Lemme 3.1, il vient que

$$x(t) = I^\alpha D^\alpha x(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + ... + c_n t^{\alpha-n} \tag{3.2}$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Dans la suite, nous désignons par $W_E^{\alpha,1}(I)$ l'espace de toutes les fonctions continues dans $C_E(I)$, dont que les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre $(\alpha-1)$ sont continues et les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre α appartiennent à $L_E^1(I)$, autrement dit,

$$W_E^{\alpha,1}(I) = \left\{ f \in C_E(I), D^{\alpha-1} f \in C_E(I) \ \text{ et } \ D^\alpha f \in L_E^1(I) \right\}.$$

Les solutions dans $W_E^{\alpha,1}(I)$.

Le lemme suivant résume quelques propriétés de la fonction de Green.

Lemme 3.3. *Soit $G(\cdot, \cdot) : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par*

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}\Big((1-s)^\alpha - \alpha(1-s)^{\alpha-1}\Big), & 0 \le s \le t \le 1 \\ \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}\Big((1-s)^\alpha - \alpha(1-s)^{\alpha-1}\Big), & 0 \le t \le s \le 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Alors les assertions suivantes sont vérifiées

(i) $G(\cdot,\cdot)$ satisfait l'estimation suivante

$$|G(t,s)| \le \frac{2\alpha}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} = M_G.$$

(ii) Si $u \in W_E^{\alpha,1}(I)$ *avec* $I^\beta u(t)|_{t=0} = 0$ *et* $u(1) = \int_0^1 u(t)dt$ *alors*

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) D^\alpha u(s) ds, \ \ \textit{pour tout } t \in I.$$

(iii) Soit $f \in L_E^1(I)$ *et soit* $u_f : I \longrightarrow E$ *la fonction définie par*

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s) ds, \ \ \textit{pour tout } t \in I.$$

Alors, $I^\beta u_f(t)|_{t=0} = 0$ *et* $u_f(1) = \int_0^1 u_f(t)dt$. *De plus,* $u_f \in W_E^{\alpha,1}(I)$ *et on a*

$$D^{\alpha-1} u_f(t) = \int_0^t f(s)ds + \frac{1}{\alpha-1}\int_0^1 \Big((1-s)^\alpha - \alpha(1-s)^{\alpha-1}\Big) f(s) ds, \ \ \textit{pour tout } t \in I \tag{3.4}$$

et

$$D^\alpha u_f(t) = f(t), \ \ p.p.\, t \in I. \tag{3.5}$$

Preuve. On a

(i) Par la définition de G et pour tout $s, t \in [0,1]$ on a.

Si $0 \le s \le t \le 1$:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} \Big((1-s)^\alpha - \alpha(1-s)^{\alpha-1}\Big) \right| \\
&\qquad \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} |t-s|^{\alpha-1} + \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} \Big(|1-s|^\alpha + \alpha|1-s|^{\alpha-1}\Big) \\
&\qquad \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} |1-s|^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)(\alpha-1)} \Big(|1-s|^\alpha + \alpha|1-s|^{\alpha-1}\Big) \\
&\qquad \le \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} [\alpha - 1 + 1 + \alpha] \\
&\qquad = \frac{2\alpha}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}.
\end{aligned}$$

Si $0 \le t \le s \le 1$:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} \Big((1-s)^\alpha - \alpha(1-s)^{\alpha-1}\Big) \right| &\le \frac{|t|^{\alpha-1}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} \left| (1-s)^{\alpha-1}\Big(1-s-\alpha\Big) \right| \\
&\le \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} \left(\Big|\alpha - 1\Big| + |s| \right) \\
&\le \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} \left(\alpha - 1 + 1 \right) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} \\
&\le \frac{2\alpha}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}
\end{aligned}$$

(ii) Soit $y \in E'$ et soit $t \in I$ arbitraire. Par le théorème 1.27 on a

$$\left\langle y, \int_0^1 G(t,s) D^\alpha u(s) ds \right\rangle = \int_0^1 G(t,s) D^\alpha \langle y, u(s)\rangle ds$$

$$= \int_0^t \left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}((1-s)^\alpha - \alpha(1-s)^{\alpha-1}) \right) D^\alpha \langle y, u(s)\rangle ds$$

$$+ \int_t^1 \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}((1-s)^\alpha - \alpha(1-s)^{\alpha-1}) D^\alpha \langle y, u(s)\rangle ds$$

$$= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} D^\alpha \langle y, u(s)\rangle ds$$

$$+ \int_0^t \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}((1-s)^\alpha - \alpha(1-s)^{\alpha-1}) D^\alpha \langle y, u(s)\rangle ds$$

$$+ \int_t^1 \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}((1-s)^\alpha - \alpha(1-s)^{\alpha-1}) D^\alpha \langle y, u(s)\rangle ds$$

$$= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} D^\alpha \langle y, u(s)\rangle ds + \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^\alpha D^\alpha \langle y, u(s)\rangle ds$$

$$- \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} D^\alpha \langle y, u(s)\rangle ds$$

$$= I^\alpha \left(D^\alpha \langle y, u(t)\rangle \right) + \alpha \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha-1} \left(I^{\alpha+1} D^\alpha \langle y, u(1)\rangle - I^\alpha D^\alpha \langle y, u(1)\rangle \right). \tag{3.6}$$

En utilisant l'hypothèse $\lim_{t\to 0} I^\beta u(t) = 0$, il résulte de (3.2) que

$$\langle y, u(t)\rangle = I^\alpha D^\alpha \langle y, u(t)\rangle + c_1 t^{\alpha-1}, \tag{3.7}$$

pour certain $c_1 \in \mathbb{R}$. Nous aurons donc

$$\langle y, u(1)\rangle = I^\alpha D^\alpha \langle y, u(1)\rangle + c_1, \tag{3.8}$$

et sachant que $u(1) = \int_0^1 u(t) dt$

$$\langle y, u(1)\rangle = \left\langle y, \int_0^1 u(t) dt \right\rangle = \int_0^1 \langle y, u(t)\rangle dt$$

$$= \int_0^1 \left(I^\alpha D^\alpha \langle y, u(t)\rangle + c_1 t^{\alpha-1} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} D^\alpha \langle y, u(s)\rangle ds dt + \frac{c_1}{\alpha}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\langle y, u(1)\rangle &= \int_0^1 \int_s^1 \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} D^\alpha \langle y, u(s)\rangle dt ds + \frac{c_1}{\alpha} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 D^\alpha \langle y, u(s)\rangle \int_s^1 (t-s)^{\alpha-1} dt ds + \frac{c_1}{\alpha} \\
&= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^\alpha D^\alpha \langle y, u(s)\rangle ds + \frac{c_1}{\alpha} \\
&= I^{\alpha+1} D^\alpha \langle y, u(1)\rangle + \frac{c_1}{\alpha}. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Il résulte de (3.8) et (3.9) que

$$c_1 = \frac{\alpha}{\alpha-1}\left[I^{\alpha+1} D^\alpha \langle y, u(1)\rangle - I^\alpha D^\alpha \langle y, u(1)\rangle\right] \qquad (3.10)$$

Combinant (3.6), (3.7) et (3.10), nous obtenons

$$\left\langle y, \int_0^1 G(t,s) D^\alpha u(s) ds \right\rangle = \langle y, u(t)\rangle.$$

Cette égalité est valable pour chaque $y \in E'$, nous aurons donc pour tout $t \in I$

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) D^\alpha u(s) ds.$$

(iii) Soit $f \in L^1_E(I)$ et $u_f(t) = \displaystyle\int_0^1 G(t,s) f(s) ds$, pour tout $t \in I$. Par la définition de $G(.,.)$ on a

$$\begin{aligned}
u_f(t) &= \int_0^1 G(t,s) f(s) ds \\
&= \int_0^t \left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}((1-s)^\alpha - \alpha(1-s)^{\alpha-1})\right) f(s) ds \\
&+ \int_t^1 \left(\frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}((1-s)^\alpha - \alpha(1-s)^{\alpha-1})\right) f(s) ds \\
&= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha-1}\left[\int_0^1 \frac{\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}(1-s)^\alpha f(s) ds - \int_0^1 \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}(1-s)^{\alpha-1} f(s) ds\right] \\
&= I^\alpha f(t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha-1}\left[\int_0^1 \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(1-s)^\alpha f(s) ds - \int_0^1 \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}(1-s)^{\alpha-1} f(s) ds\right] \\
&= I^\alpha f(t) + \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{\alpha-1}\left[I^{\alpha+1} f(1) - I^\alpha f(1)\right]. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 2.3, il est clair que $I^\alpha f \in C_E(I)$ donc u_f est continue sur I. D'autre part, grâce à (3.11), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} u_f(1) &= I^\alpha f(1) + \frac{\alpha}{\alpha-1}\Big(I^{\alpha+1}f(1) - I^\alpha f(1)\Big) \\ &= \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\right) I^\alpha f(1) + \frac{\alpha}{\alpha-1} I^{\alpha+1} f(1) \\ &= \frac{1}{\alpha-1}\Big[\alpha I^{\alpha+1}f(1) - I^\alpha f(1)\Big] \end{aligned} \tag{3.12}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_f(t)dt &= \int_0^1 I^\alpha f(t) + \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{\alpha-1}\Big[I^{\alpha+1}f(1) - I^\alpha f(1)\Big]dt \\ &= \int_0^1 \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)dsdt + \int_0^1 \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{\alpha-1}\Big[I^{\alpha+1}f(1) - I^\alpha f(1)\Big]dt \\ &= \int_0^1 \int_s^1 \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)dtds + \frac{1}{(\alpha-1)}\Big[I^{\alpha+1}f(1) - I^\alpha f(1)\Big] \\ &= \int_0^1 \frac{f(s)}{\Gamma(\alpha)} \int_s^1 (t-s)^{\alpha-1}dtds + \frac{1}{\alpha-1}\Big[I^{\alpha+1}f(1) - I^\alpha f(1)\Big] \\ &= \int_0^1 \frac{f(s)}{\Gamma(\alpha)} \frac{(1-s)^\alpha}{\alpha} ds + \frac{1}{\alpha-1}\Big[I^{\alpha+1}f(1) - I^\alpha f(1)\Big] \\ &= \int_0^1 \frac{(1-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(s)ds + \frac{1}{\alpha-1}\Big[I^{\alpha+1}f(1) - I^\alpha f(1)\Big] \\ &= I^{\alpha+1}f(1) + \frac{1}{\alpha-1}\Big[I^{\alpha+1}f(1) - I^\alpha f(1)\Big] \\ &= \frac{1}{\alpha-1}\Big[\alpha I^{\alpha+1}f(1) - I^\alpha f(1)\Big]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

D'où $u_f(1) = \int_0^1 u_f(t)dt$.

Maintenant, soit $y \in E'$ arbitraire et soit $\beta \in [0, 2-\alpha]$ avec $1 < \alpha \leq 2$,

$$\begin{aligned} \langle y, I^\beta u_f(t)\rangle &= I^\beta \langle y, u_f(t)\rangle \\ &= I^\beta \langle y, \int_0^1 G(t,s)f(s)ds\rangle \\ &= I^\beta \left(\int_0^1 G(t,s)\langle y, f(s)\rangle ds\right) \\ &= I^\beta \left(I^\alpha\Big(\langle y, f(t)\rangle\Big) + \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{\alpha-1}\Big(I^{\alpha+1}\langle y, f(1)\rangle - I^\alpha \langle y, f(1)\rangle\Big)\right) \\ &= I^{\alpha+\beta}\langle y, f(t)\rangle + I^\beta \left(\frac{\alpha t^{\alpha-1}}{\alpha-1}\Big\langle y, I^{\alpha+1}f(1) - I^\alpha f(1)\Big\rangle\right) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Alors

$$\langle y, I^{\beta}u_f(t)\rangle = I^{\alpha+\beta}\langle y, f(t)\rangle + \frac{\alpha}{(\alpha-1)}\Big\langle y, I^{\alpha+1}f(1) - I^{\alpha}f(1)\Big\rangle I^{\beta}t^{\alpha-1}.$$

Or

$$\begin{aligned} I^{\beta}t^{\alpha-1} &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}s^{\alpha-1}ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t t^{\beta-1}\left(1-\frac{s}{t}\right)^{\beta-1}s^{\alpha-1}ds \end{aligned}$$

Utilisant le changement de variable $v \mapsto s/t$ on trouve donc

$$\begin{aligned} I^{\beta}t^{\alpha-1} &= \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-v)^{\beta-1}\, t^{\alpha-1}v^{\alpha-1}tdv \\ &= \frac{t^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-v)^{\beta-1}v^{\alpha-1}dv \\ &= \frac{t^{\beta+\alpha-1}B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\beta)} \end{aligned}$$

D'où

$$\langle y, I^{\beta}u_f(t)\rangle = I^{\alpha+\beta}\langle y, f(t)\rangle + \frac{\alpha}{(\alpha-1)}\Big\langle y, I^{\alpha+1}f(1) - I^{\alpha}f(1)\Big\rangle \frac{t^{\beta+\alpha-1}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \quad (3.15)$$

Faisant tendre $t \to 0^+$ dans (3.15), nous aurons $\lim_{t\to 0^+}\Big\langle y, I^{\beta}u_f(t)\Big\rangle = 0$, pour tout $y \in E'$ ceci montre que $I^{\beta}u_f(t)|_{t=0} = 0$. Il reste à vérifier les égalités (3.4)-(3.5). En effet, puisque la fonction f a une dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre γ, pour tout $\gamma \in]0,\alpha]$, il en est de même pour la fonction $u_f(.)$ en utilisant (3.11).

D'autre part, pour chaque y dans $E^{'}$ et $n = [\gamma]+1$ nous avons

$$\begin{aligned} \langle y, D^{\gamma}u_f(t)\rangle &= \left\langle y, \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t (t-s)^{n-\gamma-1}\,u_f(s)ds\right\rangle \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t (t-s)^{n-\gamma-1}\,\langle y, u_f(s)\rangle\, ds = D^{\gamma}\langle y, u_f(t)\rangle \\ &= D^{\gamma}\Big\langle y, I^{\alpha}f(t) + \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{\alpha-1}(I^{\alpha+1}f(1) - I^{\alpha}f(1))\Big\rangle \\ &= D^{\gamma}I^{\alpha}\langle y, f(t)\rangle + \frac{\alpha}{\alpha-1}\Big(I^{\alpha+1}\langle y, f(1)\rangle - I^{\alpha}\langle y, f(1)\rangle\Big)D^{\gamma}\left(t^{\alpha-1}\right). \quad (3.16) \end{aligned}$$

Puisque $D^\gamma I^\alpha\langle y, f(t)\rangle = I^{\alpha-\gamma}\langle y, f(t)\rangle$ et on a d'après l'exemple 2.11

$$D^\gamma\left(t^{\alpha-1}\right) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\gamma)}t^{\alpha-\gamma-1}, & 0<\gamma<\alpha \\ 0, \quad \gamma = \alpha. \end{cases}$$

On déduit de (3.16) que pour tout $t \in I$ et tout $y \in E'$

$$\langle y, D^{\alpha-1}u_f(t)\rangle = D^{\alpha-1}I^\alpha\langle y, f(t)\rangle + \frac{\alpha}{\alpha-1}\Big(I^{\alpha+1}\langle y, f(1)\rangle - I^\alpha\langle y, f(1)\rangle\Big)D^{\alpha-1}(t^{\alpha-1})$$

$$= I^1\langle y, f(t)\rangle + \frac{\alpha}{\alpha-1}\Big(I^{\alpha+1}\langle y, f(1)\rangle - I^\alpha\langle y, f(1)\rangle\Big)\Gamma(\alpha)$$

$$= \int_0^t \langle y, f(s)\rangle ds + \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\alpha-1}\Big(I^{\alpha+1}\langle y, f(1)\rangle - I^\alpha\langle y, f(1)\rangle\Big),$$

$$= \left\langle y, \int_0^t f(s)ds + \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\alpha-1}\Big(I^{\alpha+1}\langle y, f(1)\rangle - I^\alpha\langle y, f(1)\rangle\Big)\right\rangle,$$

et

$$\langle y, D^\alpha u_f(t)\rangle = D^\alpha I^\alpha\langle y, f(t)\rangle + \frac{\alpha}{\alpha-1}\Big(I^{\alpha+1}\langle y, f(1)\rangle - I^\alpha\langle y, f(1)\rangle\Big)D^\alpha(t^{\alpha-1})$$

$$= \langle y, f(t)\rangle \quad p.\,p.\; t \in I.$$

■

Remarque 3.4. *D'après le Lemme 3.3, il est facile de voir que si* $u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds$, *pour* $f \in L^1_E(I)$, *alors pour tout* $t \in I$,

$$\|u_f(t)\| \le M_G\|f\|_1 \qquad et \qquad \left\|D^{\alpha-1}u_f(t)\right\| \le M_G\|f\|_1 \tag{3.17}$$

où

$$M_G = \frac{2\alpha}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}.$$

En effet, soit $t \in I$

$$\|u_f(t)\| = \left\|\int_0^1 G(t,s)f(s)ds\right\|$$

$$\le \int_0^1 |G(t,s)|\,\|f(s)\|ds$$

$$\le \frac{2\alpha}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \|f(s)\|ds = M_G\|f\|_1.$$

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
\left\| D^{\alpha-1}u_f(t) \right\| &= \left\| \int_0^t f(s)ds + \frac{1}{(\alpha-1)} \int_0^1 \left[(1-s)^{\alpha} - \alpha\,(1-s)^{\alpha-1} \right] f(s)ds \right\| \\
&\leq \left\| \int_0^t f(s)ds \right\| + \left\| \frac{1}{(\alpha-1)} \int_0^1 \left[(1-s)^{\alpha} - \alpha\,(1-s)^{\alpha-1} \right] f(s)ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \|f(s)\|ds + \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \int_0^1 \|f(s)\|ds \\
&\leq \left(1 + \frac{1+\alpha}{\alpha-1} \right) \int_0^1 \|f(s)\|ds \\
&\leq \frac{2\alpha}{\alpha-1}\|f\|_1 = M_G\|f\|_1.
\end{aligned}
$$

Théorème 3.5. *Soit $F : I \times E \times E \rightrightarrows c(E)$ une multi-application à valeurs fermées satisfaisant les conditions suivantes*

(H_1) *F est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable.*

(H_2) *Il existe des fonctions positives $l_1, l_2 \in L^1_{\mathbb{R}}(I)$ avec $M_G||l_1 + l_2||_1 < 1$ telles que*

$$d_H(F(t, x_1, y_1), F(t, x_2, y_2)) \leq l_1(t)||x_1 - x_2|| + l_2(t)||y_1 - y_2||,$$

pour tous $(t, x_1, y_1), (t, x_2, y_2) \in I \times E \times E$.

(H_3) *La fonction $t \longmapsto sup\left\{ ||z|| : z \in F(t, 0, 0) \right\}$ est intégrable.*

Alors le problème $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ admet au moins une solution dans $W^{\alpha,1}_E(I)$.

Preuve. Nous considérons la multi-fonction suivante

$$S : L^1_E(I) \rightrightarrows c(L^1_E(I)),$$

définie par

$$S(h) = \left\{ f \in L^1_E(I) \big/ f(t) \in F(t, u_h(t), D^{\alpha-1}u_h(t)) \quad p.p.\ t \in I \right\},$$

$h \in L^1_E(I)$, où $c(L^1_E(I))$ désigne l'ensemble de tous les sous-ensembles fermés non vides de $L^1_E(I)$ et $u_h \in W^{\alpha,1}_E(I)$ avec

$$u_h(t) = \int_0^1 G(t, s)h(s)ds.$$

Il est clair que $u(.)$ est une solution du problème $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ si et seulement si $D^{\alpha}u(.)$ est un point fixe de S. Nous montrerons que S est une contraction. La preuve sera en deux étapes.

Étape 1. "$S(h)$ est non vide et fermé pour chaque $h \in L^1_E(I)$".

Posons

$$K(t) = \{z \in F(\cdot, u_h(\cdot), D^{\alpha-1}u_h(\cdot), \ \|z(t)\| \leq d(0, F(t, u_h(t), D^{\alpha-1}u_h(t)), p.p.\ t \in I)\}.$$

L'ensemble $K(\cdot)$ est à valeurs non vides (voir [7] théorème III.41). Montrons que $K(\cdot)$ est mesurable, pour cela il suffit de montrer que son graphe est mesurable (Théorème 1.21). Nous avons

$$\begin{aligned}
gph(K) &= \Big\{(t,z) \in I \times L^1_E(I), z \in K(t)\Big\} \\
&= \Big\{(t,z) \in I \times L^1_E(I), z(t) \in F(t, u_h(t), D^{\alpha-1}u_h(t))\Big\} \\
&\bigcap \Big\{(t,z) \in I \times L^1_E(I), \|z(t)\| \leq d(0, F(t, u_h(t), D^{\alpha-1}u_h(t)))\ \ p.p.\Big\} \\
&= gph(F) \bigcap gph\Big(\overline{B}_E(0, M(t))\Big)
\end{aligned}$$

où

$$M(t) = d(0, F(t, u_h(t), D^{\alpha-1}u_h(t)).$$

Notons que $t \longmapsto F(t, u_h(t), D^{\alpha-1}u_h(t))$ est mesurable donc $gph(F)$ l'est aussi. D'autre part, la fonction $t \longrightarrow d(0, F(t, u_h(t), D^{\alpha-1}u_h(t)))$ est mesurable (Théorème 1.18).

Montrons que $t \longrightarrow \overline{B}_E(0, M(t))$ est mesurable. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans $\overline{B}_E(0,1)$.

On pose

$$\sigma_n(t) = z_n M(t)$$

Il est clair que $\sigma_n(\cdot)$ est mesurable car $M(\cdot)$ l'est aussi et

$$\begin{aligned}
\overline{B}_E(0, M(t)) &= M(t)\overline{B}_E(0,1) \\
&= M(t)\overline{\{z_n, n \in \mathbb{N}\}} \\
&= \overline{\{M(t)z_n, n \in \mathbb{N}\}} \\
&= \overline{\{\sigma_n(t)\}}.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de représentation de Castaing (Théorème 1.23), la multi-fonction $t \to \overline{B}_E(0, M(t))$ est mesurable, donc son graphe est aussi mesurable.

Par conséquent, $K(\cdot)$ est mesurable. Appliquant le Théorème 1.20, il existe une sélection mesurable $z(\cdot)$ de $K(\cdot)$ i.e.,

$$z(t) \in K(t), \quad \forall t \in I.$$

Donc,

$$z(t) \in F(t, u_h(t), D^{\alpha-1}u_h(t))$$

et (sachant (H_2) et la Remarque 3.4)

$$\begin{aligned}
\|z(t)\| &\leq d(0, F(t, u_h(t), D^{\alpha-1}u_h(t))) \\
&\leq d(0, F(t,0,0)) + d_H(F(t,0,0), F(t, u_h(t), D^{\alpha-1}u_h(t)) \\
&\leq ||c|| + d(c, F(t,0,0)) + d_H(F(t,0,0), F(t, u_h(t), D^{\alpha-1}u_h(t)) \\
&\leq \sup\{||c|| : c \in F(t,0,0)\} + d_H(F(t,0,0), F(t, u_h(t), D^{\alpha-1}u_h(t))) \\
&\leq \sup\{||c|| : c \in F(t,0,0)\} + l_1(t)||u_h(t)|| + l_2(t)||D^{\alpha-1}u_h(t)|| \\
&\leq \sup\{||c|| : c \in F(t,0,0)\} + l_1(t)M_G||h||_1 + l_2(t)M_G||h||_1 \\
&\leq \sup\{||c|| : c \in F(t,0,0)\} + M_G(l_1(t) + l_2(t))||h||_1,
\end{aligned}$$

pour presque tout $t \in I$. Par (H_3), on déduit que $z \in L^1_E(I)$. D'où $S(h)$ est non vide.

Étape 2. "La multi-fonction $S(\cdot)$ est une contraction".

Pour montrer que $S(\cdot)$ est une contraction, on doit montrer qu'il existe $k \in (0,1)$ satisfaisant

$$d_H\Big(S(h), S(g)\Big) \leq k\|h - g\|_1.$$

Pour tout $h, g \in L^1_E(I)$. Soient $f \in S(h)$ et $\epsilon > 0$. Par le Théorème d'existence de sélection mesurable, il existe une sélection Lebesgue-mesurable $\Phi : I \to E$ telle que

$$\Phi(t) \in F\Big(t, u_g(t), D^{\alpha-1}u_g(t)\Big) \tag{3.18}$$

et par la caractérisation de la borne inférieure, on a

$$\|\Phi(t) - f(t)\| \leq d\Big(f(t), F\Big(t, u_g(t), D^{\alpha-1}u_g(t)\Big)\Big) + \varepsilon.$$

Comme $f \in S(h)$,

$$\begin{aligned}
\|f(t)-\Phi(t)\| &\leq d\Big(f(t), F(t,u_g(t),D^{\alpha-1}u_g(t))\Big)+\varepsilon \\
&\leq d\Big(f(t), F(t,u_h(t),D^{\alpha-1}u_h(t))\Big) \\
&+ d_H\Big(F(t,u_h(t),D^{\alpha-1}u_h(t)), F(t,u_g(t),D^{\alpha-1}u_g(t))\Big)+\varepsilon \\
&\leq d_H\Big(F(t,u_h(t),D^{\alpha-1}u_h(t)), F(t,u_g(t),D^{\alpha-1}u_g(t))\Big)+\varepsilon \\
&\leq l_1(t)\|u_g(t)-u_h(t)\| + l_2(t)\|D^{\alpha-1}u_g(t)-D^{\alpha-1}u_h(t)\|+\varepsilon \\
&= l_1(t)\|u_g(t)-u_h(t)\| + l_2(t)\|D^{\alpha-1}\Big(u_g-u_h\Big)(t)\|+\varepsilon
\end{aligned}$$

D'après la Remarque 3.4 on trouve pour tout $t \in I$

$$\|f(t)-\Phi(t)\| \leq M_G\|g-h\|_1\Big(l_1(t)+l_2(t)\Big)+\varepsilon.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\|f-\Phi\|_1 &= \int_I \|f(t)-\Phi(t)\|dt \\
&\leq M_G\|g-h\|_1\int_I \Big(l_1(t)+l_2(t)\Big)dt+\varepsilon,
\end{aligned}$$

puisque l_1 et l_2 dans $L^1_{\mathbb{R}}(I)$, alors

$$\|f-\Phi\|_1 \leq M_G\Big\|l_1+l_2\Big\|_1\|g-h\|_1+\varepsilon.$$

En vertue de la condition $\Phi \in S(g)$, on déduit que pour tout $\varepsilon > 0$

$$d\Big(f,S(g)\Big) \leq M_G\Big\|l_1+l_2\Big\|_1\|g-h\|_1+\varepsilon$$

et par conséquent,

$$\sup_{f\in S(h)} d\Big(f,S(g)\Big) \leq M_G\Big\|l_1+l_2\Big\|_1\|g-h\|_1+\varepsilon$$

ε étant arbitraire, on conclut que

$$\sup_{f\in S(h)} d\Big(f,S(g)\Big) \leq M_G\Big\|l_1+l_2\Big\|_1\|g-h\|_1 \tag{3.19}$$

inter-changeant h et g dans l'inégalité (3.19), on trouve

$$\sup_{\Phi\in S(g)} d\Big(\Phi, S(h)\Big) \leq M_G \Big\|l_1 + l_2\Big\|_1 \|h-g\|_1 \tag{3.20}$$

Les relations (3.19) et (3.20) amènent à

$$d_H\left(S(g), S(h)\right) \leq M_G\|l_1+l_2\|_1\|g-h\|_1, \quad \forall g,h \in L^1_E(I).$$

Soit $k = M_G\|l_1+l_2\|_1$. Par hypothèse $k<1$ et ceci prouve que S est une contraction. Une application du Théorème 1.38 sur la contraction S montre que S admet un point fixe i.e., il existe $h \in L^1_E(I),$ telle que $h \in S(h)$. D'où

$$u_h \in W^{\alpha,1}_E(I) \;\; et \;\; D^\alpha u_h(t) = h(t) \;\; p.p. \;\; t \in I,$$

ce qui achève la preuve du théorème. ■

Corollaire 3.6. *Soit $f : I \times E \times E \longrightarrow E$ une application satisfaisant les conditions suivantes.*

(H_1') *Pour tout $(x,y) \in E\times E$, la fonction $f(\cdot,x,y)$ est mesurable sur I.*

(H_2') *Pour tout $t\in I$, $f(t,\cdot,\cdot)$ est continue et il existe deux fonctions positives $l_1, l_2 \in L^1_{\mathbb{R}}(I)$ avec $M_G||l_1+l_2||_1 < 1$ telles que*

$$||f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)|| \leq l_1(t)||x_1-x_2|| + l_2(t)||y_1-y_2||,$$

pour tous $(t,x_1,y_1),(t,x_2,y_2) \in I\times E\times E$.

(H_3') *La fonction $t \mapsto f(t,0,0)$ est Lebesgue-intégrable sur I.*

Alors l'équation différentielle fractionnaire

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = f(t,u(t),D^{\alpha-1}u(t)) \\ I^\beta u(t)|_{t=0} = 0, u(1) = \int_0^1 u(t)dt, \end{cases} \tag{3.21}$$

admet une solution unique $u \in W^{\alpha,1}_E(I)$.

Preuve. Par le Théorème 3.5, le problème (3.21) admet une solution $u \in W^{\alpha,1}_E(I)$. Soient u_1, u_2 deux solutions du problème (3.21) dans $W^{\alpha,1}_E(I)$. Pour chaque $t\in I$ on a

$$\begin{aligned} ||D^\alpha u_1(t) - D^\alpha u_2(t)|| &= ||f(t,u_1(t),D^{\alpha-1}u_1(t)) - f(t,u_2(t),D^{\alpha-1}u_2(t))|| \\ &\leq l_1(t)||u_1(t)-u_2(t)|| + l_2(t)||D^{\alpha-1}u_1(t) - D^{\alpha-1}u_2(t)|| \end{aligned} \tag{3.22}$$

D'autre part, d'après le Lemme 3.3 on trouve

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq M_G \Big\| D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2 \Big\|_1, \tag{3.23}$$

et

$$\Big\| D^{\alpha-1} u_1(t) - D^{\alpha-1} u_2(t) \Big\| \leq M_G \Big\| D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2 \Big\|_1. \tag{3.24}$$

En effet, soit $t \in I$, par le Lemme 3.3 (ii), on a

$$\begin{aligned}
\|u_1(t) - u_2(t)\| &= \left\| \int_0^1 G(t,s) D^\alpha u_1(s) ds - \int_0^1 G(t,s) D^\alpha u_2(s) ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^1 G(t,s) \left(D^\alpha u_1(s) - D^\alpha u_2(s) \right) ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 \Big| G(t,s) \Big| \Big\| D^\alpha u_1(s) - D^\alpha u_2(s)) \Big\| ds \\
&\leq M_G \int_0^1 \Big\| D^\alpha u_1(s) - D^\alpha u_2(s)) \Big\| ds \\
&\leq M_G \Big\| D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2 \Big\|_1.
\end{aligned}$$

Par (iii) du Lemme 3.3.

$$\begin{aligned}
\Big\| D^{\alpha-1} u_1(t) - D^{\alpha-1} u_2(t) \Big\| &= \Bigg\| \int_0^t D^\alpha u_1(s) - D^\alpha u_2(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{\alpha - 1} \int_0^1 \Big((1-s)^\alpha - \alpha (1-s)^{\alpha-1} \Big) \left(D^\alpha u_1(s) - D^\alpha u_2(s) \right) ds \Bigg\| \\
&\leq \int_0^t \| D^\alpha u_1(s) - D^\alpha u_2(s) \| \, ds \\
&\quad + \frac{1}{\alpha - 1} \int_0^1 \Big| (1-s)^\alpha - \alpha (1-s)^{\alpha-1} \Big| \, \| D^\alpha u_1(s) - D^\alpha u_2(s) \| \, ds \\
&\leq \int_0^1 \| D^\alpha u_1(s) - D^\alpha u_2(s) \| \, ds + \frac{1+\alpha}{\alpha - 1} \int_0^1 \| D^\alpha u_1(s) - D^\alpha u_2(s) \| \, ds \\
&\leq \frac{2\alpha}{\alpha - 1} \| D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2 \|_1 = M_G \| D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2 \|_1 .
\end{aligned}$$

Combinant entre (3.22), (3.23) et (3.24), on déduit que

$$\begin{aligned}
\| D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2 \|_1 &= \int_I \| D^\alpha u_1(t) - D^\alpha u_2(t) \| dt \\
&\leq M_G \| D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2 \|_1 \int_I l_1(t) + l_2(t) dt \\
&\leq M_G \| l_1 + l_2 \|_1 \| D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2 \|_1.
\end{aligned}$$

Donc

$$\Big(1 - M_G \| l_1 + l_2 \|_1 \Big) \| D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2 \|_1 \leq 0$$

or $M_G(\|l_1 + l_2\|_1) < 1$, alors $\|D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2\|_1 \leq 0$.

D'où $D^\alpha u_1 = D^\alpha u_2$. Par conséquent, de (3.23), $u_1 = u_2$. ■

Théorème 3.7. *Soit $F : I \times E \times E \rightrightarrows bc(E)$ une multi-fonction à valeurs fermées bornées telles que les conditions $(H_1) - (H_3)$ dans le Théorème 3.5 sont vérifiées. Alors l'espace des solutions dans $W_E^{\alpha,1}(I)$, $\mathcal{S}$, est un retract dans $W_E^{\alpha,1}(I)$, où $W_E^{\alpha,1}(I)$ est muni de la norme*

$$\|u\|_{W_E^{\alpha,1}} = \|u\|_\infty + \|D^{\alpha-1}u\|_\infty + \|D^\alpha u\|_1.$$

Preuve. Soit $S : L_E^1(I) \to c(L_E^1(I))$

$$S(h) = \left\{ f \in L_E^1(I) \big/ f(t) \in F(t, u_h(t), D^{\alpha-1}u_h(t)) \quad p.p.\ t \in I \right\},$$

$h \in L_E^1(I)$, $u_h \in W_E^{\alpha,1}(I)$ et $u_h(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)ds$.

Il est clair d'après le Théorème 3.5 que S est une contraction à valeurs non vides, fermées. Puisque F est à valeurs bornées alors S l'est aussi.

On montre que S est à valeurs décomposable i.e., $\forall f, g \in S(h)$, $A \in \mathcal{L}(I)$ (partie mesurable), $f\mathbb{1}_A + g\mathbb{1}_{I\setminus A} \in S(h)$, $\forall h \in L_E^1(I)$.

Soit A un sous ensemble mesurable de I,

$$f \in S(h) \Leftrightarrow f(t) \in F(t, u_h(t), D^{\alpha-1}u_h(t)) \quad p.p.\, t \in I$$

$$g \in S(h) \Leftrightarrow g(t) \in F(t, u_h(t), D^{\alpha-1}u_h(t)) \quad p.p.\, t \in I$$

$$f\mathbb{1}_A(t) + g\mathbb{1}_{I\setminus A}(t) = \begin{cases} f(t) & si\ \ t \in A \\ g(t) & si\ \ t \in A \end{cases} \in F(t, u_h(t), D^{\alpha-1}u_h(t))\ \ p.p\, t \in I$$

Donc S est à valeurs décomposable

Alors par le résultat de Bressan-Cellina-Fryszkowski (Théorème 1.39),

$$Fix(S) = \{h, h \in S(h)\}$$

est un retract dans $L_E^1(I)$. Donc il existe $\psi : L_E^1(I) \to Fix(S)$ continue telle que $h \mapsto \psi(h) = h$, $\forall h \in Fix(S)$.

Pour chaque $u \in W_E^{\alpha,1}(I)$, notons

$$\phi(u)(t) = \int_0^1 G(t,s)\psi(D^\alpha u)(s)ds \ \ pour\ \ tout\ \ t \in I.$$

Par le Lemme 3.3 (iii), on a

$$\begin{aligned}\Phi(u)(1) &= \int_0^1 G(1,s)\psi(D^\alpha u)(s)ds\\ &= \int_0^1 \psi(D^\alpha u)(s)ds\end{aligned}$$

$$D^{\alpha-1}(\Phi(u))(t) = \int_0^t \psi(D^\alpha u)(s)ds + \frac{1}{\alpha-1}\int_0^1 \Big((1-s)^\alpha - \alpha(1-s)^\alpha - 1\Big)\psi(D^\alpha u)(s)ds \tag{3.25}$$

et

$$D^\alpha(\Phi(u))(t) = \psi(D^\alpha u)(t) \quad p.p. \quad t \in I, \tag{3.26}$$

donc

$$\psi(D^\alpha u) \in Fix(S) \Longrightarrow D^\alpha \Phi(u) \in Fix(S)$$

Alors $\Phi(u)$ est une $W_E^{\alpha,1}(I)$-solution du problème (??)-(??) i.e., $\Phi(u) \in \mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions dans $W_E^{\alpha,1}(I)$). Il reste à montrer que Φ est une application continue de $W_E^{\alpha,1}(I)$ dans $\mathcal{S}$.

Soit $u \in W_E^{\alpha,1}(I)$ et soit $\varepsilon > 0$, puisque ψ est continue de $L_E^1(I)$ dans $Fix(S)$. Alors

$$\forall h \in L_E^1(I),\ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ ||h - D^\alpha u||_1 < \delta \Longrightarrow ||\psi(h) - \psi(D^\alpha u)||_1 < \varepsilon.$$

Considérons $B_{W_E^{\alpha,1}(I)}(u,\delta)$ la boule ouverte de centre u et de rayon $\delta > 0$ dans $(W_E^{\alpha,1}(I), ||.||_W)$. Donc pour tout $v \in B_{W_E^{\alpha,1}(I)}(u,\delta)$, on a $||u-v||_W < \delta$ i.e.,

$$||u-v||_W = ||u-v||_\infty + ||D^{\alpha-1}u - D^{\alpha-1}v||_\infty + ||D^\alpha u - D^\alpha v||_1 < \delta.$$

Autrement dit $||D^\alpha u - D^\alpha v||_1 < \delta$.

D'où

$$||D^\alpha \Phi(u) - D^\alpha \Phi(v)||_1 = ||\psi(D^\alpha u) - \psi(D^\alpha v)||_1 < \varepsilon$$

Par le Lemme 3.3, on a

$$\begin{aligned}||\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)|| &= \left|\left| \int_0^1 G(t,s)\Big(\psi(D^\alpha u)(s) - \psi(D^\alpha v)(s)\Big)ds \right|\right|\\ &\le \int_0^1 \Big|G(t,s)\Big|\Big|\psi(D^\alpha u)(s) - \psi(D^\alpha v)(s)\Big|ds\\ &\le M_G||\psi(D^\alpha u) - \psi(D^\alpha v)||_1\\ &< \varepsilon M_G.\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$||\Phi(u)-\Phi(v)||_\infty = \sup_{t\in I} ||\Phi(u)(t)-\Phi(v)(t)|| < \varepsilon M_G$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
||D^{\alpha-1}\Phi(u)(t)-D^{\alpha-1}\Phi(v)(t)|| &= \Bigg|\Bigg| \int_0^t \Big(\psi(D^\alpha u)(s)-\psi(D^\alpha v)(s)\Big)ds \\
&+ \frac{1}{\alpha-1}\int_0^1 \Big((1-s)^\alpha-\alpha(1-s)^{\alpha-1}\Big)\Big(\psi(D^\alpha u)(s)-\psi(D^\alpha v(s)\Big)ds\Bigg|\Bigg| \\
&\leq ||\psi(D^\alpha u)-\psi(D^\alpha v)||_1 + \frac{1+\alpha}{\alpha-1}||\psi(D^\alpha u)-\psi(D^\alpha v)||_1 \\
&= \frac{2\alpha}{\alpha-1}||\psi(D^\alpha u)-\psi(D^\alpha v)||_1 \\
&< M_G\Gamma(\alpha)\varepsilon,
\end{aligned}$$

Or $||D^{\alpha-1}\Phi(u)(t)-D^{\alpha-1}\Phi(v)(t)||_\infty < M_G\Gamma(\alpha)\varepsilon$. Par conséquent

$$||\Phi(u)-\Phi(v)||_W < \varepsilon, \ \ \forall\varepsilon > 0.$$

On déduit que Φ est continue dans $W_E^{\alpha,1}(I)$

On montre que $\Phi(u)(t) = u(t), \quad \forall u \in \mathcal{S}$.

Soit $u \in \mathcal{S}$, on a $D^\alpha u \in Fix(S)$. D'où $\psi(D^\alpha u) = D^\alpha u$ et

$$\begin{aligned}
\Phi(u)(t) &= \int_0^1 G(t,s)\psi(D^\alpha u)(s)ds \\
&= \int_0^1 G(t,s)D^\alpha u(s)ds \\
&= u(t).
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}$ est un retract. ■

CONCLUSION

Le terme calcul fractionnaire a plus de 300 ans, c'est une généralisation du calcul classique et par conséquent préserve beaucoup de propriétés de base.

En tant que zone de développement intensif du calcul au cours des deux dernières décennies, il offre de formidable nouvelles caractéristiques à la recherche et devient de plus en plus utilisé dans diverses applications.

Dans ce mémoire, on a présenté les propriétés essentielles des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville ainsi que celles de Caputo.

Une attention particulière a été accordée à la fourniture des exemples illustratifs faciles à suivre concernant le calcul fractionnaire ainsi que son application à la résolution d'une inclusion différentielle d'ordre fractionnaire avec des conditions aux limites.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **D. Agnieszka, B. Malinowska and D. F. M. Torres**, Introduction to the fractional calculus of variation, Imperial College Press, London (2012).

[2] **F. Aliouane**, Cours Fonctions Spéciales, Département de Mathématiques, Univ. de jijel.http ://elearning.univ-jijel.dz/elearning/course/view.php ?id=710

[3] **C. D. Aliprantis and K. C. Border**, Infinite Dimensional Analysis, Springer, New-York (2006).

[4] **G. A. Anastassiou**, Strong right fractional calculus for Banach space valued functions. University of Memphis, U.S.A. Vol. 36, No 1, pp. 149-186, (2017).

[5] **A. Bressan, A. Cellina and A. Fryszkowski**, A class of absolute retracts in space of integrable fonctions, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 112, Number 2 pp. 413-418 (1991).

[6] **M. Caputo**, Elasticita e dissipazione, Zanichelli, Bologna (1969).

[7] **C. Castaing and M. Valadier**, Convex Analysis and Mesurable Multifunctions, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New-York (1977).

[8] **A. Cernea**, On a fractional differential inclusion with boundary conditions, Studia Univ. Babes-Bolyai, Mathematica, Vol. Lv, pp. 105-113 (2010).

[9] **A. Cernea**, A note on the existence of solutions for some boundary value problems of fractional differential inclusions, Fract. Calc. Appl. Anal. Vol. 15, No 2, 183–194, (2012).

[10] **H. Covitz and S. B . Nadler**, Multivalued contraction mappings in generalized metric spaces, Israel J. Math. Vol. **8**, pp. 5–11 (1970).

[11] **A. M. A. El-Sayed, A. G. Ibrahim**, Set-valued integral equations of arbitrary (fractional) order, Appl. Math. Comput. Vol. 118, 113–121, (2001).

[12] **K. Diethelm**, The Analysis of Fractional Differential Equations, Springer (2004).

[13] **S. Djebali, L. Górniewicz and A. Ouahab**, Solution sets for differential equations and inclusions, Berline Boston (2013).

[14] **Y. Feng and S. Liu**, Fixed point theorems for multi-valued contractive mappings and multi-valued Caristi type mappings. J.Math. Anal. Appl., Vol. 317. pp. 103-112 (2006).

[15] **G. Gupur**, Functional Analysis Methods for Reliability Models, Birkhäuser (2011).

[16] **A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo**, Theory and application of fractional differential equations.North-Holland Mathematics Studies, 204, Elesevier Science B. V, Amsterdam (2006).

[17] **J. Mikusiński**, The Bochner integral, Academic Press, New-York (1978).

[18] **P. D. Phung and L. X. Truong**, On a fractional differential inclusion with integral boundary conditions in Banach space, An International Journal for Theory and Applications. Vol. 16, NUMBER 3, pp. 538-558 (2013).

[19] **S. G. E. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev**, Fractional integrals and derivatives theory and applications, Gordon and Breach Science Publishers (1993).

[20] **J.L . Schiff**, The Laplace Transform : Theory and Applications. Springer Science et Business Media (1999).

[21] **S. Umarov**, Introduction to Fractional and Pseudo-Differential Equations With Singular Symbols, Springer, Univ. of New Haven, West Haven, CT, USA (2015).

[22] **M. Weilbeer**, Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical Background, Univ. Braunschweig (2010).

[23] **S. Yessad Mokhtari**, Analyse fractionnaire appliquée aux systèmes différentiels non linéaire, Thèse, Univ. de Annaba, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques (2012).