République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Sur un théorème de mesurabilité pour les applications multivoques

Présenté par :

Bouguettouche Feyrouz **Boumezbeur Insaf**

Devant le Jury :

Président	: **M. F.Yarou**	**Prof.**	Université de Jijel.
Encadreur	: **W. Boukrouk**	**M.C.B.**	Université de Jijel.
Examinateur	: **S. Melit**	**M.C.B.**	Université de Jijel.

Promotion 2018/2019

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

Nous remercions premier ALLAH le tout puissant qui m'a donné la force, la volonté, et le courage pour accomplir ce travail.

Nos sincères remerciements et reconnaissances vont à notre encadreur madame ***Boukrouk Wafia*** *pour son aide, ainsi que pour la confiance qu'elle nous a prodiguée durant la réalisation de ce travail. Elle a su motiver chaque étape de notre travail par des remarques pertinentes et a su nous faire progresser dans nos recherches.*

Remerciements s'adressent aux membres de jury Professeurs ***M.F. Yarou****,* ***Melit Samira*** *qui nous ont honoré en acceptant d'évaluer ce travail.*

Nous pouvons terminer ces lignes sans remercier nos amis et nos parents qui n'ont jamais cessé de nous encourager. Nos parents, à qui nous ne trouverons pas les mots pour leur dire exactement tout ce que nous leur devons. A chaque pas et à chaque détour du chemin ils étaient là, avec sollicitude, affection, et confiance en nous. Merci aussi à nos sœurs et nos frères de nous avoir mené si loin.

Enfin nous n'oublierons pas tous ceux qui nous ont encouragé, de près ou de loin à terminer ce travail, à tous ceux-ci.

Merci . . . Merci . . . Merci

Feyrouz & Insaf

Dédicace

À

Mon père Mohammed.

Ma mère dahbia.

Mon frère Ayoub et mes soeurs.

Mes petites princesses Ines , Ilin. Chahda

Mes grandes familles Boumezbeur et Darbal.

Mes amies en particulier ...Fayrouz, Somia,Souad.

Tous mes collègues de la promotion "2018-2019".

Tous ceux qui sont proches á mon cœur.

B.Insaf.

Dédicace

À

Mon père Djamaleddine.

Ma mère Hadjiba.

Mes frères Mouhammed et Oussama et Dawed et mes soeurs.

Mon grand frère Abdelbassite , et ma petite soeur ma princesse Manar.

Ma grande famille Bouguettouche.

Mes amies en particulier Insaf, warda, Amel et Rahma .

Tous mes collègues de la promotion "2018-2019".

Tous ceux qui sont proches á mon cœur.

B.Feyrouz.

Table des matières

Introduction

Le présent travail a pour but de présenter la notion de mesurabilité pour les applications multivoques ainsi que quelques résultats concernant ce concept. En fait, la notion de mesurabilité des multi-applications joue un rôle important dans certaines branches de l'analyse appliquée :
Économie mathématique, modèles économiques à un continu de consommateurs théorie des jeux etc, et notamment dans la théorie du contrôle optimum et des tests statistiques.
Notons qu'en 1966, G. Debreu, inspiré d'un travail de R. J. Aumann qui revient au 1965, a inauguré l'étude des multi-applications mesurables en se plaçant dans des espaces mesurables abstraits. Dans [5] l'auteur se place dans des espaces localement compacts, et présente une étude pour la mesurabilité qui fournit des outils permettant de résoudre des problèmes relevant de la pratique.

Ce mémoire est une initiation à l'étude des multi-applications mesurables,à travers des notions réparties en trois chapitres.

le premier chapitre est consacré à des notations de base que nous avons utilisé tout au long de ce travail. Dans le deuxième chapitre, nous étudions la mesurabilité d'une classe d' applications multivoques à valeurs non vides fermées dans un espace de Banach séparable. Nous présentons quelques théorèmes avec démonstrations très détaillées.

On ternire par un chapitre dans lequel nous domons un exemple d'un théorème d'existence de solutions d'une inclusion différentielle dont la démonstrations est basée sur la notion de mesurabilité. En effet, lors de la construction d'une suite qui converge vers une solution, on constate l'importance de la mesurabilité.

Chapitre 1

Notations et préliminaires

Dans ce chapitre, Nous résumons les notations et les concepts de base liés à l'étude des multi-applications ainsi que des résultats que nous avons utilisé dans ce mémoire.

1.1 Notations

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par

- E espace de Banach réel.
- E' le dual topologique de l'espace E.
- $\|.\|$ la norme de E.
- $B_E(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r.
- $\overline{B}_E(a, r)$ la boule fermé de centre a et de rayon r.

- $\overline{B}_E$ la boule unité fermée de E.

- 0_E l'élément neutre de $(E, \oplus)$

- si A est un sous ensemble de E alors $\overline{A}$ est la fermeture de A.

- $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de tous les sous ensembles de E.

- $\mathcal{B}(E)$ la tribu de Borel sur l'espace E.

- $C^1([0,1])$ l'espace de Banach de toutes les applications continues $u : [0,1] \longrightarrow E$, muni de la norme $\|u\|_C = \sup\limits_{t\in[0,1]} \|u(t)\|$

- $C^1_E([0,1])$ l'espace de Banach de toutes les applications continues ayant une dérivée continue
  $u : [0,1] \longrightarrow E$, muni de la norme $\|u\|_{C^1} = max\left\{ \max\limits_{t\in[0,1]} \|u(t)\|, \max\limits_{t\in[0,1]} \|\dot{u}(t)\| \right\}$
- e.v.n espace vectoriel normé.
- $X \backslash A$ Le complémentaire de L'ensemble A dans X.

1.2 Espace métrique

Les notations de cette section ont été prises des références [8] et [11]

Définition 1.1. *Soit X un ensemble non vide quelconque. On appelle distance sur X une application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui à $(x, y) \in X \times X$ fait correspondre le nombre réel fini positif $d(x, y)$ appelé distance de x à y, et satisfaisant aux trois conditions suivantes*

(i) $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

(ii) $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$ *(relation de symétrie),*

(iii) $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.2. *On appelle espace métrique le couple (X, d) formé d'un ensemble X et une distance d définie sur X.*

Définition 1.3. *Soit (X, d) un espace métrique, soient $x_0 \in X$ et r>0. On appelle boule fermée de centre x_0 et de rayon r, notée $\overline{B}(x_0, r)$ l'ensemble*

$$\{x \in X/ \ d(x_0, x) \leq r\}.$$

Définition 1.4. *Soient X un espace métrique, et A une partie non vide de X. La distance d'un point $x \in X$ à l'ensemble A est donnée par*

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Définition 1.5. *(L'adhérence)*

On appelle adhérence de A et on note $\overline{A}$, le sous-ensemble de (X, d) défini *par*

$$\overline{A} = \{x \in X,\ d(x, A) = 0\}.$$

Corollaire 1.6. *Soient A une partie non vide d'un espace métrique (X, d) et $x \in X$. Alors,*

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x; A) = 0.$$

Définition 1.7. *Soit (E, d) un espace métrique et soit $(x_n)_n \subset E$. On dit que $(x_n)_n$ est de Cauchy si est seulement si*

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\ p, q \in \mathbb{N}\ :\ p > q \geq n_0 \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Définition 1.8. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'espace métrique (X, d), Soit $x \in X$. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$ si*

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ :\ n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Définition 1.9. *Un espace métrique (E, d) est dit complet lorsque toute suite de Cauchy d'éléments de E est convergente dans E.*

1.3 Espace normé

Les notions de cette section ont été prises des références [8] et [11]

Définition 1.10. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$*
Soit

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

on dit que φ est une norme sur E si seulement si *i) Pour tout* $x \in E \quad \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

ii) Pour tout $x \in E$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{K}$, *on a* $\varphi(\lambda, x) = |\lambda|\varphi(x)$.

iii) Pour tout $x, y \in E$, *on a* $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$.

Remarque (Distance associée à une norme)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé. Pour tout $x, y \in E$,
on pose $d(x, y) = \|x - y\|$. On vérifie facilement que d est une distance sur E, appelée **distance associée à la norme**. La topologie correspondante sera appelée **topologie normique**

Définition 1.11. *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

1.4 Espace topologique

Les notions de cette section ont été prises des références [4] et [8].

Définition 1.12. *Soit X un ensemble non vide. Soit θ une famille de parties de X ($\theta \subset \mathcal{P}(X)$). On dit que θ est une topologie sur X si est seulement si*

1) $\emptyset \in \theta, X \in \theta$.

2) $\forall (A_i)_{i \in I} \subset \theta \Longrightarrow \bigcup\limits_{i \in I} A_i \subset \theta$.
(stabilité par union quelconque).

3) $\forall (A_i)_{i=1,..,n} \subset \theta \Longrightarrow \cap_{i=1}^{n} (A_i) \in \theta$.
(stabilité par intersection finie).

Définition 1.13. *Soit θ une topologie sur X alors, (X, θ_X) est appelé un espace topologique.*
On appelle ensemble ouvert de X tout ensemble appartenant à θ, c'est-à-dire

$$A \text{ est ouvert dans } X \Longleftrightarrow A \in \theta.$$

Définition 1.14. *Soit (X, θ) un espaces topologique et $B \subset X$. On dit que B est fermé si est seulement si C_X^B est ouvert*

$$B \ ferme \Longleftrightarrow \ C_X^B \text{ ouvert}.$$

Définition 1.15. *Soit (X_1, θ_1) et (X_2, θ_2) deux espaces topologies et soit*

$$X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2)/x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}.$$

1) On appelle ouvert premier tout ensemble

$$O = O_1 \times O_2/O_1 \in \theta_1, O_2 \in \theta_2.$$

2) on appelle ouvert de X tout union d'ouverts premier, i.e.

$$\theta = \{\bigcup_k (O_1^k \times O_2^k)/O_1^k \in \theta_1, O_2^k \in \theta_2\}.$$

est une topologie sur X appelée la topologie produit de $\theta_1 \times \theta_2$ le couple (X, θ) est appelée l'espace topologique produit de (X_1, θ_1) et (X_2, θ_2).

Proposition 1.16. *Tout espace vectoriel normé est un espace topologique.*

Définition 1.17. *Soient (X, θ) un espace topologique. On dit que (X, θ) est séparable s'il admet un sous ensemble dénombrable partout dense.*

1.5 Quelques notions de mesurabilité

Les résultats suivants sont pris de la référence [1]

Définition 1.18. *Soient X un ensemble non vide et Σ une famille de sous ensembles de X. Alors Σ est dite une tribu sur X si*

1. $\emptyset \in X$.
2. $A \in \Sigma \Rightarrow X \setminus A \in \Sigma$.
3. $A_n \in \Sigma, \ \forall n \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \Sigma$.

Le couple (X, Σ) est appelé espace mesurable, et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables.
Si la troisième relation est vraie pour les unions finies seulement, on dit que Σ est une algèbre sur X.
Si X est un espace topologique, la tribu de Borel sur X notée $\mathcal{B}(X)$ est la plus petite tribu contenant la topologie de X.

Définition 1.19. *Soient (X_1, Σ_1) (X_2, Σ_2), deux espaces mesurables et g une fonction définie sur X_1 à valeurs dans X_2, on dit que g est (Σ_1, Σ_2)-mesurable si pour tout $A \in \Sigma_2$, $g^{-1}(A) \in \Sigma_1$.*
Si X_2 est un espace topologique, une fonction $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$-mesurable est dite fonction Borélienne.

Définition 1.20. *Soit (X, Σ) un espace mesurable et M un espace métrique. On dit que la fonction $f : X \longrightarrow M$ est Σ-étagée (resp. dénombrablement Σ-étagée) si f est $(\Sigma, \mathcal{B}(M))$- mesurable et $f(X)$ fini (resp. dénombrable).*

Proposition 1.21. *([7]) Soient (T, Σ) un espace mesurable, f et g deux applications de T dans $\mathbb{R}$. L'application $h = (f, g) : T \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est $\Sigma - \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ mesurable si seulement si f et g sont $\Sigma - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurables.*

Proposition 1.22. *Soient $g_1, ..., g_n$ des fonctions $\Sigma_1 - \Sigma_2$ mesurable, h une fonction $\Sigma_1 - \Sigma_3$ mesurable, Alors la fonction f définie par*

$$f(t) = h(g_1(t), ..., g_n(t))$$

est $\Sigma_2 - \Sigma_3$ *mesurable.*

Proposition 1.23. *([7]) Soient* (X, Σ) *un espace mesurable,* (Y, T) *un espace topologique,* f_1, f_2 *deux applications mesurable et* $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow (Y, T)$ *une application continue. Alors l'application* $h : (X, \Sigma) \longrightarrow (Y, T)$ *définie par*

$$h(x) = \Phi(f_1(x), f_2(x)) \ , \ \textit{pour tout } x \in X$$

est mesurable. Autrement dit, une combinaison continue de deux application mesurable est mesurable.

Théorème 1.24. *([10]). Soient* $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *des fonctions mesurables. Alors, sur leur domaine de définition, la fonction*

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{inf} f_n$$

est mesurable.

Lemme 1.25. *Sous les notations de la définition* (1.20)*, nous avons les caractérisations suivantes :*

- f *est Bochner mesurable ;*
- *il existe une suite de fonctions* Σ*-étagées définies sur* X *à valeurs dans* M*, convergeant simplement vers* f *;*
- *il existe une suite de fonctions dénombrablement* Σ*-étagées définies sur* X *à valeurs dans* M*, convergeant uniformément sur* X *vers* f*.*

Définition 1.26. *Soit* (X, Σ) *un espace mesurable. Alors l'application* $\nu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *est une mesure sur* X *si*

1. $\nu(\emptyset) = 0$ *;*
2. $\nu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \nu(A_n)$*, pour toute suite dénombrable* (A_n) *d'éléments de* Σ *deux à deux disjoints.*

   Le triplet $(X; \Sigma; \nu)$ *est appelé espace mesuré.*

Si $\nu(A) \geq 0$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que ν est une mesure positive et on note $\nu \geq 0$, ou que l'espace (X, Σ, ν) est positif.

Si $\nu(A) < \infty$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que ν est une mesure finie ou que l'espace (X, Σ, ν) est fini.

Si X est un espace topologique, la mesure $\nu : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est appelée mesure Borélienne.

Définition 1.27. *Soit X un espace topologique séparé et ν une mesure Borélienne. Alors ν est dite régulière si pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert C et un fermé G de X, tels que $G \subset A \subset C$ et $\nu(C \backslash G) \leq \varepsilon\cdot$ Une mesure Borélienne finie et régulière est appelée mesure de Radon.*

Définition 1.28. *Soit (X, Σ, ν) un espace mesuré avec $\nu \geq 0$. Soit Z un sous ensemble de X. On dit que Z est ν-négligeable ou négligeable (s'il n'y a pas de risque de confusion), s'il existe $A \in \Sigma$ tel que $Z \subset A$ et $\nu(A) = 0$.*
On dit qu'une propriété sur X est vraie ν-presque partout (ν.p.p) si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est ν-négligeable.
La tribu ν-complétée de Σ notée Σ_ν est la tribu engendrée par Σ et les ensembles ν- négligeables, c'est à dire

$$\Sigma_\nu = \{A \cup Z / A \in \Sigma \ etZ \ ensemble \ \nu - ngligeable\}.$$

La tribu Σ est dite complète si $\Sigma = \Sigma_\nu$, c'est à dire, si tout ensemble ν-négligeable appartient à Σ.

Définition 1.29. *Soit (X, Σ, ν) un espace mesuré avec ν finie. Notons $\Sigma^* = \Sigma_\nu$ et soit $\nu^* : \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\nu^*(A \cup Z) = \nu(A)$, pour tout $A \in \Sigma$ et tout Z ν-négligeable. Alors (X, Σ^*, ν^*) est un espace mesuré avec ν^* finie et complète et on a $\nu^* = \nu$ sur Σ. (X, Σ^*, ν^*) est appelé l'extension de Lebesgue de l'espace mesuré (X, Σ, ν).*

Théorème 1.30. *Soient X un espace topologique compact, Σ une algèbre sur X et $\nu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction additive, régulière et bornée. Soit $\tilde{\Sigma}$ la* *plus petite tribu sur X contenant Σ. Alors il existe une mesure unique $\nu : \tilde{\Sigma}$ régulière, bornée et qui prolonge ν à $\tilde{\Sigma}$.*

Mesures de Borel et mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Soient t_0, t_1 deux réels tels que $t_0 < t_1$, $J = [t_0, t_1]$ et Σ la famille des sous ensembles de J de la forme $\{t_0\}$=$[t_0; t_1]$, $]t'; t'']$, pour $t_0 \leq t' \leq t'' \leq t_1$, et les unions finies de ces intervalles.
Il est clair que Σ est une algèbre sur J.
Définissons $\nu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\nu(\{t_0\}) = 0,\ \nu(]t', t'']) = t'' - t' \text{ et } \nu(\bigcup_{j=1}^{k} A_j) = \sum_{j=1}^{k} \nu(A_j),$$

avec $k \in \mathbb{N}$ et A_j des intervalles disjoints de la forme considérée.
La fonction ν est une mesure additive, régulière et bornée. Par le théorème (1.30) elle admet une unique extension à $\tilde{\Sigma}$ qui est la plus petite tribu sur J contenant Σ, et qui n'est autre que la tribu Borélienne $\mathcal{B}(J)$.
Cette extension notée $\tilde{\nu}$ est appelée la mesure de Borel sur J.
Soit (J, Σ^*, ν^*) l'extension de Lebesgue de $(J, \tilde{\Sigma}, \tilde{\nu})$. Alors les éléments de Σ^* sont appelés ensembles Lebesgue-mesurables de J et ν^* est la mesure de Lebesgue sur J.
Dans la suite de ce travail, pour tout ensemble compact I de $\mathbb{R}$, on note par

- $\mathcal{L}(I)$ la tribu de Lebesgue sur I,
- μ ou dt la mesure de Lebesgue,
- $W_E^{1,1}(I)$ l'espace des applications $u \in C_E(I)$ ayant une dérivée faible dans $L_E^1(I)$.

- $W_E^{2,1}(I)$ l'espace des applications $u \in C_E(I)$ ayant une dérivée première absolument continue et une dérivée seconde faible dans $L_E^1(I)$.

Définition 1.31. *Soit $p \in [1, +\infty]$, on définit les espace $L^p(E)$ par :*

- *Si $p \in [1, +\infty[$, $L^p(E) = \{f \in \mathcal{M}_\mu(E, \Sigma) : \int_E |f(x)|^p d_\mu x < +\infty\}$.*
- *Si $p = +\infty$, $L^{+\infty}(E) = \{f \in \mathcal{M}_\mu(E, \Sigma),\ \exists c \geq 0 :\ |f(x)| \leq c\ \mu\ p.p\}$.*

Théorème 1.32. *Soit $p \in [1, +\infty]$ et soit $(f_n) \subset L^p(E)$ une suite qui converge vers f dans $L^p(E)$ i.e $\|f_n - f\|_p \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$*
Alors on peut extraire de (f_n) une suite $(f_{n_k})_k$ qui converge p.p vers f.

1.6 Multi-applications et sélections

Pour plus de détails, on peut se référer [2].

Soit X, Y deux ensembles non vides.

Définition 1.33. *On appelle multi-application (application multivoque) toute application F définie de X à valeurs dans $\mathcal{P}(Y)$. On notera $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ ou $F : X \rightrightarrows Y$ (une application qui à chaque élément $x \in X$ associée un sous ensemble $F(x)$ de Y.*

Définition 1.34. *On appelle graphe de la multi-application F, l'ensemble*

$$gph(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

F est à graphe fermé si $gph(F)$ est fermé dans $X \times Y$.

Définition 1.35. *On appelle l'image de F l'union des images $F(x)$*

$$Im(F) = \bigcup_{x \in X} F(x)$$

et domaine de F l'ensemble

$$D(F) = \Big\{x \in X/\ F(x) \neq \emptyset\Big\}.$$

Définition 1.36. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On suppose que $D(F) = X$. On appelle sélection de F toute application $f : X \longrightarrow Y$ telle que*

$$f(x) \in F(x) \; ; \; \forall x \in X.$$

Définition 1.37. *Soit X un sous-ensemble de Y et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.*
Alors

$$F^{-1}(A) = \Big\{ x \in X : F(x) \cap A \neq \emptyset \Big\}.$$

1.7 Mesurabilité des multi-applications

Pour plus de détails sur la mesurabilité des multi-applications on peut se référer à [6].

Définition 1.38. *Soit (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique séparable et $\Gamma : T \rightrightarrows X$. On dit que Γ est $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$-mesurable si pour tout ouvert V de X*

$$\Gamma^{-1}(V) = \{ t \in T : \Gamma(t) \cap V \neq \emptyset \} \in \Sigma.$$

Proposition 1.39. *([9]) Si Γ_1 et Γ_2 sont deux multi-applications mesurables, alors la multi-application $t \longmapsto \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ est mesurable.*

Théorème 1.40. *(Représentation de Castaing)*
Soit (T, Σ) une espace mesurable, un espace métrique complet séparable et soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides fermé. Alors, F est mesurable si seulement s'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications mesurables $f_n : T \to X$; $\forall n \in \mathbb{N}$ telle que
pour tout $t \in T$; $F(t) = \overline{\{ f_n(t), \; n \in \mathbb{N} \}}$.

Théorème 1.41. *Soient (T, Σ, μ) un espace mesuré avec $\mu - \sigma$ finie et $\Sigma\mu$-complète.*

X un espace métrique séparables et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Considérons les propriétés suivantes équivalents.

(i) F est mesurable.

(ii) $gph(F) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$.

(iii) $F^{-1}(B) \in \Sigma$, pour tout ouvert $B \in \mathcal{B}(X)$.

(iii) $F^{-1}(C) \in \Sigma$, pour tout fermé C de $\mathcal{B}(X)$.

Remarque 1.42. *Toute multi-application constante est mesurable. En effet, soit $F : T \rightrightarrows X$ définie par*

$$F(t) = A, \ \forall t \in T.$$

Soit V un ouvert de X, alors

$$\begin{aligned} F^{-1}(V) &= \{t \in T \ ; \ F(t) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in T \ ; \ A \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \begin{cases} T \ si \ A \cap V \neq \emptyset \\ \emptyset \ si \ A \cap V = \emptyset. \end{cases} \end{aligned}$$

$T, \emptyset \in \Sigma \Longrightarrow F$ est mesurable.

Théorème 1.43. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, E un espace de Banach séparable. Soient $F : T \times E \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable et $u : T \to E$ une application Σ-mesurable. Alors la multi-application $F(., u(.), \dot{u}(.))$ est Σ-mesurable.*

Démonstration. On pose $H(.) = F(., u(.), \dot{u}(.))$.

Comme u est une application mesurable, alors $\dot{u}$ est aussi mesurable, donc d'après la Proposition (1.22), la fonction $f : T \to T \times E \times E$ définie par $f(t) = (t, u(t), \dot{u}(t))$ est mesurable.

Soit maintenant V un ouvert de E. Alors

$$\begin{aligned} H^{-1}(V) &= \{t \in T \ : F(t, u(t), \dot{u}(t)) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in T \ : F(f(t)) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in T \ : f(t) \in F^{-1}(V)\} \\ &= f^{-1}(F^{-1}(V)). \end{aligned}$$

Comme F est mesurable on a $F^{-1}(V) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E)$ et grâce à la mesurabilité de f, on obtient $f^{-1}(F^{-1}(V)) \in \Sigma$, c'est à dire, $H^{-1}(V) \in \Sigma$. Par conséquent $F(., u(.), \dot{u}(.))$ est Σ-mesurable. ■

Théorème 1.44. *(Théorème d'existence de sélection mesurable)*
Soient (T, Σ) un espace mesurable. X un espace métrique complet séparable et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application Σ-mesurable à valeurs fermés. Alors F admet ou moins une sélection mesurable.

1.8 La distance de Hausdorff

Dans la suite on considère un espace métrique (X, d) et $A, B, C \subset X$.

Définition 1.45. *On appelle écart entre A et B la quantité notée $e(A, B)$ et définie par*

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A} \left(\inf_{y \in B} d(x,\, y) \right).$$

Définition 1.46. *On appelle distance de Hausdorff entre A et B la quantité $\mathcal{H}(A, B)$ définie par*

$$\mathcal{H}(A, B) = \max \Big(e(A, B), e(B, A) \Big),$$

avec la convention

$$\sup \emptyset = 0 \ \textit{et} \ \inf \emptyset = +\infty.$$

Propriétés

1. $e(A, \emptyset) = +\infty$ si $A \neq \emptyset$;
2. $e(\emptyset, B) = 0$;
3. $e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$;
4. $\mathcal{H}(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$;
5. $e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C)$;
6. $\mathcal{H}(A, C) \leq \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C)$.

Si on note par $P_f(X)$, l'ensemble des parties fermées de X, alors $P_f(X)$ muni de la distance de Hausdorff $\mathcal{H}$, est un espace métrique.

Chapitre 2

Théorèmes de mesurabilité dans le cas multivoque

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la mesurabilité de certaines applications multivoques ayant une certaine forme. Ces multi-applications apparaissent dans la démonstration du Théorème principale dans le troisième chapitre. On rappelle que la définition d'une application multivoque mesurable est la Définition (1.38). Avant de donner quelques Théorèmes, on commence par quelques Lemmes préparatoires. Pour les Théorèmes nous nous sommes référés à [2].

Lemme 2.1. *Soient* $(E, \oplus, \odot)$ *un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{R}$, $a \in E$ *et* $r \in \mathbb{R}_+^*$. *Alors,*

$$\overline{B}_E(a, r) = a \oplus r \odot \overline{B}_E(0_E, 1).$$

Démonstration. Soit $y \in a \oplus r \odot \overline{B}_E(0_E, 1)$. Alors, il existe $x \in \overline{B}_E(0_E, 1)$ tel que

$$y = a \oplus r \odot x.$$

Puisque $x \in \overline{B}_E(0_E, 1)$, alors $\|x\| \leq 1$ et donc,

$$\|y \oplus (-a)\| = \|a \oplus r \odot x \oplus (-a)\| = \|r \odot x\| = |r|.\|x\| = r.\|x\| \leq r.1 = r,$$

d'où

$$y \in \overline{B}_E(a, r).$$

Soit maintenant $y \in \overline{B}_E(a, r)$. Donc $\|y - a\| \leq r$. Il suffit de prendre

$$x = \frac{1}{r} \odot (y - a),$$

on aura

$$a \oplus r \odot x = y,$$

avec

$$\|x\| = \frac{1}{r}\|y - a\| \leq (\frac{1}{r})r = 1,$$

i.e

$$x \in \overline{B}_E(0_E, 1),$$

On conclut que

$$y \in a \oplus r \odot \overline{B}_E(0_E, 1). \qquad \blacksquare$$

Lemme 2.2. *Soient* $(E, \oplus, \odot)$ *un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{R}$, A *un sous-ensemble de* E, $a \in E$ *et* r *un nombre réel. Alors,*

(i) $r \odot \overline{A} = \overline{r \odot A}$,

(ii) $a \oplus \overline{A} = \overline{a \oplus A}$.

Démonstration. Montrons (i). Nous avons

$$y \in r \odot \overline{A} \Leftrightarrow y = r \odot x;\ x \in \overline{A}$$

mais

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists\ (x_n)_n \subset A,\ telle\ que \lim_{n\to+\infty} x_n = x\ dans\ E,$$

donc

$$y = r \odot \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}(r \odot x_n),$$

on note par $y_n = r \odot x_n$.

Alors, $\exists(y_n)_n \subset r \odot A$ telle que $y = \underset{n\to+\infty}{lim} y_n$

d'où

$$y \in \overline{r \odot A}.$$

Montrons (ii).

$$y \in a \oplus \overline{A} \Leftrightarrow y = a \oplus x\ ;\ x \in \overline{A}$$

mais

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists\ (x_n)_n \subset A,\ telle\ que \lim_{n\to+\infty} x_n = x\ dans\ E$$

donc

$$y = a \oplus \lim_{n\to+\infty} x_n$$

d'où

$$y = \lim_{n\to+\infty}(a \oplus x_n).$$

On note par $y_n = a \oplus x_n$, alors

$\exists(y_n)_n \subset a \oplus A\ tel\ que\ \lim \underset{n\to+\infty}{lim} y_n = y$ donc

$$y \in \overline{a \oplus A}$$

d'où le résultat. ■

Lemme 2.3. *Soit (E, d) un espace métrique, $x \in E$ et A un sous-ensemble non vide de E. Alors,*

$$\underset{y\in\overline{A}}{inf}(d(x,y)) = \underset{y\in A}{inf}(d(x,y))$$

Démonstration. Comme $A \subset \overline{A}$, alors

$$\{d(x,y),\ y \in A\} \subset \{d(x,y),\ y \in \overline{A}\}$$

d'où

$$\inf_{y\in\overline{A}} d(x,y) \leq \inf_{y\in A} d(x,y).$$

D'autre part, soit $y* \in \overline{A}$. Alors, il existe une suite $(x_n) \in \mathbb{N} \subset A$ telle que

$$d(y*, x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Nous avons

$$\inf_{y\in A} d(x,y) \leq d(x,y),\ \forall y \in A$$

d'où

$$\inf_{y\in A} d(x,y) \leq d(x,x_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

donc

$$\inf_{y\in A} d(x,y) \leq d(x,y*) + d(y*,x_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

alors

$$\inf_{y\in A} d(x,y) \leq \lim_{n\to+\infty}[d(x,y*) + d(y*,x_n)] = d(x,y*).$$

On conclut que

$$\inf_{y\in A} d(x,y) \leq d(x,y),\ \forall y \in \overline{A}$$

et donc

$$\inf_{y\in A} d(x,y) \leq \inf_{y\in\overline{A}} d(x,y),$$

d'où l'égalité. ∎

Théorème 2.4. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, E un espace de Banach séparable, $f : T \longrightarrow E$ une application Σ-mesurable et $\rho : T \longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction Σ-mesurable. Alors, la multi-application*

$$\begin{aligned} F : T &\rightrightarrows E \\ t &\mapsto F(t) = \overline{B}_E(f(t), \rho(t)) \end{aligned}$$

est Σ-mesurable.

Démonstration. Puisque E est un espace métrique séparable, alors $\overline{B}_E(0_E, 1) = \overline{\{x_n(t), n \in \mathbb{N}\}}$. Pour tout $t \in T$, par les Lemmes (2.1), (2.2) on conclut que

$$\begin{aligned} F(t) &= f(t) + \rho(t)\overline{B}_E(0_E, 1) \\ &= f(t) + \rho(t)\overline{\{x_n, n \in \mathbb{N}\}} \\ &= \overline{\{f(t) + \rho(t)x_n, n \in \mathbb{N}\}} \\ &= \overline{\{h_n(t), n \in \mathbb{N}\}} \end{aligned}$$

telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} h_n : T &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto h_n(t) = f(t) + \rho(t)x_n. \end{aligned}$$

D'après le Théorème de représentation de Castaing (1.40), pour montrer que F est Σ-mesurable, il suffit de montrer que chaque application h_n est Σ-mesurable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(h_n \text{ } est \text{ } \Sigma - mesurable) \;\Leftrightarrow\; (\forall \; V \text{ } ouvert \text{ } dans \text{ } E, \; h_n^{-1}(V) \in \Sigma)$$

Soit V un ouvert dans E.

$$\begin{aligned} h_n^{-1}(V) &= \{t \in T : h_n(t) \in V\} \\ &= \{t \in T : f(t) + \rho(t).x_n \in V\}. \end{aligned}$$

Soit
$$W_n = \{(x,r) \in E \times \mathbb{R}_+ : x + rx_n \in V\},$$
alors
$$h_n^{-1}(V) = \{t \in T; (f(t), \rho(t)) \in W_n\},$$
et si on note par
$$\begin{aligned} g : T &\to E \times \mathbb{R}_+ \\ t &\mapsto g(t) = (f(t), \rho(t)) \end{aligned}$$
alors
$$h_n^{-1}(V) = \{t \in T; g(t) \in W_n\} = g^{-1}(W_n)$$
L'application g est Σ-mesurable car f et ρ le sont d'après Proposition (1.21), par conséquent il suffit de montrer que W_n est un ouvert de $E \times \mathbb{R}_+$, i.e. que $C_{E\times\mathbb{R}_+}^{W_n}$ est fermé dans $E \times \mathbb{R}_+$. Soit $(x_k, r_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_{E\times\mathbb{R}_+}^{W_n}$ une suite convergente dans $E \times \mathbb{R}_+$ vers (x', r'). Pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} (x_k, r_k) \in C_{E\times\mathbb{R}_+}^{W_n} &\Rightarrow (x_k, r_k) \notin W_n \\ &\Rightarrow x_k + r_k.x_n \notin V \\ &\Rightarrow x_k + r_k.x_n \in C_E^V \end{aligned}$$
donc la suite $(x_k + r_k.x_n)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_E^V$, et comme C_E^V et fermé dans E, alors
$$\lim_{k\to+\infty} (x_k + r_k.x_n) \in C_E^V,$$
or
$$\lim_{k\to+\infty} (x_k + r_k.x_n) = x' + r'.x_n$$
donc
$$x' + r'.x_n \in C_E^V$$
D'où

$$x' + r'.x_n \notin V$$

i.e.

$$(x', r') \notin W_n$$

et donc

$$(x', r') \in C^{W_n}_{E\times\mathbb{R}_+}. \qquad \blacksquare$$

Théorème 2.5. *Soit* (T, Σ, μ) *un espace mesuré positif avec* Σ μ*-complète et* $\mu - \sigma$ *finie. Soient* E *un espace de Banach séparable,* $\Gamma : T \rightrightarrows E$ *une multi-application mesurable à valeurs non vides fermées, et* $f : T \to E$ *une application mesurable. On suppose que la multi-application*

$$\begin{aligned} &H : T \rightrightarrows E \\ &\quad t \mapsto H(t) = \{x \in \Gamma(t); d(f(t), x) = d(f(t), \Gamma(t))\} \end{aligned}$$

est à valeurs non vides. Alors, H *est* Σ*-mesurable.*

Démonstration. Notons par

$$\begin{aligned} &\rho : T \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ &\quad t \longmapsto \rho(t) = d(f(t), \Gamma(t)) = inf\{d(f(t), y)\ ;\ y \in \Gamma(t)\}, \end{aligned}$$

cette fonction est à valeurs finies positives et elle est mesurable.
En effet, Soit $t \in T$. Comme $\Gamma(t) \neq \emptyset$, alors il existe $y_0 \in \Gamma(t)$.

$$\begin{aligned} y_0 \in \Gamma(t) &\Rightarrow d(f(t), y_0) \in \{d(f(t), y)\ ;\ y \in \Gamma(t)\} \\ &\Rightarrow \{d(f(t), y)\ ;\ y \in \Gamma(t)\} \neq \emptyset \\ &\Rightarrow inf\{d(f(t), y)\ ;\ y \in \Gamma(t)\} < +\infty \end{aligned}$$

d'où $\rho(t)$ est finie. D'autre part, nous avons

$$d(f(t), y);\ \forall y \in \Gamma(t)$$

d'où

$$inf\{d(f(t), y) \ ; \ y \in \Gamma(t)\} \geq 0$$

i.e $\rho(t) \geq 0$. Nous allons montrer que la fonction ρ est mesurable. Comme Γ est mesurable, à valeurs non vides fermées, d'après le Théorème(1.40), il existe une suite $(f_n)_n$ d'applications $f_n : T \longrightarrow E$ mesurables telles que pour tout $t \in T$

$$\Gamma(t) = \overline{\{f_n(t), n \in \mathbb{N}\}}$$

Par conséquent

$$\rho(t) = inf\{d(f(t), y) \ ; \ y \in \overline{\{f_n(t), n \in \mathbb{N}\}}\}$$

et grâce au Lemme (2.3)

$$\begin{aligned}\rho(t) &= inf\{d(f(t), y) \ ; \ y \in f_n(t), n \in \mathbb{N}\} \\ &= inf\{d(f(t), f_n(t)); \ n \in \mathbb{N}\} \\ &= inf\{h_n(t); \ n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

avec $t \longmapsto h_n(t) = d(f(t), f_n(t))$. La fonction h_n est mesurable car f_n,f et l'application distance sont toutes mesurables d'après Proposition (1.23) .
On conclut d'après Théorème (1.24) ρ est mesurable
Considérons la multi-application

$$\begin{aligned}\widetilde{F} : T &\rightrightarrows \ E \\ t &\mapsto \widetilde{F}(t) = \overline{B}_E(f(t), \rho(t)).\end{aligned}$$

D'après le Théorème (2.4), $\widetilde{F}$ est mesurable. Comme $\widetilde{F}$ est à valeurs non vides fermée, alors d'après le Théorème (1.41), $gph(\widetilde{F}) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(E)$.
Mais, $H = \Gamma \cap \widetilde{F}$, car pour tout $t \in T$,

$$H(t) = \{x \in \Gamma(t) / \ d(f(t), x) = \rho(t)\}$$

Or,

$$\Big(x \in \Gamma(t) \ et \ d(f(t), x) = \rho(t)\Big) \Leftrightarrow \Big(x \in \Gamma(t) \ et \ d(f(t), x) \leq \rho(t)\Big)$$

En effet, la premier implication est évidente. Pour la deuxième, on suppose que $x \in \Gamma(t)$ et que $d(f(t), x) \leq \rho(t)$.
Nous avons

$$\rho(t) = \inf_{y \in \Gamma(t)} (d(f(t), y)) \leq d(f(t), y), \ y \in \Gamma(t)$$

et comme $x \in \Gamma(t)$

$$\rho(t) \leq d(f(t), x),$$

on conclut l'égalité $\rho(t) = d(f(t), x)$.
Par conséquent

$$\begin{aligned} H(t) &= \{x \in \Gamma(t) / \ d(f(t), x) = \rho(t)\} \\ &= \{x \in \Gamma(t) / \ d(f(t), x) \leq \rho(t)\} \\ &= \{x \in \Gamma(t) / \ x \in \overline{B}_E(f(t), \rho(t))\} \\ &= \{x \in \Gamma(t) / \ x \in \widetilde{F}(t)\} \\ &= \Gamma(t) \cap \widetilde{F}(t) \\ &= (\Gamma \cap \widetilde{F})(t). \end{aligned}$$

Donc $H = \Gamma \cap \widetilde{F}$. D'une part, on conclut que H est à valeurs fermées puisque Γ et $\widetilde{F}$ le sont. Dans ce cas, comme elle est à valeurs non vides, d'après le Théorème (1.41) pour qu'elle soit Σ-mesurable il suffit que son graphe $gph(H) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(E)$. D'autre part, on conclut que

$$\begin{aligned} gph(H) &= \{(t, x) : x \in H(x)\} \\ &= \{(t, x), x \in \Gamma(t) \ et \ \|f(t) - x\| \leq d(f(t), \Gamma(t)\} \\ &= \{(t, x) : x \in \Gamma(t)\} \cap \{(t, x) : x \in \widetilde{F}(t)\} \\ &= gph(\Gamma) \cap gph(\widetilde{F}) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(E) \end{aligned}$$

Donc d'après le Théorème (1.41), la multi-application H est mesurable. ■

Théorème 2.6. *Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré positif telle que Σ est μ-complète et μ est σ finie. Soient E un espace de Banach séparable, A un* *sous-ensemble compact de E, $f : T \to E$ une application mesurable. Alors, la multi-application*

$$H : T \rightrightarrows E$$
$$t \mapsto H(t) = \{x \in A \ / \ \|f(t) - x\| = d(f(t), A)\}$$

est mesurable.

Démonstration. H est à valeurs non vides. En effet, soit $t \in T$. $H(t) \neq \emptyset$?
On sait que

$$d(f(t), A) = inf\{\|f(t) - y\| \ ; \ y \in A\},$$

soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $y_\varepsilon \in A$ tel que $\|f(t) - y_\varepsilon\| < d(f(t), A) + \varepsilon$, donc (pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists y_n \in A; \|f(t) - y_n\| < d(f(t), A) + \frac{1}{n}.$$

Comme $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset A$ et A est compact, alors on peut en extraire une sous suite $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers un élément $y_0 \in A$. Est ce que $y_0 \in H(t)$? c.à.d est ce que $\|f(t) - y_0\| = d(f(t), A)$?
Nous avons, pour tout k,

$$\|f(t) - y_{n_k}\| < d(f(t), A) + \frac{1}{n_k}$$

d où

$$\lim_{k \to +\infty} \|f(t) - y_{n_k}\| \leq \lim_{k \to +\infty} (d(f(t), A) + \frac{1}{n_k})$$

alors

$$\|f(t) - y_0\| \leq d(f(t), A)$$

mais,

$$d(f(t), A) = inf\{\|f(t) - y\|; \ y \in A\} \leq \|f(t) - y\| \ ; \ \forall y \in A,$$

en particulier pour $y = y_0$ (car $y_0 \in A$)

$$d(f(t), A) \leq \|f(t) - y_0\|$$

d'où

$$\|f(t) - y_0\| = d(f(t), A)$$

donc

$$y_0 \in H(t).$$

Pour la mesurabilité de H, on applique les mêmes étapes de démonstration du Théorème (2.5) en prenant

$$\begin{aligned} \Gamma : T &\rightrightarrows \ E \\ t &\mapsto \Gamma(t) = A. \end{aligned}$$

Il est claire que Γ est à valeurs non vides, fermées et elle est mesurable d'après la Remarque (1.42). ■

Théorème 2.7. *Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré positif avec Σ μ-complète et $\mu - \sigma$ finie. Soient E un espace de Banach séparable, $\Gamma : T \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable à valeurs non vides fermées, $f : T \to E$ une application mesurable et $\alpha' > 1$ un réel. Alors, la multi-application*

$$\begin{aligned} H : T &\rightrightarrows E \\ t &\longmapsto H(t) = \big\{x \in \Gamma(t) \ / \ d(f(t), x) \leq \alpha' d(f(t), \Gamma(t))\big\} \end{aligned}$$

est à valeurs non vides, fermées et elle est mesurable.

Démonstration. H est à valeurs non vides. En effet, soit $t \in T$. Puisque $\alpha' > 1$ alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\alpha' = 1 + \varepsilon$.
Soit $\varepsilon' = \varepsilon.\rho(t)$ avec $\rho(t) = d(f(t), \Gamma(t))$.
Comme

$$\rho(t) = \underset{y \in \Gamma(t)}{inf} d(f(t), y)$$

alors, il existe $y_\varepsilon \in \Gamma(t)$ tel que

$$\begin{aligned}\|f(t) - y_\varepsilon\| &< \rho(t) + \varepsilon' \\ &= \rho(t) + \varepsilon\rho(t) \\ &= (1+\varepsilon)\rho(t)\end{aligned}$$

c.à.d.

$$\exists y_\varepsilon \in \Gamma(t) \ ; \ \|f(t) - y_\varepsilon\| < \alpha' d(f(t), \Gamma(t))$$

donc

$$y_\varepsilon \in H(t)$$

d'où

$$H(t) \neq \emptyset.$$

On applique les mêmes étapes de démonstration du Théorème (2.5) en prenant $t \mapsto \rho_\alpha(t) = \alpha'\rho(t) = \alpha' d(f(t), \Gamma(t))$. On conclut que H est à valeurs fermées et qu'elle est mesurable. ■

Chapitre 3

Application à la résolution d'une inclusion différentielle

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence de solution pour une inclusion différentielle du seconde ordre avec des conditions aux limites de la forme

$$(\mathcal{P})\begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)), \quad p.p\ t \in [0.1] \\ u(0) = 0, u(\theta) = u(1). \end{cases}$$

Le but est de donner un exemple clair qui montre l'utilité des multi-applications mesurables, et comment elles apparaissent en cours de la recherche de solutions des inclusions différentielles.

Notons que le théorème principale de ce chapitre est pris de la référence [3], que nous avons consulté et détaille la démonstration.

Lemme 3.1. *([3]) Soient E un espace de Banach séparable, $\theta \in]0,1[$. Soit $G : [0.1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$G(t,s) = \begin{cases} -s & si \quad 0 \leq s \leq t, \\ -t & si \quad t < s \leq \theta, \\ t(s-1)/(1-\theta) & si \quad \theta < s \leqslant 1 \end{cases}$$

si $0 \leq t < \theta$ et

$$G(t,s) = \begin{cases} -s & si \quad 0 \leq s < \theta, \\ (\theta(s-t) + s(t-1))/(1-\theta) & si \quad \theta \leq s \leq t, \\ t(s-1)/(1-\theta) & si \quad t < s \leq 1 \end{cases}$$

si $\theta \leq t \leq 1$. Alors on a les résultas suivants.

1. *Si $u \in W_E^{2,1}([0,1])$ avec $u(0) = 0$ et $u(\theta) = 1$ alors*

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s).\ddot{u}(s)ds, \forall t \in [0,1].$$

2. *$G(.,s)$ est dérivable sur $[0,1]$ pour tout $s \in [0,1]$, c'est à dire que $G(.,s)$ est dérivable à gauche sur $]0,1]$ et sa dérivée est donnée par*

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq s \leq t, \\ -1 & si \quad t < s \leq \theta, \\ (s-1)/(1-\theta) & si \quad \theta < s \leq 1, \end{cases}$$

si $0 \leq t < \theta$ et

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq s \leq t, \\ (s-\theta)/(1-\theta) & si \quad \theta \leq s \leq t, \\ (s-1)/(1-\theta) & si \quad t < s \leq 1, \end{cases}$$

si $\theta \leq t \leq 1$.

3. $G(.,.)$ et $\frac{\partial G}{\partial t}(.,.)$ vérifient

$$\sup_{t,s\in[0,1]} |G(t,s)| \leq 1, \sup_{t,s\in[0,1]} |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)| \leq 1. \tag{3.1}$$

4. Soit $f \in L^1_E([0,1])$ et soit $u_f : [0,1] \longrightarrow E$ l'application définie par

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \forall t \in [0,1] \tag{3.2}$$

alors

$$u_f(0) = 0, \ u_f(\theta) = u_f(1).$$

De plus, la fonction u_f est dérivable et sa dérivée $\dot{u}_f$ vérifie

$$\dot{u}_f(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds \tag{3.3}$$

pour tout $t \in [0,1]$. Par conséquent $\dot{u}_f$ est une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans E.

5. La fonction $\dot{u}_f$ est scalairement dérivable, i.e., pour tout $x' \in E'$, la fonction scalaire $< x', \dot{u}_f(t) >$ et dérivable et sa dérivée faible $\ddot{u}_f$ est égale à f presque partout.

$$\ddot{u}_f = f \quad p.p. \tag{3.4}$$

Théorème 3.2. *([3]) Soit E un espace de Banach séparable et soit $F : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable à valeurs fermées non vides.*

Soit $g \in L^1_E([0,1])$ et soit $u_g : [0,1] \to E$ l'application définie par

$$u_g(t) = \int_0^1 G(t,s).g(s)ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

Supposons que pour un $r \in]0,+\infty[$ et

$$X_r = \left\{(t,x,y) \in [0,1] \times E \times E : \|x - u_g(t)\| < r; \|y - \dot{u}_g(t)\| < r\right\}$$

les conditions suivantes sont vérifiées

(1) il existe deux fonctions $k_1, k_2 \in L^1_{\mathbb{R}}([0,1])$ *avec* $k_1(t) \geq 0$ *et* $k_2(t) \geq 0$ *vérifiant*
$\|k_1 + k_2\|_{L^1_{\mathbb{R}}} < 1$ *telles que*

$$\mathcal{H}(F(t, x_1, y_1), F(t, x_2, y_2)) \leq k_1(t)\|x_1 - x_2\| + k_2(t)\|y_1 - y_2\|$$

pour tous $(t, x_1, y_1), (t, x_2, y_2) \in X_r$,

(2) il existe une fonction $\eta \in L^1_{\mathbb{R}}([0,1])$ *vérifiant* $\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} < [1 - \|k_1 + k_2\|_{L^1_{\mathbb{R}}}]r$, *telle que*

$$d\biggl(\ g(t), F(t, u_g(t), \dot{u}_g(t))\biggr) \ \leq \eta(t), \qquad \forall t \in [0,1].$$

Alors, l'inclusion différentielle $(\mathcal{P})$ *admet au mois une solution* $u \in W^{2,1}_E([0,1])$.

Démonstration.

Etape1.

Montrons qu'il existe un réel $\alpha_1 > 0$, tel que

$$(1 + \alpha_1)\|k_1 + k_2\|_{L^1_{\mathbb{R}}} < 1 < 1.$$

Nous avons $\|k_1 + k_2\|_{L^1_{\mathbb{R}}} < 1$
donc

$$\begin{aligned}
1 &< \frac{1}{\|k_1 + k_2\|} \ (\|k_1 + k_2\| \neq 0 \ car \ k_1, k_2 \geq 0) \\
&\Rightarrow 0 < \frac{1}{\|k_1 + k_2\|} - 1 \\
&\Rightarrow \ \exists\ \alpha_1 \in \mathbb{R}\ ;\ 0 < \alpha_1 < \frac{1}{\|k_1 + k_2\|} - 1
\end{aligned}$$

mais

$$\alpha_1 < \frac{1}{\|k_1 + k_2\|} - 1 \Leftrightarrow \alpha_1 + 1 < \frac{1}{\|k_1 + k_2\|} \Leftrightarrow (\alpha_1 + 1)\|k_1 + k_2\| < 1.$$

il existe aussi un réel $\alpha_2 > 0$ tel que

$$(1+\alpha_2)\|\eta\| < [1-(1+\alpha_2)\|k_1+k_2\|]r$$

Nous avons, $\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} < [1-\|k_1+k_2\|_{L^1_{\mathbb{R}}}]r$
donc

$$\begin{aligned}
\|\eta\| + \|k_1+k_2\|r < r \\
&\Longrightarrow 1 < \frac{r}{\|\eta\| + \|k_1+k_2\|r} \\
&\Longrightarrow 0 < \frac{r}{\|\eta\| + \|k_1+k_2\|r} - 1 \\
&\Longrightarrow \exists \alpha_2 \in \mathbb{R}; 0 < \alpha_2 < \frac{r}{\|\eta\| + \|k_1+k_2\|r} - 1
\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}
\alpha_2 < \frac{r}{\|\eta\| + \|k_1+k_2\|r} - 1 \\
&\Longleftrightarrow (1+\alpha_2)\|\eta\| + (1+\alpha_2)\|k_1+k_2\|r < r \\
&\Longleftrightarrow (1+\alpha_2)\|\eta\| < (1-(1+\alpha_2)\|k_1+k_2\|)r
\end{aligned}$$

Soit $\alpha = min(\alpha_1, \alpha_2)$ et $\alpha' = \alpha + 1$.
Soit $g : [0,1] \to E$ d'après le Lemme (3.1)

$$\dot{u}_g(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)g(s)ds,$$

et

$$\ddot{u}_g(t) = g(t) \ p.p \ t \in [0,1].$$

Nous allons construire par récurrence deux suites $\big(f_n(.)\big)_n$ et $\big(u_{f_n}(.)\big)_n$ vérifient pour tout $n \in \mathbb{N}$ les relations suivantes

$$f_n \in L^1_E([0,1]) \ et \ f_n(t) \in F\big(t, u_{f_{n-1}}(t), \dot{u}_{f_{n-1}}(t)\big) \ p.p \ t \in [0,1] \tag{3.5}$$

$$\|f_n(t) - f_{n-1}(t)\| \leq \alpha' d\Big(f_{n-1}(t), F(t, u_{f_{n-1}}(t), \dot{u}_{f_{n-1}}(t))\Big) \tag{3.6}$$

$$gph\big(u_{f_n}(.), \dot{u}_{f_n}(.)\big) = \Big\{\big(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t)\big); \ t \in [0,1]\Big\} \subset X_r. \tag{3.7}$$

Notons par $f_0 = g$ et considérons la multi-application $H_0 : [0,1] \rightrightarrows E$ définie par

$$H_0(t) = \Big\{v \in F\big(t, u_{f_0}(t), \dot{u}_{f_0}(t)\big);\ \|v - f_0(t)\| \leq \alpha' d\Big(f_0(t), F(t, u_{f_0}(t), \dot{u}_{f_0}(t))\Big)\Big\}.$$

Notons par

$$\begin{aligned} \Gamma : [0,1] &\rightrightarrows E \\ t &\mapsto \Gamma(t) = F(t, u_{f_0}(t), \dot{u}_{f_0}(t)) \end{aligned}$$

Alors,

$$H_0(t) = \Big\{v \in \Gamma(t);\ \|v - f_0(t)\| \leq \alpha' d\Big(f_0(t), \Gamma(t)\Big)\Big\}.$$

$$\begin{aligned} d(f_0(t), F(t, u_{f_0}(t), \dot{u}_{f_0}(t))) &= inf\{d(f_0(t), y);\ y \in F(t, u_{f_0}(t), \dot{u}_{f_0}(t))\} \\ &= \underset{y \in \Gamma(t)}{inf}\ d(f_0(t), y) \end{aligned}$$

On a Γ est à valeurs non vides et fermées car F l'est. et F est une multi-application mesurable, donc d'après le Théorème (1.43) la multi-application Γ est mesurable, d'où par le Théorème (2.7) H_0 est mesurable et elle est à valeurs fermées non vides.

Le Théorème d'existence de sélection mesurable (1.44), assure l'existence d'une application mesurable $f_1 : [0,1] \longrightarrow E$ telle que pour tout $t \in [0,1]$ $f_1(t) \in H_0(t)$. C'est à dire pour tout $t \in [0,1]$

$$f_1(t) \in F\big(t, u_{f_0}(t), \dot{u}_{f_0}(t)\big)$$

et

$$\|f_1(t) - f_0(t)\| \leq \alpha' d\Big(f_0(t), F\big(t, u_{f_0}(t), \dot{u}_{f_0}(t)\big)\Big),$$

d'où, par l'hypothèse (2) du Théorème,

$$\|f_1(t) - f_0(t)\| \leq \alpha' \eta(t),$$

donc

$$\begin{aligned}\|f_1(t)\| &\leq \|f_1(t) - f_0(t)\| + \|f_0(t)\| \\ &\leq \alpha'\eta(t) + \|f_0(t)\|.\end{aligned}$$

Comme $\eta \in L^1_{\mathbb{R}}([0,1])$ et $f_0 \in L^1_E([0,1])$, la dernière inégalité montre que $\|f_1(.)\| \in L^1_{\mathbb{R}}([0,1])$ et donc $f_1 \in L^1_E([0,1])$, par suite, on peut définir l'application $u_{f_1} : [0,1] \longrightarrow E$ par

$$u_{f_1}(t) = \int_0^1 G(t,s) f_1(s) ds, \ \forall t \in [0,1],$$

et par (3.3) du Lemme (3.1)

$$\dot{u}_{f_1}(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f_1(s) ds, \ \forall t \in [0,1].$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,1]$, par les propriétés de l'intégrale et grâce à la relation (3.1) du Lemme (3.1)

$$\begin{aligned}\|u_{f_1}(t) - u_{f_0}(t)\| &= \| \int_0^1 G(t,s) f_1(s) ds - \int_0^1 G(t,s) f_0(s) ds\| \\ &= \| \int_0^1 G(t,s)(f_1(s) - f_0(s)) ds\| \\ &\leq \int_0^1 |G(t,s)| \|f_1(s) - f_0(s)\| ds \\ &\leq \int_0^1 \|f_1(s) - f_0(s)\| ds \\ &\leq \alpha' \int_0^1 \eta(s) ds \\ &= \alpha' \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} \\ &< [1 - \alpha'\|k_1 + k_2\|_{L^1_{\mathbb{R}}}] r \\ &< r\end{aligned}$$

De la même façon nous avons, pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_{f_1}(t) - \dot{u}_{f_0}(t)\| &= \|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f_1(s)ds - \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f_0(s)ds\| \\
&= \|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)(f_1(s) - f_0(s))ds\| \\
&\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)|\|(f_1(s) - f_0(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 \|(f_1(s) - f_0(s)\|ds \\
&< r.
\end{aligned}$$

On conclut que $gph\big(u_{f_1}(.), \dot{u}_{f_1}(.)\big) \subset X_r$.

Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$, on a pu définir une application f_n qui vérifie les relations (3.5),(3.6) et (3.7). Alors, considérons la multi-application H_n : $[0,1] \rightrightarrows E$ définie par

$$H_n(t) = \left\{ v \in F\big(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t)\big);\ \|v - f_n(t)\| \leq \alpha' d\big(f(t), F(t, u_{f_n}, \dot{u}_{f_n}(t)\big) \right\}$$

H_n est à valeurs non vides fermées, et elle est mesurable (la même chose que H_0). Par conséquent, d'après le Théorème d'existence de sélection mesurable H_n admet une sélection mesurable f_{n+1}, c.à.d, il existe une application mesurable $f_{n+1} : [0,1] \longrightarrow E$ telle que pour tout $t \in [0,1]$

$$f_{n+1}(t) \in F(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t))$$

et

$$\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leq \alpha' d(f_n(t), F(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t))).$$

Donc grâce à l'hypothèse (1), nous avons pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| &\leq \alpha' d(f_n(t), F(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t))) \\
&\leq \alpha' \mathcal{H}\Big(F(t, u_{f_{n-1}}(t), \dot{u}_{f_{n-1}}(t)), F(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t)) \Big) \\
&\leq \alpha' \Big[k_1(t)\|u_{f_n}(t) - u_{f_{n-1}}(t)\| + k_2(t)\|\dot{u}_{f_n}(t) - \dot{u}_{f_{n-1}}(t)\| \Big].
\end{aligned} \tag{3.8}$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\|u_{f_n}(t) - u_{f_{n-1}}(t)\| &= \| \int_0^1 G(t,s)f_n(s)ds - \int_0^1 G(t,s)f_{n-1}(s)ds\| \\
&= \| \int_0^1 G(t,s)(f_n(s) - f_{n-1}(s))ds\| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s)| \, \|f_n(s) - f_{n-1}(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 \|f_n(s) - f_{n-1}(s)\|ds \\
&= \|f_n - f_{n-1}\|_{L^1_E} \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_{f_n}(t) - \dot{u}_{f_{n-1}}(t)\| &= \| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f_n(s)ds - \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f_{n-1}(s)ds\| \\
&= \| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\big(f_n(s) - f_{n-1}(s)\big)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)| \, \|f_n(s) - f_{n-1}(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 \|f_n(s) - f_{n-1}(s)\|ds \\
&= \|f_n - f_{n-1}\|_{L^1_E} \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

On conclut par ces relations (3.9) et (3.10) que

$$\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leq \alpha'\big(k_1(t) + k_2(t)\big)\|f_n - f_{n-1}\|_{L^1_E} \qquad (3.11)$$

donc pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\|f_{n+1}(t)\| &\leq \|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| + \|f_n(t)\| \\
&\leq \alpha'(k_1(t) + k_2(t))\|f_n - f_{n-1}\|_{L^1_E} + \|f_n(t)\|
\end{aligned}$$

Puisque $k_1,k_2 \in L^1_{\mathbb{R}}([0,1])$ et $f_n,f_{n-1} \in L^1_E([0,1])$, donc $f_{n+1} \in L^1_E([0,1])$. Par suite, on peut définir l'application $u_{f_{n+1}} : [0,1] \longrightarrow E$ par

$$u_{f_{n+1}}(t) = \int_0^1 G(t,s)f_{n+1}(s)ds, \ \forall t \in [0,1]$$

et par (3.3) du Lemme (3.1)

$$\dot{u}_{f_{n+1}}(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f_{n+1}(s) ds, \ \forall t \in [0,1]$$

Par intégration de la relation (3.11)

$$\int_0^1 \|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| dt \leq \alpha' \int_0^1 \big(k_1 + k_2\big) \|f_n - f_{n-1}\|_{L^1_E} dt$$

c.à.d

$$\|f_{n+1} - f_n\|_{L^1_E([0,1])} \leq \alpha' \|k_1 + k_2\|_{L^1_{\mathbb{R}^+}} \|f_n - f_{n-1}\|_{L^1_E}$$

Dans la suite, nous allons montrer que

$$gph\big(u_{f_n}(.), u_{f_{n+1}}(.)\big) \subset X_r.$$

$$gph\big(u_{f_n}(.), u_{f_{n+1}}(.)\big) = \Big\{(t,x,y) \in [0,1] \times E \times E : (x,y) \in \big(u_{f_n}(t), u_{f_{n+1}}(t)\big)\Big\}$$

Posons $\gamma = \alpha' \|k_1 + k_2\|_{L^1_{\mathbb{R}}}$, alors d'après la dernière inégalité

$$\|f_{n+1} - f_n\|_{L^1_E([0,1])} \leq \gamma \|f_n - f_{n-1}\|_{L^1_E([0,1])}$$

en utilisant cette relation successivement, on obtient

$$\|f_{n+1} - f_n\|_{L^1_E} \leq \gamma^n \|f_1 - f_0\|_{L^1_E} \leq \gamma^n \alpha' \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} \tag{3.12}$$

En effet,

$$
\begin{aligned}
\|f_{n+1}-f_n\| &\leq \gamma\|f_n-f_{n-1}\|\\
&\leq \gamma(\gamma\|f_{n-1}-f_{n-2}\|)\\
&= \gamma^2\|f_{n-1}-f_{n-2}\|\\
&\leq \gamma^2(\gamma\|f_{n-2}-f_{n-3}\|)\\
&= \gamma^3\|f_{n-2}-f_{n-3}\|\\
&.\\
&.\\
&\leq \gamma^n\|f_{n-(n-1)}-f_{n-n}\|\\
&= \gamma^n\|f_1-f_0\|.
\end{aligned}
$$

$$\|u_{f_{n+1}}-u_{f_n}\|_{c^1} = max\left(\underset{t\in[0,1]}{sup}\|u_{f_{n+1}}(t)-u_{f_n}(t)\|, \underset{t\in[0,1]}{sup}\|\dot{u}_{f_{n+1}}(t)-\dot{u}_{f_n}(t)\|\right)$$

on en déduit que

$$\|u_{f_{n+1}}-u_{f_n}\|_{c^1} \leq \gamma^n\alpha'\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} \tag{3.13}$$

Nous avons

$$
\begin{aligned}
\|u_{f_{n+1}}(t)-u_{f_0}(t)\| &\leq \|u_{f_{n+1}}(t)-u_{f_n}(t)\| + \|u_{f_n}(t)-u_{f_0}\|\\
&\leq \gamma^n\alpha'\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} + \|u_{f_n}-u_{f_0}\|
\end{aligned}
$$

en utilisant successivement cette relation, et par (3.13) on obtient

$$\|u_{f_{n+1}}(t)-u_{f_0}(t)\| < r.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\|u_{f_{n+1}}(t) - u_{f_0}(t)\| &= \|u_{f_{n+1}}(t) - u_{f_n}(t) + u_{f_n}(t) - u_{f_0}(t)\| \\
&\leq \|u_{f_{n+1}}(t) - u_{f_n}(t)\| + \|u_{f_n}(t) - u_{f_0}(t)\| \\
&\leq \gamma^n \alpha' \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} + \|u_{f_n}(t) - u_{f_0}\| \\
&\leq \gamma^n \alpha' \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} + \|u_{f_n}(t) - u_{f_{n-1}}(t)\| + \|u_{f_{n-1}}(t) - u_{f_0}(t)\| \\
&\leq \gamma^n \alpha' \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} + \gamma^{n-1} \alpha' \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} + \|u_{f_{n-1}}(t) - u_{f_0}(t)\| \\
&= (\gamma^n + \gamma^{n-1}) \alpha' \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} + \|u_{f_{n-1}}(t) - u_{f_0}(t)\| \\
&\leq (\gamma^n + \gamma^{n-1}) \alpha' \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} + \|u_{f_{n-1}}(t) - u_{f_{n-2}}(t)\| + \|u_{f_{n-2}}(t) - u_{f_0}(t)\| \\
&\leq (\gamma^n + \gamma^{n-1}) \alpha' \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} + \gamma^{n-2} \alpha' \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} + \|u_{f_{n-2}}(t) - u_{f_0}(t)\| \\
&\leq (\gamma^n + \gamma^{n-1} + \dots + \gamma^0) \alpha' \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} \\
&= (\sum_{p=0}^{n} \gamma^p) \alpha' \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} \\
&\leq \frac{1}{1-\gamma} \alpha' \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}. \\
&< \frac{1}{1-\gamma} [1 - \alpha' \|k_1 + k_2\|_{L_{\mathbb{R}} 1}] r \\
&= \frac{1}{[1 - \alpha' \|k_1 + k_2\|_{L^1_{\mathbb{R}}}]} [1 - \alpha' \|k_1 + k_2\|_{L_{\mathbb{R}} 1}] r \\
&= r
\end{aligned}$$

De même, nous avons

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_{f_{n+1}}(t) - \dot{u}_{f_0}(t)\| &\leq \|\dot{u}_{f_{n+1}}(t) - \dot{u}_{f_n}(t)\| - \|\dot{u}_{f_n}(t) + \dot{u}_{f_0}(t)\| \\
&\leq \gamma^n \alpha' \|\eta\| + \|\dot{u}_{f_n}(t) - \dot{u}_{f_0}(t)\|
\end{aligned}$$

d'où

$$\|\dot{u}_{f_{n+1}}(t) - \dot{u}_{f_0}(t)\| < r.$$

Ainsi, les deux suites $(f_n)_n$ et $(u_{f_n})_n$ vérifient bien les relation (3.5),(3.6) et (3.7).

Étape 2

Comme $\gamma < 1$, on conclut d'après la relation (3.12) que $(f_n)_n$ et une suite de Cauchy dans l'espace $L^1_E([0,1])$ qui est complet. Par conséquent, elle converge vers une application $f \in L^1_E([0,1])$. De même, on conclut d'après (3.13) que $(u_{f_n})_n$ est une suite de Cauchy dans $C^1_E([0,1])$, qui est complet, donc elle converge vers une application $u \in C^1_E([0,1])$. Or,

$$u = u_f$$

avec

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s) ds, \ \forall t \in [0,1].$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\|u_{f_n}(t) - u_f(t)\| &= \| \int_0^1 G(t,s) f_n(s) ds - \int_0^1 G(t,s) f(s) ds \| \\
&= \| \int_0^1 G(t,s) \big(f_n(s) - f(s) \big) ds \| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s)| \; \|f_n(s) - f(s)\| ds \\
&\leq \int_0^1 \|f_n(s) - f(s)\| ds \\
&= \|f_n - f\|_{L^1_E}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_{f_n}(t) - \dot{u}_f(t)\| &= \| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f_n(s) ds - \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f(s) ds \| \\
&= \| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \big(f_n(s) - f(s) \big) ds \| \\
&\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)| \; \|f_n(s) - f(s)\| ds \\
&\leq \int_0^1 \|(f_n(s) - f(s))\| ds \\
&= \|f_n - f\|_{L^1_E}
\end{aligned}$$

donc

$$\|u_{f_n} - u_f\|_{c^1} = max\Big(\sup_{t\in[0,1]} \|u_{f_n}(t) - u_f(t)\|_{L^1_E}, \sup_{t\in[0,1]} \|\dot{u}_{f_n}(t) - \dot{u}_f(t)\|_{L^1_E}\Big)$$
$$\leq \|f_n - f\|_{L^1_E}$$

d'où

$$\|u_{f_n} - u_f\|_{C^1} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

c'est à dire la suite $(u_{f_n})_n$ converge vers u_f dans $(C^1, \|.\|_{C^1})$. On conclut que $u_f = u$, car la limite dans cet espace est unique.
D'autre part par (4) du Lemme précédant $u_f(0) = 0,\ \ u_f(\theta) = u_f(1)$.
et par (5) du même Lemme $\ddot{u}_f = f\ p.p.\ sur\ [0,1]$.

Étape 3

Dans le reste de la démonstration, nous montrons que $\ddot{u}(t) \in F\big(t, u(t), \dot{u}(t)\big)$, p.p. $t \in [0,1]$, le graphe de la multi-application F_t, i.e. gph(F_t) est relativement fermé dans $X_r(t) \times E$ avec

$$X_r(t) = \{(x,y) \in E \times E; (t,x,y) \in X_r\}$$

et

$$F_t(x,y) = F(t,x,y), \forall (x,y) \in E \times E.$$

$$gph(F_t) = \{(x,y,z) :\ z \in F_t(x,y)\}$$

Maintenant, puisque la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^1_E([0,1])$ alors on peut en extraire une sous-suite, notée encore $(f_n)_n$ qui converge vers f presque partout sur $[0,1]$ par Théorème (1.32), c'est à dire presque pour tout $t \in [0,1]$

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n(t) - f(t)\| = 0.$$

donc p.p. $t \in [0,1]$

$$\lim_{n\to+\infty} (u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t), f_{n+1}(t)) = (u_f(t), \dot{u}_f(t), f(t))$$

c.à.d. la suite $(u_{f_n}(t), \dot{u}_f(t), f_{n+1}(t))_n$ converge vers $(u_f(t), \dot{u}_f(t), f(t))$ dans $E \times E \times E$.

Mais pour tout $t \in [0,1]$, $(u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t), f_{n+1}(t))_n \subset gph(F_t)$ (par la relation (3.5)), d'autre part, sa limite $(u_f(t), \dot{u}_f(t), f(t)) \in X_r(t) \times E$ (par la relation (3.7)). En effet,

$$\begin{aligned}
(3.5) &\Longrightarrow f_{n+1}(t) \in F(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t)),\ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Longrightarrow f_{n+1}(t) \in F_t(u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t)),\ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Longrightarrow (u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t), f_{n+1}(t)) \in gph(F_t),\ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Longrightarrow \big((u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t), f_{n+1}(t)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset gph(F_t)
\end{aligned}$$

et pour tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
(3.7) &\Longrightarrow (t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t)) \in X_r,\ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Longrightarrow (u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t)) \in X_r(t),\ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Longrightarrow (u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t), f_{n+1}(t)) \in X_r(t) \times E,\ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Longrightarrow \big((u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t), f_{n+1}(t)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset X_r(t) \times E.
\end{aligned}$$

On conclut que la limite

$$(u_f(t), \dot{u}_f(t), f(t)) \in gph(F_t)$$

Alors p.p. $t \in [0,1]$,

$$\Big(u_f(t), \dot{u}_f(t), f(t)\Big) \in gph(F_t).$$

d'où

$$f(t) \in F_t\big(u_f(t), \dot{u}_f(t)\big)$$

i.e

$$f(t) \in F(t, u_f(t), \dot{u}_f(t)),$$

c.à.d

$$\ddot{u}_f(t) \in F(t, u_f(t), \dot{u}_f(t))\ p.p.\ t \in [0,1],$$

avec

$$u_f(0) = 0, u_f(0) = u_f(1).$$

La démonstration est terminée. ■

Conclusion

Les multi-applications mesurables sont importantes dans le domaine des inclusions différentielles autant que les applications mesurables sont importantes dans le domaine des équations différentielles.

Bibliographie

[1] **D. Azzam-Laouir**, Contribution à l'étude de problèmes d'évolution du second ordre, *Thèse de doctorat d'état, Université de Constantine.*, (2003)

[2] **D. Azzam-Laouir**, *Polycopié, Cours d'analyse multivoque, Laboratoire de Mathématiques Pure et Appliquées*, Université de Jijel (2008).

[3] **D. Azzam-Laouir and F. Bounama**, *Second order differential inclusions with Lipshitz right-hand sides.* J. Electronic Journal of Differential Equations. Vol. 2010(2010), No. 85, pp. 1-9.

[4] **N. Bourbaki**, "Sur certains espaces vectoriels topologiques", Annales de l'institut fourier, 1950.

[5] **CH. Castaing**, Sur les multi-applications mesurables. Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Tome1, n$^{\underline{o}}$1, (1967) 91-126.

[6] **C. Castaing, M. Valadier**, Convex analysis and measurable multifunctions, *Lectures Notes in Math.,* 580 springer-Verlag, Berlin (1977).

[7] **D. Elhadj**. Cours de Mesure et Intégration, Université de-M'SILA.

[8] **N. El Hage Hassan**, Topologie générale et espace normés, Université d'Orléans, août 2011.

[9] **M. El-Louh**, *Étude comparative de la mesurabilité des multifonctions, Sous la direction de Mme. F. EZZAKI,15 juin 2016.*

[10] **A. Giroux**. *Mesure et Intégration.***DEA**. 2010.0cel-00516529

[11] **P. Mironescu**,*Cours de topologie métrique, Université Lyon 1,2005.*