République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....
№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.
Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Théorie des inclusions différentielles flous "Fuzzy inclusions"

Présenté par :

Nadjla Belamri

Devant le jury composé de :

Boukrouk Wafia	M.C.B	Université de Jijel	Président
Izza Sabrina	M.C.B	Université de Jijel	Encadreur
Bensouillah Bachir	M.A.A	Université de Jijel	Examinateur

Promotion **2019/2020**

REMERCIEMENTS

Je commence par remercier Dieu le tout puissant, de m'avoir donné courage, volonté et patience pour mener à bon terme ce travail.
je tiens à remercier ma directrice de mémoire : **Mme. Izza Sabrina**, Maître de Conférences à l'université de Jijel, pour son aide précieuse, ses conseils et son orientation durant l'élaboration de ce mémoire. Je la remercie également pour sa gentillesse et sa disponibilité.
je tiens à remercier les membres de jury : **Mme Boukrouk Wafia**, Maître de Conférences à l'université de Jijel, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury. Mes remerciements s'adressent aussi à **M Bensouillah Bachir**, Maître assistant à l'université de Jijel, d'avoir accepté d'examiner ce travail.
je tiens à remercier mes enseignants qui m'ont accompagné du scolaire jusqu'à l'université. je remercie chaleureusement mes parents, d'être toujours présents à mes cotés, pour leur soutient moral et matériel, j'espère être à la hauteur de leur confiance.
Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail .

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Le thème considéré dans ce mémoire est les ensembles flous. Pour spécifier des notions imprécises ou vagues, Zadeh instruit le concept de la théorie des ensembles flous qui est une fonction d'appartenance décrivant la transition progressive de l'appartenance à la non appartenance qui est une notion subjective. Les espaces de ces ensembles flous sont des espaces fonctionnelles avec une description spéciale qui n'est pas une propriété.

Dans ce mémoire, il ya trois chapitres, dans le premier, j'ai étudié la définition et les propriétés de la distance de Hausdorff et de la fonction support.

Le deuxième chapitre est composé de trois sections, dans la première j'ai abordé les opérations sur les ensembles flous. Dans la deuxième section, j'ai exposé des résultats et des définitions concernant l'espace E^n qui est un sous espace de $F(x)$ l'espace des ensembles flous . Quant à la troisième section, elle est consacrée à l'espace métrique (E^n, d).

Dans le troisième chapitre, j'ai donné quelques résultats sur les fonctions mesurables, intégrables et différentiables à valeurs dans E^n. Après j'ai énoncé un théorème sur l'équivalence des solutions ordinaires et générales d'une inclusion différentielle flous de la forme

$$x' \in F(t,x), \qquad x(t_0) = x_0,$$

où $F : I \times E^n \longrightarrow comp(E^n), t_0 \in I, x_0 \in E^n$ est une multi-application.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

pour élaborer notre travail, il est indispensable d'introduire dans ce première chapitre tous les résultats et notations de base qui nous seront trés utiles par la suite, on commence par les notations générales et quelques définitions, la distance de Hausdorff et fonction support.
Le contenue du chapitre à été pris des référence [1], [2], [5].

1.1 Notations générales

Tout au long de ce mémoire, on adopte les notations suivantes :

Soit X un espace A et B deux parties de X

$$d(x,B) = \inf_{b\in B} d(x,b)$$

$d(x,B)$	la distance entre$unpoint\ x \in A\ et\ l'ensemble\ B$.
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
$\mathbb{R}^n$	ensemble des vecteurs de dimension n.
V	un ouvert de X.
$co(A)$	envloppe convexe de A.
$d_H^*(A,B)$	l'ecart entre A et B.
$d_H(A,B)$	la distance de Hausdorff entre A et B.
$S(.,A)$	la fonction support de A.
$\lvert\cdot\rvert$	valeur absolue.
$\lvert\lvert\cdot\rvert\rvert$	la norme sur l'espace X.
K^n	Ensembles de tous les sous ensembles compacts convexes non vides de $\mathbb{R}^n$.
K_c^n	Ensembles de tous les sous ensembles compacts convexes non vides de $\mathbb{R}^n$.
$end(u)$	l'endographe de u .
$send(u)$	le sendographe de u.
$\widehat{0}$	est uneapplication flous définie par $\widehat{0}(y) = 0\ si\ y \neq\ 0$ et $\widehat{0}(0) = 1$.

1.2 Ensembles convexes

Définition* 1.2.1. *Somme et multiplication de Minkowski

Soit A et B deux sous ensembles non vides de $\mathbb{R}^n$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ l'addition et la multiplication *du Minkowski sont respectivement définies par*

$$A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\},$$

et

$$\lambda A = \{\lambda a, a \in A\}.$$

Définition* 1.2.2. *Ensemble convexe

En dit que A *est un ensemble convexe si*

$$\forall x, y \in A,\ \lambda x + (1 - \lambda)y \in A.$$

Définition* 1.2.3. *Enveloppe convexe

Pour tout sous ensemble non vide A *de* $\mathbb{R}^n$ *l'enveloppe convexe notée* $co(A)$, *est l'ensemble des points de la forme* $a = \lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2$ *ou de façon équivalente le plus petit convexe contenant* A.

***Remarque* 1.2.1.** 1. *L'inclusion suivante est toujours vérifiée*

$$A \subseteq co(A) = co(co(A)).$$

2. $A = co(A)$ *si est seulement si* A *est convexe.*

3. *De plus,* $co(A)$*est fermé (compact), si* A *est fermé(compact).*

***Proposition* 1.2.1.**

Les espace C^n, K^n *et* K_c^n *sont fermés sous les opérations d'additions et de multiplication scalaire. En fait : ces deux opérations induisent une structure linéaire sur* C^n K^n *et* K_C^n *avec un élément nul {0}.*

1.3 Multi-applications

***Définition* 1.3.1.** *Soient* T, X *deux ensembles non vides. On appelle multi-application (fonction multivoque ou multi-fonction) définie dans* T *à valeurs dans* X, *toute application* F *définie* *sur T à valeurs dans $\mathcal{P}(X)$ et on note*

$$F : T \longrightarrow \mathcal{P}(X) \;\; ou \;\; F : T \rightrightarrows X.$$

Donc, $\forall t \in T$, $F(t)$ est un sous ensemble de X.

***Définition* 1.3.2.** *Soit T, X deux espaces topologiques et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. On dit que F est semicontinue supérieurement au point t_0, si pour tout ouvert V de X tel que $F(t_0) \subset V$, il existe un voisinage Ω de t_0 tel que $F(t) \subset V$, $\forall t \in \Omega$.*
On dit que F est semicontenue supérieurement sur T si elle est semicontenue supérieurement en tout point de T.

1.4 Distance de Hausdorff

***Définition* 1.4.1.** *Soit x un point dans $\mathbb{R}^n$ et A un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. La distance $d(x, A)$ de x à A est définie par*

$$d(x, A) = \inf\{||x - a||, a \in A\},$$

où $\|.\|$ est la norme usuelle de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.
On a

$$d(x, A) = d(x, \overline{A}) \geq 0,$$

et $d(x, A) = 0$ si est seulement si $x \in \overline{A}$, où $\overline{A}$ est la fermeture de A dans $\mathbb{R}^n$.

***Définition* 1.4.2.** *Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$, On appelle ϵ voisinage de A l'ensemble définie par*

$$S_\epsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^*, \; d(x, A) < \epsilon\},$$

Il est clair que la fermeture de $S_\epsilon(A)$ est l'ensemble

$$\overline{S}_\epsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^*, d(x, A) \leq \epsilon\}.$$

En particulier, nous appelons $\overline{S}_1^n$ la boule unité fermée dans $\mathbb{R}^n$ est elle est définie par

$$\overline{S_1^n} = \overline{S}_1(\{0\})$$

***Remarques* 1.4.1.**

1- *Évidemment S_1^n un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$, notons que pour tout $\epsilon > 0$ et tout sous ensemble non vide A de $\mathbb{R}^n$.*

$$\overline{S}_\epsilon(A) = A + \epsilon\overline{S_1^n},$$

2- *Nous écrirons parfois par commodité $S(A, \epsilon)$ et $\overline{S}(A, \epsilon)$ pour $S_\epsilon(A)$ et $\overline{S}_\epsilon(A)$.*

***Proposition* 1.4.1.**

Soient A et B deux sous ensembles non vides de $\mathbb{R}^n$, l'écart de Hausdorff entre B,A est défini par

$$d_H^*(B, A) = \sup\{d(b, A), b \in B\},$$

qui est équivalent

$$d_H^*(B, A) = \inf\{\epsilon > 0, B \subseteq A + \epsilon\overline{S_1^n}\}.$$

Démonstration.

Montrons que $d_H^*(B, A) = \inf\{\epsilon > 0, B \subseteq \overline{S_\epsilon}(A)\}$,

on a pour tout $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} B \subseteq \overline{S_\epsilon}(A) &\Longleftrightarrow d(x, A) < \epsilon, \forall x \in B \\ &\Longleftrightarrow \sup_{x \in B} d(x, A) < \epsilon \\ &\Longleftrightarrow d_H^*(B, A) < \epsilon \end{aligned}$$

Posons $\alpha = \{\epsilon > 0, d_H^*(B, A) \leq \epsilon\}$ *et* $k = \inf \alpha$

On a

$$\begin{aligned} d_H^*(B, A) \leq d_H^*(B, A) &\Longleftrightarrow d_H^*(B, A) \in \alpha \\ &\Longrightarrow \inf \alpha \leq d_H^*(B, A) \\ &\Longrightarrow k \leq d_H^*(B, A) \qquad (1.4.1) \\ &\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \epsilon_j > 0, d_H^*(B, A) \leq \epsilon_j \textit{ et } k \leq \epsilon_j < k + \delta, \;\; \forall \delta > 0 \\ &\Longrightarrow d_H^*(B, A) < k + \delta, \;\; \forall \delta > 0 \\ &\Longrightarrow d_H^*(B, A) \leq \; k, \;\; \textit{si } \delta \longrightarrow 0. \qquad (1.4.2) \end{aligned}$$

De (1.4.1) et (1.4.2)

$$d_H^*(B, A) = k = \inf\{\epsilon > 0, B \subset S_\epsilon(A)\},$$

donc

$$d_H^*(B, A) = \inf\{\epsilon > 0, B \subseteq A + \epsilon\overline{S_1^n}\}.$$

□

***Proposition* 1.4.2.**

Soient A et B deux sous ensembles non vides de $\mathbb{R}^n$ nous avons $d_H^*(B, A) \geq 0$ avec $d_H^*(B, A) = 0$ ssi $B \subseteq \overline{A}$

Démonstration.

$$\begin{aligned} d_H^*(B, A) = 0 &\Longleftrightarrow \sup_{b \in B}\{d(b, A)\} = 0 \\ &\Longleftrightarrow d(b, A) = 0, \forall b \in B \\ &\Longleftrightarrow \forall b \in B, b \in \overline{A} \\ &\Longleftrightarrow B \subset \overline{A}. \end{aligned}$$

□

***Proposition* 1.4.3.**

Soient A et B deux sous ensembles non vides de $\mathbb{R}^n$, on a l'inégalité du triangle

$$d_H^*(B, A) \leqslant d_H^*(B, C) + d_H^*(C, A)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} &On\ a \quad \forall x \in B \ \ d(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y) \\ &\qquad\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists y_\epsilon \in C \ tq \ d(x, y) \leq d(x, y_\epsilon) \leq d(x, C) + \epsilon. \end{aligned}$$

On a

$$d(x, A) = \inf_{z \in A} d(x, z) \leq d(x, z), \forall z \in A,$$

d'autre part on a $\forall z \in A$,

$$d(x,A) \leq d(x,z) \leq d(x,y_\epsilon) + d(y_\epsilon,z),$$

c'est à dire ;

$$\begin{aligned} d(x,A) &\leq d(x,y_\epsilon) + d(y_\epsilon,z), \quad \forall z \in A \\ &\leq d(x,C) + \epsilon + d(y_\epsilon,z) \;\; \forall z \in A \\ &\leq d(x,C) + \epsilon + \inf_{z\in A} d(y_\epsilon,z) \\ &\leq d(x,C) + \epsilon + d(y_\epsilon,A). \end{aligned}$$

Comme $y_\epsilon \in C$, alors

$$d(x,A) \leq d(x,C) + \sup_{y\in C} d(y,A) + \epsilon,$$

donc

$$d(x,A) \leq d(x,C) + d_H^*(C,A) + \epsilon,$$

alors

$$\sup_{x\in B} d(x,A) \leq \sup_{x\in B} d(x,C) + d_H^*(C,A) + \epsilon,$$

c'est à dire

$$d_H^*(B,A) \leq d_H^*(B,C) + d_H^*(C,A) + \epsilon.$$

On fait tendre ϵ vers 0 alors

$$d_H^*(B,A) \leq d_H^*(B,C) + d_H^*(C,A)$$

$\square$

***Remarque* 1.4.1.**

Soient A, B deux sous ensembles de $\mathbb{R}^n$, en général on a

$$d_H^*(A,B) \neq d_H^*(B,A).$$

***Définition* 1.4.3.**

Soit A et B deux sous ensembles non vides de $\mathbb{R}^n$, la distance de Hausdorff entre A et B est définie par

$$d_H(A,B) = \max\{d_H^*(A,B), d_H^*(B,A)\}.$$

***Proposition* 1.4.4.**

Soient A,B et C deux sous ensembles non vides de R^n. Les assertions suivantes sont vérifiées

(a) $d_H(A,B) = d_H(B,A)$.

(b) $d_H(A,B) \geq 0$ *avec* $d_H(A,B) = 0$ *ssi* $\overline{A} = \overline{B}$.

(c) L'inégalité triangulaire est vérifiée

$$d_H(A,B) \leq d_H(A,C) + d_H(B,A). \tag{1.4.3}$$

Démonstration.

(b) Montrons que $d_H(A,B) \geq 0$ avec $d_H(A,B) = 0$ ssi $\overline{A} = \overline{B}$.

$$\begin{aligned} d_H(A,B) = 0 &\Longleftrightarrow \max\{d_H^*(A,B), d_H^*(B,A)\} = 0 \\ &\Longleftrightarrow d_H^*(A,B) = 0 \textit{ et } d_H^*(B,A) = 0 \end{aligned}$$

On sait que

$$d_H^*(A,B) = 0 \Longleftrightarrow A \subset \overline{B},$$

et

$$d_H^*(B,A) = 0 \Longleftrightarrow B \subset \overline{A},$$

comme

$$A \subset \overline{B} \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B},$$

et

$$B \subset \overline{A} \Longrightarrow \overline{B} \subset \overline{A},$$

alors

$$\overline{A} \subset \overline{B} \textit{ et } \overline{B} \subset \overline{A}.$$

Donc

$$\overline{A} = \overline{B}.$$

(c) Montrons que $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$

On a

$$d_H^*(B, A) \leq d_H^*(B, C) + d_H^*(C, A),$$

et

$$d_H^*(A, B) \leq d_H^*(C, B) + d_H^*(A, C),$$

ainsi

$$\max\{d_H^*(A, B), d_H^*(B, A)\} \leq \max\{d_H^*(A, C), d_H^*(C, A)\} + \max\{d_H^*(B, C), d_H^*(C, B)\}.$$

C'est à dire ;

$$d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$$

□

***Remarque* 1.4.2.**

(C^n, d_H) est un espace métrique séparable complets dans lequel K^n et K_c^n sont des ensembles fermés par conséquent (K^n, d_H) et (K_c^n, d_H) sont également des espaces métriques séparables complets.

les propriétés suivantes de la distance de Hausdorff seront utiles dans la suite.

***Proposition* 1.4.5.**

Si $A, A', B, B' \in K^n$ alors

i) $d_H(tA, tB) = td_H(A, B)$ *pour tous* $t \geq 0$.

ii) $d_H(A + B, A' + B') \leq d_H(A, A') + d_H(B, B')$.

iii) $d_H(co(A), co(B)) \leq d_H(A, B)$.

***Définition* 1.4.4.**

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ non vide, la norme de A est définit par

$$\|A\| = \sup\{\|a\|, a \in A\},$$

ou de manière équivalente

$$\|A\| = d_H(\{0\}, A). \tag{1.4.4}$$

En effet,

$$\begin{aligned} d_H(\{0\}, A) &= \max\{d_H^*(\{0\}, A), d_H^*(A, \{0\}) \\ &= \max\{\sup_{b\in\{0\}} d(b, A), \sup_{a\in A} d(a, \{0\})\} \\ &= \sup_{a\in A} d(a, \{0\}) \\ &= \sup\{\| a \|, a \in A\}. \end{aligned}$$

***Remarque* 1.4.3.**

Soit $A \in K^n$ et $\| A \|$ est finie, on a

$$\| tA \| = t \| A \|,$$

pour tous $t \geq 0$.

En effet, pour tout $t \geq 0$ on a

$$\begin{aligned} \| tA \| &= \sup\{\|ta\|, a \in A\} \\ &= \sup t\{\|a\|, a \in A\} \\ &= t \sup\{\|a\|, a \in A\} \\ &= t \| A \| \end{aligned}$$

***Définition* 1.4.5.** *Soit X un ensemble, A une partie de X. Un recouvrement de A est une famille de parties de X dont la rénion contient A (souvent, on a $A = X$.)*

***Définition* 1.4.6.** *Soit X un espace topologique. On dit que X est compact s'il est séparé et de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous recouvrement finie.*

***Définition* 1.4.7.** *Soit (E, d) un espace métrique, une partie K de E est dite compacte si, de toute suite (u_n) d'éléments de K, on peut extraire une sous suite convergente vers un élément u de K.*

***Remarque* 1.4.4.**

De (1.4.3) *et*(1.4.4) *on a*

$$|\| A \| - \| B \|| \leq d_H(A, B).$$

***Définition* 1.4.8.**

Pour toutes les partie $A, B \in K^n$, on dit qu'un ensemble u de K^n (ou K_c^n) est uniformément borné s'il existe une constante finie c(u) telle que $\| A \| \leq c(u)$pour tout $A \in u$.

Nous avons ensuite la caractérisation simple suivante de la compacité :

***Proposition* 1.4.6.**

Un ensemble non vide A de l'espace métrique (K^n, d_H) ou (K_c^n, d_H) est compact si est seulement si il est fermé et uniformément borné.

***Remarque* 1.4.5.**

L'inclusion d'ensemble induit un ordre partiel sur K^n, on écrit

$$A \leq B \Longleftrightarrow A \subseteq B,$$

où $A, B \in \mathbb{R}^n$, alors

$$L(B) = \{A \in K^n, B \leq A\},$$

$$U(B) = \{A \in K^n, A \leq B\}.$$

Sont des sous ensembles fermés de K^n, pour tout $B \in K^n$

***Remarque* 1.4.6.**

$U(B)$est un sous ensemble compact de K^n.

Cette assertion reste vraie si en remplace K^npar K_c^n

***Proposition* 1.4.7.**

Soit $\{A_j\} \subset K^n$ une suite qui satisfait

$$..... \subseteq A_j \subseteq ...... \subseteq A_2 \subseteq A_1.$$

Alors

$$A = \cap_{j=1}^{\infty} A_j \in K^n.$$

De plus, on a

$$d_H(A_n, A) \longrightarrow 0 \ \textit{ quand } n \ \textit{ tend vers } \infty \tag{1.4.5}$$

Par contre si

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq ....A_j \subseteq ....$$

Et

$$A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j \in K^n,$$

alors (1.4.5) *es vérifiée*

1.5 Fonction support

***Proposition* 1.5.1.**

Soit A un ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, la fonction support de A est définie pour tout $p \in \mathbb{R}^n$ par

$$S(p, A) = \sup\{< p, a >, a \in A\}.$$

***Remarque* 1.5.1.**

$S(p, A)$ peut prendre la valeur $+\infty$ lorsque A est non borné, cependant lorsque A est un sous ensemble convexe compact de $\mathbb{R}^n$ le supremum est toujours atteint et la fonction support $S(., A)$ de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bien définie

***Proposition* 1.5.2.** *Soit $A, B \subset \mathbb{R}^n$ on a*

1) *$|S(p, A)| \leq \|A\|\|p\|$, pour tout $p \in \mathbb{R}^n$.*

2) *$|S(p, A) - S(q, A)| \leq \|A\|\|p - q\|$, pour tout $p, q \in \mathbb{R}^n$.*

3) *Pour tout $p \in \mathbb{R}^n$ si $A \subset B$ on a*

$$S(p, A) \leq S(p, B).$$

4) $S(p, co(A \cup B)) \leq \max\{S(p, A), S(p, B)\}$.

Démonstration.

1) Montrons que $|S(p, A)| \leq \|A\|\|p\|$ pour tout $p \in \mathbb{R}^n$

on a

$$\begin{aligned} |S(p, A)| &= |\sup\{< p, a >, a \in A\}| \\ &= |\sup_{a \in A} < p, a >| \\ &\leq \|p\|\|A\|. \end{aligned}$$

2) Montrons que pour tout $p, q \in \mathbb{R}^n$

$$|S(p, A) - S(q, A)| \leq \|A\|\|p - q\|$$

On a

$$\begin{aligned} |S(p, A) - S(q, A)| &= |\sup\{< p, a >, a \in A\} - \sup\{< q, a >, a \in A\}| \\ &\leq |\sup_{a \in A}\{< p, a > - < q, A >\}| \\ &\leq |\sup_{a \in A} < p - q, a >| \\ &\leq \|A\|\|p - q\| \end{aligned}$$

3) Montrons que pour tout $p \in \mathbb{R}^n$ et si $A \subset B$

$$S(p, A) \leq S(p, B).$$

$A \subseteq B$, alors

$$\begin{aligned} S(p, A) &= \sup\{< p, a >, a \in A\} \\ &\leqslant \sup\{< p, b >, b \in B\} \\ &= S(p, B). \end{aligned}$$

$\square$

***Remarque* 1.5.2.** *La fonction support $S(p, A)$est associée uniquement au sous ensemble A dans K_c^n, dans le sens où $S(p, A) = S(p, B)$ pour tous $p \in \mathbb{R}^n$ si est seulement si $A = B$.*

***Proposition* 1.5.3.** *Soient A et B dans K_c^n, la fonction support préserve également l'addition d'ensembles et la multiplication scalaire positive c'est à dire ; pour tout $p \in \mathbb{R}^n$*

$$S(p, A + B) = S(p, A) + S(p, B).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} S(p, A + B) &= \sup\{< p, a + b >, a \in A, b \in B\} \\ &= \sup\{< p, a > + < p, b >, a \in A, b \in B\} \\ &= \sup\{< p, a >, a \in A\} + \sup\{< p, b >, b \in B\} \\ &= S(p, A) + S(p, B). \end{aligned}$$

□

***Remarques* 1.5.1.** *a) En particulier, pour $B = \{x\}$ on a $S(p, A+\{x\}) = S(p, A)+ < p, x >$ pour tout $x \in \mathcal{R}^n$.*

b) $S(p, tA) = tS(p, A), t \geq 0$.

En effet, soit $t > 0$

$$\begin{aligned} S(p, tA) &= \sup\{< p, ta >, a \in A\} \\ &= \sup t\{< p, a >, a \in A\} \\ &= t \sup\{< p, a >, a \in A\} \\ &= tS(p, A), t \geq 0. \end{aligned}$$

***Remarques* 1.5.2.**

1) La distance de Hausdorff est liée à la fonction support pour les sous ensembles $A, B \in K_c^n$ puisque nous avons

$$d_H(A, B) = \sup\{S(p, A) - S(p, B), p \in S^{n-1}\},$$

où

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\},$$

est la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

2) *Soit* $C(S^{n-1})$ *l'espace de Banach des fonction continues* $f : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ *muni de la norme supremum*

$$\|f\| = \sup\{\|f(p)\|, p \in S^{n-1}\}.$$

3) $S(p, A)$ *est positivement homogène est sous additif*

a) *Soit* $t > 0$,

$$\begin{aligned} S(tp, A) &= \sup\{< tp, a >, a \in A\} \\ &= \sup t\{< p, a >, a \in A\} \\ &= tS(p, A). \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

b) $S(p_1 + p_2, A) \leq S(p_1, A) + S(p_2, A), \forall p_1, p_2 \in \mathcal{R}^n$

$$\begin{aligned} S(p_1 + p_2, A) &= \sup\{< p_1 + p_2, a >, a \in A\} \\ &\leq \sup\{< p_1, a >, a \in A\} + \sup\{< p_2, a >, a \in A\} \\ &\leq S(p_1, A) + S(p_2, A). \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

5) *De plus en combinant* (1.5.1)*et*(1.5.2), *il est évident que* $S(., A)$ *est une fonction convexe, c'est à dire ; qu'elle satisfait*

$$S(\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2, A) \leq \lambda S(p_1) + (1 - \lambda)S(p_2, A),$$

pour tous $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$, *et tout* $\lambda \in [0, 1]$.

Théorème* 1.5.3. *de Minkowski

Soient deux ensembles disjoints convexes compacts non vides B *et* $C \subset \mathbb{R}^n$, *il existe* $\alpha \in \mathbb{R}^n$ *et des nombres* $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ *tels que* $b.\alpha < \gamma_1 < \gamma_2 < c.\alpha$ *pour tout* $b \in B$ *et* $c \in \mathbb{C}$.

***Proposition* 1.5.4.**

Soient $A, B \in \mathbb{R}^n$ *alors* $A \subset B$ *si est seulement si* $d(x, B) \leq d(x, A)$ *pour tous* $x \in \mathbb{R}^n$.

***Lemme* 1.5.1.**

Soient $A, C \in \mathbb{R}^n$ deux ensembles convexe, alors

i) $d_H^*(A,C) = \max\{S(x,A) - S(x,C) :\| x \|= 1\}$

ii) $d_H(A,C) = \max\{|S(x,A) - S(x,C)| :\| x \|= 1\}$

***Proposition* 1.5.5.**

Si $A, B \in K_c^n$ et $C \in K^n$ alors

$$d_H^*(A+C, B+C) = d_H^*(A,B)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} d_H^*(A+C, B+C) &= \max\{|S(x,A+C) - S(x,B+C)| :\| x \|= 1\} \\ &= \max\{|S(x,A) + S(x,C) - S(x,B) - S(x,C)| :\| x \|= 1\} \\ &= \max\{|S(x,A) - S(x,B)| :\| x \|= 1\} \\ &= d_H^*(A,B) \end{aligned}$$

□

***Proposition* 1.5.6.**

Pour chaque fonction continue, positivement homogène et sous additive $S : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ unique convexe compact non vide

$$A = \{x \in \mathcal{R}^n, < p, x > \leq S(p)\},$$

pour tout $p \in \mathbb{R}^n$, où S est la fonction support de A.

1.6 Fonctions absolument contenues

***Définition* 1.6.1.** *On dit qu'une application $f : [a,b] \longrightarrow E$ est absolument continue si $\forall\ \epsilon > 0$, ilexiste $\delta > 0$, telle que pour toute partition dénombrable de $[a,b]$ par des intervalle disjoints*

$[a_k, b_k]$ *vérifiant*

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta,$$

on a

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \epsilon.$$

***Théorème* 1.6.1.** *Une application* $f : [a, b] \longrightarrow E$ *est absolument continue si est seulement si elle est l'intégrale de sa propre dérivée, c'est à dire ;*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

CHAPITRE 2

ENSEMBLES FLOUS

Dans ce chapitre, nous avons aborder les opérations sur les ensembles flous, puis nous avons présenté l'espace E^n, et nous terminons par l'espace métrique (E^n, d)

Le contenue du chapitre à été pris des référence [2]

Les ensembles flous sont considérés par rapport à un ensemble non vide X des élément qui nous intéressent. l'idée essentielle est que à chaque élément $x \in X$ on attribuer un grade d'appartenance $u(x)$ prenant des valeurs dans [0,1], avec u(x)=0 correspondant à la non appartenance , 0<u(x)<1 une appartenance partielle et u(x)=1 une appartenance total.

D'aprés Zadeh [5] un sous ensemble flous de X est un sous ensemble non vide

$\{(x, u(x)), x \in X\}$ de $X \times [0, 1]$ pour une certaine fonction $u : X \to [0, 1]$.

la fonction u elle même est suivent utilisée pour les ensembles flous .

Par exemple, la fonction $u : R \longrightarrow [0, 1]$ avec

$$u(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 1 \\ (1/99)(x-1) & , 1 < x \leq 100 \\ 1 & , x > 100 \end{cases}$$

donne un exemple d'ensembles flous de nombre réel. Bien sur il existe plusieurs autre choix raisonnables de fonctions d'appartenance. Dans le cas d'ensembles classique si A est ce partie de X, il y'a seulement deux grade d'appartenance i,e qui son appartenance on non appartenance, pour $x \in X$ on a $x \in A$ ou $x \notin A$.

Un tel ensemble peut être identifié avec un ensemble flou sur X, donné par la fonction caractéristique d'une partie A de X $\chi_A : x \longrightarrow [0,1]$, $u(x) = \chi_A(x)$, c'est à dire ;

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

2.1 Définitions

***Définition* 2.1.1.** *Ensemble de niveau*
L'ensemble de niveaux α d'un ensemble flous u sur X est définie par

$$[u]^\alpha = \{x \in X : u(x) \geq \alpha\},$$

pour tout $\alpha \in [0,1]$.

***Définition* 2.1.2.** *Support d'un ensemble flou*
Le support d'un ensemble flous $[u]^0$ est la fermeture par rapport à X de l'union de tous les ensembles de niveaux, c'est à dire ;

$$[u]^0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [u]^\alpha}.$$

2.2 Opérations sur les ensembles flous

L'union, l'intersection et le complément d'ensembles flous peuvent être définis de manière ponctuelle en fonction de leurs grades d'apartenance.

Considérons une fonction $u : X \longrightarrow [0,1]$ comme un sous ensemble flous d'un espace de base non vide X et notons la totalité des ensembles flous (c'est à dire ; toutes les fonction u) par $\mathcal{F}(x)$.

***Définition* 2.2.1.**

Soit u et v deux éléments de $\mathcal{F}(x)$. Le complément u^c, l'union$(u \vee v)$ et l'intersection $(u \wedge v)$ sont définis par

le complément de u

$$u^c = 1 - u(x),$$

l'union de u et v

$$(u \vee v)(x) = u(x) \vee v(x) = max\{u(x), v(x)\},$$

l'intersection de u et v

$$(u \wedge v)(x) = u(x) \wedge v(x) = min\{u(x), v(x)\}.$$

***Remarque* 2.2.1.**

Pour chaque $x \in X$, il est clair que u^c, $u \vee v$, $u \wedge v$ sont des éléments de $\mathcal{F}(x)$, donc on peut définir une application sur des ensembles flous $f : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y$ ou X_1, X_2 et Y sont des ensembles non vides qu'on va prolonger en une application sur des ensembles flous $\tilde{f} : \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2) \longrightarrow \mathcal{F}(y)$, oŭ

$$\tilde{f}(u_1, u_2)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,x_2) \in f^{-1}(y)} u_1(x_1) \wedge u_2(x_2) & si\ f^{-1}(y) \neq \varnothing, \\ 0 & sinon \end{cases}$$

pour $y \in Y$, $u_1 \in X_1, u_2 \in X_2$.

Et $f^{-1}(y) = \Big\{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2; f(X_1, X_2) = y\Big\}$, qui peut être vide.

***Définition* 2.2.2.**

Soient deux ensembles flous $u, v \in \mathcal{F}(x)$ avec $u \neq v$, soit la fonction $f : X \times X \longmapsto X$ définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

on obtient alors, l'addition des deux ensembles u et v

$$(u \tilde{+} v)(x) = \sup_{(x_1+x_2=x)} u(x_1) \wedge v(x_2),$$

pour tous $x \in X$ *avec* $x = x_1 + x_2$ *et* $x_1, x_2 \in X$.

Pour définir la multiplication par un scalaire de $u \in \mathcal{F}(x)$, *c non nul, soit la fonction* $f : X \times X \longmapsto X$ *est définit par*

$$f(x) = cx,$$

on obtint alors

$$\tilde{cu}(x) = u(x/c),$$

pour tous $x \in X$.

***Remarque* 2.2.1.** *Il est Évident que* $cu \in \mathcal{F}(x)$.

***Définition* 2.2.3.** *Un ensemble flou* $u \in \mathcal{F}(x)$ *est appelé un ensemble flou normale s'il existe au moins un point* $x_0 \in X$ *pour lequel* $u(x_0) = 1$. *Donc l'ensemble de niveau* $1 : [u]^1$, *tous les autres ensembles de niveaux* $[u]^\alpha$, *pour* $0 < \alpha < 1$ *et le support* $[u]^0$ *de u sont des ensembles non vides de* X.

***Remarque* 2.2.2.** *Pour des raisons techniques, les ensembles de niveaux sont supposé compacts convexes , et lorsque X est un espace linéaire, ils seront supposés convexes.*

***Définition* 2.2.4.** *(Convexité flous)*

Un ensemble flous u est convexe si est seulement si

$$u(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq u(x_1) \wedge u(x_2),$$

pour tous $x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0,1]$.

En effet, la convexité d'un ensemble de niveau d'un ensemble flou u est équivalente à ce qu'il soit un ensemble floue convexe (convexité floue).

2.3 l'espace E^n

***Définition* 2.3.1.**

Soit u un ensemble flous de $\mathbb{R}^n$ qui satisfont aux hypothèses suivantes

1) u applique $\mathbb{R}^n$ sur $I = [0,1]$, c'est à dire $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$.

2) $[u]^0$ est un sous ensemble de K_c^n, pour tout $\alpha \in I$.

3) $[u]^\alpha$ est un sous ensemble compact de $\mathbb{R}^n$, pour tout $\alpha \in I$.

4) u est un ensemble flou convexe, c'est à dire ;

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min[u(x), u(y)],$$

pour tout $\lambda \in [0,1]$.

La Famille des ensembles flous vérifiant 1),2),3),4) sera noté E^n.

***Remarque* 2.3.1.**

Soit u un ensemble flou convexe, $\exists \alpha \in [0,1]$ tel que $x, y \in [u]^\alpha$ pour un certain $\alpha \in [0,1]$, d'où $u(x) \geq \alpha$ et $u(y) \geq \alpha$, alors

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min[u(x), u(y)] \geq \alpha,$$

pour tout $\lambda x \in [0,1]$ et donc

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in [u]^\alpha,$$

par conséquent $[u]^\alpha$ est un sous ensemble convexe de $\mathbb{R}$, pour tout $\alpha \in [0,1]$. Le support $[u]^0$ est aussi convexe.

***Lemme* 2.3.1.**

Si $u \in E^n$ est un ensemble convexe flous, alors $[u]^\alpha$ est convexe pour tout $\alpha \in I$.

Démonstration. u est convexe flous, c'est à dire ; pour tout $\lambda \in [0,1]$ et $x, y \in u$

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min[u(x), u(y)] \geq \alpha \qquad (*)$$

Soit $x, y \in [u]^\alpha$, montrons que $\lambda x + (1-\lambda)y \in [u]^\alpha$

On a $x, y \in u^\alpha$ alors $u(x) \geq \alpha$ et $u(y) \geq \alpha$.

D'où

$$\min[u(x), u(y)] \geq \alpha.$$

Donc d'après $(*)$ on a

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \min[u(x), u(y)] \geq \alpha.$$

Alors

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \alpha,$$

c'est à dire ;

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in [u]^\alpha,$$

donc $[u]^\alpha$ est convexe. $\square$

***Théorème* 2.3.2.**

Soit $u \in E^n$, alors ce qui suit est vérifiée

$$[u]^\alpha \in K_c^n, \text{ pour tout } 0 \leq \alpha \leq 1, \tag{2.3.1}$$

$$[u]^{\alpha_2} \subset [u]^{\alpha_1}, \text{ pour } 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1, \tag{2.3.2}$$

si $(\alpha_k)_k$ est une suite croissante convergent vers α alors

$$[u]^\alpha = \bigcap_{k \geq 1} [u]^{\alpha_k}. \tag{2.3.3}$$

Inversement, si $\{A^\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1\}$ est une famille de sous ensembles de $\mathbb{R}^n$ satisfaisant (2.3.1) *et* (2.3.3) *alors il existe $u \in E^n$ tel que*

$$[u]^\alpha = A^\alpha \text{ pour tout } 0 < \alpha \leq 1 \tag{2.3.4}$$

$$[u]^0 = \overline{\bigcup_{0 < \alpha \leq 1} A^\alpha} \subset A^0. \tag{2.3.5}$$

Démonstration.

Montrons que $[u]^\alpha \in K_c^n$, pour tout $0 \leq \alpha \leq 1$.

On a $u \in E^n$, d'après (3) dans la définition2.3.1 , $[u]^\alpha$ *est compact* et d'après (4) dans la définition 2.3.1, u est convexe, donc d'après le lemme 2.3.1, $[u]^\alpha$ est convexe flous.

Alors

$$[u]^\alpha \in K_c^n$$

Montrons que $[u]^{\alpha_2} \subset [u]^{\alpha_1}$ pour tout $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$. Soit $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ tels que $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\forall x \in [u]^{\alpha_2} &\Longleftrightarrow u(x) \geq \alpha_2 \geq \alpha_1 \\
&\Longrightarrow x \in [u]^{\alpha_1} \\
&\Longrightarrow [u]^{\alpha_2} \subset [u]^{\alpha_1}.
\end{aligned}$$

Montrons que $[u]^\alpha = \underset{i\geq 1}{\cap} [u]^{\alpha_i}$.

Posons $[u]^0 = \overline{\underset{0<\alpha\leq 1}{\cup} u^\alpha}$.

On a $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ (u *est normal*), et on a $[u]^\alpha$ est un compact de $\mathbb{R}^n$, et la suite $(\alpha_i)_i \subset I$ est croissante et convergente vers $\alpha \in I$

on a

$$[u]^\alpha = \underset{i\geq 1}{\cap} [u]^{\alpha_i}.$$

En effet, comme (α_i) est croissante on a

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 ... \leq \alpha_i \leq ... \leq \alpha,$$

alors

$$[u]^\alpha \subset ...[u]^{\alpha_2} \subset [u]^{\alpha_1},$$

donc

$$[u]^\alpha = \underset{i\geq 1}{\cap} [u]^{\alpha_i}.$$

Montrons la réciproque.

Pour $x \in A^0$ on définit

$$I_x = \{\alpha \in I, x \in A^\alpha\}.$$

Soit $\alpha_0 = \sup I_x$ donc

$$I_x = [0, \alpha_0].$$

Si $\alpha_0 > 0$, soit $\beta \in (0, \alpha_0)$, alors il existe $\beta_1 \in [\beta, \alpha_0)$, tels que $\beta_1 \in I_x$ c'et à dire ; $x \in A^{\beta_1}$, *donc* $x \in A^\beta$. En d'autres termes, $\beta \in I_x$, alors $(0, \alpha_0) \subset I_x$ et on a $0 \in I_x$. Donc

$$[0, \alpha_0) \in I_x.$$

Soit $(\alpha_i)_i \subset I_x$ est une suite qui converge vers α_0 croissante, alors $x \in A^{\alpha_i}$ pour $i = 1, 2, ...(\alpha_i \in I_x)$

$$\begin{aligned} \alpha_i \in I_x &\Longrightarrow x \in A^{\alpha_i}, \forall i \in \mathbb{N}^* \\ &\Longrightarrow x \in \bigcap_{i \geq 1} A^{\alpha_i} = A^{\alpha_0} \\ &\Longrightarrow \alpha_0 \in I_x \ . \end{aligned}$$

Donc

$$[0, \alpha_0] \subseteq I_x \tag{2.3.6}$$

d'autre parts $\beta \in I_x$, alors $\beta \leq \alpha_0 = \sup I_x$, d'où $\beta \in [0, \alpha_0]$, donc

$$I_x \subset [0, \alpha_0] \tag{2.3.7}$$

D'ou (2.3.6) et (2.3.7) on a

$$I_x = [0, \alpha_0].$$

Soit $\alpha \in [0, 1]$, si $x \in [u]^\alpha$ alors

$$u(x) \geq \alpha > 0.$$

Par suite comme $x \in A^0$ (par hypothèse), alors

$$u(x) = \sup I_x = \alpha_0 \geq \alpha.$$

D'où

$$x \in A^{\alpha_0},$$

d'après (2.3.2) car $\alpha \leq \alpha_0$ on a

$$A^{\alpha_0} \subset A^{\alpha}.$$

Donc $x \in A^{\alpha}$.

Enfin,

$$[u]^{\alpha} \subset A^{\alpha}.$$

Inversement :

Si $x \in A^{\alpha}$ alors

$$u(x) = \sup I_x = \alpha_0 \geq \alpha,$$

par conséquent

$$x \in [u]^{\alpha}.$$

Alors

$$A^{\alpha} \subseteq [u]^{\alpha}.$$

Donc

$$[u]^{\alpha} = A^{\alpha},$$

pour tout $\alpha \in [0, 1]$.

Aussi on a

$$\begin{aligned} [u]^0 &= \overline{\bigcup_{0<\alpha\leq 1} u^{\alpha}} \\ &= \overline{\bigcup_{0<\alpha\leq 1} A^{\alpha}}, \end{aligned}$$

et u est semicontinue supérieurement (s.c.s) car $[u]^{\alpha}$ est fermé.

De plus, $[u]^0$ est compact donc bornée, et il est aussi convexe .

D'où u satisfait les hypothèse voulues sauf la convexité.

Montrons que u est convexe.

Soit $x, y \in [u]^{\alpha}$ avec $\min[u(x), u(y)] = \gamma \geq \alpha$ alors $x, y \in [u]^{\gamma}$, qui est convexe et donc

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in [u]^{\gamma},$$

pour tout $\lambda \in [0,1]$, d'où :

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \gamma = \min[u(x), u(y)].$$

Donc u est flous convexe, par conséquent $u \in E^n$ □

***Proposition* 2.3.1.**

Si $A \in K_c^n$, alors $\chi_A \in E^n$

***Théorème* 2.3.3.**

Soit $\{A_k\}$ une suite dans $P_k(\mathbb{R}^n)$ convergent vers A, telle que $d_H(A_k, A) \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow \infty$, alors

$$A = \bigcap_{k\geq 1} \overline{[\bigcup_{m\geq k} A_m]}.$$

***Remarque* 2.3.4.**

Dans le contexte des ensembles flous on appelle un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$, plus précisément sa fonction caractéristique χ_A, un sous ensemble croustillant de $\mathbb{R}^n$

***Définition* 2.3.2.**

L'endographe end(u) d'un ensemble flous $u \in E^n$ est défini par

$$end(u) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times I, u(x) \leq \alpha\}.$$

C'est un sous ensemble fermé non vide de $\mathbb{R}^n \times I$, se limitant aux points situés au dessus de l'ensemble support.

Le sendographe de u est définie par

$$send(u) = end(u) \cap ([u]^0 \times I). \tag{2.3.8}$$

qui est un sous ensemble compact non vide de $\mathbb{R}^n \times I$.

***Définition* 2.3.3.** *Soit $u, v \in E^n$, $c \in E^n \backslash \{0\}$ on définit l'addition et multiplication scalaire d'ensembles flous dans E^n, respectivement par*

$$[u+v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha, \tag{2.3.9}$$

et

$$[cu]^\alpha = c[u]^\alpha \text{ pour chaque } \alpha \in I. \tag{2.3.10}$$

***Proposition* 2.3.2.**

L'espace E^n est un fermé muni des opérations d'addition (2.3.9)*et multiplication scalaire* (2.3.10)

Démonstration.

Pour la démonstration de la proposition on applique le théorème 2.3.2 aux familles des sous ensembles $\{[u+v]^\alpha, \alpha \in I\}$ et $\{[cu]^\alpha, \alpha \in I\}$.

les propriétés (2.1.1) et (2.2.2) découlent de $\{[u]^\alpha, \alpha \in I\}$ et $\{[v]^\alpha, \alpha \in I\}$, et les définition (2.2.8)et (2.2.9)et la fermeture de $\mathcal{K}_c^n$(sous addition et multiplication par un scalaire), on a $[u]^\alpha, [v]^\alpha \in K_c^n$.

$0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 < 1$ alors $[u]^{\alpha_2} \subset [u]^{\alpha_1}$, donc

$$[u]^{\alpha_2} + [v]^{\alpha_2} \subset [u]^{\alpha_1} + [v]^{\alpha_1}.$$

D'après (2.2.7)on a

$$[u+v]^{\alpha_2} \subset [u+v]^{\alpha_1}.$$

Aussi, $[u]^\alpha$ et $[v]^\alpha$ sont compacts alors $[u+v]^\alpha$ est compact.

Soit (α_i) est une suite croissante dans I convergent vers α d'après la proposition 1.1.5

$$\begin{aligned} d_H([u+v]^{\alpha_i}, [u+v]^\alpha) &= d_H([u]^{\alpha_i} + [v]^{\alpha_i}, [u]^\alpha + [v]^\alpha) \\ &\leq d_H([u]^{\alpha_i}, [u]^\alpha) + d_H([v]^{\alpha_i} + [v]^\alpha). \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $n \longrightarrow \infty$, on a

$$d_H([u+v]^{\alpha_i}, [u+v]^\alpha) \longrightarrow 0.$$

D'autre pars on a

$$d_H([cu]^{\alpha_i}, [cu]^\alpha) = \mid c \mid d_H([u]^{\alpha_i}, [u]^\alpha).$$

Alors par passage à la limite quand $n \longrightarrow \infty$

$$d_H([cu]^{\alpha_i}, [cu]^\alpha) \longrightarrow 0.$$

□

***Définition* 2.3.4.** *On définit l'addition et la multiplication scalaire des ensembles flous par*

$$(u \tilde{+} v)(z) = \sup_{z=x+y} \min\{u(x), v(y)\}, \tag{2.3.11}$$

et

$$(\tilde{cu})(x) = u(x \backslash c). \tag{2.3.12}$$

Dans E^n, ce-ci est équivalent aux définition des l'ensembles de niveaux (2.3.11)*et*(2.3.12) *respectivement.*

***Proposition* 2.3.3.**

Soient $u, v \in E^n$ et $c \in \mathbb{R}^*$,alors

$$u \tilde{+} v = u + v, \tag{2.3.13}$$

et

$$\tilde{cu} = cu. \tag{2.3.14}$$

***Définition* 2.3.5.**

Soit $u \in E^n$ on définie $S_u : I \times \mathcal{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$S_u(\alpha, p) = S(p, [u]^\alpha) = \sup\{< p, a >, a \in [u]^\alpha\}, \tag{2.3.15}$$

pour $(\alpha, p) \in I \times \mathcal{S}^{n-1}$, où $S(., [u]^\alpha)$ est la fonction support de $[u]^\alpha$.

On appelle S_u la fonction support de l'ensemble flou u .

***Remarque* 2.3.5.** *Le supremum en*(2.3.15)*est atteint puisque l'ensemble de niveau $[u]^\alpha$ est compact et donc peut être remplacé par le maximum .*

De plus, pour $u, v \in E^n$, on a

$$u = v \ \textit{ si et seulement si } S_u = S_v,$$

car la fonction support sur K_c^n caractérise de manière unique les éléments de K_c^n.

***Proposition* 2.3.4.**

Soit $u \in E^n$ alors la fonction support S_u est

1) Uniformément bornée sur $I \times \mathcal{S}^{n-1}$.

2) Uniformément Lipschitzienne en $p \in \mathcal{S}^{n-1}$ sur I.

3) Pour chaque $\alpha \in I$

$$d_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) = \sup\{|S_u(\alpha, p) - S_v(\alpha, p)| : p \in \mathcal{S}^{n-1}\}. \tag{2.3.16}$$

Démonstration. 1) D'après la proposition 1.1.2

$$\begin{aligned} \mid S_u(\alpha, p) \mid &= \mid S(p, [u]^\alpha) \mid \\ &\leq \parallel [u]^\alpha \parallel \parallel p \parallel \\ &\leq \parallel [u]^0 \parallel . \end{aligned}$$

Donc S_u est bornée.

2) puisque $[u]^\alpha \subseteq [u]^0$ et $\parallel p \parallel = 1$ et d'après la proposition 1.1.2

$$\begin{aligned} \mid S_u(\alpha, p) - S_u(\alpha, q) \mid &= \mid S(p, [u]^\alpha) - S(q, [u]^\alpha) \mid \\ &\leq \parallel [u]^\alpha \parallel \parallel p - q \parallel \\ &\leq \parallel [u]^0 \parallel \parallel p - q \parallel . \end{aligned}$$

Donc S_u est uniformément lipschitzienne.

□

***Proposition* 2.3.5.** .

Soit $u \in E^n$, alors $S_u(., p)$est décroissante, continue à gauche eu $\alpha \in I$, pour tout $p \in \mathcal{S}^{n-1}$

Démonstration.

Puisque $[u]^\beta \subseteq [u]^\alpha$ pour $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$

$$\begin{aligned} S_u(\beta, p) &= S_u(p, [u]^\beta) \\ &\leq S_u(p, [u]^\alpha) \\ &= S_u(\alpha, p). \end{aligned}$$

Donc $S_u(., p)$ est décroissante pour tout $p \in \mathcal{S}^{n-1}$. De plus,pour une suite croissante α_i convergent vers α dans I, on a

$$d_H([u]^{\alpha_i}, [u]^\alpha) = \sup\{|S_u(\alpha_i, p) - S_u(\alpha, p)|; p \in S^{n-1}\}.$$

D'où

$$|S_u(\alpha_i, p) - S_u(\alpha, p)| \leq d_H([u]^{\alpha_i}, [u]^\alpha) \longrightarrow 0 \; quand \; i \longrightarrow \infty.$$

□

***Définition* 2.3.6.** *Un ensemble flou $u \in E^n$ est appelé ensemble lipschitzien flou si sa fonction de grade d'appartenance est Lipschitzienne, c'est à dire ;*

$$d_H([u]^\alpha, [u]^\beta) \leq k|\alpha - \beta|,$$

pour tout $\alpha, \beta \in I$ et k est constante fixé .

***Remarques* 2.3.1.**

a) D'après la proposition 2.2.4 la définition est équivalente à la Lipschitzité uniforme de la fonction support $S_u(., p)$ en $p \in S^{n-1}$.

b- Le sous ensemble E_c^n des sendographe convexe des ensemble flous est $\mathcal{R}^n \times I$ c'est à dire ; $u \in E_c^n$ si est seulement si $u : \mathcal{R}^n \longrightarrow I$ une fonction concave sur son support $[u]^0$, en d'autre terme si est seulement si

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda u(x) + (1 - \lambda)u(y),$$

pour tout $x, y \in [u]^0$et $\lambda \in [0, 1]$.

2.4 l'espace métrique (E^n, d)

Comme E^n est un espace de fonctions $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow I$ on peut donc le munir de la métrique sur E^n, c'est à dire ; la métrique d'espace fonctionnels

$$d(u, v) = \sup\{|u(x) - v(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}, \tag{2.4.1}$$

qui mesure la plus grande différence dans les grades d'appartenance des deux ensemble flous $u, v \in E^n$ sur tous les points x de l'espace de base $\mathbb{R}^n$. Notons que

$$d(cu, cv) = d(u, v),$$

pour tous $u, v \in E^n$ et $c \in \mathbb{R}^*$ où $cu \in E^n$ sont interprétés comme la multiplication scalaire d'ensemble flous (2.3.12), plutôt que la multiplication habituelle d'une fonction par un scalaire.

***Proposition* 2.4.1.**

Soit d_H la métrique de Hausdorff sur $\mathbb{R}^{n-1}$. Pour tout $u \in E^n$, le sendographe $send(u)$, défini par(2.3.8), est un sous ensemble convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n \times I \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

***Proposition* 2.4.2.** *La métrique de sendographe d_∞ sur E^n est definie en terme de la distance de Hausdorff sur le sous espace*

$$send(E^n) = \{send(u) : u \in E^n\}.$$

C'est à dire ;

$$D_\infty(u, v) = d_H(send(u), send(v)),$$

pour tout $u, v \in E^n$, D_∞ est une distance car on a pour tout $u, v \in E^n$

$$send(u) = send(v) \iff u = v$$

dans E^n.

***Remarque* 2.4.1.**

- *Les propriétés de la distance de Hausdorff d_H sur $\mathcal{K}^{n+1}$ nous donnent*

  $$D_\infty(u + w, v + w^{'}) \leq D_\infty(u, v) + D_\infty(w, w^{'}),$$

  pour tout $u, v, w, w^{'}$ et

  $$D_\infty(u + w, v + w) = D_\infty(u, v),$$

  pour tout $u, v \in E^n$et $w \in E^n_c$, avec $send(u)$ est convexe.

  Des métriques d'espaces de fonctions appliquées aux fonction $\Phi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$definies par

  $$\Phi(\alpha) = d_H([u]^\alpha, [v]^\alpha),$$

pour $\alpha \in I$, *où* $u, v \in E^n$.

Au vu de (2.3.16) *et de la proposition 2.3.5, ces fonctions sont continues à gauche et donc mesurables sur* I.

La distance de supremum d *sur* E^n *est définie par*

$$d(u, v) = \sup\{d_H([u]^\alpha), [v]^\alpha) : \alpha \in I\}, \tag{2.4.2}$$

pour tout $u, v \in E^n$ *est évidemment une distance sur* E^n.

Le supremum de (2.4.2) *n'est pas nécessairement atteint donc on ne peut pas le remplacer par le maximum .*

***Théorème* 2.4.1.**

(E^n, d) *est un espace métrique complet.*

Démonstration.

Soit $\{u_k\}$ une suite de Cauchy dans (E^n, d), alors $\{[u_k]^\alpha\}$ est une suite de Cauchy dans (K_c^n, d_H), pour tout $\alpha \in I$, qui est complet donc elle converge, c'est à dire ; il existe $\mathcal{C}_\alpha \in \mathcal{K}_c^n$, $\forall \alpha \in I$ telle que

$$d_H([u_k]^\alpha, \mathcal{C}_\alpha) \longrightarrow 0,$$

si $k \longrightarrow \infty$ cette convergence est uniforme pour tout $\alpha \in I$.

Montrons que la famille $\{\mathcal{C}_\alpha : \alpha \in I\}$ satisfait les conditions des (2.3.1) et (2.3.3) et qu'il existe $u \in E^n$ telle que $[u]^\alpha = \mathcal{C}_\alpha$ pour tout $\alpha \in I$.

On a $\mathcal{C}_\alpha \in \mathcal{K}_c^n, \forall \alpha \in I$, donc la condition (2.3.1) est satisfaite.

Considérons $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ alors

$$d_H^*(\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{C}_\beta) \leq d_H^*(\mathcal{C}_\alpha, [u]_k^\alpha) + d_H^*([u_k]^\alpha, [u_k]^\beta) + d_H^*([u_k]^\beta, \mathcal{C}_\beta).$$

Comme $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ alors $[u]^\alpha \subseteq [u]^\beta$, par suite

$$d_H^*([u_k]^\alpha, [u_k]^\beta) = 0,$$

D'ou

$$d_H^*(\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{C}_\beta) \leq d_H(\mathcal{C}_\alpha, [u]_k^\alpha) + d_H([u_k]^\beta, \mathcal{C}_\beta) \longrightarrow 0 \text{ si } k \longrightarrow \infty,$$

c'est à dire ;

$$d_H^*(\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{C}_\beta) = 0. \tag{2.4.3}$$

Puisque ces ensembles sont compacts, alors $\mathcal{C}_\alpha \subseteq \mathcal{C}_\beta$, donc la condition (2.3.2) est vérifiée.

Soit $\{\alpha_i\}$ une suite croissante dans I avec $\alpha_i \longrightarrow \alpha \in I$.

D'après (2.4.3) on a

$\mathcal{C}_\alpha \subseteq \mathcal{C}_{\alpha_i}$ pour $i = 1, 2, ...$ donc

$$\mathcal{C}_\alpha \subseteq \bigcap_{i \geq 1} \mathcal{C}_{\alpha_i}. \tag{2.4.4}$$

Soit $x \in \bigcap_{i \geq 1} \mathcal{C}_{\alpha_i}$, alors $x \in \mathcal{C}_{\alpha_i}$ pour $i = 1, 2, ...$

Par suite

$$\begin{aligned} d_H^*(\{x\}, \mathcal{C}_\alpha) &\leq d_H^*(\mathcal{C}_{\alpha_i}, \mathcal{C}_\alpha) \\ &\leq d_H^*(\mathcal{C}_{\alpha_i}, [u_k]^{\alpha_i}) + d_H^*([u_k]^{\alpha_i}, [u_k]^\alpha) + d_H^*([u_k]^\alpha, \mathcal{C}_\alpha) \ \longrightarrow 0 \ quand \ k \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

On a alors, les première et le troisième terme converge uniformément en α quand $k \longrightarrow \infty$.

Ainsi

$$x \in \mathcal{C}_\alpha$$

et

$$\bigcap_{i \geq 1} \mathcal{C}_{\alpha_i} \subseteq \mathcal{C}_{\alpha_i}$$

$$\bigcap_{i \geq 1} \mathcal{C}_{\alpha_i} \subset \mathcal{C}_\alpha. \tag{2.4.5}$$

D'ou (2.4.4) et (2.4.5) donnent

$$\mathcal{C}_\alpha = \bigcap_{i \geq 1} \mathcal{C}_{\alpha_i},$$

et ainsi la condition(2.3.1) du théorème**??** est vérifiée .

Appliquons le théorème 2.3.2, alors il existe $u \in E^n$ telle que $[u]^\alpha = \mathcal{C}_\alpha$ pour $\alpha \in I$.

De plus, il existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $j, k \geq N(\epsilon)$ on a

$$\begin{aligned} d_H([u_k]^\alpha, [u]^\alpha) &\leq d_H([u_k]^\alpha, [u_j]^\alpha) + d_H([u_j]^\alpha, [u]^\alpha) \\ &\leq d(u_k, u_j) + d_H([u_j]^\alpha, [u]^\alpha), \end{aligned}$$

pour tous $j, k \geq N(\epsilon)$, puisque $\{u_k\}$ est une suite de Cauchy dans (E^n, d).

Alors en passant à la limite quand $j \longrightarrow \infty$ alors

$$d_H([u_j]^\alpha, [u]^\alpha) \longrightarrow 0.$$

Par suite

$$d_H([u_k]^\alpha, [u]^\alpha) \leq \epsilon,$$

pour tout $k \geq N(\epsilon)$ uniformément par rapport à $\alpha \in I$ alors

$$d(u_k, u) \leq \epsilon,$$

pour tout $k \geq N(\epsilon)$.

Par conséquent (u_k) converge vers u dans (E^n, d). Donc (E^n, d) est complet. $\square$

CHAPITRE 3

LES INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES FLOUS

Dans ce dernier chapitre nous introduisons quelques résultats sur la mesurabilité, la différentiabilité et l'intégrabilité des fonctions flous, dans la deuxième section nous énonçons un théorème sur l'équivalence des solutions ordinaires et générales d'une inclusion différentielle de la forme

$$x' \in F(t,x), \qquad x(t_0) = x_0,$$

où $F : I \times E^n \longrightarrow comp(E^n), t_0 \in I, x_0 \in E^n$ [4].
Le contenue du chapitre à été pris des référence [1],[2],[3],[4].

3.1 Quelques résultats sur les Fonctions Floues

3.1.1 Mesurabilité

Nous discuterons $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact

***Définition* 3.1.1.** *Une application $f : I \longrightarrow E^n$ est dit absolument continue sur I si il existe une application intégrable $g : I \longrightarrow E^n$ telle que*

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} g(s)ds, t_0 \in I$$

pour tout $t \in I$.

Notons $comp(E^n)$ $(conv(E^n))$ la famille de tous les sous ensemble de l'espace E^n telles que pour tout $\alpha \in [0,1]$, les ensembles de niveau α sont une partie non vide compacte (et convexe) de K^n (K_c^n). On muni $comp(E^n)$ $(conv(E^n)$ de la distance

$$d_H(A,B) = \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a,b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a,b)\}.$$

On définit aussi la distance de l'élément $x \in E^n$ à l'ensemble $A \in comp(E^n)$ par

$$\rho(x,A) = \min_{a \in A} d(x,a).$$

***Définition* 3.1.2.** *Une multi application $F : I \longrightarrow comp(E^n)$ est dite mesurable dans I si l'ensemble $\{t \in I : F(t) \cap G \neq \varnothing\}$ est mesurable pour tout $G \in comp(E^n)$.*

***Définition* 3.1.3.** *Une multi-application $F : I \longrightarrow comp(E^n)$ est dite continue dans I au point $t_0 \in I$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $d_H(F(t), F(t_0)) < \varepsilon$ chaque fois que $|t - t_0| < \delta, t \in I$.*

***Définition* 3.1.4.** *L'application $f : I \longrightarrow E^n$ est fortement mesurable si pour tout $\alpha \in [0,1]$ l'application à valeurs fixés $F_\alpha : I \longrightarrow comp(E^n)$ définie par*

$$F_\alpha(t) = [f(t)]^\alpha,$$

est (Lebesgue) mesurable, lorsque $comp(E^n)$ est muni de la topologie engendrée par la distance de Hausdorff d_H.

***Définition* 3.1.5.** *Une application $f : I \longrightarrow E^n$est dite mesurable, si pour tout $\alpha \in [0,1]$ la multi-application $F_\alpha(t) = [f(t)]^\alpha$ est Lebesgue mesurable.*

***Définition* 3.1.6.** *Une application $f : I \longrightarrow E^n$ est dite continue au point $t_0 \in I$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que $d(f(t), f(t_0)) < \varepsilon$ à chaque fois que $|t - t_0| < \delta, t \in I$*

3.1.2 Différentiabilité

***Définition* 3.1.7.** *Différence de Hukuhara*

Soit $x, y \in E^n$, s'il existe $z \in E^n$ tq $x = y + z$ alors on appelle z la différence H de x,y, notée $x - y$.

***Définition* 3.1.8.** *Une application $F : I \longrightarrow E^n$ est Hukuhara dérivable en $t_0 \in I$ si il existe un $F'(t) \in E^n$ tel que les limites $\lim_{h\to 0^+} \frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h}$ et $\lim_{h\to 0^+} \frac{F(t_0)-F(t_0-h)}{h}$ existent et sont égale à $F'(t_0)$.*

***Remarque* 3.1.1.** *Ici la limite est prise dans l'espace métrique (E^n, d), aux extrémités de I, on ne considère que les dérivées unilatérales.*

***Théorème* 3.1.2.** *Soit $F : I \longrightarrow E^n$ satisfaisant les hypothèses*

a) pour tout $t \in F : I$, il existes $\alpha, \beta > 0$ tel que les différences

$$F(t+h) - F(t) \text{ et } F(t) - F(t-h)$$

existent pour tout $0 \leqslant h < \beta$.

b) La multi-applications $F_\alpha, \alpha \in [0,1]$, sont uniformément Hukuhara différentiable de dérivée DF_α, i.e ;

pour chaque $t \in I$ et $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$D_H\Big(\frac{F_\alpha(t+h) - F_\alpha(t)}{h}, D(F_\alpha(t)\Big) < \epsilon,$$

et

$$D_H\Big(\frac{F_\alpha(t) - F_\alpha(t-h)}{h}, DF_\alpha(t)\Big) < \epsilon,$$

pour tout $0 \leq h < \delta$ et $\alpha \in [0,1]$.

Alors, F est différentiable

***Définition* 3.1.9.** *Une application $F : I \longrightarrow E^n$ est dite différentiable au point $t \in I$ si pour tout $\alpha \in [0,1]$ la multi-application F_α est Hukuhara différentiable au point t et la famille $\{D_H f_\alpha(t) : \alpha \in [0,1]\}$, définie un nombre flous $f^{'}(t) \in E^n$ qui est dit la dérivée floue de f.*

3.1.3 Intégrabilité

***Définition* 3.1.10.** *Une multi -application $F : I \longrightarrow comp(E^n)$ sur I on définit l'intégral de F par*

$$\int_I F(t)dt = \{\int_I f(t)dt : f(t) \in F(t)\},$$

presque partout sur I.

***Définition* 3.1.11.** *L'élément $g \in E^n$ est dit l'intégrale de $f : I \longrightarrow E^n$ sur I si*

$$[g]^\alpha = (A)\int_I f_a(t),$$

pour tout $\alpha \in [0,1]$, est A es l'intégrale de Aumann.

***Définition* 3.1.12.** *Une application $F : I \longrightarrow E^n$ est dite intégrablement bornée s'il existe une fonction intégrable h telle que*

$$\|x\| \leq h(t) \quad pourtout\ x \in F_0(t).$$

***Définition* 3.1.13.** *Soit $F : I \longrightarrow E^n$, l'intégrale de Fsur I notée*

$$\int_I F(t)dt \quad ou \quad \int_a^b F(t)dt,$$

est définie par niveau de l'équation

$$\int_I F(t)dt = \int_I F_\alpha(t)dt,$$

pour tout $\quad 0 < \alpha \leqslant 1.$

***Théorème* 3.1.3.** *Soint $F : I \longrightarrow E^n$ une application fortement mesurable et intégrable bornée alors F est intégrable.*

***Théorème* 3.1.4.** *Soit $F : I \longrightarrow E^n$ une application intégrable et $s, t \in T$ alors*

$$d\Big(\int_a^s F, \int_a^t F\Big) = d\Big(\int_t^s F, \widehat{0}\Big).$$

***Théorème* 3.1.5.** *Soit $F, G : I \longrightarrow E^n$ deux fonctions intégrables et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors* *(i)* $\int (F+G) = \int F + \int G.$

(i) $\int \lambda F = \lambda \int F.$

(iii) $d(F,G)$ *est intégrable.*

(iv) $d(\int F, \int G) \leqslant \int d(F,G).$

3.2 Inclusions différentielles flous

Considérons l'inclusion différentielle floue

$$x' \in F(t,x), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{3.2.1}$$

Où $F : I \times E^n \longrightarrow comp(E^n), t_0 \in I, x_0 \in E^n$.

***Définition* 3.2.1.** *Une application absolument continue $x(.)$ est appelée solution ordinaire de l'inclusion différentielle* (3.2.1) *si $x'(t) \in F(t,x(t))$ presque partout sur I.*
Notons $O(F)$ l'ensemble de toutes les solutions ordinaires de l'inclusion différentielle (3.2.1)

***Définition* 3.2.2.** *Une application $x(.)$ est appelée solution générale de l'inclusion différentielle (3.2.1) si l'inclusion intégrale satisfait*

$$x(t'') \in x(t') + \int_{t'}^{t''} F(t,x(t))dt \tag{3.2.2}$$

pour tout $t', t'' \in I$ *telsque* $t' < t''$.

Notons $G(F)$ l'ensemble de toutes les solutions générales de l'inclusion différentielle (3.2.1)

***Définition* 3.2.3.** *Une multi-application $F : I \times D \longrightarrow comp(E^n), D \subset E^n$ satisfait les conditions de Caratheodory si*

1) *Pour chaque $x \in D$ fixé, la multi- application $F(.,x)$ est mesurable sur l'intervalle I.*

2) *Pour presque tout $t \in I$ fixé, la multi- application $F(t,.)$ est continue sur D.*

3) *Il existe une fonction Lebesgue mesurable de $m : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $d(F(t,x), \{\widehat{0}\}) \leq m(t)$ pour presque tout $(t,x) \in I \times D$.*

***Lemme* 3.2.1.** *Soit la multi-application $F : I \times D \longrightarrow comp(E^n)$ qui satisfait les conditions de Caratheodory, soit $\varphi : I \longrightarrow D$ une application mesurable. Alors la multi-application $F(t, \varphi(t))$ est mesurable sur I.*

***Théorème* 3.2.1.** *Soit $F : I \times D \longrightarrow comp(E^n)$ une multi-application satisfaisant les conditions de Caratheodory, alors*

$$O(F) = G(F).$$

Démonstration.

Soint $x(.) : I \longrightarrow D$ une solution ordinaire de l'inclusion (3.2.1).

posons $\mathit{\Phi}(t) = F(t, x(t))$, alors la multi-application $\mathit{\Phi} : I \longrightarrow conv(E^n)$ est mesurable d'après le lemme3.2.1

Donc $x(.)$ est absolument continue sur I et $x'(t) \in \Phi(t)$ presque pour tout $t \in I$. De plus,

$$D(x'(t), \widehat{0}) \leq d(\Phi(t), \{\widehat{0}\}) \leq m(t).$$

Donc $x'(.)$ est une sélection mesurable de la multi-application $\mathit{\Phi}(.)$. En utilisant la définition de l'intégrale, nous avons

$$\int_{t'}^{t''} x'(t)dt \in \int_{t'}^{t''} \Phi(t)dt,$$

pour tout $t', t'' \in I$ tq $t' < t''$, ce qui est équivalent à

$$x(t'') - x(t') \in \int_{t'}^{t''} \Phi(t)dt, \ pour \ \ tout, \ t't'' \in I \ tq \ t' < t'',$$

c'est à dire ;

$$x(t'') \in x(t') + \int_{t'}^{t''} \Phi(t)dt, \ pourtout \ \ t', t'' \in I \ tq \ t' < t''.$$

Donc $x(.)$ est une solution généralisée de l'inclusion (3.2.1), i.e. ;

$$O(F) \subset G(F).$$

Montrons l'inclusion inverse.

Soit $x(.)$ une solution générale de l'inclusion(3.2.1), alors

$x(.)$ est continue et

$$x(t'') \in x(t') + \int_{t'}^{t''} F(t, x(t))dt,$$

pour tout $t', t'' \in I$, tel que $t' < t''$.

En utilisant les propriétés de l'intégrale des multi-applications, nous avons

$$\begin{aligned} d(x(t''), x(t')) &\leq d\Big(\int_{t'}^{t''} F(s, x(s))ds, \{\widehat{0}\}\Big) \\ &\leq \int_{t'}^{t''} d\Big(F(s, x(s)), \{\widehat{0}\}\Big)ds \\ &\leq \int_{t'}^{t''} m(s)ds \\ &= \varphi(t") - \varphi(t'). \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

pour tout $t', t'' \in I \ tq \ t' < t''$.

Considérons la fonction $\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} m(s)ds$. Comme $m(.)$ est mesurable sur I, alors $\varphi(.)$ est absolument continue sur I. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tel que pour tout $m \in N$ et tout $t'_i < t''_i$, $i = \overline{1, m}$, on a

$$\sum_{i=1}^{m} (t''_i - t'_i) < \delta,$$

alors

$$\sum_{i=1}^{m} (\varphi(t''_i) - \varphi(t'_i)) < \varepsilon.$$

En utilisant (3.2.3), nous avons

$$\sum_{i=1}^{m} d(x(t''_i), x(t'_i)) < \sum_{i=1}^{m} (\varphi(t''_i) - \varphi(t'_i)) < \varepsilon.$$

De plus, pour tout t', t'' il existe $r(t', t'') \in E^n$ tel que

$$x(t'') = x(t') + r(t', t''),$$

nous savons que l'application $x(t)$ est absolument continue et qu'il existe $x(t'') - x(t')$ pour tout t'', t' tq $t'' > t'$.

En utilisant les propriétés de la distance nous obtenons

$$\begin{aligned}
0 &\leq \rho\Big(x'(t), F(t,x(t)\Big) \\
&\leq D\Big(x'(t), (\frac{1}{\eta})(x(t+\eta)-x(t)\Big) + d\Big(\frac{1}{\eta}\int_t^{t+\eta} F(s,x(s))ds, F(t,x(t)\Big) \\
&= A_1(t,\eta) + A_2(t,\eta),
\end{aligned}$$

pour tout $\eta > 0$ et $t \in I$.

On pose

$$A_1(t,\eta) = D\Big(x'(t), (\frac{1}{\eta})(x(t+\eta)-x(t)\Big) \tag{3.2.4}$$

L'application absolument continue $x(.)$ est différentiable presque partout , donc

$$A_1(t,\eta) \longrightarrow 0 \quad (*)$$

quand $\eta \searrow 0$ presque pour tout t , on a

$$\begin{aligned}
A_2(t,\eta) =& d\Big(\frac{1}{\eta}\int_t^{t+\eta} F(s,x(s)ds, F(t,x(t))\Big) \\
&= d\Big(\frac{1}{\eta}\int_t^{t+\eta} F(s,x(s)ds, \frac{1}{\eta}\int_t^{t+\eta} F(t,x(t))ds\Big) \\
&\leq \frac{1}{\eta}\int_t^{t+\eta} d\big(F(s,x(s)), F(t,x(t))\big)ds \longrightarrow 0 \ \ quand \ \ \eta \downarrow 0. \qquad (**)
\end{aligned}$$

D'après $(*)$ et $(**)$ on a

$\rho(x'(t), F(t,x(t)) = 0$ presque par tout, c'est à dire $x'(t) \in F(t,x(t))$ presque par tout en fin $x(t)$ est une solution ordinaire .

□

BIBLIOGRAPHIE

[1] **D. Azzam-Laouir**, Polycopie cours d'analyse multivoque. **Laboratoire de Mathématique pures et Appliquées, Université Mohamed Seddik Ben Yahia, De Jijel (2008).**

[2] **V. Lakshmikantham** and **R.N. Mohapatra**, Theory of Fuzzy Differential Equations and Inclusions. Taylor and Francis, London and New york, (2003).

[3] **H.T. Nguyen**. Anote on extension principle for fuzzy sets. J.Math Anal. Appl. 64 (1978), 369-80.

[4] **A.V. Plotnikov** and **N.V. Skripnik**, The generalized solution of the fuzzy differential inclusions. Internationl Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 56 No. 2 (2009), 165-172.

[5] **L.A. Zadeh**, Fuzzy sets, Inf. Control 8 (1965), 388-353.