MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOHAMED SEDDIK BEN YAHIA- JIJEL

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

THÈSE

Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat en Sciences
En : Mathématiques
Spécialité : Algèbre

Par : **BOUBELLOUTA Khadidja**

THÈME:

Fonctions symétriques et leurs applications à certains nombres et polynômes

Soutenue le : 27 / 10 / 2020 Devant le Jury composé de :

Mr HADDAD Tahar	Professeur	Université de Jijel	Président
Mr KERADA Mohamed	Professeur	Université de Jijel	Directeur de Thèse
Mr ELLAGGOUNE Fateh	Professeur	Université de Guelma	Examinateur
Mr CHAOUI Abderrazek	Professeur	Université de Guelma	Examinateur
Mr BOUDELIOU Ammar	M.C.A	Université de Constantine 1	Examinateur
Mr BOUSSAYOUD Ali	M.C.A	Université de Jijel	Invité

A la mémoire de mon père

A ma mère

A mes frères

Et mes sœurs

Remerciements

Je remercie tout d'abord Dieu de m'avoir accordé la volonté et le courage pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur **Mohamed KERADA** mon directeur de thèse, pour son aide, sa disponibilité, ses précieux conseils et pour la patience qu'il a montrée jusqu'à l'aboutissement de cette thèse.

Je voudrais adresser mes remerciements à Monsieur le Professeur **Tahar HADDAD** d'avoir immédiatement accepté la tâche du président du jury.

Je suis très honorée par la présence des professeurs **Fateh ELLAGGOUNE**, **Abderrazek CHAOUI** et le maître de conférences **Ammar BOUDELIOU** et je leur adresse toute ma gratitude pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et pour avoir accepté d'examiner cette thèse.

Mes remerciements vont également à Monsieur **Ali BOUSSAYOUD** maître de Conférences à l'université Mohamed Seddik Ben Yahia, qui m'apporter un soutien considérable le long de ce travail, une disponibilité et des conseils précieux ont été un grand soutien morale.

Mes remerciements seraient incomplets si je ne remercierais pas chaleureusement tous les membres du Laboratoire Mathématiques et Applications des Mathématiques de l'université Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel.

Je termine ces remerciement par la pensée aux êtres qui me sont les plus chers, qui ont eu un rôle essentiel et continu pour ma réussite, et sans eux n'aura aucune réussite possible. J'adresse de tout mon cœur mes remerciements à ma famille, particulièrement à **ma mère** , **mes frères** et **mes sœurs**, ainsi qu'à **mes amis**. Ils ont toujours été présents et ont rempli ma vie, je leurs suis infiniment reconnaissant pour leur amour et leur soutien.

Enfin, Merci à toute personne qui m'a encouragé afin de terminer ce travail.

Table des matières

Introduction

Les suites définies par une relation de récurrence se rencontrent dans des domaines divers : Par exemple en analyse combinatoire dans les problèmes de dénombrement, en biologie dans le cadre de la dynamique des populations, en informatique dans l'analyse des algorithmes, et même en macroéconomie. Les plus célèbres nombres existaient depuis très longtemps et qui sont récurrents d'ordre deux (à trois termes) à savoir les nombres de Fibonacci F_n, Lucas L_n, Pell P_n, Pell-Lucas Q_n, Jacobsthal J_n, Jacobsthal-Lucas $j_n, \ldots$ etc. Fibonacci est une suite de nombres entiers où chaque terme est la somme des deux termes qui le précédent. Elle commence généralement par les termes 0 et 1(resp.1 et 1) et ses premiers termes sont 0,1,1,2,3,5,8,13,21,... (resp. 1,1,2,3,5,8,13,21,...). Les nombres de Fibonacci ont été introduit par Léonard de Pise l'italien (surnommé Fibonacci) en 1202 dans son livre Liber Abaci qui porte sur les méthodes algébriques des problèmes. Plusieurs auteurs ont étudié les nombres de Fibonacci par exemple Hoggatt dans [43] et Vorobiov, dans [72], et récemment Marques dans [57] et Shattuck dans [66], pour plus d'informations voir ([45], [26], [47], [48], [44], [39], [71]). Les fonctions génératrices des nombres de Fibonacci et les polynômes de Chebyshev de deux espèces ont été déterminé par plusieurs chercheurs, Par exemple : En 1962, Riordan [64] a déterminé la fonction génératrice des puissances des nombres de Fibonacci. En 1994, D. Foata [41] a utilisé des techniques combinatoires pour déterminer les fonctions génératrices des produits de nombres de Fibonacci $\sum_{n=0}^{\infty} F_n^2 t^n$, ainsi que les polynômes de Chebyshev de première et de deuxième espèces. Les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n U_n(x) t^n, \sum_{n=0}^{\infty} F_n U_n(x) U_n(y) t^n, \sum_{n=0}^{\infty} F_n U_n(x) T_n(y) t^n, \sum_{n=0}^{\infty} F_n T_n(x) t^n, \ldots$$

sont des exemples des séries obtenues. En 2004, A. Lascoux [52] a trouvé un autre résultat qui est l'identité de Ramanujan par la méthode des différences divisées. Dans ([3, 14, 17, 18, 19, 20, 23, 11]) Boussayoud et *al,* ont récupéré certaines fonctions génératrices présentées dans [41] et ils ont déterminé des nouveaux résultats à l'aide des opérateurs symétriques $\delta^{k}_{a_1a_2}$ et $\delta^{-k}_{a_1a_2}$. La formule de Binet est également bien connue pour plusieurs de ces nombres . Par exemple dans [4] G. Bilgici a obtenu les formules de Binet ainsi que les fonctions génératrices des suites des nombres de Fibonacci et Lucas généralisées. Dans [31] P. Catarino et P. Vasco ont obtenu la formule de Binet, la fonction génératrice et certaines propriétés pour les nombres k-Pell-Lucas. Dans [46] Jhala et *al*, ont déterminé la formule de Binet pour les nombres k-Jacobsthal et à l'aide de cette formule, ils ont obtenu certaines propriétés pour ces nombres.

Les nombres de Narayana, Padovan, Jacobsthal de troisième ordre et Jacobsthal-Lucas de troisième ordre sont également parmi les nombres étudiés par de nombreux chercheurs. Par exemples : Dans [67] Y. Soykan a présenté les formules de Binet et les fonctions génératrices des nombres de Narayana, Narayana-Lucas et Narayana-Perrin. Ramírez et Sirvent dans [63] ont défini la séquence k-Narayana et ont étudié les relations de récurrence et certaines propriétés combinatoires des ces nombres. Dans [34] Cook et Bacon ont déterminé les formules de Binet et les fonctions génératrices des nombres de Jacobsthal de troisième ordre et Jacobsthal-Lucas de troisième ordre.

Les applications des fonctions génératrices sont également nombreuses et variées, elles forment un lien entre l'analyse mathématique des fonctions à valeurs réelles et les problèmes portant sur les séquences ; en plus elles fournissent une expression explicite de certaines suites définies par une relation de récurrence, elles sont abondamment utilisées en théorie des probabilités. Notre objectif dans cette thèse est d'obtenir de nouveaux résultats sur les fonctions génératrices des produits de certains nombres et polynômes orthogonaux. En utilisant le concept des fonctions symétriques.

Dans le premier chapitre, on présente des outils et préliminaires nécessaires à la compréhension des chapitres suivants. Nous donnons tout d'abord quelques rappels sur les relations des récurrences, puis les polynômes orthogonaux, ensuite on définit les fonctions génératrices. Enfin dans la dernière partie de ce chapitre nous introduisons les fonctions symétriques élémentaires et complètes ainsi que leurs propriétés.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons des nouveaux résultats sur les fonctions génératrices de produits des nombres $k-$Fibonacci $F_{k,n}$, $k-$Lucas $L_{k,n}$, $k-$Pell $P_{k,n}$, $k-$Pell-Lucas $Q_{k,n}$, $k-$Jaobsthal $J_{k,n}$, $k-$Jacobsthal-Luas $j_{k,n}$ ainsi que les polynômes de Chebyshev de deux espèces et autres résultats concernant les nombres de Padovan, les nombres de Narayana, les nombres de Jacobsthal de troisième ordre, les nombres de Jaconsthal-Lucas de troisième ordre et les polynômes de Chebychev de troisième (resp quatrième) espèce. La fin de ce chapitre fait l'objet des publications suivantes :

- **Kh. boubellouta**, A. Boussayoud, M. Kerada, Symmetric functions for k-Fibonacci numbers and orthogonal polynomials, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 6 (3) **2018**, 98-102.
- **Kh. boubellouta**, M. Kerada, Some identities and generating functions for Padovan numbers, *Tamap Journal of Mathematics and Statistics*, 2019 ; (2019), 1-8. Article ID SI04.
- **Kh. boubellouta**, A. Boussayoud, Some identities and generating function of third-order recurrence relations, *Italian Journal of Pure and applied mathematics*, 44, In press, October **2020**.

Dans le troisième chapitre, on applique l'opérateur $\delta^k_{c_1c_2}\delta^k_{b_1b_2}$ sur la série inversibles $g(b_1c_1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n\left(A\right) b_1^n c_1^n t^n$, cela nous permet de donner des nouveaux résultats sur les fonctions génératrice des produits des nombres de $k-$Fibonacci et les polynômes de Chebychev de première et de deuxième espèces comme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} F^2_{k,n} T_n\left(c_1 - c_2\right) t^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} F^2_{k,n} U_n\left(c_1 - c_2\right) t^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} U\left(b_1 - b_2\right) T\left(c_1 - c_2\right) t^n, ...$$

et de récupérer quelques fonctions génératrices des produits de nombres de Fibonacci et les polynômes Chebyshev de deux espèces présentées dans [41]. La fin de ce chapitre fait l'objet de la publication suivante :

- **Kh. boubellouta**, A. Boussayoud, S. Araci, M. Kerada, Some theorems on generating functions and their applications, *Advanced studies in contemporary mathematics*, 30 (3) (2020), 307 - 324.

Le quatrième chapitre est composé de deux parties, dans la première, nous présentons des nouveaux théorèmes afin de déterminer des fonctions génératrices. Les théorèmes proposés sont basés sur les fonctions symétriques. Dans la deuxième partie de ce chapitre on détermine les fonctions génératrices des nombres de Jacobsthal et Jacobsthal Lucas d'indice pair et impair et nous donnons des nouvelles fonctions génératrices des produits des nombres de Fibonacci, Pell et Jacobsthal, par exemple :

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n^3 t^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} J_n^2 F_n t^n, \sum_{n=0}^{\infty} P_n^2 F_n t^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} J_n^2 P_n t^n, \sum_{n=0}^{\infty} P_n^3 t^n, ...$$

La fin de ce chapitre fait l'objet de la publication suivante :

- **Kh. boubellouta**, A. Boussayoud, M. Kerada, Symmetric functions for second-order recurrence sequence. *Tbilisi mathematical journal* 13 (2) **2020**, 225-237.

Une liste de références, une conclusion et perspectives sont données à la fin de cette thèse.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons toutes les définitions et les notions de base ayant été utilisées tout au long de cette thèse, tout d'abord nous commençons par définir les relations de récurrences, puis les polynômes orthogonaux. Ensuite nous rappelons la notion des fonctions génératrices . Dans la dernière partie de ce chapitre nous introduisons les fonctions symétriques ainsi que leurs propriétés.

1.1 Relations de récurrences

On a besoin de rappeler quelques définitions de base concernant les relations de récurrences .

1.1.1 Relations de récurrences linéaires homogènes

Définition 1 *Une relation de récurrence est dite linéaire homogène d'ordre k à coefficients constants si elle est de la forme*

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k} = 0, \tag{1.1}$$

où $c_1, c_2, ..., c_k$ sont des nombres réels et $c_k \neq 0$.

Remarque 1 Si $a_i = 0, \forall i \in [n-k, n]$ *une solution de l'équation* (1.1) , *elle s'appelle solution triviale.*

Remarque 2 *$a_n = t^n$ est une solution de l'équation* (1.1) *avec $a_n \neq 0$, vérifie*

$$t^n + c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} + ... + c_k t^{n-k} = 0 \Leftrightarrow t^k + c_1 t^{k-1} + c_2 t^{k-2} + ... + c_k = 0.$$

Cette dernière équation est l'équation caractéristique de la relation de récurrence (1.1).

Définition 2 *Soit $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k} = 0$, le polynôme caractéristique correspondant est*

$$P(t) = t^k + c_1 t^{k-1} + ... + c_k.$$

Théorème 1 [65] *Soient $c_1, c_2, ..., c_k$ des nombres réels tels que c_k est non nul . Supposons que l'équation caractéristique*

$$t^k + c_1 t^{k-1} + ... + c_{k-1} t + c_k = 0,$$

admet k racines distinctes $t_1, t_2, ..., t_k$. Alors, une séquence a_n est une solution de la relation de récurrence

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k} = 0,$$

si *et seulement si :*

$$a_n = \alpha_1 t_1^n + \alpha_2 t_2^n + ... + \alpha_k t_k^n,$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ des constantes réelles.

Exemple 1 Soit la récurrence de la suite de Fibonacci, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, pour $n \geq 2$ avec $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. Son équation caractéristique est $t^2 - t - 1 = 0$ qui a pour racines simples $t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. La solution générale est donc de la forme $F_n = \lambda_1 t_1^n + \lambda_2 t_2^n$. Les valeurs de λ_1 et λ_2 étant fournies par les conditions initiales : $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\lambda_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$. Finalement,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

1.1.2 Relations de récurrences linéaires d'ordre 2

Fibonacci généralisée $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} G_n = pG_{n-1} + qG_{n-2} \\ G_0 = \alpha, \quad G_1 = \beta \end{cases}, \ \forall n \geq 2, \tag{1.2}$$

avec p, $q \in \mathbb{C}$, α, $\beta \in \mathbb{C}$ [62].

Lemme 1 *Soit* $t^2 - pt - q = 0$ *l'équation caractéristique associée à* (1.2). *Alors :*

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes t_1 *et* t_2, *la solution générale de* (1.2) *est donnée par :*

$$G_n = \frac{\lambda_1 t_1^n - \lambda_2 t_2^n}{t_1 - t_2}, \quad \textit{avec} \ \ \lambda_1 = \beta - \alpha t_2 \ \ \textit{et} \ \ \lambda_2 = \beta - \alpha t_1.$$

- Si l'équation caractéristique admet une solution double t *dans* $\mathbb{R}$, *la solution générale de* (1.2) *est donnée par :*

$$G_n = (c_1 + c_2 n)\, t^n, \text{ avec } c_1 = \alpha \text{ et } c_2 = \frac{\beta - \alpha t}{t}.$$

Preuve. On a l'équation caractéristique associée à la relation (1.2) est

$$t^2 - pt - q = 0.$$

1- Si $t_1 \neq t_2$, les racines simples de cette équation, alors :

$$t_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}, \qquad t_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

Par conséquent, la solution générale est

$$G_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n.$$

Les constantes c_1 et c_2 sont déterminées par les conditions initiales comme suit :

$$\begin{cases} G_0 = c_1 + c_2 = \alpha \\ G_1 = c_1 t_1 + c_2 t_2 = \beta. \end{cases}$$

En résolvant ce système à deux équations et deux inconnues, on obtient :

$$\begin{cases} c_1 = \frac{\beta - \alpha t_2}{t_1 - t_2} \\ c_2 = \frac{\alpha t_1 - \beta}{t_1 - t_2}. \end{cases}$$

La solution finale est alors

$$G_n = \frac{\lambda_1 t_1^n - \lambda_2 t_2^n}{t_1 - t_2}, \text{ avec } \lambda_1 = \beta - \alpha t_2 \text{ et } \lambda_2 = \beta - \alpha t_1.$$

2- Si l'équation caractéristique de la relation (1.2) admet une racine double t, alors

$$t = \frac{1}{2} p.$$

Par conséquent, la solution générale

$$G_n = (c_1 + c_2 n)\, t^n.$$

Les constantes c_1 et c_2 sont déterminées par les conditions initiales comme suit :

$$\begin{cases} G_0 = c_1 = \alpha, \\ G_1 = (c_1 + c_2)\, t = \beta. \end{cases}$$

En résolvant ce système à deux équations et deux inconnues, on obtient

$$\begin{cases} c_1 = \alpha, \\ c_2 = \frac{\beta - \alpha t}{t}. \end{cases}$$

La solution finale est alors

$$G_n = (c_1 + c_2 n)\, t^n, \text{ avec } c_1 = \alpha \text{ et } c_2 = \frac{\beta - \alpha t}{t}.$$

Les exemples ci-dessous sont des relations des récurrences associées à la relation (1.2).

Exemple 2

1- Pour $p = k$, $\beta = 1$ et $q = 1, \alpha = 0$, nous obtenons la suite de $k-$Fibonacci [29]

$$\begin{cases} F_{k,n} = kF_{k,n-1} + F_{k,n-2} \\ F_{k,0} = 0, \quad F_{k,1} = 1 \\ \{F_{k,n}\} = \{0, 1,\ k,\ k^2+1,\ k^3+2k,\ k^4+3k+1...\} \end{cases} ,\forall n \geq 2. \tag{1.3}$$

La forme de Binet s'écrit :

$$F_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{k^2+4}} \left(\left(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} \right)^n - \left(\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2} \right)^n \right). \tag{1.4}$$

2- Pour $p = \beta = k$, $q = 1$ et $\alpha = 2$, nous obtenons la suite de $k-$Lucas [36]

$$\begin{cases} L_{k,n} = kL_{k,n-1} + L_{k,n-2} \\ L_{k,0} = 2, \quad L_{k,1} = k \\ \{L_{k,n}\} = \{2,\ k,\ k^2+2,\ k^3+3k,\ k^4+4k^2+2, ...\} \end{cases} ,\forall n \geq 2. \tag{1.5}$$

La forme de Binet s'écrit :

$$L_{k,n} = \left(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} \right)^n + \left(\frac{-k-\sqrt{k^2+4}}{2} \right)^{-n}. \tag{1.6}$$

3- Pour $p = 2$, $\alpha = 0$, $q = k$ et $\beta = 1$, nous obtenons la suite de $k-$Pell [28]

$$\begin{cases} P_{k,n} = 2P_{k,n-1} + kP_{k,n-2} \\ P_{k,0} = 0, \quad P_{k,1} = 1 \\ \{P_{k,n}\} = \{0, 1, 2, k+4, 4k+8, k^2+2k+16, ...\} \end{cases} ,\forall n \geq 2. \tag{1.7}$$

La forme de Binet s'écrit :

$$P_{k,n} = \frac{1}{2\sqrt{1+k}} \left(\left(1+\sqrt{1+k}\right)^n - \left(1-\sqrt{1+k}\right)^n \right). \tag{1.8}$$

4- Pour $p = \alpha = \beta = 2$ et $q = k$, nous obtenons la suite de $k-$Pell-Lucas [30]

$$\begin{cases} Q_{k,n} = 2Q_{k,n-1} + kQ_{k,n-2} \\ Q_{k,0} = 2, \quad Q_{k,1} = 2 \\ \{Q_{k,n}\} = \{2, 2, 2k+4, 4k+8, 2k^2+16k+16, ...\} \end{cases}, \forall n \geq 2. \tag{1.9}$$

La forme de Binet s'écrit :

$$Q_{k,n} = \left(1+\sqrt{1+k}\right)^n + \left(1-\sqrt{1+k}\right)^n. \tag{1.10}$$

5- Pour $p = k, \alpha = 0$, $q = 2$ et $\beta = 1$, nous obtenons la suite de $k-$Jacobsthal [46]

$$\begin{cases} J_{k,n+1} = kJ_{k,n} + 2J_{k,n-1} \\ J_{k,0} = 0, \quad J_{k,1} = 1 \\ \{J_{k,n}\} = \{0, 1, k, k^2+2, k^3+4k, k^4+6k^2+4, ...\} \end{cases}, \forall n \geq 1. \tag{1.11}$$

La forme de Binet s'écrit :

$$J_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{k^2+8}}\left(\left(\frac{k+\sqrt{k^2+8}}{2}\right)^n - \left(\frac{k-\sqrt{k^2+8}}{2}\right)^n\right). \tag{1.12}$$

6- Pour $p = k, \alpha = 2$, $q = 2$ et $\beta = k$, nous obtenons la suite de $k-$Jacobstal-Lucas[27]

$$\begin{cases} j_{k,n+1} = kj_{k,n} + 2j_{k,n-1} \\ j_{k,0} = 2, \quad j_{k,1} = k \\ \{j_{k,n}\} = \{2, k, k^2+4, k^3+6k, k^4+8k^2+8, ...\} \end{cases}, \forall n \geq 1. \tag{1.13}$$

La forme de Binet s'écrit :

$$j_{k,n} = \left(\frac{k+\sqrt{k^2+8}}{2}\right)^n + \left(\frac{k-\sqrt{k^2+8}}{2}\right)^n. \tag{1.14}$$

Posons $k = 1$ dans les relations $(1.3), (1.5), (1.7), (1.9), (1.11)$ et (1.13), on obtient le tableau suivant :

Les suites	Relations de recurrences
Fibonacci F_n	$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \end{cases}, \quad \forall n \geq 2$
Lucas L_n	$\begin{cases} L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \\ L_0 = 2, \quad L_1 = 1 \end{cases}, \quad \forall n \geq 2$
Pell P_n	$\begin{cases} P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \\ P_0 = 0, \quad P_1 = 1 \end{cases}, \quad \forall n \geq 2$
Pell-Lucas Q_n	$\begin{cases} Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2} \\ Q_0 = 2, \quad Q_1 = 2 \end{cases}, \forall n \geq 2$
Jacobsthal J_n	$\begin{cases} J_{n+1} = J_n + 2J_{n-1} \\ J_0 = 0, \quad J_1 = 1 \end{cases}, \quad \forall n \geq 1$
Jacobsthal-Lucas j_n	$\begin{cases} j_{n+1} = j_n + 2j_{n-1} \\ j_0 = 2, \quad j_1 = 1 \end{cases}, \forall n \geq 1$

Table1 : Relations de récurrences de certains nombres.

Posons $k = 1$ dans les relations $(1.4), (1.6), (1.8), (1.10), (1.12)$ et (1.14) on obtient le tableau suivant :

Les suites	Formes de Binet
Fibonacci F_n	$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$
Lucas L_n	$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right)^{-n}$
Pell P_n	$\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n \right)$
Pell-Lucas Q_n	$\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n$
Jacobsthal J_n	$\frac{1}{3} \left(2^n - (-1)^n\right)$
Jacobsthal-Lucas j_n	$2^n + (-1)^n$

Table 2 : Formes de Binet.

Proposition 1 [24, 38] *Pour tout entier naturel n on a*

1) $F_{k,-n} = (-1)^{n+1} F_{k,n}$.

2) $L_{k,-n} = (-1)^n L_{k,n}$.

1.1.3 Relations de récurrences linéaires d'ordre 3 :

La suite de Fibonacci de troisième ordre généralisée $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence suivante [68] :

$$\begin{cases} W_n = aW_{n-1} + bW_{n-2} + cW_{n-3} \\ W_0 = \alpha, \quad W_1 = \beta, \quad W_2 = \gamma \end{cases}, \forall n \geq 3, \tag{1.15}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et α, β et $\gamma \in \mathbb{C}$.

De la relation de récurrence (1.15) on obtient l'équation caractéristique $t^3 - at^2 - bt - c = 0$ qui admet pour solutions r_1, r_2 et r_3 telles que :

$$\begin{cases} r_1 = \frac{a}{3} + A + B, \\ r_2 = \frac{a}{3} + \omega A + \omega^2 B \\ r_3 = \frac{a}{3} + \omega^2 A + \omega B \end{cases},$$

avec

$$\begin{cases} A = \left(\frac{a^3}{27} + \frac{ab}{6} + \frac{c}{2} + \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \\ B = \left(\frac{a^3}{27} + \frac{ab}{6} + \frac{c}{2} - \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \\ \Delta = \frac{a^3c}{27} - \frac{a^2b^2}{108} + \frac{abc}{6} - \frac{b^3}{27} + \frac{c^2}{4} \end{cases},$$

et $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

La forme de Binet s'écrit :

$$W_n = \frac{R}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)} r_1^n + \frac{S}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)} r_2^n + \frac{T}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)} r_3^n,$$

avec

$$\begin{cases} R = \gamma - (r_2 + r_3)\beta + r_2 r_3 \alpha \\ S = \gamma - (r_1 + r_3)\beta + r_1 r_3 \alpha \\ T = \gamma - (r_1 + r_2)\beta + r_1 r_2 \alpha \end{cases}.$$

Les exemples ci-dessous sont des relations des récurrences associées à la relation (1.15).

Exemple 3

1- Pour $a = 0$, $b = c = 1$ et $\alpha = \beta = \gamma = 1$, nous obtenons la suite de Padovan [74, 69]

$$\begin{cases} P_n^{(3)} = P_{n-2}^{(3)} + P_{n-3}^{(3)} \\ \\ P_0^{(3)} = P_1^{(3)} = P_2^{(3)} = 1 & , \quad n \geq 3. \\ \\ \left\{P_n^{(3)}\right\} = \{1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, ...\} \end{cases}$$

La forme de Binet s'écrit [54] :

$$P_n^{(3)} = \frac{(r_2 - 1)(r_3 - 1)}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)} r_1^n + \frac{(r_1 - 1)(r_3 - 1)}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)} r_2^n + \frac{(r_1 - 1)(r_2 - 1)}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)} r_3^n,$$

avec

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{18}} \\ \\ r_2 = \omega \sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{18}} + \overline{\omega} \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{18}} & , \\ \\ r_3 = \overline{\omega} \sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{18}} + \omega \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{18}} \end{cases}$$

avec $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

2- Pour $a = 1$, $b = 0, c = 1$ et $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 1$, nous obtenons la suite de Narayana [63]

$$\begin{cases} N_n = N_{n-1} + N_{n-3} \\ N_0 = 0, \ N_1 = N_2 = 1 & , \quad n \geq 3. \\ \{N_n\} = \{0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, ...\} \end{cases}$$

La forme de Binet s'écrit :

$$N_n = \frac{1}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)} r_1^{n+1} + \frac{1}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)} r_2^{n+1} - \frac{1}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)} r_3^{n+1},$$

avec

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1}{3}\left(1+\sqrt[3]{\frac{2}{29+3\sqrt{93}}}+\sqrt[3]{\frac{29+3\sqrt{93}}{2}}\right) \\ \\ r_2 = \frac{1}{3}\left(1-\omega\sqrt[3]{\frac{2}{29+3\sqrt{93}}}+\omega^2\sqrt[3]{\frac{29+3\sqrt{93}}{2}}\right) \\ \\ r_3 = \frac{1}{3}\left(1+\omega^2\sqrt[3]{\frac{2}{29+3\sqrt{93}}}-\omega\sqrt[3]{\frac{29+3\sqrt{93}}{2}}\right) \end{cases},$$

avec $\omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

3- Pour $a = b = 1, c = 2$ et $\alpha = 0, \beta = \gamma = 1$, nous obtenons la suite de Jacobsthal de troisième ordre [34]

$$\begin{cases} J_{n+3}^{(3)} = J_{n+2}^{(3)} + J_{n+1}^{(3)} + 2J_n^{(3)} \\ J_0^{(3)} = 0,\ J_1^{(3)} = J_2^{(3)} = 1 \\ \left\{J_n^{(3)}\right\} = \{0, 1, 1, 2, 5, 9, 18, 37, 73, 146, 293, ...\} \end{cases},\ n \geq 0.$$

La forme de Binet s'écrit [60] :

$$j_n^{(3)} = \frac{2}{7}2^n - \frac{3+2i\sqrt{3}}{21}\omega_1^n - \frac{3-2i\sqrt{3}}{21}\omega_2^n,$$

avec $\omega_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\omega_2 = \overline{\omega_1}$.

4- Pour $a = b = 1, c = 2$ et $\alpha = 2,\ \beta = 1,\ \gamma = 5$, nous obtenons la suite de Jacobsthal-Lucas de troisième ordre [34]

$$\begin{cases} j_{n+3}^{(3)} = j_{n+2}^{(3)} + j_{n+1}^{(3)} + 2j_n^{(3)} \\ j_0^{(3)} = 2,\ j_1^{(3)} = 1,\ j_2^{(3)} = 5 \\ \left\{j_n^{(3)}\right\} = \{2, 1, 5, 10, 17, 37, 74, 145, 293, 586, ...\} \end{cases},\ n \geq 0.$$

La forme de Binet s'écrit [60] :

$$j_n^{(3)} = \frac{8}{7}2^n + \frac{3+2i\sqrt{3}}{7}\omega_1^n + \frac{3-2i\sqrt{3}}{7}\omega_2^n,$$

avec $\omega_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\omega_2 = \overline{\omega_1}$.

1.1.4 Polynômes orthogonaux

Les polynômes orthogonaux constituent un lien de rencontre privilégié pour diverses disciplines de mathématiques pures et appliquées ainsi que d'autres domaines des sciences appliquées. La première famille de ces polynômes porte le nom ‘' polynômes de Legendre”, ces polynômes ont été découverts par Legendre en 1784 où il a établi plusieurs propriétés communes de ces familles. Par la suite, d'autre familles des polynômes orthogonaux ont été introduites notamment celle de Hermite qui est utilisé dans la théorie des approximations. En 1879 E. N. Laguerre a été introduit une famille des polynômes qui portent son non aujourd'hui. Il a montré que ces polynômes orthogonaux sont liés à l'aide des fractions continues. Au milieu du XIXème siècle, Jacobi introduit une nouvelle famille qui généralisé les polynômes de Chebychev et de Legendre. A la fin du XIXème siècle, le domaine des polynômes orthogonaux a été développé par Pafnouti Chebychev à partir d'une étude sur les fractions continues et a été poursuivi par Andreï Markov et Thomas Joannes Stieltjes. Gábor Szegő, Sergei Bernstein... Les polynômes de "Jacobi, Chebychev, Legendre, Hermite, Laguerre,..” sont connus par ”polynômes orthogonaux classiques”.

Définition 3 Soit $[a, b]$ un intervalle (qui peut être fini ou infini) et $\omega(x)$ une fonction strictement positive et intégrable sur cet intervelle. On appelle polynômes orthogonaux sur $[a, b]$, par rapport à la fonction $\omega(x)$ une suite de polynômes $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ avec deg $(P_n(x)) = n$, tel que

$$\langle P_n, P_m\rangle = \int_a^b P_n(x)\, P_m(x)\, \omega(x)\, dx = 0 \text{ si } n \neq m.$$

Le nombre

$$\langle f, g\rangle = \int f(x)\, g(x)\, \omega(x)\, dx$$

est souvent appelé «produit scalaire» de f par g; lorsqu il est nul, on dit que les fonctions f et g sont «orthogonales».

Théorème 2 [33] Toutes relations de récurrences des suites des polynômes $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de deuxième ordre sont des polynômes orthogonaux.

Théorème 3 [33] Soit $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes normalisée c-à-d :

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + ...$$

Alors, $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes orthogonaux normalisée si et seulement s'il existe deux suites de nombres complexes $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} P_{n+1}(x) = (x-\alpha_n)P_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x) \\ P_{-1}(x) = 0, \qquad P_0(x) = 1. \end{cases}, \ n \geq 0.$$

Théorème 4 [33] Soit $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes orthogonaux, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1- $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

2- $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x)$, $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$, $n \geq 0$.

Définition 4 *Les polynômes de Chebyshev de première (resp. deuxième) espèce sont définis respectivement par :*

$$T_n(x) = \cos(n(\arccos x)), \qquad x \in [-1,1],$$

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)(\arccos x))}{\sin(\arccos x)}, \qquad x \in [-1,1].$$

Ils vérifient la relation de récurrence suivante :

$$w_{n+1}(x) = 2xw_n(x) - w_{n-1}(x), \qquad n \geq 1. \tag{1.16}$$

Les premières valeurs de ces polynômes sont :

n	$T_n(x)$	$U_n(x)$
0	1	1
1	x	$2x$
2	$2x^2-1$	$4x^2-1$
3	$4x^3-3x$	$8x^3-4x$
4	$8x^4-8x^2+1$	$16x^4-12x^2+1$
5	$16x^5-20x^3+5x$	$32x^5-32x^3+6x$
6	$32x^6-48x^4+18x^2-1$	$64x^6-80x^4+24x^2-1$
7	$64x^7-112x^5+56x^3-7x$	$128x^7-192x^5+80x^3-8x$

Définition 5 *Les polynômes de Chebyshev de troisième (resp. quatrième) espèce sont définis respectivement par :*

$$\begin{aligned} V_n(x) &= \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)}, \quad \textit{avec} \;\; x=\cos\theta \text{ et } x\in[-1,1] \\ W_n(x) &= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)}, \quad \text{avec } x=\cos\theta \text{ et } x\in[-1,1] \end{aligned}$$

Ils vérifient la relation de récurrence suivante :

$$v_n(x) = 2xv_{n-1}(x) - v_{n-2}(x), \qquad n \geq 2. \tag{1.17}$$

Les premières valeurs de ces polynômes sont :

n	$V_n(x)$	$W_n(z)$
0	1	1
1	$2x-1$	$2x+1$
2	$4x^2-2x-1$	$4x^2+2x-1$
3	$8x^3-4x^2-2x+1$	$8x^3+4x^2-4x-1$
4	$16x^4-8x^3-12x^2+4x+1$	$16x^4+8x^3-12x^2-4x+1$
5	$32x^5-16x^4-32x^3+12x^2+6x-1$	$32x^5+16x^4-32x^3-12x^2+6x+1$
6	$64x^6-32x^5-80x^4+32x^3+24x^2-6x-1$	$64x^6+32x^5-80x^4-32x^3+24x^2+6x-1$

1.2 Fonctions génératrices.

Dans cette section nous introduisons les fonctions génératrices de certains nombres et polynômes orthogonaux. En utilisant les suites définies par les relations des récurrences (1.18) , (1.20) et (1.22) .

1.2.1 Séries formelles

Soit K un corps commutatif ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) .

Définition 6 *Les éléments de l'ensemble* $K[[t]] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,\ a_n \in K \right\}$ *s'appellent l'anneau des séries formelles (à une indéterminée) à coefficients dans* K. Pour $n \in \mathbb{N}$, t^n*s'appelle le monôme* de *degré* n *et* a_n *est son coefficient.*

On peut alors définir deux lois de composition internes sur l'ensemble $K[[t]]$ des séries formelles.

Définition 7 *Si* $\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *et* $\beta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ *dans* $K[[t]]$ *on pose :*

$$\alpha(t) + \beta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) t^n,$$

$$\alpha(t)\beta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) t^n.$$

Cette seconde loi définit le produit de convolution (ou produit de Cauchy) de deux séries formelles.

Définition 8 *Deux séries formelles* $\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ et $\beta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ *sont égales si et seulement si pour tout* $n \geq 0$, $a_n = b_n$.

Définition 9 *On dit que la série* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ *est l'inverse de la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *si :*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) = 1.$$

Exemple 4 Considérons la série formelle $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n$, alors cette série est inversible d'inverse $1-t$:

$$\begin{aligned}(1-t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n - t\sum_{n=0}^{\infty} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} t^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} t^n \\ &= 1\end{aligned}$$

Proposition 2 Une série formelle $\alpha(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$.

Preuve. Soient $\alpha(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ et $\beta(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ deux séries formelles tels que :

$$\alpha(t)\beta(t) = 1.$$

Donc nécessairement $a_0 b_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} t^n = 0$. Alors le coefficient $a_0 \neq 0$.

Réciproquement, supposons que $a_0 \neq 0$, alors le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{c} a_0 b_0 = 1 \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0 \\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0 \\ \ldots \\ a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_0 b_n = 0 \\ \ldots \end{array}\right.$$

a une unique solution.

Proposition 3 [10] Si $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont deux séries formelles non nulles, alors $\alpha(t)\,\beta(t)$ est non nulle aussi.

1.2.2 Fonctions génératrices ordinaires (FGO).

Définition 10 *La fonction génératrice ordinaire (FGO) de la suite :*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, ...),$$

est définie par :

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Exemple 5 La FGO de $(1, 1, 1, ...)$ est :

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}.$$

De manière plus générale, la FGO de $\left(1, \lambda, \lambda^2, ..., \lambda^n, ...\right)$ est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n t^n = \frac{1}{1-\lambda t}.$$

Théorème 5 [40] Soient $A(t)$ la FGO de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $B(t)$ la FGO de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors :

1- $A(t) + B(t)$ est la FGO de $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2- $t\ A(t)$ est la FGO de $(0, a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, ...)$.

3- $A'(t)$ est la FGO de $(a_1, 2a_2, 3a_3, ..., (n+1)\, a_{n+1}, ...)$.

4- $A(t)\, B(t)$ est la FGO de $(a_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, ...)$.

5- $(1-t)\ A(t)$ est la FGO de $(a_0, a_1 - a_0, a_2 - a_1, ..., a_n - a_{n-1}, ...)$.

Théorème 6 *Soit la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante* :

$$\begin{cases} G_n = p\ G_{n-1} + q\ G_{n-2} \\ G_0 = \alpha,\ G_1 = \beta \end{cases} \quad , \quad n \geq 2, \tag{1.18}$$

avec $p, q \in \mathbb{C}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. *Alors la fonction génératrice associée à $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par :*

$$G(t) = \frac{\alpha + (\beta - p\alpha)\, t}{1 - pt - qt^2}. \tag{1.19}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
G(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n t^n \\
&= G_0 + G_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} G_n t^n \\
&= \alpha + \beta t + \sum_{n=2}^{\infty} \left(pG_{n-1} + qG_{n-2}\right) t^n \\
&= \alpha + \beta t + pt\sum_{n=2}^{\infty} G_{n-1} t^{n-1} + qt^2 \sum_{n=2}^{\infty} G_{n-2} t^{n-2} \\
&= \alpha + \beta t + pt\sum_{n=1}^{\infty} G_n t^n + qt^2 \sum_{n=0}^{\infty} G_n t^n \\
&= \alpha + \beta t + pt\left(\sum_{n=0}^{\infty} G_n t^n - \alpha\right) + qt^2 \sum_{n=0}^{\infty} G_n t^n \\
&= \alpha + (\beta - \alpha p) t + ptG(t) + qt^2 G(t),
\end{aligned}$$

alors

$$G(t)\left(1 - pt - qt^2\right) = \alpha + (\beta - p\alpha) t.$$

D'où

$$G(t) = \frac{\alpha + (\beta - p\alpha) t}{1 - pt - qt^2}.$$

D'après le théorème précédent nous déduisons le tableau suivant :

Valeurs de p, q, α, β	Coefficient de t^n	Fonctions génératrices
$p = k, \beta = 1,\ \ q = 1, \alpha = 0$	$F_{k,n}$	$\frac{t}{1-kt-t^2}$
$p = \beta = k,\ \ q = 1, \alpha = 2$	$L_{k,n}$	$\frac{2-kt}{1-kt-t^2}$
$\alpha = 0,\ p = 2,\ q = k, \beta = 1$	$P_{k,n}$	$\frac{t}{1-2t-kt^2}$
$\alpha = \beta = p = 2,\ q = k$	$Q_{k,n}$	$\frac{2-2t}{1-2t-kt^2}$
$p = k,\ q = 2, \alpha = 0, \beta = 1$	$J_{k,n}$	$\frac{t}{1-kt-2t^2}$
$p = \beta = k,\ \alpha = q = 2$	$j_{k,n}$	$\frac{2-kt}{1-kt-2t^2}$

Table 3 : Tableau donne les constantes p, q, α, β.

Pour $k=1$, le tableau ci-dessus devient :

Valeurs de p,q,α,β	Coefficient de t^n	Fonctions génératrices
$p=q=\beta=1, \alpha=0$	F_n	$\frac{t}{1-t-t^2}$
$\alpha=2,\ p=q=\beta=1$	L_n	$\frac{2-t}{1-t-t^2}$
$\alpha=0,\ p=2,\ q=\beta=1$	P_n	$\frac{t}{1-2t-t^2}$
$q=1,\ p=\alpha=\beta=2$	Q_n	$\frac{2-2t}{1-2t-t^2}$
$p=1,\ q=2,\ \alpha=0,\ \beta=1$	J_n	$\frac{t}{1-t-2t^2}$
$p=1,\ q=2,\ \alpha=2,\ \beta=1$	j_n	$\frac{2-t}{1-t-2t^2}$

Table 4 : Tableau donne les constantes p,q,α,β,k.

Théorème 7 *Soit la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} W_n = aW_{n-1} + bW_{n-2} + cW_{n-3} \\ W_0=\alpha, \quad W_1=\beta, \quad W_2=\gamma \end{cases}, \forall n \geq 3, \tag{1.20}$$

avec $a,\ b,\ c \in \mathbb{C}$ et $\alpha,\ \gamma, \beta \in \mathbb{C}$. *Alors la fonction génératrice associée à $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par :*

$$G(t) = \frac{\alpha + (\beta - \alpha a)t + (\gamma - \beta a - b\alpha)t^2}{1 - at - bt^2 - ct^3}. \tag{1.21}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} W_n t^n \\ &= W_0 + W_1 t + W_2 t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (aW_{n-1} + bW_{n-2} + cW_{n-3})\, t^n \\ &= \alpha + \beta t + \gamma t^2 + at\sum_{n=3}^{\infty} W_{n-1} t^{n-1} + bt^2 \sum_{n=3}^{\infty} W_{n-2} t^{n-2} + ct^3 \sum_{n=3}^{\infty} W_{n-3} t^{n-3} \\ &= \alpha + \beta t + \gamma t^2 + at\sum_{n=2}^{\infty} W_n t^n + bt^2 \sum_{n=1}^{\infty} W_n t^n + ct^3 \sum_{n=0}^{\infty} W_n t^n \\ &= \alpha + \beta t + \gamma t^2 + at\left(\sum_{n=0}^{\infty} W_n t^n - \alpha - \beta t\right) + bt^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} W_n t^n - \alpha\right) + ct^3 \sum_{n=0}^{\infty} W_n t^n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha+\beta t+\gamma t^2+at\sum_{n=0}^{\infty}W_nt^n-\alpha at-a\beta t^2+bt^2\sum_{n=0}^{\infty}W_nt^n-\alpha bt^2+ct^3\sum_{n=0}^{\infty}W_nt^n \\
&= \alpha+\beta t+\gamma t^2+atG(t)-\alpha at-a\beta t^2+bt^2G(t)-\alpha bt^2+ct^3G(t).
\end{aligned}
$$

Alors

$$G(t)\left(1-at-bt^2-ct^3\right)=\alpha+(\beta-\alpha a)t+(\gamma-\beta a-b\alpha)t^2.$$

D'où

$$G(t)=\frac{\alpha+(\beta-\alpha a)t+(\gamma-\beta a-b\alpha)t^2}{1-at-bt^2-ct^3}.$$

D'après le théorème précédent on déduit les corollaires suivants :

Corollaire 1 [73] *La fonctions génératrice des nombres de Padovan est donnée par* :

$$G(t)=\frac{1+t}{1-t^2-t^3}.$$

Corollaire 2 [63] *La fonctions génératrice des nombres de Narayana est donnée par :*

$$G(t)=\frac{t}{1-t-t^3}.$$

Corollaire 3 [34] *La fonctions génératrice des nombres de Jacobsthal de troisième ordre est donnée par :*

$$G(t)=\frac{t}{1-t-t^2-2t^3}.$$

Corollaire 4 [34] *La fonctions génératrice des nombres de Jacobsthal-Lucas de troisième ordre est donnée par :*

$$G(t)=\frac{2-t+2t^2}{1-t-t^2-2t^3}.$$

Théoréme 8 *Soit la suite* $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} P_n(x)=pxP_{n-1}(x)+qP_{n-2}(x) \\ P_0(x)=\alpha,\ P_1(x)=\beta x+\gamma \end{cases}, n\geq 2, \tag{1.22}$$

avec $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ et $p,q\in\mathbb{R}^*$, *alors la fonction génératrice associée à* $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *est donnée* *par :*

$$G(t)=\frac{\alpha+((\beta-\alpha p)x+\gamma)t}{1-pxt-qt^{2}}. \tag{1.23}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
G(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}P_{n}(x)t^{n}\\
&= P_{0}(x)+P_{1}(x)t+\sum_{n=2}^{\infty}P_{n}(x)t^{n}\\
&= \alpha+(\beta x+\gamma)t+px\sum_{n=2}^{\infty}P_{n-1}(x)t^{n}+q\sum_{n=2}^{\infty}P_{n-2}(x)t^{n}\\
&= \alpha+(\beta x+\gamma)t+pxt\sum_{n=2}^{\infty}P_{n-1}(x)t^{n-1}+qt^{2}\sum_{n=0}^{\infty}P_{n}(x)t^{n}\\
&= \alpha+(\beta x+\gamma)t+pxt\left(\sum_{n=0}^{\infty}P_{n}(x)t^{n}-\alpha\right)+qt^{2}\sum_{n=0}^{\infty}P_{n}(x)t^{n}\\
&= \alpha+(\beta x+\gamma)t+pxt\sum_{n=0}^{\infty}P_{n}(x)t^{n}-px\alpha t+qt^{2}\sum_{n=0}^{\infty}P_{n}(x)t^{n}\\
&= \alpha+((\beta-\alpha p)x+\gamma)t+pxtG(t)+qt^{2}G(t),
\end{aligned}$$

alors

$$G(t)\left(1-pxt-qt^{2}\right)=\alpha+((\beta-\alpha p)x+\gamma)t.$$

Donc

$$G(t)=\frac{\alpha+((\beta-\alpha p)x+\gamma)t}{1-pxt-qt^{2}}.$$

D'après le théorème précédent nous déduisons le tableau suivant [51] :

Valeurs de p,q,α,β,γ	Coefficients de t^n	Fonctions génératrices
$\alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma=0,\ p=2,\ q=-1$	$T_n(x)$	$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}$
$\alpha=1,\ \beta=2,\ \gamma=0,\ p=2,\ q=-1$	$U_n(x)$	$\frac{1}{1-2xt+t^2}$
$\alpha=1,\ \beta=2,\ \gamma=-1,\ p=2,\ q=-1$	$V_n(x)$	$\frac{1-t}{1-2xt+t^2}$
$\alpha=1,\ \beta=2,\ \gamma=1,\ p=2,\ q=-1$	$W_n(x)$	$\frac{1+t}{1-2xt+t^2}$

Table 5 : Tableau donne les constantes p,q,α,β,γ.

1.3 Fonctions symétriques

Définition 11 *Une fonction* $f(x_1, x_2, ...x_n)$, *en* n *variables est symétriques si pour toutes permutations de l'ensemble de l'indice* $\{1, 2, ..., n\}$ *l'égalité suivante est vérifiée :*

$$f(x_1, x_2, ...x_n) = f\left(x_{s(1)}, x_{s(2)}, ...x_{s(n)}\right).$$

1.3.1 Fonctions symétriques élémentaires

Définition 12 [58] *On appelle* $k-$*ième fonctions symétriques élémentaires* $e_k(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n)$ *la fonction définie par :*

$$e_k^{(n)} = e_k(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n) = \sum_{i_1+i_2+...+i_n=k} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} ... \lambda_n^{i_n}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

avec $i_k = 0$ ou 1, pour $1 \leq k \leq n$.

Exemple 6 *Pour une équation de degré 2 (* $n = 2$; *racines :* λ_1 et λ_2), *on a :*

$$\begin{cases} e_0 = 1, \\ e_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \\ e_2 = \lambda_1 \lambda_2. \end{cases}$$

Proposition 4 [17] *Les fonctions symétriques élémentaires peuvent également se définir comme coefficients du développement en série formelle*

$$E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^k = \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i t),$$

avec $e_k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ *s'annule pour* $k > n$.

1.3.2 Fonctions symétriques complètes

Définition 13 [58] *On appelle* $k-$*ième fonctions symétriques complètes* $h_k(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n)$ *la fonction définie par :*

$$h_k^{(n)} = h_k\left(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n\right) = \sum_{i_1+i_2+...+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n} \ ,$$

avec : $i_1, i_2, ..., i_n \geq 0$.

Exemple 7 *Pour une équation de degré 2 (* $n = 2$; *racines :* λ_1 *et* λ_2*), on a :*

$$\begin{cases} h_0 = 1 \\ h_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ h_2 = \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 \\ \vdots \end{cases} .$$

Proposition 5 [17] *On peut également définir les k-ième fonctions symétriques complètes comme coefficients du développement en série formelle*

$$H\left(t\right) = \sum_{k\geq 0} h_k t^k = \frac{1}{\prod\limits_{i\geq 1}\left(1-\lambda_i t\right)}.$$

Proposition 6 *Soient* $E\left(t\right)$ *et* $H\left(t\right)$ *les fonctions génératrices associées aux fonctions symétriques élémentaires et complètes respectivement alors :*

$$E\left(-t\right) H\left(t\right) = 1.$$

Preuve. On a

$$E\left(t\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^k = \prod_{i=1}^{n}\left(1+\lambda_i t\right),$$

alors

$$E\left(-t\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k \left(-t\right)^k = \prod_{i=1}^{n}\left(1-\lambda_i t\right),$$

et comme

$$H\left(t\right) = \sum_{k\geq 0} h_k t^k = \frac{1}{\prod\limits_{i\geq 1}\left(1-\lambda_i t\right)}.$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
H(t)\,E(-t) &= \left(\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda_i t)\right)\frac{1}{\prod\limits_{i\geq 1}(1-\lambda_i t)} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

1.3.3 Quelques propriétés sur les fonctions symétriques :

Définition 14 *On appelle alphabet tout ensemble de caractère fini.*

Définition 15 [17] *Considérons l'alphabet* $A = \{a_1, a_2\}$, *on définit la fonction symétrique* S_n *associée par :*

$$
S_n(A) = S_n(a_1 + a_2) = \frac{a_1^{n+1} - a_2^{n+1}}{a_1 - a_2},
$$

avec

$$
\begin{aligned}
S_0(A) &= h_0 = 1, \\
S_1(A) &= h_1 = a_1 + a_2, \\
S_2(A) &= h_2 = a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2.
\end{aligned}
$$

Définition 16 [2, 20] *Soient* A *et* B *deux alphabets, on note* $S_n(A-B)$ *les coefficients de la série rationnelle suivante :*

$$
\frac{\prod\limits_{b\in B}(1-bt)}{\prod\limits_{a\in A}(1-at)} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A-B)\,t^n, \tag{1.24}
$$

avec $S_n(A-B) = 0$, pour $n < 0$.

Remarque 3 [17] Si $A = \{0, 0, ..., 0\}$ dans (1.24), alors

$$
\sum_{n=0}^{\infty} S_n(-B)\,t^n = \prod_{b\in B}(1-bt). \tag{1.25}
$$

Proposition 7 [1, 2] Supposons que $A = \{0, 0, ..., 0\}$ ou $B = \{0, 0, ..., 0\}$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(A-B\right)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(A\right)t^n . \sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(-B\right)t^n. \tag{1.26}$$

Remarque 4 Si $A = B$ d'après les relations (1.24) et (1.26) on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(A\right)t^n . \sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(-A\right)t^n = 1,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(A\right)t^n = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(-A\right)t^n},$$

avec

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(-A\right)t^n = \prod_{a\in A}\left(1-at\right),$$

et d'apès (1.26) on obtient

$$S_n\left(A-B\right) = \sum_{k=0}^{n} S_{n-k}\left(A\right)S_k\left(-B\right).$$

Lemme 2 [19, 21] *Soient A et B deux alphabets, A est de cardinal* 1, *on a*

$$S_{n+k}\left(x-B\right) = x^k S_n\left(x-B\right),\ k\in\mathbb{N}.$$

Proposition 8 *Si A est de cardinal 1 (c'est -à-dire $A = \{x\}$), alors :*

$$\frac{\prod_{b\in B}\left(1-bt\right)}{\left(1-xt\right)} = 1 + S_1\left(x-B\right)t + \ldots + S_{n-1}\left(x-B\right)t^{n-1} + t^n\frac{S_n\left(x-B\right)}{\left(1-xt\right)}.$$

Preuve. On a

$$\frac{\prod_{b\in B}\left(1-bt\right)}{\left(1-xt\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(x-B\right)t^n, \tag{1.27}$$

alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(x-B)t^n = 1 + S_1(x-B)t + ... + S_{n-1}(x-B)t^{n-1} + S_n(x-B)t^n + ...$$

$$= 1 + S_1(x-B)t + ... + S_{n-1}(x-B)t^{n-1} + t^n(S_n(x-B) + S_{n+1}(x-B)t + ...),$$

et d'après le lemme 2 on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} S_n(x-B)t^n \\ = \;& 1 + S_1(x-B)t + ... + S_{n-1}(x-B)t^{n-1} + t^n(S_n(x-B) + xS_n(x-B)t + ...) \\ = \;& 1 + S_1(x-B)t + ... + S_{n-1}(x-B)t^{n-1} + t^n S_n(x-B)\left(1 + xt + x^2t^2 + ...\right) \\ = \;& 1 + S_1(x-B)t + ... + S_{n-1}(x-B)t^{n-1} + t^n \frac{S_n(x-B)}{1-xt}, \end{aligned}$$

d'après (1.27) on déduit

$$\frac{\prod_{b\in B}(1-bt)}{(1-xt)} = 1 + S_1(x-B)t + ... + S_{n-1}(x-B)t^{n-1} + t^n \frac{S_n(x-B)}{1-xt}.$$

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté quelques rappels sur les relations des récurrences, polynômes orthogonaux, fonctions génératrices et les fonctions symétriques ainsi que leurs propriétés. De tels rappels sont indispensables à la bonne compréhension de cette thèse.

Chapitre 2

Fonctions génératrices des produits de certains nombres et polynômes orthogonaux

Les fonctions génératrices sont un outil particulièrement utile dans l'étude de la combinatoire elles nous permettent en particulier d'appliquer les techniques de l'analyse et de l'algèbre au problème de combinatoire, en particulier dans le contexte de récurrence. Beaucoup de travaux ont introduit les fonctions génératrices de certains nombres et polynômes orthogonaux (voir par exemples [41], [50], [59], [64], [70]), et récemment on a les travaux de Boussayoud dans les articles ([13, 15, 16, 21, 22, 24, 25]). Dans ce chapitre, nous donnons des nouveaux résultats concernant les fonctions génératrices des produits de certains nombres et polynômes de Chebychev. Nous rappelons tout d'abord quelques notions qui nous seront utiles dans les démonstrations de nos résultats, puis nous présentons deux théorèmes de base sur les fonctions symétriques. Ensuit, nous déterminons des nouvelles fonctions génératrices des produits des nombres de $k-$Fibonacci , $k-$Lucas, $k-$Pell, $k-$Pell-Lucas, $k-$Jacobsthal et $k-$Jacobsthal-Lucas ainsi que les polynômes de Chebychev des deux espèces. Et pour $k = 1$, nous récupérons certains résultats de Mezo [59]. Enfin nous déterminons des nouvelles fonctions génératrices des produits de nombres de Padovan, Narayana, Jacobsthal de troisième ordre, Jacobsthal-Lucas de troisième ordre et les polynômes de Chebyshev de troisième (resp. quatrième) espèce.

2.1 Définitions et notations :

Définition 17 [2, 49] *Soit $f \in \mathbb{R}^n$, on définit la différence divisée notée $\partial_{a_i a_{i+1}}$ par :*

$$\partial_{a_i a_{i+1}}(f) = \frac{f(a_1, a_2, ..., a_i, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, a_2, ...a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, ..., a_n)}{a_i - a_{i+1}}.$$

Définition 18 [18] *Nous définissons l'operateur $\delta^k_{a_1 a_2}$ appelé symétriseur par :*

$$\delta^k_{a_1 a_2} f(a_1) = \frac{a_1^k f(a_1) - a_2^k f(a_2)}{a_1 - a_2}. \tag{2.1}$$

Remarque 5 *Si on pose $f(a_1) = a_1$ dans (2.1). On obtient :*

$$\begin{aligned} \delta^k_{a_1 a_2}(a_1) &= \frac{a_1^{k+1} - a_2^{k+1}}{a_1 - a_2} \\ &= S_k(a_1 + a_2). \end{aligned}$$

2.2 Résultats principaux

Théorème 9 *Etant donnés deux alphabets $A = \{a_1, a_2\}$ et $B = \{b_1, b_2\}$, alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_1 + a_2) S_{n-1}(b_1 + b_2) t^n = \frac{S_1(a_1 + a_2) t - a_1 a_2 S_1(b_1 + b_2) t^2}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A) b_1^n t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A) b_2^n t^n\right)}. \tag{2.2}$$

Preuve. Soient $\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A) b_1^n t^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A) b_1^n t^n$ deux séries telles que

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A) b_1^n t^n = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A) b_1^n t^n}.$$

Soit $f(b_1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(A) b_1^n t^n$, alors le premier membre de la formule (2.2) s'écrit

$$\partial_{b_1 b_2} f(b_1) = \partial_{b_1 b_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_1 + a_2) b_1^n t^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_1+a_2)\frac{b_1^n-b_2^n}{b_1-b_2}t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_1+a_2)S_{n-1}(b_1+b_2)t^n.$$

Posons $f(b_1)=\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_1^n t^n}$, alors le deuxième membre de la formule (2.2) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\partial_{b_1b_2} f(b_1) &= \partial_{b_1b_2}\left(\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_1^n t^n}\right) \\
&= \frac{1}{b_1-b_2}\left(\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_1^n t^n}-\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_2^n t^n}\right) \\
&= \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_2^n t^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_1^n t^n}{(b_1-b_2)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_1^n t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_2^n t^n\right)} \\
&= \frac{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_2t)-\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1t)}{(b_1-b_2)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_1^n t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_2^n t^n\right)} \\
&= \frac{S_1(a_1+a_2)t-a_1a_2S_1(b_1+b_2)t^2}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_1^n t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_2^n t^n\right)}.
\end{aligned}$$

Théorème 10 *Etant donnés deux alphabets* $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ *et* $B=\{b_1,b_2\}$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_{n+k}(B)t^n=\frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)\delta_{b_1b_2}^{k+1}(b_2^n)t^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_1^n t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_2^n t^n\right)},\ k\in\mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Preuve. L'action de l'opérateur $\delta_{b_1b_2}^k$ sur la série $f(b_1t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_n(A)b_1^{n+1}t^n$, nous donne le membre gauche de l'égalité (2.3), alors

$$\begin{aligned}\delta_{b_1b_2}^k f(b_1t) &= \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_n(A)b_1^{n+k+1}t^n-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_n(A)b_2^{n+k+1}t^n}{a_1-a_2}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A)\frac{b_1^{n+k+1}-b_2^{n+k+1}}{b_1-b_2}t^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}S_n(A)\,S_{n+k}(B)\,t^n.\end{aligned}$$

Posons $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_n(A)b_1^{n+1}t^n=\frac{b_1}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1t)}$, alors le deuxième membre de l'égalité (2.3) s'écrit :

$$\begin{aligned}\delta_{b_1b_2}^k f(b_1t) &= \delta_{b_1b_2}^k\left(\frac{b_1}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1t)}\right)\\ &= \frac{1}{b_1-b_2}\left(\frac{b_1^{k+1}}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1t)}-\frac{b_2^{k+1}}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_2t)}\right)\\ &= \frac{b_1^{k+1}\prod\limits_{a\in A}(1-ab_2t)-b_2^{k+1}\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1t)}{(b_1-b_2)\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1t)\prod\limits_{a\in A}(1-ab_2t)}.\end{aligned}$$

Et d'après l'identité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)b_1^nt^n=\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1t)$, on obtient

$$\delta_{b_1b_2}^k f(b_1t)=\frac{b_1^{k+1}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)b_2^nt^n-b_2^{k+1}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)b_1^nt^n}{(b_1-b_2)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)b_2^nt^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)b_1^nt^n\right)}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)\frac{b_1^{k+1}b_2^n - b_2^{k+1}b_1^n}{b_1-b_2}t^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_1^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_2^n t^n\right)}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)\delta_{b_1 b_2}^{k+1}\left(b_2^n\right)t^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_1^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_2^n t^n\right)}.$$

2.3 Applications

2.3.1 Applications du théorème 9

Dans cette section nous considérons la suite de Fibonacci définie par $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ avec $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$, Il y a deux cas.

Le premier cas $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{1, 0\}$.

Lemme 3 [22] *Etant donné un alphabet* $A = \{a_1, a_2\}$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\, t^n = \frac{1}{(1-a_1t)(1-a_2t)}. \tag{2.4}$$

Lemme 4 [5] *Etant donné un alphabet* $A = \{a_1, a_2\}$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)\, t^n = \frac{t}{(1-a_1t)(1-a_2t)}. \tag{2.5}$$

En remplaçant a_1 par $2a_1$ et a_2 par $(-2a_2)$, et posons $a_1 - a_2 = x$ et $4a_1a_2 = -1$ dans les formules (2.4) et (2.5) on obtient, respectivement les fonctions génératrices suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(2a_1 + [-2a_2])\, t^n = \frac{1}{1-2xt+t^2}, \tag{2.6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(2a_1 + [-2a_2])\, t^n = \frac{t}{1-2xt+t^2}. \tag{2.7}$$

En soustrayant (2.7) de (2.6) on obtient la proposition suivante.

Proposition 9 [7] $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice des polynômes de Chebyshev de troisième espèce est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)-S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right))t^n=\frac{1-t}{1-2xt+t^2}. \tag{2.8}$$

Corollaire 5 $\forall n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$V_n\left(x\right)=S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)-S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right).$$

En additionnant (2.6) et (2.7) on obtient la proposition suivante.

Proposition 10 [7] $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice des polynômes de Chebyshev de quatrième espèce est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)+S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right))t^n=\frac{1+t}{1-2xt+t^2}. \tag{2.9}$$

Corollaire 6 $\forall n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$W_n\left(x\right)=S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)+S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right).$$

Le deuxième cas $A=\{a_1,a_2\},B=\{b_1,b_2\}.$

Théorème 11 [6] *Etant donnés deux alphabets* $A=\{a_1,a_2\}$ et $B=\{b_1,b_2\}$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_{n-1}\left(a_1+a_2\right)S_{n-1}\left(b_1+b_2\right)t^n=\frac{t-a_1a_2b_1b_2t^3}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}S_n\left(-A\right)b_1^nt^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}S_n\left(-A\right)b_2^nt^n\right)}. \tag{2.10}$$

En remplaçant a_2 par $(-a_2)$ et b_2 par $(-b_2)$ dans le théorème 9 et 11 on obtient, respectivement les relations suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right)t^n=\frac{\left(a_1-a_2\right)t+a_1a_2\left(b_1-b_2\right)t^2}{\left(1-a_1b_1t\right)\left(1+a_2b_1t\right)\left(1+a_1b_2t\right)\left(1-a_2b_2t\right)}, \tag{2.11}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right) S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right) t^n = \frac{t-a_1 a_2 b_1 b_2 t^3}{\left(1-a_1 b_1 t\right)\left(1+a_2 b_1 t\right)\left(1+a_1 b_2 t\right)\left(1-a_2 b_2 t\right)}. \tag{2.12}$$

D'après les formules (2.11) et (2.12) on obtient le tableau suivant [6] :

$a_1 - a_2$	$a_1 a_2$	$b_1 - b_2$	$b_1 b_2$	Coefficients de t^n	Fonctions génératrices
k	1	2	k	$F_{k,n} P_{k,n}$	$\frac{t-kt^3}{1-2kt-(k^3+2k+4)t^2-2k^2t^3+k^2t^4}$
k	1	2	k	$F_{k,n} Q_{k,n}$	$\frac{2t+2k^2t^2+2kt^3}{1-2kt-(k^3+2k+4)t^2-2k^2t^3+k^2t^4}$
2	k	k	2	$P_{k,n} J_{k,n}$	$\frac{t-2kt^3}{1-2kt-(k^3+4k+8)t^2-4k^2t^3+4k^2t^4}$
k	1	k	1	$F_{k,n} L_{k,n}$	$\frac{(2k-1)t+2kt^2+t^3}{1-k^2t-(2k^2+2)t^2-k^2t^3+t^4}$,
2	k	2	k	$P_{k,n} Q_{k,n}$	$\frac{2t+4kt^2+2k^2t^3}{1-4t-(2k^2+8k)t^2-4k^2t^3+k^4t^4}$

Table 6 : Fonctions génératrices des produits de certains nombres.

Pour $k=1$, le tableau ci-dessus devient [59, 6] :

$a_1 - a_2$	$a_1 a_2$	$b_1 - b_2$	$b_1 b_2$	Coefficients de t^n	Fonctions génératrices
1	1	2	1	$F_n P_n$	$\frac{t-t^3}{1-2t-7t^2-2t^3+t^4}$
1	1	2	1	$F_n Q_n$	$\frac{2t+2t^2+2t^3}{1-2t-7t^2-2t^3+t^4}$
2	1	1	2	$P_n J_n$	$\frac{t-2t^3}{1-2t-13t^2-4t^3+4t^4}$
1	1	1	1	$F_n L_n$	$\frac{t}{1-3t+t^2}$
2	1	2	1	$P_n Q_n$	$\frac{2t}{1-6t+t^2}$

Table 7 : Fonctions génératrices des produits de certains nombres.

En remplaçant a_1 par $(2a_1)$, a_2 par $(-2a_2)$ et b_2 par $(-b_2)$ dans le théorème 9 on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right) S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right) t^n \\ =\ & \frac{S_1\left(2a_1+[-2a_2]\right) t+4a_1 a_2 S_1\left(b_1+[-b_2]\right) t^2}{\left(1-2a_1 b_1 t\right)\left(1+2a_2 b_1 t\right)\left(1+2a_1 b_2 t\right)\left(1-2a_2 b_2 t\right)}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

D'après la relation précédente on obtient le tableau suivant [6] :

a_1a_2	b_1b_2	b_1-b_2	coefficiences de t^n	Fonctions génératices
$\frac{-1}{4}$	1	k	$F_{k,n}U_n(a_1-a_2)$	$\frac{2(a_1-a_2)t-kt^2}{1-2k(a_1-a_2)t-\left(4(a_1-a_2)^2-k^2-2\right)t^2+2k(a_1-a_2)t^3+t^4}$
$\frac{-1}{4}$	k	2	$P_{k,n}U_n(a_1-a_2)$	$\frac{2(a_1-a_2)t-2t^2}{1-4(a_1-a_2)t-\left(4k(a_1-a_2)^2-2k-4\right)t^2+4k(a_1-a_2)t^3+k^2t^4}$
$\frac{-1}{4}$	2	k	$J_{k,n}U_n(a_1-a_2)$	$\frac{2(a_1-a_2)t-kt^2}{1-2k(a_1-a_2)t-\left(8(a_1-a_2)^2-k^2-4\right)t^2+4k(a_1-a_2)t^3+4t^4}$

Table 8 : Fonctions génératrices des produits de certains nombres et polynômes.

Pour $k=1$, le tableau ci-dessus devient [14, 6] :

a_1a_2	b_1b_2	b_1-b_2	coefficiences de t^n	Fonctions génératices
$\frac{-1}{4}$	1	1	$F_nU_n(a_1-a_2)$	$\frac{2(a_1-a_2)t-t^2}{1-2(a_1-a_2)t-\left(4(a_1-a_2)^2-3\right)t^2+2(a_1-a_2)t^3+t^4}$
$\frac{-1}{4}$	1	2	$P_nU_n(a_1-a_2)$	$\frac{2(a_1-a_2)t-2t^2}{1-4(a_1-a_2)t-\left(4(a_1-a_2)^2-6\right)t^2+4(a_1-a_2)t^3+t^4}$
$\frac{-1}{4}$	2	1	$J_nU_n(a_1-a_2)$	$\frac{2(a_1-a_2)t-t^2}{1-2(a_1-a_2)t-\left(8(a_1-a_2)^2-5\right)t^2+4(a_1-a_2)t^3+4t^4}$

Table 9 : Fonctions génératrices des produits de certains nombres et polynômes.

2.3.2 Applications du théorème 10

Dans cette section nous considérons la suite de Fibonacci définie par $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, $F_0=1$ et $F_1=1$. Il y a deux cas.

Le premier cas $A=\{a_1,a_2,a_3\}$, $B=\{1,0\}$.

Lemme 5 [9] *Etant donné un alphabet* $A=\{a_1,a_2,a_3\}$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1+a_2+a_3)t^n=\frac{1}{\prod\limits_{a\in A}(1-at)}. \tag{2.14}$$

D'après le lemme précédent on déduit les relations suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right) t^n=\frac{t}{\prod_{a \in A}(1-a t)}, \tag{2.15}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right) t^n=\frac{t^2}{\prod_{a \in A}(1-a t)}, \tag{2.16}$$

avec

$$\begin{aligned} \prod_{a \in A}(1-a t) &= 1-(a_1+a_2+a_3)t+(a_1 a_2+a_1 a_3+a_2 a_3)t^2-a_1 a_2 a_3 t^3 \\ &= 1+S_1(-A)\, t+S_2(-A)\, t^2+S_3(-A)\, t^3. \end{aligned}$$

– De la spécialisation suivante $\begin{cases} S_1(-A)=-1, \\ S_2(-A)=0, \\ S_3(-A)=-1, \end{cases}$ dans (2.15) on obtient la proposition suivante.

Proposition 11 [32] $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice des nombres de Narayana est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)\ t^n=\frac{t}{1-t-t^3}.$$

Corollaire 7 $\forall n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$N_n=S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right).$$

– L'utilisation de la spécialisation suivante $\begin{cases} S_1(-A)=0, \\ S_2(-A)=-1, \\ S_3(-A)=-1, \end{cases}$ dans les formules (2.14) et (2.15) , nous donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(a_1+a_2+a_3\right) t^n=\frac{1}{1-t^2-t^3}. \tag{2.17}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right) t^n=\frac{t}{1-t^2-t^3}. \tag{2.18}$$

En additionnant les deux relations précédentes on obtient la proposition suivante.

Proposition 12 [9] $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice des nombres de Padovan est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)+S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)\right) t^n=\frac{1+t}{1-t^2-t^3}.$$

Corollaire 8 $\forall n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$P_n^{(3)}=S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)+S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right).$$

– De la spécialisation suivante $\begin{cases} S_1(-A)=-1, \\ S_2(-A)=-1, \\ S_3(-A)=-2, \end{cases}$ dans (2.15) on obtient la proposition suivante :

Proposition 13 [32] $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice des nombres de Jacobsthal de troisième ordre est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right) t^n=\frac{t}{1-t-t^2-2 t^3}. \tag{2.19}$$

Corollaire 9 $\forall n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$J_n^{(3)}=S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right).$$

– De la spécialisation suivante $\begin{cases} S_1(-A)=-1, \\ S_2(-A)=-1, \\ S_3(-A)=-2, \end{cases}$ dans (2.14) et (2.16) on obtient, respectivement les fonctions génératrices suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(a_1+a_2+a_3\right) t^n=\frac{1}{1-t-t^2-2 t^3}, \tag{2.20}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right) t^n=\frac{t^2}{1-t-t^2-2 t^3}. \tag{2.21}$$

En multipliant (2.19) par (-1), (2.20) par 2 et (2.21) par 2, en additionnant les résultats on obtient la proposition suivante.

Proposition 14 [32] $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice des nombres de Jacobsthal-Lucas de troisième ordre est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(2S_n\left(a_1+a_2+a_3\right) - S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right) + 2S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)\right) t^n = \frac{2-t+2t^2}{1-t-t^2-2t^3}. \tag{2.22}$$

Corollaire 10 $\forall n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$j_n^{(3)} = 2S_n\left(a_1+a_2+a_3\right) - S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right) + 2S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right).$$

Le deuxième cas $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2\}$.

Posons $k = 0, 1$ dans le théorème 10 on obtient, respectivement les lemmes suivants.

Lemme 6 [24] *Etant donnés deux alphabets* $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $B = \{b_1, b_2\}$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(B)t^n = \frac{1 - b_1b_2S_2\left(-A\right)t^2 - b_1b_2(b_1+b_2)S_3\left(-A\right)t^3}{\prod_{a\in A}\left(1-ab_1t\right)\prod_{a\in A}\left(1-ab_2t\right)}. \tag{2.23}$$

D'après le lemme ci-dessus on déduit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)S_{n-1}(B)t^n = \frac{t - b_1b_2S_2\left(-A\right)t^3 - b_1b_2(b_1+b_2)S_3\left(-A\right)t^4}{\prod_{a\in A}\left(1-ab_1t\right)\prod_{a\in A}\left(1-ab_2t\right)}. \tag{2.24}$$

Lemme 7 [9] *Etant donnés deux alphabets* $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $B = \{b_1, b_2\}$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_{n+1}(B)t^n = \frac{(b_1+b_2) + b_1b_2S_1\left(-A\right)t - b_1^2b_2^2S_3\left(-A\right)t^3}{\prod_{a\in A}\left(1-ab_1t\right)\prod_{a\in A}\left(1-ab_2t\right)}. \tag{2.25}$$

D'après la relation précédente on déduit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)S_n(B)t^n = \frac{(b_1+b_2)t + b_1b_2S_1\left(-A\right)t^2 - b_1^2b_2^2S_3\left(-A\right)t^4}{\prod_{a\in A}\left(1-ab_1t\right)\prod_{a\in A}\left(1-ab_2t\right)}. \tag{2.26}$$

– En remplaçant b_2 par $(-b_2)$ dans $(2.23), (2.24)$ et (2.26) on obtient, respectivement les relations suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(b_1+[-b_2])t^n = \frac{1+b_1b_2S_2(-A)\,t^2+b_1b_2(b_1-b_2)S_3(-A)\,t^3}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1t)\prod\limits_{a\in A}(1+ab_2t)}, \tag{2.27}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)S_{n-1}(b_1+[-b_2])t^n = \frac{t+b_1b_2S_2(-A)\,t^3+b_1b_2(b_1-b_2)S_3(-A)\,t^4}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1t)\prod\limits_{a\in A}(1+ab_2t)}, \tag{2.28}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)S_n(b_1+[-b_2])t^n = \frac{(b_1-b_2)t-b_1b_2S_1(-A)\,t^2-b_1^2b_2^2S_3(-A)\,t^4}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1t)\prod\limits_{a\in A}(1+ab_2t)}, \tag{2.29}$$

avec

$$\begin{aligned}\prod_{a\in A}(1-ab_1t)\prod_{a\in A}(1+ab_2t) &= 1-(b_1-b_2)\,(a_1+a_2+a_3)\,t\\
&+((a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)\,(b_1-b)^2-b_1b_2((a_1+a_2+a_3)^2-2(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)))t^2\\
&-(a_1a_2a_3(b_1-b_2)^3-b_1b_2\,(b_1-b_2)\,((a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)\,(a_1+a_2+a_3)-3a_1a_2a_3))t^3\\
&+(-b_1b_2(b_1-b_2)^2a_1a_2a_3(a_1+a_2+a_3)+b_1^2b_2^2((a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)^2\\
&-2a_1a_2a_3(a_1+a_2+a_3)))t^4-a_1a_2a_3b_1^2b_2^2\,(b_1-b_2)\,(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)\,t^5-a_1^2a_2^2a_3^2b_1^3b_2^3t^6.\end{aligned}$$

– En prenant les spécialisations suivantes $\begin{cases} S_1(-A)=0, \\ S_2(-A)=-1, \\ S_3(-A)=-1, \end{cases}$ et $\begin{cases} b_1-b_2=k \\ b_1b_2=1 \end{cases}$ dans (2.27) et (2.29) on obtient, respectivement les fonctions génératrices suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(b_1+[-b_2])t^n = \frac{1-t^2-kt^3}{1-(2+k^2)\,t^2-(3k+k^3)\,t^3+t^4+kt^5-t^6}, \tag{2.30}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)S_n(b_1+[-b_2])t^n = \frac{kt+t^4}{1-(2+k^2)\,t^2-(3k+k^3)\,t^3+t^4+kt^5-t^6}. \tag{2.31}$$

En additionnant (2.30) et (2.31) on obtient la proposition suivante.

Proposition 15 [9] $\forall n\in\mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des nombres de $k-$Fibonacci et les nombres de Padovan est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(b_1+[-b_2])\left(S_n(A)+S_{n-1}(A)\right)t^n = \frac{1+kt-t^2-kt^3+t^4}{1-\left(2+k^2\right)t^2-\left(3k+k^3\right)t^3+t^4+kt^5-t^6}. \quad (2.32)$$

Corollaire 11 $\forall n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$P_n^{(3)} F_{k,n} = S_n(b_1+[-b_2])\left(S_n(A)+S_{n-1}(A)\right).$$

Proposition 16 $\forall\ n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des nombres de Padovan et les nombres de k-Fibonaci d'indice négatif est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(3)} F_{k,-n} t^n = \frac{-1+kt+t^2-kt^3-t^4}{1-\left(2+k^2\right)t^2+\left(3k+k^3\right)t^3+t^4-kt^5-t^6}. \quad (2.33)$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(3)} F_{k,-n} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} P_n^{(3)} F_{k,n} t^n \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} S_n(b_1+[-b_2])\left(S_n(A)+S_{n-1}(A)\right)(-t)^n \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A) S_n(b_1+[-b_2])(-t)^n - \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A) S_n(b_1+[-b_2])(-t)^n \\
&= -\frac{1-t^2+kt^3}{1-\left(2+k^2\right)t^2+\left(3k+k^3\right)t^3+t^4-kt^5-t^6} \\
&\quad -\frac{-kt+t^4}{1-\left(2+k^2\right)t^2+\left(3k+k^3\right)t^3+t^4-kt^5-t^6} \\
&= \frac{-1+kt+t^2-kt^3-t^4}{1-\left(2+k^2\right)t^2+\left(3k+k^3\right)t^3+t^4-kt^5-t^6}.
\end{aligned}$$

Posons $k=1$ dans les relations (2.32) et (2.33) on obtient, respectivement les propositions suivantes.

Proposition 17 [9] $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des nombres de Fibonacci et* *les nombres de Padovan est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(3)} F_n t^n = \frac{1+t-t^2-t^3+t^4}{1-3t^2-4t^3+t^4+t^5-t^6}.$$

Proposition 18 [9] $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des nombres de Padovan et les nombres de Fibonacci d'indice négatif est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(3)} F_{-n} t^n = \frac{-1+t+t^2-t^3-t^4}{1-3t^2+4t^3+t^4-t^5-t^6}.$$

Théorème 12 $\forall\ n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des nombres de Padovan et les nombres de k-Lucas est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(3)} L_{k,n} t^n = \frac{2+kt-\left(2+k^2\right)t^2-k\left(2+k^2\right)t^3+\left(2+k^2\right)t^4}{1-\left(2+k^2\right)t^2-\left(3k+k^3\right)t^3+t^4+kt^5-t^6}. \tag{2.34}$$

Preuve. On a

$$L_{k,n} = \left(2+k^2\right) S_n(b_1+[-b_2]) - kS_{n+1}(b_1+[-b_2]), (\text{ voir [22]}).$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(3)} L_{k,n} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((S_n(A)+S_{n-1}(A)) \times \left(\left(2+k^2\right) S_n(b_1+[-b_2]) - kS_{n+1}(b_1+[-b_2])\right)\right) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(2+k^2\right) S_n(b_1+[-b_2]) \left(S_n(A)+S_{n-1}(A)\right) t^n \\
&\quad -k\sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1}(b_1+[-b_2]) \left(S_n(A)+S_{n-1}(A)\right) t^n \\
&= \left(2+k^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(3)} F_{k,n} t^n - k\sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1}(b_1+[-b_2]) S_n(A) t^n \\
&\quad -k\sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1}(b_1+[-b_2]) S_{n-1}(A) t^n \\
&= \left(2+k^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(3)} F_{k,n} t^n - k\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A) \frac{b_1^{n+2}-(-b_2)^{n+2}}{b_1+b_2} t^n
\end{aligned}$$

$$-k\sum_{n=0}^{\infty}S_{n-1}(A)\frac{b_1^{n+2}-(-b_2)^{n+2}}{b_1+b_2}t^n$$

$$= \left(2+k^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(3)}F_{k,n}t^n-\frac{k}{b_1+b_2}\left(b_1^2\sum_{n=0}^{\infty}S_n(A)(b_1t)^n-b_2^2\sum_{n=0}^{\infty}S_n(A)(-b_2t)^n\right)$$

$$-\frac{k}{b_1+b_2}\left(b_1^2\sum_{n=0}^{\infty}S_{n-1}(A)(b_1t)^n-b_2^2\sum_{n=0}^{\infty}S_{n-1}(A)(-b_2t)^n\right)$$

$$= \frac{\left(2+k^2\right)\left(1+kt-t^2-kt^3+t^4\right)}{1-\left(2+k^2\right)t^2-\left(3k+k^3\right)t^3+t^4+kt^5-t^6}$$

$$-\frac{k^2+k\left(k^2+1\right)t}{1-\left(2+k^2\right)t^2-\left(3k+k^3\right)t^3+t^4+kt^5-t^6}$$

$$= \frac{2+kt-\left(2+k^2\right)t^2-k\left(2+k^2\right)t^3+\left(2+k^2\right)t^4}{1-\left(2+k^2\right)t^2-\left(3k+k^3\right)t^3+t^4+kt^5-t^6}.$$

Proposition 19 *$\forall\, n\in\mathbb{N}$, la fonction génératrice du produit des nombres de Padovan et les nombres de k-Lucas d'indice négatif est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(3)}L_{k,-n}t^n=\frac{2-kt-\left(2+k^2\right)t^2+k\left(2+k^2\right)t^3+\left(2+k^2\right)t^4}{1-\left(2+k^2\right)t^2+\left(3k+k^3\right)t^3+t^4-kt^5-t^6}. \tag{2.35}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(3)}L_{k,-n}t^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n P_n^{(3)}L_{k,-n}t^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\big((S_n(A)+S_{n-1}(A))\times\big(\left(2+k^2\right)S_n(b_1+[-b_2])-kS_{n+1}(b_1+[-b_2])\big)\big)(-t)^n\\
&= \left(2+k^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}S_n(b_1+[-b_2])\left(S_n(A)+S_{n-1}(A)\right)(-t)^n\\
&\quad -k\sum_{n=0}^{\infty}S_{n+1}(b_1+[-b_2])\left(S_n(A)+S_{n-1}(A)\right)(-t)^n\\
&= \left(2+k^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(3)}F_{k,n}\,(-t)^n-k\sum_{n=0}^{\infty}S_n(A)S_{n+1}(b_1+[-b_2])\,(-t)^n
\end{aligned}$$

$$-k\sum_{n=0}^{\infty}S_{n-1}(A)S_{n+1}(b_1+[-b_2])\,(-t)^n$$

$$= \left(2+k^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(3)}F_{k,n}(-t)^n-\frac{k}{b_1+b_2}\left(b_1^2\sum_{n=0}^{\infty}S_n(A)(-b_1t)^n-b_2^2\sum_{n=0}^{\infty}S_n(A)(b_2t)^n\right)$$
$$-\frac{k}{b_1+b_2}\left(b_1^2\sum_{n=0}^{\infty}S_{n-1}(A)(-b_1t)^n-b_2^2\sum_{n=0}^{\infty}S_{n-1}(A)(+b_2t)^n\right)$$

$$= \frac{\left(2+k^2\right)\left(1-kt-t^2+kt^3+t^4\right)}{1-\left(2+k^2\right)t^2+\left(3k+k^3\right)t^3+t^4-kt^5-t^6}$$

$$-\frac{k^2-k\left(k^2+1\right)t}{1-\left(2+k^2\right)t^2+\left(3k+k^3\right)t^3+t^4-kt^5-t^6}$$

$$= \frac{2-kt-\left(2+k^2\right)t^2+k\left(2+k^2\right)t^3+\left(2+k^2\right)t^4}{1-\left(2+k^2\right)t^2+\left(3k+k^3\right)t^3+t^4-kt^5-t^6}.$$

Posons $k=1$ dans (2.34) et (2.35) on déduit, respectivement les propositions suivantes.

Proposition 20 [9] $\forall\ n\in\mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des nombres de Padovan et les nombres de Lucas est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(3)}L_nt^n=\frac{2+t-3t^2-3t^3+3t^4}{1-3t^2-4t^3+t^4+t^5-t^6}.$$

Proposition 21 [9] $\forall\ n\in\mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des nombres de Padovan et les nombres de Lucas d'indice négatif est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(3)}L_{-n}t^n=\frac{2-t-3t^2+3t^3+3t^4}{1-3t^2+4t^3+t^4-t^5-t^6}.$$

– En utilisant les spécialisations suivantes $\begin{cases} S_1\left(-A\right)=-1, \\ S_2\left(-A\right)=0, \\ S_3\left(-A\right)=-1, \end{cases}$ et $\begin{cases} b_1-b_2=k \\ b_1b_2=1 \end{cases}$ dans (2.29), on obtient la proposition suivante.

Proposition 22 [7] $\forall n\in\mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des nombres de Narayana et les nombres de $k-$Fibonacci est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_n F_{k,n} t^n = \frac{kt + t^2 + t^4}{1 - kt - t^2 - (k^3 + 3k)t^3 - (k^2 + 2)t^4 - t^6}. \tag{2.36}$$

Corollaire 12 $\forall n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$N_n F_{k,n} = S_{n-1}(A) S_n(b_1 + [-b_2]).$$

– En utilisant les spécialisations suivantes $\begin{cases} S_1(-A) = -1, \\ S_2(-A) = -1, \\ S_3(-A) = -2, \end{cases}$ et $\begin{cases} b_1 - b_2 = 2 \\ b_1 b_2 = k \end{cases}$ dans (2.28), on obtient la proposition suivante.

Propositions 23 [7] $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des nombres de Jacobsthal de troisième ordre et les nombres de* $k-$*Pell est donnée par :*

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A) S_{n-1}(b_1 + [-b_2]) t^n \\ = &\frac{t - kt^3 + -4kt^4}{1 - 2t - (4 + 3k)t^2 - (16 + 14k)t^3 - (-8k - 3k^2)t^4 + 4k^2t^5 - 4k^3t^6}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Corollaire 13 $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$J_n^{(3)} P_{k,n} = S_{n-1}(A) S_{n-1}(b_1 + [-b_2]). \tag{2.38}$$

Théorème 13 $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des nombres de Jacobsthal-Lucas de troisième ordre et les nombres de* $k-$*Pell est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} j_n^{(3)} P_{k,n} t^n = \frac{t + 8t^2 + (16 + 7k)\, t^3 + 4kt^4 + 4k^2t^5}{1 - 2t - (4 + 3k)t^2 - (16 + 14k)t^3 - (-8k - 3k^2)t^4 + 4k^2t^5 - 4k^3t^6}. \tag{2.39}$$

Preuve. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} j_n^{(3)} P_{k,n} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left((2S_n(A) - S_{n-1}(A) + 2S_{n-2}(A))\, S_{n-1}(b_1 + [-b_2]) \right) t^n$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_{n-1}(b_1+[-b_2])t^n - \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)S_{n-1}(b_1+[-b_2])t^n \\
&\quad +2\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A)S_{n-1}(b_1+[-b_2])t^n \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\frac{b_1^n-(-b_2)^n}{b_1+b_2}t^n - \sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(3)}P_{k,n}t^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A)\frac{b_1^n-(-b_2)^n}{b_1+b_2}t^n \\
&= \frac{2}{b_1+b_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)b_1^n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\left(-b_2\right)^n t^n\right) - \sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(3)}P_{k,n}t^n \\
&\quad +\frac{2}{b_1+b_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A)b_1^n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A)\left(-b_2\right)^n t^n\right).
\end{aligned}
$$

Et comme

$$
\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(A\right)t^n = \frac{1}{1-t-t^2-2t^3},
$$

$$
\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}\left(A\right)t^n = \frac{t^2}{1-t-t^2-2t^3}.
$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} j_n^{(3)}P_{k,n}t^n &= \frac{2}{b_1+b_2}\left(\frac{1}{1-b_1t-b_1^2t^2-2b_1^3t^3} - \frac{1}{1+b_2t-b_2^2t^2+2b_2^3t^3}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(3)}P_{k,n}t^n \\
&\quad +\frac{2}{b_1+b_2}\left(\frac{b_1^2t^2}{1-b_1t-b_1^2t^2-2b_1^3t^3} - \frac{b_2^2t^2}{1+b_2t-b_2^2t^2+2b_2^3t^3}\right) \\
&= \frac{2t+4t^2+4\left(4+k\right)t^3}{1-2t-(4+3k)t^2-(16+14k)t^3+(-8k-3k^2)t^4+4k^2t^5-4k^3t^6} \\
&\quad -\frac{t-kt^3-4kt^4}{1-2t-(4+3k)t^2-(16+14k)t^3+(-8k-3k^2)t^4+4k^2t^5-4k^3t^6} \\
&\quad +\frac{4t^2+2kt^3+4k^2t^5}{1-2t-(4+3k)t^2-(16+14k)t^3+(-8k-3k^2)t^4+4k^2t^5-4k^3t^6} \\
&= \frac{t+8t^2+\left(16+7k\right)t^3+4kt^4+4k^2t^5}{1-2t-(4+3k)t^2-(16+14k)t^3+(-8k-3k^2)t^4+4k^2t^5-4k^3t^6}.
\end{aligned}
$$

En remplaçant b_1 par $(2b_1)$ et b_2 par $(-2b_2)$ dans les $(2.23), (2.24)$ et (2.26) on obtient, respectivement les relations suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(2b_1+[-2b_2])t^n = \frac{1+4b_1b_2S_2(-A)t^2+8b_1b_2(b_1-b_2)S_3(-A)t^3}{\prod\limits_{a\in A}(1-2ab_1t)\prod\limits_{a\in A}(1+2ab_2t)}, \tag{2.40}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)S_{n-1}(2b_1+[-2b_2])t^n = \frac{t+4b_1b_2S_2(-A)t^3+8b_1b_2(b_1-b_2)S_3(-A)t^4}{\prod\limits_{a\in A}(1-2ab_1t)\prod\limits_{a\in A}(1+2ab_2t)}, \tag{2.41}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)S_n(2b_1+[-2b_2])t^n = \frac{2(b_1-b_2)t-4b_1b_2S_1(-A)t^2-16b_1^2b_2^2S_3(-A)t^4}{\prod\limits_{a\in A}(1-2ab_1t)\prod\limits_{a\in A}(1+2ab_2t)}, \tag{2.42}$$

avec

$$\begin{aligned}&\prod_{a\in A}(1-2ab_1t)\prod_{e\in A}(1+2ab_2t) = 1-2(b_1-b_2)(a_1+a_2+a_3)t+\\&((4(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)(b_1-b_2)^2-4b_1b_2((a_1+a_2+a_3)^2-2(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)))t^2\\&-(8a_1a_2a_3(b_1-b_2)^3-8b_1b_2(b_1-b_2)((a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)(a_1+a_2+a_3)-3a_1a_2a_3))t^3\\&+(-16b_1b_2(b_1-b_2)^2a_1a_2a_3(a_1+a_2+a_3)+16b_1^2b_2^2((a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)^2\\&-2a_1a_2a_3(a_1+a_2+a_3)))t^4-32a_1a_2a_3b_1^2b_2^2(b_1-b_2)(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)t^5-64a_1^2a_2^2a_3^2b_1^3b_2^3t^6.\end{aligned}$$

– Les spécialisations suivantes $\begin{cases} S_1(-A)=0 \\ S_2(-A)=-1 \\ S_3(-A)=-1 \end{cases}$ et $\begin{cases} b_1-b_2=x \\ 4b_1b_2=-1 \end{cases}$ dans (2.40) et (2.42) nous donnent, respectivement les relations suivantes

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(2b_1,[-2b_2])t^n = \frac{1+t^2+2xt^3}{1+(-4x^2+2)t^2-(8x^3-6x)t^3+t^4+2xt^5+t^6}, \tag{2.43}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)S_n(2b_1,[-2b_2])t^n = \frac{2xt+t^4}{1+(-4x^2+2)t^2-(8x^3-6x)t^3+t^4+2xt^5+t^6}. \tag{2.44}$$

En additionnant (2.43) et (2.44) nous déduisons la proposition suivante :

Propostion 24 [9] $\forall\, n\in\mathbb{N}$, *la fonctions génératrice du produit des nombres de Padovan et les polynômes de Chebyshev de deuxième espèce est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(3)} U_n(x)\, t^n = \frac{1+2xt+t^2+2xt^3+t^4}{1+(-4x^2+2)\,t^2-(8x^3-6x)\,t^3+t^4+2xt^5+t^6}.$$

Corollaire 14 *$\forall\ n \in \mathbb{N}$, on a*

$$P_n^{(3)} U_n(x) = S_n(2b_1+[-2b_2])\left(S_n(a_1+a_2+a_3)+S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)\right).$$

Théorème 14 *$\forall\ n \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice du produit des nombres de Padovan et les polynômes de Chebyshev de première espèce est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(3)} T_n(x)\, t^n = \frac{1+xt+(1-2x^2)\,t^2+2x\,(1-2x^2)\,t^3+(1-2x^2)t^4}{1-(4x^2-2)\,t^2-(8x^3-6x)\,t^3+t^4+2xt^5+t^6}.$$

Preuve. On a

$$T_n(x) = S_n(2b_1+[-2b_2]) - xS_{n-1}(2b_1+[-2b_2]),\ \text{(voir [14])}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(3)} T_n(x)\, t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(S_n(A)+S_{n-1}(A)\right)\left(S_n(2b_1+[-2b_2]) - xS_{n-1}(2b_1+[-2b_2])\right) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(2b_1+[-2b_2])\left(S_n(A)+S_{n-1}(A)\right) t^n \\
&\quad -x\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(2b_1+[-2b_2])\left(S_n(A)+S_{n-1}(A)\right) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(3)} U_n(x)\, t^n - x\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_{n-1}(2b_1+[-2b_2])t^n \\
&\quad -x\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)S_{n-1}(2b_1+[-2b_2])t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(3)} U_n(x)\, t^n - x\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\frac{(2b_1)^n-(-2b_2)^n}{2b_1+2b_2}t^n\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-x\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)\frac{(2b_1)^n-(-2b_2)^n}{2b_1+2b_2}t^n\right)\\
=\ & \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(3)}U_n\left(x\right)t^n-\frac{x}{2b_1+2b_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)(2b_1t)^n-\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)(-2b_2t)^n\right)\\
&-\frac{x}{2b_1+2b_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)(2b_1t)^n-\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)(-2b_2t)^n\right)\\
=\ & \frac{1+2xt+t^2+2xt^3+t^4}{1-\left(4x^2-2\right)t^2-\left(8x^3-6x\right)t^3+t^4+2xt^5+t^6}\\
&-\frac{xt+2x^2t^2+4x^3t^3+2x^2t^4}{1-\left(4x^2-2\right)t^2-\left(8x^3-6x\right)t^3+t^4+2xt^5+t^6}\\
=\ & \frac{1+xt+\left(1-2x^2\right)t^2+2x\left(1-2x^2\right)t^3+(1-2x^2)t^4}{1-\left(4x^2-2\right)t^2-\left(8x^3-6x\right)t^3+t^4+2xt^5+t^6}.
\end{aligned}
$$

– Les spécialisations suivantes $\begin{cases} S_1\left(-A\right)=-1 \\ S_2\left(-A\right)=0 \\ S_3\left(-A\right)=-1 \end{cases}$ et $\begin{cases} b_1-b_2=x \\ b_1b_2=\frac{-1}{4} \end{cases}$ dans (2.41) et (2.42) nous donnent, respectivement les fonctions génératrices suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)S_{n-1}(2b_1+[-2b_2])t^n=\frac{t+2xt^4}{1-2xt+t^2-(8x^3-6x)t^3+(4x^2-2)t^4+t^6}, \quad (2.45)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)S_n(2b_1+[-2b_2])t^n=\frac{2xt-t^2+t^4}{1-2xt+t^2-(8x^3-6x)t^3+(4x^2-2)t^4+t^6}. \quad (2.46)$$

Théorème 15 $\forall\ n\in\mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des nombres de Narayana et les polynômes de Chebyshev de troisième espèce est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_nV_n\left(x\right)t^n=\frac{\left(2x-1\right)t-t^2+\left(1-2x\right)t^4}{1-2xt+t^2-(8x^3-6x)t^3+(4x^2-2)t^4+t^6}.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} N_n V_n(x)\, t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)\left(S_n(2b_1+[-2b_2]) - S_{n-1}(2b_1+[-2b_2])\right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A) S_n(2b_1+[-2b_2]) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A) S_{n-1}(2b_1+[-2b_2])\, t^n.\end{aligned}$$

D'après les formules (2.45) et (2.46), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} N_n V_n(x)\, t^n &= \frac{2xt - t^2 + t^4}{1-2xt+t^2-(8x^3-6x)t^3+(4x^2-2)t^4+t^6} \\ &\quad - \frac{t+2xt^4}{1-2xt+t^2-(8x^3-6x)t^3+(4x^2-2)t^4t^6} \\ &= \frac{(2x-1)\,t - t^2 + (1-2x)\,t^4}{1-2xt+z^2-(8x^3-6x)t^3+(4x^2-2)t^4+t^6}.\end{aligned}$$

– Les spécialisations suivantes $\begin{cases} S_1(A) = -1 \\ S_2(A) = -1 \\ S_3(A) = -2 \end{cases}$ et $\begin{cases} b_1 - b_2 = x \\ b_1 b_2 = \frac{-1}{4} \end{cases}$ dans (3.41) et (3.42), nous donnent, respectivement les fonctions génératrices suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A) S_{n-1}(2b_1+[-2b_2]) t^n$$
$$= \frac{t+t^3+4xt^4}{1-2xt+(-4x^2+3)\,t^2-(16x^3-14x)t^3+(8x^2-3)t^4+4xt^5+4t^6}, \quad (2.47)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A) S_n(2b_1+[-2b_2]) t^n 4$$
$$= \frac{2xt-t^2+2t^4}{1-2xt+(-4x^2+3)\,t^2-(16x^3-14x)t^3+(8x^2-3)t^4+4xt^5+4t^6}. \quad (2.48)$$

Théorème 16 $\forall\ n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des nombres de Jacobsthal de troisième ordre et les polynômes de Chebyshev de troisième espèce est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(3)} V_n(x)\, t^n = \frac{(2x-1)\,t - t^2 - t^3 + (2-4x)\,t^4}{1 - 2xt + (-4x^2+3)\,t^2 - (16x^3-14x)t^3 + (8x^2-3)t^4 + 4xt^5 + 4t^6}.$$

Preuve. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(3)} V_n(x)\, t^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)(S_n(2b_1 + [-2b_2]) - S_{n-1}(2b_1 + [-2b_2])t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A) S_n(2b_1 + [-2b_2])t^n - \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A) S_{n-1}(2b_1 + [-2b_2])t^n.$$

Et d'après les relations (2.47) et (2.48) on obtient

$$= \frac{2xt - t^2 + 2t^4}{1 - 2xt + (-4x^2+3)\,t^2 - (16x^3-14x)t^3 + (8x^2-3)t^4 + 4xt^5 + 4t^6}$$

$$- \frac{t + t^3 + 4xt^4}{1 - 2xt + (-4x^2+3)\,t^2 - (16x^3-14x)t^3 + (8x^2-3)t^4 + 4xt^5 + 4t^6}$$

$$= \frac{(2x-1)\,t - t^2 - t^3 + (2-4x)\,t^4}{1 - 2xt + (-4x^2+3)\,t^2 - (16x^3-14x)t^3 + (8x^2-3)t^4 + 4xt^5 + 4t^6}.$$

Théorème 17 $\forall\ n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des nombres de Jacobsthal-Lucas de troisième ordre et les polynômes de Chebyshev de troisième espèce est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} j_n^{(3)} V_n(x)\, t^n = \frac{2 - (2x+1)\,t + (1 - 8x + 8x^2)\,t^2 + (7 + 4x - 16x^2)\,t^3 + (4x-4)\,t^4 - 4t^5}{1 - 2xt + (-4x^2+3)\,t^2 - (16x^3-14x)t^3 + (8x^2-3)t^4 + 4xt^5 + 4t^6}.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} j_n^{(3)} V_n(x)\, t^n \\
= &\sum_{n=0}^{\infty} (2S_n(A) - S_{n-1}(A) + 2S_{n-2}(A))(S_n(2b_1 + [-2b_2]) - S_{n-1}(2b_1 + [-2b_2]))\, t^n \\
= &\sum_{n=0}^{\infty} 2S_n(A)(S_n(2b_1 + [-2b_2]) - S_{n-1}(2b_1 + [-2b_2])t^n - \sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(3)} V_n(x)\, t^n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\sum_{n=0}^{\infty} 2S_{n-2}(A)(S_n(2b_1+[-2b_2])-S_{n-1}(2b_1+[-2b_2])t^n \\
= \; & 2\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(2b_1+[-2b_2])t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_{n-1}(2b_1+[-2b_2])t^n - \sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(3)} V_n\left(x\right)t^n \\
& +2\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A)S_n(2b_1+[-2b_2])t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A)S_{n-1}(2b_1+[-2b_2])t^n \\
= \; & 2\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(2b_1+[-2b_2])t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\frac{(2b_1)^n-(-2b_2)^n}{2b_1+2b_2}t^n - \sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(3)} V_n\left(x\right)t^n \\
& +2\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A)\frac{(2b_1)^{n+1}-(-2b_2)^{n+1}}{2b_1+2b_2}t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A)\frac{(2b_1)^n-(-2b_2)^n}{2b_1+2b_2}t^n \\
= \; & 2\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(2b_1+[-2b_2])z^n - \frac{1}{b_1+b_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\left((2b_1)^n-(-2b_2)^n\right)t^n\right) \\
& +\frac{1}{b_1+b_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A)\left((2b_1)^{n+1}-(-2b_2)^{n+1}\right)t^n\right) - \sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(3)} V_n\left(x\right)t^n \\
& -\frac{1}{b_1+b_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A)\left((2b_1)^n-(-2b_2)^n\right)t^n\right) \\
= \; & 2\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(2b_1+[-2b_2])t^n - \frac{1}{b_1+b_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\left(2b_1\right)^n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\left(-2b_2\right)^n t^n\right) \\
& +\frac{1}{b_1+b_2}\left(2b_1\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A)\left(2b_1\right)^n t^n + 2b_2\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A)\left(-2b_2\right)^n t^n\right) - \sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(3)} V_n t^n. \\
& -\frac{1}{b_1+b_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A)\left(2b_1\right)^n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A)\left(-2b_2\right)^n t^n\right).
\end{aligned}
$$

Et comme

$$
\sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_1+a_2+a_3)t^n = \frac{1}{1-t-t^2-2t^3},
$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)t^n = \frac{t^2}{1-t-t^2-2t^3},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\, S_n(2a_1+[-2a_2])\, t^n$$
$$= \frac{1+t^2+4xt^3}{1-2xt+(-4x^2+3)\,t^2-(16x^3-14x)t^3+(8x^2-3)t^4+4xt^5+4t^6}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} j_n^{(3)} V_n(x)\, t^n &= \frac{2+2t^2+8xt^3}{1-2xt+(-4x^2+3)\,t^2-(16x^3-14x)t^3+(8x^2-3)t^4+4xt^5+4t^6} \\
&\quad - \frac{2t+4xt^2+4\,(4x^2-1)\,t^3}{1-2xt+(-4x^2+3)\,t^2-(16x^3-14x)t^3+(8x^2-3)t^4+4xt^5+4t^6} \\
&\quad + \frac{2(4x^2-1)t^2-4xt^3-2t^4}{1-2xt+(-4x^2+3)\,t^2-(16x^3-14x)t^3+(8x^2-3)t^4+4xt^5+4t^6} \\
&\quad - \frac{(2x-1)\,t-t^2-t^3+(2-4x)\,t^4}{1-2xt+(-4x^2+3)\,t^2-(16x^3-14x)t^3+(8x^2-3)t^4+4xt^5+4t^6} \\
&\quad - \frac{4xt^2-2t^3+4t^5}{1-2xt+(-4x^2+3)\,t^2-(16x^3-14x)t^3+(8x^2-3)t^4+4xt^5+4t^6} \\
&= \frac{2-(2x+1)\,t+(1-8x+8x^2)\,t^2+(7+4x-16x^2)\,t^3+(4x-4)\,t^4-4t^5}{1-2xt+(-4x^2+3)\,t^2-(16x^3-14x)t^3+(8x^2-3)t^4+4xt^5+4t^6}.
\end{aligned}$$

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé des nouveaux théorèmes basés sur les fonctions symétriques pour déterminer les fonctions génératrices des produits des nombres de $k-$Fibonacci, $k-$Lucas, $k-$Pell, $k-$Pell-Lucas, $k-$Jacobsthal et $k-$Jacobsthal-Lucas ainsi que les fonctions génératrices des produits des nombres de Padovan, Narayana, Jacobsthal de troisième ordre et les polynômes de Chebyshev. Et pour $k = 1$ nous avons récupéré certains résultats de Mezo [59].

Chapitre 3

Quelques théorèmes sur les fonctions génératrices et leurs applications

Dans [70] M. Toufik, a déterminé les fonctions génératrices des puissances de nombres de Fibonacci, Lucas, Pell et les polynômes de Chebychev de deuxième espèces. En utilisant des combinaisons linéaires de la suite de Horadam. Falcon dans [37] a utilisé les techniques données dans [39] pour déterminer les fonctions génératrices des puissances des nombres de Fibonacci et les nombres de Pell. Dans ce chapitre nous montrons que l'actions de l'opérateur $\delta_{c_1c_2}\delta_{b_1b_2}$sur la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n\left(a_1, a_2\right) b_1^n c_1^n t^n$, nous permet d'obtenir des nouvelles fonctions génératrices des puissances des nombres de $k-$Fibonacci et $k-$Pell, ainsi que les fonctions génératrices des produits des nombres $k-$Fibonacci, $k-$Pell et les polynômes de Chebyshev de première et de deuxième espèce. Et pour $k=1$, nous récupérons certains résultats présentés dans$\left([41,\ 70,\ 37]\right)$.

3.1 Définitions et notations

Définition 19 [5] *Nous définissons l'operateur* $\delta_{c_1c_2}^k\delta_{b_1b_2}^k$ *appelé symétriseur par :*

$$\delta_{c_1c_2}^k\delta_{b_1b_2}^k\left(f\right)=\frac{b_1^kc_1^kf\left(b_1c_1\right)-b_1^kc_2^kf\left(b_1c_2\right)-b_2^kc_1^kf\left(b_2c_1\right)+b_2^kc_2^kf\left(b_2c_2\right)}{\left(b_1-b_2\right)\left(c_1-c_2\right)}.$$

Remarque 6 $\forall n\in\mathbb{N}$, on a

$$h_n(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) = S_n(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n).$$

3.2 Résultats principaux

Les théorèmes suivants sont basés essentiellement sur les fonctions symétriques.

Théorème 18 *Etant donnés trois alphabets* $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$ et $C = \{c_1, c_2\}$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2) h_n(b_1, b_2) h_n(c_1, c_2) t^n \tag{3.1}$$

$$= \frac{b_1 b_2}{c_1 - c_2} \times \frac{\begin{pmatrix} \prod_{a\in A}(1 - ab_1c_1t)\prod_{a\in A}(1 - ab_2c_1t)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1, a_2) h_{n-2}(b_1, b_2) c_2^{n+1}t^n \\ -\prod_{a\in A}(1 - ab_1c_2t)\prod_{a\in A}(1 - ab_2c_2t)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1, a_2) h_{n-2}(b_1, b_2) c_1^{n+1}t^n \end{pmatrix}}{\begin{array}{c}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1, a_2) b_1^n c_1^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1, a_2) b_2^n c_1^n t^n\right) \\ \times\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1, a_2) b_1^n c_2^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1, a_2) b_2^n c_2^n t^n\right)\end{array}}.$$

Preuve. Soient $\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2) b_1^n c_1^n t^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1, a_2) b_1^n c_1^n t^n$, deux séries telles que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2) b_1^n c_1^n t^n = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1, a_2) b_1^n c_1^n t^n}.$$

Et soit $g(b_1, c_1) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2) b_1^n c_1^n t^n$, alors le premier membre de la formule (3.1) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\delta_{c_1c_2}\delta_{b_1b_2} g(b_1, c_1) &= \delta_{c_1c_2}\delta_{b_1b_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2) b_1^n c_1^n t^n\right) \\
&= \delta_{c_1c_2}\left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2) b_1^{n+1} c_1^n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2) b_2^{n+1} c_1^n t^n}{b_1 - b_2}\right) \\
&= \delta_{c_1c_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2) \frac{b_1^{n+1} - b_2^{n+1}}{b_1 - b_2} c_1^n t^n\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_{c_1c_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2)\,h_n(b_1,b_2)\,c_1^n t^n\right)\\
&= \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2)\,h_n(b_1,b_2)\,c_1^{n+1}t^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2)\,h_n(b_1,b_2)\,c_2^{n+1}t^n}{c_1-c_2}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2)\,h_n(b_1,b_2)\,h_n(c_1,c_2)t^n.
\end{aligned}$$

Posons $g(b_1,c_1) = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_1^n c_1^n t^n}$, alors le deuxième membre de la formule (3.1) s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\delta_{c_1c_2}\delta_{b_1b_2}g(b_1,c_1) &= \delta_{c_1c_2}\delta_{b_1b_2}\left(\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_1^n c_1^n t^n}\right)\\
&= \delta_{c_1c_2}\left(\frac{b_1b_2\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_2^{n-1}c_1^n t^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_1^{n-1}c_1^n t^n\right)}{(b_1-b_2)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_1^n c_1^n t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_2^n c_1^n t^n\right)}\right)\\
&= \delta_{c_1c_2}\left(\frac{-b_1b_2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,h_{n-2}(b_1,b_2)\,c_1^n t^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_1^n c_1^n t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_2^n c_1^n t^n\right)}\right)\\
&= \frac{b_1b_2}{c_1-c_2}\left(\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,h_{n-2}(b_1,b_2)\,c_2^{n+1}t^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_1^n c_2^n t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_2^n c_2^n t^n\right)}\right.\\
&\quad\left. - \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,h_{n-2}(b_1,b_2)\,c_1^{n+1}t^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_1^n c_1^n t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_2^n c_1^n t^n\right)}\right).
\end{aligned}$$

D'après l'égalité $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_1^n c_1^n t^n = \prod\limits_{a\in A}(1-ab_1c_1t)$, on obtient :

$$\delta_{c_1c_2}\delta_{b_1b_2} g(b_1,c_1)$$
$$. \quad = \frac{b_1b_2}{c_1-c_2}\times\frac{\begin{pmatrix}\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1c_1t)\prod\limits_{a\in A}(1-ab_2c_1t)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, h_{n-2}(b_1,b_2)\, c_2^{n+1}t^n \\ -\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1c_2t)\prod\limits_{a\in A}(1-ab_2c_2t)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, h_{n-2}(b_1,b_2)\, c_1^{n+1}t^n\end{pmatrix}}{\begin{array}{c}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_1^nc_1^nt^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_2^nc_1^nt^n\right)\\ \times\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_1^nc_2^nt^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_2^nc_2^nt^n\right)\end{array}}.$$

Théorème 19 [8] *Soient* $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b_1,b_2\}$ et $C=\{c_1,c_2\}$ *trois alphabets , alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2)\, h_{n-1}(b_1,b_2)\, h_{n-1}(c_1,c_2)\, t^n \tag{3.2}$$

$$= \frac{1}{(c_1-c_2)}\times\frac{\begin{pmatrix}\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1c_1t)\prod\limits_{a\in A}(1-ab_2c_1t)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, h_{n-1}(b_1,b_2)\, c_2^{n}t^n \\ -\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1c_2t)\prod\limits_{a\in A}(1-ab_2c_2t)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, h_{n-1}(b_1,b_2)\, c_1^{n}t^n\end{pmatrix}}{\begin{array}{c}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_1^nc_1^nt^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_2^nc_1^nt^n\right)\\ \times\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_1^nc_2^nt^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_2^nc_2^nt^n\right)\end{array}}.$$

Théorème 20 *Etant donnés trois alphabets* $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b_1,b_2\}$ *et* $C=\{c_1,c_2\}$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2)\, h_n(b_1,b_2)\, h_{n-1}(c_1,c_2)\, t^n \tag{3.3}$$
$$= \frac{b_1b_2}{(c_1-c_2)}\times\frac{\begin{pmatrix}\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1c_1t)\prod\limits_{a\in A}(1-ab_2c_1t)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, h_{n-2}(b_1,b_2)\, c_2^{n}t^n \\ -\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1c_2t)\prod\limits_{a\in A}(1-ab_2c_2t)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, h_{n-2}(b_1,b_2)\, c_1^{n}t^n\end{pmatrix}}{\begin{array}{c}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_1^nc_1^nt^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_2^nc_1^nt^n\right)\\ \times\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_1^nc_2^nt^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_2^nc_2^nt^n\right)\end{array}}.$$

Preuve. Soient $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2)\, b_1^n c_1^n t^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_1^n c_1^n t^n$ deux séries telles que : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2)\, b_1^n c_1^n t^n = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2) b_1^n c_1^n t^n}$. Et soit $g(b_1,c_1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2)\, b_1^n c_1^n t^n$, alors le premier membre de la formule (3.3) s'écrit :

$$
\begin{aligned}
\partial_{c_1c_2}\delta_{b_1b_2} g(b_1,c_1) &= \partial_{c_1c_2}\delta_{b_1b_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2)\, b_1^n c_1^n t^n\right) \\
&= \partial_{c_1c_2}\left(\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2)\, b_1^{n+1} c_1^n t^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2)\, b_2^{n+1} c_1^n t^n}{b_1-b_2}\right) \\
&= \partial_{c_1c_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2)\,\frac{b_1^{n+1}-b_2^{n+1}}{b_1-b_2} c_1^n t^n\right) \\
&= \partial_{c_1c_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2)\, h_n(b_1,b_2)\, c_1^n t^n\right) \\
&= \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2)\, h_n(b_1,b_2)\, c_1^n t^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2)\, h_n(b_1,b_2)\, c_2^n t^n}{c_1-c_2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2)\, h_n(b_1,b_2)\, h_{n-1}(c_1,c_2) t^n.
\end{aligned}
$$

Posons $g(b_1,c_1) = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2) b_1^n c_1^n t^n}$, le deuxième membre de la formule (3.3) s'écrit :

$$
\begin{aligned}
\partial_{c_1c_2}\delta_{b_1b_2} g(b_1,c_1) &= \left(\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_1^n c_1^n t^n}\right) \\
&= \partial_{c_1c_2}\left(\frac{b_1b_2\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_2^{n-1} c_1^n t^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_1^{n-1} c_1^n t^n\right)}{(b_1-b_2)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_1^n c_1^n t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_2^n c_1^n t^n\right)}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \partial_{c_1c_2}\left(\frac{-b_1b_2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,h_{n-2}(b_1,b_2)\,c_1^nt^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_1^nc_1^nt^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_2^nc_1^nt^n\right)}\right)$$

$$= \frac{b_1b_2}{c_1-c_2}\left(\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,h_{n-2}(b_1,b_2)\,c_2^nt^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_1^nc_2^nt^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_2^nc_2^nt^n\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,h_{n-2}(b_1,b_2)\,c_1^nt^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_1^nc_1^nt^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_2^nc_1^nt^n\right)}\right).$$

Et comme $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_1^nc_1^nt^n = \prod\limits_{a\in A}(1-ab_1c_1t)$, on a donc

$$\partial_{c_1c_2}\delta_{b_1b_2}g(b_1,c_1) =$$
$$\frac{b_1b_2}{(c_1-c_2)}\times\frac{\begin{pmatrix}\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1c_1t)\prod\limits_{a\in A}(1-ab_2c_1t)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,h_{n-2}(b_1,b_2)\,c_2^nt^n\\ -\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1c_2t)\prod\limits_{a\in A}(1-ab_2c_2t)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,h_{n-2}(b_1,b_2)\,c_1^nt^n\end{pmatrix}}{\begin{array}{c}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_1^nc_1^nt^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_2^nc_1^nt^n\right)\\ \times\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_1^nc_2^nt^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\,b_2^nc_2^nt^n\right)\end{array}}.$$

3.3 Applications des théorèmes

Dans cette section nous considérons la suite de Fibonacci définie par $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ avec $F_0 = F_1 = 1$.

Proposition 25 ($Th\acute{e}or\grave{e}me$ 3, [8]) *Etant donnés trois alphabets* $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$ *et* $C = \{c_1, c_2\}$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}(a_1,a_2)\, h_{n-1}(b_1,b_2)\, h_{n-1}(c_1,c_2)\, t^n \tag{3.4}$$

$$= \frac{b_1 b_2}{c_1-c_2} \times \frac{\begin{pmatrix} \prod\limits_{a\in A}(1-ab_1c_1t)\prod\limits_{a\in A}(1-ab_2c_1t)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, h_{n-2}(b_1,b_2)\, c_2^{n+1}t^{n+1} \\ -\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1c_2t)\prod\limits_{a\in A}(1-ab_2c_2t)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, h_{n-2}(b_1,b_2)\, c_1^{n+1}t^{n+1} \end{pmatrix}}{\begin{array}{c}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_1^n c_1^n t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_2^n c_1^n t^n\right) \\ \times\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_1^n c_2^n t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)\, b_2^n c_2^n t^n\right)\end{array}}.$$

En remplaçant a_2 par $(-a_2)$, b_2 par $(-b_2)$, c_2 par $(-c_2)$, et posons $a_1-a_2=b_1-b_2=c_1-c_2=k$ et $a_2a_1=b_1b_2=c_1c_2=1$ dans le théorème 18 on obtient le théorème suivant.

Théorème 21 [8] *La fonction génératrice des cubes des nombres de k-Fibonacci est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n}^3 t^n = \frac{N_{F_{k,n}F_{k,n}F_{k,n}}}{D_{F_{k,n}F_{k,n}F_{k,n}}}, \tag{3.5}$$

avec

$$\begin{aligned} N_{F_{k,n}F_{k,n}F_{k,n}} &= 1-\left(3k^2+3\right)t^2-2k^3t^3+(3k^2+3)t^4-t^6. \\ D_{F_{k,n}F_{k,n}F_{k,n}} &= 1-k^3t-(k^4+(2+k^2)(2k^2+2))t^2-k^3(3k^2+5)t^3+(3k^4+12k^2 \\ &\quad -k^6+6)t^4+k^3(3k^2+5)t^5-(k^4+(2+k^2)(2k^2+2))t^6+k^3t^7+t^8. \end{aligned}$$

Posons $k=1$ dans la relation (3.5) on obtient la fonction génératrice des cubes des nombres de Fibonacci telle que [41] :

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^3 t^n = \frac{1-2t-t^2}{1-3t-6t^2+3t^3+t^4}.$$

En remplaçant a_1 par $2a_1$, a_2 par $(-2a_2)$, b_1 par $2b_1$, b_2 par $(-2b_2)$, c_1 par $2c_1$, c_2 par $(-2c_2)$, et posons $4a_2a_1=4b_1b_2=4c_1c_2=-1$ dans le théorème 18 on obtient la fonction génératrices du produit des polynômes de Chebyshev de deuxième espèce [8] :

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n (a_1 - a_2) U_n (b_1 - b_2) U_n (c_1 - c_2) t^n = \frac{N_{U_n U_n U_n}}{D_{U_n U_n U_n}}, \tag{3.6}$$

avec

$$\begin{aligned}
N_{U_n U_n U_n} &= 1 - (4(a_1 - a_2)^2 + 4(b_1 - b_2)^2 + 4(c_1 - c_2)^2 - 3)t^2 + 16(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \\
&\quad (c_1 - c_2) t^3 - (4(a_1 - a_2)^2 + 4(b_1 - b_2)^2 + 4(c_1 - c_2)^2 - 3)t^4 + t^6. \\
D_{U_n U_n U_n} &= 1 - 8(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)(c_1 - c_2) t + (16(a_1 - a_2)^2 (c_1 - c_2)^2 + 16(a_1 - a_2)^2 \\
&\quad (b_1 - b_2)^2 + 16(b_1 - b_2)^2 (c_1 - c_2)^2 - 8(a_1 - a_2)^2 - 8(b_1 - b_2)^2 - 8(c_1 - c_2)^2 \\
&\quad +4)t^2 - (32(a_1 - a_2)^3 (b_1 - b_2)(c_1 - c_2) + 32(b_1 - b_2)^3 (a_1 - a_2)(c_1 - c_2) + 32 \\
&\quad (c_1 - c_2)^3 (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) - 40(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)(c_1 - c_2))t^3 + (16(a_1 - a_2)^4 \\
&\quad +16(b_1 - b_2)^4 + 16(c_1 - c_2)^4 - 16(a_1 - a_2)^2 - 16(b_1 - b_2)^2 - 16(c_1 - c_2)^2 + 64 \\
&\quad (a_1 - a_2)^2 (b_1 - b_2)^2 (c_1 - c_2)^2 + 6)t^4 - (32(a_1 - a_2)^3 (b_1 - b_2)(c_1 - c_2) + 32 \\
&\quad (b_1 - b_2)^3 (a_1 - a_2)(c_1 - c_2) + 32(c_1 - c_2)^3 (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) - 40(a_1 - a_2) \\
&\quad (b_1 - b_2)(c_1 - c_2))t^5 + (16(a_1 - a_2)^2 (b_1 - b_2)^2 + 16(a_1 - a_2)^2 (c_1 - c_2)^2 + 16 \\
&\quad (b_1 - b_2)^2 (c_1 - c_2)^2 - 8(a_1 - a_2)^2 - 8(b_1 - b_2)^2 - 8(c_1 - c_2)^2 + 4)t^6 - 8(a_1 - a_2) \\
&\quad (b_1 - b_2)(c_1 - c_2) t^7 + t^8.
\end{aligned}$$

En remplaçant a_2 par $(-a_2)$, b_1 par $(2b_1)$, b_2 par $(-2b_2)$, c_1 par $(2c_1)$, c_2 par $(-2c_2)$, $a_1 - a_2 = k$, $a_1 a_2 = 1$ et $4b_1 b_2 = 4c_1 c_2 = -1$ dans le théorème 18 on obtient le théorème suivant.

Théorème 22 $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit de nombres de $k-$Fibonacci et les polynômes de Chebyshev de deuxième espèce est donnée par* [8] :

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} U_n (b_1 - b_2) U_n (c_1 - c_2) t^n = \frac{N_{F_{k,n} U_n U_n}}{D_{F_{k,n} U_n U_n}}, \tag{3.7}$$

avec

$$\begin{aligned}
N_{F_{k,n} U_n U_n} &= 1 - (-4(b_1 - b_2)^2 - 4(c_1 - c_2)^2 + k^2 + 3)t^2 - 8k(b_1 - b_2)(c_1 - c_2) t^3 \\
&\quad +(-4(b_1 - b_2)^2 - 4(c_1 - c_2)^2 + k^2 + 3)t^4 - t^6.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_{F_{k,n}U_nU_n} &= 1-4k\left(b_1-b_2\right)\left(c_1-c_2\right)t-(-4k^2\left(c_1-c_2\right)^2+(-2+4\left(b_1-b_2\right)^2)\\
&\quad(-k^2+4\left(c_1-c_2\right)^2-2))t^2-4k\left(b_1-b_2\right)\left(c_1-c_2\right)(k^2-4\left(b_1-b_2\right)^2\\
&\quad-4\left(c_1-c_2\right)^2+5)t^3+(16\left(b_1-b_2\right)^4+16\left(c_1-c_2\right)^4-16\left(b_1-b_2\right)^2\\
&\quad-16\left(c_1-c_2\right)^2-16k^2\left(b_1-b_2\right)^2\left(c_1-c_2\right)^2+k^4+4k^2+6)t^4\\
&\quad+4k\left(b_1-b_2\right)\left(c_1-c_2\right)(k^2-4\left(b_1-b_2\right)^2-4\left(c_1-c_2\right)^2+5)t^5\\
&\quad-(-4k^2\left(c_1-c_2\right)^2+(-2+4\left(b_1-b_2\right)^2)(-k^2+4\left(c_1-c_2\right)^2-2))t^6\\
&\quad+4k\left(b_1-b_2\right)\left(c_1-c_2\right)t^7+t^8.
\end{aligned}
$$

Posons $k=1$ dans la relation (3.7) on obtient l'identité suivante [41]

$$\sum_{n=0}^{\infty}F_nU_n\left(b_1-b_2\right)U_n\left(c_1-c_2\right)t^n=\frac{N_{F_nU_nU_n}}{D_{F_nU_nU_n}}, \tag{3.8}$$

avec

$$
\begin{aligned}
N_{F_nU_nU_n} &= 1+(4\left(b_1-b_2\right)^2+4\left(c_1-c_2\right)^2-4)t^2-8\left(b_1-b_2\right)\left(c_1-c_2\right)t^3-(4\left(b_1-b_2\right)^2\\
&\quad+4\left(c_1-c_2\right)^2-4)t^4-t^6.\\
D_{F_nU_nU_n} &= 1-4\left(b_1-b_2\right)\left(c_1-c_2\right)t+(12\left(b_1-b_2\right)^2+12\left(c_1-c_2\right)^2-16\left(b_1-b_2\right)^2\\
&\quad\left(c_1-c_2\right)^2-6)t^2-(24\left(b_1-b_2\right)\left(c_1-c_2\right)-16\left(b_1-b_2\right)^3\left(c_1-c_2\right)-16\left(c_1-c_2\right)^3\\
&\quad\left(b_1-b_2\right))t^3+(16\left(b_1-b_2\right)^4+16\left(c_1-c_2\right)^4-16\left(b_1-b_2\right)^2-16\left(c_1-c_2\right)^2\\
&\quad-16\left(b_1-b_2\right)^2\left(c_1-c_2\right)^2+11)t^4+(-16\left(b_1-b_2\right)^3\left(c_1-c_2\right)-16\left(c_1-c_2\right)^3\\
&\quad\left(b_1-b_2\right)+24\left(b_1-b_2\right)\left(c_1-c_2\right))t^5+(12\left(b_1-b_2\right)^2+12\left(c_1-c_2\right)^2-16\left(b_1-b_2\right)^2\\
&\quad\left(c_1-c_2\right)^2-6)t^6+4\left(b_1-b_2\right)\left(c_1-c_2\right)t^7+t^8,
\end{aligned}
$$

qui représente la fonctions génératrice du produit des nombres de Fibonacci et les polynômes de Chebyshev de deuxième espèce.

En remplaçant c_1 par $(2c_1)$, c_2 par $(-2c_2)$, b_2 par $(-b_2)$ et a_2 par $(-a_2)$, et posons $4c_1c_2=-1$, $b_1b_2=a_1a_2=1$ et $b_1-b_2=a_1-a_2=k$ dans le théorème 18, on obtient le théorème suivant.

Théorème 23 [8] $\forall\ n\in\mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des nombres de k-Fibonacci et* *les polynômes de Chebyshev de deuxième espèce est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n}^2 U_n (c_1 - c_2) t^n = \frac{N_{F_{k,n}^2 U_n}}{D_{F_{k,n}^2 U_n}}, \tag{3.9}$$

avec

$$\begin{aligned}
N_{F_{k,n}^2 U_n} &= 1 + (2k^2 - 4(c_1 - c_2)^2 + 3)t^2 + 4k^2 (c_1 - c_2) t^3 + (2k^2 - 4(c_1 - c_2)^2 + 3)t^4 + t^6. \\
D_{F_{k,n}^2 U_n} &= 1 - 2k^2 (c_1 - c_2) t - (4k^2 (c_1 - c_2)^2 + \left(2 + k^2\right)(4(c_1 - c_2)^2 - k^2 - 2))t^2 - 2k^2 \\
&\quad (c_1 - c_2)(4(c_1 - c_2)^2 - 2k^2 - 5)t^3 + (2k^4 + 16(c_1 - c_2)^4 - 16(c_1 - c_2)^2 + 8k^2 \\
&\quad +4k^4 (c_1 - c_2)^2 + 6)t^4 - 2k^2 (c_1 - c_2)(4(c_1 - c_2)^2 - 2k^2 - 5)t^5 - (4k^2 (c_1 - c_2)^2 \\
&\quad + \left(k^2 + 2\right)(4(c_1 - c_2)^2 - k^2 - 2))t^6 - 2k^2 (c_1 - c_2) t^7 + t^8.
\end{aligned}$$

Posons $k = 1$ dans la relation (3.9) on obtient l'identité suivante [41]

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^2 U_n (c_1 - c_2) t^n = \frac{N_{F_n^2 U_n}}{D_{F_n^2 U_n}}, \tag{3.10}$$

avec

$$\begin{aligned}
N_{F_n^2 U_n} &= 1 - 2(c_1 - c_2) t + 4t^2 - 2(c_1 - c_2) t^3 + t^4. \\
D_{F_n^2 U_n} &= (1 + 2(c_1 - c_2) t + t^2)(1 - 6(c_1 - c_2) t + (7 + 4(c_1 - c_2)^2)t^2 - 6(c_1 - c_2) t^3 + t^4),
\end{aligned}$$

qui représente la fonction génératrice du produit des nombres de Fibonacci et les polynômes de Chebyshev de deuxième espèce.

Théorème 24 $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des nombres de* $k-$*Fibonacci et les polynômes de Chebyshev de première espèce est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n}^2 T_n (c_1 - c_2) t^n = \frac{N_{F_{k,n}^2 T_n}}{D_{F_{k,n}^2 T_n}}, \tag{3.11}$$

avec

$$N_{F_{k,n}^2 T_n} = 1 + (1 - 2(c_1 - c_2)^2 k)t^6 + k^2(c_1 - c_2)t^5 + (8(c_1 - c_2)^4 - 8(c_1 - c_2)^2 + 2k^2 + 3)t^4$$

$$+(-4k^2(c_1-c_2)^3+4k^2(c_1-c_2))t^3+(-4k^2(c_1-c_2)^2-6(c_1-c_2)^2+2k^2+3)t^2$$
$$-k^2(c_1-c_2)t.$$

$$D_{F^2_{k,n}T_n}=D_{F^2_{k,n}U_n}.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}F^2_{k,n}T_n(c_1-c_2)t^n &= \sum_{n=0}^{\infty}F^2_{k,n}\left(h_n(2c_1,[-2c_2])-(c_1-c_2)h_{n-1}(2c_1,[-2c_2])\right)t^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}F^2_{k,n}h_n(2c_1,[-2c_2])t^n-(c_1-c_2)\sum_{n=0}^{\infty}F^2_{k,n}h_{n-1}(2c_1,[-2_2])t^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}F^2_{k,n}U_n(c_1-c_2)t^n-(c_1-c_2)\sum_{n=0}^{\infty}F^2_{k,n}h_{n-1}(2c_1,[-2c_2])t^n.\end{aligned}$$

En remplaçant c_1 par $2c_1$, c_2 par $(-2c_2)$, b_2 par $(-b_2)$ et a_2 par $(-a_2)$, et posons $4c_1c_2=-1, b_1b_2=a_1a_2=1$ et $b_1-b_2=a_1-a_2=k$ dans le théorème 20 on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty}F^2_{k,n}h_{n-1}(2c_1,[-2c_2])t^n=\frac{\begin{pmatrix}k^2t-2(c_1-c_2)(-2k^2-1)t^2+4k^2(c_1-c_2)^2t^3\\ -2(c_1-c_2)(4(c_1-c_2)^2-2)t^4-k^2t^5+2(c_1-c_2)t^6\end{pmatrix}}{D_{F^2_{k,n}T_n}},$$

avec

$$D_{F^2_{k,n}T_n}=D_{F^2_{k,n}U_n}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}F^2_{k,n}T_n(c_1-c_2)t^n &= \frac{N_{F^2_{k,n}U_n}}{D_{F^2_{k,n}U_n}}\\ &\quad-(c_1-c_2)\times\frac{\begin{pmatrix}k^2t-2(c_1-c_2)(-2k^2-1)t^2+4k^2(c_1-c_2)^2t^3\\ -2(c_1-c_2)(4(c_1-c_2)^2-2)t^4-k^2t^5+2(c_1-c_2)t^6\end{pmatrix}}{D_{F^2_{k,n}T_n}}\\ &= \frac{N_{F^2_{k,n}T_n}}{D_{F^2_{k,n}U_n}},\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
N_{F_{k,n}^2 T_n} &= 1 + (1 - 2(c_1 - c_2)^2)t^6 + k^2(c_1 - c_2)t^5 + (8(c_1 - c_2)^4 - 8(c_1 - c_2)^2 + 2k^2 + 3)t^4 \\
&\quad + (-4k^2(c_1 - c_2)^3 + 4k^2(c_1 - c_2))t^3 + (2(c_1 - c_2)^2(-2k^2 - 1) + 2k^2 \\
&\quad - 4(c_1 - c_2)^2 + 3)t^2 - k^2(c_1 - c_2)t.
\end{aligned}$$

Posons $k = 1$ dans (3.11) on obtient l'identité suivante [41]

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^2 T_n \left(c_1 - c_2\right) t^n = \frac{N_{F_n^2 T_n}}{D_{F_n^2 T_n}}, \tag{3.12}$$

avec

$$\begin{aligned}
N_{F_n^2 T_n} &= 1 - 3\left(c_1 - c_2\right)t + (4 - 4\left(c_1 - c_2\right)^2)t^2 + (4\left(c_1 - c_2\right)^3 - (c_1 - c_2))t^3 \\
&\quad + (1 - 2\left(c_1 - c_2\right)^2)t^4. \\
D_{F_n^2 T_n} &= D_{F_n^2 U_n},
\end{aligned}$$

qui représente la fonction génératrice du produit des nombres de Fibonacci et les polynômes de Chebyshev de première espèce [41].

Théorème 25 $\forall\ n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des nombres de $k-$Fibonacci et les polynômes de Chebyshev de première et de deuxième espèce est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} U_n \left(b_1 - b_2\right) T_n \left(c_1 - c_2\right) t^n = \frac{N_{F_{k,n} U_n T_n}}{D_{F_{k,n} U_n T_n}}, \tag{3.13}$$

avec

$$\begin{aligned}
N_{F_{k,n} U_n T_n} &= 1 + \left(-1 + 2\left(c_1 - c_2\right)^2\right)t^6 + 2k\left(c_1 - c_2\right)\left(b_1 - b_2\right)t^5 + (-4\left(b_1 - b_2\right)^2 + 8\left(c_1 - c_2\right)^4 \\
&\quad - 8\left(c_1 - c_2\right)^2 + k^2 + 3)t^4 + (-8k\left(b_1 - b_2\right)\left(c_1 - c_2\right) + 8k\left(c_1 - c_2\right)^3\left(b_1 - b_2\right))t^3 \\
&\quad + (4\left(b_1 - b_2\right)^2 + 6\left(c_1 - c_2\right)^2 - 3 - k^2 - 8\left(c_1 - c_2\right)^2\left(b_1 - b_2\right)^2 + 2k^2\left(c_1 - c_2\right))t^2 \\
&\quad - 2k\left(c_1 - c_2\right)\left(b_1 - b_2\right)t. \\
D_{F_{k,n} U_n T_n} &= D_{F_{k,n} U_n U_n}.
\end{aligned}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} U_n (b_1 - b_2) T_n (c_1 - c_2) t^n \\
= &\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} U_n (b_1 - b_2) (h_n (2c_1, [-2c_2]) - (c_1 - c_2) h_{n-1} (2c_1, [-2c_2])) t^n \\
= &\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} U_n (b_1 - b_2) h_n (2c_1, [-2c_2]) t^n - (c_1 - c_2) \sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} U_n (b_1 - b_2) h_{n-1} (2c_1, [-2c_2]) t^n \\
= &\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} U_n (b_1 - b_2) U_n (c_1 - c_2) t^n - (c_1 - c_2) \sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} U_n (b_1 - b_2) h_{n-1} (2c_1, [-2c_2]) t^n.
\end{aligned}$$

En remplaçant c_1 par $2c_1$, c_2 par $(-2c_2)$, b_1 par $2b_1$, b_2 par $(-2b_2)$ et a_2 par $(-a_2)$, et posons $4c_1c_2 = 4b_1b_2 = -1, a_1a_2 = 1$ et $a_1 - a_2 = k$ dans le théorème 20 on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} U_n (b_1 - b_2) h_{n-1} (2c_1, [-2c_2]) t^n =$$
$$\frac{\begin{pmatrix} 2k (b_1 - b_2) t - 2 (c_1 - c_2) \left(-4 (b_1 - b_2)^2 + k^2 + 1\right) t^2 - 8k (c_1 - c_2)^2 (b_1 - b_2) t^3 \\ + \left(-8 (c_1 - c_2)^3 + 4 (c_1 - c_2)\right) t^4 - 2k (b_1 - b_2) t^5 - 2 (c_1 - c_2) t^6 \end{pmatrix}}{D_{F_{k,n} U_n T_n}},$$

avec

$$D_{F_{k,n} U_n T_n} = D_{F_{k,n} U_n U_n},$$

alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} U_n (b_1 - b_2) T (c_1 - c_2) t^n = \frac{N_{F_{k,n} U_n U_n}}{D_{F_{k,n} U_n U_n}} - (c_1 - c_2) \times$$
$$\frac{\begin{pmatrix} 2k (b_1 - b_2) t - 2 (c_1 - c_2) (-4 (b_1 - b_2)^2 + k^2 + 1) t^2 - 8k (c_1 - c_2)^2 (b_1 - b_2) t^3 \\ +(-8 (c_1 - c_2)^3 + 4 (c_1 - c_2)) t^4 - 2k (b_1 - b_2) t^5 - 2 (c_1 - c_2) t^6 \end{pmatrix}}{D_{F_{k,n} U_n U_n}}$$
$$= \frac{N_{F_{k,n} U_n T_n}}{D_{F_{k,n} U_n U_n}},$$

avec

$$\begin{aligned}
N_{F_{k,n}U_nT_n} &= 1+\left(-1+2\left(c_1-c_2\right)^2\right)t^6+2k\left(c_1-c_2\right)\left(b_1-b_2\right)t^5+(-4\left(b_1-b_2\right)^2+8\left(c_1-c_2\right)^4\\
&\quad -8\left(c_1-c_2\right)^2+k^2+3)t^4+(-8k\left(b_1-b_2\right)\left(c_1-c_2\right)+8k\left(c_1-c_2\right)^3\left(b_1-b_2\right))t^3\\
&\quad +(4\left(b_1-b_2\right)^2+6\left(c_1-c_2\right)^2-3-k^2-8\left(c_1-c_2\right)^2\left(b_1-b_2\right)^2+2k^2\left(c_1-c_2\right)^2)t^2\\
&\quad -2k\left(c_1-c_2\right)\left(b_1-b_2\right)t.
\end{aligned}$$

Posons $k=1$ dans (3.13) on obtient l'identité suivante [41]

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_nU_n\left(b_1-b_2\right)T_n\left(c_1-c_2\right)t^n=\frac{N_{F_nU_nT_n}}{D_{F_nU_nT_n}}, \tag{3.14}$$

avec

$$\begin{aligned}
N_{F_nU_nT_n} &= 1-2\left(b_1-b_2\right)\left(c_1-c_2\right)t+(4\left(b_1-b_2\right)^2+8\left(c_1-c_2\right)^2-8\left(c_1-c_2\right)^2\left(b_1-b_2\right)^2-4)t^2\\
&\quad +(-8\left(c_1-c_2\right)\left(b_1-b_2\right)+8\left(c_1-c_2\right)^3\left(b_1-b_2\right))t^3+(8\left(c_1-c_2\right)^4-8\left(c_1-c_2\right)^2-\\
&\quad 4\left(b_1-b_2\right)^2+4)t^4+2\left(c_1-c_2\right)\left(b_1-b_2\right)t^5+(2\left(c_1-c_2\right)^2-1)t^6.\\
D_{F_nU_nT_n} &= D_{F_nU_nU_n},
\end{aligned}$$

qui représente la fonction génératrice du produit des nombres de Fibonacci et les polynômes de Chebyshev de première et de deuxième espèce .

En remplaçant a_2 par $(-a_2)$, b_2 par $(-b_2)$ et c_2 par $(-c_2)$, et posons $a_1a_2=1$, $b_1b_2=c_1c_2=k$ et $a_1-a_2=k$, $b_1-b_2=c_1-c_2=2$ dans le théorème 19, on obtient le théorème suivant.

Théorème 26 [8] $\forall\ n\in\mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des nombres de* $k-$*Fibonacci et les nombres de k-Pell est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n}P_{k,n}^2t^n=\frac{N_{F_{k,n}P_{k,n}^2}}{D_{F_{k,n}P_{k,n}^2}}, \tag{3.15}$$

avec

$$N_{F_{k,n}P_{k,n}^2}=kt+4t^2-k^3\left(2+k^2\right)t^3-4k^4t^4+k^3\left(8k+k^2\right)t^5-4k^4t^6.$$

$$\begin{aligned}
D_{F_{k,n}^2 P_{k,n}} &= 1-4kt-\left(4k^3+(2k+4)\left(k^3+2k+4\right)\right)t^2-4k\left(k^4+8k+5k^2\right)t^3 \\
&+(32k^2+k^8+k^2\left(4k^4+32k-16k^2\right)+6k^4)t^4+4k^3\left(k^4+8k+5k^2\right)t^5 \\
&-(4k^7+k^4\left(2k+4\right)\left(k^{3\cdot}+2k+4\right))t^6+4k^7t^7+k^8t^8.
\end{aligned}$$

En remplaçant a_1 par $2a_1$, a_2 par $(-2a_2)$, b_2 par $(-b_2)$ et c_2 par $(-c_2)$, et posons $4a_1a_2 = -1, b_1b_2 = c_1c_2 = k$ et $b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = 2$ dans le théorème 19 on obtient le théorème suivant :

Théorème 27 [8] $\forall\ n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des nombres de* $k-$*Pell et les polynômes de Chebyshev de deuxième espèce est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{k,n}^2 U_n\left(a_1-a_2\right)t^n = \frac{N_{P_{k,n}^2 U_n}}{D_{P_{k,n}^2 U_n}}, \tag{3.16}$$

avec

$$\begin{aligned}
N_{P_{k,n}^2 U_n} &= 2\left(a_1-a_2\right)t-4t^2-2k^2\left(a_1-a_2\right)\left(4\left(a_1-a_2\right)^2-2\right)t^3+16k^2\left(a_1-a_2\right)^2t^4 \\
&+2k^2\left(a_1-a_2\right)(8k+k^2)t^5+4k^4t^6. \\
D_{P_{k,n}^2 U_n} &= 1-8\left(a_1-a_2\right)t-(16k\left(a_1-a_2\right)^2+(2k+4)(4k\left(a_1-a_2\right)^2-2k-4))t^2-8\left(a_1-a_2\right) \\
&(4k^2\left(a_1-a_2\right)^2-8k-5k^2)t^3+(32k^2+16k^4\left(a_1-a_2\right)^4-k^2(16k^2\left(a_1-a_2\right)^2-32k \\
&-64\left(a_1-a_2\right)^2)+6k^4)t^4-8k^2\left(a_1-a_2\right)(4k^2\left(a_1-a_2\right)^2-8k-5k^2)t^5-(16k^5 \\
&\left(a_1-a_2\right)^2+k^4(2k+4)(4k\left(a_1-a_2\right)^2-2k-4))t^6-8k^6\left(a_1-a_2\right)t^7+k^8t^8.
\end{aligned}$$

Posons $k = 1$ dans la formule (3.16) , on obtient la fonction génératrice du produit des nombres de Pell et les polynômes de Chebyshev de deuxième espèce [8]

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^2 U_n\left(a_1-a_2\right)t^n = \frac{N_{P_n^2 U_n}}{D_{P_n^2 U_n}},$$

avec

$$\begin{aligned}
N_{P_n^2 U_n} &= 2\left(a_1-a_2\right)t-4t^2-2\left(a_1-a_2\right)(-2+4\left(a_1-a_2\right)^2)t^3+16\left(a_1-a_2\right)^2t^4 \\
&+18\left(a_1-a_2\right)t^5+4t^6.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{P_n^2 U_n} &= 1-8\left(a_1-a_2\right)t-(40\left(a_1-a_2\right)^2-36)t^2-8\left(a_1-a_2\right)(4\left(a_1-a_2\right)^2-13)t^3 \\ &+(70+16\left(a_1-a_2\right)^4+48\left(a_1-a_2\right)^2)t^4-8\left(a_1-a_2\right)(4\left(a_1-a_2\right)^2-13)t^5 \\ &-(40\left(a_1-a_2\right)^2-36)t^6-8\left(a_1-a_2\right)t^{r7}+t^8. \end{aligned}$$

En remplaçant a_2 par $(-a_2)$, b_2 par $(-b_2)$ et c_2 par $(-c_2)$, et posons $a_1a_2 = b_1b_2 = c_1c_2 = k$ et $a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = 2$ dans la proposition 25 on obtient le théorème suivant :

Théorème 28 [8] $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice des cubes des nombres de* $k-$*Pell est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{k,n}^3 t^n = \frac{N_{P_{k,n}P_{k,n}P_{k,n}}}{D_{P_{k,n}P_{k,n}P_{k,n}}}, \tag{3.17}$$

avec

$$\begin{aligned} N_{P_{k,n}P_{k,n}P_{k,n}} &= t-(12k^2+3k^3)t^3-16k^3t^4+(12k^5+3k^6)t^5-k^9t^7. \\ D_{P_{k,n}P_{k,n}P_{k,n}} &= 1-8t-(16k+(2k+4)(8k+2k^2))t^2-8(12k^2+5k^3)t^3+(48k \\ &+k^3(48k^2-64)+6k^6)t^4+8k^3(12k^2+5k^3)t^5-(16k^7+k^6(2k+4) \\ &(8k+2k^2))t^6+8k^9t^7+k^{12}t^8. \end{aligned}$$

Posons $k = 1$ dans l'identité (3.17) , on obtient la fonction génératrice des cubes des nombres de Pell [70] :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^3 t^n = \frac{t\left(1-4t-t^2\right)}{\left(1+2t-t^2\right)\left(1-14t-t^2\right)}. \tag{3.18}$$

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons déterminé des nouvelles fonctions génératrices des produits des nombres de $k-$Fibonacci et les polynômes de Chebyshev de première et de deuxième espèce. En utilisant le concept des fonctions symétriques. Et nous avons récupéré certains résultats présentés dans [41, 70, 37].

Chapitre 4

Fonctions symétriques et les relations de récurrences de second ordre

En utilisant les deux formules suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} t^n = \frac{u_0 + (u_2 - u_0 (p^2 + 2q))\, t}{1 - (p^2 + 2q)\, t + q^2 t^2}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n+1} t^n = \frac{u_1 + (u_0 pq - u_1 q)\, t}{1 - (p^2 + 2q)\, t + q^2 t^2}.$$

Mező dans [59] a déterminé les fonctions génératrices des nombres de Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal et Jacobsthal -Lucas d'indice pair et impair. Dans ce chapitre on utilise le concept des fonctions symétriques pour déterminer de nouvelles fonctions génératrices des produits de certains nombres et nous récupérons certains résultats présentés dans [59]. Dans la première partie nous proposons des nouveaux théorèmes afin de déterminer des fonctions génératrices. Dans la deuxième partie, nous donnons quelques applications de ces théorèmes. Ces applications nous permettent d'obtenir des nouvelles fonctions génératrices comme : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n^3 t^n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} J_n^3 t^n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n^2 P_n t^n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n^2 J_n t^n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n^2 J_n t^n, \ldots.$

4.1 Résultats principaux

Théorème 29 *Etant donnés deux alphabets* $A = \{a_1, a_2\}$ et $B = \{b_1, b_2\}$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_1+a_2) S_{n+k-1}(b_1+b_2) t^n = \frac{b_1^k - b_2^k - (a_1+a_2)\left(b_1^k b_2 - b_2^k b_1\right) t - a_1 a_2 \left(b_2^k b_1^2 - b_1^k b_2^2\right) t^2}{(b_1 - b_2) \prod_{a\in A}(1-ab_1 t) \prod_{a\in A}(1-ab_2 t)}, \tag{4.1}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$.

Preuve. L'action de l'opérateur $\delta_{b_1 b_2}^k$ sur la série $f(b_1 t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_1+a_2) b_1^n t^n$ nous donne le membre gauche de l'égalité (4.1), alors

$$\begin{aligned}
\delta_{b_1 b_2}^k f(b_1 t) &= \delta_{b_1 b_2}^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_1+a_2) b_1^n t^n \right) \\
&= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_1+a_2) b_1^n b_1^k t^n - \sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_1+a_2) b_2^n b_2^k t^n}{b_1 - b_2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_1+a_2) \left(\frac{b_1^{n+k} - b_2^{n+k}}{b_1 - b_2} \right) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_1+a_2) S_{n+k-1}(b_1+b_2) t^n.
\end{aligned}$$

Posons $f(b_1 t) = \frac{1}{\prod_{a\in A}(1-ab_1 t)}$, alors le deuxième membre de l'égalité (4.1) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\delta_{b_1 b_2}^k f(b_1 t) &= \delta_{b_1 b_2}^k \left(\frac{1}{\prod_{a\in A}(1-ab_1 t)} \right) \\
&= \frac{1}{b_1 - b_2} \left(\frac{b_1^k}{\prod_{a\in A}(1-ab_1 t)} - \frac{b_2^k}{\prod_{a\in A}(1-ab_2 t)} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{b_1^k \prod_{a\in A}(1-ab_2t) - b_2^k \prod_{a\in A}(1-ab_1t)}{(b_1-b_2)\prod_{a\in A}(1-ab_1t)\prod_{a\in A}(1-ab_2t)}$$

$$= \frac{b_1^k - b_2^k - (a_1+a_2)\left(b_1^k b_2 - b_2^k b_1\right)t - a_1a_2\left(b_2^k b_1^2 - b_1^k b_2^2\right)t^2}{(b_1-b_2)\prod_{a\in A}(1-ab_1t)\prod_{a\in A}(1-ab_2t)}.$$

Théorème 30 Soient $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b_1,b_2\}$ et $C=\{c_1,c_2\}$, trois alphabets alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\, S_{n+k-1}(B)\, S_{n+k-1}(C)\, t^n$$

$$= \frac{b_1^k b_2^k}{c_1-c_2} \times \frac{\begin{pmatrix} \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A)\, b_2^n c_1^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A)\, b_1^n c_1^n t^n\right)\sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A)\, S_{n-k-1}(B)\, c_2^{n+k} t^n \\ -\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A)\, b_2^n c_2^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A)\, b_1^n c_2^n t^n\right)\sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A)\, S_{n-k-1}(B)\, c_1^{n+k} t^n \end{pmatrix}}{\prod_{a\in A}(1-ac_1b_1t)\prod_{a\in A}(1-ac_1b_2t)\prod_{a\in A}(1-ac_2b_1t)\prod_{a\in A}(1-ac_2b_2t)}. \tag{4.2}$$

$\forall k\in\mathbb{N}$ et $k<n$.

Preuve. L'action de l'opérateur $\delta_{c_1c_2}^k \delta_{b_1b_2}^k$ sur la série $f(b_1c_1t)=\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\, b_1^n c_1^n t^n$ nous donne le membre gauche de la formule (4.2)

$$\begin{aligned}
\delta_{c_1c_2}^k \delta_{b_1b_2}^k f(b_1c_1t) &= \delta_{c_1c_2}^k \delta_{b_1b_2}^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\, b_1^n c_1^n t^n\right) \\
&= \delta_{c_1c_2}^k \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\, b_1^{n+k} c_1^n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\, b_2^{n+k} c_1^n t^n}{b_1-b_2}\right) \\
&= \delta_{c_1c_2}^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\, \frac{b_1^{n+k}-b_2^{n+k}}{b_1-b_2} c_1^n t^n\right) \\
&= \delta_{c_1c_2}^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\, S_{n+k-1}(B)\, c_1^n t^n\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{c_1^k \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A) S_{n+k-1}(B) c_1^n t^n - c_2^k \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A) S_{n+k-1}(B) c_2^n t^n}{c_1 - c_2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A) S_{n+k-1}(B) \frac{c_1^{n+k} - c_2^{n+k}}{(c_1 - c_2)} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A) S_{n+k-1}(B) S_{n+k-1}(C) t^n.
\end{aligned}
$$

Posons $f(b_1c_1t) = \frac{1}{\prod_{a\in A}(1-ab_1c_1t)}$, alors le deuxième membre de la formule (4.2) s'écrite

$$
\begin{aligned}
\delta_{c_1c_2}^k \delta_{b_1b_2}^k \ f(b_1c_1t) &= \delta_{c_1c_2}^k \delta_{b_1b_2}^k \left(\frac{1}{\prod_{a\in A}(1-ab_1c_1t)} \right) \\
&= \delta_{c_1c_2}^k \left(\frac{1}{b_1 - b_2} \left(\frac{b_1^k}{\prod_{a\in A}(1-ab_1c_1t)} - \frac{b_2^k}{\prod_{a\in A}(1-ab_2c_1t)} \right) \right) \\
&= \delta_{c_1c_2}^k \left(\frac{b_1^k \prod_{a\in A}(1-ab_2c_1t) - b_2^k \prod_{a\in A}(1-ab_1c_1t)}{(b_1 - b_2)\prod_{a\in A}(1-ab_1c_1t)\prod_{a\in A}(1-ab_2c_1t)} \right).
\end{aligned}
$$

D'après l'égalité $\sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A) b_1^n c_1^n t^n = \prod_{a\in A}(1-ab_1c_1t)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\delta_{c_1c_2}^k \delta_{b_1b_2}^k \ f(b_1c_1t) &= \delta_{c_1c_2}^k \left(\frac{b_1^k \sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A) b_2^n c_1^n t^n - b_2^k \sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A) b_1^n c_1^n t^n}{(b_1 - b_2)\prod_{a\in A}(1-ab_1c_1t)\prod_{a\in A}(1-ab_2c_1t)} \right) \\
&= \delta_{c_1c_2}^k \left(\frac{-b_1^k b_2^k \sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A) \frac{b_1^{n-k} - b_2^{n-k}}{b_1 - b_2} c_1^n t^n}{\prod_{a\in A}(1-ab_1c_1t)\prod_{a\in A}(1-ab_2c_1t)} \right)
\end{aligned}
$$

$$= \delta_{c_1c_2}^{k}\left(\frac{-b_1^k b_2^k \sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A)\, S_{n-k-1}(B)\, c_1^n t^n}{\prod_{a\in A}(1-ab_1c_1t)\prod_{a\in A}(1-ab_2c_1t)}\right)$$

$$= \frac{1}{c_1-c_2}\left(\frac{-c_1^k b_1^k b_2^k \sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A)\, S_{n-k-1}(B)\, c_1^n t^n}{\prod_{a\in A}(1-ab_1c_1t)\prod_{a\in A}(1-ab_2c_1t)}+\frac{c_2^k b_1^k b_2^k \sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A)\, S_{n-k-1}(B)\, c_2^n t^n}{\prod_{a\in A}(1-ab_1c_2t)\prod_{a\in A}(1-ab_2c_2t)}\right)$$

$$= \frac{b_1^k b_2^k}{c_1-c_2}\times\frac{\left(\begin{array}{c}\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A)\, b_2^n c_1^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A)\, b_1^n c_1^n t^n\right)\sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A)\, S_{n-k-1}(B)\, c_2^{n+k} t^n\\ -\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A)\, b_2^n c_2^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A)\, b_1^n c_2^n t^n\right)\sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A)\, S_{n-k-1}(B)\, c_1^{n+k} t^n\end{array}\right)}{\prod_{a\in A}(1-ac_1b_1t)\prod_{a\in A}(1-ac_1b_2t)\prod_{a\in A}(1-ac_2b_1t)\prod_{a\in A}(1-ac_2b_2t)}.$$

4.2 Applications

Dans cette section nous considérons la suite de Fibonacci avec les conditions initiales $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

4.2.1 Applications du théorème 29

Posons $k = 0, 1$ dans le théorème 29 on obtient les théorèmes suivants :

Théorème 31 [5, 14] *Etant donnés deux alphabets* $A = \{a_1, a_2\}$ et $B = \{b_1, b_2\}$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_1+a_2)\, S_{n-1}(b_1+b_2)\, t^n = \frac{(a_1+a_2)\,t - a_1a_2\,(b_1+b_2)\,t^2}{\prod_{a\in A}(1-ab_1t)\prod_{a\in A}(1-ab_2t)}. \tag{4.3}$$

Théorème 32 [5, 20] *Etant donnés deux alphabets* $A = \{a_1, a_2\}$ et $B = \{b_1, b_2\}$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_1+a_2)\, S_n(b_1+b_2)\, t^n = \frac{1-a_1a_2b_1b_2t^2}{\prod_{a\in A}(1-ab_1t)\prod_{a\in A}(1-ab_2t)}. \tag{4.4}$$

D'apès le théorème précédent on déduit la relation suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(a_1+a_2)\, S_{n-1}(b_1+b_2)\, t^n = \frac{t - a_1a_2b_1b_2t^3}{\prod_{a\in A}(1-ab_1t)\prod_{a\in A}(1-ab_2t)}. \tag{4.5}$$

En remplaçant a_2 par $(-a_2)$ et b_2 par $(-b_2)$, et posons $a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = 1$ et $a_1a_2 = b_1b_2 = 2$ dans les formules $(4.3), (4.4)$ et (4.5) on obtient, respectivement les fonctions génératrices suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_1+[-a_2])\, S_{n-1}(b_1+[-b_2])\, t^n = \frac{t+2t^2}{1-t-12t^2-4t^3+16t^4}, \tag{4.6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_1+[-a_2])\, S_n(b_1+[-b_2])\, t^n = \frac{1-4t^2}{1-t-12t^2-4t^3+16t^4}, \tag{4.7}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(a_1+[-a_2])\, S_{n-1}(b_1+[-b_2])\, t^n = \frac{t(1-4t^2)}{1-t-12t^2-4t^3+16t^4}. \tag{4.8}$$

En multipliant la relation (4.6) par 2 et la relation (4.8) par (-1), puis en additionnant les deux résultats, on obtient la proposition suivante.

Proposition 26 [5] $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice des nombres de Jacobsthal d'indice pair est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n} t^n = \frac{t}{1-5t+4t^2}. \tag{4.9}$$

Corollaire 15 $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$J_{2n} = S_{n-1}(b_1+[-b_2])\left(2S_n(a_1+[-a_2]) - S_{n-1}(a_1+[-a_2])\right).$$

En multipliant la relation (4.6) par 4 et en l'additionnant avec la relation (4.7) on obtient la fonction génératrice suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_1+[-a_2])\left(4S_{n-1}(b_1+[-b_2]) + S_n(b_1+[-b_2])\right) t^n = \frac{1}{1-5t+4t^2}. \tag{4.10}$$

En multipliant la relation (4.9) par (-5) et la relation (4.10) par 2, puis en additionnant les deux résultats, on obtient la proposition suivante.

Proposition 27 [5] $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice des nombres de Jacobsthal-Lucas d'indice pair est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} j_{2n} t^n = \frac{2-5t}{1-5t+4t^2}. \tag{4.11}$$

Corollaire 16 $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} j_{2n} &= 2S_n\left(a_1+[-a_2]\right) S_n\left(b_1+[-b_2]\right) - 2S_n\left(a_1+[-a_2]\right) S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right) \\ &\quad +5S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right) S_{n-1}(b_1+[-b_2]). \end{aligned}$$

En multipliant la relation (4.9) par 2 et en la soustrayant de la relation (4.10), on obtient la proposition suivante.

Proposition 28 [5] $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice des nombres de Jacobsthal d'indice impair est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1} t^n = \frac{1-2t}{1-5t+4t^2}\ . \tag{4.12}$$

Corollaire 17 $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$J_{2n+1} = S_n\left(a_1+[-a_2]\right) S_n\left(b_1+[-b_2]\right) + 2S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right) S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right).$$

En multipliant la relation (4.9) par 2 et en l'additionnant avec la relation (4.10), on obtient la proposition suivante.

Proposition 29 [5] $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice des nombres de Jacobsthal-Lucas d'indice impair est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} j_{2n+1} t^n = \frac{1+2t}{1-5t+4t^2}. \tag{4.13}$$

Corollaire 18 $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} j_{2n+1} &= S_n\left(a_1+[-a_2]\right) S_n\left(b_1+[-b_2]\right) + 8S_n\left(a_1+[-a_2]\right) S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right) \\ &\quad -2S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right) S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right). \end{aligned}$$

– En remplaçant a_2 par $(-a_2)$ et b_2 par $(-b_2)$, et posons $a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = 1$ et $a_1a_2 = 2$ et $b_1b_2 = 1$ dans les formules (4.3) et (4.5) on obtient les fonctions génératrices suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_1 + [-a_2]) S_{n-1}(b_1 + [-b_2]) t^n = \frac{t(1+2t)}{1 - t - 7t^2 - 2t^3 + 4t^4}, \tag{4.14}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(a_1 + [-a_2]) S_{n-1}(b_1 + [-b_2]) t^n = \frac{t(1-2t^2)}{1 - t - 7t^2 - 2t^3 + 4t^4}. \tag{4.15}$$

En multipliant la relation (4.14) par 2 et la relation (4.15) par (-1), puis en additionnant les deux résultats, on obtient la proposition suivante.

Proposition 30 [5] $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des nombres de Jacobsthal-Lucas et les nombres de Fibonacci est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n j_n t^n = \frac{t(1+4t+2t^2)}{1 - t - 7t^2 - 2t^3 + 4t^4}.$$

Corollaire 19 $\forall\ n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$F_n j_n = S_{n-1}(b_1 + [-b_2]) \left(2S_n(a_1 + [-a_2]) - S_{n-1}(a_1 + [-a_2])\right).$$

En remplaçant a_2 par $(-a_2)$ et b_2 par $(-b_2)$, et posons $a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = 1$ et $a_1a_2 = 1$ et $b_1b_2 = 2$ dans (4.3) et (4.5) on obtient, respectivement les fonctions génératrices suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_1 + [-a_2]) S_{n-1}(b_1 + [-b_2]) t^n = \frac{t(1+t)}{1 - t - 7t^2 - 2t^3 + 4t^4}, \tag{4.16}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(a_1 + [-a_2]) S_{n-1}(b_1 + [-b_2]) t^n = \frac{t(1-2t^2)}{1 - t - 7t^2 - 2t^3 + 4t^4}. \tag{4.17}$$

En multipliant la relation (4.16) par 2 et la relation (4.17) par (-1), puis en additionnant les deux résultats, on obtient la proposition suivante.

Proposition 31 [5] $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des nombres de Jacobsthal et les nombres de Lucas est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n L_n t^n = \frac{t\left(1+2t+2t^2\right)}{1-t-7t^2-2t^3+4t^4}.$$

Corollaire 20 $\forall\ n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$J_n L_n = S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right)\left(2S_n\left(a_1+[-a_2]\right) - S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right).$$

En remplaçant a_2 par $(-a_2)$ et b_2 par $(-b_2)$, et posons $a_1 - a_2 = 1$, $b_1 - b_2 = 2$ et $a_1 a_2 = 2$ et $b_1 b_2 = 1$ dans (4.3) et (4.5) on obtient, respectivement, les fonctions génératrices suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(a_1+[-a_2]\right) S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right) t^n = \frac{t\left(1+4t\right)}{\left(1+2t-t^2\right)\left(1-4t-4t^2\right)}, \tag{4.18}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right) S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right) t^n = \frac{t\left(1-2t^2\right)}{\left(1+2t-t^2\right)\left(1-4t-4t^2\right)}. \tag{4.19}$$

En multipliant la relation (4.18) par 2 et la relation (4.19) par (-1), puis en additionnant les deux résultats, on obtient la proposition suivante.

Proposition 32 [5] $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des nombres de Jacobsthal-Lucas et les nombres de Pell est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} j_n P_n t^n = \frac{t\left(1+8t+2t^2\right)}{\left(1+2t-t^2\right)\left(1-4t-4t^2\right)}.$$

Corollaire 21 $\forall\ n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$j_n P_n = S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right)\left(2S_n\left(a_1+[-a_2]\right) - S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right).$$

4.2.2 Applications du théorème 30

Posons $k = 1$ dans le théorème 30 on obtient la proposition suivante.

Proposition 33 (*Théorème* [5]) *Etant donnés trois alphabets* $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$ *et* $C = \{c_1, c_2\}$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(a_1+a_2\right) S_n\left(b_1+b_2\right) S_n\left(c_1+c_2\right) t^n = \frac{N}{D}, \tag{4.20}$$

avec

$$\begin{aligned}
N &= 1-(a_1a_2c_1c_2\left(b_1+b_2\right)^2+a_1a_2b_1b_2\left(c_1+c_2\right)^2+b_1b_2c_1c_2\left(a_1+a_2\right)^2 \\
&\quad -3b_1b_2a_1a_2c_1c_2)t^2+2b_1b_2a_1a_2c_1c_2\left(a_1+a_2\right)\left(c_1+c_2\right)\left(b_1+b_2\right)t^3 \\
&\quad -(b_1b_2a_1^2a_2^2c_1^2c_2^2\left(b_1+b_2\right)^2+c_1c_2a_1^2a_2^2b_1^2b_2^2\left(c_1+c_2\right)^2+a_1a_2c_1^2c_2^2b_1^2b_2^2 \\
&\quad \left(a_1+a_2\right)^2-3a_1^2a_2^2b_1^2b_2^2c_1^2c_2^2)t^4+a_1^3a_2^3c_1^3c_2^3p_1^3p_2^3t^6.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= 1-\left(a_1+a_2\right)\left(c_1+c_2\right)\left(b_1+b_2\right)\ t+(\ b_1b_2\left(a_1+a_2\right)^2\left(c_1+c_2\right)^2 \\
&\quad +(\left(b_1+b_2\right)^2-2b_1b_2)(\left(a_1+a_2\right)^2c_1c_2-2a_1a_2c_1c_2+a_1a_2\left(c_1+c_2\right)^2))\ t^2 \\
&\quad -\left(a_1+a_2\right)\left(c_1+c_2\right)\left(b_1+b_2\right)(\ b_1b_2c_1c_2\left(a_1+a_2\right)^2+b_1b_2a_1a_2\left(c_1+c_2\right)^2 \\
&\quad +a_1a_2c_1c_2\left(b_1+b_2\right)^2-5b_1b_2a_1a_2c_1c_2)t^3+(a_1^2a_2^2c_1^2c_2^2\left(b_1+b_2\right)^4+c_1^2c_2^2 \\
&\quad b_1^2b_2^2\left(a_1+a_2\right)^4+a_1^2a_2^2b_1^2b_2^2\left(c_1+c_2\right)^4-a_1a_2c_1c_2b_1b_2(4c_1c_2b_1b_2\left(a_1+a_2\right)^2 \\
&\quad +4a_1a_2c_1c_2\left(b_1+b_2\right)^2+4a_1a_2b_1b_2\left(c_1+c_2\right)^2-\left(a_1+a_2\right)^2\left(b_1+b_2\right)^2 \\
&\quad \left(c_1+c_2\right)^2)+6a_1^2a_2^2c_1^2c_2^2b_1^2b_2^2)\ t^4-a_1a_2c_1c_2b_1b_2\left(a_1+a_2\right)\left(c_1+c_2\right)\left(b_1+b_2\right) \\
&\quad (a_1a_2c_1c_2\left(b_1+b_2\right)^2+c_1c_2b_1b_2\left(a_1+a_2\right)^2+b_1b_2a_1a_2\left(c_1+c_2\right)^2-5a_1a_2 \\
&\quad c_1c_2b_1b_2)t^5+(a_1^2a_2^2c_1^2c_2^2b_{12}^{33}\left(a_1+a_2\right)^2\left(c_1+c_2\right)^2+a_1^2a_2^2c_1^2c_2^2b_1^2b_2^2(\left(b_1+b_2\right)^2 \\
&\quad -2b_1b_2)(\left(a_1+a_2\right)^2c_1c_2-2a_1a_2c_1c_2+a_1a_2\left(c_1+c_2\right)^2))\ t^6-b_1^3b_2^3a_1^3a_2^3c_1^3c_2^3 \\
&\quad \left(a_1+a_2\right)\left(c_1+c_2\right)\left(b_1+b_2\right)\ t^7+b_1^4b_2^4a_1^4a_2^4c_1^4c_2^4t^8.
\end{aligned}$$

D'après la relation (4.20) on obtient la relation suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_{n-1}\left(a_1+a_2\right)S_{n-1}\left(b_1+b_2\right)S_{n-1}\left(c_1+c_2\right)z^n=\frac{N_1}{D}, \tag{4.21}$$

avec

$$\begin{aligned}
N_1 &= t-(a_1a_2c_1c_2\left(b_1+b_2\right)^2+a_1a_2b_1b_2\left(c_1+c_2\right)^2+b_1b_2c_1c_2\left(a_1+a_2\right)^2 \\
&\quad -3b_1b_2a_1a_2c_1c_2)t^3+2b_1b_2a_1a_2c_1c_2\left(a_1+a_2\right)\left(c_1+c_2\right)\left(b_1+b_2\right)t^4
\end{aligned}$$

$$-(b_1b_2a_1^2a_2^2c_1^2c_2^2\left(b_1+b_2\right)^2+c_1c_2a_1^2a_2^2b_1^2b_2^2\left(c_1+c_2\right)^2+a_1a_2c_1^2c_2^2b_1^2b_2^2\left(a_1+a_2\right)^2$$
$$-3a_1^2a_2^2b_1^2b_2^2c_1^2c_2^2)t^5+a_1^3a_2^3c_1^3c_2^3b_1^3b_2^3t^7.$$

En remplaçant a_2 par $(-a_2)$, b_2 par $(-b_2)$ et c_2 par $(-c_2)$ et posons $\alpha=a_1-a_2$, $\beta=b_1-b_2$, $\gamma=c_1-c_2$, $\lambda=a_1a_2$, $\sigma=b_1b_2$ et $\omega=c_1c_2$ dans (4.21) on obtient le tableau suivant [5] :

α	β	γ	λ	σ	ω	Coefficients de t^n	Fonctions symétriques
1	1	1	1	1	1	F_n^3	$S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right)S_{n-1}\left(c_1+[-c_2]\right)$
2	2	2	1	1	1	P_n^3	$S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right)S_{n-1}\left(c_1+[-c_2]\right)$
1	1	1	2	2	2	J_n^3	$S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right)S_{n-1}\left(c_1+[-c_2]\right)$
1	1	2	1	1	1	$F_n^2P_n$	$S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right)S_{n-1}\left(c_1+[-c_2]\right)$
1	1	1	1	1	2	$F_n^2J_n$	$S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right)S_{n-1}\left(c_1+[-c_2]\right)$
1	2	2	1	1	1	$P_n^2F_n$	$S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right)S_{n-1}\left(c_1+[-c_2]\right)$
1	1	1	1	2	2	$J_n^2F_n$	$S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right)S_{n-1}\left(c_1+[-c_2]\right)$
2	2	1	1	1	2	$P_n^2J_n$	$S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right)S_{n-1}\left(c_1+[-c_2]\right)$
1	2	2	2	1	1	$J_n^2P_n$	$S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right)S_{n-1}\left(c_1+[-c_2]\right)$

Table 10 : Fonctions symétriques des puissances de certains nombres.

4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé des nouveaux théorèmes afin de déterminer les fonctions génératrices des nombres de Jacobsthal et Jacobsthal-Lucas d'indice pair et impair ainsi que les fonctions génératrices des puissances des nombres de Fibonacci, Pell et Jacobsthal.

Conclusion et perspectives

Les fonctions symétriques se situent dans le domaine du combinatoire algébriques où la motivation principale et le calcul de certaines identités issues des mathématiques discrètes ou de la physique, à l'aide des objets combinatoires. Dans cette thèse, nous avons déterminé les fonctions génératrices ordinaires des produits de certains nombres et polynômes orthogonaux. En utilisant le concept des fonctions symétriques. Principalement nous avons obtenu des résultats intéressants concernant les fonctions génératrices ordinaires. Comme premier résultat, nous avons déterminé les fonctions génératrices des produits des nombres de k-Fibonacci, k-Pell, k-Jacobsthal, k-Lucas, k-Jacobsthal-Lucas, Jacobsthal de troisième ordre, Narayana, Padovan et les polynômes de Chebyshev . Comme deuxième résultat nous avons obtenu les fonctions génératrices des cubes des nombres de k-Fibonacci, k-Pell ainsi que le produit des polynômes de Chebyshev de première et de deuxième espèces. Le dernier résultat de cette thèse est concernant sur les fonctions génératrices des puissances des nombres de Fibonacci, Pell et Jacobsthal.

Parmi les questions et les travaux qui peuvent présenter des perspectives et qu'on souhaite les aborder pour l'avenir on y trouve

- Les fonctions génératrices ordinaires des nombres hyperfibonacci $F_n^{[r]}$ et les nombres hyperlucas $L_n^{[r]}$.

- Les fonctions génératrices ordinaires des polynômes d-orthogonaux de type Chebyshev.

- Les fonctions génératrices exponentielles des polynômes d-orthogonaux de type Hermite.

- Les fonctions génératrices exponentielles des certains nombres et polynômes orthogonaux. Par exemple : Les nombres de Genocchi G_n et les polynômes de Bernoulli B_n.

Bibliographie

[1] A. Abderrezzak, Généralisation de la Transformation d'Euler d'une Série Formelle, *Adv. Math.* 103, 180-195, 1994.

[2] A. Abderrezzak, Généralisation d'identités de Carlitz, Howard et Lehmer, *Aequationes math.* 49, 36-46, 1995.

[3] A. Abderrezzak, M. Kerada, A. Boussayoud, Generalization of Some Hadamard Product, *Commun. Appl. Anal.* 20, 301-306, 2016.

[4] G. Bilgici, New Generalizations of Fibonacci and Lucas Sequences, *Applied Mathematical Sciences.* 8, 29, 1429 - 1437, 2014.

[5] Kh. Boubellouta, A. Boussayoud, M. Kerada, Symmetric Functions for Second-order Recurrence Sequence. *Tbilisi mathematical journal.* 13 (2), 225-237, 2020.

[6] Kh. Boubellouta, A. Boussayoud, M. Kerada, Symmetric Functions for k-Fibonacci Numbers and Orthogonal Polynomials, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory.* 6 (3), 98-102, 2018.

[7] Kh. Boubellouta, A. Boussayoud, Some Identities and Generating Function of Third-Order Recurrence Relations, *Italian Journal of Pure and applied mathematic.* 44 (1), In press, October 2020.

[8] Kh. Boubellouta, A. Boussayoud, S. Araci, M. Kerada, Some Theorems On Generating Functions and Their Applications, *Advanced studies in contemporary mathematics.* 30 (3), 307 - 324, 2020.

[9] Kh. Boubellouta, M. Kerada, Some Identities and Generating Functions for Padovan Numbers, *Tamap Journal of Mathematics and Statistics.* 3 (1), 1-8, 2019.

[10] F. Boucekkine, Du Triangle de Pascal aux S'éries Formelles, http ://dma.ens.fr/culturemath.

[11] S. Boughaba , A. Boussayoud , On Some Identities And Generating Function of Both k-Jacobsthal Numbers and Symmetric Functions in Several Variables, *Konuralp Journal of Mathematics*. 7(2), 235-242, 2019.

[12] S. Boughaba , A. Boussayoud, M. Kerada , Construction of Symmetric Functions of Generalized Fibonacci Numbers, *Tamap Journal of Mathematics and Statistics*. 3, 1-7, 2019.

[13] A. Boussayoud, On Some Identities and Generating Functions for Pell-Lucas Numbers, *Online J. Anal. Comb.* 12, 1-10, 2017.

[14] A. Boussayoud, A. Abderrezzak, M. Kerada, Some Applications of Symmetric Functions, *Integers.* 15, A#48, 1–7, 2015.

[15] A. Boussayoud, A. Abderrezzak, S. Araci, A New Symmetric Endomorphism Operator for Some Generalizations of Certain Generating Functions, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*. 24 (4), 45–58, 2018.

[16] A. Boussayoud, A. Abderrezzak, P.B. Zhang , Symmetric Functions for Families of Generating Functions, *Neural, Parallel and Scientific Computations*. 26, 53-64, 2018.

[17] A. Boussayoud, L'action de l'opérateur $\delta_{e_1 e_2}^{k}$ sur la Série $\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A) e_1^n z^n$, (Doctoral dissertation), *Mohamed Seddik Ben Yahia University, Jijel, Algeria.*, 2017.

[18] A. Boussayoud, M. Kerada, A. Abderrezzak, A Generalization of Some Orthogonal Polynomials, Springer Proc. Math. Stat. 41, 229-235, 2013.

[19] A. Boussayoud, M. Kerada, Symmetric and Generating Functions, *Int. Electron. J. Pure Appl. Math.* 7, 195–203, 2014.

[20] A. Boussayoud, M. Kerada, R. Sahali , W. Rouibah, Some Applications on Generating Functions, *J. Concr. Appl. Math.* 12, 321-330, 2014.

[21] A. Boussayoud, M. Kerada, R. Sahali, Symmetrizing Operations on Some Orthogonal Polynomails, *Int. Electron J Pure Appl Math.* 9, 191-199, 2015.

[22] A. Boussayoud, M. Kerada and Nesrine Harrouche, On the k -Lucas Numbers and Lucas Polynomials, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory.* 5 (4), 121-125, 2017.

[23] A. Boussayoud, M. Boulyer, M. Kerada, A Simple and Accurate Method for Determination of Some Generalized Sequence of Numbers, *Int. J. Pure Appl. Math.* 108, 503-511, 2016.

[24] A. Boussayoud and N. Harrouche, Complete Symmetric Functions and k- Fibonacci Numbers, *Communications in Applied Analysis.* 20, 457-465, 2016.

[25] A. Boussayoud, S. Boughaba, M. Kerada, S. Araci, M.Acikgoz, Symmetric Functions of Binary Products of k-Fibonacci and Orthogonal Polynomials, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas.* 113 (3), 2575-2586, 2019.

[26] C. K. Caldwell, T. Komatsu, "Some Periodicities in the Continued Fraction Expansions of Fibonacci and Lucas Dirichlet series". *The Fibonacci, Quarterly.* 48 (1), 47-55, 2010.

[27] H. Campos, P. Catarino, A. P. Aires, P. Vasco and A. Borges, On Some Identities of k-Jacobsthal-Lucas Numbers, *Int. Journal of Math. Analysis.* 8 (10), 489 - 494, 2014.

[28] P. Catarino, On Some Identities and Generating Functions for k- Pell Numbers, *Int. Journal of Math. Analysis.* 7(38), 2013, 1877 - 1884.

[29] P. Catarino, On Some Identities for k-Fibonacci Sequence, *Int. J. Contemp. Math. Sciences.* 9 (1), 37 - 42, 2014.

[30] P. Catarino and H. Campos, Incomplete k-Pell, k-Pell-Lucas and modi ed k-Pell numbers, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 46 (3), 361 372, 2017.

[31] P. Catarino, P. Vasco, On Some Identities and Generating Functions for k-Pell-Lucas Sequence, *Applied Mathematical Sciences.* 7 (98), 4867 - 4873, 2013.

[32] M. Chelgham, A. Boussayoud, Construction of Symmetric Functions of Generalized Tribonacci Numbers, *Journal of Science and Arts.* 50, 65-74, 2020.

[33] T. S Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomails, *Gordon and Breach*, *Science Publishers*, Inc. 1978.

[34] Ch. Cook, M.R. Bacon, Some Identities for Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Numbers Satisfying higher Order Recurrence Relations, *Ann. Math. Inform.* 41, 27-39. 2013.

[35] G. B. Djordjević, G. V. Milovanović, Special Classes of Polynomials, *University of Niš, Faculty of Technology Leskovac*, 2014.

[36] S. Falcon, On the Lucas Triangle and its Relationship with the $k-$Lucas Numbers , *J. Math. Comput. Sci.* 2 (3), 425-434, 2012.

[37] S. Falcon, On The Generating Functions of the Powers of the k-Fibonacci Numbers, *Sch. J. Eng. Tech.* 2 (4C) : 669-675, 2014

[38] S. Falcon, On the Complex k-Fibonacci Numbers, *Cogent Math.* 3, 1-9, 2016.

[39] S. Falcon. A. Plaza, On the Fibonacci k–numbers. *Chaos. Solit. &Fract.* 32 (5) 1615–624, 2007.

[40] S. Fiorini, MATH-F-307 Mathématiques discrètes. Version 2012.

[41] D. Foata, G.N. Han, Nombres de Fibonacci et Polynômes Orthogonaux, *Leonardo Fibonacci : Il Tempo, Le Opere, L'eredit a Scienti fica, p.* 179–200, 1994

[42] D. Foata et G. Han, Principes de Combinatoire Classing, *Université Louis Pasteur, Strasbourg Département de mathématiques*, 2008.

[43] V. E. Hoggatt, Fibonacci and Lucas Numbers. A Publication of the Fibonacci Association. *University of Santa Clara, Santa Clara. Houghton Mifflin Company.* 1969.

[44] R. Honsberger, "Mathematical germs III ", *Mathematical Association of America,Washington*, DC. 1985.

[45] A. F. Horadam, Associated Sequences of General Order, *Fibonacci Q.* 31, 166–172, 1993.

[46] D. Jhala, K. Sisodiya and G. P. S. Rathore, On Some Identities for k-Jacobsthal Numbers, *Int. Journal of Math. Analysis.* 7 (12), 551 - 556, 2013.

[47] D. Kalman, Generalized Fibonacci numbers by matrix methods, Fib. Quart. 20(1), 73–76, 1982.

[48] E. Karaduman, An application of Fibonacci numbers in matrices, *Appl. Math. and Comp.* 147, 903–908, 2003.

[49] M. Kerada, A. Boussayoud, A. Abderrezzak, Generalization of some hypergeometric functions, *Indag. Maths.* 28, 711-720, 2017.

[50] E. Kiliç, Y. T. Ulutaş and N. Ömür, A Formula for the Generating Functions of Powers of Horadam's Sequence with Two Additional Parameters, *Journal of Integer Sequences*, 14, 2011.

[51] T. Kim, D. S. Kim, D. V. Dolgy and J. Kwon, Sums of Finite Products of Chebyshev Polynomials of the Third and Fourth kinds, Kim et al. *Advances in Difference Equations.* 2018.

[52] A. Lascoux, Additions of ± 1 : Application to Arithmetic, *Séminaire lotharingien de Combinatoire.* 52, 2004.

[53] A. Lascoux, Symmetric Functions and Combinatorial Operators on Polynomials, CNRS, Institut Gaspard Monge, Université de Marne-la-Vallée77454 Marne-la-Vallée Cedex, France.

[54] A. C. G. Lomelí and S. H. Hernández, Repdigits as Sums of Two Padovan Numbers, *Journal of Integer Sequences.* 22, 2019.

[55] I.G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomias, *Oxford University Press.* 1979.

[56] L. Manivel, Cours Spécialisés , Fonctions Symétriques, Polynomes de Schuet et Lieux de Dégcnérexence, N3, Société Mathématiques de France, 1998.

[57] D. Marques, The Order of Appearance of the Product of Consecutive Lucas Numbers, *the Fibonacci Quarterly.* 51 (1), 38-43, 2013.

[58] M. Merca, A Generalization of the Symmetry Between Complete and Elementary Symmetric Functions, *Indian J.Pure Appl. Math.* 45, 75-89, 2014.

[59] I. Mező, Several Generating Functions for Second-Order Recurrence Sequences, *J. Integer Seq.* 12, 1-16, 2009.

[60] G. Morales, On the Third-order Jacobsthal and Third-order Jacobsthal-Lucas Sequences and Their matrix Representations, Jun 2018.

[61] A. Necer, Séries formelles et produit de Hadamard, *Journal de Théorie des Nombres Bordeaux*, 9, 319-335, 1997.

[62] Y. K. Panwar, B. Singh and V. K. Gupta, Generalized Fibonacci Sequences and its Properties, *Palestine Journal of Mathematics.* 3(1), 141–147, 2014.

[63] J.L. Ramírez, V. F. Sirvent, A Note on the k-Narayana Sequences, *Ann. Math. Inform.* 45, 91-105, 2015.

[64] J. Riordan, Generating Functions for Powers of Fibonacci Numbers, *Duke Math.* J. 29, 5-12, 1962.

[65] K. H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications, *Monmouth University (and formerly AT&T Laboratories*).

[66] M. Shattuck, Combinatorial Proofs of Determinant Formulas for the Fibonacci and Lucas Polynomials, *the Fibonacci Quarterly.* 51 (1), 63-71, 2013.

[67] Y. Soykan, On Generalized Narayana Numbers, *International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics*. 7(3) (2020) 43 – 56 (ISSN : 2347-2529).

[68] Y. Soykan, I. Okumus, F. Tasdemir, On Generalized Tribonacci Sedenions, https ://arxiv.org/pdf/1901.05312.pdf, 2019.

[69] Y. Taşyurdu, A. Akpinar, Padovan and Pell-Padovan Octonions, *Turk. J. Math. Comput. Sci.11* (Special Issue), 114–122, 2019.

[70] M. Toufik, A Formula for the Generating Functions of Powers of Horadam's Sequence, *Australas. J. Comb*. 30, 207–212, 2004.

[71] S. Vajda, "Fibonacci & Lucas Numbers and the Golden Section." *Theory and*, *Applications Ellis Horwood Limited*. 1989.

[72] N. N. Vorobiov, Números de Fibonacci, *Editora MIR, URSS*. 1974.

[73] X. Wang, X. Zhao and H. Yao, Optimal cube factors of Fibonacci and matchable Lucas cubes, *College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University*, Lanzhou 730070, PR China.

[74] N. Yilmaz, N. Taskara, On the Negatively Subscriped Padovan and Perrin Matrix Sequences, *Communications in Mathematics and Applications*. 5 (2), 59-72, 2014.

Résumé

Dans cette thèse nous proposons des nouveaux théorèmes afin de déterminer des fonctions génératrices de certains nombres et polynômes orthogonaux. Les théorèmes proposés sont basés sur les fonctions symétriques où l'utilisation d'opérateur symétrique $\delta_{b_1b_2}^{k}\delta_{a_1a_2}^{k}$ sur la série inversible $\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A) b_1^n c_1^n z^n$ nous permet d'obtenir les fonctions génératrices des puissances des nombres de k-Fibonacci, k-Pell, k-Jacobsthal et les fonctions génératrices des produits des nombres de k-Fibonacci, k-Pell et les polynômes de Chebyshev de premier et de deuxième espèce .

Abstract

In this thesis we propose new theorems in order to determine generating functions of some numbers and orthogonal polynomials. The proposed theorems are based on the symmetric functions where by making use the symmetrizing operator $\delta_{b_1b_2}^{k}\delta_{a_1a_2}^{k}$ on the series $\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A) b_1^n c_1^n z^n$ we gived the generating functions for the powers of k-Fibonacci numbers, k-Pell numbers, k-Jacobsthal numbers and the generating functions of the products of k-Fibonacci numbers, k-Pell numbers and Chebyshev polynomials of the first and the second kind.

الملخص

في هذه الأطروحة قمنا باقتراح نظريات جديدة تعتمد على التوابع التناظرية وذلك لحساب الدوال المولدة لبعض الأعداد وكثيرات الحدود المتعامدة. حيث أن استعمال المؤثر التناظري $\delta_{b_1b_2}^{k}\delta_{a_1a_2}^{k}$ على السلسلة القابلة للقلب $\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A) b_1^n c_1^n z^n$ يسمح لنا بحساب الدوال المولدة لقوى أعداد k - فيبوناتشي، k- بال، k-جاكوبستال والدوال المولدة لجداءات أعداد k-فيبوناشي، k-بال وكثيرات حدود تشيبيتشاف من النوع الأول والثاني.