République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahya-Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

N°d'ordre :

N°de série :

Mémoire de fin d'études

présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : *Mathématiques*

Option : *Analyse Fonctionnelle*

Thème

Ensembles sous-lisses et applications

Présenté par :

Wafa Mellit

Devant le jury :

Président :	Sabrina Izza	M.C.B Université de Jijel
Encadreur :	Messaouda Benguessoum	M.A.A Université de Jijel
Examinatrice :	Hammoud Menigher	M.A.A Université de Jijel

Promotion 2021/2022

Remerciements

En premier lieu, je remercie Allah, tout puisant, qui m'a donné la volonté et le courage pour finir ce mémoire.

je remercie mon encadreur **Messaouda Benguessoum**, qui a accepté de diriger mon travail et qui m'a accompagne tout au long de cette période, je suis reconnaissante pour sa disponibilité, je la remercie très sincèrement pour sa compétence et ces judicieux conseils, surtout sa gentillesse, merci infiniment madame.

Je souhaite remercier aussi Madame **Sabrina Izza**, pour avoir accepter de présider mon jury de mémoire.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur **Hammoud Menigher**, d'avoir accepter la participation au jury et pour l'intérêt qu'ils vont porter à mon travail et la correction de mon mémoire. J'en profite pour remercie tous les enseignants de département de mathématiques de l'université de jijel pour tous leurs efforts.

Enfin, Je tiens à remercier du fond du cœur et avec beaucoup d'amour ma famille qui a toujours crue en moi et m'a soutenu. Je dédie ce succès à " ma chère mère décédée " qui a été la raison de me persuader de continuer mes études et qui a souhaité me voir dans les plus hauts rangs, et à mon cher père qui m'a aidé et me soutient toujours en tout.

Table des matières

Introduction

Les équations et les inclusions différentielles trouvent leur importance dans beaucoup de problèmes de mathématiques, de physique et d'économétrie et même de biologie. Diverses axes de recherche concernant leur résolution ont été élaborés, vu leurs multiples applications dans les domaines su-cités.

Ce mémoire est constitué de trois chapitres. Le premier chapitre est consacré aux résultats préliminaires et outils de base utilisés pour les démonstrations de nos théorèmes principaux.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons le concept du sous-différentiel généralisé de Clarke et le sous-différentiel de Fréchet, ainsi que quelques définitions et propriétés des ensembles sous-lisses. Le but du dernier chapitre est d'établir un résultat d'existence d'une solution pour le processus de rafle du premier ordre avec une perturbation multivoque, de la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{u}(t) & \in N_{C\big(t,u(t)\big)}\big(u(t)\big) + G\big(t, u(t)\big) \text{ p.p. } t \in I \\ u(t) & \in C\big(t, u(t)\big) \;\; \forall t \in I \\ u(0) & = u_0 \in C(0, u_0). \end{cases}$$

Où $C(t, x)$ est un ensemble non vide convexe fermé de H, $N_{C\big(t,u(t)\big)}$ le cône normale de Fréchet à $C(t, x)$ et $G : I \times H \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs non vides convexe fermées. Nous détaillons un résultat dû â T. Haddad, J. Noel, et Thibault [8]. Les premiers travaux concernant le processus de lâ rafle convexe sans perturbation ($G \equiv 0$) où $C(t)$ est un ensemble non vide convexe fermé, $N_{C(t)}(u(t))$ est le cône normal â $C(t)$ en $u(t)$ au sens de l'analyse convexe, ont été entrepris dans les années 70 par J. J-Moreau, pour la modélisation d'un certain nombre de situations pratiques en mécanique comme l'écoulement d'eau dans une cavité, eu dynamique des systèmes avec contrainte unilatérale, eu plasticité et en évolution des systèmes élastoplastiques. L'ensemble $C(t)$ dérive de la loi de plasticité du système.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons introduire tous les résultats et les notions qui nous seront très utiles tout âu long de ce mémoire : notions de l'analyse convexe, aussi de l'analyse multivoque, des théorèmes principaux concerant la convergence et la compacité, nécessaire à l'étude de nos problèmes.

1.1 Notations générales

- $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ La droite achevée.
- $\mathbb{R}_+$ L'ensemble des nombres réels positifs.
- $\mathbb{N}$ L'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{R}^n$ Ensemble des vecteurs de dimension n ($n \in \mathbb{N}$).
- E Espace vectoriel normé muni de la norme $\|.\|_E$.
- E' Le dual topologique de E.
- E'' Le bidual topologique de E.
- H Un espace de Hilbert réel.
- $\langle ., . \rangle$ Le produit scalaire de H.
- $\|.\|$ La norme de H.
- (X, d) Un espace métrique.
- $\mathbb{B}_H$ La boule unité fermée de H.
- $B_H(x, r)$ La boule ouverte de centre x et de rayon $r > 0$.
- $\overline{B}_H(x, r)$ La boule fermée de centre x et de rayon $r > 0$.
- $I = [0, T]$, $T > 0$ Un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.
- p.p. Presque partout.
- $x_n \rightharpoonup x$ La suite $(x_n)_n$ converge faiblement vers x.
- $x_n \to x$ La suite $(x_n)_n$ converge fortement vers x.
- $I \backslash A$ Complémentaire de A dans I.
- $\overline{A}$ L'adhérence de A.
- $\mathcal{F}(X, Y)$ L'espace de toutes les applications $f : X \longrightarrow Y$.
- $\mathcal{C}_H(I)$ L'espace de Banach des applications continues définies sur I à valeurs dans H muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f(.)\|_C = \sup_{t \in I} \|f(t)\|_H.$$

- $\dot{f}(t) = \frac{df}{dt}(t)$ La dérivée de f au point t.

- $L^p_H(I), 1 \leq p < \infty$ L'espace des applications $p^{\text{éme}}$ intégrables $1 \leq p < \infty$ définies sur I à valeurs dans H muni de la norme

$$\|f\|_{L^p_H(I)} = \left(\int_I \|f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \forall f \in L^p_H(I).$$

- χ_A La fonction caractéristique de A définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

1.2 Continuité et semi continuité des applications

Soient (X, d), (Y, d') deux espaces métriques.

1.2.1 Continuité

Définition 1.1. ***(Application continue).***
Soit $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$. On dit que f est continue au point $x_0 \in X$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \;\delta > 0, \forall x \in X : d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d'\left(f(x), f(x_0)\right) < \varepsilon.$$

f est continue sur X si et seulement si elle est continue en tout point $x \in X$.

Définition 1.2. ***(Équi-continuité).***
Un sous-ensemble K de $\mathcal{F}(X, Y)$ est dit équi-continu au point $x \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \;\eta > 0, \forall x' \in X, \;\; \forall f \in K : d(x, x') \leq \eta \Longrightarrow d'(f(x) - f(x')) \leq \varepsilon.$$

- *K est dit équi-continu sur X s'il est équi-continu en tout point $x \in X$.*

Considérons dans la suite un espace vectoriel normé $(E, \|.\|_E)$

Définition 1.3. ***(Applications absolument continue).***
Une fonction $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow E$ est dit absolument continue si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de l'intervalle $[a, b]$ par des intervalles disjoints $]a_k, b_k[$ vérifiant, $\sum_k (b_k - a_K) < \delta$ on a

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\|_E \leq \varepsilon.$$

Théorème 1.4.

Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow E$ *est absolument continue, si et seulement si, il existe une fonction intégrable* $v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $t \in [a, b]$

$$f(t) - f(a) = \int_a^t v(s)ds.$$

dans ce cas f *est dérivable presque partout et sa dérivée* $\dot{f} = v$ *p.p.*

Toute application absolument continue et continue, par contre la réciproque n'est pas vraie.

Définition 1.5. ***(Fonction Lipschitzienne).***

Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$. *On dite que* f *est Lipschitzienne de rapport* $l > 0$ *si et seulement si*

$$\forall x, y \in I : \|f(x) - f(y)\| \leq l|x - y|.$$

Définition 1.6. ***(Fonction localement Lipschitzienne).***

Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction.* f *est dite Lipschitzienne de rapport* $l > 0$ *au voisinage de* x_0 *si pour un certain* $\delta > 0$, f *est Lipschitzienne sur l'ensemble* $B_H(x_0, \delta)$.

1.2.2 Application semi-continue

On se place dans un espace métrique (X, d) et soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.7. ***(Semi-continuité inférieure(s.c.i)).***

On dit que f *est s.c.i au point* $x_0 \in X$, *si et seulement si pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $\lambda < f(x_0)$, *il existe un voisinage* V_{x_0} *de* x_0 *tel que* $\lambda < f(x)$, *pour tout* $x \in V_{x_0}$.

f *est s.c.i sur* X *si et seulement si* f *est s.c.i en tout point de* X.

Définition 1.8. ***(Semi-continuité supérieure(s.c.s)).***

On dit que f *est s.c.s au point* $x_0 \in X$, *si et seulement si pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, *tel que* $\lambda > f(x_0)$, *il existe un voisinage* V_{x_0} *de* x_0 *tel que* $\lambda > f(x)$, *pour tout* $x \in V_{x_0}$.

f *est s.c.s sur* X *si et seulement si* f *est s.c.s en tout point de* X.

Proposition 1.9.

$$f \text{ est s.c.i au point } x_0 \Longleftrightarrow \liminf_{x \longrightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0),$$

$$f \text{ est s.c.s au point } x_0 \Longleftrightarrow \limsup_{x \longrightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

Définition 1.10.

f est continue au point x_0 si et seulement si f est s.c.i et s.c.s au point $x_0 \in X$.

1.3 Quelques notions de l'analyse convexe

Les résultats de cette partie sont pris des référence [7] et [11].

Définition 1.11. ***(Ensemble convexe).***

Soient E un espace vectoriel, K un sous-ensemble de E. On dit que K est convexe si et seulement si

$$\forall u, v \in K, \ \ \forall \lambda \in [0,1] : \lambda u + (1-\lambda)v \in K.$$

Autrement dit, pour tous $u, v \in K$, le segment de droite

$$[u, v] = \left\{ \lambda u + (1-\lambda)v : \lambda \in [0,1] \right\} \subset K.$$

Définition 1.12. ***(Simplexe).***

On appelle simplexe de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble Δ_n défini par

$$\Delta_n = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \lambda_i \geq 0, \ \ \forall i = 1, ..., n \ \ et \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Définition 1.13.

Soit E un espace vectoriel et soient $x_1, x_2, ..., x_n \in E$. On appelle combinaison convexe des éléments $x_1, x_2, ..., x_n$ tout élément $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ tel que $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \Delta_n$.

Définition 1.14.

Soit E un espace vectoriel et soit $K \subset E$. Alors K est convexe si et seulement si, il contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments.

Définition 1.15. ***(Enveloppe convexe).***

Soit E un espace vectoriel et soit $K \subset E$. On appelle enveloppe convexe de K qu'on note $co(K)$, l'intersection de tous les sous-ensembles convexes, de E qui contiennent K. En fait $co(K)$ est le plus petit convexe de E qui contient K.

Définition 1.16. ***(Enveloppe convexe fermeé).***

Soit E est un espace vectoriel topologique et soit $K \subset E$. On appelle enveloppe convexe fermeé de K qu'on note $\overline{co}(K)$, le plus petit convexe fermé de E qui contient K.

Définition 1.17.

Soit H un espace vectoriel et soit $f : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est propre si

$$(f : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]) \text{ et } f \not\equiv +\infty (f \not\equiv \infty \Longleftrightarrow \exists x_0 \in H, f(x_0) \neq +\infty),$$

i.e.,

$$(f : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]) \text{ et } dom(f) = \{x \in H, f(x) < +\infty\} \neq \emptyset.$$

Définition 1.18.

Soit H un espace vectoriel et soit $f : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in dom(f), \forall \lambda \in [0,1] : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Définition 1.19. ***(Fonction d'appui).***

Soit K un sous-ensemble de H, $\sigma(., K)$ représente la fonction d'appui de K, c'est à dire pour tout $x' \in H$

$$\sigma(x', K) = \sup_{y \in K} \langle x', y \rangle.$$

Théorème 1.20.

Soit E un espace vectoriel normé, alors pour tout ensemble non vide $K \subset E$

$$\overline{co}(K) = \left\{ x \in E : \langle x', x \rangle \leq \sigma(x', K), \forall x' \in E' \right\}.$$

Définition 1.21.

On appelle norme sur un espace vectoriel H réel ou complexe, de dimension finie ou infinie, toute application $x \longmapsto \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions suivante

1. $\forall x \in E : \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|,$
3. $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Définition 1.22. ***(Fonction distance).***

Soit K un sous-ensemble non vide de E et $x \notin K$, on appelle la fonction distance de K et donnée par

$$d_K(x) = d(x, K) = \inf_{y \in K} \|y - x\|.$$

Proposition 1.23.

Pour tout sous-ensemble fermé K de H, et $f : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction Lipschitzienne de rapport $l > 0$ sur un ensemble ouvert convexe Ω contenant K, tout minimum global x de f sur K est un minimum global de la fonction $f + ld_K$ sur tout l'espace H.

1.4 Topologie faible et faible*

Les résultats suivants sont pris des référence [2] et [3].

1.4.1 Topologie faible

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé. On note E' son dual topologique, c'est à dire, l'espace des formes linéaires continues sur E, muni de la norme

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in \mathbb{B}_E} |\langle f(x) \rangle|.$$

Définition 1.24.

Soit $f \in E'$ et soit

$$\begin{aligned} \varphi_f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_f(x) = f(x) = \langle f, x \rangle. \end{aligned}$$

La topologie faible sur E notée $\sigma(E, E')$ est la topologie la moins fine rendant continues les applications $\varphi_f (f \in E')$.

Proposition 1.25.

La topologie faible $\sigma(E, E')$ est séparée.

1.4.2 Topologie faible*

Soit E un espace vectoriel normé, E' son dual et E'' le bidual de E (E'' le dual de E') muni de la norme

$$\|\delta\|_{E''} = \sup_{f \in \mathbb{B}_{E'}} |\langle \delta, f \rangle|.$$

Soit $x \in E$ fixé, on considérons l'application

$$\begin{aligned} J_x : E' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto J_x(f) = \langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle \end{aligned}$$

une forme linéaire continue sur E', et donc c'est un élément de E''.

Sur l'espace E' sont définies déjà deux topologies :

La topologie forte associée à la norme de E' $\left(\|f\|_{E'} = \sup_{x\in\mathbb{B}_E} |\langle f, x\rangle|\right)$.

La topologie faible $\sigma(E', E'')$.

On définit une troisième topologie sur E' :

Définition 1.26.

La topologie faible sur E' est la topologie la moins fine sur E' qui rende continues toutes les applications $J_x(x \in E)$. On la note $\sigma(E', E)$.*

Proposition 1.27.

La topologie faible $\sigma(E', E)$ est séparée.*

Proposition 1.28.

Soit$(x_n)_n$ une suite de points de E. Alors

1. *$(x_n)_n$ converge vers x pour $\sigma(E, E')$ (ou faiblement), si et seulement si $(\langle f, x_n\rangle)_n$ converge vers $\langle f, x\rangle$ pour tout $f \in E'$*

2. *Si $(x_n)_n$ converge faiblement vers x, alors $(\|x_n\|_E)$ est bornée et nous avons*

$$\|x\|_E \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \|x_n\|_E.$$

1.5 Espace mesuré

Les résultats de cette section sont pris de la référence [2].

Définition 1.29.

Soient X un ensemble non vide, Σ une famille de sous-ensembles de X, alors Σ est dite une tribu sur X si

1. *$\emptyset \in \Sigma$.*

2. *$A \in \Sigma \Longrightarrow X\backslash A \in \Sigma$.*

3. *$A_n \in \Sigma, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_n A_n \in \Sigma$.*

Le couple (X, Σ) est appelé espace mesurable et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables.

Définition 1.30.

Soient (X_1, Σ_1) *et* (X_2, Σ_2) *deux espaces mesurables. Une application* $f : (X_1, \Sigma_1) \longrightarrow (X_2, \Sigma_2)$ *est dite mesurable si* $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$*, pour tout* $A \in \Sigma_2$*.*

Définition 1.31.

Soit (X, Σ) *un espace mesurable. Une mesure sur* (X, Σ) *est une application* $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty]$ *vérifiant*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. *Pour toute famille* $(A_n)_n, n \in \mathbb{N}$ *d'éléments de* Σ *deux à deux disjoints (c'est à dire, que* $A_n \bigcap A_m = \emptyset$ *lorsque* $n \neq m$*), on a la propriété d'additivité dénombrable*
$$\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Le triplet (X, Σ, μ) *est un espace mesuré.*

Si $\mu(X) < \infty$*, on dit que la mesure* μ *est finie.*

• *Un ensemble* A *est dit* μ*-négligeable s'il existe* $B \in \Sigma$ *tel que* $A \subset B$ *et* $\mu(B) = 0$.

• *On dit qu'une propriété sur* X *est vraie* μ*-presque partout (*μ*-p.p) si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est* μ*-négligeable.*

1.6 Quelques résultats de compacité

Les résultats de cette section sont pris de la référence [3].

Définition 1.32. ***(Espace réflexifs).***

Soit E *un espace vectoriel normé. On dit que* E *est réflexif si* $J(E) = E''$*, où*

$$\begin{aligned} J : E &\longrightarrow E'' \\ x &\longmapsto J(x) = J_x(f) \end{aligned}$$

Dans ce cas, J *est un isomorphisme isométrique de* E *dans* E''*. Lorsque* E *est réflexif, on identifiera souvent implicitement* E *et* E'' *(à l'aide de l'isomorphisme* J*).*

Définition 1.33. ***(Boule-compact).***

Soit E *un espace vectoriel normé. On dit qu'un ensemble* $K \subset E$ *est boule-compact si, son intersection avec toute boule fermée de* E *est compacte, et* K *est relativement boule-compact si son intersection avec toute boule fermée est relativement compacte.*

Théorème 1.34.

Soient X un espace métrique et K un sous-ensemble de X, K est compact, si de toute suite dans K on peut extraire une sous-suite convergente dans K.

Remarque 1.35.

Il est claire que tout boule-compact K est fermé.

En effet, (K est fermé) $\Longleftrightarrow$ $(\forall (x_n)_n \subset K,\, x_n \longrightarrow x \Longrightarrow x \in K)$.
Soit (x_n) une suite de K qui converge vers x, on montre que $x \in K$. On a (x_n) converge dans K, en particulier, elle est bornée, i.e., il existe $r > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in K \cap \overline{B}_H(0,r)$, qui est compact, donc on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge vers $y \in K \cap \overline{B}_H(0,r)$. Par l'unicité de la limite, $y = x$ et donc $x \in K$. Par suite K est fermé.

Théorème 1.36. ***(Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki).***

Soit E un espace de Banach, alors la boule unité fermée de E' est compacte pour la topologie faible $\sigma(E', E)$.*

Théorème 1.37.

Soit E un espace de Banach réflexif et soit $(x_n)_n$ une suite bornée dans E. Alors il existe une sous-suite extraite $(x_{n_k})_k$ qui converge pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Théorème 1.38. ***(Arzelà-Ascoli).***

Soit (I, d) un espace métrique compact, (Y, d') un espace métrique complet, on dit qu'une partie K de $\mathcal{C}_Y(I)$ est relativement compact si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. *La partie K est équi-continue sur I.*
2. *L'ensemble $K(x) = \{f(x) : f \in K\}$ est relativement compact pour tout $x \in I$.*

1.7 Quelques résultats de convergence

Théorème 1.39. ***(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue).***

Soit (I, Σ, μ) un espace mesuré et H un espace de Hilbert, soit $1 \leq p < \infty$ et soit $(f_n)_n \subset L^p_H(I)$. On suppose que

1. *$(f_n)_n$ converge presque partout vers une fonction f sur I,*

2. *il existe une fonction positive $g(.) \in L^p_{\mathbb{R}}(I)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$|f_n(t)| \leq g(t) \ p.p \ t \in I.$$

Alors $f(.) \in L^p_H(I)$ et la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^p_H(I)$.

Théorème 1.40. ***(Réciproque du théorème de Lebesgue).***
Soit (I, Σ, μ) un espace mesuré, H un espace de Hilbert et soit $1 \leq p < \infty$. Si $(f_n) \in L^p_H(I)$ et $f \in L^p_H(I)$ telle que $\|f_n - f\|_{L^p} \longrightarrow 0$. Alors il existe une sous suite extraite (f_{n_k}) de (f_n), et une fonction positive $g(.) \in L^p_{\mathbb{R}}(I)$ telle que :

1. *$f_{n_k}(x)$ converge presque partout vers f sur I,*

2. *pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ p.p. sur I.*

Théorème 1.41. ***(Banach-Mazur).***
Soit E un espace de Banach et soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E convergeant faiblement vers x, alors il existe une suite $(z_k)_k$ dans E telle que chaque z_k est un combinaison convexe finie d'éléments de la suite $(x_n)_n$ et $(z_k)_k$ converge fortement vers x.

1.8 Projection

Pour plus de détails, consulter la référence [11].

Définition 1.42.
Soit K un sous-ensemble non vide de H et $x \notin K$. On définit $Proj(x, K)$ la projection de x sur K (ou l'ensemble des points les plus proches de K à x) comme l'ensemble de tous les éléments $y \in K$ dont la distance à x est minimale, c'est à dire, $\|x - y\| = d(x, K)$, i.e.,

$$Proj(x, K) = \Big\{ y \in K : d(x, K) = \|x - y\| \Big\}.$$

Théorème 1.43. ***(Projection sur un ensemble convexe fermé).***
Soit K un sous-ensemble convexe fermé non vide de H. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique élément $y \in K$ tel que

$$\|x - y\| = \inf_{a \in K} \|x - a\| = d(x, K).$$

De plus, y est caractérisé par la propriété

$$\begin{cases} y \in K, \\ \langle x-y, a-y\rangle \leq 0, \quad \forall a \in K. \end{cases}$$

Dans ce cas, on note $y = proj(x, K)$.

Remarque 1.44.

Dans le cas où K boule-compact, $Proj(x, K) \neq \emptyset$.

En effet, soit $x \notin K$, on a $d(x, K) = \inf\limits_{a\in K} \|x-a\|$.
D'après la caractérisation de la bornne inférieure, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in K, d(x, K) \leq \|x - a_\varepsilon\| < d(x, K) + \varepsilon$$

pour

$$\varepsilon = \frac{1}{k}, \forall k > 0, \exists \ a_k \in K, d(x, K) \leq \|x - a_k\| < d(x, K) + \frac{1}{k} \tag{1.1}$$

et

$$\begin{aligned} \|a_k\| &< \|x\| + d(x, K) + \frac{1}{k} \\ &< \|x\| + d(x, K) + 1 = M, \end{aligned}$$

c'est à dire $(a_k)_k \subset K \cap M\mathbb{B}_H$, cet ensemble est relativement compact, donc il existe une sous-suite $(a_{\varphi(k)})_k$ telle que $a_{\varphi(k)} \longrightarrow a$ lorsque $k \longrightarrow \infty$. De (1.1) on a

$$d(x, K) \leq \lim_{k\longrightarrow\infty} \|x - a_{\varphi(k)}\| \leq d(x, K)$$

d'où

$$\|x - a\| = d(x, K), \text{ i.e., } a \in Proj(x, K)$$

Proposition 1.45.

Soient K un ensemble fermé non vide de H, $v \in H$ et $x \in K$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *$x \in Proj(v, K)$,*
2. *$\langle v - x, z - x\rangle \leq \frac{1}{2}\|z - x\|^2, \forall z \in K$.*

1.9 Valeur d'adhérence

Définition 1.46.

Soit (X, d) un espace métrique et soit $(x_n)_n \subset X$. On dit que x est une valeur d'adhérence pour $(x_n)_n$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \subset \mathbb{N}, \ \ \forall n \in N_0 : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Théorème 1.47.

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de X. Posons

$$K_n = \{x_p : p \geq n\} = \{x_n, x_{n+1}, ...\}.$$

Soit K l'ensemble de toutes les valeurs d'adhérence de $(x_n)_n$. Alors $K = \bigcap\limits_n \overline{K_n}$, et donc K est fermé.

Proposition 1.48.

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de X. Si $x_n \longrightarrow x$ alors x est une valeur d'adhérence pour $(x_n)_n$.

Proposition 1.49.

Soit K un sous-ensemble non vide de H, on a l'équivalence

$$d(x, K) = 0 \Longleftrightarrow x \in \overline{K}.$$

Proposition 1.50.

Soit K un sous-ensemble non vide de H on a

$$K \text{ est fermé } \Longleftrightarrow K = \overline{K}.$$

1.10 Les multi-applications

Voir [2] et [6].

Définition 1.51.

Soient X, Y deux ensembles non vides. On appelle multi-application ou fonction multivoque définie sur X à valeurs dans Y, toute application F définie sur X à valeurs dans $P(Y)$ et on note $F : X \to P(Y)$ où $F : X \rightrightarrows Y$.

1. *On appelle* ***domaine*** *(effectif) de F, qu'on note $D(F)$, le sous-ensemble de X défini par*
$$D(F) = \Big\{ t \in X : F(t) \neq \emptyset \Big\}.$$
2. *On appelle* ***image*** *de F, qu'on note $R(F)$, le sous-ensemble de Y défini par*
$$R(F) = \Big\{ y \in Y : \exists t \in D(F),\;\; y \in F(t) \Big\} = \bigcup_{t \in D(F)} F(t).$$
3. *On appelle* ***graphe*** *de F, qu'on note $Gr(F)$, le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par*
$$Gr(F) = \Big\{ (x, y) \in D(F) \times Y : y \in F(x) \Big\}.$$
4. *Considérons la multi-application* ***inverse*** *$F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ définie par*
$$t \in F^{-1}(x) \Longleftrightarrow x \in F(t).$$
On a $(F^{-1})^{-1} = F$, $D(F^{-1}) = R(F)$ et $R(F^{-1}) = D(F)$.

1.11 Distance de Hausdorff

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 1.52.

Soient A et B deux sous-ensembles de X, l'écart entre A et B est défini par
$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B),$$
et la distance de Hausdorff entre A et B est définie par
$$\mathcal{H}(A, B) = \sup(e(A, B), e(B, A)).$$

Proposition 1.53.

Pour tous sous-ensembles A, B, C de X. Nous avons les propriétés suivantes

1. $e(A, \emptyset) = \infty \quad si \quad A \neq \emptyset$,
2. $e(\emptyset, B) = 0$,
3. $e(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A \subset \overline{B}$,
4. $\mathcal{H}(A, B) = 0 \Longleftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$,
5. $e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C)$,
6. $\mathcal{H}(A, C) \leq \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C)$,
7. $|d(x, A) - d(x, B)| \leq \mathcal{H}(A, B), \forall x \in X$.

1.11.1 Continuité des multi-applications

Les résultats suivants sont pris des références [4] et [1].

Définition 1.54. ***(Semi-continuité supérieure).***

Soit X, Y deux espaces topologiques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application

1. *On dit que F est semi-continue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$ si et seulement si pour tout ouvert U de Y contenant $F(x_0)$ ($F(x_0) \subset U$) il existe un voisinage Ω de x_0 tel que $F(\Omega) \subset U$, i.e., $F(z) \in U$, $\forall z \in \Omega$.*
2. *Si F est s.c.s en tout point x de X on dit que F est s.c.s sur X, ou tout simplement s.c.s.*

Définition 1.55.

Soit X, Y deux espaces vectoriels normés et $\Omega \subset X$ non vide, et soit $F : \Omega \rightrightarrows Y$, on dit que F est s.c.s au point x_0 si pour toute suite $(x_n) \subset \Omega$, $A \subset Y$ fermé, $x_n \longrightarrow x_0 \in \Omega$ et $F(x_n) \cap A \neq \emptyset$, $\forall n \geq 1$, alors $F(x_0) \cap A \neq \emptyset$.

Théorème 1.56.

Soit E un espace vectoriel normé et $F : E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides. Soit $x_0 \in E$ on suppose que $F(x_0)$ est convexe et faiblement compact. Alors, F est faiblement semi-continue supérieurement au point x_0 si et seulement si la fonction $\sigma(x', F(.))$ est semi-continue supérieurement au point x_0.

Chapitre 2

Sous-différentiel et les ensemble sous-lisse

L'objectif de ce chapitre est de donner des notations sur le sous-différentiel et le cône au sens de Clarke, Fréchet et proximal. Une partie de ce chapitre sera consacrée aux ensembles sous-lisses.

2.1 Sous-différentiel de Clarke

Voir [5].

Définition 2.1.

Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $x \in H$ et soit h un vecteur dans H.

La dérivée directionnelle au sens de Clarke de f au point x dans la direction h notée $f^0(x,h)$, est défini par

$$f^0(x,h) = \limsup_{\substack{\overline{x} \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(\overline{x} + th) - f(\overline{x})}{t}.$$

où h est un vecteur de H et t un scalaire positif.

Définition 2.2.

Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $x \in H$. Alors le sous-différentielle de Clarke de f au point x, est défini par

$$\partial^C f(x) = \Big\{ \xi \in H, \langle \xi, h \rangle \leq f^0(x,h), \forall h \in H \Big\}.$$

Notons qu'il existe une définition plus généralisée du sous différentiel au sens de Clarke donnée dans le cas où f est une fonction propre semi-continue inférieurement.

Définition 2.3.

Soit $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre semi-continue inférieurement et soit x un point de H où f est finie.

Le sous-différentielle au sens de Clarke de f au point x, est défini par

$$\partial^C f(x) = \Big\{ \xi \in H, \langle \xi, h \rangle \leq f^{\uparrow}(x,h), \forall h \in H \Big\}.$$

où $f^{\uparrow}(x,h)$ est la dérivée directionnelle généralisée de Rockaffellar donnée par

$$f^{\uparrow}(x,h) = \limsup_{\substack{f(x') \to f(x) \\ t \downarrow 0}} \inf_{h' \longrightarrow h} \frac{f(x'+th') - f(x')}{t}.$$

Définition 2.4.

Soient H un espace de Hilbert, $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe et $x_0 \in dom(f)$.

On appelle sous-différentiel de f au point x_0 (au sens de l'analyse convexe) noté $\partial f(x_0)$, l'ensemble défini par

$$\partial f(x_0) = \Big\{ x' \in H, f(x) \geq f(x_0) + \langle x', x - x_0 \rangle \ \ \forall x \in H \Big\}.$$

Un point $x' \in \partial f(x_0)$ est dit sous-gradient de f au point x_0. On dit que f est sous-différentiable au point x_0 si $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.

Théorème 2.5.

Soient H un espace de Hilbert, $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre convexe et continue au point $x \in H$, alors $\partial f(x)$ est non vide et faiblement compact dans H.

Proposition 2.6.

Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne. Alors ∂f est une multi-application semi-continue supérieurement sur H.

2.2 Sous-différentiel de Fréchet

Définition 2.7.

Soit $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et s.c.i sur H. On appelle sous-différentiel de Fréchet de f au point x, qu'on note $\partial^F f(x)$ l'ensemble défini par

$$\partial^F f(x) = \Big\{ \xi \in H : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \overline{x} \in B_H(x,\delta), \langle \xi, \overline{x} - x \rangle \leq f(\overline{x}) - f(x) + \varepsilon \|\overline{x} - x\| \Big\}.$$

Proposition 2.8.

Si $f : H \to \mathbb{R}$ est Lipschitzienne alors

$$\partial^F f(x) \subset \partial^C f(x), \forall x \in H.$$

Démonstration.

Soit

$$\begin{aligned} x' \in \partial^F f(x) &\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \langle x', \overline{x} - x \rangle \leq f(\overline{x}) - f(x) + \varepsilon \|\overline{x} - x\|, \forall \overline{x} \in B_H(x,\delta), \\ &\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \frac{f(\overline{x}) - f(x) - \langle x', \overline{x} - x \rangle}{\|\overline{x} - x\|} \geq -\varepsilon, \ \ \forall \overline{x} \in B_H(x,\delta) \backslash \{x\}, \\ &\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \inf_{\substack{\overline{x} \in B_H(x,\delta) \\ \overline{x} \neq x}} \frac{f(\overline{x}) - f(x) - \langle x', \overline{x} - x \rangle}{\|\overline{x} - x\|} \geq -\varepsilon, \end{aligned}$$

comme

$$\forall \varepsilon > 0, \ \sup_{\delta \geq 0} \left(\inf_{\substack{\overline{x} \in B_H(x,\delta) \\ \overline{x} \neq x}} \frac{f(\overline{x}) - f(x) - \langle x', \overline{x} - x \rangle}{\|\overline{x} - x\|} \right) \geq \inf_{\substack{\overline{x} \in B_H(x,\delta) \\ \overline{x} \neq x}} \frac{f(\overline{x}) - f(x) - \langle x', \overline{x} - x \rangle}{\|\overline{x} - x\|}, \forall \delta > 0,$$

alors,

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \sup_{\delta \geq 0} \left(\inf_{\substack{\overline{x} \in B_H(x,\delta) \\ \overline{x} \neq x}} \frac{f(\overline{x}) - f(x) - \langle x', \overline{x} - x \rangle}{\|\overline{x} - x\|} \right) \geq -\varepsilon, \\ &\Longrightarrow \liminf_{\overline{x} \longrightarrow x} \frac{f(\overline{x}) - f(x) - \langle x', \overline{x} - x \rangle}{\|\overline{x} - x\|} \geq 0, \end{aligned}$$

soit $v \in H \backslash \{0\}$ et $t \geq 0$, alors pour $\overline{x} = x + tv$, on a

$$\begin{aligned} \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x) - \langle x', tv \rangle}{\|tv\|} \geq 0 &\Longrightarrow \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t\|v\|} - \frac{\langle x', v \rangle}{\|v\|} \geq 0, \ \ \forall v \in H \backslash \{0\} \\ &\Longrightarrow \frac{\langle x', v \rangle}{\|v\|} \leq \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t\|v\|} \\ &\Longrightarrow \langle x', v \rangle \leq \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \\ &\Longrightarrow \langle x', v \rangle \leq \limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \\ &\Longrightarrow \langle x', v \rangle \leq \limsup_{\substack{y' \longrightarrow x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y'+tv) - f(y')}{t} = f^0(x,v) \end{aligned}$$

c'est à dire,

$$x' \in \partial^C f(x).$$

D'où,

$$\partial^F f(x) \subset \partial^C f(x), \ \ \forall x \in H. \qquad \square$$

2.3 Concepts des cônes normaux

Définition 2.9. ***(Cône).***

Soit K un sous-ensemble de H. On dit que K est un cône si

$$\forall x \in K, \forall \lambda \geq 0, \lambda x \in K,$$

c'est à dire

$$\forall \lambda \geq 0, \lambda K \subset K.$$

Remarque 2.10.

Un cône est donc une réunion de demi-droites fermées issues de l'origine.

Théorème 2.11.

Soit K un cône, alors les trois relations suivantes sont équivalentes :

1. *K est convexe*
2. *$\forall \alpha \geq 0, \forall \beta \geq 0, \alpha K + \beta K \subset K$,*
3. *$K + K \subset K$.*

Définition 2.12. ***(Cône normal proximal).***

Soient K un sous-ensemble non vide et fermé de H, $x \in K$. On définit le cône normal proximal (où le cône proximal) de K au point x de la manière suivante

$$N_K^p(x) = \Big\{ v \in H : \exists \ t > 0, x \in Proj(x + tv, K) \Big\}.$$

Proposition 2.13.

Soient K un ensemble fermé non vide de H, $x \in H$ et $v \in H$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *$v \in N_K^p(x)$.*

2. $\exists \delta \geq 0$ *tel que* $\forall z \in K, \langle v, z - x \rangle \leq \delta \|z - x\|^2$.

Définition 2.14. ***(Cône tangent de Clarke).***

Soit K un ensemble fermé de H, on appelle cône tangent de Clarke de K en x, qu'on note $T_K^C(x)$ ou $T(K, x)$, l'ensemble défini par

$$T_K^C(x) = \left\{ v \in H, \forall t_n \downarrow 0, \forall x_n \longrightarrow \overline{x} \text{ et } x_n \in K, \exists v_n \longrightarrow v \text{ t.q } x_n + t_n v_n \in K \;\; \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

Définition 2.15. ***(Cône normal de Clarke).***

Soit K un ensemble fermé de H, on appelle cône normal de Clarke de K au point x, qu'on note $N_K^C(x)$ ou $N^C(K, x)$, l'ensemble défini par

$$N_K^C(x) = \left\{ \xi \in H : \langle \xi, v \rangle \leq 0, \forall v \in T_K(x) \right\}.$$

Définition 2.16. ***(Cône normal de Fréchet).***

Soit K un sous-ensemble fermé de H, on appelle cône normal de Fréchet de K au point x, qu'on note $N_K^F(x)$ ou $N^F(K, x)$, l'ensemble défini par

$$N_K^F(x) = \left\{ \xi \in H : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \langle \xi, y - x \rangle \leq \varepsilon \|y - x\|, \forall y \in B_H(x, \delta) \cap K \right\}.$$

Proposition 2.17.

Soient K un sous ensemble non vide d'un espace de Hilbert H et x un point dans K, On a toujours les inclusions suivantes

$$N_K^p(x) \subset N_K^F(x) \subset N_K^C(x).$$

• *Pour tout sous-ensemble K non vide, fermé, convexe et tout point $x \in K$, tous les cônes coïncident avec $N_K^C(x)$.*

Proposition 2.18.

Pour tout sous-ensemble fermé K de H et tout $x \in K$, nous avons

$$\partial^F d_K(x) = N^F(K, x) \cap \mathbb{B}_H.$$

Démonstration.

• Montrons que $\partial^F d_K(x) \subset N_K^F \cap \mathbb{B}_H$.

Soit $\xi \in \partial^F d_K(x)$, alors par la Définition 2.7, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in B_H(x, \delta)$

$$\langle \xi, y - x \rangle \leq d_K(y) - d_K(x) + \varepsilon \|y - x\|,$$

d'où

$$\langle \xi, y - x\rangle \leq \varepsilon \|y - x\|, \text{ pour tout } y \in B_H(x, \delta) \cap K,$$

ceci implique que $\xi \in N_K^F(x)$, mais comme $\partial^F d_K(x) \subset \mathbb{B}_H$, on obtient

$$\partial^F d_K(x) \subset N_K^F(x) \cap \mathbb{B}_H. \tag{2.1}$$

• Montrons maintenant que $N_K^F(x) \cap \mathbb{B}_H \subset \partial^F d_K(x)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \xi \in N_K^F(x) \cap \mathbb{B}_H &\Longleftrightarrow \xi \in N_K^F(x) \text{ et } \xi \in \mathbb{B}_H \\ &\Longleftrightarrow \xi \in N_K^F(x) \text{ et } \|\xi\| \leq 1. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$, alors, par la définition du cône normal de Fréchet, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in B_H(x, \delta) \cap K$

$$\langle \xi, y - x\rangle \leq \varepsilon' \|y - x\|. \tag{2.2}$$

Comme la fonction $y \longrightarrow -\langle \xi, y - x\rangle + \varepsilon' \|y - x\|$ est Lipschitzienne de rapport $l = \|\xi\| + \varepsilon'$, par la relation (2.2), $y_0 = x$ est un minimum global pour la fonction $f(y) = -\langle \xi, y - x\rangle + \varepsilon' \|y - x\|$ sur $\overline{B}_H(x, \frac{\delta}{2}) \cap K$ qui est fermé de H, donc par la Proposition1.23, $y_0 = x$ est un minimum global sur H de la fonction $f + (\|\xi\| + \varepsilon') d_{\overline{B}_H(x, \frac{\delta}{2}) \cap K}$, donc pour tout $y \in H$

$$\begin{aligned} \langle \xi, y - x\rangle &\leq \varepsilon' \|y - x\| + (\|\xi\| + \varepsilon') d_{B_H(x,\delta) \cap K}(y) \\ &\leq \varepsilon' \|y - x\| + \|\xi\| d_{B_H(x,\delta) \cap K}(y) + \varepsilon' d_{B_H(x,\delta) \cap K}(y) \\ &\leq \varepsilon' \|y - x\| + d_{B_H(x,\delta) \cap K}(y) + \varepsilon' \|y - x\| \\ &\leq 2\varepsilon' \|y - x\| + d_{B_H(x,\delta) \cap K}(y). \end{aligned}$$

Fixons $r > 0$ tel que $0 < 2r < \frac{\delta}{2}$. On peut facilement vérifier que pour tout $y \in B_H(x, r)$

$$d_{K \cap B_H(x, 2r)}(y) = d_K(y).$$

En effet

$$d_K(y) = \inf_{z \in k} \|y - z\| \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists z_\varepsilon \in K \text{ tel que } \|y - z_\varepsilon\| < d_K(y) + \varepsilon, \tag{2.3}$$

comme $x \in K$, on a $d_K(y) \leq \|y - x\| < r \;\; \forall y \in B_H(x, r)$
donc on peut trouver $\delta > 0$ assez petit tel que $d_K(y) \leq r - \delta$, en prenant dans (2.3) $\varepsilon = \delta$, on obtient l'existence de $z_\delta \in K$ tel que

$$\|y - z_\delta\| < r - \delta + \delta = r$$

ceci implique que

$$\|x - z_\delta\| \leq \|x - y\| + \|y - z_\delta\| < r + r = 2r$$
$$\Longrightarrow z_\delta \in B_H(x, 2r),$$

i.e., $z_\delta \in B_H(x, 2r) \cap K$ alors, $d_{B_H(x,2r)\cap K}(y) \leq \|y - z_\delta\| < d_K(y) + \delta$

d'où, $d_{B_H(x,2r)\cap K}(y) \leq d_K(y) + \delta$, en faisant tendre δ vers 0, il vient que

$$d_{B_H(x,2r)\cap K}(y) \leq d_K(y). \tag{2.4}$$

D'autre part, $B_H(x, 2r) \cap K \subset K$ alors

$$d_K(y) \leq d_{B_H(x,2r)\cap K}(y). \tag{2.5}$$

De (2.4) et (2.5) on obtient

$$d_{B_H(x,2r)\cap K}(y) = d_K(y).$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $y \in B_H(x, r)$

$$\langle \xi, y - x \rangle \leq \varepsilon \|y - x\| + d_K(y) - d_K(x).$$

Par conséquent, $\xi \in \partial^F d_K(x)$, d'où

$$N_K^F \cap \mathbb{B}_H \subset \partial^F d_K(x). \tag{2.6}$$

De (2.6) et (2.1), on a

$$\partial^F d_K(x) = N_K^F(x) \cap \mathbb{B}_H$$

□

Proposition 2.19.

Une autre propriété importante est la suivante

$$x \in Proj(v, K) \Longrightarrow v - x \in N_K^F(x) \Longrightarrow v - x \in N_K^C(x).$$

En effet, soit $x \in Proj(v, K)$, d'après la proposition 1.45 on a

$$\langle v - x, z - x \rangle \leq \frac{1}{2}\|z - x\|^2, \forall z \in K$$

alors $\exists \delta = \frac{1}{2} > 0, \forall z \in K \langle v - x, z - x \rangle \leq \delta \|z - x\|^2.$

Par la proposition 2.13,

$$v - x \in N_K^p(x).$$

Comme $N_K^p \subset N_K^F(x)$, alors $v - x \in N_K^F(x)$.

Aussi, $N_K^F \subset N_k^C(x)$ et donc $v - x \in N_K^C(x)$.

2.4 Ensembles sous-lisses

Voir [8], [9] et [10].

Dans cette partie nous allons introduire la définition et quelques propriétés des ensembles sous-lisse.

Définition 2.20.

On dit qu'un sous-ensemble non vide et fermé K de H est sous-lisse au point $x_0 \in K$, si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour tous $x_1, x_2 \in B_H(x_0, \delta) \cap K$ et tous $\eta_i \in N_K^C(x_i) \cap \mathbb{B}_H (i = 1, 2)$ nous avons

$$\langle \eta_1 - \eta_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\varepsilon \|x_1 - x_2\|. \tag{2.7}$$

L'ensemble K est sous-lisse, s'il est sous-lisse en tout point de K. Nous disons en outre que K est équi-uniformément sous-lisse, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que (2.7) est vérifiée pour tous $x_1, x_2 \in K$ satisfaisant $\|x_1 - x_2\| < \delta$ et pour tous $\eta_i \in N_K^C(x_i) \cap \mathbb{B}_H (i = 1, 2)$.

Proposition 2.21.

Soit K un sous-ensemble fermé de H et $x_0 \in K$. Si K est sous-lisse au point x_0, alors il est normalement Fréchet régulier en x_0, c'est à dire

$$N_K^F(x_0) = N_K^C(x_0), \tag{2.8}$$

en particulier,

$$\partial^C d_K(x_0) = \partial^F d_K(x_0).$$

Démonstration.

• **Montrons que** $N_K^F(x_0) = N_K^C(x_0)$:

On a l'inclusion $N_K^F(x_0) \subset N_K^C(x_0)$, donc il suffit de montre que $N_K^C(x_0) \subset N_K^F(x_0)$. Soit $\xi \in N_K^C(x_0)$ et soit $\varepsilon > 0$, comme K est sous-lisse au point x_0, par la Définition 2.20 il existe $\delta > 0$ tel que pour tous x_1,$x_2 \in B_H(x_0, \delta) \cap K$ et tout $\eta_i \in N_K^C(x_i) \cap \mathbb{B}_H (i = 1, 2)$, nous avons

$$\langle \eta_1 - \eta_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\varepsilon \|x_1 - x_2\|.$$

En prenant, $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = \xi$, $x_1 = v$ et $x_2 = x_0$, ceci implique, pour tout $v \in K$ avec $\|v - x_0\| < \delta$ et tout $\xi \in N_K^C(x_0)$

$$\langle -\xi, v - x_0 \rangle \geq -\varepsilon \|v - x_0\|.$$

Par conséquent

$$\langle \xi, v - x_0 \rangle \leq \varepsilon \|v - x_0\| \text{ pour tout } v \in B_H(x_0, \delta) \cap K.$$

Cette dernière inégalité implique que $\xi \in N_K^F(x_0)$. Donc, $N_K^C(x_0) \subset N_K^F(x_0)$.

Par conséquent, $N_K^F(x_0) = N_K^C(x_0)$.

• **Montrons que** $\partial^C d_K(x_0) = \partial^F d_K(x_0)$:

Soit $\xi \in \partial^C d_K(x_0) \Longleftrightarrow \xi \in N_K^C(x_0) \cap \mathbb{B}_H$.

Alors, $\|\xi\| \leq 1$ et $\xi \in N_K^C(x_0)$, par la relation (2.8), on a $\xi \in N_K^F(x_0)$

$$\Longrightarrow \xi \in N_K^F(x_0) \cap \mathbb{B}_H$$

$$\Longleftrightarrow \xi \in \partial^F d_K(x_0)$$

par conséquent, $\partial^C d_K(x_0) = \partial^F d_K(x_0)$. □

Proposition 2.22.

Soit K un sous-ensemble sous-lisse alors $\partial^F d_K(x)$ est convexe fermé.

Dans tout ce qui suit, pour un ensemble sous-lisse K, nous allons adopter les notations $N_K(.)$ et ∂d_K pour le cône et le sous-différentiel de Fréchet (de Clarke).

Définition 2.23.

Soit $(K(q))_{q\in Q}$ une famille d'ensembles fermés de H avec paramètre $q \in Q$. Cette famille est dite équi-uniformément sous-lisse, si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour chaque $q \in Q$, l'inégalité (2.1) est vérifiée pour tous $x_1, x_2 \in K(q)$ satisfaisant $\|x_1 - x_2\| < \delta$, et pour tout $\eta \in N_{K(q)}(x_i) \cap \mathbb{B}_H$, $i = 1, 2$.

Proposition 2.24.

Soit $\{C(t,x) : (t,x) \in I \times H\}$ une famille d'ensembles fermés non vides de H, qui est équi-uniformément sous-lisse et soit un réelle $\eta \geq 0$. Supposons qu'il existe une constante réelle $L \geq 0$ et une fonction continue $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que, pour tous $x, x', y, y' \in H$ et $s, t \in I$

$$|d(y, C(t,x) - d(y', C(s,x'))| \leq \|y - y'\| + |g(t) - g(s)| + L\|x - x'\|.$$

Alors

1. *Pour tout* $(s, x, y) \in Gr(C)$ *nous avons* $\eta\partial d_{C(s,x)}(y) \subset \eta\mathbb{B}_H$.

2. *Pour toute suite* $(s_n)_n$ *de* I *convergeant vers* s*, toute suite* $(x_n)_n$ *convergeant vers* x*, toute suite* $(y_n)_n$ *convergeant vers* $y \in C(s, x)$ *avec* $y_n \in C(s_n, x_n)$*, et tout* $\lambda \in H$*, nous avons*

$$\limsup_{n\to+\infty} \sigma(\lambda, \eta\partial d_{C(s_n,x_n)}(y_n) \leq \sigma(\lambda, \eta\partial d_{C(s,x)}(y)).$$

Proposition 2.25.

Tout ensemble convexe d'un espace normé est uniformément sous-lisse.

Chapitre 3

Existence d'une solution de l'inclusion différentielle gouvernée par le processus de la rafle avec perturbation

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'établir un résultat d'existence de solutions pour un processus de rafle du premier ordre avec perturbation multivoque dans un espace de Hilbert de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) & \in N_{C\big(t,u(t)\big)}\big(u(t)\big) + G\big(t,u(t)\big) \text{ p.p. } t \in I \\ u(t) & \in C\big(t,u(t)\big) \ \ \forall t \in I \\ u(0) & = u_0 \in C(0,u_0), \end{cases}$$

où $C(t,x)$ est un ensemble non vide sous-lisse, $N_{C\big(t,u(t)\big)}$ le cône normale de Fréchet à $C(t,x)$ et $G : I \times H \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs non vides convexe fermées.

3.2 Résultat principal

Nous commençons par formuler les hypothèses nécessaires à l'établissement de notre résultat principal.

$(\mathcal{H}_1)$ G est une multi-application scalairement sémi-continue supérieurement sur $H \times H$ (c'est à dire, pour chaque $\xi \in H$, la fonction d'appui $(t,x) \longrightarrow \sigma(\xi, G(t,x))$ est sémi-continue supérieurement sur $H \times H$) et pour certains réel $\alpha \geq 0$

$$d\big(0, G(t,x)\big) \leq \alpha \quad \text{pour tout } t \in I \text{ et } x \in H.$$

$(\mathcal{H}_2)$ Pour tout $(t,x) \in I \times H$, l'ensemble $C(t,x)$ est à valeurs non vides et équi-uniformément sous-lisse.

$(\mathcal{H}_3)$ Il existe des constante réelles $L_1 \geq 0$, $L_2 \in [0,1[$ tel que pour tous $t,s \in I$ et $x, x', y, y' \in H$

$$|d(y, C(t,x) - d(y', C(s,x'))| \leq \|y - y'\| + L_1|t-s| + L_2\|x - x'\|.$$

$(\mathcal{H}_4)$ Pour tout sous-ensemble borné $A \subset H$, l'ensemble $C(I \times A)$ est relativement boule-compact.

Théorème 3.1.

Supposons que les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$, $(\mathcal{H}_3)$ et $(\mathcal{H}_4)$ sont satisfaites alors, pour tout $u_0 \in H$ avec $u_0 \in C(0, u_0)$, il existe une solution continue Lipschitzienne $u : I \longrightarrow H$ de l'inclusion différentielle

$$(\rho) \begin{cases} \dot{u}(t) & \in -N_{C\left(t,u(t)\right)}\big(u(t)\big) + G\big(t, u(t)\big) \ p.p. \ t \in I \\ u(t) & \in C\big(t, u(t)\big) \ \forall t \in I, u(0) = u_0, \end{cases}$$

avec l'estimation suivante $\|\dot{u}(t)\| \leq \frac{L_1 + 2\alpha}{1 - L_2}$ p.p $t \in I$.

Démonstration.

Pour chaque $k = 0, 1, ..., n$, $n \geq 1$, considérons une partition de l'intervalle I avec les points $t_k^n = k\frac{T}{n}$, pour $k = 0$, $t_0^n = 0$, ..., $k = n$, $t_n^n = T$.

Pour chaque $(t,x) \in I \times H$, désignons par $g(t,x)$ l'élément de norme minimale de l'ensemble convexe fermé $G(t,x)$ de H, i.e.,

$$g(t,x) = proj_{G(t,x)}(0) = d\big(0, G(t,x)\big) < \alpha. \tag{3.1}$$

On pose

$$x_0^n = u_0 \in C(t_0^n, u_0). \tag{3.2}$$

Cette démonstration est répartie en quatre étapes :

Etape 1 : Construction de la suite $(x_k^n)_{k=0,\dots,n-1}$**.**

Comme $C(t_1^n, x_0^n)$ est boule-compact d'apré la Remarque 1.44, il existe

$$x_1^n \in Proj_{C(t_1^n, x_0^n)}\left(x_0^n + \frac{T}{n} g\big(t_0^n, x_0^n\big)\right)$$

et alors par le Théorème 1.42 on a

$$x_1^n \in C(t_1^n, x_0^n)$$

en utilisant la Proposition 2.19, on déduit que

$$x_0^n + \frac{T}{n} g(t_0^n, x_0^n) - x_1^n \in N_{C(t_1^n, x_0^n)}(x_1^n).$$

D'autre part,on a $\|x_1^n - x_0^n\| \leq \frac{T}{n}(L_1 + 2\alpha)$. En effet

$$\begin{aligned}
\|x_1^n - x_0^n\| &= \left\| x_1^n - x_0^n - \frac{T}{n} g(t_0^n, x_0^n) + \frac{T}{n} g(t_0^n, x_0^n) \right\| \\
&\leq \left\| x_1^n - \left(x_0^n + \frac{T}{n} g(t_0^n, x_0^n) \right) \right\| + \left\| \frac{T}{n} g(t_0^n, x_0^n) \right\|,
\end{aligned}$$

comme $x_1^n \in C(t_1^n, x_0^n)$, par l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$ nous avons

$$\begin{aligned}
\|x_1^n - x_0^n\| &\leq d\left(x_0^n + \frac{T}{n} g(t_0^n, x_0^n), C(t_1^n, x_0^n) \right) + \left\| \frac{T}{n} g(t_0^n, x_0^n) \right\| \\
&\leq d\left(x_0^n + \frac{T}{n} g(t_0^n, x_0^n), C(t_0^n, x_0^n) \right) + \left\| x_0^n + \frac{T}{n} g(t_0^n, x_0^n) - \big(x_0^n + \frac{T}{n} g(t_0^n, x_0^n)\big) \right\| \\
&\quad + L_1 |t_1^n - t_0^n| + L_2 \|x_0^n - x_0^n\| + \left\| \frac{T}{n} g(t_0^n, x_0^n) \right\|
\end{aligned}$$

et par (3.2) on a

$$\begin{aligned}
d\left(x_0^n + \frac{T}{n} g(t_0^n, x_0^n), C(t_0^n, x_0^n) \right) &= \left\| x_0^n + \frac{T}{n} g(t_0^n, x_0^n) - x_0^n \right\| \\
&= \left\| \frac{T}{n} g(t_0^n, x_0^n) \right\|,
\end{aligned}$$

comme $t_1^n - t_0^n = \frac{T}{n} - 0 = \frac{T}{n}$ et par la relation (3.1) on a

$$\begin{aligned}
\|x_1^n - x_0^n\| &\leq 2 \left\| \frac{T}{n} g(t_0^n, x_0^n) \right\| + L_1 \frac{T}{n} \\
&\leq 2 \frac{T}{n} \alpha + L_1 \frac{T}{n} \\
&= (L_1 + 2\alpha) \frac{T}{n}
\end{aligned}$$

alors

$$\|x_1^n - x_0^n\| \leq (L_1 + 2\alpha)\frac{T}{n}. \tag{3.3}$$

Maintenant, supposons que pour $k = 0, 1, ..., n-1$ avec $k \leq n-1$ les points x_0^n, x_1^n, ..., x_n^n ont été construits de telle sort que les propriétés suivantes vraies.

Puisque $C(t_{k+1}^n, x_k^n)$ est boule-compact alors, nous pouvons trouver

$$x_{k+1}^n \in Proj_{C(t_{k+1}^n, x_k^n)}\left(x_k^n + \frac{T}{n}g(t_k^n, x_k^n)\right)$$

et

$$x_{k+1}^n \in C(t_{k+1}^n, x_k^n). \tag{3.4}$$

de plus par la Proposition 2.19, on a

$$x_k^n + \frac{T}{n}g(t_k^n, x_k^n) - x_{k+1}^n \in N_{C(t_{k+1}^n, x_k^n)}(x_{k+1}^n). \tag{3.5}$$

Par la Définition 1.22, et l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$ et les relations (3.4) et (3.1), on a

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1}^n - x_k^n\| &= \left\|x_{k+1}^n - x_k^n + \frac{T}{n}g(t_k^n, x_k^n) - \frac{T}{n}g(t_k^n, x_k^n)\right\| \\
&\leq \left\|x_{k+1}^n - \left(x_k^n + \frac{T}{n}g(t_k^n, x_k)\right)\right\| + \left\|\frac{T}{n}g(t_k^n, x_k^n)\right\| \\
&\leq d\left(x_k^n + \frac{T}{n}g(t_k^n, x_k^n), C(t_{k+1}^n, x_k^n)\right) + \left\|\frac{T}{n}g(t_k^n, x_k^n)\right\| \\
&\leq d\left(x_k^n + \frac{T}{n}g(t_k^n, x_k^n), C(t_k^n, x_{k-1}^n)\right) + \left\|x_k^n + \frac{T}{n}g(t_k^n, x_k^n) - \left(x_k^n + \frac{T}{n}g(t_k^n, x_k^n)\right)\right\| \\
&+ L_1|t_{k+1}^n - t_k^n| + L_2\|x_k^n - x_{k-1}^n\| + \left\|\frac{T}{n}g(t_k^n, x_k^n)\right\| \\
&\leq 2\alpha\frac{T}{n} + L_1\frac{T}{n} + L_2\|x_k^n - x_{k-1}^n\|
\end{aligned}$$

alors

$$\|x_{k+1}^n - x_k^n\| \leq 2\alpha\frac{T}{n} + L_1\frac{T}{n} + L_2\|x_k^n - x_{k-1}^n\| \tag{3.6}$$

La suite finie x_0^n,x_1^n, ..., x_n^n satisfaisant les relations (3.4), (3.5) et (3.6) est, construit par récurrence.

Pour tout $k = 1, 2, ..., n-1$, nous observons que

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1}^n - x_k^n\| &\leq 2\alpha\frac{T}{n} + L_1\frac{T}{n} + L_2\|x_k^n - x_{k-1}^n\| \\
&\leq 2\alpha\frac{T}{n} + L_1\frac{T}{n} + L_2\Big(2\alpha\frac{T}{n} + L_1\frac{T}{n} + L_2\|x_{k-1}^n - x_{k-2}^n\|\Big) \\
&\leq 2\alpha\frac{T}{n}\Big(1 + L_2\Big) + L_1\frac{T}{n}\Big(1 + L_2\Big) + L_2^2\Big(2\alpha\frac{T}{n} + L_1\frac{T}{n} + L_2\|x_{k-2}^n - x_{k-3}^n\|\Big) \\
&. \\
&. \\
&. \\
&\leq 2\alpha\frac{T}{n}\Big(1 + L_2 + L_2^2\Big) + L_1\frac{T}{n}\Big(1 + L_2 + L_2^2\Big) + L_2^3\|x_{k-2}^n - x_{k-3}^n\| \\
&\leq 2\alpha\frac{T}{n}\Big(1 + L_2 + L_2^2 + ... + L_2^{k-1}\Big) + L_1\frac{T}{n}\Big(1 + L_2 + L_2^2 + ... + L_2^{k-1}\Big) + L_2^k\|x_1^n - x_0^n\| \\
&= \frac{T}{n}\Big(2\alpha + L_1\Big)\Big(1 + L_2 + L_2^2 + ... + L_2^{k-1}\Big) + L_2^k\|x_1^n - x_0^n\|
\end{aligned}$$

et de la relation (3.3) on trouve

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1}^n - x_k^n\| &\leq \frac{T}{n}\Big(2\alpha + L_1\Big)\Big(1 + L_2 + L_2^2 + ... + L_2^{k-1}\Big) + L_2^k(L_1 + 2\alpha)\frac{T}{n} \\
&= (2\alpha + L_1)\Big(1 + L_2 + L_2^2 + ... + L_2^{k-1} + L_2^k\Big)\frac{T}{n},
\end{aligned}$$

comme $1 + L_2 + L_2^2 + ... + L_2^{k-1} + L_2^k$ une suite géométrique de terme initial $L_2^0 = 1$ et de raison $0 \leq L_2 < 1$ donc $1 + L_2 + L_2^2 + ... + L_2^{k-1} + L_2^k \leq \frac{1}{1-L_2}$
alors

$$\|x_{k+1}^n - x_k^n\| \leq \frac{2\alpha + L_1}{1 - L_2}\frac{T}{n}, \tag{3.7}$$

et cette dernière inégalité est toujours vraie pour $k = 0$ selon (3.3).

• **Montrons que $\|x_{k+1}^n\| \leq \beta$, β une constante.**

Pour $k = 0, 1, ..., n-1$,

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1}^n\| &= \|x_{k+1}^n - x_{k+}^n + x_{k+}^n - x_{k-1}^n + x_{k-1}^n - ... - x_1^n + x_1^n - x_0^n + x_0^n\| \\
&\leq \|x_{k+1}^n - x_k^n\| + \|x_k^n - x_{k-1}^n\| + ... + \|x_1^n - x_0^n\| + \|x_0^n\| \\
&\leq \|u_0\| + \frac{2\alpha + L_1}{1 - L_2}\frac{T}{n}(k+1) \\
&\leq \|u_0\| + \frac{2\alpha + L_1}{1 - L_2}T = \beta
\end{aligned}$$

donc

$$\|x_{k+1}^n\| \leq \beta. \tag{3.8}$$

Etape 2 : Construction de la suite approximate $u_n(.)$.

Pour tout $t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]$ avec $k = 0, 1, ..., n-1$, on pose

$$u_n(t) = \frac{t_{k+1}^n - t}{t_{k+1}^n - t_k^n} x_k^n + \frac{t - t_k^n}{t_{k+1}^n - t_k^n} x_{k+1}^n.$$

Donc, pour presque tout $t \in]t_k^n, t_{k+1}^n[$,

$$\dot{u}_n(t) = -\frac{x_k^n}{t_{k+1}^n - t_k^n} + \frac{x_{k+1}^n}{t_{k+1}^n - t_k^n}$$

et comme

$$t_{k+1}^n - t_k^n = \frac{T}{n} \tag{3.9}$$

o na

$$\dot{u}_n(t) = -\frac{n}{T}(x_k^n - x_{k+1}^n).$$

Par la relation (3.4), et comme $u_n(t_k^n) = x_k^n$ et $u_n(t_{k+1}^n) = x_{k+1}^n$, on obtient

$$u_n(t_{k+1}^n) \in C\big(t_{k+1}^n, u_n(t_k^n)\big). \tag{3.10}$$

Comme $\dot{u}_n(t) = -\frac{n}{T}(x_k^n - x_{k+1}^n)$, et par la relation (3.5) il vient que

$$\frac{n}{T}(x_k^n - x_{k+1}^n) \in N_{C(t_{k+1}^n, x_n^k)}(x_{k+1}^n) - g(t_k^n, x_k^n) \text{ p.p. } t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[$$

donc

$$-\dot{u}_n(t) \in N_{C\left(t_{k+1}^n, u_n(t_k^n)\right)}\big(u_n(t_{k+1}^n)\big) - g\big(t_k^n, u_n(t_k^n)\big) \text{ p.p.} t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[. \tag{3.11}$$

Par la relation (3.7), on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \|\dot{u}_n(t)\| &= \frac{n}{T}\|x_k^n - x_{k+1}^n\| \\ &\leq \frac{L_1 + 2\alpha}{1 - L_2} = M \end{aligned}$$

donc

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq M. \tag{3.12}$$

Dans la suite, définissons les fonctions étagées $\delta_n, \theta_n : I \longrightarrow I$ par

$$\delta_n(t) = \begin{cases} t_k^n & \text{si} \quad t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[\\ t_{n-1}^n & \text{si} \quad t = T, \end{cases}$$

et

$$\theta_n(t) = \begin{cases} t_{k+1}^n & \text{si} \quad t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[\\ T & \text{si} \quad t = T. \end{cases}$$

Observons que pour chaque $t \in I$, oû peut choisir k telle que $t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[$ si $t < T$ et $k = n-1$ si $t = T$, par (3.9) on trouve

$|\delta_n(t) - t| = |t_k^n - t| \leq |t_{k+1}^n - t_k^n| = \frac{T}{n}$,

$$|\delta_n(t) - t| \leq \frac{T}{n} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty,$$

et similairement,

$$\theta_n(t) \longrightarrow t \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty. \tag{3.13}$$

Finalement par la définition de $\delta_n(.)$ et $\theta_n(.)$ est les relations (3.10) et (3.11) on trouve :

$$u_n\big(\theta_n(t)\big) \in C\Bigg(\theta_n(t), u_n\big(\delta_n(t)\big)\Bigg) \text{ pour tout } t \in I \tag{3.14}$$

$$-\dot{u}_n(t) \in N_{C\left(\theta_n(t), u_n\left(\delta_n(t)\right)\right)}\Bigg(u_n\big(\theta_n(t)\big)\Bigg) - g\Bigg(\delta_n(t), u_n\big(\delta_n(t)\big)\Bigg) \text{ p.p. } t \in I. \tag{3.15}$$

Etape 3 : Convergence de suite (u_n).

• **Montrons que u_n converge uniformément vers u sur I.**

• **Montrons que $\{u_n(t), n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact.**

Pour tout $t \in I$, considérons pour un sous-ensemble infini $N \subset \mathbb{N}$ la suite $(u_n(t))_{n\in N}$.

Par la relation (3.8) on trouve

$$u_n(\theta_n(t)) \in \beta\mathbb{B}_H \tag{3.16}$$

donc, par les relations (3.14) et (3.16), on a

$$u_n\big(\theta_n(t)\big) \in C\Bigg(\theta_n(t), u_n\big(\delta_n(t)\big)\Bigg) \cap \beta\mathbb{B}_H \tag{3.17}$$

ce qui implique que $u_n(\theta_n(t)) \in C(I \times \beta\mathbb{B}_H) \cap \beta\mathbb{B}_H$. Par l'hypothèse $(\mathcal{H}_4)$ la suite $(u_n(\theta_n(t)))$ est relativement compact, et on conclut alors, il existe un sous-ensemble infini $N_0 \subset N$ telle que $\Bigg(u_n(\theta_n(t))_{n\in N_0}\Bigg)$ converge vers $l(t) \in H$.

On pose $h_n(t) = u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)$ pour tout $n \in N_0$, par (3.12) et (3.13), on trouve

$$\begin{aligned} \|h_n(t)\| = \|u_n\big(\theta_n(t)\big) - u_n(t)\| &= \left\| \int_t^{\theta_n(t)} \dot{u}_n(s)ds \right\| \\ &\leq \int_t^{\theta_n(t)} \|\dot{u}(s)\|ds \\ &\leq M|\theta_n(t) - t| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Donc, $(u_n(t))_{n\in N_0}$ converge vers $l(t)$, alors l'ensemble $\{u_n(t) : n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans H. D'autre part, par la relation (3.12) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-continue car nous avons pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| = \left\| \int_s^t \dot{u}_n(\tau)d\tau \right\| \leq \int_s^t \|\dot{u}_n(\tau)\|d\tau \leq M|t-s|,$$

et d'après le théorème d'Arzelà-Ascoli (Théorème 1.38), l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}_H(I)$. Donc on peut extraire une sous-suite notée aussi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers une application continue u sur I, i.e.,

$$\|u_n - u\|_C \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

•Montrons que $(\dot{u}_n)$ converge faiblement dans $L^2_H(I)$.

Par la relation (3.12) la suite $(\dot{u}_n)$ est bornée dans $L^2_H(I)$, utilisant le Théorème 1.37 on peut extraire une sous-suite de $(\dot{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers une application $\omega \in L^2_H(I)$ avec $\|\omega(t)\| \leq M$ p.p. $t \in I$.

Pour, $t \in I$ et $\xi \in H$

$$\begin{aligned}
\langle u(t) - u(0), \xi\rangle &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle u_n(t) - u(0), \xi\rangle \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle \int_0^t \dot{u}_n(s)ds, \xi\rangle \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^T \langle \xi\chi_{[0,t]}(s), \dot{u}_n(s)\rangle ds \\
&= \int_0^T \langle w(s), \xi\chi_{[0,t]}(s)\rangle ds \\
&= \int_0^t \langle w(s), \xi\rangle ds,
\end{aligned}$$

c'est à dire, pour tout $t \in I$, $u(t) - u(0) = \displaystyle\int_0^t w(s)ds$ alors $u(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t \omega(s)ds$.

Par conséquent u est absolument continue et $\dot{u} = \omega$ p.p sur I (voir Théorème 1.4) et alors $(\dot{u}_n)$ converge faiblement vers $\dot{u}$ dans $L^2_H(I)$.

Etape 4 : **Existence de solution**.

• **Montrons que** $u(t) \in C(t, u(t))$.

Par l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$ et les relation (3.12) et (3.14), pour tout $t \in I$

$$
\begin{aligned}
d\Big(u(t), C\big(t, u(t)\big)\Big) &\leq \|u(t) - u_n(\theta_n(t))\| + d\Big(u_n\big(\theta_n(t)\big), C\big(t, u(t)\big)\Big) \\
&= \|u_n(t) - u_n(\theta_n(t))\| + \Big| d\Big(u_n\big(\theta_n(t)\big), C\big(t, u(t)\big)\Big) \\
&- d\Big(u_n\big(\theta_n(t)\big), C\big(u_n\big(\theta_n(t)\big), u_n(\delta_n(t))\big)\Big)\Big| \\
&\leq \int_{\theta_n(t)}^{t} \Big\|\dot{u}_n(s)ds\Big\| + L_1|t - \theta_n(t)| + L_2\|u(t) - u_n(t) + u_n(t) - u_n(\delta_n(t))\| \\
&\leq M|t - \theta_n(t)| + L_1|t - \theta_n(t)| + L_2\|u(t) - u_n(t)\| + L_2\|u_n(t) - u_n(\delta_n(t))\| \\
&\leq (M + L_1)|t - \theta_n(t)| + L_2\|u(t) - u_n(t)\| \\
&+ L_2 M|\delta_n(t) - t| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty.
\end{aligned}
$$

Donc, $d(u(t), C(t, u(t))) = 0$ alors par la Proposition 1.49, $u(t) \in \overline{C(t, u(t))}$, comme l'ensemble $C(t, u(t))$ est fermé donc, $u(t) \in C(t, u(t))$, $\forall t \in I$.

Posons $z_n(t) = g(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t)))$, pour tout $t \in I$, et par la relation (3.1) et l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ o na

$$
\|z_n(t)\| = \|g(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t)))\| \leq \alpha, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } t \in I,
$$

on peut supposer que la suite $(z_n(.))$ converge faiblement dans $L^2_H(I)$ vers une application $z(.) \in L^2_H(I)$ avec $\|z(t)\| \leq \alpha$ p.p. $t \in I$.

De plus,

$$
\begin{aligned}
\|\dot{u}_n(t) - z_n(t)\| &\leq \|\dot{u}_n(t)\| + \|z_n(t)\| \leq M + \alpha = \gamma \text{ p.p.} \\
&\Longrightarrow \dot{u}_n(t) - z_n(t) \in \gamma \mathbb{B}_H. \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

Par la relation (3.15), on obtient que

$$
-\dot{u}_n(t) + z_n(t) \in N_{C\left(\theta_n(t), u_n(\delta_n(t))\right)}\big(u_n(\theta_n(t))\big)
$$

et par la relation (3.18), on a

$$
-\dot{u}_n(t) + z_n(t) \in N_{C\left(\theta_n(t), u_n(\delta_n(t))\right)}\big(u_n(\theta_n(t))\big) \bigcap \gamma \mathbb{B}_H,
$$

grâce à la Proposition 2.18, pour presque tout $t \in I$ on a

$$
-\dot{u}_n(t) + z_n(t) \in \gamma \partial d_{C\left(\theta_n(t), u_n(\delta_n(t))\right)}\big(u_n(\theta_n(t))\big), \qquad (3.19)
$$

et par (3.1), on trouve

$$z_n(t) \in G\big(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t))\big). \tag{3.20}$$

Comme la suite $(-\dot{u}_n + z_n)_n$ (resp $(z_n)_n$) converge faiblement dans $L^2_H(I)$ vers $(-\dot{u} + z)$ (resp vers z), par le théorème de Mazur (Théorème 1.41), il existe une suite (ξ_n) (resp (ζ_n)) tel que pour chaque $q \in \mathbb{N}$

$$\xi_n \in co\Big\{ - \dot{u}_q + z_q; q \geq n\Big\} \tag{3.21}$$

$$\Big(\text{resp } \zeta_n \in co\{z_q; q \geq n\}\Big) \tag{3.22}$$

et $(\xi_n)_n$ (resp $(\zeta_n)_n$) converge fortement dans $L^2_H(I)$ vers $(-\dot{u} + z)$ (resp (z)). Par le Théorème 1.40, il existe une sous-suite de $(\xi_n(.))_n$ (resp $(\zeta_n(.))_n$) converge presque partout vers $(-\dot{u}(.)+z(.))$ (resp $(z(.))$), c'est à dire, il existe un ensemble négligeable de Lebesgue $D \subset I$ tel que pour chaque $t \in I\backslash D$, $(\xi_n(t)) \longrightarrow -\dot{u}(t) + z(t)$ (resp $(\zeta_n(t)) \longrightarrow z(t)$) fortement dans H, c'est à dire $-\dot{u}(t) + z(t)$ est une point d'adhérence de $(\xi_n(t))$. Alors

$$\begin{aligned} -\dot{u}(t) + z(t) \in \overline{(\xi_n(t))_n} &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\Big\{\xi_k(t), \;\; k \geq n\Big\}} \\ &\subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co\Big\{ - \dot{u}_q(t) + z_q(t), \;\; q \geq n\Big\}} \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co}\Big\{ - \dot{u}_q(t) + z_q(t), \;\; q \geq n\Big\} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} -\dot{u}(t) + z(t) \in \bigcap_{n} \overline{co}\Big\{ - \dot{u}_q(t) + z_q(t) : q \geq n\Big\} \\ \Big(\text{resp } z(t) \in \bigcap_{n} \overline{co}\Big\{ z_q(t), q \geq n\Big\}\Big). \end{aligned}$$

Par les relations (3.19) et (3.20) et Théorème 1.20, on obtient

$$\langle y, -\dot{u}_n(t) + z_n(t)\rangle \leq \sigma\Big(y, \gamma\partial d_{C\big(\theta_n(t), u_n(\delta_n(t))\big)}\big(u_n(\theta_n(t))\big)\Big) \tag{3.23}$$

et

$$\langle y, z_n(t)\rangle \leq \sigma\Big(y, G(\delta_n(t), u_n\big(\delta_n(t)\big))\Big). \tag{3.24}$$

De plus, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I\backslash D$, de (3.21) et (3.22) nous avons

$$\langle y, \xi_k(t)\rangle \leq \sup_{q\geq n}\langle y, -\dot{u}_q(t) + z_q(t)\rangle \text{ pour tout } k \geq n$$

et

$$\langle y, \zeta_k(t)\rangle \leq \sup_{q\geq n}\langle y, z_q(t)\rangle \text{ pour tout } k \geq n,$$

et en prenant la limite dans les deux inégalités (3.23) et (3.24) lorsque $k \longrightarrow \infty$ on a

$$\begin{aligned}\big\langle y, -\dot{u}(t) + z(t)\big\rangle &\leq \sup_{q\geq n}\big\langle y, -\dot{u}_q(t) + z_q(t)\big\rangle \text{ pour tout } k \geq n \\ &\leq \sup_{q\geq n}\sigma\Big(y, \gamma\partial d_{C\left(\theta_q(t), u_q(\delta_q(t))\right)}\big(u_q(\theta_q(t))\big)\Big)\end{aligned}$$

et

$$\Big(\text{resp } \big\langle y, z(t)\big\rangle \leq \sup_{q\geq n}\big\langle y, z_q(t)\big\rangle \leq \sup_{q\geq n}\sigma\Big(y, G\big(\delta_q(t), u_q(\delta_q(t))\big)\Big)\Big),$$

c'est à dire

$$\langle y, -\dot{u}(t) + z(t)\rangle \leq \limsup_{n\longrightarrow+\infty}\sigma\Big(y, \gamma\partial d_{C\left(\theta_n(t), u_n(\delta_n(t))\right)}\big(u_n(\theta_n(t))\big)\Big) \tag{3.25}$$

et

$$\langle y, z(t)\rangle \leq \limsup_{n\longrightarrow+\infty}\sigma\Big(y, G\big(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t))\big)\Big). \tag{3.26}$$

Observons que par l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$ et la Proposition 2.24 que la multi-application

$$\text{Gr (C) } \ni (t, x, x') \longmapsto \partial d_{C(t,x)}(x')$$

prend des valeurs convexes faiblement compactes et semi-continue supérieurement de $Gr(C)$ dans $(H, w\ \ (H, H))$, d'où pour chaque $y \in H$ la restriction à $Gr(C)$ de la fonction à valeur réelle

$$(t, x, x') \longmapsto \sigma\big(y, \gamma\partial d_{C(t,x)}(x')\big)$$

est semi-continue supérieurement sur $Gr(C)$. De plus, la fonction $(t, x) \longmapsto \sigma(y, G(t, x))$ est aussi semi-continue supérieurement sur $I \times H$ grâce l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$.

Comme

$$\big(\theta_n(t), u_n(\delta_n(t)), u_n(\theta_n(t))\big) \in \text{Gr(C)} \ \text{ pour tout n},$$

$\theta_n(t)$ converge vers t sur I et $u_n(t)$ converge vers $u(t) \in C(t, u(t))$, alors

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty}\sigma\Big(y, \gamma\partial d_{C\left(\theta_n(t), u_n(\delta_n(t))\right)}\big(u_n(\theta_n(t))\big)\Big) \leq \sigma\Big(y, \gamma\partial d_{C\left(t, u(t)\right)}\big(u(t)\big)\Big)$$

donc, pour chaque $t \in I\backslash D$ et chaque $y \in H$, et les deux inégalités (3.25) et (3.26), il vient que

$$\langle y, -\dot{u}(t) + z(t)\rangle \leq \sigma\Big(y, \gamma\partial d_{C\left(t, u(t)\right)}\big(u(t)\big)\Big)$$

et

$$\langle y, z(t)\rangle \leq \sigma\Big(y, G\big(t, u(t)\big)\Big),$$

ce qui implique que $-\dot{u}(t)+z(t) \in \gamma\partial d_{C(t,u(t))}\big(u(t)\big)$ et $z(t) \in G(t, u(t))$, et par conséquent

$$\dot{u}(t) \in -N_{C\left(t,u(t)\right)}\big(u(t)\big) + z(t) \text{ p.p.}$$

$$z(t) \in G\big(t, u(t)\big) \text{ p.p.}$$

avec

$$\|\dot{u}(t) - z(t)\| \leq \gamma.$$

La preuve est alors complète. $\square$

Conclusion

Nous nos sommes intéressés dans ce mémoire à mettre en lumière le concept principal de sous différentiel, les cônes normaux et les ensembles sous-lisses.
Enfin, nous avons présenté l'étude, dans un espace de Hilbert H, du processus de la rafle du premier ordre dépendant du temps et de l'état. Nous avons établi l'existence de solutions du problème perturbé par une application multivoque.

Bibliographie

[1] **J. P. Aubin et A. Cellina**, Differential inclusions, Springer-Verlage Berlin, (1984).

[2] **D. Azzam-Laouir**, Polycopié, cours d'analyse multivoque, Laboratoire de Mathématiques pures et appliquées, Université de Jijel (2009).

[3] **H. Brezis**, Analyse Fonctionnelle, theory et applications, Masson, Paris, (1983).

[4] **C. Castaing and M.Valadier**, Convex Analysis and Measurable Multifunctions, Lecture Notes in Mathematics. Springer-Velage, Berlin, 580 (1977).

[5] **F. H. Clarke**, Optimization and Nonsmooth Analysis, John Wiley and Sons, Inc, New York, (1983).

[6] **K. Deimling**, Multivalued différential équation, W. de Grayter, Berlin, New york, (1992).

[7] **L. C. Eans**, Partial differential equations, volume 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, Second edition, (2010).

[8] **T. Haddad, J.Noel and L. Thibault**, Preturbed Sweeping process with a subsmooth set depending on the state. Linear and Nonlinear Analysis, 2, Numbre 1, 155-174 (2016).

[9] **J. Noel**, Inclusions différentielles d'évolution associées à des ensembles sous-lisses, Thèse doctorat de l'université Montpellier (2013).

[10] **L. Thibault**, Subsmooth functions and sets. Journal of Linear and Nonlinear Analysis. 1-107(2018).

[11] **J. V. Tiel**, Convex analysis, An introductory text, Wiley, New York (1984).