Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifiques
UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre : ....
Série : ....

MEMOIRE

présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité Mathématiques
Option : Equations Différentielles

THEME

Contribution à l'étude de quelques problèmes d'évolutions

Par
Habiba Meskine

Soutenue le ....

Devant le Jury:

Président:	M. Denche	Prof.	Université de Constantine
Rapporteur:	M. Yarou	MC	Université de Jijel
Examinateurs :	A. Aibeche	Prof.	Université de Setif
	D.Azzam-Laouir	MC.	Université de Jijel
	T. Zerzaihi	MC.	Université de Jijel

REMERCIEMENTS

C'est grâce à Dieu, que j'ai réussi, enfin, après une année de persévérance, à terminer ce travail et cueillir les fruits de plusieurs années d'étude.

En cette occasion, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Mr M.F.Yarou qui a bien voulu encadrer ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent également à. A. Deneche qui a bien voulu présider ce travail, Mme D. Azzam-laouir, et Messieurs A. Aibeche et T. Zerzaihi qui ont bien accepter de juger ce mémoire.

Enfin, je remercie vivement tous les enseignants du département de mathématique de l'université de Jijel ainsi que tous mes amis.

H.MESKINE

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale:

Les inclusions différentielles représentent un sujet de plus en plus abordé ces dernières années. En effet, plusieurs problèmes de physiques et d'économie aboutissent à des inclusions différentielles, plus précisément ceux liés à la théorie des systèmes dynamiques et élastoplastiques, de contrôle optimal ainsi que les planning en économétrie.Une inclusion différentielle du premier ordre se présente dans le cas autonome sous la forme générale:

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) \text{ p.p sur } [0.T],\ x(0) = x_0 \in E \tag{1.1}$$

où le second membre F une multifonction d'un espace E à valeurs dans les parties de E. Lorsque F est à valeurs convexes, ce problème a été largement étudié. Le cas non convexe requiert des argument forts (de compacité ou autres) pour remplacer la convexité. Une méthode de résolution consiste à supposer la multifonction cycliquement monotone c'est à dire à valeurs contenues dans le sous-différentiel ∂V d'une fonction convexe $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Le premier résultat est du à Bressan, Cellina et Colombo[13]. En utilisant les mêmes techniques de, F.Ancona et G.Colombo [5], ont étendu le résultat précédent à l'inclusion différentielle

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) + f(t, x(t)) \quad \text{p.p sur } [0.T],\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

Avec f une fonction (univoque) de carathéodory. D'autres généralisations de ce résultat ont été obtenues par Benabdellah [7] en prenant F semi-continue supérieurement à valeurs contenues dans le gradient généralisé (au sens de Clarke) ∂V d'une fonction localement lipschitzienne régulière $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et Bounkhel [10] a utilisé une notion de fonctions localement lipschitziennes uniformément régulières. D'autre part, le même problème mais avec retard suscite beaucoup d'interêt : c'est une généralisation des résultats précédents et cela modélise un certain nombre de situations en dynamique des populations, en économétrie, contrôle optimale et autres.On peut citer V. Lupulescu [27], B. Benchohra et Notouyas [6] et A.Fryszokwski [20] qui ont étudiés l'inclusion (1.1) avec retard.

Les inclusions différentielles du second ordre (autonome) s'ecrivent sous la forme

$$\ddot{x}(t) \in F(x(t), \dot{x}(t)) \ \ p.p.sur \ \ [0.T], \ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \ \dot{x}(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \tag{1.3}$$

et

$$\ddot{x}(t) \in F(x(t), \dot{x}(t)) \ + f(t, x(t), \dot{x}(t)) \ \text{ p.p sur } \ [0.T], \ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \dot{x}(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \tag{1.4}$$

Où F une multifonction semi-continue supérieurement à valeurs compactes non convexes de $\mathbb{R}^n$. V. Lupulescu [25], S. Amine, R. Morchadi and S. Sajid [3] ont étudié le problème en supposant F à valeurs contenues dans le sous-différentiel ∂V d'une fonction semi-continue inférieurement convexe propre; Haddad and Yarou [24], ont obtenu un résultat d'existence de solution pour l'inclusion différentielle (1.4)avec F est semi-continue supérieurement à valeurs contenues dans le sous-différentiel ∂V d'une fonction uniformément régulière localement Lipschitzienne.

Les inclusions différentielles avec (ou sans retard) sont étroitement liés à la viabilité ie: le problème avec une contrainte du type $x(t) \in K(x(t))$. Le problème du premier ordre s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) \text{ p.p sur } [0.T] \\ x(t) \in K, \ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.5}$$

Et on est amené à supposer une hypothèse dite condition tangentielle de la forme

$$\lim_{h \to 0^+} \inf \frac{1}{h} d(x_0 + hv, K) = 0$$

K un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$,où F une multifonction semi-continue supérieurement à valeurs compactes non convexes de $\mathbb{R}^n$. Plusieurs résultats onr été obtenus : A. Cernea [16] , R. Morchadi and S. Sajid [32], M. Aitaliobrahim et S. Sajid [34]. V. Lupulescu [30] , M. Bounkhel [10], M. Bounkhel and T. Haddad [11].

Ce mémoire se compose de quatre chapitres.

Le chapitre 1 contient des résultats de bases et les outils qui seront utilisés dans toute la suite, tels la notion de continuité et de régularité des fonctions et des multifonctions, les définitions et les propriétés des fonctions et des ensembles prox-régulières, uniformément prox-régulières, des théorèmes de compacité, les problèmes avec retard.

Dans le second chapitre, on étudie une inclusion différentielle avec retard du premier ordre de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(\mathcal{T}(t)x) \text{ p.p sur } [0,T] \\ \mathcal{T}(0)x(s) = \varphi(s) \ \forall s \in [-\sigma,0] \end{cases} \tag{1.6}$$

Dans la deuxième section de ce chapitre, nous donnons un résultat d'existence pour une inclusion différentielle avec retard du premier ordre avec perturbation ((univoque) de carathéodory de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(\mathcal{T}(t)x) \ + f(t,x(t)) \text{ p.p sur } [0,T] \\ \mathcal{T}(0)x(s) = \varphi(s) \ \forall s \in [-\sigma,0] \end{cases} \tag{1.7}$$

Dans le chapitre 3, on présente quelques résultats d'existence de solutions absolument continues pour le (1.4)

avec retard, dans la deuxième partie de ce chapitre on établira un résultat d'existence de solutions pour le problème

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) \in F(\mathcal{T}(t)x,\dot{x}(t)) \ + f(t,x(t),\dot{x}(t)) \qquad \text{p.p sur } [0,T] \\ \mathcal{T}(0)x(s) = \varphi(s) \quad \forall s \in [-\sigma,0],\, y_0 = y(0) = \dot{x}(0) \end{cases} \tag{1.8}$$

Via une méthode de discrétisation, F s.c.s à valeurs contenues dans le gradient généralisé (au sens de Clarke) ∂V d'une fonction localement lipschitzienne régulière V : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Dans le chapitre 4 on présente un résultat d'existence de solution viable pour le problème du premier ordre sans retard de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) \text{ p.p sur } [0,T] \\ x(t) \in K \text{ pour tout } t \in [0,T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.9}$$

Chapitre 2

Concepts de base et résultats préliminaires

2.1 Introduction:

Dans ce chapitre, nous rappelons des notations de base, quelques résultats fondamentaux sur la continuité des fonctions et multifonctions, des théorèmes de la compacité et de convergence. Une grande partie de ce chapitre est consacrée aux définitions des fonctions localement lipschitizennes régulières et de sous différentiabilité. Dans un but de clarté, on a jugé de démontrer certains résultats concernant les nouveaux concepts et l'analyse multivoque en général.

2.2 Notations

Soient E un espace de Banach, E' son dual topologique; $\langle .,. \rangle$ leur produit de dualité, et $\|.\|$ la norme de E.

On note par

- $\overline{\mathbb{B}}_E$ ou $\overline{\mathbb{B}}_E\,(0,1)$ la boule unité fermée de E.
- $f\,(E)$ (respectivement $cf\,(E)$, $ck\,(E)$ et $cwk\,(E)$) l'ensemble des parties non vides fermées (respectivement fermées convexes, convexes compactes, convexes faiblement compactes) de E
- $\sigma\,(E,E')$ la topologie faible sur E et E_σ l'espace de Banach E muni de la topologie faible.
- $\mathcal{L}\,(I)$ la tribu de le Lebesgue sur $I := [0,T]\,, T > 0$.
- $\mathcal{B}\,(E)$ la tribu de Borel, la plus petite tribu contenant la topologie de E .

- μ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}$ telle que $\mu(\{t\}) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- $L^1_E[E]$ l'espace des (classes) applications μ scalairement μ mesurables de I Dans E'
- $L^\infty_{E'}([E], I, \mu)$ (ou plus brièvement $L^\infty_{E'}[E]$ s'il n'y a pas de risque de confusion sur I Et μ) l'espace des classes d'applications $\mu : I \to E'$ scalairement μ mesurables et telles que $[t \in I \to \|u(t)\|_{E'}]$ appartient à $L^\infty_{\mathbb{R}}[I,\mu]$.
- Si $f : I \longrightarrow E$ est une fonction à variation bornée sur I, la limite à droite $f^+(t)$ (resp .à gauche $f^-(t)$ de f en t
  Il existe pour tout point $t \in [0,T[$ (resp . $t \in]0,T]$) on note par Df, la mesure différentielle de f, i.e la mesure définie sur $\mathcal{B}(I)$ vérifiant :

$$\forall [a,b] \subset I,\ Df([a,b]) = f^+(b) - f^-(a)$$

- S est un sous ensemble de E alors $\overline{S}$ est la fermeture de S.
- $co\ S$ l'enveloppe convexe de S.
- Si S un sous ensemble de E, Ψ_S ou $\delta(.,S)$ représente la fonction indicatrice de S, i.e.

$$\left\{ \Psi_S(x) = \begin{array}{ll} 0 \text{ si } x \in S; \\ +\infty \text{ ailleurs} \end{array} \right\}$$

- $\sigma(S,.)$ ou $\delta^*(.,S)$ est la fonction support de S, ou bien la fonction polaire de Ψ_S, De $\delta(.,S)$

$$\sigma(S,p) = \sup_{s\in S} \langle s,p \rangle .$$

- χ_S la fonction caractéristique d'une partie S d'un ensemble donné, définie par

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{si } x \notin S \end{cases}$$

- Si S un sous ensemble convexe fermé de E, la distance du point x à l'ensemble S est donnée par:

$$d(x,S) = \inf_{s\in S} \|x - s\|$$

- Si A et B sont deux sous ensembles de $\mathbb{R}^n$, notons par $e(A,B)$ l'excès(ou écart) de A sur B définit par

$$e(A,B) = \sup \{d_B(a) ; a \in A\}$$

Où

$$d_B(a) = \inf_{b\in B} \|a - b\|$$

est la fonction distance de a à B.

- $\mathcal{H}(A,B)$ désigne la distance de Hausdorff entre A et B où A, B sont deux ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$
  $\mathcal{H} : f(\mathbb{R}^n) \times f(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\mathcal{H}(A,B) = \max\{e(A,B), e(B,A)\}$$

- $g_c(\mathbb{R}^+,\mu,E)$ l'ensemble des fonctions de Carathéodory sur $\mathbb{R}^+ \times E$ (i.e. les applications $\psi : \mathbb{R}^+ \times E \to E$ telle que $\forall\, x \in E$, $\psi(.,x)$ est mesurable, $\forall\, t \in \mathbb{R}^+$, $\psi(t,.)$ est continue sur E) et tout $\mathbb{B}$, sous-ensemble borné de E, la fonction $t \in \mathbb{R}^+ \to \sup\limits_{x\in\mathbb{B}} \|\psi(t,x)\|$ est $\mu-$ intégrable
- $\Phi(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des applications linéaires, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions suivantes:
  $(1')$ $-$la restriction de A à $\mathbb{B}$ est continue de $(\mathbb{B},\sigma)$ dans $(E, \|.\|)$
  $(2')$ $- \forall\, x' \in \mathbb{R}^n$, $\langle x', A(x')\rangle$ est une fonction strictement convexe
  L'ensemble $\Phi(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ coïncide avec l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{R}^n$ associés à des matrices définies positives.
- $C_0 = C([-\sigma,0];\mathbb{R}^n) := \{$fonctions continues de $[-\sigma,0]$ dans $\mathbb{R}^n\}$
- $C_0^1 = C^1([-\sigma,0];\mathbb{R}^n) := \{$fonctions continument dérivable de $[-\sigma,0]$ dans $\mathbb{R}^n\}$.

2.3 Notions de continuité des fonctions et des multifonctions:

Définition 2.1 :*Soit V une fonction de l'espace de Banach E à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On dit que V est semi-continue inférieurement (s.c.i)*
au point $a \in E$ si et seulement si

$$\liminf_{x\to a} V(x) \geq V(a)$$

Nous avons aussi la caractérisation suivante:
V est semi-continue inférieurement sur E (s.c.i) si et seulement si son épigraphe

$$epi(V) = \{(x,r) \in E \times \mathbb{R} : V(x) \leq r\}$$

est fermé

Définition 2.2 . *On dit qu une fonction $V : [a,b] \to E$ est absolument continue si $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de $[a,b]$ par des intervalles disjoints $[a_k,b_k]$ vérifiant*

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta$$

Nous avons

$$\sum_k \|V(b_k) - V(a_k)\| < \varepsilon$$

On voit bien qu'une fonction absolument continue est continue, et admet une dérivée presque partout.

Définition 2.3 *Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On dira que V est une fonction localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$ s'il existe $A \subset \mathbb{R}^n$, A bornée tel que*

$$\forall (x,y) \in A, \exists\ K > 0 : \|V(x) - V(y)\| \leq K\ \|x-y\|$$

Définition 2.4 *Soient X,Y deux espaces topologiques, $F{:}X \rightrightarrows Y$ une multifonction. Alors F est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert U de X tel que $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage W de x_0 tel que*

$$F(z) \cap U \neq \emptyset, \forall\ z \in V$$

Définition 2.5 *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F{:}X \rightrightarrows Y$ une multifonction. Alors F est dite semi-continue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert W de Y tel que $F(x_0) \subset W$, il existe un ouvert U de X tel que $x_0 \in U$ et $F(x) \subset W$, $\forall$ $x \in U$, On dit que F est s.c.s sur X si elle est s.c.s en tout point $x \in X$.*

Définition 2.6 *Soit E un espace de Hausdorff localement convexe, et $F : X \rightrightarrows cwk(E)$,on dira que F semi-continue supérieurement (s.c.s) pour la topologie faible $\sigma(E,E')$ ou bien qu' elle scalairement s.c.s si pour tout $y \in E$, $\sigma(F(.),y')$ est s.c.s. (voir [14] théorème II-20)*

Proposition 2.1 *Soit $F{:}X \rightrightarrows Y$ une multifonction à valeurs compactes semi-continue supérieurement sur X. Alors pour chaque ensemble compact $K \subset X$ l'image $F(K) = \underset{x \in K}{\cup} F(x)$ est compact dans Y*

Théorème 2.1 *[25] Soient X et Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction à valeurs compactes, alors F est semi-continue supérieurement sur X si et seulement si pour chaque $x \in X$ et chaque suite $(x_n)_n$ de X telle que $x_n \to x$, et $(y_n)_n$ de Y avec $y_n \in F(x_n)$, il existe une sous suite (y_m) de (y_n) telle que*

$$\lim_{m \to \infty} y_m \in F(x).$$

Preuve. Soit F une multifonction semi-continue supérieurement sur X, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de X convergeant vers x. L'ensemble

$$K := \{x_1,\ x_2, \ldots\ldots\ldots, x_k, \ldots\}.$$

Est un ensemble compact et la restriction de F à K est semi-continue supérieurement, donc l'ensemble $F(K)$ est compact, par conséquent, la suite (y_n) admet une sous suite (y_{n_k}) qui converge vers y quand k tend vers $+\infty$. Supposons $y \notin F(x)$, alors il existe un voisinage fermé M de $F(x)$ ne contenant pas y, mais pour n assez grand nous avons $F(x_n) \subset M$.Vu la semi-continuité supérieure de F au point x, on obtient

$$y_{n_k} \in M;$$

et par suite $y \in M$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Supposons maintenant que F n'est pas semi-continue supérieurement au point x, c'est à dire, il existe un voisinage ouvert U de $F(x)$ tel que pour chaque voisinage W de x contenant un point z et U ne contient pas $F(z)$, alors il existe deux suites, (x_n) convergeant vers x et (y_n) tel que $y_n \in F(x_n)$ et $y_n \notin U$. D'après les hypothèses, il existe une sous suite (y_{n_k}) de (y_n) telle que

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} \in F(x);$$

Mais $y_n \in U$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui montre que $y_{n_k} \notin U$ et donc

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} \notin F(x).$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Théorème 2.2 *Soient X et Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction, alors F est semi-continue inférieurement si et seulement si pour toute suite (x_n) qui converge vers x et tout $y \in F(x)$, il existe une suite (y_n) de Y qui converge vers y et tel que $y_n \in F(x_n)$.*

Définition 2.7 *On dit que la multifonction $P : S \rightrightarrows cl(X)$ est .*

1. *Semi-continue inférieurement (s.c.i) au point $s_0 \in S$ si et seulement si*

$$\lim_{s\to s_0} \left\{ \sup_{x\in p(s_0)} \left[d\left(x,p\left(s\right)\right)\right] \right\} = 0;$$

Où

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{x\in p(s_0)} \left[d\left(x,p\left(s_n\right)\right)\right] \right\} = 0.$$

2. *Semi-continue supérieurement (s.c.s) au point $s_0 \in S$ si et seulement si*

$$\lim_{s\to s_0} \left\{ \sup_{x\in p(s)} \left[d\left(x,p\left(s_0\right)\right)\right] \right\} = 0;$$

Où

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{x\in p(s_n)} \left[d\left(x,p\left(s_0\right)\right)\right] \right\} = 0.$$

3. Continue au point $s_0 \in S$ si elle est (s.c.s) et (s.c.i) à ce point.

4. On dit que P est (s.c.i) (resp s.c.s) sur $D \subset S$ si et seulement si elle est s.c.i (resp s.c.s) en tout point $s \in D$.

Définition 2.8 *une multifonction Γ définie sur I à valeurs dons les sous -ensembles non vides fermés de est dite mesurable, si son graphe $gr(\Gamma)$ appartient à $\mathcal{B}(I) \bigotimes \mathcal{B}(E)$.*

Définition 2.9 $\forall \tau \in I = [0.T]$ $(T > 0)$, $\forall \varepsilon > 0$, *$J_\varepsilon([0,\tau])$ est l'ensemble de toutes les fonctions croissantes, $\theta : [0,\tau] \longrightarrow [0,\tau]$ telles que $\theta(0) = 0$, $\theta(\tau) = \tau$ et pour tout $t \in [0,\tau]$, $\theta(\theta(t)) = \theta(t)$, $0 \leq t - \theta(t) \leq \varepsilon$*

(noter que cet ensemble est non vide puisqu'il contient au moins la fonction identité sur $[0,\tau]$.)

2.4 Notions de régularité et de sous différentiabilité

Soit $\mathbb{R}^n$ un espace Euclidien réel. Donnons dans ce qui suit quelques notations et définitions concernant les notions de régularité utilisées dans ce travail. Commençons par quelques notions de sous différentiabilité:

Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$

-Le gradient généralisé au sens de Clarke de V en $x \in \mathbb{R}^n$, est définit par

$$\partial V(x) = \left\{x' \in \mathbb{R}^n : \langle x',h\rangle \leq V^{\uparrow}(x;h), \forall h \in \mathbb{R}^n\right\},$$

Où $V^{\uparrow}(x;h)$ est la dérivée directionnelle généralisée donnée par

$$V^{\uparrow}(x;h) = \lim_{y \to x, \varepsilon \downarrow 0} \sup \frac{V(y + \varepsilon h) - V(y)}{\varepsilon}$$

-Le gradient généralisé d'une fonction localement lipchitzienne est une multifonction semi continue supérieurement.

-Le sous différentiel proximal $\partial^P V(x)$ est l'ensemble de tous les points $x' \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels il existe $\rho,\beta > 0$ tels que

$$\langle x',y - x\rangle \leq V(y) - V(x) + \beta \|y - x\|, \forall y \in x + \rho \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}$$

Remarquons que nous avons

$$\partial^P V(x) \subset \partial V(x)$$

Par convention on pose

$$\partial^P V(x) = \partial V(x) = \emptyset$$

Quand $V(x)$ est infini

Notons aussi que $\partial V(x)$ est une multifonction monotone

i.e

$$\text{pour tout } x,y \in \mathbb{R}^n,\ x' \in \partial V(x),y' \in \partial V(y) : \langle x'-y',x-y\rangle \geq 0$$

Si V est convexe semi continue inférieurement, on sait que $\partial V(x)$ est un opérateur maximal monotone. Notre but est d'affaiblir la condition de convexité, pour cela rappelons quelques définitions de classes de fonctions plus larges. Notons qu'en contre partie, on prend V localement Lipschitz au lieu de s.c.i.

Définition 2.10 *[38] Soit $V : X \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, On dit que V est Prox-régulière au point $\overline{x}$ pour $\overline{v} \in \partial V(\overline{x})$, S'il existe $r > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $(\overline{x},\overline{v}) \in gph(\partial V)$ vérifiant, $\|x-\overline{x}\| < \varepsilon$, $\|V(x) - V(\overline{x})\| < \varepsilon$, et $\|v-\overline{v}\| < \varepsilon$, On a*

$$V(x') \geq V(x) + \langle v,x-x'\rangle - \frac{r}{2}\|x-x'\|^2 \quad \text{pour tout } x' \in \mathbb{B}(\overline{x};\varepsilon)$$

Si Cette propriété est vérifié pour tout $\overline{v} \in \partial V(\overline{x})$, Si V est Prox-régulière pour tout point de $E \cap dom\ \partial V$, On dit que V est Prox-régulière sur l'ensemble E.

Définition 2.11 *une multifonction $F : X \rightrightarrows X$ est dit r-hypermonotone sur W, si $F+rI$ est monotone sur W, Si $X = W$, On dit que F est r-hypermonotone. On dit que F est localement hypermonotone sur un ouvert O. Si pour tout $\overline{x} \in O$, il existe un voisinage W de $\overline{x}$ et $r > 0$ tel que $F + rI$ soit monotone sur W.*

Définition 2.12 *Soit $V : X \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, On dit que la fonction V est uniformément Prox-régulière sur l'ensemble $E \subset X$, S'il existe $r > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\overline{x} \in E$ et tout $\overline{v} \in \partial V(\overline{x})$,pour tout $(\overline{x},\overline{v}) \in gph(\partial V)$ vérifiant, $\|x-\overline{x}\| < \varepsilon$, $\|V(x) - V(\overline{x})\| < \varepsilon$, et $\|v-\overline{v}\| < \varepsilon$, On a*

$$V(x') \geq V(x) + \langle v,x'-x\rangle - \frac{r}{2}\|x'-x\|^2 \quad \text{pour tout } x' \in \mathbb{B}(\overline{x};\varepsilon)$$

Quand $E = \{x_0\}$, On dit que V est Prox-régulière au point x_0 avec un paramètre uniforme.

Considérons le cas ou $\partial V(x_0)$ est norme-compact.

Proposition 2.2 *[9] Soit V une fonction telle que $\partial V(x_0) \neq \emptyset$ et norme- compact. Alors V est Prox-régulière au x_0 si seulement si elle est Prox-régulière au x_0 avec un paramètre uniforme.*

Pour la démonstration, voir [8]

Proposition 2.3 *[9] On dit que la fonction V est uniformément Prox-régulière au voisinage de $x_0 \in X$ si et seulement si existe $r > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $(\overline{x},\overline{v}) \in gph(\partial V)$ vérifiant $\|x - x_0\| < \varepsilon$, On a*

$$V(x') \geq V(x) + \langle v, x - x'\rangle - \frac{r}{2}\|x - x'\|^2 \quad \textit{pour tout } x' \in \mathbb{B}(x_0;\varepsilon)$$

Pour la démonstration [9]

Proposition 2.4 *[9] Soit $V : X \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, une fonction propre semi-continue inférieurement en $x_0 \in domV$, Soit $r > 0$, les propriétés suivantes sont équivalentes pour V uniformément Prox-régulière au voisinage de x_0 avec le paramètre r*

a) il existe un voisinage W de x_0 tel que ∂V soit r-hypermonotone sur W.

b) il existe un voisinage convexe fermé W de x_0 tel que

$$V(x') \geq \sup_{\substack{x \in w \\ \omega \in \partial V(x)}} \left\{V(x) + \langle v, x - x'\rangle - \frac{r}{2}\|x - x'\|^2\right\} \quad \textit{pour tout } x' \in W$$

c) il existe un voisinage convexe fermé W de x_0 tel que

$$V(x') = \sup_{\substack{x \in w \\ \omega \in \partial V(x)}} \left\{V(x) + \langle v, x - x'\rangle - \frac{r}{2}\|x - x'\|^2\right\} \quad \textit{pour tout } x' \in W$$

d) il existe un voisinage convexe fermé W de x_0 tel que le sous différentiel $\partial V'$ de la fonction $V' = V + \delta_W$ soit r-hypermonotone.

e) il existe un voisinage convexe fermé W de x_0 tel que $V = U\frac{r}{2}\|.\|^2$ sur W avec U propre semi-continue inférieurement convexe

f) il existe un voisinage W de x_0, et trois fonctions $i : S \to \mathbb{R}$, $j : S \to X$, et $k : S \to]-\infty,r]$ tel que

$$V(x') = \sup_{s \in S}\left\{i(s) + \langle j(s), x'\rangle - \frac{k(s)}{2}\|x'\|^2\right\} \quad \textit{pour tout } x' \in W$$

Définition 2.13 *Soit $V : X \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, On dit que V est p.l.n en $x_0 \in domV$ s'il existe $\varepsilon > 0$, $c > 0$, et $T > 0$ tel que*

$$V(x') + \langle v, x - x'\rangle - \frac{t}{2}\|x - x'\|^2 \quad \forall t \in [0,T\,],\ x,\ x' \in \mathbb{B}(x_0;\varepsilon),\ v \in \partial V(x) \ \textit{avec } \|v\| \leq ct$$

Proposition 2.5 *Supposons que V est uniformément Prox-régulière au x_0. Alors V est p.l.n au x_0. la convexité de V est localement lipschitizienne continue en x_0*

Proposition 2.6 *Soit* $V : X \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, *une fonction continue localement lipschitzienne tel que* $\partial V(x_0)$ *est norme compact et* ∂V *est semi -continue supérieurement au* x_0*, par rapport à la norme de* X^**. Alors les relations suivantes sont équivalentes:*

a)V est Prox-régulière au point x_0*.*

b)V est Prox-régulière au point x_0 *avec parmètre uniforme.*

c)V est (primal-lower-nice) p.l.n au point x_0*.*

d)V est C^2 *inférieurement au point* x_0*.*

Corollaire 2.1 *Soit* $V : X \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, *une fonction continue localement Lipschitzienne, Supposons que X est de dimension finie Ou V est continument différentiable au voisinage de* x_0*, Alors les relation* $(a - d)$ *de la Proposition(2.6) sont équivalentes.*

Proposition 2.7 *Soit* $V : X \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$*, une fonction semi -continue inférieurement et soit* $x_0 \in domV$*. Supposons que V est p.l.n sur un voisinage de* x_0 *avec parmétre uniforme, c-à-d, il existe* $\varepsilon > 0$, $T > 0$, $c > 0$ *tel que pour tout* $t > T$, $\forall(x,v) \in gph(\partial V)$ *avec* $\|x - x_0\| < \varepsilon$, $\|V(x) - V(x_0)\| < \varepsilon$ *et* $\|v\| \leq c$*, On a*

$$V(x') \geq V(x) + \langle v,x' - x\rangle - \frac{t}{2}\|x' - x\| \quad pour\ tout\ x' \in \mathbb{B}(x_0;\varepsilon)$$

Alors epiV est Prox-régulière au $(x_0,V(x_0))$

Proposition 2.8 *[9] Soit* $V : X \to \mathbb{R}$ *une fonction continue localement lipschitzienne, Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

a)V est uniformément prox-régulière sur un voisinage de x_0

b) il existe $\alpha > 0$ *tel que* $epiV \cap (\mathbb{B}[x_0;\alpha] \times \mathbb{R})$ *est uniformément Prox-réguliére,*

c)V est C^2*inférieurement au* x_0

d)V est (primal-lower-nice) p.l.n en x_0

Définition 2.14 *:Soit* $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ *une fonction semi-continue inférieurement et soit* $\Omega \subset dom\ V$ *un ouvert non vide. On dit que V est uniformément régulière sur* Ω *s'il existe un nombre positive* $\beta > 0$ *tel que pour tout* $x \in \Omega$ *et* $\varepsilon \in \partial^P V(x)$ *On a,*

$$\langle\varepsilon,x' - x\rangle \leq V(x') + V(x) + \beta\|x' - x\|^2 \qquad \forall\ x' \in \Omega$$

$\partial^P V(x)$ *désigne le sous différentiel de V au point x-On dit que V est uniformément régulière sur un ensemble fermé S s'il existe un ouvert O contenant S tel que V est uniformément régulière sur O. La classe de fonction uniformément régulière est assez large Citons à titre d'exemple*

Exemple 2.1 *Toute fonction convexe propre s.c.i est uniformément régulière sur chaque sous ensemble non vide de son domaine avec* $\beta = 0$

Exemple 2.2 *:Chaque fonction C^2 inférieurement est uniformément régulière sur tout convexe compact de son domaine. En effet, soit V une fonction C^2 inférieurement sur un convexe compact $S \subset \text{dom } V$, d'aprés le résultat de Rockafellar, il existe β réel positive tel que $W := V + \frac{\beta}{2}\|.\|^2$ une fonction convexe sur S En utilisant la définition du sous différentiel d'une fonction convexe et le fait que le sous différentiel de Clarke de V est donné par $\partial^C V(x) = \partial V(x) - \beta x, \forall\, x \in S$, On obtient l'inégalité dans la définition et par suite V est uniformément régulière.*

Maintenant, nous allons montrer que la classe la plus large, pour les fonctions localement Lipschitziennes, est celle des fonctions régulières.

Définition 2.15 *[7] V est dit régulière en x si*

1. *Pour tout $v \in E$, la dérivée directionnelle usuelle $V^0(x\,;v)$ existe.*
2. *Pour tout $v \in E$, $V^{\uparrow}(x\,;h) = V^0(x\,;v)$*

Proposition 2.9 *[42] Si V est uniformément régulière, alors V régulière.*
Preuve. *Voir [42]* ■

Cette classe possède la propriété importante suivante:

Proposition 2.10 *[7]: Soient Ω un ouvert convexe de E, V une fonction réelle définie sur Ω lipschitizienne sur tout bornée de Ω et régulière, et $x : I \longrightarrow \Omega$ une fonction à variation bornée sur I, telle que Dx admet une densité $\frac{Dx}{d\mu}$ appartenant à $L^1_E(I,\mu)$.Alors la fonction $V \circ x$ est à variation borné sur I, $D(V \circ x)$ est absolument continue par rapport à μ et $\mu-$presque partout*

$$
\begin{aligned}
\left\langle \partial V(x(t)) ; \frac{Dx}{d\mu}(t) \right\rangle \quad : \quad &= \left\{ \left\langle x' ; \frac{Dx}{d\mu}(t) \right\rangle : x' \in \partial V(x(t)) \right\}. \\
&= \left\{ \frac{D(V \circ x)}{d\mu}(t) \right\}. \\
&= \left\{ V'(x(t)) ; \frac{Dx}{d\mu}(t) \right\} \\
&= \left\{ -V'(x(t)) ; -\frac{Dx}{d\mu}(t) \right\}
\end{aligned}
$$

Preuve. Remarquons tout d'abord que la fonction x est continue sur I puisque μ vérifie $\mu(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

En vertu des théorémel.1 et 4.8 de Moreau-Valadier $(MV2)$, la fonction $V \circ x$ est à variation bornée sur I, $D(V \circ x)$ est absolument continue par rapport à μ et μ -presque partout

$$\frac{D(V \circ x)}{d\mu}(t) \in \left\langle \partial V(x(t)), \frac{Dx}{d\mu}(t) \right\rangle \tag{2.1}$$

$$\frac{D(V \circ x)}{d\mu}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{V(x(t+\varepsilon)) - V(x(t))}{\mu([t,t+\varepsilon])} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{V(x(t)) - V(x(t-\varepsilon))}{\mu([t-\varepsilon,t])} \tag{2.2}$$

$$\frac{Dx}{d\mu}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\mu([t,t+\varepsilon])} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{x(t) - x(t-\varepsilon)}{\mu([t-\varepsilon,t])} \tag{2.3}$$

D'autre part on a $\mu-$ presque partout

$$\left(V'(x(t)); \frac{Dx}{d\mu}(t)\right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{V\left[x(t) + \mu([t,t+\varepsilon]) \frac{Dx}{d\mu}(t)\right] - V(x(t))}{\mu([t,t+\varepsilon])} \tag{2.4}$$

(avec les conventions $\mu([t,t+\varepsilon]) = \mu(I \cap [t,t+\varepsilon]$,etc...)soit $t \in]0,T[$ tel que (2.2) , (2.3) et (2.4) soient vérifiées. soient $M > 0$ et $W_{x(t)}$ un voisinage de $x(t)$ dans Ω tels que V soit M- lipschitizienne sur $W_{x(t)}$. soit $\delta > 0$ tel que $[t-\delta,t+\delta] \subset I$, $x(t+\varepsilon) \in W_{x(t)}$ et $x(t) + \mu([t,t+\varepsilon]) \frac{Dx}{d\mu}(t) \in W_{x(t)}$ pour tout $\varepsilon \in]0,\delta]$ Alors pour $\varepsilon \in]0,\delta]$, on a les majorations suivantes

$$\left| \frac{V(x(t+\varepsilon)) - V(x(t))}{\mu([t,t+\varepsilon])} - \frac{V\left[x(t) + \mu([t,t+\varepsilon]) \frac{Dx}{d\mu}(t)\right] - V(x(t))}{\mu([t,t+\varepsilon])} \right| =$$

$$= \left| \frac{V(x(t+\varepsilon)) - V\left[x(t) + \mu([t,t+\varepsilon]) \frac{Dx}{d\mu}(t)\right]}{\mu([t,t+\varepsilon])} \right|$$

$$\leq M \frac{\left\| x(t+\varepsilon) - x(t) - \mu([t,t+\varepsilon]) \frac{Dx}{d\mu}(t) \right\|}{\mu([t,t+\varepsilon])}$$

$$= M \left\| \frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\mu([t,t+\varepsilon])} - \frac{D_x}{d\mu}(t) \right\| \tag{2.5}$$

En passant à la l'imite quand $\varepsilon \to 0^+$ dans les deux membres de l'inégalité (2.5) et en utilisant (2.2),(2.3); et (2.4), on obtient

$$\frac{D(V \circ x)}{d\mu}(t) = V'\left(x(t); \frac{Dx}{d\mu}(t)\right) \tag{2.6}$$

En refaisant un raisonnement analogue à ci -dessus avec des inégalités portant $x(t-\varepsilon)$ et $\mu([t-\varepsilon,t])$à la place de $x(t+\varepsilon)$ et $\mu([t,t+\varepsilon])$, on peut aussi montrer que

$$\frac{D(V \circ x)}{d\mu}(t) = -V'\left(x(t); -\frac{Dx}{d\mu}(t)\right) \tag{2.7}$$

De (2.6),(2.7), il résulte maintenant que $\left\langle \partial V\left(x\left(t\right)\right), \frac{Dx}{d\mu}\left(t\right)\right\rangle$ est réduit à un singleton En effet pour $x' \in \partial V\left(x\left(t\right)\right)$ par définition du gradient,on a successivement

$$\left\langle x', \frac{Dx}{d\mu}\left(t\right)\right\rangle \leq -V'\left(\left(x\left(t\right)\right); \frac{Dx}{d\mu}\left(t\right)\right) \leq -\left\langle x', -\frac{Dx}{d\mu}\left(t\right)\right\rangle$$

D'où le résultat ■

Proposition 2.11 *[13]Soit E une espace de banach uniformément convexe, Soit (x_n) une suite dans E telle que $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie faible $\sigma\left(E,E'\right)$ et $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|$ alors $x_n \to x$ fortement*

2.5 Quelques résultats de compacité:

Théorème 2.3 *(Théorème d'Ascoli-Arzelà) [19].*

Soit J un espace métrique compact, (Y,d) un espace métrique complet, et H un sous ensemble de $C(J,Y)$, l'espace des applications continues définies sur J à valeurs dans Y, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors H est relativement compact si et seulement si H est équicontinu et $H(x)$ est relativement compact, avec

$$H(x) = \{f(x) : f \in H\}.$$

Théorème 2.4 *(Corollaire du théorème d'Ascoli-Arzelà) [19]*

Soient J un ensemble compact de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach de dimension finie et soit (f_n) une suite de fonctions absolument continues définies sur J à valeurs dans E vérifiant les conditions suivantes:

(i) $\forall t \in J$, $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est un sous ensemble relativement compact dans E;

(ii) il existe une fonction à valeurs réelles positives $h \in L^1_{\mathbb{R}^+}(J)$ tel que

$$\left\|\dot{f}(t)\right\| \leq h(t), \text{ p.p sur } J;$$

Alors il existe une sous suite de $(f_n)_n$ qui converge vers une fonction absolument continue $f : J \to E$ au sens suivant:

(1) $(f_n)_n$ converge uniformément vers f;

(2) $(\dot{f}_n)_n$ converge faiblement vers $\dot{f}$ dans $L^1_E(J)$.

Preuve.

$$h \in L^1_{\mathbb{R}^+}(J) \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \int_{t-\delta}^{t+\delta} h(s)ds < \delta.$$

Montrons que la suite (f_n) est équi continue c'est à dire

$$\forall\varepsilon > 0, \exists?\eta > 0 : |s-t| \leq \eta \Rightarrow \|f_k(t) - f_k(s)\| \leq \varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Les fonctions f_n sont absolument continues et par suite

$$\begin{aligned}
\|f_k(t) - f_k(s)\| &= \left\| \int_s^t \dot{f}_k(\tau) d\tau \right\| \\
&\leq \int_s^t \left\| (\dot{f}_k(\tau)) \right\| d\tau \\
&\leq \int_s^t h(\tau)\, d\tau \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

il suffit de prendre $\eta = \delta$ et donc la suite $(f_n)_n$ est équicontinue.

D'autre part $(f_n(t))$ est relativement compacte dans E, vu le théorème d'Ascoli-Arzelà $(f_n)_n$ est relativement compacte dans $C(J,E)$ muni de la topologie de la convergence uniforme. On peut alors lui extraire une sous suite qu'on note aussi $(f_n)_n$ convergeant uniformément vers $f \in C(J,E)$.

D'autre part, nous avons

$$\left\| \dot{f}_n(t) \right\| \leq h(t);$$

En posant

$$g_n(t) = \frac{\dot{f}_n(t)}{h(t)};$$

on aura

$$\|g_n(t)\| \leq 1.$$

Et donc $g_n \in \overline{\mathbb{B}}_{L^\infty}(0,1)$ qui est faiblement (*) compact, donc on peut extraire de (g_n) une sous suite qu'on notera aussi (g_n) et qui converge faiblement (*) vers une fonction $g \in L^\infty_{E'}(I)$. La convergence de g_n vers g nous permet d'écrire pour $z \in L^1_E(J)$ que

$$\langle g_n, z \rangle \underset{n\to\infty}{\to} \langle g, z \rangle .$$

Soit $y \in L^\infty_E(J)$

$$\begin{aligned}
\left\langle \dot{f}_n, y \right\rangle &= \langle h g_n, y \rangle \\
&= \langle g_n, h y \rangle ;
\end{aligned}$$

Nous avons

$y \in L^\infty_E(J)$ et $h \in L^1_{\mathbb{R}^+}(J) \Rightarrow hy \in L^1_E(J)$, et alors

$$\left\langle \dot{f}_n, y \right\rangle = \langle g_n, hy \rangle \underset{n\to\infty}{\to} \langle g, hy \rangle = \langle hg, y \rangle .$$

C'est à dire (f_n) converge faiblement dans $L^1_E(J)$ vers la fonction $hg = v$, et par suite

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \dot{f}_n, y \right\rangle = \langle v, y \rangle \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_s^t \dot{f}_n(\tau) y(\tau) d\tau = \int_s^t v(\tau) y(\tau) d\tau;$$

En particulier pour $y(\tau) = 1$. Comme f_n est absolument continue alors

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(t) - f_n(s)) = \int_s^t v(\tau)d\tau;$$

Donc

$$f(t) - f(s) = \int_s^t v(\tau)d\tau.$$

On conclut alors que f est absolument continue, et donc

$$f(t) - f(s) = \int_s^t \dot{f}(\tau)\, d\tau,$$

D'où $\dot{f} = v$ p.p, et donc $(\dot{f}_n)$ converge faiblement vers $\dot{f}$ ■

Enonçons par la suite un résultat de compacité fort utile dans l'espace des fonctions bornées, qui est une adaptation du théorème d'Ascoli-Arselà pour les fonctions continues.

Notons par $\mathfrak{B}(I,X)$ l'espace de Banach des fonctions bornées définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Hilbert X muni de la topologie de la convergence uniforme.

1. l'oscillation d'une fonction $x(.)$ sur un intervalle J est donnée par

$$\omega_J(x) = \sup_{t_1,t_2\in J} \|x(t_1) - x(t_2)\|.$$

2. Une famille $\mathcal{H}$ de fonctions bornées $x(.)$, $x(.) \in \mathfrak{B}(I,X)$ est dite équioscillante si, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists$ une subdivision finie de I en sous intervalles $J_k (1 \leq k \leq r)$ tel que, $\forall x(.) \in \mathcal{H}$, $\forall k = \overline{1,r}$, $\omega_{J_k}(x) \leq \varepsilon$.

Théorème 2.5 *[1] Supposons que $\mathcal{H} \subset \mathfrak{B}(I,X)$ un sous ensemble de fonctions bornées vérifiant*

$$\begin{cases} i)\ \mathcal{H} \text{ est équioscillant;} \\ ii)\ \forall t \in I,\ \mathcal{H}(t) = \{x(t)\}_{x(.)\in\mathcal{H}} \text{ est relativement compact.} \end{cases}$$

Alors $\mathcal{H}$ est relativement compact dans $\mathfrak{B}(I,X)$.

Proposition 2.12 *Soit K un ensemble borné convexe d'un E espace de Banach séparable, alors K est compact si et seulement si l'application $x' \mapsto \delta^*(x',K)$ est continue sur $\overline{\mathbb{B}_{E'}}$ muni de la topologie de la convergence compacte.*

Théorème 2.6 *(Théorème d'Eberlein-Smŭlian) [25]*

Soit S un sous ensemble d'un espace de Banach. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

i) S est faiblement (relativement) séquentiellement compact;

ii) S est faiblement (relativement) compact.

Théorème 2.7 *(Théorème de Smŭlian) [25]*

Soit S un sous ensemble de l'espace de Banach X.Si S est relativement faiblement compact, alors pour chaque $x \in \overline{S}^{\omega}$(fermeture faible de S) il existe une suite (x_n) d'éléments de S convergeant faiblement vers x.

Théorème 2.8 *(Théorème de Banach-Mazur).*

Soit (x_n) une suite d'élément de E convergeant faiblement vers x. Alors il existe une suite (z_n) (où z_n est combinaison convexe des éléments x_n, x_{n+1},......) convergeant fortement vers x.

Preuve. *Soit $H = co\{(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

L'enveloppe convexe d'un ensemble $A \subset E$ est le plus petit convexe contenant A et donc

$$H = \left\{ y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1, \text{ et les } \alpha_n \text{ sont nuls sauf pour un nombre fini des } n \right\}.$$

Par définition, H est un sous ensemble convexe. D'autre part, (x_n) converge faiblement vers x quand $n \to +\infty$ et par suite $x \in \overline{H}^{\omega}$, on sait que tout sous ensemble convexe faiblement fermé est fortement fermé c'est à dire $\overline{H}^{\omega} = \overline{H}$, par conséquent $x \in \overline{H}$, et donc il existe une suite (z_i) d'éléments de H convergeant fortement vers x telle que $z_i = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ et les α_n sont nuls sauf pour un nombre fini des n. ■

2.6 Théorèmes de convergence:

Pour le cas univoque on a les théorèmes de Lebesgue suivants.

Théorème 2.9 *(Théorème de convergence dominée de Lebesgue) [19]*

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies $\mu-p,p$ sur E à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ converge $\mu-p,p$ vers une fonction f, supposons que les f_n sont $\mu-$intégrables vérifiant:

$$|f_n(t)| \leq g(t) \;\; \mu - p,p \text{ pour tout } n.$$

où g est une fonction $\mu-$intégrables indépendante de n. Alors f est $\mu-$intégrable et

$$\mu(f) = \lim_{n\to\infty} \mu(f_n).$$

Théorème 2.10 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, si la fonction f définie sur $X \times I$, est telle que*

1. *Pour tout $y \in I$, $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable;*

2. *Pour presque tout* $x \in X$, $y \mapsto f(x,y)$ *est dérivable;*
3. *il existe une fonction intégrable* g *telle que:* $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right| \leq g(x);$$

Alors la fonction $F : y \mapsto \int_I f(x,y)d\mu(x)$ *est dérivable sur* I, *en outre pour tout* $y \in Y$, $x \mapsto \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ *est intégrable et on a*

$$F'(y) = \int \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)d\mu(x).$$

Théorème 2.11 *[1]*

Soit F *une multifonction hemi-continue supérieurement (h.c.s) définie sur un espace de Hausdorff localement convexe* X *à valeurs fermées convexes dans un espace de Banach* Y. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, *et* $x_k(.)$, $y_k(.)$ *des fonctions mesurables de* I *dans* X *et* Y *respectivement vérifiant*

$$\begin{cases} \text{Pour presque tout } t \in I, \text{ et tout voisinage } V \text{ de } 0 \text{ dans } X \times Y, \\ \text{il existe } K_0 = K_0(t,V) : \forall k \geq k_0, (x_k(t),y_k(t)) \in gph(F) + V. \end{cases}$$

Si

1. $x_k(.)$ *converge p.p vers une fonction* $x(.)$;
2. $y_k(.) \in L^1(I,Y)$ *et converge faiblement vers* $Y(.)$ *dans* $L^1(I,Y)$;

Alors

$$(x(t),y(t)) \in gph(F), \text{ i.e. } y(t) \in F(x(t)) \text{ pour presque tout } t \in I.$$

Rappelons que l'hemi-continuité supérieure est équivalente à la semi-continuité supérieure de la fonction support $\sigma(F(x),.)$ et que toute multifonction s.c.s avec la topologie faible et h.c.s

Voici un autre résultat classique de fermeture qui prouve la compacité des trajectoires des inclusions différentielles.

Théorème 2.12 *[14]*

Soient X *un espace topologique,* Y *un espace de Hausdorff localement convexe et* F *une multifonction définie sur* $[0,T] \times X$ *à valeurs non vides convexes compactes dans* Y *telle que* $\forall t \in [0,T]$, $F(t,.)$ *est semi-continue supérieurement. Soient* x_k, x *des fonctions de* $[0,T]$ *dans* X *et* y_k, y *des fonctions scalairement intégrables de* $[0,T]$ *dans* Y *vérifiant:*

1. *Il existe une suite* (e'_k) *dans* Y' *qui sépare les points de* Y;

2. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k(t) = x(t).p.p;$
3. *Pour tout* y' *fixé dans* Y', $\langle y', y_k(.)\rangle$ *converge vers* $\langle y', y(.)\rangle$ *par rapport à la topologie faible* $\sigma\left(L^1([0,T]), L^\infty([0,T])\right)$;
4. $y_k(t) \in F(t, x_k(t))$ *p.p;*

Alors

$$y(t) \in F(t, x(t)) \quad p.p.$$

Preuve. Comme $\langle y', y_k(.)\rangle$ converge faiblement vers $\langle y', y(.)\rangle$, grâce au théorème de Banach Mazur, il existe une suite (z_m), où z_m est une combinaison convexe de $\{\langle y', y_m(.)\rangle, \langle y', y_{m+1}(.)\rangle, ...\}$ qui converge vers $\langle y', y(.)\rangle$ presque partout. D'après 2, il existe un ensemble négligeable N tel que $x_k(t)$ converge vers $x(t)$, comme F est à valeurs convexes compactes et comme la multifonction $F(t,.)$ est semi-continue supérieurement alors

$$\langle y', y(t)\rangle \in \bigcap_k \overline{co\left(\bigcup_{n\geq k} \langle y', y_m(t)\rangle\right)}$$

En appliquant le lemme $III-32$,de [14] on déduit que

$$\begin{aligned} \langle y', y(t)\rangle &\in y' \circ \Phi(t, x(t)), \text{ p.p;} \\ &\Leftrightarrow y(t) \in \Phi(t, x(t)). \end{aligned}$$

■

2.7 Inclusions différentielles avec retard (mémoire):

Les inclusions différentielles avec retard sont des équations différentielles multivoques où le système ne dépend pas seulement de la valeur initiale mais aussi de l'état antérieur du système. Si une inclusion différentielle exprime qu'à tout instant la vélocité du système dépend de son état à tout instant, Les inclusions différentielles avec mémoire expriment que la vélocité dépend non seulement de l'état du système à cet instant, mais aussi de l'histoire de la trajectoire jusqu'à cet instant.

Pour formaliser ce concept, on introduit pour tout $T > 0$ et $\sigma > 0$, l'espace de Banach $C_T := C([-\sigma,T], H)$ (resp $C_0 := C([-\sigma,0], H)$) des fonctions continues de $[-\sigma,T]$ (resp $[-\sigma,0]$) dans l'espace de Hilbert H, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles compactes.

$$\|\varphi\|_T = \max\{\|\varphi(s)\|, s \in [-\sigma,T]\};$$

Respectivement

$$\|\varphi\|_0 = \max\{\|\varphi(s)\|, s \in [-\sigma,0]\}.$$

si $x : [-\sigma,T] \to H$, alors pour chaque $t \in I := [0,T]$, on définit la fonction

$$x_t(s) = \mathcal{T}(t)x(s) = x(t+s),\ s \in [-\sigma,0].$$

il est évident que, si $x \in C_T$, alors $u_t \in C_0$, et l'application $x \to x_t$ est continue au sens de la convergence uniforme.

Ce genre de problème se rencontrent en théorie de contrôle optimal, dans les problèmes de collision, en électrodynamique, ainsi que dans les procédures de planning en micro-économie et dans les problèmes d'évolution biologiques (voir par exemple 21, . Nous nous intéressons ici aux problèmes avec retard fini, pour le retard infini, on se réfère à 26.

Voici quelques exemples et motivations:

Définition 2.16 *Soit E un espace de Banach et*

$$F : [0,T] \times C\left([-\sigma,0],E\right) \to ck\left(E\right).$$

Une solution du problème

$$\dot{x}(t) \in F(t,x_t) \text{ p.p sur } [0,T],\ x := \varphi \text{ sur } [-\sigma,0]. \qquad \text{((IDR)}$$

avec $\varphi \in C\left([-\sigma,0],E\right)$ est une fonction continue $x : [-\sigma,T] \to E$ absolument continue sur $[0,T]$ vérifiant (IDR), x sera dite solution viable dans l'ensemble $K(t)$ pour $K : [0,T] \rightharpoondown E$ si en plus elle vérifie $x(t) \in K((x)t)$, $\forall t \in [0,T]$; K sera dit invariant si pour toute fonction initiale $\varphi \in C_0$ telle que $\varphi(0) \in K(0)$, toutes les solutions sont viables.

Chapitre 3

Etude d'une inclusion différentielle du premier ordre avec retard

3.1 Introduction:

La convexité représente une condition prépondérante pour l'obtention de l'existence de solution pour les inclusions différentielles. En l'absence de convexité pour le second membre (F à valeurs non nécessairement convexes, [12] ont développé une méthode de résolution pour un second membre cycliquement monotone, ie. en prenant les valeurs de F contenues dans le sous différentiel d'une fonction convexe propre s.c.i, on sait que ce sous différentiel est un opérateur maximal monotone et que le problème associé admet une unique solution.

Pour élargir la classe des opérateurs cycliquement monotones, [7] a considéré le sous différentiel d'une classe de fonctions plus large que celle des fonctions convexes s.c.i, en l'occurence la classe des fonctions réguliéres localement- lipschitziennes dont les propriétés permetheur assurer d'établir le même résultat d'existence.

L'objectif de ce chapitre est de généraliser les résultats obtenus par Benabdella [7] au cas avec retard pour établir un résultat d'existence pour les inclusions différentielles suivantes

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(\mathcal{T}(t)x) \text{ p.p sur } [0,T] \\ \mathcal{T}(0)x(s) = \varphi(s) \ \forall s \in [-\sigma,0] \end{cases} \tag{3.1}$$

et

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(\mathcal{T}(t)x) + f(t,x(t)) \text{ p.p sur } [0,T] \\ \mathcal{T}(0)x(s) = \varphi(s) \ \forall s \in [-\sigma,0] \end{cases} \tag{3.2}$$

Où $F : C_0 = C_0([-\sigma,0],\mathbb{R}^n) \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multifonction semi -continue supérieurement à valeurs compacts non nécessairement convexes dans $\mathbb{R}^n$.et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction de carathéodory.

Pour la démonstration on expose deux méthodes différentes: méthode des solutions $\varepsilon -$ *approchées* et méthode de discrétisation.

Rappelons d'abord le résultat sons retard du à H.Benabdallah [7]

Théorème 3.1 [7] *Soient* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction localement lipschitzienne régulière. soit* F *une multifonction semi-continue supérieurement définie sur* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans les sous-ensembles non vides compacts de* $\mathbb{R}^n$ *telle que*

$$F(x) \subset \partial V(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *il existe* $T > 0$ *et* $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$*une fonction absolument continue dont la mesure différentielle* Dx *admet une densité* $\dot{x} = \frac{Dx}{dt} \in L^1_E([0,T], dt)$ *vérifiant :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) \ p.p \ sur \ [0,T] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Nous allons établir un premier résultat en utilisant une méthode dite de solution approximante en utilisant le lemme de Zorn.

Commençons par définir les solutions $\varepsilon -$ *approchées :*

Définition 3.1 *Soient* $\varepsilon > 0$, $\zeta \in I$ *une fonction* $x : [0,\zeta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *sera dite solution* $\varepsilon -$ *approchée de l'inclusion différentielle* (1.1)*si*

1. $x(s) = \varphi(s)$ *sur* $[-\sigma, 0]$
2. $x(t) = \varphi(0) + \int_0^t \dot{x}(s)\,ds$ *avec* $\dot{x} \in L^\infty_{\mathbb{R}^n}([0,\zeta], dt)$ *et* $x(t) \in \overline{\mathbb{B}}(\varphi(0), r)$ *pour tout* $t \in [0,\zeta]$
3. *il existe* $\theta \in J_\varepsilon([0,\zeta])$ *tel que* $\dot{x}(t) = y(t) \in F(\mathcal{T}(\theta(t)\,x))$ *p.p sur* $[0,\zeta]$
4. $Vx(\zeta) - V(\varphi(0)) \geq \int_0^\zeta \|\dot{x}(t)\|^2 \ ds - \varepsilon\zeta$

On dira alors que x *est une solution* $\varepsilon -$*approchée définie sur* $[0,\zeta]$ *et que* θ *correspond à* x.

3.2 Résultat d'existence pour le problème sans perturbation

Enonçons maintenant le rèsultat principal

Théorème 3.2 *Soient* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction localement lipschitzienne régulière et .soit* F: $C_0 = C([-\sigma, 0], \mathbb{R}^n) \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *une multifonction à valeurs compactes dans* $\mathbb{R}^n$ *tel que*

F est semi -continue supérieurement et $F(\psi) \subset \partial V((\psi(0))), \forall \psi \in C_0$ *.Alors, pour tout* $\varphi \in C_0$, *il existe* $T > 0$ *et* $x : [-\sigma,T] \to \mathbb{R}^n$ *une fonction absolument continue sur* $[0,T]$ *solution du problème suivant:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(\mathcal{T}(t)x) \ p.p \ sur \ [0,T] \\ \mathcal{T}(0)x(s) = \varphi(s) \ \forall s \in [-\sigma,0] \end{cases} \tag{3.3}$$

Preuve.

Méthode1

Etape1: Existence de solution ε-approchée:

Soient $r > 0$ et $M > 0$ tels que V est M - Lipschitzienne sur la boule $\overline{\mathbb{B}}(\varphi(0),r)$, et par suite, $\partial V(x) \subset M\overline{\mathbb{B}}(0,1)$ pour tout $x \in \overline{\mathbb{B}}(\varphi(0),r)$ donc contenu dans une certaine boule $\overline{\mathbb{B}}(0,R)$ $(R > 0)$ de $\mathbb{R}^n$. Choisissons $T > 0$ tel que $RT < r$ et posons $I = [0,T]$. Soit $\mathcal{P}_\varepsilon([0,\zeta])$ l'ensemble de tous triplets (θ,x) avec x une solution ε-approchée et θ est une élément de $J_\varepsilon([0,\zeta])$ correspondant à x.

Remarquons que $\mathcal{P}_\varepsilon([0,0])$ et non vide (prendre$\mathcal{P}_\varepsilon([0,0]) = (0,x_0)$)

Posons d'abord $\mathcal{P}_\varepsilon = \bigcup_{\zeta \in I} \mathcal{P}_\varepsilon([0,\zeta])$ et définissons un ordre sur $\mathcal{P}_\varepsilon$ comme suit: pour tout $(\theta_i,x_i) \in \mathcal{P}_\varepsilon([0,\zeta])\,(i = 1,2)$ on noté $(\theta_1,x_1) \leq (\theta_2,x_2)$ si et seulement si $\zeta_1 \leq \zeta_2$, $\theta_{2\backslash}[0,\zeta_1] = \theta_1$, $x_{2\backslash}[0,\zeta_1] = x_1$, montrons que l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}_{\varepsilon}, \leq)$ est inductif. Soit Q un sous- ensemble totalement ordonné de $(\mathcal{P}_{\varepsilon}, \leq)$ formé de triplets $(\theta_v,x_v) \in \mathcal{P}_\varepsilon([0,\zeta_v])$, parcourant un ensemble d'indices Λ. posons

$$\zeta = \sup_{v \in \Lambda}\{\zeta_v\} \in I$$

S'il existe $v_0 \in \Lambda$ tel que $\zeta = \zeta_{v_0}$ alors (θ_{v_0},x_{v_0}) est le plus grand élément de Q .si $\zeta_v < \zeta$ pour tout $v \in \Lambda$, considérons les fonctions $\theta : [0,\zeta] \to [0,\zeta]$, $x : [0,\zeta[\to \mathbb{R}^n$ définies par :$\forall v \in \Lambda$, $\forall t \in [0,\zeta_v]$, $\theta(t) = \theta_v(t)$ et $\theta(\zeta) = \zeta$, $x(t) = x_v(t)$, les fonctions θ, x sont bien définies puisque Q est totalement ordonné. D'autre part pour tout $v \in \Lambda$ tous t,t' $\in [0,\zeta_v]$, $t < t'$

$$\|x_v(t') - x_v(t)\| \leq \int_t^{t'} \|(x(s))\|\,ds \leq R\,|t' - t|$$

Donc

$$\forall t,t' \in [0,\zeta], \|x(t') - x(t)\| \leq R\ |t' - t|$$

Par conséquent x admet une limite à gauche w au point ζ. Prolongeons x à $[0,\zeta]$ en Posant $x(\zeta) = w$ vérifions que (θ,x) appartient à $\mathcal{P}_\varepsilon([0,\zeta])$.

En effet, soit $(\zeta_{v_n})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante convergeant vers ζ.

Soit $\dot{x} : I \to \mathbb{R}^n$ la fonction définie par:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} \dot{x}_{v_n}(t) \ \text{si} \ t \in [\zeta_{v_{n-1}},\zeta_{v_n}[\ n \in \mathbb{N}^* \\ 0 \ \text{si} \ t = \zeta \end{cases}$$

Il en résulte puisque Q est une chaine, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_{v_n}(t) \qquad p.p \text{ sur } [0,\zeta_{vn}]$$

et par suite, pour tout $v \in \Lambda$, $\dot{x}(t) = \dot{x}_{v_n}(t)$ p.p.sur $[0,\zeta_{v_n}]$. Ceci entraîne en vertu de la définition de x que pour tout $t \in [0,\zeta[$

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t \dot{x}(s)\,ds \quad \forall t \in [0,\zeta[\text{ et } x(t) \in \overline{\mathbb{B}}(\varphi(0),r) \tag{3.4}$$

La validité de (3.4) pour $t = \zeta$ s'obtient par passage à la limite puisque $\dot{x} \in L^1_{\mathbb{R}^n}([0,\zeta],dt)$. Ceci entraîne en vertu de la définition de x que pour tout $t \in [0,\zeta]$

$$\dot{x}(t) \dot{\in} F((\mathcal{T}(\theta(t)\,x))), \text{ p.p. sur } [0,\zeta[$$

Et

$$\begin{aligned} V(x(T)) - V(\varphi(0)) &= \lim_{n\to\infty} [V(x(\zeta_{v_n})) - V(\varphi(0))] \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \sup \left[\int_0^{\zeta_{v_n}} \left\|\dot{x}_{\zeta_{v_n}}(s)\right\|^2 ds - \varepsilon\zeta_{v_n}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\int_0^{\zeta_{v_n}} \left\|\dot{x}_{\zeta_{v_n}}(s)\right\|^2 ds - \varepsilon\zeta_{v_n}\right] \\ &= \left[\int_0^{\zeta} \|\dot{x}(s)\|^2 ds - \varepsilon\zeta\right] \end{aligned}$$

Les considérations précédentes permettent de conclure que (θ,x) est un élément de $\mathcal{P}_\varepsilon$ majorant Q. D'après le lemme de Zorn, Q_ε admet un élément maximal $(\theta_\varepsilon,x_\varepsilon) \in Q_\varepsilon([0,\zeta_\varepsilon])$ avec $\zeta_\varepsilon \in I$. pour finir la démonstration dans ce théorème, il nous suffit de prouver que $\zeta_\varepsilon = T$. Faisons un raisonnement par l'absurde (*i.e.*on suppose que $\zeta_\varepsilon < T$). Par définition de la directionnelle, si y_ε est une élément fixé de $F(x_\varepsilon(\zeta_\varepsilon))$ $:\delta \in]0, \inf\{\varepsilon,T-\zeta_\varepsilon\}[$ tel que

$$\frac{1}{\delta}[V(x_\varepsilon(\zeta_\varepsilon)) + \delta x(y_0) - V(x_\varepsilon(\zeta_\varepsilon))] \geq V'(x_\varepsilon(\zeta_\varepsilon);y_0) - \varepsilon \tag{3.5}$$

Posons $\zeta' = \zeta_\varepsilon + \delta \in I$ et soient $\theta' : [0,\zeta'] \to [0,\zeta'], x' : [0,\zeta'] \to \mathbb{R}^n$ et les fonctions définies par :

$$\theta'(t) = \begin{cases} \theta_\varepsilon(t) \text{ si } t \in [0,\zeta_\varepsilon] \\ \zeta_\varepsilon \text{ si } t \in]\zeta_\varepsilon,\zeta'[\\ \zeta' \text{si } t = \zeta' \end{cases}$$

$$x'(t) = \begin{cases} x_\varepsilon(t) \ si\ t \in [0,\zeta_\varepsilon] \\ x_\varepsilon(\zeta_\varepsilon) + (t-\zeta_\varepsilon)\,y_\varepsilon \text{si } t \in]\zeta_\varepsilon,\zeta'] \end{cases}$$

Alors $x'(t) = x_0 + \int\limits_0^t \dot{x}'(t)\,ds \quad , \quad \forall t \in [0,\zeta']$

$$\dot{x}'(t) = \begin{cases} \dot{x}'(t) \ \ si\ t \in [0,\zeta_\varepsilon] \\ y_\varepsilon \text{si } t \in]\zeta_\varepsilon,\zeta'] \end{cases}$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} \forall t \ \ &\in \ \ \left[0,\zeta'\right], x'(t) = \varphi_0 + \int_0^t \dot{x}'(s)\,ds \\ \text{Avec } \dot{x}' \ &= \ y'(.) \text{ et } \dot{x}'(t) \in F\left(\mathcal{T}\left(\theta'(t)\right) x'\right) \end{aligned}$$

En outre pour tout $t \in]\zeta_\varepsilon,\zeta']$,

$$\left\|x'(t) - \varphi(0)\right\| = \left\|\int_0^{\zeta_\varepsilon} \dot{x}_\varepsilon(s)\,ds + (t-\zeta_\varepsilon)(y_\varepsilon)\right\| \le R.\zeta_\varepsilon + R(t-\zeta_\varepsilon) = Rt < r$$

Enfin, on a gràce à (3.5)

$$\begin{aligned} V\left(x'\left(\zeta'\right)\right) - V(\varphi(0)) &= V\left(x'\left(\zeta'\right)\right) - V(x_\varepsilon(\zeta_\varepsilon)) + V(x_\varepsilon(\zeta_\varepsilon)) - V(\varphi(0)) \\ &\ge \left(\zeta' - \zeta_\varepsilon\right) V'(x_\varepsilon(\zeta_\varepsilon); y_\varepsilon) - \varepsilon\left(\zeta' - \zeta_\varepsilon\right) + \int_0^{\zeta_\varepsilon} \langle \dot{x}_\varepsilon(s), \dot{x}_\varepsilon(s)\rangle\,ds - \varepsilon\zeta_\varepsilon \\ &\ge \left(\zeta' - \zeta_\varepsilon\right)\langle y_\varepsilon, y_\varepsilon\rangle + \int_0^{\zeta_\varepsilon} \|\dot{x}_\varepsilon(s)\|^2\,ds - \varepsilon\left[\zeta' - \zeta_\varepsilon + \zeta_\varepsilon\right] \\ &= \int_0^{\zeta} \|\dot{x}_\varepsilon(s)\|^2\,ds - \varepsilon\zeta' \end{aligned}$$

Ceci prouve que $(\theta',x') \in \mathcal{P}_\varepsilon([0,\zeta'])$ D'autre part $(\theta_\varepsilon,x_\varepsilon) \le (\theta',x')$et $(\theta_\varepsilon,x) \ne (\theta',x')$ .Ce qui contredit la propriété de maximalité de $(\theta_\varepsilon,x_\varepsilon)$, alors $T = \zeta_\varepsilon$.

Etape2: Existence des solutions:

Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels > 0 telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.à chaque ε_n, soit x_n la solution ε_n *approchée* de l'inclusion différentielle (3.3), définie sur I et soit θ_n un élément de $J_{\varepsilon_n}(I)$ correspondant à x_n

De ce qui précède, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on peut trouver (θ_n,x_n) appartenant à $\mathcal{P}_{\varepsilon_n}(I)$

La famille de fonctions $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $C(I,\mathbb{R}^n)$. En effet, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi continue puisque les fonctions x_n sont M -lipschitzienne, d'autre part pour tout $t \in I$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t,s \in I, \ \|x_n(t) - x_n(s)\| \le M \ \ |t-s|$$

l'ensemble $\{x_n(t) : n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compacte dans $\mathbb{R}^n$ Remarquons que la suite $(\dot{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement $\sigma(L^\infty(I,\mathbb{R}^n), L^1(I,\mathbb{R}^n))$ compacte, En effet pour Lebesgue presque tout $t \in I$, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \dot{x}_n(t) \in M\,\overline{\mathbb{B}}(0,1) \tag{3.6}$$

On peut donc trouver $x \in C(I,\mathbb{R}^n)$, $\dot{x} \in L^1_{\mathbb{R}^n}(I,\mu : \mathbb{R}^n)$, et une sous suite,notée (x_n) de (x_n) tels que (x_n) converge uniformément sur I vers x, $(\dot{x}_n)$ converge $\sigma(L^\infty_{R^n}, L^1_{R^n})$ vers $\dot{x}$, par conséquent pour tout $t \in [0,T]$

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi(0) + \int_0^t \dot{x}_n(\zeta)\,d\zeta = \varphi(0) + \int_0^t \dot{x}(\zeta)\,d\zeta \tag{3.7}$$

D'autre par $x = \varphi$ sur $[-\sigma,0]$ nous avons $x_n \to x$ sur $[0,T]$ et $\mathcal{T}(0)\,x = \varphi$ sur $[-\sigma,0]$. $\theta_n(t)$ converge uniformément vers t sur $[0,T]$, alors $x_n(\theta_n(t))$ converge uniformément vers $x(t)$ sur $[0,T]$, nous avons:

$$\|\mathcal{T}(\theta_n(t)\,x_n) - \mathcal{T}((t)\,x_n)\|_\infty \to 0\ n \to \infty \tag{3.8}$$

Comme x_n converge uniformément vers x sur $[-\sigma,T]$ alors$\mathcal{T}((t)\,x_n)$ converge uniformément vers$\mathcal{T}((t)\,x)$ sur $[-\sigma,0]$, et

$$\mathcal{T}(\theta_n(t)\,x_n) \to \mathcal{T}(t)\,x \quad \text{sur} C_0 \tag{3.9}$$

Comme $\dot{x}_n(t) \in \partial V(x_n(\theta_n(t)))$ p.p sur I et que ∂V est une multifonction $s.c.s$ à valeure compactes convexes de $\mathbb{R}^n$,d'autre part, de (3.6) , (3.7), on obtient

$$\dot{x}(t) \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{CO}\ \{\dot{x}_{n_k}(t) \quad k \geq n\} \subset \bigcap_{n\geq 0} \overline{CO} \bigcup_{k\geq n} \partial V x_{n_k}(\theta_{n_k}(t)) \subset \partial V(x(t))\ \ sur\ \ [0,T] \tag{3.10}$$

$$\text{i.e}\ \dot{x}(t) \in\ \partial V(x(t))\ \text{p.p sur}\ I \tag{3.11}$$

D'après la proposition(2.10) La mesure $D(V \circ x)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et presque partout sur I

$$\langle \partial V(x(t)), \dot{x}(t)\rangle = \left\{\frac{D((V\circ x))}{dt}(t)\right\}$$

Par suite d'après (3.11) :

$$\frac{D((V\circ x))}{dt}(t) = \langle \dot{x}(t), \dot{x}(t)\rangle = \|\dot{x}(t)\|^2\ p.p\ \ sur\ \ [0,T] \tag{3.12}$$

Par hypothèse sur les fonctions x_n, on a:

$$\forall k \in \mathbb{N}\ V(x_{n_k}(T)) - V(\varphi(0))) \geq \int_0^T \|\dot{x}_{n_k}(s)\|^2\,ds - \varepsilon_{n_k} T$$

par suite

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\int_0^T \left\|\dot{x}_{n_k}(s)\right\|^2 ds \leq V(x(T)) - V(\varphi(0)) = \int_0^T \left\|\dot{x}(s)\right\|^2 \tag{3.13}$$

Comme, en vertu d'une la suite$(\dot{x}_{n_k})$ converge faiblement dans $L^2_{\mathbb{R}^n}([0,T],dt)$ vers$(\dot{x})$, on

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\int_0^T \left\|\dot{x}_{n_k}(s)\right\|^2 ds = \int_0^T \left\|\dot{x}(s)\right\|^2$$

Ceci entraine en vertu d'une propriété bien connue des espaces L^P,$1 < p < \infty$, que la suite $(\dot{x}_n(t))$ converge en norme dans $L^2_{\mathbb{R}^n}(I,\mathbb{R}^n)$ vers $\dot{x}$. Quitte à extraire une sous -suite, on peut supposer que $(\dot{x}_n(t)) \to \dot{x}(t)$ p.p. sur $[0.T]$

On conclut finalement, puisque $gr(F)$ est fermé dans $C_0 \times \mathbb{R}^n$, que

$$(\mathcal{T}(t)x,\dot{x}) = \lim_{k\to\infty}(\mathcal{T}(\theta_n(t))x_n,\dot{x}_n(t)) \in gr(F)$$

i.e

$$\dot{x}(t) \in F(\mathcal{T}(t)x).$$

2- Méthode de discrétisation:

Soit Ω est un ensemble ouvert de C_0, tel que $\overline{\mathbb{B}}(\varphi,r) \subset \Omega$, F est localement bornée alors

$$\sup\left\{\|y\| : y \in F(\Psi)\ ,\Psi \in \overline{\mathbb{B}}(\varphi,r)\right\} \leq M \tag{3.14}$$

Comme φ est continue sur $[-\sigma,0]$ on choisit $\eta > 0$ tel que

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| < \frac{r}{4} \quad \text{pour tout } t,s \in [-\sigma,0] \quad \text{avec } |t-s| < \eta \tag{3.15}$$

Soit $0 < T \leq \min\left\{\eta,\frac{r}{4M}\right\}$ construction d'une suite de fonctions approximantes $(x_n)_n$, soit $\varphi \in C_0$, satisfaisant $\varphi(0) = x_0$ et posons:,

$$x_n(t) = \varphi(t) \quad \text{pour tout } t \in [-\sigma,0] \tag{3.16}$$

Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs tel que $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on peut trouver une subdivision

$$0 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \ldots\ldots\ldots < t_n^n = T, t_i^n = i\frac{T}{n} \quad (i = 1,.,.,.,.n)$$

de I telle que $t_i^n - t_{i-1}^n \leq \varepsilon_n = \frac{T}{n}$ pour tout $i = 1,.,.,...n$. Définissons sur I une suite de solutions approchées $x_n : \forall n \in \mathbb{N} : \forall t \in I$,

$$0 \leq t - t_i^n \leq \varepsilon_n = \frac{T}{n} \tag{3.17}$$

$$x_n(0) = x_n^o = \varphi(0) \quad \text{sur} \quad [-\sigma,0] \tag{3.18}$$

$$x_n(t) = x_i^n + (t - t_i^n)\, y_i^n \quad \text{pour tout} \quad t \in \left[t_i^n, t_{i+1}^n\right] \tag{3.19}$$

$$x_i^n = x_{i-1}^n + \frac{T}{n} y_{i-1}^n \tag{3.20}$$

$$\dot{x}_n(t) = y_i^n \in F\left(\mathcal{T}(t_i^n)\, x_n\right) \tag{3.21}$$

Pour chaque $i \in \{1,.......,n-1\}$, on prend :

$$x_i^n = \varphi(0) + \frac{T}{n}\left(y_0^n + y_1^n + ... + y_{i-1}^n\right) \tag{3.22}$$

tel que

de (3.14) et (3.19)

$$\|x_i^n - \varphi(0)\| = \left\| \frac{T}{n}\left(y_0^n + y_1^n + ... + y_{i-1}^n\right)\right\| \leq i\frac{T}{n}M < \frac{r}{4} \quad : \tag{3.23}$$

Donc

$$x_n(t_i^n) = x_i^n \in \overline{\mathbb{B}}\left(\varphi(0), \frac{r}{4}\right) \tag{3.24}$$

Pour chaque $\{i \in 1,2,......,n\}$, de (3.14) et (3.19) on a

$$\left\|x_n(t) - x_n\left(t_n^i\right)\right\| = \|x_n(t) - x_i^n\| \leq i\frac{T}{n}M < \frac{r}{4} \tag{3.25}$$

$i \in \{1,2,......,n\}$,de (3.24) et (3.25) on trouve :

$$\begin{aligned}
\|x_n(t) - \varphi(0)\| &= \left\|x_n(t) - x_n\left(t_n^i\right) + x_n\left(t_n^i\right) - \varphi(0)\right\| \\
&\leq \left\|x_n(t) - x_n\left(t_n^i\right)\right\| + \left\|x_n\left(t_n^i\right) - \varphi(0)\right\| \\
&\leq \frac{r}{2}
\end{aligned}$$

Donc :

$$x_n(t) \in \overline{\mathbb{B}}\left(\varphi(0), \frac{r}{2}\right) \quad \text{pour tout } t \in [0,T] \tag{3.26}$$

Comme,de (3.14) , (3.19) et (3.21), nous avons $\|\dot{x}_n(t)\| \leq M$ pout tout $t \in [0,T]$ et remarquons que par construction, les fonctions $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs dans la boule fermée $\overline{\mathbb{B}}\left(\varphi(0), \frac{r}{2}\right)$. En outre pour tout $t,t' \in I$, $t < t'$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|x_n(t) - x_n(t')\| \leq \int_t^{t'} \|\dot{x}_n(s)\, ds\| \leq M \ |t' - t| \leq M\ \eta$$

Donc l'ensemble $H = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une partie équicontinue de léspace de Banach $C_0([-\sigma,T], \mathbb{R}^n)$, et $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est relativememt compact pour tout $t \in I$, il en résulte (théorème d'ascoli Arsila) que l'ensemble H est relativement compact dans C_T=$C([-\sigma,T], \mathbb{R}^n)$, et $\|\dot{x}_n(t)\| \leq M$, alors il existe $x \in C_0([-\sigma,T], \mathbb{R}^n)$, $\dot{x} \in L^1_{\mathbb{R}^n}([\mathbb{R}^n], dt)$ et une sous -suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$de (x_n) tels que x_{n_k} converge uniformément sur $[0,T]$, $(\dot{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\dot{x}_n)$ converge faiblement vers

$(\dot{x})$ dans $L^1_{\mathbb{R}^n}([0,T],\mathbb{R}^n)$, de plus $x_n = \varphi$ sur $[-\sigma,0]$, x_n converge uniformément vers x sur $[-\sigma,T]$, $\mathcal{T}(0)\,x = \varphi$ sur $[-\sigma,0]$, on pose $\theta_n(t) = t_i^n$ pour tout $t \in [t_i^n,t_{i+1}^n]$ de (3.19), (3.21)

$$\dot{x}_n(t) \in F(\mathcal{T}(\theta_n(t)\,x_n)) \subset \partial V(x_n(\theta_n(t))) \text{ p.p sur } [0.T] \tag{3.27}$$

C omme $|\theta_n(t) - t| < T$ pour tout $t \in [0,T]$

Alors $\theta_n(t)$ converge uniformément vers t sur $[0,T]$, alors $x_n(\theta_n(t))$ converge uniformément vers $x(t)$ sur $[0,T]$, d'autre par, nous avons: $\|T(\theta_n(t)\,x_n(s)) - \varphi(s)\|$ pour tout $s \in [-\sigma,0]$

si $-\theta_n(t) \le s \le 0$, alors $\theta_n(t) + s \ge 0$ et il existe $j \in \{0,1,2,3,..........n\}$ tel que $\theta_n(t) + s \in [t_j^n,t_{j+1}^n]$ de (3.15)et (3.27) et de $|\theta_n(t) - t| \le T$ et $|s| \le T$, nous avons

$$\begin{aligned}\|T(\theta_n(t)\,x_n(s)) - \varphi(s)\| &= \|x_n(\theta_n(t) + s) - \varphi(s)\| \\ &\le \|x_n(\theta_n(t) + s) - \varphi(0)\| + \|\varphi(0) - \varphi(s)\| \\ &< \frac{3r}{4} < r\end{aligned}$$

Si$-\sigma \le s \le -\theta_n(t)$, alors $s + \theta_n(t) \le 0$ et de (3.15) nous avons

$$\|T(\theta_n(t)\,x_n(s)) - \varphi(s)\| = \|\varphi(\theta_n(t) + s) - \varphi(s)\| \le \frac{r}{4} < r$$

Donc:

$$T(\theta_n(t))x_n \in \overline{\mathbb{B}}(\varphi,r) \quad \text{pour tout } t \in [0,T] \tag{3.28}$$

Soit ψ est une fonction continue définie sur l'intrevalie I de $\mathbb{R}$
$\omega(\psi,I,\varepsilon) = \sup\{\|\psi(t) - \psi(s)\|\,; s,t \in I\ , |t-s| < \varepsilon\}$ $\varepsilon > 0$ Alors, nous avons

$$\begin{aligned}\|T(\theta_n(t))x_n - T(t)\,x_n\|_\infty &= \sup_{-\sigma\le s\le 0} \|x_n(\theta_n(t) + s) - x_n(s+t)\| \\ &\le \omega\left(x_n, [-\sigma,T], \frac{T}{n}\right) \\ &\le \omega\left(\varphi, [-\sigma,0], \frac{T}{n}\right) + \omega\left(x_n, [0,T], \frac{T}{n}\right) \\ &\le \omega\left(\varphi, [-\sigma,0], \frac{T}{n}\right) + \frac{T}{n}M\end{aligned}$$

D'où:

$$\|T(\theta_n(t))x_n - T(t)\,x_n\|_\infty \le \delta_n \qquad \text{pour tout } t \in [0,T] \tag{3.29}$$

On pose:$\delta_n = \omega\left(\varphi, [-\sigma,0], \frac{T}{n}\right) + \frac{T}{n}M$, φ est continue, nous avons $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$.Donc:

$$\|T(\theta_n(t))x_n - T(t)\,x_n\|_\infty \to 0 \ n \to \infty$$

Comme x_n converge uniformément vers x sur $[-\sigma,T]$ alors $T(t))x_n$ converge uniformément vers $T(t)\,x$ sur $[-\sigma,0]$,on déduit que

$$T(\theta_n(t))\,x_n \text{ converge vers } T(t)\,x \text{ sur } C_0 \tag{3.30}$$

et V une fonction localement lipschitzinne régulière, $\dot{x}_n(t) \rightharpoonup \dot{x}(t)$ et $T(\theta_n(t))x_n \to T(t)\,x$

$$\dot{x}(t) \in COF(T(t))\,x \subset \partial V(x(t))$$

$\forall t \in N$ D'après la proposition (2.10) la mesure $D(V \circ x)$ est absolument continue par rapport à la mesure de lebesgue et presque partout sur I

$$\langle \partial V(x(t)),\dot{x}(t)\rangle = \left\{ \frac{D((V\circ x))}{dt}(t) \right\}$$

, nous avons

$$\frac{D((V\circ x))}{dt}(t) = \langle \dot{x}(t),\dot{x}(t)\rangle = \|\dot{x}(t)\|^2 \text{ p.p sur } [0,T] \tag{3.31}$$

D'autre part en vertu des prpriétés du sous-différentiel de fonction convexe, nous avons pour tout $i \in \{0,1,2,3..........;n\}$;

$$\begin{aligned} V\left(x_n\left(t_{i+1}^n\right)\right) - V\left(x_n\left(t_i^n\right)\right) &\geq \left\langle y_i^n, x_n\left(t_{i+1}^n\right) - x_n\left(t_i^n\right)\right\rangle \\ &= \left\langle y_i^n, \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \dot{x}_n(t)\,dt \right\rangle \\ &= \left\langle \dot{x}_n(t), \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \dot{x}_n(t)\,dt \right\rangle \\ &= \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{x}_n(s)\|^2 \end{aligned}$$

En faisant la somme de ces inégalités de $i=0$ jusqu'à $i=n-1$,on obtient

$$V(x_n(T) - V(\varphi(0))) \geq \int_0^T \|\dot{x}(s)\|^2\,ds$$

D'où

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \int_0^T \|\dot{x}(s)\|^2\,ds \leq V(x(T)) - V(\varphi(0)) = \int_0^T \|\dot{x}(s)\|^2 \tag{3.32}$$

comme $(\dot{x}_n)$ converge faiblement vers $(\dot{x})$ dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$,
donc de (2.19) et proposition (2.11) on obtient
$(\dot{x}_n)$ convere fortement vers $(\dot{x})$ dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$,

Pour chaque $t \in [0,T]$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\lim_{n\to\infty} x_n(\theta_n(t)) = x(t), \mathcal{T}(\theta_n(t)x_n) \to \mathcal{T}(t)x$ sur C_0 ,pour tout $t \in [0,T]$ et le graphe de F étant fermé,on obtient:

$$y(t) \in F(\mathcal{T}((t))x) \tag{3.33}$$

Comme $\dot{x}(t) = y(t)$ pour tout $t \in [0,T]$ et de(3.33) on trouve

$$\dot{x}(t) \in F(\mathcal{T}((t))x) \;\; p.p \; sur \, [0.T]$$

■

3.3 Résultat d'existence pour le problème avec perturbation de carathéodory

Théorème 3.3 *3.2 Soit Ω une ouvert de $\mathbb{R}^n$et $V : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzinne régulière et soit F:C_0=$C([-\sigma,0],\mathbb{R}^n) \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multifonction à valeurs compactes dans $\mathbb{R}^n$tel que F est semi -continue supérieurement à valeurs compactes dans $\mathbb{R}^n$et $F(\psi) \subset \partial(\psi(0))$,$\forall\ \psi \in C_0$ et f: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction carathéodory. Alors, pour tout $\varphi \in C_0$, il existe $T > 0$ et $x : [-\sigma,T] \to \mathbb{R}^n$ une fonction absolument continue sur $[0,T]$ solution du problème suivant:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(\mathcal{T}(t)x) + f(t,x(t)) \; P.P \; sur \; [0.T] \\ \mathcal{T}(0)x(s) = \varphi(s) \quad \forall s \in [-\sigma.0] \end{cases} \tag{3.34}$$

Preuve. Soient $r > 0$ et $M > 0$ tels que V est M - Lipschitzienne sur la boule $\overline{\mathbb{B}}(\varphi(0),r)$, et par conséquent, $\partial V(x) \subset M\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}$ pour tout $x \in \overline{\mathbb{B}}(\varphi(0),r)$ donc contenu dans une certaine boule $\overline{\mathbb{B}}(0,R)$ $(R > 0)$ de $\mathbb{R}^n$. Choisissons $T > 0$

Posons $I = [0,T]$

Comme Ω est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, tel que $\overline{\mathbb{B}}(\varphi,r) \subset \Omega$, F est localement bornée alors

$$\sup\left\{\|y\| : y \in F(\Psi) \;, \Psi \in \overline{\mathbb{B}}(\varphi,r)\right\} \le M \tag{3.35}$$

Comme φ est continue sur $[-\sigma,0]$, on a choist $\eta > 0$ tel que

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| < \frac{r}{4} \text{ pour tout } t,s \in [-\sigma,0] \text{ avec } |t-s| < \eta \tag{3.36}$$

Posons $T > 0$ tel que

$T = \min\left\{\eta, \frac{r}{4M}\right\}$, construction d'une suite de fonctions approximantes $(x_n)_n$, soit $\varphi \in C_0$, satisfaisant $\varphi(0) = x_0$ et posons:

$$x_n(t) = \varphi(t) \;\; \text{pour tout } t \in [-\sigma,0] \tag{3.37}$$

Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs tel que $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$, pour chaque $n\in\mathbb{N}$ on peut trouver une subdivision

$$0 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \dots\dots\dots < t_n^n = T, \ t_i^n = i\frac{T}{n} \quad (i = 1,.,.,.,.n)$$

de I telle que $t_i^n - t_{i-1}^n \le \varepsilon_n = \frac{T}{n}$ pour tout $i = 1,...n$. Définissons sur I une suite de solutions approchées $x_n : \forall n\in\mathbb{N} : \forall t\in I$,

$$x_n(0) = \varphi(0) \quad \text{sur } [-\sigma,0]$$

$$x_n(t) = x_n(t_i^n) + \int_{t_i^n}^t [f(s,x_n(t_i^n)) + y_i^n]\,ds$$

Pour tout $i = 0,1,2,......n-1$.où

$$y_i^n \in F(\mathcal{T}(t_i^n)x_n)$$

Pour chaque $i \in \{0,1,2,3,........n-1\}$ choissons $y_i^n \in \partial V(x_n(t_i^n))$ et posons pour tout $t\in [t_i^n,t_{i+1}^n[$

$$\theta_n(t) = t_i^n,\ y_i^n = y_n(t)$$

dans toutes les définitions précédentes le dernier segment $[t_i^n,t_{i+1}^n[$ (correspondant à $i = n-1$)est considéré comme fermé à droite,

Alors on a les propriétés suivantes :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \forall t\in I \quad 0 \le t - \theta_n(t) \le \varepsilon_n = \frac{T}{n} \tag{3.38}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \forall t\in I \quad x_n(t) = \varphi(0) + \int_0^t [f(s,x_n(\theta_n(s))) + y_n(s)]\,ds \tag{3.39}$$

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \forall t\in I \quad y_n(t) \in F(\mathcal{T}(\theta_n(t))x_n)$$

$$F(\mathcal{T}(\theta_n(t))x_n) \subset \partial V(x_n(\theta_n(t))) \tag{3.40}$$

Observons que $x_n(t) \in \overline{\mathbb{B}}(\varphi(0),r)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, et pour $t\in[0.T]$

$$\|x_n(t) - \varphi(0)\| = \left\|\int_0^t [f(s,x_n(\theta_n(t)) + y_n(t)]\,ds\right\| \le (m_1 + M)\,T \le r$$

D'où :

$$x_n(t) \in \overline{\mathbb{B}}(\varphi(0),r) \tag{3.41}$$

Remarquons que, par construction, les fonctions $(x_n)_{n\in N}$ sont à valeurs dans la boule fermée $\overline{\mathbb{B}}(\varphi(0),r)$.En outre pour tout $t,t'\in I$, $t < t'$et tout $n\in N$, on a

$$\left\|x_n\left(t'\right) - x_n(t)\right\| = \left\|\int_t^{t'} [f(s,x_n(\theta_n(t))) + \ y_n(t)]\,ds\right\|$$

$$\leq \int_{t}^{t'} [\|f(s,x_n(\theta_n(t)))\| + \| y_n(t)\|]\, ds$$

$$\leq (m_1 + M)\left(t' - t\right)$$

$\forall\ 0 \leq t \leq t' \leq T$ et $n \in N^*$, d'où$\{x_n\}_{n\in N}$ est une partie équicontinue de l'espace de $C([0.T],\mathbb{R}^n)$, et l'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact pour tout $t \in I$, il en résulte (théorème d'Ascoli) que l'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans $C([0.T],\mathbb{R}^n)$, la suit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont relativement $\sigma(L^{\infty}_{\mathbb{R}^n},L^1_{\mathbb{R}^n})$ compact puisque pour $\mu-$presquetout $t \in I$ on a:

$$\|y_n(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M$$

Il existe donc $x \in C([0.T],\mathbb{R}^n)$ et $y \in L^1_{\mathbb{R}^n}([0.T],\mathbb{R}^n)$et une sous- suite$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ dex_n tel que (x_{n_k}) converge dans $C([0.T],\mathbb{R}^n)$ vers x, (y_{n_k}) converge pour $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n},L^{\infty}_{\mathbb{R}^n})$ vers y

aussi,nous avons $f(.,x_n(\theta_n(t)))$ converge en norme dans l'espace $L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$. par conséquent, pour tout $t \in [0,T]$

D'autre part $x = \varphi$ sur $[-\sigma,0]$ nous avons $x_n \to x$ sur $[0,T]$ et $\mathcal{T}(0)x = \varphi$ sur $[-\sigma,0]$ .de (3.38) , $\theta_n(t)$ converge uniformément vers t sur $[0,T]$, Alors $x_n(\ \theta_n(t))$ converge uniformément vers $x(t)$ sur $[0,T]$, nous avons:

$$\|\mathcal{T}(\theta_n(t)x_n) - \mathcal{T}((t)x_n)\|_{\infty} \to 0 \qquad n \to \infty \tag{3.42}$$

Comme x_n converge uniformément vers x sur $[-\sigma,T]$ alors$\mathcal{T}((t)x_n)$ converge uniformément vers$\mathcal{T}((t)x)$ sur $[-\sigma,0]$, et

$$\mathcal{T}(\theta_n(t)x_n) \to \mathcal{T}(t)x \ sur\ C_0 \tag{3.43}$$

Un passage à la limite dans montre que x est nécessairement de la forme $\forall t \in I$.

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t \dot{x}(s)\, ds \tag{3.44}$$

Où $\dot{x}(t) = f(t,x(t)) + y(t)$ pour tout $t \in I$. par construction, on a pour tout $t \in [0,T]$

$$\dot{x}_n(t) - f_n(t) = y(t) \in F(\mathcal{T}(\theta_n(t))x_n) \subset \partial V(x_n(\theta_n(t)))$$

i.e

$$\dot{x}_n(t) - f_n(t) \in \partial V(x_n(\theta_n(t)))$$

Enfin puisque $y_{n_k}(t) \in \partial V(x_{n_k}(\theta_{n_k}(t)))$ μ presque par tout sur I, et que ∂V est une multifonction $s.c.s$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans les sous ensembles convexes fermés de $\mathbb{R}^n$,le Théorém(1.13)

$$y(t) \in \partial V((x(t))) \quad \text{p.p sur } [0.T] \tag{3.45}$$

Les fonctions convexes étant des fonctions localement lipschitziennes régulières, la proposition(2.10) entraine que $V \circ x$ est à variation bornée sur I la mesure différentielle $D(V \circ x)$ est absolument continue par rapport à μ, et pour μ -presque tout $t \in I$ l'ensemble $\langle \partial V((x(t))), \dot{x}(t) \rangle$ est réduit au singleton $\left\{ \frac{D(V \circ x)}{d\mu}(t) \right\}$. par conséquent d'après(3.45)

$$\begin{aligned} \frac{D(V \circ x)}{d\mu}(t) &= \langle y(t), \dot{x}(t) \rangle \\ &= \langle \dot{x}(t) - f(t,x(t)), \dot{x}(t) \rangle \end{aligned}$$

Donc:

$$V(x(T)) - V(\varphi(0)) = \int_0^T \|\dot{x}(t)\|^2 - \int_0^T \langle \dot{x}(t), f(t,x(t)) \rangle dt \tag{3.46}$$

comme

$$\dot{x}_n(t) \in F(\mathcal{T}((t_i^n))x) \subset \partial V(x_n(t_i^n))$$

D'autre part en vertu des prpriétés du sous-différentiel de fonction convexe, nous avons pour tout $i \in \{0,1,2,3.........;n\}$;

$$\begin{aligned} V(x_n(t_{i+1}^n)) - V(x_n(t_i^n)) &\geq \langle y_i^n, x_n(t_{i+1}^n) - x_n(t_i^n) \rangle \\ &= \left\langle y_i^n, \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \dot{x}_n(t)\, dt \right\rangle \\ &= \left\langle \dot{x}_n(t) - f(t,x_n(t)), \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \dot{x}_n(t)\, dt \right\rangle \\ &= \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{x}_n(s)\|^2 ds - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \langle \dot{x}_n(s) - f(t,x_n(s)) \rangle ds \end{aligned}$$

En faisant la somme de ces inégalités de $i = 0$ jusqu'à $i = n - 1$,on obtient

$$V(x(T)) - V(\varphi(0)) \geq \limsup_{n\to\infty} \int_0^T \|\dot{x}(s)\|^2 ds + \int_0^T \langle \dot{x}_n(s) - f(t,x_n(s)) \rangle ds \tag{3.47}$$

On a:

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T \langle \dot{x}_n(s), f(s,x_n(\theta_n(s))) \rangle ds = \int_0^T \langle \dot{x}(t), f(s,x(s)) \rangle ds$$

En effet, pour tout $t \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$ $\langle \dot{x}_n(s), f(s,x_n(\theta_n(s))) \rangle - \langle x(t), f(s,x(s)) \rangle = \alpha_{n_k}(t) + \beta_{n_k}(t)$ où $\alpha_{n_k}(t) = \langle y_{n_k}(s), f(s,x_{n_k}(\theta_{nk}(s))) - f(s,x(s)) \rangle$ et

$\beta_n(t) = \langle \dot{x}_n(s) - x(s), f(s,x(s)) \rangle$ on a $\int_0^T \beta_n(t)\, ds \to 0$ puisque$\dot{x}_n - x \to 0$ dans $L^1_{\mathbb{R}^n}([0.T], \mathbb{R}^n)$. et $\int_0^T |\alpha_n(t)|\, ds \to 0$ puisque $f_n \to f$ dans $L^1([0.T], \mathbb{R}^n)$ En passant à la limite dans l'inégalité (3.47) quand $n \to \infty$ et en utilisant la continuité de V, on obtient

$$V(x(T)) - V(\varphi(0)) \geq \int_0^T \langle \dot{x}_n, f(t,x(t)) \rangle dt + \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^T \|\dot{x}_n(t)\|^2 dt$$

En comparant ceci avec (3.46), on trouve

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^T \|\dot{x}_n(t)\|^2 \, ds \leq \int_0^T \|\dot{x}(t)\|^2 \, ds \tag{3.48}$$

et comme $(\dot{x}_n)$ converge faiblement vers $(\dot{x})$ dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$,

donc de (3.15) et proposition (2.11) on obtient

$(\dot{x}_n)$ convere fortement vers $(\dot{x})$ dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$,

Pour chaque $t \in [0,T]$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\lim_{n\to\infty} x_n(\theta_n(t)) = x(t), \mathcal{T}(\theta_n(t)x_n) \to \mathcal{T}(t)x$ sur C_0 ,pour tout $t \in [0,T]$ et le graphe de F étant fermé,on obtient:

$$y(t) \in F(\mathcal{T}((t))x) \tag{3.49}$$

Comme $\dot{x}(t) = y(t) + f(t,x(t))$ pour tout $t \in [0,T]$ et de(3.49) on trouve

$$\dot{x}(t) \in F(\mathcal{T}((t))x) + f(t,x(t)) \;\; p.p \; sur \, [0.T]$$

■

Chapitre 4

Etude d'une inclusion différentielle du second ordre avec retard

4.1 Introduction:

Ce chapitre est consacré à quelques résultats d'existense de solutions pour des inclusions différentielles avec retard du second ordre de la forme suivante:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) \in F(\mathcal{T}((t))x,\dot{x}) \ p.p \text{ sur } I \\ \mathcal{T}(0)x = \varphi\ (s)\ \forall s \in [-\sigma,0] \\ \dot{x}(0) = y_0 \end{cases} \quad (p.b(\ 3.1))$$

et

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) \in F(\mathcal{T}((t))x,\dot{x}(t)) + f(t,x(t),\dot{x}(t)) \ p.p \text{ sur } I \\ \mathcal{T}(0)x = \varphi\ (s)\ \forall s \in [-\sigma,0] \\ \dot{x}(0) = y_0 \end{cases} \quad (p.b(\ 3.2))$$

Où $F : C_0^1 \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$une multifonction semi-continue supérieurement à valeurs compactes dans $\mathbb{R}^n$ tel que $F(\psi,y) \subset \partial V(\psi(y))$, $\forall\ \psi \in C_0,\forall y \in \Omega$, Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne régulière

$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction carathéodory

De tels problèmes la cas sans retart ont été étudiés par différents auteurs (voir par exemple ([24],[7],[27]) ainsi que leurs références)

L'auteur dans V.Lupulescu[28] a abordé le cas où F une miltifonction semi-continue Supérieurement à valeurs compactes non vides dans $\mathbb{R}^n$ telle que $F(\psi,y) \subset \partial V(y)$,$\forall$ $\psi \in C_0,\forall y \in \Omega$

où ∂V est le sous différentiel d'une fonction convexe $s.c.i$,propre,V définie sur $\mathbb{R}^n$,

4.2 Résultat d'existence pour le problème sans perturbation

Le théorème principal de ce chapitre, consisteà développer une version retardée du probléme précédent, en se basant sur les techniques, et les arguments de démonstration utilisée par [24]

Théorème 4.1 *:Soit Ω une ouvert de $\mathbb{R}^n$et $V : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne régulière soit F:$C_0^1 \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows P(\mathbb{R}^n)$ une multifonction semi -continue supérieurement à valeurs compacts dans $\mathbb{R}^n$ tel que $F(\psi,y) \subset \partial V(y)$,$\forall\ \psi \in C_0$,$\forall y \in \Omega$ Alors, pour tout $\varphi \in C_0^1$, il existe $T > 0$ et $x : [-\sigma,T] \to \mathbb{R}^n$ une fonction absolument continue sur $[0,T]$ solution de*

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) \in F(\mathcal{T}((t))x,\dot{x}(t)) \ p.p\ sur\ I \\ \mathcal{T}(0)x = \varphi\ (s)\ \forall s \in [-\sigma,0] \\ \dot{x}(0) = y_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Preuve. Ω etant un ouvert, $y_0 \in \Omega$, et V localement lipschitzienne, on peut choisir $r > 0$ tel que $\overline{\mathbb{B}}(y_0,r) \subset \Omega$ et V est $M-$lipchitzienne sur la boule $\overline{\mathbb{B}}(y_0,r)$

(Par conséquent $\partial V(y) \subset M\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}$,$\forall y \in \overline{\mathbb{B}}(y_0,r)$) .l'ensemble $K_1 = \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}M$ est convexe compact dans $\mathbb{R}^n$

Comme φ est continue sur $[-\sigma,0]$, on choisit $\eta > 0$

$$\|\varphi(t) - \varphi(s)\| \leq \frac{r}{4}\text{pour tout } t,s \in [-\sigma,0] \text{ avec } |t-s| < \eta \tag{4.2}$$

Posons $T > 0$ tel que

$$T = \min\left\{\eta, \frac{r}{M}, \frac{r}{r + \|y_0\|}\right\}$$

On pose $I = [0,T]$ .définissons une partition de I comme suit, pour tout entier $n \geq 0$ et pour $1 \leq i \leq n-1$on pose $t_i^n = i\frac{T}{n}$, $I_i^n = \left[t_{i-1}^n, t_i^n\right[$ et $t_n^n = T$

Définissons maintenant, les suites de fonctions suivantes à partir de y_0,φ,

Nous avons

$$\begin{cases} x_n(s) = \varphi(s) \quad \forall s \in [-\sigma,0] \text{ et } \varphi \in C([-\sigma,0]) \\ y_0 = \dot{x}_0 \in \Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{T}(0)x_n = \varphi \text{ sur } [-\sigma,0] \\ y_n(0) = y_0 \\ u_0^n \in F(\mathcal{T}(0)x_n,y_0) \end{cases}$$

$\forall t \in [o,t_1^n]$:

$$y_n(t) = y_0 + \int_0^t u_0^n ds = y_0 + u_0^n(t)$$

$$x_n(t) = \varphi(0) + \int_0^t y_n(s)\, ds$$

$$u_1^n \in F\left(\mathcal{T}(t_1^n)\, x_n, y_n(t_1^n)\right)$$

$\forall t \in [t_1^n, t_2^n]$

$$y_n(t) = y_n(t_1^n) + \int_{t_1^n}^t u_1^n ds$$

$$x_n(t) = x_n(t_1^n) + \int_{t_1^n}^t y_n(t_1^n)$$

Par recurence

$\forall t \in \left[t_i^n, t_{i+1}^n\right[: 1 \leq i \leq n-1$, où

$$\mathcal{T}(0)\, x(s) = \varphi(s)\,,\ \dot{x}(0) = y_0$$

Et

$$u_i^n \in F\left(\mathcal{T}(t_i^n)\, x_n, y_n(t_i^n)\right)$$

pour chaque $1 \leq i \leq n-1$,on prend $u_i^n \in \partial V(y_n(t_i^n))$

$$y_n(t) = y_n(t_i^n) + \int_{t_i^n}^t u_i^n ds$$

$$x_n(t) = x_n(t_i^n) + \int_{t_i^n}^t y_n(t_i^n)$$

maintenant on définit les fonctions

$$\theta_n(t) = t_i^n,\ u_i^n = u_n(t)\,, y_i^n = y_n(t) \qquad t \in \left[t_i^n, t_{i+1}^n\right[$$

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$et tout $t \in [0,T]$, nous avons les propriétés suivauts:

$$0 \leq t - \theta_n(t) \leq \frac{T}{n} \tag{4.3}$$

$$y_n(t) = y_0 + \int_0^t u_n(t)\, ds \tag{4.4}$$

$$x_n(t) = \varphi(0) + \int_0^t y_n(t)\, ds \tag{4.5}$$

$$u_n(t) \in F\left(\mathcal{T}(\theta_n(t))\, x_n, y_n(\theta_n(t))\right) \tag{4.6}$$

Observons que $y_n(t) \in \overline{\mathbb{B}}(y_0, r)$ et $x_n(t) \in \overline{\mathbb{B}}(\varphi(0), r)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$et tout $t \in [0,T]$. en effet il est clair que

$$\|y_n(t) - y_0\| = \left\| \int_0^t u_n(t)\, ds \right\| \leq MT < r$$

Et

$$\|x_n(t)-\varphi(0)\| = \left\| \int_0^t y_n(t)\,ds \right\| \leq (\|y_0\|+r)\,T < r$$

D'où

$$\|y_n(t)-y_n(t')\| \leq M\ \ |t-t'|$$

$\forall 0 \leq t \leq t' \leq T$ et $n \in \mathbb{N}^*$. d'autre part nous avons

$$\|x_n(t)-x_n(t')\| \leq \int_t^{t'} \|y_n(s)\|\,ds \leq (\|y_0\|+r)\,|t-t'|$$

$\forall 0 \leq t \leq t' \leq T$ et $n \in \mathbb{N}^*$, donc$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites equi-lipchitzienne dans $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ .comme les ensembles $\{x_n(t),n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\{y_n(t),n \in \mathbb{N}^*\}$ sont relativement compacts dans $L^2([0.T],\mathbb{R}^n)$ pour chaque $t \in [0,T]$. en effet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$et $t \in [0,T]$

$$y_n(t) \in y_0 + [0,T] \times \{K_1\} = K_2$$

Avec K_2 est compact, on a aussi

$$x_n(t) \in \varphi(0) + [0,T] \times K_2$$

pour tous $n \in \mathbb{N}^*$et tous $t \in [0,T]$, d'après le théorème d'Ascoli Arzela, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$sont relativement compact.de plus la suite$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$est relativement ,−compact puisque nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^* u_n \in M\overline{\mathbb{B}}$$

On peut donc extraire des sous suites, notées encore (x_n), (y_n), (u_n) il existe $x \in C([0,T],\mathbb{R}^n)$, $y \in C([0,T],\mathbb{R}^n)$, $u \in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ tel que: x_n converge uniformément sur $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ vers x.

y_n converge uniformément sur $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ vers y.

u_n converge faiblement vers u.dans $L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$

par conséquent pour tout $t \in [0,T]$

$$\varphi(0) + \int_0^t \dot{x}_n(\tau)\,d\tau = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \varphi(0) + \lim_{n\to\infty} \int_0^t y_n(t)\,d\tau = \varphi(0) \quad + \int_0^t y(t)\,d\tau$$

Donc on trouve l'égalité

$$\dot{x}(t) = y(t) \tag{4.7}$$

d'autre part $x=\varphi$ sur $[-\sigma,0]$ nous avons $x_n \to x$ sur $[-\sigma,T]$ et $\mathcal{T}(0)\,x = \varphi$ sur $[-\sigma,0]$.de plus, de(4.3), $\theta_n(t)$ converge uniformément vers t sur $[0,T]$, notons $x_n(\ \theta_n(t))$ converge uniformément vers $x(t)$ sur $[0,T]$, et $y_n(\theta_n(t))$ converge uniformément vers $y(t)$, pour tous $t \in [0,T]$, de plus nous avons:

$$\|\mathcal{T}(\theta_n(t)\,x_n) - \mathcal{T}((t)\,x_n)\|_\infty \to 0 \qquad n \to 0$$

Comme x_n converge uniformément vers x sur $[-\sigma,T]$ implique que $\mathcal{T}((t)\,x_n)$ converge uniformément vers $\mathcal{T}((t)\,x)$ sur $[-\sigma,0]$,et

$$\mathcal{T}(\theta_n(t)\,x_n) \to \mathcal{T}(t)\,x \quad \text{sur } C_0$$

Où $y(t) = y_0 + \int_0^t \dot{y}(s)\,ds$, pour tout $t \in [0,T]$. Ils'ensuit de (4.4) que $\dot{y}(t) = u(t)$ pour tout $t \in [0,T]$ et de (7) On obtient que

$$\ddot{x}(t) = u(t)$$

Pour tout $t \in [0,T]$, par construction, nous avons pour tout $t \in [0,T]$,

$$\ddot{x}_n(t) = u_n(t) \in F(\mathcal{T}(\theta_n(t))\,x_n, y_n(\theta_n(t))) \subset \partial V(y_n(\theta_n(t))) \tag{4.8}$$

Comme $\ddot{x}_n(t) \in \partial V(y_n(\theta_n(t)))$ $p.p$ sur $[0,T]$, on en déduite puisque ∂V est une multiapplication $s.c.s$ à valeurs convexes compactes de $\mathbb{R}^n$, que

$$\ddot{x}(t) \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{CO}\ \{\ddot{x}_{n_k}(t) \quad k \geq n\} \subset \bigcap_{n\geq 0} \overline{CO} \bigcup_{k\geq n} \partial V(y_{n_k}(\theta_{n_k}(t))) \subset \partial V(y(t)) \ \ sur \ \ [0,T]$$

i.e

$$u(t) \in \partial V(y(t))$$

D'autre part, comme V est régulière dans Ω et $\dot{x}(t) = y(t) \in \mathbb{B}(y_0,r)$ pour tout $t \in [0,T]$ nous avons de la proposition (2.10), la mesure $D(V \circ x)$ est absolument continue par rapport à la mesure de lebesgue et presque partout sur I

$$\langle \partial V(\dot{x}(t)), \ddot{x}(t) \rangle = \left\{ \frac{D((V \circ \dot{x}))}{dt}(t) \right\}$$

Par suite d'après ce qui précède

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{D((V \circ \dot{x}))}{dt}(t) \right\} &= \langle u(t), \ddot{x}(t) \rangle \ \text{p.p.sur}I \\ &= \|\ddot{x}(t)\|^2 \ \text{p.p.sur}I \end{aligned}$$

Par conséquent

$$V(\dot{x}(T)) - V(y_0) = \int_0^T \|\ddot{x}_n(t)\|^2\,dt \tag{4.9}$$

Par hypothése sur les fonctions y_n,on a,de plus $y_n(\theta_n(t)) \in \overline{\mathbb{B}}(y_0,r) \subset \Omega$, nous avons pour tous $i \in \{0,.......n-1\}$

comme $u_i^n \in \partial V(y_i^n)$

$$\begin{aligned} V(y_{i+1}^n) - V(y_i^n) &\geq \langle u_i^n, y_{i+1}^n - y_i^n \rangle \\ &= \left\langle u_i^n, \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} u_n(t)\,ds \right\rangle \\ &= \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \langle u_n(s), u_n(s) \rangle\,ds \\ &\geq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|u_n(s)\|^2\,ds \end{aligned}$$

$$V(\dot{x}\ (T)) - V(y_0) \geq \lim_{n\to\infty} \sup \int_0^T \|\dot{y}_n(s)\|^2\,ds \tag{4.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \int_0^T \|\dot{y}_n(s)\|^2 \leq \int_0^T \|\dot{y}(s)\|^2\,ds \tag{4.11}$$

et comme $(\dot{y}_n(s))$ converge faiblement vers $(\dot{y}(s))$ dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$,
donc de (4.11) et proposition (2.11) on obtient
$(\dot{y}_n(s))$ convere fortement vers $(\dot{y}(s))$ dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \int_0^T \|\dot{y}_n(s)\|^2 = \int_0^T \|\dot{y}(s)\|^2\,ds$$

et

$$u_n(t) \in F(\mathcal{T}(\theta_n(t))\,x_n, y_n(\theta_n(t)))$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(\theta_n(t)) = x(t), \mathcal{T}(\theta_n(t)\,x_n) \to \mathcal{T}(t)\,x$ sur C_0 , $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(\theta_n(t)) = y(t) = \dot{x}(t)$, pour tout $t \in [0,T]$ et le graphe de F étant fermé, on obtient

$$u(t) \in F(\mathcal{T}((t))\,x, y(t))$$

Comme $\ddot{x}(t) = u(t)$ et $\dot{x}(t) = y(t)$ pour tous $t \in [0,T]$d'où

$$\ddot{x}(t) \in F(\mathcal{T}((t))\,x, \dot{x}(t))$$

■

4.3 Résultat d'existence pour le problème avec perturbation de carathéodory

Enonçons un résultat d'existence pour le problème avec retard obtenu dans [24]

Proposition 4.1 [24] *Soient $V : H \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne et Ω un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si V est uniformément régulière dans Ω alors les propriétés suivantes sont satisfaites:*

(i) Le sous différentiel proximal de V est fermé dane Ω, c'est à dire, pour tout $x_n \longrightarrow x \in \Omega$ avec $x_n \in \Omega$ et tout $\varepsilon_n \longrightarrow \varepsilon$ avec $\varepsilon_n \in \partial^P V(x_n)$ donc $\varepsilon \in \partial^P V(x)$

(ii) Le sous différentiel proximal de V coincide avec le sous différentiel de Clarke en tout point x

(iii) Le sous différentiel proximal de V est hemi-continue supérieurement (h.c.s) dans S, c'est à dire, la fonction support $x \longrightarrow \langle v, \partial^P V(x) \rangle$ est semi -continue supérieurement (s.c.s) dans S pour tout $v \in H$

(iv) Pour toute fonction absolument continue $x : [0.T] \longrightarrow \Omega$ on a

$$\frac{d}{dt}(V \circ x)(t) = \langle \partial V^C (x(t); \dot{x}(t)) \rangle$$

Théorème 4.2 [24] *Soient Ω_1, Ω_2 deux sous ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$, $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightrightarrows H$, $f : \mathbb{R} \times H \times H \longrightarrow H$, $V : H \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \in \Gamma(H)$ tels que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) F une multifonction semi -continue supérieureme à valeurs compacts dans $\mathbb{R}^n$

(2)il existe $A \in \Phi(H,H)$ et une fonction localement lipschitzienne $\mathcal{B}-$uniformément réguliére $V : H \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$F(x,y) \subset A\left(\partial^C V(y)\right) \text{ pour tout } (x;y) \in \Omega_1 \times \Omega_2$$

f est une fonction carathéodory

Alors, pour tout $(x_0,y_0) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ il existe $T > 0$ et $x(.) : [0,T] \longrightarrow H$ solution du problème

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) \in F(x,\dot{x}(t)) + f(x(t),\dot{x}(t)).p \text{ sur } I \\ \mathcal{T}(0)x = \varphi \ (s) \ \forall s \in [-\sigma,0] \\ \dot{x}(0) = y_0 \in \Omega \end{cases}$$

Enonçons maintenant le résultat principal

Théorème 4.3 *: Soit Ω une ouvert de $\mathbb{R}^n$et $V : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne réguliére et siot $F : C_0^1 \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows P(\mathbb{R}^n)$ une multifonction semi -continue supérieurement à valeurs compactes dans $\mathbb{R}^n$ tel que $F(\psi,y) \subset \partial(\psi(y))$,$\forall \psi \in C_0, \forall y \in \Omega$, Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction de carathéodory. Alors, pour tout $\varphi \in C_0^1$, il existe $T > 0$ et $x : [-\sigma,T] \to \mathbb{R}^n$ une fonction absolument continue sur $[0,T]$ solution du problème*

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) \in F(\mathcal{T}(t)x,\dot{x}(t)) + f(x(t),\dot{x}(t)).p \text{ sur } I \\ \mathcal{T}(0)x = \varphi \ (s) \ \forall s \in [-\sigma,0] \\ \dot{x}(0) = y_0 \in \Omega \end{cases} \tag{4.12}$$

Preuve. Ω etant un ouvert, $y_0 \in \Omega$, et V localement lipschitzienne réguliére, on peut choisir $r > 0$ tel que $\overline{\mathbb{B}}(y_0,r) \subset \Omega$ et V est $M-$lipchitzienne sur la boule $\overline{\mathbb{B}}(y_0,r)$, (Par conséquent $\partial V(y) \subset M\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}, \forall y \in \overline{\mathbb{B}}(y_0,r))$ d'autre part $f \in g_c(\mathbb{R},\mu,\mathbb{R}^n)$ alors il existe m_1 constant positive tel que $(f,x;y) \in K \subset m_1\overline{\mathbb{B}}$, l'ensemble $K_1 = \overline{\mathbb{B}}M$ est convexe compact dans $\mathbb{R}^n$, comme φ est continue sur $[-\sigma,0]$, on cloisit $\eta > 0$

$$\|\varphi(t) - \varphi(s)\| \leq \frac{r}{4} \text{ pour tout } t,s \in [-\sigma,0] \text{ avec } |t-s| < \eta$$

Posons $T > 0$ tel que

$$T = \min\left\{\eta, \frac{r}{M+m_1}, \frac{r}{r+\|y_0\|}\right\}$$

On pose $I = [0,T]$. Définissons une partition de I comme suit: pour tout entier $n \geq 0$ et pour $1 \leq i \leq n-1$on pose $t_i^n = i\frac{T}{n}$, $I_i^n = \left[t_{i-1}^n, t_i^n\right[$ et $t_n^n = T$ Définissons maintenant, les suites de fonctions suivantes à partir de y_0,φ, Nous avons

$$\begin{cases} x_n(s) = \varphi(s) \quad \forall s \in [-\sigma,0] \text{ et } \varphi \in C([-\sigma,0]) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad y_0 \in \Omega \end{cases}$$

$\forall t \in [o,t_1^n]$

$$\mathcal{T}(0)\, x_n = \varphi \text{ sur } [-\sigma,0]$$

$$y_n(0) = y_0$$

$$u_0^n = F(\mathcal{T}(0)\, x_n, y_0)$$

$\forall t \in [t_1^n, t_2^n]$

$$u_1^n \in F(\mathcal{T}(t_1^n)\, x_n, y_n(t_1^n))$$

$$y_n(t) = y_n(t_1^n) + \int_{t_1^n}^t [f(s, x_n(t_1^n), y_n(t_1^n)) + u_n(t_1^n)]\, ds$$

$$x_n(t) = x_n(t_1^n) + \int_{t_1^n}^t y_n(t_1^n)$$

$$u_2^n \in F(\mathcal{T}(t_2^n)\, x_n, y_n(t_2^n))$$

Par recurrence $\quad \forall t \in \left[t_i^n, t_{i+1}^n\right[: 1 \leq i \leq n-1$

$$y_n(t) = y_n(t_i^n) + \int_{t_i^n}^t [f(s, x_n(t_i^n), y_n(t_i^n)) + u_i^n]\, ds$$

$$x_n(t) = x_n(t_i^n) + \int_{t_i^n}^t y_n(s)\, ds$$

$$u_i^n \in F(\mathcal{T}(t_i^n)\, x_n, y_n(t_i^n))$$

$\forall t \in t_{i+1}^n, 1 \leq i \leq n-1$, où $\mathcal{T}(0)\, x(s) = \varphi(s)$, $\dot{x}(0) = y_0$ et $u_i^n \in F(\mathcal{T}(t_i^n)\, x_n, y_n(t_i^n))$ pour chaque $1 \leq i \leq n-1$, On prend $u_i^n \in \partial V(y_n(t_i^n))$ laisser maintenant on définit une fonctions

$$\theta_n(t) = t_i^n,\; u_i^n = u_n(t),\; y_n(t) = y_i^n \quad t \in \left[t_i^n, t_{i+1}^n\right]$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$et tout $t \in [0,T]$, nous avons les proprlétés suivantes:

$$0 \leq t - \theta_n(t) \leq \frac{T}{n} \tag{4.13}$$

$$y_n(t) = y_0 + \int_0^t [f(s, x_n(\theta_n(s)), y_n(\theta_n(s))) + u_n(s)]\, ds \tag{4.14}$$

$$x_n(t) = \varphi(0) + \int_0^t y_n(t)\, ds \tag{4.15}$$

$$u_n(t) \in F(\mathcal{T}(\theta_n(t))\, x_n, y_n(\theta_n(t))) \tag{4.16}$$

$$u_n(t) \in \partial V(y_n(\theta_n(t))) \tag{4.17}$$

Observons que $y_n(t) \in \overline{\mathbb{B}}(y_0, r)$ et $x_n(t) \in \overline{\mathbb{B}}(\varphi(0), r)$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$et tout $t \in [0,T]$ .en effet il est clair que

$$\|y_n(t) - y_0\| = \left\| \int_0^t [f(s, x_n(\theta_n(s)), y_n(\theta_n(s))) + u_n(t)]\, ds \right\| \leq (m_1 + m)\, T < r$$

Et

$$\|x_n(t) - \varphi(0)\| = \left\| \int_0^t y_n(t)\, ds \right\| \leq (\|y_0\| + r)\, T < r$$

D'où

$$\|y_n(t) - y_n(t')\| \leq (M + m_1)\, |t - t'|$$

On a $\forall 0 \leq t \leq t' \leq T$ et $n \in \mathbb{N}^*$d'autre part, nous avons

$$\|x_n(t) - x_n(t')\| \leq \int_t^{t'} \|y_n(s)\|\, ds \leq (\|y_0\| + r)\, |t - t'|$$

$\forall 0 \leq t \leq t' \leq T$ et $n \in \mathbb{N}^*$,donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des sous suites equi-lipchitziennes dans $C([0,T], \mathbb{R}^n)$. comme les ensembles $\{x_n(t), n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\{y_n(t), n \in \mathbb{N}^*\}$ sont relativement compact sur $\mathbb{R}^n$ pour chaque $t \in [0,T]$ .en effet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$et $t \in [0,T]$

$$y_n(t) \in y_0 + [0,T] \times \{K_1 + K\} = K_2$$

Avec K_2 est compact, on a aussi

$$x_n(t) \in \varphi(0) + [0,T] \times K_2$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$et tout $t \in [0,T]$,d'après le théoréme d'Ascoli's Arzela,$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont relativement compact. de plus les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et relativement $\sigma(L^1([0,T],\mathbb{R}^n), L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n))$ compact.comme nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^* u_n(t) \in K_1 \text{ et } \dot{y}_n(t) \in M\overline{\mathbb{B}}$$

On peut donc extraire des sous suites, notées encore $(x_n), (y_n), (u_n)$ il existe $x \in C([0,T],\mathbb{R}^n), y \in C([0,T],\mathbb{R}^n)$, $u \in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ tel que x_n converge uniformément sur $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ vers x, y_n converge uniformément sur $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ vers y , u_n converge faiblement vers u.dans $L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ et aussi, nous avons $f(.,x_n(\theta_n(.)),y_n(\theta_n(.)))$ converge en norme dans l'espace $L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ vers $f(.,x(.),y(.))$, par conséquence pour tout $t \in [0,T]$

$$\varphi(0)+\int_0^t \dot{x}_n(\tau)\,d\tau = x(t) = \lim_{n\to\infty} x_{n(t)} = \varphi(0)+\lim_{n\to\infty}\int_0^t y_n(t)\,d\tau = \varphi(0) \quad + \int_0^t y(t)\,d\tau$$

Donc on trouve l'égalité

$$\dot{x}(t) = y(t) \tag{4.18}$$

D'autre par $x = \varphi$ sur $[-\sigma,0]$ nous avons $x_n \to x$ sur $[-\sigma,T]$ et $\mathcal{T}(0)x = \varphi$ sur $[-\sigma,0]$ .de plus,de (3.35) , $\theta_n(t)$ converge uniformément vers t sur $[0,T]$, notons $x_n(\ \theta_n(t))$ converge uniformément vers $x(t)$ sur $[0,T]$, et $y_n(\theta_n(t))$ converge uniformément vers $y(t)$, pour tous $t \in [0,T]$, de plus nous avons:

$$\|\mathcal{T}(\theta_n(t)x_n) - \mathcal{T}((t)x_n)\|_\infty \to 0 \qquad n \to 0$$

Comme x_n converge uniformément vers x sur $[-\sigma,T]$ implque$\mathcal{T}((t)x_n)$ converge uniformément vers$\mathcal{T}((t)x)$ sur $[-\sigma,0]$, et

$$\mathcal{T}(\theta_n(t)x_n) \to \mathcal{T}(t)x \quad \text{ sur } C_0$$

Où $y(t) = y_0 + \int_0^t \dot{y}(s)\,ds$, pour tous $t \in [0,T]$. ils'ensuit que (4.14)que $\dot{y}(t) = u(t) + f(t,x(t),y(t))$ pour tous $t \in [0,T]$ et de (4.18) on obtient que

$$\ddot{x}(t) = f(t,x(t),y(t)) + u(t)$$

Pour tout $t \in [0,T]$, par construction, nous avons pour on a $t \in [0,T]$

$$\ddot{x}_n(t) - f_n(t) = u_n(t) \in F(\mathcal{T}(\theta_n(t))x_n, y_n(\theta_n(t))) \subset \partial V(y_n(\theta_n(t))) \tag{4.19}$$

Comme $\ddot{x}_n(t) \in \partial V(y_n(\theta_n(t)))$ $p.p$ sur $[0,T]$, on en déduite puisque ∂V est une multiapplication $s.c.s$ à valeurs convexes compactes de $\mathbb{R}^n$,

$$\ddot{x}(t) \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{CO}\ \{\ddot{x}_{n_k}(t) \quad k \geq n\} \subset \bigcap_{n\geq 0} \overline{CO} \bigcup_{k\geq n} \partial V(y_{n_k}(\theta_{n_k}(t))) \subset \partial V(y(t)) \ sur\ [0,T]$$

comme, D'autre part l'ensemble $\partial V(y(t))$ est convexe fermé, Alors

$$u(t) \in \partial V(y(t))$$

D'autre part, comme V est réguliére dans Ω et $\dot{x}(t) = y(t) \in \mathbb{B}(y_0,r)$ pour tout $t \in [0,T]$ nous avons de la proposition (2.10), la mesure $D(V \circ x)$ est absolument continue par rapport à la mesure de lebesgue et presque partout sur I

$$\langle \partial V(\dot{x}(t)), \ddot{x}(t) \rangle = \left\{ \frac{D((V \circ \dot{x}))}{dt}(t) \right\}$$

Par suite d'aprés ce qui précéde

$$\left\{ \frac{D((V \circ \dot{x}))}{dt}(t) \right\} = \langle \ddot{x}(t), \ddot{x}(t) - f(t,x(t),y(t)) \rangle \text{ p.p.sur} I$$

Par conséquent

$$V(\dot{x}(T)) - V(y_0) = \int_0^T \|\ddot{x}(t)\|^2 dt - \int_0^T \langle \ddot{x}(t), f(t,x(t),y(t)) \rangle dt \tag{4.20}$$

D'autre part, en vertu des propriétés du sous -différentiel de fonction convexe,nous avons pour tour $i \in \{0,.............\nu_n - 1\}$,

$$V(y_{i+1}^n) - V(y_i^n) \geq \langle u_i^n, y_{i+1}^n - y_i^n \rangle$$

$$= \left\langle u_i^n, \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \ddot{x}(s)\, ds \right\rangle$$

$$= \left\langle u_n(s), \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s,x_n(\theta_n(s)), y_n(\theta_n(s))) + u_n(s)\, ds \right\rangle$$

$$\geq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \left\langle u_n(s), \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s,x_n(\theta_n(s)), y_n(\theta_n(s))) \right\rangle ds + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|u_n(s)\|^2 ds$$

En faisant la somme de ces inégalité de $i = 0$ jusqu'à $i = \nu_n - 1$,On obtient

$$V(\dot{x}_n(T)) - V(y_0) \geq \int_0^T \langle u_n(s), f(s,x_n(\theta_n(s)), y_n(\theta_n(s))) \rangle ds + \int_0^T \|u_n(s)\|^2 ds \tag{4.21}$$

On a:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^T \langle u_n(s), f(s,x_n(\theta_n(s)), y_n(\theta_n(s))) \rangle ds = \int_0^T \langle u_n(s), f(s,x(s), y((s))) \rangle ds$$

Eneffet, pour tout $t \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\langle u_n(s), f(s,x_n(\theta_n(s)), y_n(\theta_n(s))) \rangle - \langle u(s), f(s,x(s), y((s))) \rangle = \alpha_n(t) + \beta_n(t)$$

Où

$$\alpha_n(t) = \langle u_n(s), f(s, x_n(\theta_n(s)), y_n(\theta_n(s))) - f(s, x(s), y((s)))\rangle$$
$$\beta_n(t) = \langle u_n(s) - u(s), f(s, x(s), y((s)))\rangle$$

On a $\int_0^T \beta_n(s)\,ds \to 0$ puisque $u_n(s)$ converge pour $L^1([0,T], \mathbb{R}^n)$ vers $u(s)$,et $\int_0^T \alpha_n(s)\,ds \to 0$ puisque f_n converge en norme dans espace $L^1([0,T], \mathbb{R}^n)$ vers f

En passant à la limite dans l'inegalité(4.21) quand $n \to \infty$ et en utilisant la continuité de V, On obtient

$$V(\dot{x}(T)) - V(y_0) \geq \int_0^T \langle u(s), f(s, x(s), y((s)))\rangle\,ds + \lim_{n\to\infty} \sup \int_0^T \|u_n(s)\|^2\,ds$$

En comparant ceci avec(3.9)

$$\lim_{n\to\infty} \sup \int_0^T \|u_n(s)\|^2\,ds \leq \int_0^T \|u(s)\|^2\,ds \tag{4.22}$$

et comme $(\dot{y}_n(s))$ converge faiblement vers $(\dot{y}(s))$ dans $L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$,

donc de $(3-11)$ et proposition (2.11) on obtient

3.22

$(\dot{y}_n(s))$ convere fortement vers $(\dot{y}(s))$ dans $L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(\theta_n(t)) = x(t)$,$\mathcal{T}(\theta_n(t)\,x_n) \to \mathcal{T}(t)\,x$ sur C_0, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(\theta_n(t)) = y(t) = \dot{x}(t)$, pour tout $t \in [0,T]$ et le graphe de F étant fermé, on obtient

$$u(t) \in F(\mathcal{T}((t))\,x, y(t))$$

Comme $\ddot{x}(t) = u(t) + f(s, x(s), y(s))$ et $\dot{x}(t) = y(t)$ pour tout $t \in [0,T]$, d'onc

$$\ddot{x}(t) \in F(\mathcal{T}((t))\,x, \dot{x}(t)) + f(t, x(t), \dot{x}(t)) \qquad p.p\ sur\ [0,T]$$

■

Chapitre 5

Résultat d'existence de solution viable

5.1 Introduction:

Ce chapitre est consacré à quelques résultats d'existence de solutions viablles pour des inclusions différentielles, dans le cas non convexe, et dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^n$.

en s'inspirant, toujours, par la lecture de certains articles de et M. Aitaliobrahim S. Sajid [34]d'autres auteurs. A ce propos, le lecteur pourra consulter,[38].[32] Les auteurs dans [38], ont étudié un résultat d'existence de solutions vaible pour de problème suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) \text{ pp sur } [0,T]; \\ x(t) \in K \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

dans le Au cas où F est une multifonction semi-continue supérieurement à valeurs contenues dans le sous différentiel d'une fonction convexe semi-continue inférieurement en dimension finie.[32],[34] il a également étudié le résultat de d'existence problème

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) + f(t,x(t)) \quad \text{pp sur } [0,T]; \\ x(0) = x_0 \quad . \, x(t) \in K \end{cases}$$

Où F vérifie les mêmes conditions que précédemment et f est une fonction de carathéodory.

Le théorème principal de ce chapitre, consiste à generaliser ces resultets une multifonction à valeurs le sous différentiel d'une fonction réguliére en se basant sur les techniques, et les arguments de démonstration utilisés par [34] dont nous avons emprunté plusieurs.

5.2 Résultat principal:

Dans de ce travail, nous démontrons l'existence de solutions pour le problème suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) & \text{pp sur } [0,T]; \\ x(0) = x_0 \; x(t) \in K & . \end{cases}$$

où K est un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$, F est une multifonction semi-continue supérieurement à valeurs compactes non vides non nécessairement convexes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $F(x) \subset \partial V(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ où $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne régulière.

Théorème 5.1 *Soit K un sous ensemble localement fermé de $\mathbb{R}^n$,. Soit F une multifonction définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs compactes dans $\mathbb{R}^n$. satisfaisant à:*

(H_1) F est semi -continue supérieurement

(H_2) il existe une fonction localement lispchitzienne régulière $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tel que $F(x) \subset (\partial V(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

(H_3) pour tout $(t,x) \in \mathbb{R} \times K$ il existe $z \in F(x)$ tel que(condition tangentielle)

$$\lim_{h \to 0^+} \inf \frac{1}{h} d(x_0 + hv, K) = 0$$

Alors, pour chaque $x_0 \in K$ il existe $T > 0$ et une fonction continue $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ solution du problème suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) \; p.p \text{ sur } [0,T] \\ x(t) \in K \text{ pour tout } t \in [0,T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Enonçons un lemme techinique du à M. Aitaliobrahim and S. Sajid [37]

Lemme 5.1 *[34] Soit F satisfaisant les hypothèses $(H_1) \to (H_3)$, alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\eta \in]0,\varepsilon[$ tel que pour chaque (t,x) dans $[0,T] \times K_0$, il existe u dans $F(x) + \frac{\varepsilon}{T}B$ et $h_{t,x}$dans $[\eta,\varepsilon]$ tel que*

$$x + h_{t,x}u \in K$$

Preuve. Soit $(t,x) \in [0,T] \times K_0$, soit $\varepsilon > 0$, Comme F est semi -continue supérieurement, alors il existe $\delta_x > 0$ tel que

$$F(y) \subset F(x) + \frac{\varepsilon}{T}B \; \forall (y) \in \overline{\mathbb{B}}(x,\delta_x) \tag{5.2}$$

de d'autre part, pour tout $(s,y) \in [0,T] \times K$,de la condition tangentielle, il existe $h_{s,y} \in [0,\varepsilon[$ et $v \in F(y)$ tel que

$$d(y + h_{s,y}v, K) < h_{s,y}\frac{\varepsilon}{4T}$$

Considérons le sous ensemble

$$N(s,y) = \left\{ (l,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : d(z + h_{s,y}v,K) < h_{s,y}\frac{\varepsilon}{4T} \right\}$$

la fonction

$$(l,z) \to z + h_{s,y}v$$

est continue, d'où la fonction

$$(l,z) \to d(z + h_{s,y}v,K)$$

est continu, et le sous -ensemble $N(s,y)$ est ouvert. De plus, comme (s,y) appartient à $N(s,y)$, il existe une boule $\overline{\mathbb{B}}((s,y),\eta_{s,y})$ de rayon $\eta_{\zeta,y} < \delta_x$ et contenu dans $N(s,y)$,d'autre part, le sous ensemble compact $[0,T] \times K_0$ admet un sous recouvrement $\overline{\mathbb{B}}\left((s_i,y_i),\eta_{(s_i,y_i)}\right)$.tel que $i = 1,...,q$ Pour simplifier, on pose

$$h_{(s_i,y_i)} := h_i \qquad \eta_{(s_i,y_i)} := \eta_i, \; \eta := \min_{i=1,......,q} h_i > 0$$

Soit $(t,x) \in [0,T] \times K_0$, comme (t,x) est contenu dans les boules $\overline{\mathbb{B}}((s_i,y_i),\eta_i)$, il existe $x_i \in K$ et $u_i \in F(y_i)$ tel que

$$\begin{aligned} & \left\| u_i - \frac{1}{h_i}(x_i - x) \right\| \\ \leq \; & \frac{1}{h_i} d(x - h_i u_i + \frac{\varepsilon}{4T} \leq \frac{\varepsilon}{2T} \end{aligned}$$

Soit

$$u = \frac{1}{h_i}(x_i - x)$$

Alors

$$(x + h_i u) \in K \text{ et } \|u_i - u\| \leq \frac{\varepsilon}{2T}$$

Comme

$$\|x - y_i\| < \eta_{(\zeta,y)} < \delta_x$$

Alors

$$F(y_i) \subset F(x) + \frac{\varepsilon}{2T} B$$

D'où

$$u \in F(x) + \frac{\varepsilon}{T} B$$

Nous procédons à la démonstration du théorème en deux étapes: ■

Preuve. $1^{ére}$étape. Construction des solutions approximantes:

Soient $r > 0$ tel que $K_0 = K \cap \left(x_0 + r\,\overline{\mathbb{B}}\right)$ soit compacte et$\lambda > 0$ tels que V est λ lipschitzienne sur la boule $\overline{\mathbb{B}}(x,r)$, et par suite $\partial V(x) \subset \lambda\overline{\mathbb{B}}(0,1)$ pour tout $x \in K_0$ soit $T > 0$ tel que

$$T \leq \frac{r}{2(\lambda + 1)} \tag{5.3}$$

Soit $x_0 \in K_0$ et $0 < \varepsilon < \inf(T,1)$. par lemme(5.1)il existe $\eta > 0$ et $h_0 \in [\eta,\varepsilon]$ et $u_0 \in F(x_0) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbb{B}$ tel que

$$x_1 = x_0 + h_0 u_0 \in K$$

Alors de (H_1) et(5.3) nous avons

$\|x_1 - x_0\| = \|h_0 u_0\| \leq (\lambda + 1) T < r$

d'on $x_1 \in K_0$,Soit $h_{-1} = 0$, par induction, pour $q \geq 2$ et pour tout $p = 1,....,q-1$,on construit les suites $(h_p)_p \subset [\eta,\varepsilon]$, $\left((x_p)_p, (y_p)_p\right) \subset K_0 \times K_0$ et $\left((u_p)_p, (v_p)_p\right) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{p=0}^{q-1} h_p < T$ et

$$\begin{cases} x_p = x_{p-1} + h_{p-1}u_{p-1} \in K \\ u_p \in F(x_p(t)) + \frac{\varepsilon}{T}B \\ v_p \in F(y_p) \end{cases}$$

Comme $h_i \geq \eta > 0$ il existe un nombre s tel que

$$\sum_{i=0}^{s-1} h_i < T \leq \sum_{i=0}^{s} h_i$$

Alors nous avons construit les suites $(h_p)_p \subset [\eta,\varepsilon]$, $\left((x_p)_p, (y_p)_p\right) \subset K_0 \times K_0$ et$\left((u_p)_p, (v_p)_p\right) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $p = 1,......,s$. nous avons

$$\begin{aligned} (i)\ x_p &= x_{p-1} + h_{p-1}u_{p-1} \in K \\ (ii) &= u_p \in F(x_p(t)) + \frac{\varepsilon}{T}B \\ (iii) &= v_p \in F(y_p) \end{aligned}$$

par induction, pour tout $p = 1,......,s$.nous avons

$$x_p = x_0 + \sum_{i=0}^{p-1} h_i u_i$$

Donc de (ii) et (H_1), $(4-1)$ et $\sum\limits_{i=0}^{p-1} h_i < T$, nous avons

$$\|x_p - x_0\| = \left\| \sum_{i=0}^{p-1} h_i u_i \right\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} h_i \|u_i\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} h_i (\lambda + 1) < r \tag{5.4}$$

D'ou $x_p \in K_0$. Pour chaque entier $k \geq 1$et pour tout entier $q = 0,....,s$, on note par h_q^k un réel associé à $\varepsilon = \frac{1}{k}$ et $x_q = x$

donné par lemme (5.1), considérons la suite$(\zeta_k^q)_k$

$$\begin{cases} \zeta_k^0 = 0,\ \zeta_k^s = T \\ \zeta_k^q = h_0^k + ...+ h_{q-1}^k \text{ si } 1 \leq q \leq s, \end{cases}$$

et définissons dans $[0,T]$ la suite de fonctions $(x_k(.))_k$ par

$$\begin{aligned} x_k(t) &= x_{q-1} + \left(t - \zeta_k^{q-1}\right) u_{q-1},\ \forall\, t \in \left[\zeta_k^{q-1}, \zeta_k^q\right]; \\ x_k(0) &= x(0) \end{aligned}$$

$2^{ére}$étape. Convergence des solutions approximantes:

De la définition de $x_k(.)$, pour presqus tout $t \in \left[\zeta_k^{q-1}, \zeta_k^q\right]$ nous avons $\dot{x}_k(t) = u_{q-1}$. de (ii), (H_1), (5.4) pour tout $t \in [0;T]$ nous avons

$$\|\dot{x}_k(t)\| \leq \|u_{q-1}\| \leq \lambda + 1$$

$$\begin{aligned} \|x_k(t)\| &= \left\| x_k\left(\zeta_k^{q-1}\right) + \int_{\zeta_k^{q-1}}^{t} \dot{x}_k(\zeta)\, d\zeta \right\| \\ &\leq \|x_{q-1}\| + \left\| \int_0^T (\lambda+1)\, d\zeta \right\| \\ &\leq \|x(0)\| + \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \leq \|x(0)\| + r \end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^T \|\dot{x}_k(t)\|^2\, dt \leq \int_0^T (\lambda+1)^2\, dt$$

Alors la suite $(\dot{x}_k(.))_k$ est borné dans $L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$ et donc $(x_k(.))_k$est equi-uniformément continue, D'où, on peut extraire une sous suite encore notée par $(x_k(.))_k$ et une fonction absolument continue $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ tel que $x_k(.)$ converge uniformément vers $x(.)$ et $\dot{x}_k(t)$ converge faiblement dans $L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$ vers $\dot{x}$ pour tout $t \in [0,T]$ il existe $q \in \{1,.....s\}$ tel que

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_k(t), \dot{x}_k(t), graphF\right) = 0 \tag{5.5}$$

vers 0 En effet, soit $t \in [0,T]$, de laconstruction de ζ_k^q, il existe $q \in 1,....s$ tel que $t \in \left[\zeta_k^{q-1}, \zeta_k^q\right]$ et $(\zeta_k^q)_k$converge vers t, de plus, pour $q = 1,....s$

$$\dot{x}_k(t) = u_{q-1} \in F(x_{q-1}) + \frac{1}{kT} B$$

nous avons

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_k(t)\,;\dot{x}_k(t),graphF\right)$$
$$\leq \lim_{k\to\infty}\left(\left\|x_k(t)-x_k\left(\zeta_k^{q-1}\right)\right\|+\frac{1}{kT}\right)$$

D'où

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_k(t)\,;\dot{x}_k(t),graphF\right)=0 \tag{5.6}$$

Comme les suites $x_k(.)$ converge uniformément vers $x(.)$ et $\dot{x}_k(t)$ converge faiblement dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$ vers $\dot{x}$

et F est semi -continue supérieurement, ∂V est convexe fermé

$$\dot{x}_k(t)\in F\left(x_k(t)\subset\partial V\left(x_k(t)\right)\right)$$

Par conséquent pour tout $t\in[0,T]$ nous avons que

$$\dot{x}(t)\in\partial\left(V\left(x(t)\right)\right) \tag{5.7}$$

D'après la proposition (2.10) la mesure $D(V\circ x)$ est absolument continue par rapport à la mesure de lebesgue

$$\langle\partial V\left(x(t)\right),\dot{x}(t)\rangle=\left\{\frac{D\left(\left(V\circ x\right)\right)}{dt}(t)\right\}$$

de(5.7) nous avons

$$\frac{D\left(\left(V\circ x\right)\right)}{dt}(t)=\langle\dot{x}(t),\dot{x}(t)\rangle=\ \text{p.p sur }[0,T]$$

Donc

$$V\left(x(T)\right)-V\left(x(0)\right)=\int_0^T\left\|\dot{x}(\zeta)\right\|^2 d\zeta \tag{5.8}$$

D'autre part, pour tout $q=1,..s$ et $t\in\left[\zeta_k^{q-1},\zeta_k^q\right]$

$$\dot{x}_k(t)\in F\left(x_k\left(\zeta_k^{q-1}\right)\right)+\frac{1}{kT}B$$

Alors

$$\dot{x}_k(t)\subset\partial\left(V\left(x_k\left(\zeta_k^{q-1}\right)\right)\right)+\frac{1}{kT}B$$

Donc, il existe $b_k\in B$ tel que

$$\left(\dot{x}_k(t)+\frac{1}{kT}b_k\right)\in\partial\left(V\left(x_k\left(\zeta_k^{q-1}\right)\right)\right)$$

D'autre part, en vertu des propriétés du sous-différentiel on déduit que pour tout $z \in \partial\left(V\left(x_k\left(\zeta_k^{q-1}\right)\right)\right)$ nous avons

$$V\left(x_k\left(\zeta_k^q\right)\right)-V\left(x_k\left(\zeta_k^{q-1}\right)\right) \geq \left\langle x_k\left(\zeta_k^q\right)-x_k\left(\zeta_k^{q-1}\right), \dot{x}_k(t)+\frac{1}{kT}b_k\right\rangle \tag{5.9}$$

En particulier

$$z=\dot{x}_k(t)+\frac{1}{kT}b_k$$

Nous avons

$$V\left(x_k\left(\zeta_k^q\right)\right)-V\left(x_k\left(\zeta_k^{q-1}\right)\right) \geq \left\langle x_k\left(\zeta_k^q\right)-x_k\left(\zeta_k^{q-1}\right), z\right\rangle$$

Comme $\dot{x}_k$ est constante sur $\left[\zeta_k^{q-1}, \zeta_k^q\right]$ it s'ensuit que

$$V\left(x_k\left(\zeta_k^q\right)\right)-V\left(x_k\left(\zeta_k^{q-1}\right)\right) \geq \int_{\zeta_k^{q-1}}^{\zeta_k^q}\left\langle\dot{x}_k(\zeta); \dot{x}_k(\zeta)\right\rangle d\zeta+\int_{\zeta_k^{q-1}}^{\zeta_k^q}\left\langle\dot{x}_k(\zeta), \frac{1}{kT}b_k\right\rangle d\zeta$$

D'où nous avons

$$V\left(x_k(T)\right)-V\left(x_0\right) \geq \int_0^T\left\|\dot{x}_k(\zeta)\right\|^2 d\zeta+\sum_{q=1}^s \frac{1}{kT}\int_{\zeta_k^{q-1}}^{\zeta_k^q}\left\langle\dot{x}_k(\zeta), b_k\right\rangle d\zeta \tag{5.10}$$

On montre que la suite $\left(\sum\limits_{q=1}^{s} \int_{\zeta_k^{q-1}}^{\zeta_k^q} \dot{x}_k(\zeta)\, d\zeta\right)_k$ est convergente vers $\int_0^T \dot{x}(\zeta)\, d\zeta$

Comme $[0,T]=\cup_{q-1}^s\left[\zeta_k^{q-1}, \zeta_k^q\right]$, Nous avons

$$\left\|\sum_{q=1}^s \int_{\zeta_k^{q-1}}^{\zeta_k^q} \dot{x}_k(\zeta)\, d\zeta-\int_0^T \dot{x}(\zeta)\, d\zeta\right\|$$

$$=$$

$$\left\|\sum_{q=1}^s \int_{\zeta_k^{q-1}}^{\zeta_k^q}\left(\dot{x}_k(\zeta)\, d\zeta-\dot{x}(\zeta)\right) d\zeta\right\|$$

$$\leq$$

$$\sum_{q=1}^s \int_{\zeta_k^{q-1}}^{\zeta_k^q}\left\|\dot{x}_k(\zeta)-\dot{x}(\zeta)\, d\zeta\right\|$$

Comme $\dot{x}_k(t)$ converge faiblement dans $L^2\left([0,T], \mathbb{R}^n\right)$ vers $\dot{x}$ alors la somme converge vers 0

et

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{q=1}^s \frac{1}{k}\int_{\zeta_k^{q-1}}^{\zeta_k^q}\left\langle\dot{x}_k(\zeta), b_k\right\rangle d\zeta=0$$

En passant à la limite dans l'inégalité (5.10) quant $k \to \infty$ et en utilisant la continuité de V, on obtient

$$V(x(T)) - V(\varphi(0)) \geq \limsup_{k\to\infty} \int_0^T \|\dot{x}_k(\zeta)\|^2 \, d\zeta$$

De plus, de(5.8)nous avonsr

$$\|\dot{x}\|_2^2 \geq \limsup_{k\to\infty} \|\dot{x}_k\|_2^2$$

De la semi-continue inférieurement de la norme il s'ensuit que

$$\|\dot{x}\|_2^2 \leq \liminf_{k\to\infty} \|\dot{x}_k\|_2^2$$

D'où $\lim\limits_{k\to\infty} \int_0^T \|\dot{x}_k\|_2^2 = \int_0^T \|\dot{x}\|_2^2$, Comme, en outre la suite $(\dot{x}_k)_k$ converge faiblement vers $\dot{x}$ dans $L^2_{\mathbb{R}^n}([0,T], \mathbb{R}^n)$, alors on peut extraire une sous suite encore notée par $\dot{x}_k$ converge en norme presque partout vers $\dot{x}$, on en déduit que

$$d(x(t), \dot{x}(t), graphF) = 0 \quad \text{p.p sur } t \in [0,T]$$

Comme le graphe $gr(F)$,de F est fermé, nous avons,

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) \quad \text{p.p sur } t \in [0,T]$$

Finalement, Soit $t \in [0,T]$, remarquons qu'il il existe $(\zeta_k^q)_k$tel que $\lim\limits_{k\to\infty} \zeta_k^q = t$ pour tout $t \in [0,T]$ comme $\lim\limits_{k\to\infty} \|x(t) - x_k(\zeta_k^q)\| = 0$, $x_k(\zeta_k^q) \in K_0 \subset K$ ■

Bibliographie

[1] J.P. Aubin and A. Cellina, differential inclusions. Set-valued maps and viability theory, Springer-Verlag, Berlin, (1984)

[2] A. Auslender and J. Mechler, Second order viability problems for differential inclusion,J. Math. Anal. Appl., 181 (1984), 205-218.

[3] S. Amine, B. Aghezaaf, S. Sajid; Carathéodory perturbation os a second order differential inclusions with constraints; EJDE, 2005, n°114,1 – 11..

[4] B. Aghezaaf, S. sajid; On the second order contingent set and Differential Inclusions. Journal of Convex , Analysis Vol. 7(2000), pp. 183-195

[5] F. Ancona and G. Colombo, Existence of Solutions for a class of nonconvex differential inclusions, Rend . Se Mat. Univ. padova, 83 (1990) , 71-76.

[6] M. Benchohra and S. K. Ntouyas; Existence results for functional differential, Electron. J. Diff. Eqns., Vol. 2001(2001), No. 41, pp. 1-8

[7] H. Benabdellah; sur une d'équations différentielles multivoques semi- continues supérieurement àvaleurs non convexes, Séminaire d'analyse convexe Monrtpeller 1991, Exposé N

[8] F. Bernard, L. Thibault; Prox-regular functions in Hilbert spaces,J.Math. Anal. Appl., 303, 2005, 1-14.

[9] F. Bernard, L. Thibault; Uniform prox-regularity of functions in Hilbert spaces, set-valued analysis, 12, 25- 47, 2004.

[10] M. Bounkhel ; Existence Results of Non convex Differential Inclusions, J Portugalial Mathematica, Vol. 59 (2002) , No. 3, pp. 283-195.

[11] M. Bounkhel, T. Haddad; Existence Results of viable solutions for non Convex differential inclusions, EJDE Vol (2005), No,50,pp,1- 10

[12] M. Bounkhel and M.Yarou; Existence Results for First and Second Order Nonconvex Sweeping Proccess with Delay. Potugaliae Mathematica, Vol. 48, N 2, 223-246 (2002)

[13] A. Bressan, A, Cellina and G. Colombo, upper semicontinuous differential inclusions without convexity, Proc. Amer. Soc., 106 (1989), 771-775.

[14] C. Castaing and M. Valadier; Convex analysis and measurable multifonctions, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 580, Springer,,Berlin, (1977).

[15] A.Cellina and V. Staicu, On evolution equations having monotonicities of opposite sign, J . Differential Inclusions. 90 (1991), 71-80.

[16] A.Cernea; On A Second-Order Differential Inclusion with Consrtaints. Applied Mathematics E-Notes, 7(2007) ,9 – 15 (c)

[17] B. Cornet and B. Haddad, Tthéoreme de viabilité pour les inclusions differential du second order.Israel J. Math Vol. 57 (1987) , pp.225-238

[18] B. Cornet, G. Haddad; Théoreme de viabilité pour les inclusions differential du second order. Israel J. Math Vol. 57 (1993) , pp.109-13

[19] R. Descombes; Cours d'analyse, Librairie Vuibert, Paris, (1962)

[20] A. Fryszokwski; Existence of solutions of functional differential inclusions in nonconvex case, Ann. Pol. Math., 45(1985), 121-124.

[21] J.Hale; Functional differentieal equations, Springer, Berlin, 1971.

[22] J. Hale, and Lunel, S,M,V. : Introduction to functional differntall equations,Springer Berlin 1993.

[23] G. Haddad; Topological Properties of Sets Solutions for Functional Differential Inclusions, Nonliear Analysis, T.M.A, 5(12) (1981), 1349-1366.

[24] T. Haddad and M.Yarou; Existence of Solutions for nonconvex second order differential inclusions,the infinite dimensional space. Electronic Journal of Differential Equations, Vol 2006(2006) , No. 33, pp. 1-8.

[25] M. Kisieliwicz; Differential inclusions and optimal control, PWN Poslih Scientific. Publishers, Tnarzana and Kluwer A cademic Publishers.

[26] Lakshmikantham.Wen, L. and Zhang, B, Theory of differential equations with unbounded delay, Kluwer academic publishers, 1994.

[27] V. Lupulescu; Existenceof solutions to a class of second order differential inclusions,Techninal report, CM 01/I-11, Department of Mathematics of Aveiro University,2001.

[28] V. Lupulescu; Existence of Solutions for nonconvex Second order Differential Inclusions, Applied Mathematics E-Notes, 3(2003) , 115-123.

[29] V. Lupulescu; Existence of Solutions for nonconvex Functional Differential Inclusions, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2004(2004), No. 141, pp. 1-6.

[30] V. Lupulescu; A viability result for second-order differential inclusions. Elect Journal of Differential Equations,(2002) , No. 76, pp. 1-12.

[31] L. Marco, J. A. Murillo; viability theorems for higher-order differential inclusions. Set-valued Anal.,Vol. 6, (1999) , pp. 21-37.

[32] R. Mochadi, S. Sajid; A viability result for a first-order differential inclusion Vol. 63 Fasc. 1-2006

[33] T.X.D. Ha and M. Marques, Nonconvex Second order differential inclusions with memory, Set-Vetued Analysis, 3.(1995), 71-86.

[34] M. Altalioubrahim and S. Sajid; Aviability problem with perturbation in Hilbert space, Electronic journal of qualitative theory of differential equations,2007, No.7, 1-14.

[35] N.Fetouci, ; Problèmes d'evolution gouvarnés par le Processus de Rafle, Memoire de Magistre, Université de Jijel 2005.

[36] F. Papalini, Existenceof solutions for differential inclusions without convexity, Rend. Inst. Mat. Univ Trieste, 24 (1992), 193-206.

[37] R.A. Poliquin, R.T. Rockafellar, .Prox-regular functions in variational analysis, Trans. Amer.Math. Soc.348 (1996) 1805-1838.

[38] P.Rossi; viability for upper semicontinuous differential inclusions, Set-valued Anal.,Vol. 6, (1998) , pp. 21-37.

[39] A.Saym, Contributions Aux Inclusions Differential, PhD Thesis, Universite Montpellier 11,1993

[40] L. Thibault, Propriétés des sous- différentiels des fonctions lolalement lipschitziennes définies sur espace de Banach.Applications,

[41] M.Yarou, Problèmes aux limites pour une classe d'equation differentielles, Thèse de doctorat d'etat, Université de constantine, 2003

[42] M.Yarou, Discretization methods for nonconvex differential inclusions, submited.

جامعة جيجـــل
كلية العلوم
قسم الرياضيات
مذكرة ماجيستر

Contribution à l'étude de quelques problèmes d'évolution

للطالبة
مسكين حبيبة

ملخص

نتطرق في هذه المذكرة إلى دراسة وجود حل لمسألة تطورية بالنسبة لمعادلة تفاضلية متعددة القيم من الدرجة الأولى والدرجة الثانية في حالة التأخر وعدم التأخر ذات قيم غير محدبة .تعرضنا إلى دراسة اضطرابات لتابع من النوع كراتيدوري

Résumé

On traite dans ce mémoire l'existence de solution absolument continue pour une inclusion différentielle du premier ordre et du second ordre avec retard et sans retard à valeurs non convexes. On a étudié le problème avec une perturbation de Carathéodory.

Abstract

In this work, we are interested by the existence of absolute continuous solutions for differential inclusion of the first order and second order with delay and without delay in the nonconvex case. We have considered also the problem with univoque perturbations of Caratheodory.