République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre :
№ de séries :

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Théorèmes d'existence et de relaxation pour des inclusions différentielles non bornées dans un espace de Banach

Présenté par :

- **Boudjerida Nouha**
- **Dib Karima**

Soutenu le **06 / 07 / 2019**

Devant le jury :

Président :	W. Boukrouk	MCB.	Université de Jijel
Encadreur :	A. Makhlouf	MCB.	Université de Jijel
Examinateur :	I. Boutana	MCB.	Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

Remerciements

Avant tous, nous remercions Allah le tout puissant qui nous a guidé tout au long de notre vie, qui nous a permis de nous instruire et d'arriver aussi loin dans les études, qui nous a donné courage et patience pour traverser tous les moments difficiles, et qui nous a permis d'achever ce travail.

C'est avec un grand honneur que nous remercions notre enseignante et directrice Madame ***Amira Makhlouf***, Maitre de conférence à l'université de Jijel, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter nos réflexions.

Nous tenons à remercier Madame ***W. Boukrouk***, Maitre de conférence à l'université de Jijel, d'avoir accepté la présidence du jury de notre travail, qu'il trouve ici toutes nos expressions respectueuses.

Nous remercions également Madame ***I. Boutana*** Maitre de conférence à l'université de Jijel, de nous avoir fait l'honneur de faire partie des membres du jury et d'examiner ce travail. Nous tenons à vous remercier.

Nos remerciements les plus sincères s'adressent à nos familles pour leur soutien sans faille et pour l'équilibre qu'elles nous ont apporté et pour leurs encouragements.

Enfin, nous voulons remercier toutes les personnes qui ont contribué de loin ou de prés à l'avancement de ce travail, nos enseignants et collégues à l'université de Jijel.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction **iii**

1 Notations et préliminaires **1**

1.1 Notations générales 1

1.2 Quelques notions sur la mesurabilité 2

1.3 Fonction intégrable au sens de Bochner 4

1.4 Ensembles convexes 6

1.5 Fonctions absolument continues 7

1.6 Multi-applications 8

1.6.1 Multi-applications et sélections 8

1.6.2 Mesurabilité des multi-applications 9

1.7 Distance de Hausdorff 12

2 Existence de solutions pour une inclusion différentielle du premier ordre **16**

3 Relaxation **37**

4 Exemple **48**

5 Existence de solutions pour une inclusion différentielle du second ordre 61

Conclusion 78

Bibliographie 79

INTRODUCTION

L'étude de problèmes de mathématiques ou de physique conduit souvent à la résolution d'équations et d'inclusions différentielles, d'où l'importance de cette branche en mathématiques.

Objectif du mémoire

Dans ce mémoire on s'intéresse à étudier l'existence de solutions pour certaines classes d'inclusions différentielles du premier ordre de la forme

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad p.p\ sur\ [0,1] \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

et pour l'inclusion différentielle convexifiée suivante

$$(\mathcal{P}_{\overline{co}F})\begin{cases} \dot{x}(t) \in \overline{co}F(t, x(t)), \quad p.p\ sur\ [0,1] \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où $F : T \times b\overline{B} \rightrightarrows E$ est une multi-application à valeurs fermées non bornées vérifiant certaines conditions, et à l'établissement de la relation entre les solutions de ces deux dernières inclusions. Aussi on s'intéresse à l'existence de solutions pour certaines classes d'inclusions différentielles du seconde ordre de la forme

$$(\mathcal{P}'_F)\begin{cases} \ddot{x}(t) \in F(t, x(t), \dot{x}(t)) \quad p.p\ sur\ [0,1] \\ \dot{x}(0) = 0,\ x(1) = 0, \end{cases}$$

où $F : T \times b\overline{B} \times b\overline{B} \rightrightarrows E$ est une multi-application à valeurs fermées non bornées vérifiant certaines conditions.

C'est quoi une inclusion différentielle ? (voir [11], [2] et [15])

Un grand élan pour étudier les inclusions différentielles est venu du développement de la théorie du contrôle, à savoir des systèmes dynamiques.

L'étude des phénomènes physiques, économiques, techniques, biologiques et en sciences médicales conduit souvent à la résolution des équations différentielles dépendant de quelques paramètres et se représentant sous la forme

$$(\mathcal{P}_f)\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & p.p\ sur\ [0,1] \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

contrôlées par les paramètres $u(t) \in U$, où U est l'ensemble des contrôles et $f : T \times E \times U \to E$ est une application univoque.

Par exemple pour contrôler

1. l'électricité ; $U = \{0, 1\}$ où 0 pour éteindre et 1 pour allumer,
2. le mouvement d'une voiture ; U sera l'ensemble composé du volent (direction), l'accélérateur (accélération) et le freins (freinage), les deux dernières contraintes se présentent sous forme de fonctions discontinues.

En général, le problème $(\mathcal{P}_f)$ n'admet pas de solutions au sens classique. Pour trouver une solution, l'idée était d'élargir le second membre, pour cela, a été considéré la multi-application $F : [0,1] \times E \rightrightarrows E$ définie par

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \{f(t,x,u),\ u \in U\} \\ &= \bigcup_{u \in U} f(t,x,u), \end{aligned}$$

et l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_F)$, alors les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{P}_f)$ sont des solutions de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_F)$ dans lequel les contrôles n'apparaissent pas explicitement.

L'équivalence entre $(\mathcal{P}_f)$ et $(\mathcal{P}_F)$ est l'idée centrale utilisée pour prouver les théorèmes d'existence dans la théorie du contrôle optimale.

L'inclusion différentielle est une généralisation de la notion d'équation différentielle ordinaire. Par conséquent, tous les problèmes envisagés pour les équations différentielles, à savoir l'existence de solutions, la continuation de solutions, la dépendance à des conditions et paramètres initiaux, sont présents dans la théorie des inclusions différentielles.

Puisqu'une inclusion différentielle comporte généralement de nombreuses solutions à partir d'un point donné, de nouveaux problèmes apparaissent, tels que l'investigation des propriétés topologiques de l'ensemble de solutions, la sélection de solutions à propriétés données, la relation entre l'ensemble de solutions du problème originale avec l'ensemble des solutions du problème convexifié, etc. Pour résoudre les problèmes ci-dessus, des techniques mathématiques spéciales ont été développées.

Ainsi, les inclusions différentielles ne sont pas seulement des modèles pour de nombreux processus dynamiques mais ils fournissent également un outil puissant pour diverses branches de l'analyse mathématique.

Méthodes topologiques

La littérature est cependant beaucoup moins volumineuse pour les inclusions différentielles et l'est encore moins pour les problèmes d'ordre supérieur voir par exemple [2].

Parmi les méthodes topologiques qui permettent d'obtenir l'existence de solution des inclusions différentielles de la forme

$$y'(t) \in F(t, y(t)) \quad p.pt \in T, y \in B,$$

et de la forme

$$y''(t) \in F(t, y(t), y'(t)) \quad p.p\ t \in T, y \in B,$$

où T est un intervalle compacte, F est une multi-application à valeurs non vides fermées où compactes et parfois convexes, et B désigne une condition initiale, périodique ou aux limites, on cite le théorème du point fixe de **Kakutani**, **Shauder**, **Nadler**, des méthodes de continuation, des théorème de sélection, d'approximation ou par méthode de construction, il est cependant important de mentionner que les arguments de preuve utilisés varient beaucoup suivant les hypothèses de continuités imposées à la multi-application F. Les trois plus fréquentes sont la semi-continuité supérieure, la semi-continuité inférieure et une condition de **Lipshitz**.

On prend comme exemple le mémoire de **Nesrine Bouhali** et **Radia Bouabdalah** sur **inclusion différentielle avec perturbation non bornée : théorème d'existence et de relaxation**, elles ont utilisées des hypothèses de mesurabilités et de continuités plus précisément la semi-continuités inférieure en raison de cela le principe d'existence de solution repose sur le théorème du point fixe de **Shauder**.

Alors que dans le présent mémoire, on va utilisée une autre méthode topologique pour assurer l'existence de solution de certaines classes d'inclusions différentielles du premier ordre et de second ordre : **la méthode de construction**.

Présentation du travail

On présente le travail de Tolstonogov [21], où il donne des théorèmes d'existence de solutions du problèmes $(\mathcal{P}_F)$ et $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$. Ainsi qu'une approximation des solutions de l'inclusion convexifiée $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$ par les solutions de l'inclusion $(\mathcal{P}_F)$.

Pour le cas où les valeurs de la multi-application F sont des ensembles non vides fermées et non bornées, nous avons une inclusion différentielle non bornées. Si les valeurs de F sont des ensembles fermés bornés, nous traitons une inclusion différentielle bornée.

Tolstonogov, dans son papier [21], s'est intéressé à l'existence de solutions des inclusions différentielles non bornées $(\mathcal{P}_F)$ et $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$, ainsi que l'approximation des solutions de $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$ par les solutions de $(\mathcal{P}_F)$. Cette propriété est généralement appelée la relaxation des solutions. L'existence pour les inclusions différentielles non bornées et la relaxation pour les inclusions différentielles bornées en dimension finie sont soigneusement étudiés à partir de l'article classique de Filippov [9]. L'hypothèse de base, à la fois dans [9] et dans la majorité des articles traitant la relaxation en dimension finie, est la condition de Lipschitz de F par rapport à la deuxième variable, c'est à dire

$$haus(F(t,x), F(t,y)) \leq k(t)\|x-y\| \tag{1}$$

$t \in [0,1]$, $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ où $haus$ est la distance de Hausdorff sur l'espace des ensembles non vides et fermés et $k(\cdot)$ est une fonction intégrable sur $[0,1]$.

Les premières preuves des théorèmes d'existence et de relaxation pour des solutions d'inclusions différentielles bornées dans les espaces de Banach dans le cas où (1) est vérifiée figurent dans [13]. Cette inégalité est parfaitement acceptable quand les valeurs de F sont des ensembles fermés bornés, mais elle devient inadmissiblement forte lorsque les valeurs de F sont des ensembles non bornés. Au même temps, la non bornétude des valeurs des multi-applications est une propriété très naturelle des inclusions différentielles apparaissant dans la théorie du contrôle optimal (voir [14]).

Organisation du mémoire

Ce mémoire se compose de quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux résultats préliminaires et outils de base utilisés pour la démonstration de nos théorèmes principaux.

Dans le chapitre 2, on présente une étude sur l'existence de solutions globales et locales de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_F)$, ainsi que l'existence de solutions pour l'inclusion $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$.

Dans le chapitre 3, nous donnons la preuve d'un théorème de relaxation associé à l'inclusion $(\mathcal{P}_F)$.

Le chapitre 4, comporte un exemple d'une multi-application F à valeurs fermées non vides pour laquelle l'inclusion $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$ admet une solution.

Les résultats de ces trois derniers chapitres sont pris de [21].

Finalement, dans Le cinquième chapitre, nous essayons de démontrer un théorème d'existence de solutions de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}'_F)$.

CHAPITRE 1

NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

On commence par ce chapitre, dans lequel nous précisons nos notations et nous rappelons certains définitions, propositions et théorèmes dont on aura besoin tout au long de ce mémoire.

1.1 Notations générales

On note

- $T = [0, 1]$ l'intervalle unité de $\mathbb{R}$.
- E un espace vectoriel.
- X un ensemble non vide.
- (X, τ) un espace topologique.
- (X, d) un espace métrique.
- (X, Σ) un espace mesurable.
- (X, Σ, μ) un espace mesuré.
- $\mathcal{L}(T)$ la tribu sur T des ensembles mesurables au sens de Lebesgue et dans ce cas μ est la mesure de Lebesgue.

  Soit X un espace topologique. On note

- $\mathcal{B}(X)$ la tribu Borélienne sur X.
- $\mathcal{P}_{cl}(X)$ l'ensemble des parties fermées de X.
- $X \backslash A$ le complémentaire de A dans X.

Soit E un espace de Banach, E' sont dual topologique, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ leur produit de dualité, $\| \cdot \|$ la norme de E et $\| \cdot \|_*$ la norme de E'. On note par

- $C(T, E)$ l'espace de Banach de toutes les applications continues définies sur T à valeurs dans E muni de la norme $\|f(\cdot)\|_C = \sup\limits_{t \in T} \|f(t)\|$.
- $C^1(T, E)$ l'espace de Banach des applications continument différentiables muni de la norme $\|f(\cdot)\|_{C^1} = \max\{f(\cdot), f'(\cdot)\}$.
- $L^1(T, E)$ l'espace de Banach de toutes les applications intégrables au sens de Bochner définies sur T à valeurs dans E muni de la norme $\|f(\cdot)\| = \int_T \|f(s)\| ds$.
- $co(A)$ l'enveloppe convexe de $A \subset E$.
- $\overline{co}(A)$ l'enveloppe convexe fermée de A.
- $AC^{1.1}(T, E)$ l'espace des applications absolument continues et dérivables $f : T \to E$ ayant une dérivée dans $L^1(T, E)$ presque partout.
- $S(F)$ l'ensemble de toutes les sélections mesurables de la multi-application $F : T \rightrightarrows E$.
- B la boule unité ouverte de E.
- $\overline{B}$ la boule unité fermée de E.
- $B(x, r) = x + rB$ la boule ouverte de E de centre x et de rayon r.
- $\overline{B}(x, r) = x + r\overline{B}$ la boule fermée de E de centre x et de rayon r.

1.2 Quelques notions sur la mesurabilité

Les résultats suivants sont pris de la références [3].

Définition 1.1 (La tribu borélienne).
Soit (X, τ) un espace topologique. On appelle tribu borélienne la tribu engendrée par τ, on la note $\mathcal{B}(X)$.
Les éléments de la tribu borélienne sont appelés ensembles boréliens.

Définition 1.2. *Soient (X_1, Σ_1), (X_2, Σ_2) deux espaces mesurables et f une application définie sur X_1 à valeurs dans X_2. On dit que f est (Σ_1, Σ_2)-**mesurable** si pour tout*

$A \in \Sigma_2$, $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$.
*Si X_2 est un espace topologique, une application $(\Sigma_1, \mathcal{B}(X_2))$-mesurable est dite **application Borélienne** ou Σ_1**-mesurable**.*

Proposition 1.1. *Soient X_1, X_2 deux espaces topologiques et $f : X_1 \to X_2$. Si f est continue alors $f : (X_1, \mathcal{B}(X_1)) \to (X_2, \mathcal{B}(X_2))$ est mesurable.*

Définition 1.3. *Soit (X, Σ) un espace mesurable. Alors l'application $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ est une **mesure** si*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$;*
2. *$\mu(\bigcup\limits_n A_n) = \sum\limits_n \mu(A_n)$, pour toute suite dénombrable (A_n) d'éléments de Σ deux à deux disjoints.*

- *Le triple (X, Σ, μ) est appelé **espace mesuré**.*
- *Si $\mu(A) \geq 0$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une **mesure positive** et on note $\mu \geq 0$, ou que l'espace (X, Σ, μ) est positif.*
- *Si $\mu(A) < \infty$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une **mesure finie** ou que l'espace (X, Σ, μ) est fini.*
- *Si X est un espace topologique, la mesure $\mu : \mathcal{B}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ est appelée **mesure Borélienne**.*

Définition 1.4. *Soit X un espace topologique séparé et μ une mesure Borélienne. Alors μ est dite régulière si pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert C et un fermé G de X, tels que $G \subset A \subset C$ et $\mu(C \backslash G) \leq \varepsilon$.*
*Une mesure borélienne finie et régulière est appelée mesure de **Radon**.*

Définition 1.5. *Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré et A un sous ensemble de X tel que $A \in \Sigma$. On dit que A est μ**-négligeable** ou **négligeable**, si $B \subset X$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.*

- On dit qu'une propriété sur X est vraie μ**-presque partout** (μ.p.p.), si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est μ-négligeable.
- La tribu μ-complète de Σ notée Σ_μ est la tribu engendrée par Σ et les ensembles μ-négligeables, c'est à dire
$$\Sigma_\mu = \{A \cup Z;\ A \in \Sigma \text{ et } Z \,\text{ensemble}\ \mu - \text{négligeable}\}.$$
- La tribu Σ est dite **complète** si $\Sigma = \Sigma_\mu$, c'est à dire, si tout ensemble μ-négligeable appartient à Σ.

Définition 1.6 (Tribu de Lebesgue).
La tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ *notée* $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ *est la tribu complétée de la tribu borélienne* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *pour la mesure de Lebesgue.*

Définition 1.7 (Fonction simple).
Soient (X, Σ) *un espace mesurable,* E *un espace de Banach et* $f : X \to E$*. On dit que* f *est une* ***application simple*** *si elle est de la forme*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{E_i}(x) y_i,$$

où les $E_i = f^{-1}(y_i),\ i \in \{1, \cdots, n\}$*, sont des éléments deux à deux disjoints de* Σ *et les* $y_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}$*, sont des éléments distincts de* E*.*
Cette formule est appelée ***la représentation canonique*** *de* f*.*

Proposition 1.2. *Soient* (X, Σ) *un espace mesurable et* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *une suite d'application mesurables définies sur* X *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*. Si* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *converge simplement vers* f *alors* f *est mesurable.*

Théorème 1.1. *Soit* (X, Σ, μ) *un espace mesuré fini et* E *un espace de Banach séparable. Si* $f : X \to E$ *est mesurable, alors il existe une suite* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *d'application simples telles que* $f_n \to f$ μ*-p.p, et pour* μ*-presque tout* $x \in E$ *,* $\|f_n(x)\| \leq \|f(x)\|$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*.*

1.3 Fonction intégrable au sens de Bochner

Les résultats suivants sont pris des références [10] et [18].
Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré fini et $(E, \|.\|)$ un espace de Banach .

Définition 1.8. *Une application mesurable* $f : X \to E$ *est dite* ***intégrable au sens de Bochner****, s'il existe une suite d'application simples* $(f_n)_n$ *telle que* $f_n \to f$ μ *p.p,* $\|f_n - f\|$ *est intégrable au sens de Lebesgue et*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \|f_n - f\| d\mu = 0,$$

où

$$\begin{aligned} \|f\| : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|f\|(x) = \|f(x)\|. \end{aligned}$$

On pose alors

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dans ce cas $\int_A f d\mu$ *est défini pour tout* $A \in \Sigma$ *par* $\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$.

Théorème 1.2. *Une application mesurable* $f : X \to E$ *est intégrable au sens de Bochner si et seulement si*

$$\int_X \|f\| d\mu < \infty.$$

Corollaire 1.1. *Si* $f : X \to E$ *est une application intégrable au sens de Bochner et* $A \in \Sigma$, *alors*

$$\|\int_A f(x) d\mu\| \leqslant \int_A \|f(x)\| d\mu.$$

Corollaire 1.2. *Si* $f, g : X \to E$ *sont deux applications intégrables au sens de Bochner telles que pour tout* $A \in \Sigma$, $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$, *alors*

$$f(x) = g(x) \quad pour \quad \mu - presque \quad tout \quad x \in X.$$

Théorème 1.3. *Soit* $f : X \to E$ *une application intégrable au sens de Bochner et soit* $G : E \to F$ *un opérateur linéaire continu, où* F *est un espace de Banach. Alors* Gf *est une application intégrable au sens de Bochner à valeurs dans* F, *et on a*

$$G(\int_X f(x) d\mu) = \int_X G f(x) d\mu.$$

En particulier, si $x' \in E'$ *et* $f : X \to E$ *est une application intégrable au sens de Bochner, alors* $x \mapsto \langle f(x), x' \rangle$ *est intégrable et*

$$\langle \int_X f(x) d\mu, x' \rangle = \int_X \langle f(x), x' \rangle d\mu.$$

Théorème 1.4 (Théorème de la convergence dominée).
Soit $f : X \to E$ *une application mesurable, et* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'applications mesurables de* X *dans* E *vérifiant*

$$f_n(x) \to f(x) \quad \mu\text{-presque partout sur } X.$$

S'il existe $h : X \to \mathbb{R}_+$ *Lebesgue intégrable telle que*

$$\|f_n(x)\| \leq h(x), \quad \mu\text{-presque partout sur } X, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*,$$

alors, f_n, $n \geq 1$ *et* f *sont Bochner intégrables et*

$$\int_X f(x) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu.$$

On note $\mathscr{L}^1(X,E)$ l'ensemble des applications mesurable f telle que $\|f\|$ est intégrable au sens de Lebesgue.
Si on note $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \to E$ telles que $f(x) = 0$ μ-p.p sur X, l'espace des classes d'équivalence $\mathscr{L}^1(X,E)\backslash\mathcal{N}$ est noté par $L^1(X,E)$ c'est un espace de Banach muni de la norme $\|f\|_1 = \int_X \|f(x)\|d\mu$.

Proposition 1.3. *Si $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy de $L^1(T,\mathbb{R}^n)$, alors il existe une sous suite $(f_{n_k})_k$ qui converge presque partout vers une fonction $f \in L^1(T,\mathbb{R}^n)$.*

Théorème 1.5. *Soit φ une fonction à valeurs réelles sur $V_s \times (E\backslash A)$ où V_s est un voisinage d'un point $s \in \mathbb{R}$, E un espace de Banach séparable, (E,Σ,μ) un espace mesuré fini et $A \subset E$ est un sous ensemble μ-négligeable.*
Si pour chaque $t \in V_s$, la fonction $x \mapsto \varphi(t,x)$ est intégrable sur E et si de plus, sur $V_s \times (E\backslash A)$ la fonction φ admet une dérivée partielle par rapport à t vérifiant l'inégalité $|\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)| \leq g(x)$, où g est μ-intégrable et indépendante de t, alors la fonction $t \mapsto \int_E \varphi(t,x)d\mu$ est dérivable au point s et l'on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_E \varphi(s,x)d\mu = \int_E \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,x)d\mu.$$

1.4 Ensembles convexes

Ces résultats sont pris des références [4] et [8].

Définition 1.9. *Soit E un espace vectoriel et soient $a, b \in E$.*
- *On appelle segment fermé d'extrémités a et b (ou tout simplement segment) que l'on note $[a,b]$, l'ensemble $\{\lambda a + (1-\lambda)b \quad \text{tel que} \quad \lambda \in [0,1]\}$.*
- *On appelle segment ouvert que l'on note $]a,b[$ l'ensemble $\{\lambda a+(1-\lambda)b$ tel que $\lambda \in]0.1[\}$.*

De la même manière on définit les segments $]a,b]$ et $[a,b[$.

Définition 1.10. *Une partie A de l'espace vectoriel E, est dite convexe si toutes les fois que deux points a, b appartient à A le segment $[a,b]$ est contenue dans A, i.e,*
$\lambda A + (1-\lambda)A \subset A, \forall\lambda \in [0,1]$, *ou encore* $\forall x, y \in A, \forall\lambda \in [0,1], \lambda x + (1-\lambda)y \in A$.
*On appelle **simplexe** de $\mathbb{R}^n$ le sous ensemble Δ_n, tel que*

$$\Delta_n = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_i \geq 0\ ,\ i = 1...n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Définition 1.11. *Soit E un espace vectoriel et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$. On appelle **combinaison convexe** des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tout élément x qui s'écrit comme* *suit*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \textit{tel que} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \Delta_n \, .$$

Proposition 1.4. *Soit E un espace vectoriel et soit $A \subset E$. Alors A est convexe si et seulement si n'importe quelle combinaison convexe des vecteurs de A est un vecteur de A.*

Définition 1.12. *Soit A un sous ensemble de l'espace vectoriel E. On appelle* ***enveloppe convexe*** *de A, qu'on note $co(A)$, l'intersection de tous les convexes de E contenant A. C'est en fait le plus petit convexe de E contenant A.*
Si E est un espace vectoriel topologique, on appelle ***enveloppe convexe fermée*** *de A qu'on note $\overline{co}(A)$, le plus petit convexe fermé de E contenant A.*

Proposition 1.5. *Soient E un espace vectoriel, $A, B \subset E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. $co(\alpha.A) = \alpha co(A)$.
2. $co(A + B) = co(A) + co(B)$.
   Si E un espace vectoriel topologique, alors
3. *Si A est un sous ensemble convexe de E alors $\overline{A}$ et $\mathring{A}$ le sont aussi.*
4. $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}$.
5. $\overline{co}(\alpha A) = \alpha \overline{co}(A)$.

Définition 1.13. *Soient E un espace normé et $J : E \to E''$. On dit que E est* ***réflexif*** *si $J(E) = E''$, c'est à dire, si J est bijective (on identifie alors E à E'' à l'aide de l'isomorphisme J).*

Proposition 1.6. *Soient E un espace de Banach réflexif, $A \subset E$ un convexe non vide fermé et $\phi : A \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe, s.c.i., $\phi \not\equiv +\infty$ telle que*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \phi(x) = +\infty.$$

Alors ϕ atteint son minimum sur A, i.e., il existe $x_0 \in A$ tel que $\phi(x_0) = \min_A \phi$.

1.5 Fonctions absolument continues

Les résultats suivants sont pris des références [5], [22] et [10].

Définition 1.14. *Une application f définie sur T à valeur dans un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$ est dite* ***absolument continue*** *si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\zeta > 0$ tel que pour* *toute famille finie d'intervalles ouverts deux à deux disjoints de T ; $(]a_i, b_i[)_{i\in\{1,\dots,n\}}$, nous avons*

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq \zeta \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \|f(b_i) - f(a_i)\| \leq \varepsilon\,.$$

Définition 1.15. *Soit E un espace de Banach. On définit*
$AC^{1,1}(T, E) = \{f : T \to E : f$ est absolument continue, dérivable presque partout avec $f' \in L^1(T, E)\}$.

Proposition 1.7. *Soient E un espace de Banach et $f : T \to E$. S'il existe une application $g \in L^1(T, E)$ telle que*

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)ds, \quad \forall\, t \in T.$$

Alors, $f \in AC^{1.1}(T, E)$ et $\dot{f}(t) = g(t)$ p.p sur T.

Proposition 1.8. *Soit $\varphi : T \to \mathbb{R}$ une fonction absolument continue, et $E = \{t \in T : \varphi(t) = 0\}$. Alors $mes(\{t \in T : \dot{\varphi}(t) \neq 0\}) = 0$, i.e., $\dot{\varphi}(t) = 0$ p.p sur E.*

1.6 Multi-applications

Dans cette section nous donnons quelques définitions et résultats qui concernent les multi-applications. Ces résultats sont pris des références [5], [12] et [20].

1.6.1 Multi-applications et sélections

Définitions 1.1. *Soient X, Y deux ensembles non vides. On appelle* ***multi-application*** *F définie sur X à valeurs dans Y toute application qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous ensemble $F(x)$ de Y, et on note $F : X \rightrightarrows Y$ ou $F : Y \to \mathcal{P}(Y)$.*

- *On appelle* **domaine** *(effectif) de la multi-application F qu'on note $dom(F)$, le sous ensemble de Y défini par*

$$D(F) := dom(F) = \{x \in X;\ F(x) \neq \emptyset\}.$$

- *On appelle* **graphe** *de F, qu'on note $gph(F)$, le sous ensemble de $X \times Y$ défini par*

$$gph(F) = \{(x, y) \in X \times Y;\ y \in F(x)\}.$$

- *On appelle* **image** *de F, qu'on note $Im(F)$, le sous ensemble de Y défini par*

$$Im(F) = \{y \in Y;\ \exists x \in X, y \in F(x)\}.$$

- *Si $A \subset X$, on appelle* **image** *de A par F qu'on note $F(A)$ le sous ensemble de Y défini par $F(A) = \underset{x\in A}{\cup} F(x)$, et on peut écrire*

$$F(A) = \{y \in Y \ ; \ \exists\, x \in A, y \in F(x)\}.$$

- *On définit la multi-application inverse $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ définie par*

$$x \in F^{-1}(y) \ \Leftrightarrow \ y \in F(x).$$

- *Pour tout $V \subset X$, on appelle* **image réciproque large** *de F, le sous ensemble défini par*

$$F^{-1}(V) = \{x \in X; \ F(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

- *Pour tout $V \subset X$, on appelle* **image réciproque étroite** *de F, le sous ensemble défini par*

$$F_{+}^{-1}(V) = \{x \in X; \ F(x) \subseteq V\}.$$

Définition 1.16. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle* ***sélection*** *de F toute application $f : dom(F) \to Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \forall\, x \in dom(F).$$

1.6.2 Mesurabilité des multi-applications

Définition 1.17. *Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application .*

1. *On dit que F est Σ-mesurable où mesurable, si pour tout ouvert V de Y*

$$F^{-1}(V) = \{x \in X : F(x) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

2. *On dit que F est fortement mesurable, si pour tout fermé W de Y*

$$F^{-1}(W) = \{x \in X : F(x) \cap W \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Proposition 1.9. *Si $F : X \rightrightarrows Y$ est fortement mesurable, alors F est mesurable.*

Proposition 1.10. *Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *F est Σ-mesurable.*

(ii) *Pour chaque $y \in Y$, la fonction $d_y : X \to \mathbb{R}$ définie par $d_y(x) = d(y, F(x))$ est Σ-mesurable.*

Proposition 1.11. *Si $F : X \rightrightarrows Y$ est mesurable ou fortement mesurable, alors dom(F) est mesurable.*

Proposition 1.12. *Soient X un espace topologique et Y un espace métrique séparable, alors la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ est mesurable si et seulement si $\overline{F} : X \rightrightarrows Y$ est mesurable.*

Théorème 1.6. *Soient (X, Σ) un espace mesurable et E un espace de Banach et soient $F : X \times E \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable et $u : X \to E$ une application Σ-mesurable. Alors, la multi-application $x \mapsto F(x, u(x))$ est mesurable.*

Définition 1.18. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, X et Y deux espaces métriques et soit $f : T \times X \to Y$ une application.*
*On dit que f est de **Carathéodory** si elle est mesurable par rapport à t et continue par rapport à x, c'est à dire pour tout $x \in X$ fixé l'application*

$$\begin{aligned} f_x :& T \to Y \\ & t \mapsto f_x(t) = f(t, x) \end{aligned}$$

est Σ-mesurable, et pour tout $t \in T$ fixé l'application

$$\begin{aligned} f_t :& X \to Y \\ & x \mapsto f_t(x) = f(t, x) \end{aligned}$$

est continue.
On dit aussi que f est séparément mesurable, séparément continue.

Proposition 1.13. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique séparable et Y un espace métrique et soit $f : T \times X \to Y$ une application de Carathéodory. Alors f est mesurable.*

Lemme 1.1. *Soit (X, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application mesurable à valeurs fermées. Alors le graphe de F appartient à $\Sigma \otimes \mathcal{B}(Y)$.*

Lemme 1.2. *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré avec $\mu \geq 0$, σ-finie et Σ est μ-complète. Soient Y un espace métrique séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs fermées, alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) F *est* Σ*-mesurable.*

(b) $gphF \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(Y)$.

(c) F est fortement mesurable.

Théorème 1.7 (Théorème d'existence de sélections mesurables).
Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique complet séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application mesurable à valeurs fermées non vides. Alors, F admet au moins une sélection mesurable.

Théorème 1.8. *Soient X un espace mesurable avec Σ μ-complète et μ σ-finie. Soit E un espace de Banach séparable et soient $f : X \to E$ une application mesurable et $\rho : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Alors, $x \mapsto \overline{B}_E(f(x), \rho(x))$ est une multi-application mesurable.*

Preuve. Soit (y_n) une suite fixée, dense dans la boule unité de E (le choix d'une telle suite est possible grâce à la séparabilité de l'espace E).
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}, \sigma_n(x) = f(x) + \rho(x)y_n$.
L'application $\sigma_n(\cdot)$ est mesurable (grâce à la mesurabilité de $f(\cdot)$ et $\rho(\cdot)$) et $\overline{B}_E(f(x), \rho(x)) = \overline{f(x) + \rho(x)B_E(0,1)} = \{\overline{f(x) + \rho(x)y_n}\} = \{\overline{\sigma_n(x)\,;\, n \in \mathbb{N}}\}$. Par suite $\{\sigma_n(x)\}_n$ est une représentation de Castaing de $\overline{B}_E(f(x), \rho(x))$. Par conséquent, l'application $x \mapsto \overline{B}_E(f(x), \rho(x))$ est mesurable. □

Théorème 1.9. *Soient X un espace mesuré complet, E un espace de Banach, Y un espace métrique, $f : X \times E \to Y$ de **Caratéodory**, et B un sous ensemble fermé de Y. Alors $t \mapsto F(t) = \{x \in E : f(t,x) \in B\}$ définie une multi-application mesurable. En particulier, si f est à valeurs réels, alors*

$$t \mapsto \{x \in E : f(t,x) \geq \lambda\},\ t \mapsto \{x \in E : f(t,x) \leq \lambda\},\ t \mapsto \{x \in E : f(t,x) = \lambda\}$$

sont des multi-applications mesurables.

Théorème 1.10. *Soient X un espace mesuré complet, E un espace de Banach, et soit $F : X \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable à valeurs fermées . Alors la multi-application $FrF : T \rightrightarrows E$, définie par $t \mapsto Fr(F(t))$, est mesurable.*

Définition 1.19. *Soit $F : T \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable. Alors on dit que F est intégrablement bornée si pour tout $t \in T$ tel que $F(t) \subset \alpha(t)\overline{B}$ on a*

$$\sup\{\|v\|, v \in F(t)\} \leq \alpha(t),\ avec\ \alpha(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}_+).$$

Théorème 1.11. *Soit $F : T \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable et integrablement bornée, alors pour toute $u \in S(\overline{co}F)$ et $\varepsilon \geq 0$, il existe $v \in S(F)$ telle que*

$$\|u - v\|_w < \varepsilon.$$

Dans l'espace $L^1(T, E)$ on considère la norme "faible"

$$\|x\|_\omega = \max_{0 \leq a \leq b \leq 1} \| \int_a^b x(s)ds\|, \tag{1.1}$$

cette norme est équivalente à la norme

$$|||x||| = \max_{0 \leq t \leq 1} \| \int_0^t x(s)ds\|. \tag{1.2}$$

En effet, pour tout $t \in T$, et en prenant $a = 0$ et $b = t$,

$$\| \int_0^t x(s)ds\| \leq \max_{0 \leq a \leq b \leq b} \| \int_a^b x(s)ds\| = \|x\|_\omega.$$

D'où,

$$|||x||| \leq \|x\|_\omega. \tag{1.3}$$

D'autre part, pour tout $a, b \in T$, $a \leq b$,

$$\begin{aligned} \| \int_a^b x(s)ds\| &= \| \int_0^b x(s)ds - \int_0^a x(s)ds\| \\ &\leq \| \int_0^b x(s)ds\| + \| \int_0^a x(s)ds\| \\ &\leq 2|||x|||. \end{aligned}$$

D'où,

$$\|x\|_\omega \leq 2|||x|||. \tag{1.4}$$

De (1.3) et (1.4), on déduit que $\|.\|_\omega$ et $|||.|||$ sont équivalentes.
On note par $L^1_\omega(T, E)$ l'espace $L^1(T, E)$ muni de la norme faible.

1.7 Distance de Hausdorff

Nous allons donner dans cette section quelques résultats sur la distance de Hausdorff qui sont pris des références [5], [1] et [6].

Définitions 1.2. *Soient A, B deux sous ensembles d'un espace métrique (X, d).*

- *On a $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$.*
- *On appelle* **écart** *entre A et B que l'on note e(A,B) la quantité définie par*

$$e(A, B) = \underset{x \in A}{sup}\, d(x, B) = \sup_{x \in A} \left(\inf_{y \in B} d(x, y) \right).$$

- *On appelle* **distance de Hausdorff** *entre A et B et on la note $haus(A, B)$ la quantité définie par*

$$haus(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}.$$

Remarquons que $haus(A, B) = haus(B, A)$.

Proposition 1.14. *Soient* A, B, C *trois sous ensembles d'un espace métrique* (X, d).

1. $e(A, \emptyset) = \infty$ *si* $A \neq \emptyset$.
2. $e(\emptyset, B) = 0$.
3. $e(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A \subset \overline{B}$.
4. $e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C)$.
5. $haus(A, B) = 0 \Longleftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.
6. $haus(A, C) \leq haus(A, B) + haus(C, B)$.
7. $\mid d(x, A) - d(x, B) \mid \leq haus(A, B)$, $\forall x \in X$.

Rappelons les propriétés suivantes.

- $(\mathcal{P}_{cl}(X), haus)$ est un espace métrique.
- Si (X, d) est un espace métrique complet, alors $(\mathcal{P}_{cl}(X), haus)$ est complet.
- Si X est séparable, $(\mathcal{P}_k(X), haus)$ est aussi séparable.

Soit E un espace vectoriel normé.
Soit $C \subset E$. On note $C_\rho = C \cap \rho\overline{B}$, $\rho \geq 0$.

Définition 1.20. *Soit* $\rho \geqslant 0$. *L'application* $\boldsymbol{haus_\rho} : E \times E \to \mathbb{R}_+$ *est définie par*

$$haus_\rho(C, D) = \max\{e(C_\rho, D), e(D_\rho, C)\}, \ \forall C, D \in E.$$

Proposition 1.15. *Soient* $C, D \subset E$ *non vides.*

1. $haus_\rho(C, D) \neq +\infty$, *pour tout* $\rho \geq 0$.
2. *Si* C *et* D *sont non vides et fermés, alors* $haus_\rho(C, D) = 0$ *pour tout* $\rho > 0$ *si et seulement si* $C = D$.

Remarque 1.1. *L'application* $haus_\rho(\cdot, \cdot)$, *pour* $\rho \geq 0$, *n'est pas une distance car elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire.*

Définition 1.21. *Soit* E *un espace de Banach,* $Q \subset T \times E$, $F : Q \rightrightarrows E$ *une multi-application et* $(t, x) \in Q$. *On dit que la multi-application* F *est intégrablement* $(\rho - H)$*-lipschitzienne sur* Q *s'il existe* $\beta \geqslant 0$ *et* $k(.) \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ *telles que*

$$haus_\rho(F(t, x), F(t, y)) \leqslant (k(t) + \beta\rho)\|x - y\|, \tag{1.5}$$

pour tous $(t, x), (t, y) \in Q$ *et pour tout* $\rho \geqslant 0$. *Si* (1.5) *est une inégalité stricte pour* $x \neq y$ *alors* F *est appelée strictement intégrablement* $(\rho - H)$*-lipschitzienne.*

Lemme 1.3. *Soit E un espace vectoriel normé et C un ensemble convexe fermé tel que $C_{\rho_0} \neq \emptyset$ pour certain $\rho_0 \geq 0$. Alors pour tout $\rho > \rho_0$ et $\eta \geq 0$ on a*

$$haus(C_{\rho+\eta}, C_\rho) \leqslant [(\rho + \rho_0)/(\rho - \rho_0)]\eta,$$

ce qui implique que l'application $\eta \to haus(C_{\rho+\eta}, C_\rho)$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Proposition 1.16. *Soient $C, D \subset E$ deux sous ensembles fermés convexes tels que C_{ρ_0}, D_{ρ_0} sont non vides pour un certain $\rho_0 \geqslant 0$. Alors pour tout $\rho > \rho_0$,*

$$haus(C_\rho, D_\rho) \leq \frac{2\rho}{\rho - \rho_0} haus_\rho(C, D). \tag{1.6}$$

Preuve. On a

$$e(D_\rho, C_\rho) \leqslant e(D_\rho, C_{\rho+\eta}) + e(C_{\rho+\eta}, C_\rho)$$

et

$$e(C_\rho, D_\rho) \leqslant e(C_\rho, D_{\rho+\eta}) + e(D_{\rho+\eta}, D_\rho),$$

cela implique que

$$\begin{aligned} haus(C_\rho, D_\rho) &= \max\{e(D_\rho, C_\rho), e(C_\rho, D_\rho)\} \\ &\leqslant \max\{e(D_\rho, C_{\rho+\eta}), e(C_\rho, D_{\rho+\eta})\} + \max\{e(C_{\rho+\eta}, C_\rho), e(D_{\rho+\eta}, D_\rho)\}, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$haus(C_\rho, D_\rho) \leqslant \beta_1 + \beta_2,$$

avec, pour tout $\eta > 0$

$$\beta_1 = \max\{e(D_\rho, C_{\rho+\eta}), e(C_\rho, D_{\rho+\eta})\}$$

et

$$\beta_2 = \max\{e(C_{\rho+\eta}, C_\rho), e(D_{\rho+\eta}, D_\rho)\}.$$

On va montrer que $\beta_2 \leqslant \frac{\rho+\rho_0}{\rho-\rho_0}\eta$.

On a

$$\begin{aligned} e(C_{\rho+\eta}, C_\rho) &\leqslant haus(C_{\rho+\eta}, C_\rho) \\ &\leqslant ((\rho + \rho_0)/(\rho - \rho_0))\eta, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e(D_{\rho+\eta}, D_\rho) &\leqslant haus(D_{\rho+\eta}, D_\rho) \\ &\leqslant ((\rho + \rho_0)/(\rho - \rho_0))\eta. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\beta_2 &\leqslant \max\{haus(C_{\rho+\eta}, C_\rho), haus(D_{\rho+\eta}, D_\rho)\} \\ &\leqslant ((\rho+\rho_0)/(\rho-\rho_0))\eta. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Maintenant on va prouver que $\beta_1 = haus_\rho(C, D)$.
En posant $\eta = haus_\rho(C, D)$ on trouve,

$$e(D_\rho, C_{\rho+\eta}) = e(D_\rho, C) \quad et \quad e(C_\rho, D_{\rho+\eta}) = e(C_\rho, D).$$

En effet, pour tout $y \in D_\rho$, on a $d(y, C) \leq e(D_\rho, C) \leq \eta$. D'où $d(0, C) \leq \|y\| + d(y, C) \leq \rho + \eta$. C'est à dire $C \subset (\rho+\eta)\overline{B}$, donc, $C = C_{\rho+\eta}$ et $e(D_\rho, C) = e(D_\rho, C_{\rho+\eta})$ et de la même façon, $e(C_\rho, D) = e(C_\rho, D_{\rho+\eta})$.
D'où

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \max\{e(D_\rho, C_{\rho+\eta}), e(C_\rho, D_{\rho+\eta})\} \\ &= \max\{e(D_\rho, C), e(C_\rho, D)\} \\ &= haus_\rho(C, D).\end{aligned} \tag{1.8}$$

De (1.7) et (1.8) on a

$$\begin{aligned}\beta_1 + \beta_2 &\leqslant ((\rho+\rho)/(\rho-\rho))haus_\rho(C, D) + haus_\rho(C, D) \\ &\leqslant (2\rho/(\rho-\rho_0))haus_\rho(C, D),\end{aligned}$$

cela implique que

$$haus(C_\rho, D_\rho) \leqslant (2\rho/(\rho-\rho_0))haus_\rho(C, D).$$

□

Proposition 1.17. *Soit E un espace de Banach et soit $\phi \in E'\backslash\{0\}$,*

$$D = \{x \in E; \phi(x) \leq b\}, \; b \in \mathbb{R}$$

et soit $x_0 \in E\backslash D$. Alors

$$d(x_0, D) = \frac{\phi(x_0) - b}{\|\phi\|_*}.$$

CHAPITRE 2

EXISTENCE DE SOLUTIONS POUR UNE INCLUSION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE

Ce chapitre est consacré à l'étude d'existence de solutions de l'inclusions différentielle du premier ordre suivante

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases}\dot{x}(t) \in F(t, x(t)),\ p.p, \\ x(0) = x_0,\end{cases}$$

et de l'inclusion différentielle convexifiée suivante

$$(\mathcal{P}_{\overline{co}F})\begin{cases}\dot{x}(t) \in \overline{co}F(t, x(t)),\ p.p, \\ x(0) = x_0,\end{cases}$$

dans un espace de Banach séparable, où $F : T \times b\overline{B} \rightrightarrows E$ avec $b > 0$ est une multi-application à valeurs non vides fermées.
Soit $y \in C(T, E)$ et $b > 0$. On pose

$$Q = \{(t, x) \in T \times E : \|x - y(t)\| \leq b\}.$$

On prend $\|x_0 - y(0)\| \leq \delta < b$ et $I = [0, d]$ avec $0 < d \leq 1$.

Définition 2.1. *Une application* $x(\cdot) \in AC^{1,1}(I, E)$ *avec* $x(0) = x_0$ *et* $\|x(t) - y(t)\| \leq b$ *pour* $t \in I$ *est appelée solution du problème* $(\mathcal{P}_F)$ *si* $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ *presque partout sur* I.
De même, on définit une solution du problème $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$. *De plus, si* $0 < d < 1$, *la solution* x *est dite* ***locale***. *Si* $d = 1$ *la solution* x *est dite* ***globale***.

Considérons l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = a(t) + k(t)r(t), \quad p.p\ t \in T \\ r(0) = r_0 \geq 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où

$$a(\cdot), k(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}_+),\ k(t) > 0,\ \forall t \in T. \tag{2.2}$$

On résout ce système pour trouver la solution $r : T \to \mathbb{R}$ (voir [7]).
L'équation homogène associée est

$$\dot{r}(t) - k(t)r(t) = 0.$$

Cela implique que

$$r_h(t) = c \exp(\int_0^t k(s)ds), \quad c \in \mathbb{R}.$$

En utilisant la méthode de variation des constantes, on trouve la solution particulière de la forme

$$r_p(t) = c(t) \exp(\int_0^t k(s)ds),$$

avec c est une fonction dérivable. En dérivant r_p on obtient

$$\dot{r}_p(t) = \dot{c}(t) \exp(\int_0^t k(s)ds) + c(t)k(t) \exp(\int_0^t k(s)ds).$$

En remplaçant dans l'équation (2.1) on obtient

$$\dot{c}(t) \exp(\int_0^t k(s)ds) = a(t).$$

D'où

$$\dot{c}(t) = a(t) \exp(-\int_0^t k(s)ds).$$

En intégrant $\dot{c}(t)$ entre 0 et t, on trouve

$$c(t) = \int_0^t a(s) \exp(-\int_0^s k(\tau)d\tau)ds + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$r_p(t) = c_1 \exp m(t) + \int_0^t \exp(m(t) - m(s))a(s)ds,$$

Où $m(t) = \int_0^t k(s)ds$ pour tout $t \in T$, alors la solution générale de l'équation (2.1) est

$$r(t) = r_p(t) + r_h(t)$$

D'où

$$r(t) = c_2 \exp m(t) + \int_0^t \exp(m(t) - m(s))a(s)ds, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

En utilisant la condition initiale, $r(0) = r_0 = c_2$, il s'ensuit que

$$r(t) = r_0 \exp m(t) + \int_0^t \exp(m(t) - m(s))a(s)ds. \tag{2.3}$$

Pour $F : T \times b\overline{B} \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides fermées avec $b > 0$, faisons des hypothèses suivantes.

Hypothèses (H(F)).

1. *La multi-application* $t \mapsto F(t, x(t))$ *est mesurable pour toute application* $x(\cdot) \in C(T, E)$ *avec* $\|x(t)\| \leq b$ *pour tout* $t \in T$.
2. *Pour tout* $t \in T$

$$d(0, F(t, x)) < a(t) + k(t)\|x\| \quad \textit{pour tout } x \in E, \quad \|x\| \leq b, \tag{2.4}$$

et d(0,F(t,0))=0 pour a(t)=0.

3. *Pour presque tout* $t \in T$

$$haus_\rho(F(t, x), F(t, y)) < k(t)\|x - y\|, \quad \|x\| \leq b, \quad \|y\| \leq b, \quad x \neq y, \tag{2.5}$$

avec $0 \leq \rho \leq \dot{r}(t)$, *où* r *est la solution de l'équation* (2.1).

Considérons l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \ p.p \\ x(0) = x_0, \quad \|x_0\| < b. \end{cases} \tag{2.6}$$

Théorème 2.1. *Supposons que les Hypothèses* $H(F)$ *sont vérifiées et* $\|x_0\| \leq r_0 < b$. *Si* $r(t) \leq b$, $\forall t \in T$, *alors il existe une solution globale* x *du problème* (2.6) *telle que*

$$\|x(t)\| \leq r(t) \textit{ pour tout } t \in T, \quad \|\dot{x}(t)\| \leq \dot{r}(t) \quad p.p \textit{ sur } T. \tag{2.7}$$

Sinon, il existe une solution locale x *définit sur* $[0, d]$ *telle que* $\|x(t)\| \leq r(t)$ $\forall t \in [0, d]$, $\|\dot{x}(t)\| \leq \dot{r}(t)$ *p.p sur* $[0, d]$ *où* d *est définie par l'égalité* $r(d) = b$.

Preuve. Il résulte de (2.3) que la fonction $t \mapsto r(t)$ est strictement croissante .

Puisque $\|x_0\| \leq r_0 < b$, soit $r(t) \leq b$ pour tout $t \in T$ et $r(0) = r_0 < b$, ou bien il existe $c \in]0,1]$ tel que $r(c) > b$. D'où $r(0) < b < r(c)$, donc par le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe un point unique $d \in]0,c]$, tel que $r(d) = b$. Alors $d \in]0,1]$ et $r(t) > b$ pour tout $t \in]d,1]$.

On pose $I = [0,d]$, et supposons que I est le domaine de t.

Etape 1.

Montrons que

1. $F(t,x) \cap \dot{r}(t)\overline{B} \neq \emptyset \quad p.p., \quad pour \quad \|x\| \leq r(t),$
2. $F(t,x) \cap \dot{r}(t)\overline{B} \subset F(t,y) + k(t)\|x-y\|B \quad p.p\ sur\ I.$

1. D'après (2.4) on a, pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| \leq b$

$$d(0, F(t,x)) = \inf_{v \in F(t,x)} \|v\| < a(t) + k(t)\|x\|, \quad pour\ tout\ t \in T.$$

Soit $t \in I$ tel que (2.1) soit vérifiée et soit $x \in E$ tel que $\|x\| \leq r(t)$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$d(0, F(t,x)) \leq a(t) + k(t)\|x\| - \varepsilon,$$

et il existe $v_\varepsilon \in F(t,x)$ tel que

$$\|v_\varepsilon\| < \inf_{v \in F(t,x)} \|v\| + \varepsilon \leq a(t) + k(t)\|x\| - \varepsilon + \varepsilon,$$

Donc

$$\|v_\varepsilon\| \leq a(t) + k(t)\|x\|.$$

Il s'ensuit de (2.1) que

$$\|v_\varepsilon\| \leq \dot{r}(t).$$

Alors

$$v_\varepsilon \in F(t,x) \cap \dot{r}(t)\overline{B} \neq \emptyset.$$

Par conséquent

$$F(t,x) \cap \dot{r}(t)\overline{B} \neq \emptyset \quad p.p. \quad pour \quad \|x\| \leq r(t).$$

2. Soit $t \in I$ tel que (2.5) soit vérifiée et soit $\rho = \dot{r}(t)$. Soit $x, y \in E$ tels que $\|x\| \leq r(t)$ et $\|y\| \leq r(t)$. On a

$$haus_\rho(F(t,x), F(t,y)) = max\{e(F_\rho(t,x), F(t,y)), e(F_\rho(t,y), F(t,x))\}.$$

Soit $v \in F(t,x) \cap \rho\overline{B} = F_\rho(t,x)$, D'après (2.5) on a

$$\begin{aligned} d(v, F(t,y)) &\leq e(F(t,x)_\rho, F(t,y)) \\ &\leq haus_\rho(F(t,x), F(t,y)) \\ &< k(t)\|x-y\|. \end{aligned}$$

Donc, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$d(v, F(t,y)) \leq k(t)\|x-y\| - \varepsilon,$$

et il existe $w_\varepsilon \in F(t,y)$ tel que

$$\begin{aligned} \|v - w_\varepsilon\| &< d(v, F(t,y)) + \varepsilon \\ &\leq k(t)\|x-y\|. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$v - w_\varepsilon \in k(t)\|x-y\|B.$$

Alors

$$v \in w_\varepsilon + k(t)\|x-y\|B \subset F(t,y) + k(t)\|x-y\|B,$$

Donc

$$F(t,x) \cap \dot{r}(t)\overline{B} \subset F(t,y) + k(t)\|x-y\|B.$$

On obtient

$$F(t,x) \cap \dot{r}(t)\overline{B} \subset F(t,y) + k(t)\|x-y\|B \quad p.p\ sur\ I, \tag{2.8}$$

pour $\|x\| \leq r(t)$ et $\|y\| \leq r(t)$ tel que $x \neq y$.

Etape 2.

Par récurrence, on va construire la suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ comme suit

$$x_0(t) = 0, \quad x_{i+1}(t) = x_0 + \int_0^t v_i(s)ds, \quad i = 0,1,2,..., pour\ tout\ t \in I, \tag{2.9}$$

où $v_i \in L^1(I,E)$,

$$\dot{x}_{i+1}(t) = v_i(t) \in F(t, x_i(t))\ p.p\ sur\ I, \tag{2.10}$$

$$\|\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t)\| \leq k(t)\|x_i(t) - x_{i-1}(t)\|\ p.p\ sur\ I, \tag{2.11}$$

$$\|\dot{x}_{i+1}(t)\| = \|v_i(t)\| \leq \dot{r}(t) \quad p.p\ sur\ I \quad \|x_i(t)\| \leq r(t),\ pour\ tout\ t \in I, \tag{2.12}$$

$$\|\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t)\| \leq k(t)\left(r_0\frac{(m(t))^{i-1}}{(i-1)!} + \int_0^t \frac{(m(t)-m(s))^{i-1}}{(i-1)!}a(s)ds\right) \quad p.p\ sur\ I, \tag{2.13}$$

$$\|x_{i+1}(t) - x_i(t)\| \leq r_0 \frac{(m(t))^i}{i!} + \int_0^t \frac{(m(t)-m(s))^i}{i!} a(s)ds \text{ pour tout } t \in I. \tag{2.14}$$

On pose $I_0 = \{t \in I : \ a(t) = 0\}$. D'après (2.4) et puisque $x_0 \equiv 0$ on a

$$d(0, F(t, x_0(t)) < a(t) \quad \textit{pour tout} \quad t \in I \backslash I_0. \tag{2.15}$$

On définit la multi-application $K : I \rightrightarrows E$ par $K(t) = F(t, x_0(t))$ et on définit la fonction $\alpha_0 : I \backslash I_0 \to \mathbb{R}$ par $\alpha_0(t) = d(0, K(t))$. Montrons que

1. α_0 est mesurable sur l'ensemble mesurable $I \backslash I_0$.
2. La multi-application $G : I \backslash I_0 \rightrightarrows E$ définie par $G(t) = K(t) \cap \frac{\alpha_0(t)+a(t)}{2} \overline{B}$ est mesurable sur $I \backslash I_0$ à valeurs fermées non vides.

1. On a que $x_0 : I \backslash I_0 \to E$ est une application continue. Alors par l'Hypothèse H(F)(1), la multi-application K est mesurable. Donc par la Proposition 1.10 on obtient la mesurabilité de la fonction distance $d(x, K(\cdot))$, $\forall x \in E$, par conséquent $d(0, K(\cdot))$ et mesurable.

   De plus on a

$$\begin{aligned} I_0 &= \{t \in I : \ a(t) = 0\} \\ &= \{t \in I : \ t \in a^{-1}(\{0\})\} \\ &= a^{-1}(\{0\}) \end{aligned}$$

   Nous avons $a(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R})$ donc elle est mesurable, et comme $\{0\}$ est un fermé, $\{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors $a^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{L}(I)$, i.e, I_0 est mesurable. D'autre part on a que la tribu $\mathcal{L}(I)$ et stable par complémentarité d'où $I \backslash I_0$ est mesurable.

   Donc la fonction $\alpha_0(\cdot)$ est mesurable sur l'ensemble mesurable $I \backslash I_0$, et par (2.15), $\alpha_0(t) < \frac{\alpha_0(t)+a(t)}{2} < a(t)$ sur $I \backslash I_0$.

2. Considérons la multi-application $G : I \backslash I_0 \rightrightarrows E$ définie par

$$\begin{aligned} G(t) &= K(t) \cap \frac{\alpha_0(t) + a(t)}{2} \overline{B}. \\ &= \left\{ x \in K(t) : \ \|x\| \leq \frac{\alpha_0(t) + a(t)}{2} \right\}, t \in I \backslash I_0. \end{aligned}$$

   Comme K est à valeurs fermées, on voit que G est à valeurs fermées.

   Soit $t \in I \backslash I_0$. On a

$$\alpha_0(t) = d(0, F(t, x_0(t))) = \inf_{v \in F(t, x_0(t))} \|v\| < \frac{\alpha_0(t) + a(t)}{2}.$$

Donc, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$d(0, F(t, x_0(t))) \leq \frac{\alpha_0(t) + a(t)}{2} - \varepsilon,$$

et il existe $v_\varepsilon \in F(t, x_0(t))$ tel que

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon\| &< d(0, F(t, x_0(t))) + \varepsilon \\ &\leq \frac{\alpha_0(t) + a(t)}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$v_\varepsilon \in F(t, x_0(t)) \cap \frac{\alpha_0(t) + a(t)}{2} \overline{B} = G(t).$$

D'où $G(t) \neq \emptyset$, c'est à dire que G est à valeurs non vides.

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} gph(G) &= \{(t, x) : x \in G(t)\} \\ &= \left\{(t, x) : x \in K(t) \ et \ \|x\| \leq \frac{\alpha_0(t) + a(t)}{2}\right\} \\ &= \{(t, x) : x \in K(t)\} \cap \left\{(t, x) : \|x\| \leq \frac{\alpha_0(t) + a(t)}{2}\right\} \\ &= \{(t, x) : x \in K(t)\} \cap \left\{(t, x) : x \in \overline{B}\left(0, \frac{\alpha_0(t) + a(t)}{2}\right)\right\} \\ &= gph(K) \cap gph(\overline{B}(0, \rho(\cdot))), \end{aligned}$$

où $\rho(t) = \frac{\alpha_0(t)+a(t)}{2}$.

Puisque K est mesurable à valeurs non vides fermées dans E, par le Lemme 1.1, $gph(K)$ est mesurable.

De plus on a d'après (2.15) que $\rho : T \to \mathbb{R}_+$ est mesurable, donc d'après le Théorème 1.8, on conclut que $gph(\overline{B}(0, \rho(\cdot))) \in \mathcal{L}(I \backslash I_0) \otimes \mathcal{B}(E)$ et donc $gph(G) \in \mathcal{L}(I \backslash I_0) \otimes \mathcal{B}(E)$, c'est à dire G est mesurable (voir le Lemme 1.2).

Par conséquent d'après le théorème d'existence de sélection mesurable (Théorème 1.7), il existe une application mesurable $v^* : I \backslash I_0 \to E$ telle que $v^*(t) \in G(t) = F(t, x_0(t)) \cap \frac{\alpha_0(t)+a(t)}{2} \overline{B}$ pour tout $t \in I \backslash I_0$.

On pose $v_0(t) = v^*(t), \ si \ t \in I \backslash I_0$ et $\quad v_0(t) = 0, \ si \ t \in I_0$.

Montrons que

- $\|v_0(t)\| \leq a(t) \quad sur \ I,$
- $v_0(t) \in F(t, x_0(t)) \quad sur \ I.$

On a

$$v_0(t) = v^*(t) \in F(t, x_0(t)) \cap \frac{\alpha_0(t) + a(t)}{2}\overline{B} \quad sur\ I\backslash I_0.$$

Cela implique que

$$v_0(t) \in F(t, x_0(t)) \quad sur\ I\backslash I_0 \quad et \quad v_0(t) \in \frac{\alpha_0(t) + a(t)}{2}\overline{B} \quad sur\ I\backslash I_0.$$

D'où

$$\|v_0(t)\| \leq \frac{\alpha_0(t) + a(t)}{2} < a(t) \quad sur\ I\backslash I_0.$$

D'autre part pour, $t \in I_0$ on a $v_0(t) = a(t) = 0$, alors, par l'hypothèse H(F)(2).

$$\|v_0(t)\| \leq a(t) \quad sur\ I, \tag{2.16}$$

$$v_0(t) \in F(t, x_0(t)) \quad sur\ I. \tag{2.17}$$

Posons, pour tout $t \in I$,

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t v_0(s)ds. \tag{2.18}$$

Montrons que

- $\|\dot{x}_1(t)\| = \|v_0(t)\| \quad p.p\ sur\ I,$
- $\|\dot{x}_1(t)\| \leq \dot{r}(t) \quad p.p\ sur\ I,$
- $\|x_1(t)\| \leq r(t)\ \forall\, t \in T,$
- $d(\dot{x}_1(t), F(t, x_1(t)) < k(t)\|x_1(t)\| \quad p.p\ sur\ I.$

D'après (2.18), on trouve que

$$\dot{x}_1(t) = v_0(t) \quad p.p\ sur\ I,$$

alors

$$\|\dot{x}_1(t)\| = \|v_0(t)\| \quad p.p\ sur\ I. \tag{2.19}$$

D'après (2.16)

$$\|\dot{x}_1(t)\| = \|v_0(t)\| \leq a(t) \quad p.p\ sur\ I,$$

et de (2.1) on obtient

$$\|\dot{x}_1(t)\| = \|v_0(t)\| \leq \dot{r}(t) \quad p.p\ sur\ I. \tag{2.20}$$

D'autre part d'après (2.18) on a pour tout $t \in T$

$$\begin{aligned}
\|x_1(t)\| &= \|x_0 + \int_0^t v_0(s)ds\| \\
&\leq \|x_0\| + \|\int_0^t v_0(s)ds\| \\
&\leq \|x_0\| + \int_0^t \|v_0(s)\|ds \\
&\leq \|x_0\| + \int_0^t \dot{r}(s)ds \\
&\leq r_0 + r(t) - r_0 = r(t).
\end{aligned}$$

D'où

$$\|x_1(t)\| \leq r(t), \; \forall t \in T. \tag{2.21}$$

De (2.20) on'a $\dot{x}_1(t) \in \dot{r}(t)\overline{B}$ $p.p$ sur I, et comme $\dot{x}_1(t) = v_0(t)$ $p.p$ sur I, en utilisant (2.17) on trouve que $\dot{x}_1(t) \in F(t, x_0(t))$ $p.p$ sur I. Cela implique que

$$\dot{x}_1(t) \in F(t, x_0(t)) \cap \dot{r}(t)\overline{B} \quad p.p \; sur \; I,$$

Alors d'après (2.8), et puisque $\|x_0(t)\| = 0 \leq r(t)$ pour tout $t \in I$, on a

$$\dot{x}_1(t) \in F(t, y) + k(t)\|x_0(t) - y\|B \quad p.p \; sur \; I, \quad \|y\| \leq r(t), \quad y \neq x_0(t). \tag{2.22}$$

En particulier pour $t \in I$ vérifiant (2.22) et $x_1(t) \neq 0$ et pour $y = x_1(t)$, on a

$$\dot{x}_1(t) \in F(t, x_1(t)) + k(t)\|x_0(t) - x_1(t)\|B.$$

Donc, il existe $z \in F(t, x_1(t))$ tel que

$$\dot{x}_1(t) \in z + k(t)\|x_0(t) - x_1(t)\|B.$$

Cela implique que

$$\dot{x}_1(t) - z \in k(t)\|x_0(t) - x_1(t)\|B.$$

D'oú

$$\|\dot{x}_1(t) - z\| < k(t)\|x_0(t) - x_1(t)\|.$$

Par conséquent

$$d(\dot{x}_1(t), F(t, x_1(t)) < k(t)\|x_0(t) - x_1(t)\|.$$

Comme $x_0 \equiv 0$. On conclut que

$$d(\dot{x}_1(t), F(t, x_1(t)) < k(t)\|x_1(t)\| \quad p.p \; sur \; I, \tag{2.23}$$

avec $\|x_1(t)\| \neq 0$

On pose $I_1 = \{t \in I : \|x_1(t)\| = 0\}$ et N_1 l'ensemble négligeable tel que (2.23) n'est pas vérifiée.

Montrons que

1. $\alpha_1 : I \backslash (I_1 \cup N_1) \to \mathbb{R}$ définie par $\alpha_1(t) = d(\dot{x}_1(t), F(t, x_1(t))$ est mesurable sur l'ensemble mesurable $t \in I \backslash (I_1 \cup N_1)$,
2. la multi-application $t \mapsto F(t, x_1(t)) \cap \left(\dot{x}_1(t) + \frac{\alpha_1(t) + k(t)\|x_1(t)\|}{2}\overline{B}\right), \quad t \in I \backslash (I_1 \cup N_1)$ est mesurable à valeurs fermées non vides.

1. On a pour tout $t \in I\backslash(I_1 \cup N_1)$
$$\alpha_1(t) < \frac{\alpha_1(t) + k(t)\|x_1(t)\|}{2} < k(t)\|x_1(t)\|. \tag{2.24}$$
D'après l'hypothèse H(F)(1) et la Proposition 1.10, $t \mapsto d(\dot{x}_1(t), F(t, x_1(t))$ est une fonction mesurable.

2. Puisque $I_1 \cup N_1$ est un sous ensemble mesurable de I, la multi-application
$$t \mapsto F(t, x_1(t)) \cap \left(\dot{x}_1(t) + \frac{\alpha_1(t) + k(t)\|x_1(t)\|}{2}\overline{B}\right) \quad t \in I\backslash(I_1 \cup N_1)$$
est mesurable à valeurs fermées non vides.

Alors, d'après le théorème d'existence de sélection mesurable, il existe une application mesurable $v_1^* : I\backslash I_1 \to E$ telle que $v_1^* \in F(t, x_1(t)) \cap \left(\dot{x}_1(t) + \frac{\alpha_1(t)+k(t)\|x_1(t)\|}{2}\overline{B}\right)$ p.p sur $I\backslash I_1$. On définit l'application $v_1 : I \to E$ par $v_1(t) = v_1^*(t)$ pour tout $t \in I\backslash I_1$ et $v_1(t) = \dot{x}_1(t)$ pour tout $t \in I_1$

On va montrer que

1. $v_1(t) \in F(t, x_1(t)) \quad p.p\ sur\ I,$
2. $\|\dot{x}_1(t) - v_1(t)\| \leq k(t)\|x_1(t)\| \quad p.p\ sur\ I,$
3. $\|v_1(t)\| \leq \dot{r}(t)$ p.p sur I

1. Pour presque tout $t \in I\backslash I_1$, on a
$$v_1^*(t) = v_1(t) \in F(t, x_1(t)) \cap \left(\dot{x}_1(t) + \frac{\alpha_1(t) + k(t)\|x_1(t)\|}{2}\overline{B}\right).$$
Cela implique que
$$v_1(t) \in F(t, x_1(t)) \ pour\ presque\ tout\ t \in I\backslash I_1.$$
D'autre part, on définit l'application $\varphi : I \to E$ par $\varphi(t) = \|x_1(t)\|$, alors φ est une application absolument continue. Donc, d'après la Proposition 1.8 on trouve que
$$\dot{x}_1(t) = 0 \quad p.p.\ sur\ I_1\ et\ 0 \in F(t, 0) \quad p.p.\ sur\ I_1.$$
D'où
$$v_1(t) \in F(t, x_1(t)) \quad p.p\ sur\ I. \tag{2.25}$$

2. Pour presque tout $t \in I\backslash I_1$, on a
$$v_1(t) = v_1^*(t) \in F(t, x_1(t)) \cap \left(\dot{x}_1(t) + \frac{\alpha_1(t) + k(t)\|x_1(t)\|}{2}\overline{B}\right).$$

Alors

$$v_1(t) \in \dot{x}_1(t) + \frac{\alpha_1(t) + k(t)\|x_1(t)\|}{2}\overline{B}.$$

Cela implique que

$$v_1(t) - \dot{x}_1(t) \in \frac{\alpha_1(t) + k(t)\|x_1(t)\|}{2}\overline{B}.$$

Donc

$$\|\dot{x}_1(t) - v_1(t)\| \leq \frac{\alpha_1(t) + k(t)\|x_1(t)\|}{2}.$$

De (2.24), on conclut que

$$\|\dot{x}_1(t) - v_1(t)\| < k(t)\|x_1(t)\| \quad p.p \ sur \ I \backslash I_1.$$

D'autre part, en utilisant la Proposition 1.8, $\dot{x}_1(t) = 0 \quad p.p$ sur I_1, et $\dot{x}_1(t) = v_1(t)$ pour $t \in I_1$. D'où $\|\dot{x}_1(t) - v_1(t)\| = k(t)\|x_1(t)\| = 0$. On obtient que

$$\|\dot{x}_1(t) - v_1(t)\| \leq k(t)\|x_1(t)\| \quad p.p \ sur \ I. \tag{2.26}$$

3. De (2.26), on trouve

$$\|\dot{x}_1(t)\| - \|v_1(t)\|\| \leq k(t)\|x_1(t)\| \quad p.p \ sur \ I,$$

Alors

$$\|v_1(t)\| \leq \|\dot{x}_1(t)\| + k(t)\|x_1(t)\| \quad p.p \ sur \ I,$$

De (2.16), (2.21) et (2.19) on obtient

$$\|v_1(t)\| \leq \|v_0(t)\| + k(t)\|x_1(t)\| \quad p.p \ sur \ I,$$

d'où

$$\|v_1(t)\| \leq a(t) + k(t)r(t) = \dot{r}(t) \quad p.p \ sur \ I, \tag{2.27}$$

On pose, pour tout $t \in I$

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t v_1(s)ds. \tag{2.28}$$

Montrons que

- $\|\dot{x}_2(t)\| = \|v_1(t)\| \quad p.p \ sur \ I,$
- $\|\dot{x}_2(t)\| \leq \dot{r}(t) \quad p.p \ sur \ I,$
- $\|x_2(t)\| \leq r(t) \ \forall t \in T.$

D'après (2.28), on trouve que

$$\dot{x}_2(t) = v_1(t) \quad p.p \ sur \ I,$$

alors

$$\|\dot{x}_2(t)\| = \|v_1(t)\| \quad p.p \ sur \ I. \tag{2.29}$$

D'après (2.27)

$$\|\dot{x}_2(t)\| = \|v_1(t)\| \leq a(t) + k(t)r(t) \quad p.p \ sur \ I.$$

Donc

$$\|\dot{x}_2(t)\| \leq \dot{r}(t) \quad p.p \ sur \ I, \tag{2.30}$$

et d'après (2.28) on a, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
\|x_2(t)\| &= \|x_0 + \int_0^t v_1(s)ds\| \\
&\leq \|x_0\| + \|\int_0^t v_1(s)ds\| \\
&\leq \|x_0\| + \int_0^t \|v_1(s)\|ds \\
&\leq \|x_0\| + \int_0^t \dot{r}(s)ds \\
&\leq r_0 + r(t) - r_0 = r(t).
\end{aligned}$$

D'où

$$\|x_2(t)\| \leq r(t). \tag{2.31}$$

Montrons maintenant que

- $\|\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\| \leq k(t)\left(r_0 + \int_0^t a(s)ds\right) \quad p.p \ sur \ I.$
- $\|x_2(t) - x_1(t)\| \leq r_0 m(t) + \int_0^t (m(t) - m(s))a(s)ds.$

De (2.28) on a $\dot{x}_2(t) = v_1(t) \quad p.p.$, et de (2.26), (2.18) on obtient

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\| &\leq k(t)\|x_1(t)\| \quad p.p \ sur \ I, \\
&\leq k(t)\|x_0 + \int_0^t v_0(s)ds\| \quad p.p \ sur \ I, \\
&\leq k(t)\left(\|x_0\| + \|\int_0^t v_0(s)ds\|\right) \quad p.p \ sur \ I, \\
&\leq k(t)\left(r_0 + \int_0^t \|v_0(s)\|ds\right) \quad p.p \ sur \ I,
\end{aligned}$$

De (2.16) on trouve

$$\|\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\| \leq k(t)\left(r_0 + \int_0^t a(s)ds\right) \quad p.p \ sur \ I. \tag{2.32}$$

De (2.18) et (2.28) on obtient

$$\begin{aligned}\|x_2(t)-x_1(t)\| &= \|\int_0^t (\dot{x}_2(\tau)-\dot{x}_1(\tau))d\tau\| \\ &\leq \int_0^t \|\dot{x}_2(\tau)-\dot{x}_1(\tau)\|d\tau.\end{aligned}$$

D'après (2.32), on a

$$\|x_2(t)-x_1(t)\| \leq r_0\int_0^t k(\tau)d\tau + \int_0^t k(\tau)\left(\int_0^\tau a(s)ds\right)d\tau.$$

Donc

$$\|x_2(t)-x_1(t)\| \leq r_0 m(t) + \int_0^t k(\tau)\left(\int_0^\tau a(s)ds\right)d\tau, \tag{2.33}$$

et comme

$$\begin{aligned}\int_0^t k(\tau)\left(\int_0^\tau a(s)ds\right)d\tau &= \int_0^t\int_s^t k(\tau)a(s)d\tau ds \\ &= \int_0^t a(s)\int_s^t k(\tau)d\tau ds \\ &= \int_0^t a(s)\left(\int_0^t k(\tau)d\tau - \int_0^s k(\tau)d\tau\right)ds \\ &= \int_0^t (m(t)-m(s))a(s)ds.\end{aligned}$$

Alors il résulte de (2.33) que

$$\|x_2(t)-x_1(t)\| \leq r_0 m(t) + \int_0^t (m(t)-m(s))a(s)ds. \tag{2.34}$$

D'après (2.28), (2.25), (2.26), (2.30), (2.31), (2.32) et (2.34), on conclut que les relations (2.9) −(2.14) sont vérifiées pour $i=1$.

Supposons maintenant que $x_1(t),...,x_i(t)$ vérifient les relations (2.9) −(2.14). Alors

$$\dot{x}_i(t) \in F(t,x_{i-1}(t))\ p.p\ sur\ I,\ \ \|\dot{x}_i(t)\| \leq \dot{r}(t)\ p.p\ sur\ I,$$

$$\|x_{i-1}(t)\| \leq r(t),\ \ \|x_i(t)\| \leq r(t), pour\ tout\ t \in I.$$

En utilisant (2.8) et ces relations, pour $x = x_{i-1}(t)$ et $y = x_i(t)$, on obtient

$$\dot{x}_i(t) \in F(t,x_{i-1}) \cap \dot{r}(t)\overline{B} \subset F(t,x_i(t)) + k(t)\|x_i(t)-x_{i-1}(t)\|B \quad p.p\ sur\ I.$$

Cette inclusion implique que

$$d(\dot{x}_i(t),F(t,x_i(t)) < k(t)\|x_{i-1}(t)-x_i(t)\| \quad p.p\ sur\ I, \tag{2.35}$$

si $\|x_{i-1}(t)-x_i(t)\| \neq 0$.

Comme ci-dessus, on pose $I_i = \{t \in I : \|x_i(t)-x_{i-1}(t)\| = 0\}$ et N_i l'ensemble négligeable tant que (2.35) n'est pas vérifiée. La fonction $\alpha_i(t) = d(\dot{x}_i(t), F(t, x_i(t))$ est mesurable sur $I\backslash(I_i \cup N_i)$ et $\alpha_i(t) < \frac{\alpha_i(t)+k(t)\|x_i(t)-x_{i-1}(t)\|}{2} < k(t)\|x_i(t)-x_{i-1}(t)\|$ pour tout $t \in I\backslash(I_i \cup N_i)$. Par les même arguments utilisées au-dessus La multi-application

$$t \mapsto F(t, x_i(t)) \cap \left(\dot{x}_i(t) + \frac{\alpha_i(t) + k(t)\|x_i(t) - x_{i-1}(t)\|}{2}\overline{B}\right), \quad t \in I\backslash(I_i \cup N_i)$$

est mesurable à valeurs fermées non vides. Alors d'après le théorème d'existence de sélection mesurable (voir Théorème 1.7), il existe une application mesurable $v_i^* : I\backslash I_i \to E$ tel que $v_i^*(t) \in F(t, x_i(t)) \cap \left(\dot{x}_i(t) + \frac{\alpha_i(t)+k(t)\|x_i(t)-x_{i-1}(t)\|}{2}\overline{B}\right)$ *p.p sur* $I\backslash I_i$. On définit l'application $v_i : I \to E$ par $v_i(t) = v_i^*(t)$ pour $t \in I\backslash I_i$ et $v_i(t) = \dot{x}_i(t)$ pour $t \in I_i$. Alors pour presque tout $t \in I\backslash I_i$

$$v_i(t) = v_i^*(t) \in F(t, x_i(t)) \cap \left(\dot{x}_i(t) + \frac{\alpha_i(t) + k(t)\|x_i(t) - x_{i-1}(t)\|}{2}\overline{B}\right).$$

Cela implique que

$$v_i(t) \in F(t, x_i(t)) \; et \; v_i(t) \in \left(\dot{x}_i(t) + \frac{\alpha_i(t) + k(t)\|x_i(t) - x_{i-1}(t)\|}{2}\overline{B}\right).$$

D'où

$$\|\dot{x}_i(t) - v_i(t)\| \leq \left(\frac{\alpha_i(t) + k(t)\|x_i(t) - x_{i-1}(t)\|}{2}\right) < k(t)\|x_i(t) - x_{i-1}(t)\| \quad p.p \; sur \; I\backslash I_i.$$

De plus pour presque tout $t \in I_i$ on a, $v_i(t) = \dot{x}_i(t)$ et $\|x_i(t) - x_{i-1}(t)\| = 0$ donc

$$\|\dot{x}_i(t) - v_i(t)\| = k(t)\|x_i(t) - x_{i-1}(t)\| = 0,$$

et on a

$$v_i(t) = \dot{x}_i(t) \in F(t, x_{i-1}(t)) = F(t, x_i(t)) \quad p.p \; sur \; I_i.$$

D'où

$$v_i(t) \in F(t, x_i(t)) \quad p.p \; sur \; I, \tag{2.36}$$

$$\|\dot{x}_i(t) - v_i(t)\| \leq k(t)\|x_i(t) - x_{i-1}(t)\| \quad p.p \; sur \; I. \tag{2.37}$$

On pose, pour tout $t \in I$

$$x_{i+1}(t) = x_0 + \int_0^t v_i(s)ds. \tag{2.38}$$

Montrons que

- $\|\dot{x}_{i+1}(t)\| \leq k(t)\sum_{j=1}^{i}\|x_j(t) - x_{j-1}(t)\| + \|\dot{x}_1(t)\| \quad p.p \; sur \; I;$
- $\|\dot{x}_{i+1}(t)\| \leq \dot{r}(t) \quad p.p \; sur \; I;$
- $\|x_{i+1}(t)\| \leq r(t) \quad \forall\, t \in T;$

- $\|\dot{x}_{i+1}(t)-\dot{x}_i(t)\| \leq k(t)\left(r_0\frac{(m(t))^{i-1}}{(i-1)!}+\int_0^t\frac{(m(t)-m(s))^{i-1}}{(i-1)!}a(s)ds\right)$ $p.p\ sur\ I.$

D'après l'égalité $\dot{x}_{i+1}(t)=v_i(s)$ $p.p\ sur\ I$, et de (2.37) on trouve que

$$\begin{aligned}\|\dot{x}_{i+1}(t)\|-\|\dot{x}_1(t)\| &\leq \|\dot{x}_{i+1}-\dot{x}_1(t)\|\\ &\leq \sum_{j=1}^{i}\|\dot{x}_{j+i}(t)-\dot{x}_j(t)\|\\ &\leq k(t)\sum_{j=1}^{i}\|x_j(t)-x_{j-1}(t)\| \quad p.p\ sur\ I,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|\dot{x}_{i+1}(t)\| \leq k(t)\sum_{j=1}^{i}\|x_j(t)-x_{j-1}(t)\|+\|\dot{x}_1(t)\| \quad p.p\ sur\ I.$$

En utilisant (2.14) et (2.16) on obtient

$$\|\dot{x}_{i+1}(t)\| \leq k(t)\left(r_0\sum_{j=0}^{i-1}\frac{[m(t)]^j}{j!}+\sum_{j=0}^{i-1}\int_0^t\frac{[m(t)-m(s)]^j}{j!}a(s)ds\right)+a(t) \quad p.p\ sur\ I. \tag{2.39}$$

Or, $1+\frac{z}{1!}+...+\frac{z^j}{j!}\leq e^z$, $z\geq 0$, donc, on déduit de (2.39) que

$$\|\dot{x}_{i+1}(t)\| \leq k(t)\left(r_0e^{m(t)}+\int_0^t e^{m(t)-m(s)}a(s)ds\right)+a(t) \quad p.p\ sur\ I,$$

et de (2.3)

$$\|\dot{x}_{i+1}(t)\| \leq k(t)r(t)+a(t)=\dot{r}(t) \quad p.p\ sur\ I. \tag{2.40}$$

D'après (2.38) et (2.40) on a, pour tout $t\in I$

$$\begin{aligned}\|x_{i+1}(t)\| &= \|x_0+\int_0^t v_i(s)ds\|\\ &\leq \|x_0\|+\int_0^t\|v_i(s)\|ds\\ &\leq \|x_0\|+\int_0^t\|\dot{x}_{i+1}(s)\|ds\\ &\leq \|x_0\|+\int_0^t\dot{r}(s)ds\\ &\leq r_0+r(t)-r_0=r(t).\end{aligned}$$

D'où

$$\|x_{i+1}(t)\| \leq r(t). \tag{2.41}$$

D'autre part, de (2.38) on a $\dot{x}_{i+1}(t)=v_i(s)$ $p.p\ sur\ I$, et de (2.37) et (2.14) on obtient

$$\begin{aligned}\|\dot{x}_{i+1}(t)-\dot{x}_i(t)\| &\leq k(t)\|x_i(t)-x_{i-1}(t)\| \quad p.p\ sur\ I,\\ &\leq k(t)\left(r_0\frac{(m(t))^{i-1}}{(i-1)!}+\int_0^t\frac{(m(t)-m(s))^{i-1}}{(i-1)!}a(s)ds\right) \quad p.p\ sur\ I.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\|\dot{x}_{i+1}(t)-\dot{x}_i(t)\| \leq k(t)\left(r_0\frac{(m(t))^{i-1}}{(i-1)!}+\int_0^t \frac{(m(t)-m(s))^{i-1}}{(i-1)!}a(s)ds\right) \quad p.p \ sur \ I. \tag{2.42}$$

Comme $x_{i+1}(0)=x_i(0)=x_0$, on a

$$\begin{aligned}
\|x_{i+1}(t)-x_i(t)\| &= \|\int_0^t (\dot{x}_{i+1}(s)-\dot{x}_i(s))ds\| \\
&\leq \int_0^t \|\dot{x}_{i+1}(s)-\dot{x}_i(s)\|ds \\
&= \int_0^t r_0 k(s)\frac{(m(s))^{i-1}}{(i-1)!}ds+\int_0^t k(s)\int_0^\tau \frac{(m(s)-m(\tau))^{i-1}}{(i-1)!}a(\tau)d\tau ds \\
&= r_0\frac{(m(t))^i}{i!}+\int_0^t a(\tau)\int_\tau^t k(s)\frac{(m(s)-m(\tau))^{i-1}}{(i-1)!}dsd\tau \\
&= r_0\frac{(m(t))^i}{i!}+\int_0^t a(\tau)\frac{(m(t)-m(\tau))^i}{i!}d\tau \\
&= r_0\frac{(m(t))^i}{i!}+\int_0^t a(s)\frac{(m(t)-m(s))^i}{i!}ds.
\end{aligned}$$

D'après (2.36)-(2.38) et (2.40)-(2.42), les relations (2.9)-(2.14) sont également vérifiées pour $x_{i+1}(t)$.

Par conséquent, la suite $(x_i(\cdot))_{i\geq 1}$ satisfaisant (2.9)-(2.14) est construite.

Etape 3.

Montons que la suite $(x_i(\cdot))_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution locale du problème (2.6).

Il résulte de (2.14) que la série $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\|x_{i+1}(t)-x_i(t)\|$ converge pour tout $t\in I$. Donc, pour tout $t\in I$, la suite $(x_i(\cdot))_{i\geq 1}$ est une suite de Cauchy. Par conséquent, la suite $(x_i(\cdot))_{i\geq 1}$ converge ponctuellement vers une application x. De même, (2.13) implique que la suite $(\dot{x}_i(\cdot))_{i\geq 1}$ converge presque partout vers une application v. De (2.40) nous avons

$$\|x(t)\|\leq r(t), \quad \|v(t)\|\leq \dot{r}(t) \ p.p \ sur \ I. \tag{2.43}$$

Par conséquent, en utilisant le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue on trouve que

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to\infty}\|\dot{x}_i-v\|_1 &= \lim_{i\to\infty}\int_0^1 \|\dot{x}_i(t)-v(t)\|dt \\
&= \int_0^1 \lim_{i\to\infty}\|\dot{x}_i(t)-v(t)\|dt = 0.
\end{aligned}$$

Donc la suite $(\dot{x}_i(\cdot))_{i\geq 1}$ converge vers v dans $L^1(I,E)$. En utilisant (2.9) et passant à la limite quand $i\to\infty$, on obtient, pour tout $t\in I$

$$x(t)=\lim_{i\to\infty}x_{i+1}(t)=x_0+\lim_{i\to\infty}\int_0^t \dot{x}_i(s)ds.$$

Par le Théorème de la convergence dominée on trouve que, pour tout $t \in I$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \lim_{i\to\infty} \dot{x}_i(s)ds = x_0 + \int_0^t v(s)ds.$$

Ainsi, x est une application absolument continue avec $\dot{x} = v$ *p.p sur* I.
De (2.43) et (2.8)–(2.10) nous avons

$$d(\dot{x}_{i+1}(t), F(t, x(t)) \leq k(t)\|x_i(t) - x(t)\| \quad p.p\ sur\ I.$$

Par passage à la limite quand $i \to \infty$, on obtient

$$d(\dot{x}(t), F(t, x(t)) = 0 \quad p.p\ sur\ I.$$

Alors

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \quad p.p\ sur\ I,$$

et x est une solution de l'inclusion différentielle (2.6) satisfaisant (2.7) . □

Le Théorème 2.1 implique que si les hypothèses $H(F)$ sont vérifiées alors l'inclusion différentielle

$$\dot{x}(t) \in \overline{co}F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad \|x_0\| < b, \tag{2.44}$$

admet une solution.
On établir maintenant l'existence d'une solution du problème (2.44) sous différentes hypothèses.

Hypothèses ($\mathbf{H}(\overline{\mathbf{co}}\mathbf{F})$). *Soit* $F : T \times b\overline{B} \rightrightarrows E$ *une multi-application à valeurs non vide vérifiant*

1. *La multi-application* $t \mapsto \overline{co}F(t, x(t))$ *est mesurable pour toute application* $x(\cdot) \in C(T, E)$ *avec* $\|x(t)\| \leq b$ *pour tout* $t \in T$.
2. *La multi-application* $\overline{co}F$ *est strictement intégrablement* $(\rho - H)$*-lipschitzienne sur* $T \times b\overline{B}$ *; i.e., il existe une fonction positive* $m(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R})$ *et* $\beta > 0$ *tel que*

$$haus_\rho(\overline{co}F(t, x), \overline{co}F(t, y)) < (m(t) + \beta\rho)\|x - y\| \quad p.p; \quad \rho > 0 \quad x \neq y, \tag{2.45}$$

3. *Il existe une fonction strictement positive* $\rho_0 \in L^1(T, \mathbb{R})$ *telle que*

$$d(0, \overline{co}F(t, x)) < \rho_0(t) \quad p.p.\ sur\ T,\ pour\ tout\ x \in E\ tel\ que \quad \|x\| \leq b. \tag{2.46}$$

On pose

$$\rho(t) = 2\rho_0(t), \tag{2.47}$$

$$l(t) = 4(m(t) + \beta\rho(t)), \tag{2.48}$$

et on prend la solution r_* de l'équation différentielle

$$\dot{r}_*(t) = \rho(t) + l(t)r_*(t), \quad t \in T, \quad r_*(0) = r_0 < b, \tag{2.49}$$

définie par

$$r_*(t) = r_0 \exp\sigma(t) + \int_0^t \exp(\sigma(t) - \sigma(s))\rho(s)ds.$$

telle que $\sigma(t) = \int_0^t l(s)ds$, pour tout $t \in T$.

Théorème 2.2. *Si les Hypothèses $H(\overline{co}F)$ sont vérifiées et $\|x_0\| \leq r_0 < b$, alors il existe une solution x du problème* (2.44) *telle que*

$$\|x(t)\| \leq r_*(t) \quad \textit{pour tout} \quad t \in T, \quad \|\dot{x}(t)\| \leq \dot{r}_*(t) \quad \textit{p.p} \quad \textit{sur} \quad T, \tag{2.50}$$

avec $r_*(t) \leq b$.

Preuve. Puisque ρ_0 est strictement positive et $\rho(t) > \rho_0(t)$ $\forall t \in T$, par (2.47), ρ est aussi strictement positive. Donc par les même arguments utilisés dans la preuve du théorème précèdent, et par la relation (2.46), il résulte que $\overline{co}F(t,x) \cap \rho_0(t)\overline{B} \neq \emptyset$ et $\overline{co}F(t,x) \cap \rho(t)\overline{B} \neq \emptyset$ pour tout $t \in T$ avec $\|x\| \leq b$.
Considérons la multi-application $U : T \times b\overline{B} \rightrightarrows E$ définie par

$$U(t,x) = \overline{co}F(t,x) \cap \rho(t)\overline{B}. \tag{2.51}$$

Alors U est une multi-application à valeurs non vides et fermées. D'après (2.48), (2.47), (2.45), (2.51) et la Proposition 1.16, on trouve que, pour tout $x, y \in b\overline{B}$ tels que $x \neq y$ et pour presque tout $t \in T$,

$$\begin{aligned} haus(\overline{co}F(t,x) \cap \rho(t)\overline{B}, \overline{co}F(t,y) \cap \rho(t)\overline{B}) &= haus(\overline{co}F(t,x)_{\rho(t)}, \overline{co}F(t,y)_{\rho(t)}) \\ &\leq \frac{2\rho(t)}{\rho(t) - \rho_0(t)} haus_{\rho(t)}(\overline{co}F(t,x), \overline{co}F(t,y)) \\ &< \frac{2\rho(t)}{\rho(t) - \rho_0(t)} (m(t) + \beta\rho(t))\|x - y\| \\ &= 4(m(t) + \beta\rho(t))\|x - y\|. \end{aligned}$$

D'où

$$haus(U(t,x), U(t,y)) < l(t)\|x - y\| \quad p.p, \tag{2.52}$$

pour $\|x\| \leq b$ et $\|y\| \leq b$, avec $x \neq y$.
Soit $v \in U(t,0)$ alors, pour tout $z \in U(t,x)$, $\|z\| \leq \|v\| + \|z - v\|$ d'où

$$d(0, U(t,x)) \leq \|v\| + d(v, U(t,x))$$

Or, par (2.52) on a

$$\begin{aligned} d(v, U(t,x) &\leq \sup_{v\in U(t,0)} d(v, U(t,x)) \\ &\leq e(U(t,x), U(t,0)) \\ &\leq haus(U(t,x), U(t,0)) < l(t)\|x\|, \end{aligned}$$

et comme $U(t,0) \subset \rho(t)\overline{B}$, alors

$$\|v\| \leq \rho(t).$$

D'où

$$d(0, U(t,x)) < \rho(t) + l(t)\|x\|, \quad \|x\| \leq b. \tag{2.53}$$

D'autre part, soit $x(\cdot) \in C(T,E)$ avec $\|x(t)\| \leq b$ pour tout $t \in I$. Considérons la multi-application $\Gamma : T \rightrightarrows E$ définie par $\Gamma(t) = \overline{co}(F(t,x(t)))$ et considérons la multi-application $G : T \rightrightarrows E$ définie par

$$G(t, x(t)) = \Gamma(t) \cap \rho(t)\overline{B}.$$

Alors, G est à valeurs fermées et non vides. Nous avons

$$\begin{aligned} gph(G) &= \{(t,x) : x \in G(t)\} \\ &= \{(t,x) : x \in \Gamma(t) \; et \; \|x\| \leq \rho(t)\} \\ &= \{(t,x) : x \in \Gamma(t)\} \cap \{(t,x) : \|x\| \leq \rho(t)\} \\ &= \{(t,x) : x \in \Gamma(t)\} \cap \{(t,x) : x \in \overline{B}(0,\rho(t))\} \\ &= gph(\Gamma) \cap gph(\overline{B}(0,\rho(\cdot))) \end{aligned}$$

Par hypothèses $H(\overline{co}F)(1)$, on a que Γ est mesurable et d'après le Lemme 1.1 $gph(\Gamma)$ est mesurable.
De plus on a d'après (2.46) et (2.47) que $\rho(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}_+)$ donc elle est mesurable. Ainsi, par le Théorème 1.8, on conclut que $gph(\overline{B}(0,\rho(\cdot))) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(E)$ et donc $gph(G) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(E)$, c'est à dire que pour toute application $x(\cdot) \in C(T,E)$ avec $\|x(t)\| \leq b$ pour $t \in T$, la multi-application $t \mapsto U(t, x(t))$ est mesurable (voir le Lemme 1.2).
On remarque que $\rho(t) \leq \dot{r}_*(t)$ $\forall t \in T$, donc $U(t,x) \subset \dot{r}_*(t)\overline{B}$. D'où la multi-application U vérifie toutes les hypothèse du Théorème 2.1. Alors, il existe une solution x du problème (2.44) telles que $\|x(t)\| \leq r_*(t)$ $\forall t \in T$ et $\|\dot{x}(t)\| \leq \dot{r}_*(t)$ $p.p$ avec $r(t) \leq b$. □

Corollaire 2.1. *Considérons la multi-application $F : T \times E \rightrightarrows E$ à valeurs non vides fermées et supposons que pour toute $x(\cdot) \in C(T,E)$, les hypothèses $H(\overline{co}F)$ sont vérifiées, où* (2.45) *et* (2.46) *sont vérifiées pour tout $x, y \in E$ avec $x \neq y$. Alors pour tout $x_0 \in E$*

avec $r_*(0) = r_0 > \|x_0\|$, *il existe une solution globale* x *du problème* (2.44) *satisfaisant* (2.50).

Pour $g(\cdot) \in AC^{1.1}(T, E)$, on pose

$$Q(g) = \{(t, x) \in T \times E : \|g(t) - x\| \leq b\},$$

avec $b > 0$ et considérons $F : Q(g) \rightrightarrows E$. Faisons les hypothèses suivantes.

Hypothèses $(\mathbf{H_g}(\mathbf{F}))$.

1. *La multi-application* $t \mapsto F(t, x(t))$ *est mesurable pour toute application* $x(\cdot) \in C(T, E)$ *avec* $\|x(t) - g(t)\| \leq b$ *pour tout* $t \in T$.
2. *La fonction* a *est strictement positive et*

$$d(\dot{g}(t), F(t, x)) < a(t) + k(t)\|x - g(t)\| \quad \text{pour tout } t \in I, \tag{2.54}$$

avec $\|x - g(t)\| \leq b$, $\|y - g(t)\| \leq b$, $x \neq y$.

3. $$haus_\rho(-\dot{g}(t) + F(t, x), -\dot{g}(t) + F(t, y)) < k(t)\|x - y\| \ p.p. \tag{2.55}$$

avec $\|x - g(t)\| \leq b$, $\|y - g(t)\| \leq b$, $x \neq y, 0 \leq \rho \leq \dot{r}(t)$, *où* $r(\cdot)$ *est la solution de l'équation* (2.1).

Considérons l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \ p.p, \\ x(0) = x_0, \quad \|x_0 - g(0)\| < b. \end{cases} \tag{2.56}$$

Corollaire 2.2. *Si les Hypothèses* $H_g(F)$ *et* $\|x_0 - g(0)\| \leq r_0 < b$ *sont vérifiées, alors il existe une solution* x *du problème* (2.56) *telle que*

$$\|x(t) - g(t)\| \leq r(t) \text{ pour tout } t \in T, \quad \|\dot{x}(t) - \dot{g}(t)\| \leq \dot{r}(t) \quad p.p \text{ sur } T. \tag{2.57}$$

avec $r(t) \leq b$.

Preuve. Soit la multi-application $U : T \times b\overline{B} \rightrightarrows E$ définie par

$$U(t, z) = -\dot{g}(t) + F(t, z + g(t)), \quad \|z\| \leq b. \tag{2.58}$$

Soit $z(\cdot) \in C(T, E)$ telle que $\|z(t)\| \leq b$, $\forall t \in T$. On pose $x(t) = z(t) + g(t), \forall t \in T$. Puisque $g \in AC^{1.1}(T, E)$ cela implique que $x(\cdot) \in C(T, E)$. Donc, d'après l'hypothèse

$H_g(F)(1)$ on trouve que $t \mapsto F(t, z(t)+g(t))$ est une multi-application mesurable et comme $\dot{g}(\cdot) \in L^1(T, E)$ elle est mesurable, donc on obtient la mesurabilité de la multi-application $t \mapsto -\dot{g}(t) + F(t, z(t) + g(t))$. D'où $H(F)(1)$ est vérifiée pour la multi-application U.
D'autre part pour tout $v \in U(t, z)$, soit $t \in I$, on a $d(0, U(t, z)) = \inf_{v \in U(t,z)} \|v\|$ et de (2.58), il existe $w \in F(t, z + g(t))$ telle que $v = -\dot{g}(t) + w$, donc

$$\begin{aligned} d(0, U(t, z)) &= \inf_{w \in F(t, z+g(t))} \|w - \dot{g}(t)\| \\ &= d(-\dot{g}(t), F(t, z + g(t)) \\ &< a(t) + k(t)\|z + g(t) - g(t)\|. \end{aligned}$$

D'où

$$d(0, U(t, z)) < a(t) + k(t)\|z\|. \tag{2.59}$$

Soit $t \in T$, $0 \leq \rho \leq \dot{r}(t)$ et $z, v \in b\overline{B}$ telles que $z \neq v$. On a

$$haus_\rho(u(t, z), u(t, v)) = haus_\rho(-\dot{g}(t) + F(t, z + g(t)), -\dot{g}(t) + F(t, v + g(t))).$$

En utilisant $H_g(F)(3)$, on obtient

$$\begin{aligned} haus_\rho(U(t, z), U(t, v)) &< k(t)\|z + g(t) - v - g(t)\| \\ &= k(t)\|z - v\|. \end{aligned}$$

Donc, la multi-application U vérifie toutes les hypothèses $H(F)$. D'où par le Théorème 2.1, l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \dot{z}(t) \in U(t, z(t)) \quad p.p, \\ z(0) = z_0, \ \|z_0\| < b. \end{cases}$$

admet une solution locale $z(\cdot)$.
On pose $x = z+g$, on trouve que x est une solution du problème (2.56), vérifiant (2.57). $\square$

CHAPITRE 3

RELAXATION

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'approximation des solutions de l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_{\overline{co}F})\begin{cases}\dot{x}(t) \in \overline{co}F(t, x(t)),\\ x(0) = x_0,\end{cases}$$

par les solutions de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_F)$, avec F est une multi-application à valeurs fermées et non vides.
On prend une application continue $x_* : T \to E$ et on pose

$$Q_* = \{(t, x) \in T \times E : \|x - x_*(t)\| \leq b\},$$

avec $b > 0$ et on considère $F : Q_* \rightrightarrows E$. Faisons les hypothèses suivantes.

Hypothèses $(\mathbf{H}_*(\mathbf{F}))$**.**

1. *La multi-application* $t \mapsto F(t, x(t))$ *est mesurable pour toute application* $x(\cdot) \in C(T, E)$ *avec* $\|x(t) - x_*(t)\| \leq b$ *pour tout* $t \in T$.
2. *Il existe* $\gamma(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}_+)$ *telle que*
$$F(t, x) \cap \gamma(t)\overline{B} \neq \emptyset, \quad \textit{pour tout } t \in T \textit{ et } x \in E \textit{ tel que } \|x - x_*(t)\| \leq b. \tag{3.1}$$
3. *La multi-application* F *est strictement intégrablement* $(\rho - H)$*-lipschitzienne sur* Q_*, *i.e.,*
$$haus_\rho(F(t, x), F(t, y)) < (k_*(t) + \beta\rho)\|x - y\|, \; \forall\, t \in T \tag{3.2}$$

tel que $k_*(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R})$ est une fonction strictement positive, tandis que $\beta > 0$ et $\rho \geq 0$, ainsi que $\|x - x_*\| \leq b$ et $\|y - x_*\| \leq b$, avec $x \neq y$.

Définition 3.1. *Une solution x_* du problème $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$ est dite stricte s'il existe une fonction $\alpha(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}_+)$ telle que*

$$\dot{x}_*(t) \in \overline{co}(F(t, x_*(t)) \cap \alpha(t)\overline{B}),\ p.p\ sur\ T.$$

Remarque 3.1. *Puisque, pour tout $t \in T$, on a*

$$F(t, x(t)) \subset \overline{co}F(t, x(t)),$$

alors chaque solution du problème $(\mathcal{P}_F)$ est une solution stricte du problème $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$.

Théorème 3.1. *Soit $x_*(\cdot)$ une solution stricte du problème $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$ et supposons que les hypothèses $\mathbf{H}_*(\mathbf{F})$ sont vérifiées. Alors il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de solutions globales du problème $(\mathcal{P}_F)$ telle que (x_n) converge vers x_* dans $C(T, E)$.*

Preuve. Etape 1.

Soit x_* une solution stricte du problème $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$, alors il existe $\alpha(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\dot{x}_*(t) \in \overline{co}(F(t, x_*(t)) \cap \alpha(t)\overline{B}),\ p.p\ sur\ T. \tag{3.3}$$

Considérons la multi-application $K : T \rightrightarrows E$ définie par $K(t) = F(t, x_*(t))$ et considérons la multi-application $H : T \rightrightarrows E$ définie par

$$H(t) = K(t) \cap \alpha(t)\overline{B}.$$

Il est clair que H est à valeurs fermées non vides et bornées. D'abord, on va montrer que H est une multi-application mesurable. Nous avons

$$\begin{aligned}
gph(H) &= \{(t, x) : x \in H(t)\} \\
&= \{(t, x) : x \in K(t)\ et\ \|x\| \leq \alpha(t)\} \\
&= \{(t, x) : x \in K(t)\} \cap \{(t, x) : \|x\| \leq \alpha(t)\} \\
&= \{(t, x) : x \in K(t)\} \cap \{(t, x) : x \in \overline{B}(0, \alpha(t))\} \\
&= gph(K) \cap gph(\overline{B}(0, \alpha(\cdot))).
\end{aligned}$$

Comme $\alpha(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}_+)$, elle est mesurable. Donc, par le Théorème 1.8, la multi-application $\overline{B}(0, \alpha(\cdot))$ est mesurable, et par le Lemme 1.2 son graphe est mesurable. De plus par l'hypothèse $H_*(F)(1)$, K est mesurable, donc son graphe est mesurable, d'où

$gph(H) \in \mathcal{L}(T) \otimes \mathcal{B}(E)$. Il résulte que H est mesurable.

D'autre part, puisque pour tout $t \in T$, $H(t) \subset \alpha(t)\overline{B}$ on a

$$\sup\{\|v\|, v \in H(t)\} \leq \alpha(t),\ avec\ \alpha(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}_+),$$

donc H est intégrablement bornée.

Par (3.3), $\dot{x}_* \in S(\overline{co}H)$ et par le Théorème 1.11, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $v_n \in S(H)$ c'est à dire

$$v_n(t) \in F(t, x_*(t)) \cap \alpha(t)\overline{B}\ p.p., \tag{3.4}$$

telle que

$$\|\dot{x}_* - v_n\|_w = \sup_{0 \leq s \leq t \leq 1} \|\int_s^t (\dot{x}_*(\tau) - v_n(\tau))d\tau\| < 1/n.$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$, on trouve que $\|\dot{x}_* - v_n\|_w \to 0$. D'où

$$v_n \to \dot{x}_*\ dans\ L^1_w(T, E). \tag{3.5}$$

On pose, pour tout $t \in T$

$$y_n(t) = x_0 + \int_0^t v_n(s)ds,\ n \geq 1. \tag{3.6}$$

Alors, par l'équivalence des normes (1.1) et (1.2), on a

$$\begin{aligned}
\|y_n - x_*\|_C &= \max_{0 \leq t \leq 1} \|y_n(t) - x_*(t)\| \\
&= \max_{0 \leq t \leq 1} \|x_0 + \int_0^t v_n(s)ds - x_0 - \int_0^t \dot{x}_*(s)ds\| \\
&= \max_{0 \leq t \leq 1} \|\int_0^t v_n(s)ds - \int_0^t \dot{x}_*(s)ds\| \\
&= \max_{0 \leq t \leq 1} \|\int_0^t (v_n(s) - \dot{x}_*(s))ds\| \\
&= |\|v_n - \dot{x}_*\|| \\
&\leq c\|v_n - \dot{x}_*\|_w.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$ et de (3.5), on obtient

$$y_n \to x_*\ dans\ C(T, E). \tag{3.7}$$

Il résulte de (3.7) qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $\|y_n - x_*\|_C \leq b$ et donc

$$\|y_n(t) - x_*(t)\| \leq b,\ pour\ tout\ t \in T. \tag{3.8}$$

Alors, de (3.1), on a pour tout $n \geq n_0$

$$F(t, y_n(t)) \cap \gamma(t)\overline{B} \neq \emptyset \quad pour\ tout\ t \in T.$$

On pose

$$l(t) = \max(\alpha(t), \gamma(t), k_*(t)) \quad \textit{pour tout } t \in T. \tag{3.9}$$

Comme l est le maximum de fonctions strictement positives dans $L^1(T, \mathbb{R}_+)$, $l(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}_+)$. Soit $t \in T$ et $x \in E$ tel que $\|x_*(t) - x\| \leq b$. De (3.1), on prend $w \in F(t,x) \cap \gamma(t)\overline{B}$, et de (3.9) observons que $\gamma(t) \leq l(t)$, cela implique que $\|w\| \leq \gamma(t) \leq l(t)$, alors $w \in F(t,x) \cap l(t)\overline{B}$, d'où

$$F(t,x) \cap l(t)\overline{B} \neq \emptyset, \quad \|x_*(t) - x\| \leq b. \tag{3.10}$$

Soit $t \in T$ tel que (3.4) soit vérifiée et prenons $\rho = l(t)$. Alors, pour tout $n \geq n_0$, par (3.8) et en utilisant (3.2) avec $x = x_*(t)$ et $y = y_n(t)$, on a pour tout $v \in F_\rho(t, x_*(t)) = F(t, x_*(t)) \cap \rho\overline{B}$,

$$\begin{aligned} d(v, F(t, y_n(t))) &\leq e(F(t, x_*(t))_\rho, F(t, y_n(t))) \\ &\leq haus_\rho(F(t, x_*(t)), F(t, y_n(t))) \\ &< (k_*(t) + \beta\rho)\|x_*(t) - y_n(t)\|. \end{aligned}$$

De (3.9), $k_*(t) \leq l(t)$, d'où, on trouve

$$d(v, F(t, y_n(t))) < l(t)(1 + \beta)\|x_*(t) - y_n(t)\|.$$

Donc, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$d(v, F(t, y_n(t))) \leq l(t)(1 + \beta)\|x_*(t) - y_n(t)\| - \varepsilon,$$

et il existe $w_\varepsilon \in F(t, y_n(t))$ tel que

$$\begin{aligned} \|v - w_\varepsilon\| &< d(v, F(t, y_n(t))) + \varepsilon \\ &\leq l(t)(1 + \beta)\|x_*(t) - y_n(t)\|. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$v - w_\varepsilon \in l(t)(1 + \beta)\|x_*(t) - y_n(t)\|B.$$

Alors

$$v \in w_\varepsilon + l(t)(1 + \beta)\|x_*(t) - y_n(t)\|B \subset F(t, y_n(t)) + l(t)(1 + \beta)\|x_*(t) - y_n(t)\|B,$$

Donc

$$F(t, x_*(t)) \cap l(t)(t)\overline{B} \subset F(t, y_n(t)) + l(t)(1 + \beta)\|x_*(t) - y_n(t)\|B. \tag{3.11}$$

D'autre part de (3.4) on a que $v_n(t) \in F(t, x_*(t)) \cap \alpha(t)\overline{B}$, et de (3.9) observons que $\alpha(t) \leq l(t)$, cela implique que $\|v_n(t)\| \leq \alpha(t) \leq l(t)$, alors $v_n(t) \in F(t, x_*(t)) \cap l(t)\overline{B}$. Donc d'après l'inclusion (3.11), on obtient

$$v_n(t) \in F(t, y_n(t)) + l(t)(1+\beta)\|x_*(t) - y_n(t)\|B.$$

Donc, il existe $z \in F(t, y_n(t))$ tel que

$$v_n(t) \in z + l(t)(1+\beta)\|x_*(t) - y_n(t)\|B.$$

Cela implique que

$$v_n(t) - z \in l(t)(1+\beta)\|x_*(t) - y_n(t)\|B.$$

D'òu

$$\|v_n(t) - z\| < l(t)(1+\beta)\|x_*(t) - y_n(t)\|.$$

Par conséquent

$$d(v_n(t), F(t, y_n(t))) < l(t)(1+\beta)\|x_*(t) - y_n(t)\|, \tag{3.12}$$

pour tout $n \geq n_0$.

De (3.7), il existe $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_1$, on ait $\|x_* - y_n\|_C \leq b/2$ et donc

$$\|x_*(t) - y_n(t)\|_C \leq b/2, \ \textit{pour tout } t \in T. \tag{3.13}$$

Etape 2.

Considérons la multi-application $U_n : T \times \frac{b}{2}\overline{B} \rightrightarrows E$ définie par

$$U_n(t, z) = -v_n(t) + F(t, z + y_n(t)), \ \textit{pour tout } t \in T, \ \ n \geq n_1. \tag{3.14}$$

Soit $z(\cdot) \in C(T, E)$ telle que $\|z(t)\| \leq b/2$ pour tout $t \in T$. On définit l'application $x_n : T \to E$ par $x_n(t) = z(t) + y_n(t)$, $\forall\, t \in T$. Pour tout $n \geq n_1$ et $t \in T$, on a

$$\begin{aligned}
\|x_n(t) - x_*(t)\| &= \|z(t) + y_n(t) - x_*(t)\| \\
&\leq \|z(t)\| + \|y_n(t) - x_*(t)\| \\
&\leq b/2 + b/2 \\
&\leq b.
\end{aligned}$$

D'où, $\|x_n(t) - x_*(t)\| \leq b$. D'après (3.6) et la Proposition 1.7, il résulte que $y_n(\cdot) \in AC^{1.1}(T, E)$, cela implique que $y_n(\cdot) \in C(T, E)$. D'où $x_n(\cdot) \in C(T, E)$. Donc d'après l'hypothèse $H_*(F)(1)$, on obtient la mesurabilité de la multi-application $t \mapsto F(t, x_n(t))$,

et puisque $v_n \in L^1(T,E)$, alors pour $n \geq n_1$ la multi-application $t \mapsto U_n(t,z(t))$ est mesurable. Soit $t \in T$ et soit $w \in -v_n(t) + F(t, z + y_n(t)) \cap l(t)\overline{B}$.
Donc,

$$w + v_n(t) \in F(t, z + y_n(t)) \cap l(t)\overline{B}$$

Cela implique que

$$w \in -v_n(t) + l(t)\overline{B}$$

et

$$w \in -v_n(t) + F(t, z + y_n(t)).$$

D'oú

$$-v_n(t) + F(t, z + y_n(t)) \cap l(t)\overline{B} \subset (-v_n(t) + F(t, z + y_n(t))) \cap (-v_n(t) + l(t)\overline{B}).$$

De plus, soit $w \in (-v_n(t) + F(t, z + y_n(t))) \cap (-v_n + l(t)\overline{B})$. Alors,

$$w \in -v_n(t) + l(t)\overline{B}.$$

Cela implique qu'il existe $m \in l(t)\overline{B}$ tel que $w = -v_n(t) + m$, donc d'après (3.4)

$$\begin{aligned}
\|w\| &= \| - v_n(t) + m\| \\
&\leq \|v_n(t)\| + \|m\| \\
&\leq l(t) + l(t) \\
&= 2l(t).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
-v_n(t) + F(t, z + y_n(t)) \cap l(t)\overline{B} &\subset (-v_n(t) + F(t, z + y_n(t))) \cap (-v_n(t) + l(t)\overline{B}) \qquad (3.15)\\
&\subset -v_n(t) + F(t, z + y_n(t)) \cap 2l(t)\overline{B}.
\end{aligned}$$

Il résulte de (3.10) que pour tout $n \geq n_1$, il existe $w_n \in F(t, z + y_n(t)) \cap l(t)\overline{B}$, alors pour $u = w_n - v_n(t)$, on a $u \in -v_n(t) + F(t, z + y_n(t)) \cap l(t)\overline{B}$. Donc on déduit de (3.15) que

$$U_n(t,z) \cap 2l(t)\overline{B} \neq \emptyset, \|z\| \leq b/2, n \geq n_0 \quad p.p\ sur\ T.$$

Soit $t \in T$ et $n \geq n_1$. Posons $\rho = 3l(t)$. Soient $z, v \in E$ tels que $\|z\| \leq b/2$ et $\|v\| \leq b/2$. Soit $w \in U_n(t,z) \cap 2l(t)\overline{B}$, et posons $u = w + v_n(t)$. Alors, $u \in F(t, z + y_n(t)) \cap 3l(t)\overline{B}$. Donc, on a

$$\begin{aligned}
d(u, F(t, v + y_n(t))) &\leq e(F_\rho(t, z + y_n(t)), F(t, v + y_n(t))) \\
&\leq haus_\rho(F(t, z + y_n(t)), F(t, v + y_n(t))) \\
&< (k_*(t) + \beta\rho)\|z - v\|.
\end{aligned}$$

De (3.9) on a $k_*(t) \leq l(t)$ alors,

$$d(u, F(t, v + y_n(t))) < l(t)(1 + 3\beta)\|z - v\|.$$

Donc, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$d(u, F(t, v + y_n(t))) \leq l(t)(1 + 3\beta)\|z - v\| - \varepsilon,$$

et il existe $w_\varepsilon \in F(t, v + y_n(t))$ tel que

$$\begin{aligned} \|u - w_\varepsilon\| &< d(m, F(t, v + y_n(t))) + \varepsilon \\ &\leq l(t)(1 + 3\beta)\|z - v\|. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$u - w_\varepsilon \in l(t)(1 + 3\beta)\|z - v\|B$$

Alors

$$w \in -v_n(t) + w_\varepsilon + l(t)(1+3\beta)\|z-v\|B \subset -v_n(t) + F(t, v + y_n(t)) + l(t)(1+3\beta)\|z-v\|B,$$

Donc

$$U_n(t, z) \cap 2l(t)\overline{B} \subset U_n(t, v) + l(t)(1 + 3\beta)\|z - v\|B, \tag{3.16}$$

pour $\|z\| \leq b/2$ et $\|v\| \leq b/2$. En interchangeant les rôles entre z et v, on obtient

$$U_n(t, v) \cap 2l(t)(t)\overline{B} \subset U_n(t, z) + l(t)(1+3\beta)\|z-v\|B, \forall t \in T,\ \|z\| \leq b/2,\ \|v\| \leq b/2,\ n \geq n_1.$$

Donc, pour $v \equiv 0$, on trouve

$$U_n(t, 0) \cap 2l(t)\overline{B} \subset U_n(t, z) + l(t)(1 + 3\beta)\|z\|B, \forall t \in T,\ \|z\| \leq b \setminus 2,\ n \geq n_1.$$

Ainsi, pour $n \geq n_1$, $t \in T$, $z \in E$ avec $\|z\| \leq b/2$ et $u \in U_n(t, 0) \cap 2l(t)\overline{B}$, il existe $w \in U_n(t, z)$ tel que

$$\|u - w\| < l(t)(1 + 3\beta)\|z\|.$$

Ce qui donne

$$d(u, U_n(t, z)) < l(t)(1 + 3\beta)\|z\|. \tag{3.17}$$

Or,

$$d(0, U_n(t, z)) \leq \|u\| + d(u, U_n(t, z)).$$

Donc, la relation (3.17) donne

$$d(0, U_n(t, z)) < \|u\| + l(t)(1 + 3\beta)\|z\|. \tag{3.18}$$

En utilisant (3.12) et (3.14) pour $z = 0$, on obtient

$$d(0, -v_n(t) + F(t, y_n(t))) = d(v_n(t), F(t, y_n(t))) < l(t)(1+\beta)\|x_*(t) - y_n(t)\|,$$

d'où

$$d(0, U_n(t, 0)) < l(t)(1+\beta)\|x_*(t) - y_n(t)\|. \tag{3.19}$$

Puisque $u \in U_n(t, 0) \cap 2l(t)\overline{B}$ est arbitraire, on trouve que

$$\begin{aligned} d(0, U_n(t, z)) &\leq \inf_{u \in U_n(t,0)} \|u\| + l(t)(1+3\beta)\|z\| \\ &= d(0, U_n(t, 0)) + l(t)(1+3\beta)\|z\|. \end{aligned}$$

De plus, par (3.19) on obtient

$$d(0, U_n(t, z)) < l(t)(1+\beta)\|x_*(t) - y_n(t)\| + l(t)(1+3\beta)\|z\|, \quad \|z\| \leq b/2,\ n \geq n_1. \tag{3.20}$$

On pose, pour tout $t \in T$,

$$a_n(t) = l(t)(1+\beta)(\|x_*(t) - y_n(t)\| + 1/n), \tag{3.21}$$

$$k(t) = l(t)(1+3\beta). \tag{3.22}$$

Avec ces notations, (3.20) devient

$$d(0, U_n(t, z)) < a_n(t) + k(t)\|z\|, \tag{3.23}$$

pour $t \in T$, $\|z\| \leq b/2$ et $n \geq n_0$.
Considérons l'équation différentielle suivante

$$\dot{r}_n(t) = a_n(t) + k(t)r_n(t) \ p.p., \quad r_n(0) = 0. \tag{3.24}$$

En utilisant (2.3) pour la solution de (2.1), en remplaçant $a(t)$ par $a_n(t)$ et r_0 par $r_n(0) = 0$, on obtient

$$r_n(t) = \int_0^t \exp(m(t) - m(s))a_n(s)ds,$$

où $m(t) = \int_0^t k(s)ds$ pour tout $t \in T$, et par (3.21) on a

$$r_n(t) = \int_0^t \exp(m(t) - m(s))l(s)(1+\beta)(\|x_*(s) - y_n(s)\| + 1/n)ds. \tag{3.25}$$

On remarque que m est une fonction continue et strictement croissante, donc pour tout $t \in T$ et $s \in [0, t]$, $0 \leq m(s) \leq m(t)$ d'où, $0 \leq m(t) - m(s) \leq m(t)$, par conséquent $exp(m(t) - m(s)) \leq exp(m(t))$. De (3.25) on trouve, pour tout $t \in T$

$$\begin{aligned} r_n(t) &\leq \int_0^t exp(m(t))l(s)(1+\beta)(\|x_*(s) - y_n(s)\| + 1/n)ds \\ &\leq (1+\beta)(\|x_* - y_n\|_C + 1/n)exp(m(t)) \int_0^t l(s)ds \\ &\leq (1+\beta)(\|x_* - y_n\|_C + 1/n)exp(m(t))\|l\|_1. \end{aligned}$$

D'où

$$\|r_n\|_C \leq (1+\beta)(\|x_* - y_n\|_C + 1/n)exp(\|m\|_C)\|l\|_1.$$

Donc par passage à la limite quand $n \to \infty$ et d'après (3.7) on aura

$$r_n \to 0 \quad dans\ C(T, \mathbb{R}_+). \tag{3.26}$$

Ainsi, il existe $n_2 \geq n_1$ tel que, pour tout $n \geq n_2$

$$0 \leq r_n(t) \leq b/2, \quad pour\ tout\ t \in T. \tag{3.27}$$

D'autre part, de (3.23) on a, pour tout $z \in E$ tel que $\|z\| \leq b/2$

$$d(0, U_n(t,z)) = \inf_{v \in U_n(t,z)} \|v\| < a_n(t) + k(t)\|z\|, \forall t \in T. \tag{3.28}$$

Soit $t \in T$ et soit $z \in E$ tel que $\|z\| \leq r_n(t)$. Alors, d'après (3.27), (3.28) est vérifiée. et on a

$$d(0, U_n(t,z)) < a_n(t) + k(t)r_n(t) = \dot{r}(t)$$

et par les mêmes arguments utilisés au-dessus, on obtient

$$U_n(t,z) \cap \dot{r}_n(t)\overline{B} \neq \emptyset \quad pour\ t \in T\ et\ \|z\| \leq r_n(t).$$

Soient $n \geq n_2$, $t \in T$ et soient $z, v \in E$ tels que $\|z\| \leq r_n(t)$, $\|v\| \leq r_n(t)$. Soit $w \in U_n(t,z) \cap \dot{r}_n(t)\overline{B}$, donc $w \in U_n(t,z)$ et $\|w\| \leq \dot{r}_n(t)$. De (3.14), on a $w + v_n(t) \in F(t, z + y_n(t))$. On pose $u = w + v_n(t)$ alors, par (3.9) et (3.4), on a

$$\|u\| \leq \|w\| + \|v_n(t)\| \leq \dot{r}_n(t) + \alpha(t) \leq \dot{r}_n(t) + l(t).$$

Donc, en utilisant (3.2) pour $\rho = l(t) + \dot{r}_n(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} d(u, F(t, v + y_n(t))) &\leq e(F_\rho(t, z + y_n(t)), F(t, v + y_n(t))) \\ &\leq haus_\rho(F(t, z + y_n(t)), F(t, v + y_n(t))) \\ &< (k_*(t) + \beta(l(t) + \dot{r}_n(t)))\|z - v\| \\ &\leq (l(t) + \beta(l(t) + \dot{r}_n(t)))\|z - v\|. \end{aligned}$$

Donc par les mêmes arguments utilisés au-dessus, on trouve

$$u \in F(t, v + y_n(t)) + (l(t) + \beta(l(t) + \dot{r}_n(t))\|z - v\|B.$$

D'où

$$w \in v_n(t) + F(t, v + y_n(t)) + (l(t) + \beta(l(t) + \dot{r}_n(t))\|z - v\|B.$$

Par conséquent

$$U_n(t,z) \cap \dot{r}(t)\overline{B} \subset U_n(t,v) + (l(t) + \beta(l(t) + \dot{r}_n(t)))\|z - v\|B. \tag{3.29}$$

De (3.7), il existe $n_3 \geq n_2$ tel que pour tout $n \geq n_3$ on ait $\|x_* - y_n\|_C + 1/n \leq 1/(1+\beta)$, d'où, de (3.21), on aura $a(t) \leq l(t), \forall t \in T$ et de (3.26), il existe $n_4 \geq n_3$ tel que, pour tout $n \geq n_4$ on ait $\|r_n\|_C \leq 1/(1+3\beta)$, d'où de (3.22), on aura

$$k(t)r_n(t) \leq l(t), \forall t \in T.$$

Donc, de (3.24), on trouve que

$$0 \leq \dot{r}_n(t) \leq 2l(t) \quad p.p \ sur \ T.$$

Considérons l'inclusion différentielle

$$\dot{z}(t) \in U_n(t,z), \quad z(0) = z_0, \tag{3.30}$$

où $\|z(t)\| \leq b/2, \forall t \in T$. Pour tout $n \geq n_4$, et par (3.23) et (3.29) la multi-application $U_n : T \times b/2 \rightrightarrows E$ vérifie les hypothèses $H(F)$. En prenant (3.27) en considération, par le Théorème 2.1, et pour tout $n \geq n_4$, l'inclusion différentielle (3.30) admet une solution globale z_n vérifiant $\|z_n(t)\| \leq r_n(t), \forall t \in T$ et $\|\dot{z}_n(t)\| \leq \dot{r}_n(t),\ p.p \ sur \ T$.

Etape 3.

Posons $x_n(t) = z_n(t) + y_n(t), \forall t \in T, \forall n \geq n_4$, alors $\dot{x}_n(t) = \dot{z}_n(t) + \dot{y}_n(t),\ p.p \ sur \ T$ et pour tout $t \in T$

$$\begin{aligned} \|x_n(t) - x_*(t)\| &\leq \|x_n(t) - y_n(t)\| + \|y_n(t) - x_*(t)\| \\ &\leq \|z_n(t)\| + b/2 \\ &\leq b. \end{aligned} \tag{3.31}$$

De plus, par (3.30) et (3.14),

$$\dot{x}_n(t) \in F(t, x_n(t)) \ p.p \ et \ x_n(0) = z_n(0) + y_n(0) = x_0.$$

Finalement, pour tout $n \geq n_1$ et par (3.31)

$$\begin{aligned} \|x_n - x_*\|_C &\leq \|z_n\|_C + \|y_n - x_*\|_C \\ &\leq r_n + \|y_n - x_*\|_C \end{aligned}$$

Donc, par (3.26) et (3.7),

$$x_n \to x_* \ dans \ C(T,E),$$

c'est à dire que (x_n) est une suite de solutions de $(\mathcal{P}_F)$ qui converge uniformément vers x_*. La preuve du théorème est achevée. □

Remarque 3.2. *Les hypothèses du Théorème 3.1 assurer l'existence de solutions globales du problème* $(\mathcal{P}_F)$.

Remarque 3.3. *Les hypothèses* $H(F)(1)$ *et* $H_g(F)(1)$ *sont vérifiées lorsque la multi-application* F *est* $\Sigma \otimes \mathcal{B}(E)$*-mesurable sur* Q *et* $Q(g)$ *respectivement (voir le Théorème 1.6).*

CHAPITRE 4

EXEMPLE

Dans ce chapitre, on présente un exemple d'une multi-application F à valeurs non vides fermées telle que le problème $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$ admet une solution, toute solution de $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$ est stricte et le théorème de relaxation est vérifié.
Considérons les applications suivantes

$$\phi : T \times E \to E'$$

et

$$b_i : T \times E \to \mathbb{R}$$

pour $i = 1, 2$ telles que

$$\|\phi(t,x)\|_* \geq d > 0, \quad b_2(t,x) \leq b_1(t,x) \quad \textit{pour tout } (t,x) \in T \times E. \tag{4.1}$$

Proposition 4.1. *La multi-application* $\Gamma : T \times E \rightrightarrows E'$, *définie par*

$$\Gamma(t,x) = \{v \in E;\ b_2(t,x) \leq \langle \phi(t,x), v \rangle \leq b_1(t,x)\}, (t,x) \in T \times E, \tag{4.2}$$

est à valeurs non vides fermées et convexes.

Preuve. Soient $(t,x) \in T \times E$ et $(v_n) \subset \Gamma(t,x)$ tel que $v_n \to v$ dans E alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_2(t,x) \leq \langle \phi(t,x), v_n \rangle \leq b_1(t,x),$$

et par passage à la limite quand $n \to \infty$, on trouve que

$$b_2(t,x) \leq \langle \phi(t,x), v \rangle \leq b_1(t,x),$$

Cela implique que $v \in \Gamma(t,x)$. D'où $\Gamma(t,x)$ est un fermé.
Soit $v, w \in \Gamma(t,x)$, soit $t \in [0,1]$. D'après (4.1) on a

$$b_2(t,x) \leq \langle \phi(t,x), v \rangle \leq b_1(t,x),$$

et

$$b_2(t,x) \leq \langle \phi(t,x), w \rangle \leq b_1(t,x).$$

Ce qui donne

$$\begin{gathered} tb_2(t,x) \leq t\langle \phi(t,x), v \rangle \leq tb_1(t,x), \\ (1-t)b_2(t,x) \leq (1-t)\langle \phi(t,x), w \rangle \leq (1-t)b_1(t,x). \end{gathered}$$

Par conséquent

$$b_2(t,x) \leq \langle \phi(t,x), (tv + (1-t)w) \rangle \leq b_1(t,x).$$

D'où $(tv + (1-t)w) \in \Gamma(t,x)$.
D'autre part, comme $\|\phi(t,x)\|_* \geq d > 0$, pour $\varepsilon \in]0, \frac{d}{2}[$, il existe $v_\varepsilon \in \overline{B}_E(0,1)$ tel que

$$\langle \phi(t,x), v_\varepsilon \rangle > d - \varepsilon > 0,$$

ce qui implique $\langle \phi(t,x), v_\varepsilon \rangle \neq 0$. On pose $c = \langle \phi(t,x), v_\varepsilon \rangle$ et $v = \frac{b_2(t,x)}{c} v_\varepsilon$, alors $\langle \phi(t,x), v \rangle = b_2(t,x)$, d'où $v \in \Gamma(t,x)$. $\square$

Lemme 4.1. *Pour tout $t \in T$, pour tous $x, y \in E$ et $v \in \Gamma(t,x) \backslash \Gamma(t,y)$, nous avons*

$$d(v, \Gamma(t,y)) \leq \frac{2\|\phi(t,x) - \phi(t,y)\|_* \|v\| + |b_1(t,x) - b_1(t,y)| + |b_2(t,x) - b_2(t,y)|}{d}. \tag{4.3}$$

De même, pour tout $t \in T$, pour tous $x, y \in E$ et $v \notin Fr(\Gamma(t,y))$ avec $v \in Fr(\Gamma(t,x))$, nous avons que (4.3) est vérifiée pour la multi-application $Fr\Gamma : (t,x) \mapsto Fr(\Gamma(t,x))$.

Preuve. Supposons que $v \notin \Gamma(t,y)$, alors d'après (4.2), on a

1. $\langle \phi(t,y), v \rangle > b_1(t,y)$, ou bien
2. $\langle \phi(t,y), v \rangle < b_2(t,y)$.

si $\langle \phi(t,y), v\rangle > b_1(t,y)$, d'après la Proposition 1.17, on trouve que

$$d(v,\Gamma(t,y)) = \frac{\langle \phi(t,y), v\rangle - b_1(t,y)}{\|\phi(t,y)\|_*} \tag{4.4}$$

D'autre part, d'après (4.2) et pour $v \in \Gamma(t,x)$ on a

$$b_1(t,x) - \langle \phi(t,x), v\rangle \geq 0. \tag{4.5}$$

D'après (4.4), (4.5) et (4.1) on a

$$\begin{aligned} d(v,\Gamma(t,y)) &\leq \frac{\langle \phi(t,y), v\rangle - b_1(t,y) + b_1(t,x) - \langle v, \phi(t,x)\rangle}{\|\phi(t,y)\|_*} \\ &\leq \frac{|\langle \phi(t,y) - \phi(t,x), v\rangle| + |b_1(t,x) - b_1(t,y)|}{\|\phi(t,y)\|_*} \\ &\leq \frac{\|v\|\|\phi(t,y) - \phi(t,x)\|_* + |b_1(t,x) - b_1(t,y)|}{d}. \end{aligned}$$

D'où

$$d(v,\Gamma(t,y)) \leq \frac{\|v\|\|\phi(t,y) - \phi(t,x)\|_* + |b_1(t,x) - b_1(t,y)|}{d}. \tag{4.6}$$

En utilisant les mêmes arguments précédents, si $\langle \phi(t,y), v\rangle < b_2(t,y)$ on obtient

$$d(v,\Gamma(t,y)) \leq \frac{\|v\|\|\phi(t,y) - \phi(t,x)\|_* + |b_2(t,x) - b_2(t,y)|}{d}. \tag{4.7}$$

Donc, il résulte de (4.6) et (4.7) que

$$d(v,\Gamma(t,y)) \leq \frac{2(\|\phi(t,x) - \phi(t,y)\|_*\|v\|) + |b_1(t,x) - b_1(t,y)| + |b_2(t,x) - b_2(t,y)|}{d}. \tag{4.8}$$

Si $v \notin Fr(\Gamma(t,y))$ avec $v \in Fr(\Gamma(t,x))$, alors on a les deux cas suivants

1. $v \notin \Gamma(t,y)$, ou bien
2. $v \in int(\Gamma(t,y))$,

et comme $Fr(\Gamma(t,x)) \subset \Gamma(t,x)$, alors pour tout $v \in Fr(\Gamma(t,x))$ on a $v \in \Gamma(t,x)$. Donc, dans le cas (1) on a $v \notin \Gamma(t,y)$, alors (4.3) est déjà vérifiée pour ces conditions.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \Gamma(t,y) &= \phi^{-1}([b_2(t,y), b_1(t,y)]) \\ &= \phi^{-1}(]b_2(t,y), b_1(t,y)[\cup\{b_1(t,y), b_2(t,y)\}) \\ &= \phi^{-1}(]b_2(t,y), b_1(t,y)[) \cup \phi^{-1}(\{b_1(t,y), b_2(t,y)\}). \end{aligned}$$

Donc, on va montrer que $int(\Gamma(t,y)) = \phi^{-1}(]b_2(t,y), b_1(t,y)[)$. D'après la continuité de l'application $\phi(t,x)$ on obtient $\phi^{-1}(]b_2(t,y), b_1(t,y)[) \subset int(\Gamma(t,y))$, maintenant montrons que $int(\Gamma(t,y)) \subset \phi^{-1}(]b_2(t,y), b_1(t,y)[)$. Soit $v \in int(\Gamma(t,y))$ cela implique qu'il existe

$r > 0$ tel que $B(v,r) \subset \Gamma(t,y)$, alors posons $v_1 = v + \frac{r}{2}v_0$ tel que $v_0 \in B(0,1)$ et $\langle \phi(t,y), v_0 \rangle > 0$. On obtient,

$$\|v_1 - v\| = \frac{r}{2} < r,$$

d'où $v_1 \in B(v,r)$. Donc, on trouve

$$b_1(t,y) \geq \langle \phi(t,y), v_1 \rangle = \langle \phi(t,y), v \rangle + \frac{r}{2}\langle \phi(t,y), v_0 \rangle > \langle \phi(t,y), v \rangle \tag{4.9}$$

D'autre part, en posant $v_2 = v - \frac{r}{2}v_0$, on obtient

$$\|v_2 - v\| = \frac{r}{2} < r,$$

d'où $v_2 \in B(v,r)$ et on aura

$$\langle \phi(t,y), v \rangle > \langle \phi(t,y), v_2 \rangle = \langle \phi(t,y), v \rangle - \frac{r}{2}\langle \phi(t,y), v_0 \rangle \geq b_2(t,y). \tag{4.10}$$

D'après (4.9) et (4.10) il résulte que

$$b_2(t,y) < \langle \phi(t,y), v \rangle < b_1(t,y). \tag{4.11}$$

Ce qui donne $v \in \phi^{-1}(]b_2(t,y), b_1(t,y)[)$. D'où $int(\Gamma(t,y)) = \phi^{-1}(]b_2(t,y), b_1(t,y)[)$, et comme $\phi^{-1}(]b_2(t,y), b_1(t,y)[) \cap \phi^{-1}(\{b_2(t,y), b_1(t,y)\}) = \emptyset$ et puisque $\Gamma(t,y)$ est fermé, on obtient $Fr(\Gamma(t,y)) = \Gamma(t,y) \backslash int(\Gamma(t,y)) = \phi^{-1}(\{b_2(t,y), b_1(t,y)\})$.
On pose

$$\Gamma_1(t,y) = \{w \in E, \langle \phi(t,y), w \rangle = b_1(t,y)\},$$

$$\Gamma_2(t,y) = \{w \in E, \langle \phi(t,y), w \rangle = b_2(t,y)\},$$

Alors, $Fr(\Gamma(t,y)) = \Gamma_1(t,y) \cup \Gamma_2(t,y)$.
Par les mêmes arguments utilisés dans la preuve de la proposition 1.8, les multi-application $\Gamma_i : T \times E \rightrightarrows E$ sont à valeurs non vides, fermées et convexes. D'après (4.11) et la Proposition 1.17 on obtient

$$d(v, \Gamma_1(t,y)) = \frac{b_1(t,y) - \langle \phi(t,y), v \rangle}{\|\phi(t,y)\|_*}, \tag{4.12}$$

et

$$d(v, \Gamma_2(t,y)) = \frac{\langle \phi(t,y), v \rangle - b_2(t,y)}{\|\phi(t,y)\|_*}, \tag{4.13}$$

et comme $v \in Fr(\Gamma(t,x))$, alors on a

$$\langle \phi(t,x), v \rangle = b_1(t,x), \tag{4.14}$$

ou bien

$$\langle \phi(t,x), v \rangle = b_2(t,x). \tag{4.15}$$

Donc, il résulte de (4.1), (4.12) et (4.14) que

$$\begin{aligned} d(v,\Gamma_1(t,y)) &= \frac{b_1(t,y) - \langle\phi(t,y),v\rangle + \langle\phi(t,x),v\rangle - b_1(t,x)}{\|\phi(t,y)\|_*} \\ &\leq \frac{|\langle\phi(t,y)-\phi(t,x),v\rangle| + |b_1(t,x)-b_1(t,y)|}{\|\phi(t,y)\|_*} \\ &\leq \frac{\|v\|\|\phi(t,y)-\phi(t,x)\|_* + |b_1(t,x)-b_1(t,y)|}{d}. \end{aligned}$$

D'où

$$d(v,\Gamma_1(t,y)) \leq \frac{\|v\|\|\phi(t,y)-\phi(t,x)\|_* + |b_1(t,x)-b_1(t,y)|}{d}. \tag{4.16}$$

En utilisant les mêmes arguments précédents, on obtient

$$d(v,\Gamma_2(t,y)) \leq \frac{\|v\|\|\phi(t,y)-\phi(t,x)\|_* + |b_2(t,x)-b_1(t,y)|}{d}. \tag{4.17}$$

Donc, il résulte de (4.16) et (4.17) que

$$d(v,Fr(\Gamma(t,y)) \leq \frac{2\|\phi(t,x)-\phi(t,y)\|_*\|v\| + |b_1(t,x)-b_1(t,y)| + |b_2(t,x)-b_2(t,y)|}{d}. \tag{4.18}$$

□

Corollaire 4.1. *On a*

$$d(0,Fr(\Gamma(t,x))) \leq \frac{|b_1(t,x)|}{d}. \tag{4.19}$$

Preuve. De (4.12) on a pour tout $v \notin Fr(\Gamma(t,x))$

$$\begin{aligned} d(v,\Gamma_1(t,x)) &= \frac{b_1(t,x) - \langle\phi(t,x),v\rangle}{\|\phi(t,y)\|_*} \\ &\leq \frac{|b_1(t,x)|+|\langle\phi(t,x),v\rangle|}{d}. \end{aligned}$$

Alors, pour $v = 0$, on trouve

$$d(0,Fr(\Gamma(t,x))) \leq \frac{|b_1(t,x)|}{d}, \tag{4.20}$$

si $0 \notin Fr(\Gamma(t,x))$. Sinon

$$d(0,Fr(\Gamma(t,x))) = 0 \leq \frac{|b_1(t,x)|}{d}.$$

□

Faisons les hypothèses suivantes.

Hypothèses (H(ϕ)).

1. *L'application $t \to \phi(t,x)$ est mesurable pour toute $x \in E$.*
2. *On a*

$$\|\phi(t,x) - \phi(t,y)\|_* < k\|x-y\| \quad p.p \ sur \ T, \tag{4.21}$$

Pour tous $x, y \in E$ avec $x \neq y$ et $k > 0$.

Hypothèses (H(b)).

1. *Les fonctions $t \mapsto b_i(t,x)$ sont mesurables pour $i = 1, 2$, pour tout $x \in E$.*
2. *On a*

$$|b_i(t,x) - b_i(t,y)| < l(t)\|x-y\| \quad p.p \ sur \ T, \tag{4.22}$$

pour tous $x, y \in E$ avec $x \neq y$, $i = 1, 2$ où $l(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R})$ est une fonction strictement positive.

3. *On a*

$$|b_1(t,x)| < c(t) \quad p.p \ sur \ T, \ pour \ tout \ x \in E, \tag{4.23}$$

où $c(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R})$ est une fonction strictement positive.

4. *La fonction $t \mapsto b_2(t, x(t))$ est integrable pour tout $x(\cdot) \in C(T, E)$.*

Théorème 4.1. *Si les hypothèses $H(b)$ et $H(\phi)$ sont vérifiées, alors les affirmations suivantes sont vérifiées pour la multi-application Γ.*

1. *La multi-application $t \mapsto \Gamma(t, x(t))$ est mesurable pour toute application $x(\cdot) \in C(T, E)$.*
2. *On a*

$$d(0, \Gamma(t,x)) < c(t)/d \quad p.p \ sur \ T, \ pour \ tout \ x \in E \tag{4.24}$$

3. *On a*

$$haus_\rho(\Gamma(t,x), \Gamma(t,y)) < ((2k\rho + l(t))\|x-y\|)/d \quad p.p \ sur \ T \tag{4.25}$$

pour tout $x, y \in E$ tels que $x \neq y$ et $\rho > 0$.

Les affirmations 1–3 du Théorème 4.1 sont vérifiées pour la multi-application $Fr\Gamma$.

Preuve. 1. On prend $x(\cdot) \in C(T,E)$ et on va montrer que la multi-application Γ est mesurable. D'abord on définit les applications $G_i : T \times E \to \mathbb{R}$ par

$$G_i(t,w) = \langle \phi(t, x(t)), w \rangle - b_i(t, x(t)),$$

pour $i = 1, 2$. Alors les hypothèses $H(\phi)(1)$ et $H(b)(1)$ implique que les applications G_i sont mesurables par rapport à t et continues par rapport à w. En effet, pour $t \in T$ fixé et pour tous $v, w \in E$ on a

$$\begin{aligned}|G_i(t,w) - G_i(t,v)| &= |\langle \phi(t,x), w\rangle - b_i(t,x(t)) - \langle \phi(t,x), v\rangle + b_i(t,x(t))| \\ &= |\langle \phi(t,x), w - v\rangle| \\ &\leq \|\phi(t,x)\|_* \|w - v\|.\end{aligned}$$

Considérons les multi-applications $U_i : T \times E \rightrightarrows \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2$, définies par

$$U_1(t) = \{w \in E; \langle \phi(t,x(t)), w\rangle - b_1(t,x(t)) \leq 0\},$$

$$U_2(t) = \{w \in E; \langle \phi(t,x(t)), w\rangle - b_2(t,x(t)) \geq 0\}$$

Donc, d'après le Théorème 1.9, U_1 et U_2 sont des multi-applications mesurables, par conséquent par le Lemme 1.1 leurs graphes sont mesurables. Alors le graphe de la multi-application $t \mapsto \Gamma(t,x(t)) = U_1(t) \cap U_2(t)$, pour $t \in T$, est un ensemble mesurable, c'est à dire Γ est mesurable pour toute application $x(\cdot) \in C(T,E)$ (voir le Lemme 1.2).

2. Comme on a $Fr(\Gamma(t,x)) \subset \Gamma(t,x)$, en utilisant les relations (4.19) et (4.23), on obtient

$$\begin{aligned}d(0,\Gamma(t,x)) &\leq d(0, Fr(\Gamma(t,x))) \\ &\leq |b_1(t,x)|/d \\ &< c(t)/d \quad p.p \ sur \ T.\end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in E$ on a

$$d(0,\Gamma(t,x)) < c(t)/d \quad p.p \ sur \ T.$$

3. Supposons que $\rho \geq 0$. Si $\Gamma(t,x) \cap \rho\overline{B} = \emptyset$ ou $\Gamma(t,x) \cap \rho\overline{B} \neq \emptyset$ et $\Gamma(t,x) \cap \rho\overline{B} \subset \Gamma(t,y)$ alors,

$$e(\Gamma_\rho(t,x), \Gamma(t,y) = 0 \tag{4.26}$$

Sinon, il existe $v \in E$ tel que $\|v\| \leq \rho$, $v \in \Gamma(t,x)$, et $v \notin \Gamma(t,y)$, donc d'après (4.3) on aura

$$\begin{aligned}e(\Gamma_\rho(t,x), \Gamma(t,y)) &= \sup_{v \in \Gamma_\rho(t,x)} d(v, \Gamma(t,y)) \\ &\leq (2\|\phi(t,x) - \phi(t,y)\|_* \sup_{v \in \Gamma_\rho(t,x)} \|v\| + |b_1(t,x) - b_1(t,y)| \\ &+ |b_2(t,x) - b_2(t,y)|)/d.\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant (4.21), (4.22) et (4.26) on obtient

$$e(\Gamma_\rho(t,x),\Gamma(t,y)) < (2k\rho + 2l(t))\|x-y\| \ p.p \ sur \ T, \ \forall \, x,y \in E, \ x \neq y. \quad (4.27)$$

En interchangeant les rôles de x et y on trouve,

$$e(\Gamma_\rho(t,y),\Gamma(t,x)) < (2k\rho + 2l(t))\|x-y\| \ p.p \ sur \ T, \ \forall \, x,y \in E, \ x \neq y. \quad (4.28)$$

D'où, de (4.27) et (4.28) on obtient,

$$haus_\rho(\Gamma(t,x),\Gamma(t,y)) < (2k\rho + 2l(t))\|x-y\| \ p.p \ sur \ T,$$

pour tout $x,y \in E$ avec $x \neq y$ et $\rho > 0$.

Par conséquent, les affirmations 1–3 du Théorème 4.1 sont vérifiées pour Γ.
Maintenant on va vérifier les affirmations 1–3 de ce théorème pour la multi-application $Fr\Gamma$.

1. D'après la mesurabilité de la multi-application Γ et le Théorème 1.10, on obtient la mesurabilité de la multi-application $Fr\Gamma$ pour toute application $x(\cdot) \in C(T,E)$.
2. De (4.12) et (4.23) on a pour tout $x \in E$
$$\begin{aligned} d(0, Fr(\Gamma(t,x))) &\leq |b_1(t,x)|/d \\ &< c(t)/d \ p.p \ sur \ T. \end{aligned}$$
3. De (4.3) pour $Fr\Gamma$, et par les même arguments utilisés dans la preuve pour Γ, on obtient (4.25) pour la multi-application $Fr\Gamma$.

Ce qui termine la démonstration de ce théorème. □

Posons, pour tout $x \in E$ et tout $t \in T$

$$F(t,x) = Fr(\Gamma(t,x)), \quad (4.29)$$

où la multi-application Γ est définie dans (4.2). Puisque, pour tout $(t,x) \in T \times E$ on a $Fr(\Gamma(t,x)) \subset \Gamma(t,x)$ et Γ est une multi-application à valeurs fermées non vides et convexes, alors $\overline{co}(Fr(\Gamma(t,x))) \subset \Gamma(t,x)$, pour tout $(t,x) \in T \times E$.
Montrons maintenant que, pour tout $(t,x) \in T \times E$, $\Gamma(t,x) \subset \overline{co}(Fr(\Gamma(t,x)))$. En effet, soient $(t,x) \in T \times E$, $v \in int(\Gamma(t,x))$ et par le même argument utilisé dans la preuve de la Proposition 4.1, il existe $v_1 \in E$ tel que $\langle \phi(t,x), v_1 \rangle = b_1(t,x)$, et donc $v_1 \in Fr(\Gamma(t,x))$.
Posons $v_2 = \lambda v + (1-\lambda)v_1$, où $\lambda \geq 1$. On choisit

$$\lambda = \frac{b_1(t,x) - b_2(t,x)}{b_1(t,x) - \langle \phi(t,x)_*(t)), v \rangle}.$$

En utilisant la relation (4.11), on trouve

$$b_1(t,x) - \langle \phi(t,x), v\rangle < b_1(t,x) - b_2(t,x).$$

Ainsi, $b_1(t,x) - \langle \phi(t,x), v\rangle > 0$, donc

$$\lambda = \frac{b_1(t,x) - b_2(t,x)}{b_1(t,x) - \langle \phi(t,x), v\rangle} > 1.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}\langle \phi(t,x), v_2\rangle &= \lambda\langle \phi(t,x), v\rangle + (1-\lambda)\langle \phi(t,x), v_1\rangle \\ &= \lambda\langle \phi(t,x), v\rangle + (1-\lambda) b_1(t,x) \\ &= \lambda(\langle \phi(t,x), v\rangle - b_1(t,x)) + b_1(t,x) \\ &= b_2(t,x).\end{aligned}$$

Donc $v_2 \in Fr(\Gamma(t,x))$. Cela implique que

$$v = \frac{1}{\lambda} v_2 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) v_1 \in \overline{co}(Fr(\Gamma(t,x))).$$

D'où $\Gamma(t,x) = int(\Gamma(t,x)) \cup Fr(\Gamma(t,x)) \subset \overline{co}(Fr(\Gamma(t,x)))$. Alors $\Gamma(t,x) = \overline{co}(Fr(\Gamma(t,x)))$, et il résulte de (4.29) que

$$\overline{co}(F(t,x)) = \Gamma(t,x),\ \forall t \in T,\ \forall x \in E. \tag{4.30}$$

Notons $\mathcal{R}_F(x_0)$ et $\mathcal{R}_{\overline{co}F}(x_0)$ les ensembles de solutions globales des problème $(\mathcal{P}_F)$ et $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$ respectivement avec F définie dans (4.29).

Théorème 4.2. *Supposons que les hypothèses $H(\phi)$ et $H(b)$ sont vérifiées et E est un espace réflexif. Alors $\mathcal{R}_{\overline{co}F}(x_0)$ est non vide, et chaque solution $x_*(\cdot) \in \mathcal{R}_{\overline{co}F}(x_0)$ est stricte.*

Preuve. De (4.30) et par les affirmations 1–3 du théorème précèdent pour la multi-application Γ, si on pose $\rho_0 = \frac{1}{d}c$, $\beta = \frac{2}{d}k$ et $m = \frac{2}{d}l$, alors pour tout $x(\cdot) \in C(T,E)$ les hypothèse $H(\overline{co}F)$ sont vérifiées et d'après le Corollaire 2.1, on conclut que $\mathcal{R}_{\overline{co}F}(x_0)$ est non vide.
Supposons que E est réflexif, et soit $x_*(\cdot) \in \mathcal{R}_{\overline{co}F}(x_0)$, pour tout $t \in T$, on a

$$\Gamma_1(t, x_*(t)) = \{w \in E; \langle \phi(t, x_*(t)), w\rangle = b_1(t, x(t))\}, \tag{4.31}$$

$$\Gamma_2(t, x_*(t)) = \{w \in E; \langle \phi(t, x_*(t)), w\rangle = b_2(t, x(t))\}. \tag{4.32}$$

Soit $t \in T$, si $\dot{x}_*(t) \in int\Gamma(t, x_*(t))$ alors,

$$b_2(t, x_*(t)) < \langle \phi(t, x_*(t)), \dot{x}_*(t)\rangle < b_1(t, x_*(t)). \tag{4.33}$$

On pose $A = \Gamma_1(t, x_*(t))$ et on définit l'application $\varphi : A \to]-\infty, +\infty]$ par $\varphi(x) = \|\dot{x}_*(t) - x\|$.

Montrons que A est un convexe fermé. En effet, soit $(w_n) \subset A$ telle que $w_n \to w$ dans E. Alors $\langle \phi(t, x_*(t)), w_n \rangle = b_1(t, x(t))$ donc par passage à la limite quand $n \to \infty$ on trouve

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \langle \phi(t, x_*(t)), w_n \rangle &= \langle \phi(t, x_*(t)), \lim_{n\to\infty} w_n \rangle \\ &= \langle \phi(t, x_*(t)), w \rangle = b_1(t, x(t)).\end{aligned}$$

D'où $w \in A$. D'autre part, pour tous $w_1, w_2 \in A$, $0 \leq \lambda \leq 1$ montrons que $\lambda w_1 + (1-\lambda) w_2 \in A$. On a

$$\lambda \langle \phi(t, x_*(t)), w_1 \rangle = \lambda b_1(t, x(t)$$

et

$$(1-\lambda) \langle \phi(t, x_*(t)), w_2 \rangle = (1-\lambda) b_1(t, x(t)$$

Ce qui donne

$$\lambda \langle \phi(t, x_*(t)), w_1 \rangle + (1-\lambda) \langle \phi(t, x_*(t)), w_2 \rangle = b_1(t, x(t)).$$

Par conséquent A est un convexe fermé et non vide. De plus on a

$$\|\dot{x}_*(t) - x\| \geq |\|x\| - \|\dot{x}_*(t)\||$$

Passant à la limite quand $\|x\| \to +\infty$, on obtient $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$, et pour tous $x_1, x_2 \in A$, $0 \leq \lambda \leq 1$ on aura

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) &= \|\dot{x}_*(t) - \lambda x_1 - (1-\lambda) x_2\| \\ &= \|\lambda \dot{x}_*(t) + (1-\lambda)\dot{x}_*(t) - \lambda x_1 - (1-\lambda) x_2\| \\ &= \|\lambda(\dot{x}_*(t) - x_1) + (1-\lambda)(\dot{x}_*(t) - x_2)\| \\ &\leq \lambda \|\dot{x}_*(t) - x_1\| + (1-\lambda)\|\dot{x}_*(t) - x_2\| \\ &= \lambda \varphi(x_1) + (1-\lambda)\varphi(x_2),\end{aligned}$$

d'où φ est convexe. D'autre part, il est clair que φ est une application continue et donc s.c.i, alors, par la Proposition 1.6 il existe $v_1 \in \Gamma_1(t, x_*(t))$ tel que $\|\dot{x}_*(t) - v_1\| = \inf\limits_{v_1 \in \Gamma_1(t, x_*(t))} \|\dot{x}_*(t) - v_1\|$. Donc la relation (4.33) et la Proposition 1.17 donnent

$$\|\dot{x}_*(t) - v_1\| = d(\dot{x}_*(t), \Gamma_1(t, x_*(t))) = \frac{b_1(t, x_*(t)) - \langle \phi(t, x_*(t)), \dot{x}_*(t) \rangle}{\|\phi(t, x_*(t))\|_*} \tag{4.34}$$

Prenons un point $v_2 = \lambda \dot{x}_*(t) + (1-\lambda) v_1$, où $\lambda \geq 1$. On choisit

$$\lambda = \frac{b_1(t, x_*(t)) - b_2(t, x_*(t))}{b_1(t, x_*(t)) - \langle \phi(t, x_*(t)), \dot{x}_*(t) \rangle}. \tag{4.35}$$

En utilisant la relation (4.33), on obtient

$$b_1(t,x_*(t)) - \langle \phi(t,x_*(t)), \dot{x}_*(t)\rangle < b_1(t,x_*(t)) - b_2(t,x_*(t)).$$

Ainsi, $b_1(t,x_*(t)) - \langle \phi(t,x_*(t)), \dot{x}_*(t)\rangle > 0$, donc

$$\lambda = \frac{b_1(t,x_*(t)) - b_2(t,x_*(t))}{b_1(t,x_*(t)) - \langle \phi(t,x_*(t)), \dot{x}_*(t)\rangle} > 1.$$

D'un autre part, de (4.35) et (4.34) on a

$$\begin{aligned}\|v_1 - v_2\| &= \lambda\|\dot{x}_*(t) - v_1\| \qquad (4.36)\\ &= \frac{(b_1(t,x_*(t)) - b_2(t,x_*(t)))(b_1(t,x_*(t)) - \langle \phi(t,x_*(t)), \dot{x}_*(t)\rangle)}{(b_1(t,x_*(t)) - \langle \phi(t,x_*(t)), \dot{x}_*(t)\rangle)\|\phi(t,x_*(t))\|_*}.\end{aligned}$$

D'où

$$\|v_1 - v_2\| = \frac{b_1(t,x_*(t)) - b_2(t,x_*(t))}{\|\phi(t,x_*(t))\|_*}. \qquad (4.37)$$

De plus

$$\begin{aligned}\langle \phi(t,x_*(t)), v_2\rangle &= \langle \phi(t,x_*(t)), \lambda\dot{x}_*(t) + (1-\lambda)v_1\rangle\\ &= \lambda\langle \phi(t,x_*(t)), \dot{x}_*\rangle + (1-\lambda)\langle \phi(t,x_*(t)), v_1\rangle\\ &= \lambda\langle \phi(t,x_*(t)), \dot{x}_*\rangle + (1-\lambda)b_1(t,x_*(t))\\ &= -\lambda(b_1(t,x_*(t)) - \langle \phi(t,x_*(t)), \dot{x}_*\rangle) + b_1(t,x_*(t))\\ &= \frac{(b_2(t,x_*(t)) - b_1(t,x_*(t)))(b_1(t,x_*(t)) - \langle \phi(t,x_*(t)), \dot{x}_*(t)\rangle)}{b_1(t,x_*(t)) - \langle \phi(t,x_*(t)), \dot{x}_*(t)\rangle} + b_1(t,x_*(t))\\ &= b_2(t,x_*(t)).\end{aligned}$$

D'où $v_2 \in \Gamma_2(t,x_*(t))$.

Donc, $\dot{x}_*(t) = \frac{1}{\lambda}v_2 + (1-\frac{1}{\lambda})v_1$ et $\frac{1}{\lambda} \in]0,1[$. D'où $\dot{x}_*(t) \in \overline{co}(Fr(\Gamma(t,x_*(t)))$ il s'ensuit de (4.36) que

$$\|v_1 - \dot{x}_*(t)\| = \frac{1}{\lambda}\|v_2 - v_1\| \leq \|v_2 - v_1\| \leq 2\|v_2 - v_1\|$$

et

$$\begin{aligned}\|v_2 - \dot{x}_*(t)\| &\leq \|v_2 - v_1\| + \|v_1 - \dot{x}_*(t)\|\\ &\leq 2\|v_2 - v_1\|.\end{aligned}$$

Donc

$$v_1, v_2 \in \dot{x}_*(t) + 2\|v_1 - v_2\|\overline{B},$$

or $\dot{x}_*(t) + 2\|v_1 - v_2\|\overline{B}$ est convexe.

D'où

$$\dot{x}_*(t) \in \dot{x}_*(t) + 2\|v_1 - v_2\|\overline{B}$$

Par conséquent

$$\dot{x}_*(t) \in \overline{co}(Fr(\Gamma(t, x_*(t))) \cap (\dot{x}_*(t) + 2\|v_1 - v_2\|\overline{B}). \tag{4.38}$$

Soit $z \in Fr(\Gamma(t, x_*(t))) \cap (\dot{x}_*(t) + 2\|v_1 - v_2\|\overline{B})$ cela implique que $z \in Fr(\Gamma(t, x_*(t)))$ et $z \in (\dot{x}_*(t) + 2\|v_1 - v_2\|\overline{B})$, alors d'après (4.37), (4.1), et (4.23) on trouve,

$$\begin{aligned}
\|z\| &\leq \|\dot{x}_*(t)\| + 2\|v_1 - v_2\| \\
&\leq \|\dot{x}_*(t)\| + 2\left(\frac{b_1(t, x_*(t)) - b_2(t, x_*(t))}{\|\phi(t, x_*(t))\|_*}\right) \\
&\leq \|\dot{x}_*(t)\| + 2(b_1(t, x_*(t)) - b_2(t, x_*(t)))/d \\
&\leq \|\dot{x}_*(t)\| + 2(|b_1(t, x_*(t))| + |b_2(t, x_*(t))|)/d \\
&\leq \|\dot{x}_*(t)\| + 2(c(t) + |b_2(t, x_*(t))|)/d := \alpha(t).
\end{aligned}$$

Ce qui donne $z \in Fr(\Gamma(t, x_*(t))) \cap \alpha(t)\overline{B}$, et par l'hypothèse $H(b)(4)$ il résulte que $\alpha(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}_+)$ alors,

$$Fr(\Gamma(t, x_*(t))) \cap (\dot{x}_*(t) + 2\|v_1 - v_2\|\overline{B}) \subset Fr(\Gamma(t, x_*(t))) \cap \alpha(t)\overline{B},$$

et donc

$$\overline{co}(Fr(\Gamma(t, x_*(t))) \cap (\dot{x}_*(t) + 2\|v_1 - v_2\|\overline{B}) \subset \overline{co}(Fr(\Gamma(t, x_*(t))) \cap \alpha(t)\overline{B}).$$

De (4.38) et (4.29) on a pour presque tout $t \in T$

$$\dot{x}_*(t) \in \overline{co}(F(t, x_*(t)) \cap \alpha(t)\overline{B}).$$

Donc la solution $x_*(\cdot) \in \mathcal{R}_{\overline{co}F}(x_0)$ est stricte. □

Théorème 4.3. *Supposons que les hypothèses $H(\phi)$ et $H(b)$ sont vérifiées et que E est un espace réflexif. Alors $\mathcal{R}_F(x_0)$ est non vide, et pour toute solution $x_*(\cdot) \in \mathcal{R}_{\overline{co}F}(x_0)$, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{R}_F(x_0)$ de solutions globales qui converge vers x_* dans $C(T, E)$.*

Preuve. D'après (4.29), les affirmations 1–3 du Théorème 4.1 sont vérifiées pour la multi-application F, si on pose $\gamma = \frac{1}{d}c$, $k_* = \frac{2}{d}l$, $\beta = \frac{2k}{d}$, alors pour tout $x \in E$ on a

$$d(0, F(t, x)) = \inf_{u \in F(t,x)} \|u\| < c(t)/d = \gamma(t), \ \textit{p.p sur } T.$$

En utilisant les mêmes arguments utilisés dans les preuve précédentes on trouve

$$F(t, x) \cap \gamma(t)\overline{B} \neq \emptyset \ \textit{p.p sur } T.$$

Cela implique que les hypothèses $H_*(F)$ sont vérifiées, et d'après le Théorème 4.2, chaque solution $x_*(\cdot) \in \mathcal{R}_{\overline{co}F}(x_0)$ est stricte. Donc par une application du Théorème 3.1, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{R}_F(x_0)$ de solutions globales qui converge vers x_* dans $C(T, E)$.
La preuve du théorème est achevée. $\square$

Corollaire 4.2. *Sous les hypothèses du théorème 4.3, nous avons*

$$\overline{\mathcal{R}_{\overline{co}F}(x_0)} = \overline{\mathcal{R}_F(x_0)}$$

où la barre supérieure indique la fermeture dans $C(T, E)$.

Preuve. D'après les hypothèse du Théorème 4.3 on a pour toute solution $x_*(\cdot) \in \mathcal{R}_{\overline{co}F}(x_0)$, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{R}_F(x_0)$ telle que $x_n \to x_*$ dans $C(T, E)$, donc $\mathcal{R}_{\overline{co}F}(x_0) \subset \overline{\mathcal{R}_F(x_0)}$ d'oú $\overline{\mathcal{R}_{\overline{co}F}(x_0)} \subset \overline{\mathcal{R}_F(x_0)}$ et puisque $\overline{\mathcal{R}_F(x_0)} \subset \overline{\mathcal{R}_{\overline{co}F}(x_0)}$, on trouve que $\overline{\mathcal{R}_{\overline{co}F}(x_0)} = \overline{\mathcal{R}_F(x_0)}$. $\square$

CHAPITRE 5

EXISTENCE DE SOLUTIONS POUR UNE INCLUSION DIFFÉRENTIELLE DU SECOND ORDRE

Dans ce chapitre on va essayer de montrer l'existence de solutions pour une inclusion différentielle de seconde ordre. Le problème est donné comme suit

$$(\mathcal{P'}_F)\begin{cases}\ddot{x}(t) \in F(t, x(t), \dot{x}(t)),\ p.p\ sur\ T = [0, 1],\\ \dot{x}(0) = 0,\ x(1) = 0,\end{cases}$$

où $F : T \times b\overline{B} \times b\overline{B} \rightrightarrows E$ est une multi-application à valeurs fermées non vides.
On commence ce chapitre par donner des lemmes sur la fonction de type Green.

Lemme 5.1. *(voir[7]) Soient $n(.), a(.) \in L^1(T, \mathbb{R}_+^*)$ et soit $G'(t, s)$ la fonction de Green du problème*

$$(\mathcal{P}_r)\begin{cases}\ddot{r}(t) - n(t)\dot{r}(t) = a(t) \quad p.p\ sur\ T,\\ \dot{r}(0) = 0,\ r(1) = 0.\end{cases}$$

Alors

$$G'(t, s) = \begin{cases}-\int_t^1 \exp(\int_s^r n(\tau)d\tau)dr, & si\ 0 \leq t \leq s \leq 1,\\ -\int_s^1 \exp(\int_s^r n(\tau)d\tau)dr, & si\ 0 \leq s < t \leq 1.\end{cases}$$

et $r(t) = \int_0^1 G^{'}(t,s)a(s)ds$ *est la solution du problème* $(\mathcal{P}_r)$, *et on a*

$$\frac{dG'}{dt}(t,s) = \begin{cases} 0, & si\ 0 \leq t < s \leq 1, \\ \exp(\int_s^t n(\tau)d\tau), & si\ 0 \leq s < t \leq 1. \end{cases}$$

et

$$\dot{r}(t) = \int_0^1 \frac{dG'}{dt}(t,s)a(s)ds = \int_0^t \exp(\int_s^t n(\tau)d\tau)a(s)ds.$$

Preuve. En posant $\dot{r}(t) = x(t)$ on trouve

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - n(t)x(t) = a(t), \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

On commence par résoudre l'équation homogène suivante $\dot{x}(t) - n(t)x(t) = 0$, on a

$$\dot{x}(t) = n(t)x(t) \Longleftrightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = n(t),$$

et par intégration

$$\ln|x(t)| = \int_0^t n(s)ds + cte.\ D'o\grave{u},\ x(t) = k \exp \int_0^t n(s)ds.$$

En utilisant la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme

$$x(t) = k(t) \exp \int_0^t n(s)ds, \tag{5.2}$$

où k est une fonction dérivable. En dérivant, on obtient

$$\dot{x}(t) = \dot{k}(t) \exp \int_0^t n(s)ds + k(t)n(t) \exp \int_0^t n(s)ds$$

En remplaçant dans l'équation (5.1) on trouve $\dot{k}(t) = a(t)\exp(-\int_0^t n(s)ds)$ et en intégrant, on trouve $k(t) = \int_0^t a(s)\exp(-\int_0^s n(\tau)d\tau) + cte$. On remplace $k(t)$ dans (5.2) pour avoir

$$x(t) = \int_0^t a(s) \exp(\int_s^t n(\tau)d\tau)ds + cte \exp(\int_0^t n(\tau)d\tau),$$

et comme $x(0) = 0$, on aura $cte = 0$ d'où

$$x(t) = \int_0^t a(s) \exp(\int_s^t n(\tau)d\tau)ds = \dot{r}(t).$$

Cela implique que

$$r(t) = -\int_t^1 \int_0^r a(s) \exp(\int_s^r n(\tau)d\tau)dsdr + cte,$$

et comme $r(1) = 0, cte = 0$. Alors on a,

$$
\begin{aligned}
r(t) &= -\int_t^1 \int_0^r a(s)\exp(\int_s^r n(\tau)d\tau)dsdr \\
&= -\int_0^1 \int_t^1 \exp(\int_s^r n(\tau)d\tau)dra(s)ds \\
&= -\int_0^t (\int_t^1 \exp(\int_s^r n(\tau)ds)d\tau)a(s)ds - \int_t^1 (\int_s^1 \exp(\int_s^r n(\tau)d\tau)a(s)ds \\
&= \int_0^t (-\int_t^1 \exp(\int_s^r n(\tau)d\tau)dr)a(s)ds + \int_t^1 (-\int_s^1 \exp(\int_s^r n(\tau)d\tau)dr)a(s)ds.
\end{aligned}
$$

Donc, la solution du problème $(\mathcal{P}_r)$ s'écrit sous la forme $r(t) = \int_0^1 G'(t,s)a(s)ds$ avec

$$
G'(t,s) = \begin{cases} -\int_t^1 \exp(\int_s^r n(\tau)d\tau)dr, & si\ 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ -\int_s^1 \exp(\int_s^r n(\tau)d\tau)dr, & si\ 0 \leqslant s < t \leqslant 1. \end{cases}
$$

De plus, on a,

$$
\frac{dG'}{dt}(t,s) = \begin{cases} 0, & si\ 0 \leq t < s \leq 1, \\ \exp(\int_s^t n(\tau)d\tau), & si\ 0 \leq s < t \leq 1. \end{cases}
$$

et

$$
\dot{r}(t) = \int_0^1 \frac{dG'}{dt}(t,s)a(s)ds.
$$

□

Lemme 5.2. *(voir[17]) Soit E un espace de Banach séparable, $G : T \times T \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$
G(t,s) = \begin{cases} t-1, & si\ 0 \leq s \leq t, \\ s-1, & si\ t \leq s \leq 1. \end{cases}
$$

Alors, on a les résultats suivants

1. *Si $x \in W^{2.1}(T,X)$ avec $x(0) = \dot{x}(1) = 0$, alors*

$$
x(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{x}(s)ds, \quad \forall t \in T
$$

2. *$G(.,s)$ est dérivable sur I pour tout $s \in I$ sauf sur la diagonale et sa dérivée est donnée par*

$$
\frac{dG}{dt}(t,s) = \begin{cases} 0, & si\ t < s \leqslant 1, \\ 1, & si\ 0 \leqslant s < t. \end{cases}
$$

3. *$G(.,.)$ et $\frac{dG}{dt}(.,.)$ vérifient $\sup\limits_{t,s\in[0.1]} |G(t,s)| \leq 1, \sup\limits_{t\in[0.1]} |\frac{dG}{dt}(t,s)| \leq 1.$*

4. *Soit* $v \in L^1(T, X)$ *et soit* $x_v(.) : T \to X$ *la fonction défini par*

$$x_v(t) = \int_0^1 G(t,s)v(s)ds, \forall t \in T,$$

alors $x_v(1) = \dot{x}_v(0) = 0$. *De plus, la fonction* $x_v(\cdot)$ *est dérivable est sa dérivée vérifie*

$$\dot{x}_v(t) = \int_0^1 \frac{dG}{dt}(t,s)v(s)ds.$$

Proposition 5.1. *Soit* E *un espace de Banach séparable et soit* $v : I \to E$ *une application continue (resp. dans* $L^1(T, E)$ *intégrable). Alors la fonction*

$$x_v(t) = \int_0^t G(t,s)v(s)ds \text{ est une solution du problème } (\mathcal{P}_f),$$

est la solution unique dans $C^2(T, E)$ *(resp. dans* $AC^{2.1}(T, E)$*) du problème*

$$(\mathcal{P}_v) \begin{cases} \ddot{x}(t) = v(t) & p.p \text{ sur } T, \\ \dot{x}(0) = 0, \ x(1) = 0. \end{cases}$$

Pour $F : T \times b\overline{B} \times b\overline{B} \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides fermées avec $b = \dot{r}(1)$, $b > 0$. Faisons des hypothèses suivantes.

Hypothèses $(\mathbf{H}'(\mathbf{F}))$**.**

1. *La multi-application* $t \mapsto F(t, x(t), y(t))$ *est mesurable pour toutes applications* $x(\cdot), y(\cdot) \in C(T, E)$ *avec* $\|x(t)\| \le b, \|y(t)\| \le b$ *pour tout* $t \in T$.
2. *Pour tout* $t \in T$

$$d(0, F(t,x,y)) < a(t) + n(t)\|y\|, \quad \|x\| \le b, \quad \|y\| \le b. \tag{5.3}$$

et $d(0, F(t, 0, 0)) = 0$ *pour* $a(t) = 0$.

3. *Pour tout* $t \in T$

$$haus_\rho(F(t,x,y), F(t,x',y')) < n(t)\|y-y'\|, \text{ pour tous } x, y, x', y' \in b\overline{B} \text{ tels que } \quad y \ne y', \tag{5.4}$$

avec $\rho \ge 0$.

Théorème 5.1. *Supposons que les hypothèses* $(H(F))$ *sont vérifiées. Alors, il existe une solution* x *de problème* $(\mathcal{P}'_F)$ *telle que*

$$\|x(t)\| \le \dot{r}(1), \ \|\dot{x}(t)\| \le \dot{r}(t) \text{ pour tout } t \in T,$$

$$\|\ddot{x}(t)\| \le \ddot{r}(t) \quad p.p \text{ sur } T.$$

Preuve. Etape 1.

D'après (5.3) on a, pour tout $x, y \in E$ tel que $\|x\| \leq b, \|y\| \leq b$

$$d(0, F(t, x, y)) = \inf_{v \in F(t,x,y)} \|v\| < a(t) + n(t)\|y\|, \quad \textit{pour tout } t \in T.$$

Alors,

$$F(t, x, y) \cap \ddot{r}(t)\overline{B} \neq \emptyset, \quad \|y\| \leq \dot{r}(t), \in b\overline{B}.$$

Soit $t \in T$ tel que (5.4) soit vérifiée et soit $\rho = \ddot{r}(t)$. Soit $y, y' \in E$ tels que $\|y\| \leq \dot{r}(t)$ et $\|y'\| \leq \dot{r}(t)$. On a

$$haus_\rho(F(t, x, y), F(t, x', y')) = max\{e(F_\rho(t, x, y), F(t, x', y')), e(F_\rho(t, x, y), F(t, x', y'))\}.$$

Soit $v \in F(t, x, y) \cap \rho\overline{B} = F_\rho(t, x, y)$, on a

$$\begin{aligned} d(v, F(t, x, y)) &\leq e(F_\rho(t, x, y), F(t, x', y')) \\ &\leq haus_\rho(F(t, x, y), F(t, x', y')) \\ &< n(t)\|y - y'\|. \end{aligned}$$

Donc

$$F(t, x, y) \cap \ddot{r}(t)\overline{B} \subset F(t, x', y') + n(t)\|y - y'\|B.$$

On obtient

$$F(t, x, y) \cap \ddot{r}(t)\overline{B} \subset F(t, x', y') + n(t)\|y - y'\|B. \tag{5.5}$$

Etape 2. Par récurrence, on construit une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ comme suit

$$x_0(t) = 0, \quad x_{i+1}(t) = \int_0^1 G(t, s)v_i(s)ds, \quad i = 0, 1, 2, ..., \textit{pour tout } t \in T, \tag{5.6}$$

où $v_i \in L^1(I, E)$,

$$\ddot{x}_{i+1}(t) = v_i(t) \in F(t, x_i(t), \dot{x}_i(t)) \textit{ p.p. sur } T, \tag{5.7}$$

$$\|\ddot{x}_{i+1}(t) - \ddot{x}_i(t)\| \leq n(t)\|\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i-1}(t)\|. \textit{ p.p. sur } T, \tag{5.8}$$

$$\|\ddot{x}_{i+1}(t)\| = \|v_i(t)\| \leq \ddot{r}(t) \quad \textit{p.p. sur } T, \tag{5.9}$$

$$\|\dot{x}_i(t)\| \leq \dot{r}(t), \quad \|x_i(t)\| \leq \dot{r}(1), \textit{pour tout } t \in T, \tag{5.10}$$

$$\|\ddot{x}_{i+1}(t) - \ddot{x}_i(t)\| \leq n(t) \int_0^t \frac{[m(t) - m(s)]^{i-1}}{(i-1)!} a(s)ds \quad \textit{p.p sur } T, \tag{5.11}$$

$$\|\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t)\| \leq \int_0^t \frac{[m(t) - m(s)]^i}{i!} a(s)ds \textit{ pour tout } t \in T, \tag{5.12}$$

$$\|x_{i+1}(t) - x_i(t)\| \leq \int_0^1 \frac{[m(1) - m(s)]^i}{i!} a(s)ds \; pour \; tout \; t \in T, \tag{5.13}$$

où $m(t) = \int_0^t n(\tau)d\tau$. On pose $T_0 = \{t \in T : \; a(t) = 0\}$. Puisque $x_0 \equiv 0$ on a $\dot{x}_0 \equiv 0$ et donc

$$d(0, F(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) < a(t) \quad pour \; tout \; t \in T \backslash T_0. \tag{5.14}$$

On définit la multi-application $K : T \rightrightarrows E$ par $K(t) = F(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))$ et on définit l'application $\alpha_0 : T \backslash T_0 \mapsto E$ par $\alpha_0(t) = d(0, K(t))$. Alors par l'Hypothèse H(F)(1), la multi-application K est mesurable. Donc par la Proposition 1.10 on obtient la mesurabilité de la fonction distance $d(x, K(\cdot))$, $\forall x \in E$, et par conséquent $d(0, K(\cdot))$ et mesurable.

De plus, la fonction $\alpha_0(\cdot)$ est mesurable sur l'ensemble mesurable $T \backslash T_0$, et par (5.14), $\alpha_0(t) < \frac{\alpha_0(t)+a(t)}{2} < a(t)$ sur $T \backslash T_0$.
Considérons la multi-application $G : T \backslash T_0 \mapsto E$ définie par

$$\begin{aligned} G(t) &= K(t) \cap \frac{\alpha_0(t) + a(t)}{2} \overline{B}. \\ &= \left\{ z \in K(t); \; \|z\| \leq \frac{\alpha_0(t) + a(t)}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Comme dans la preuve du Théorème 2.1, G est une multi-application mesurable à valeurs fermées non vides.
Par conséquent, d'après le théorème d'existence de sélection mesurable (voir Théorème 1.7), il existe une application mesurable $v^* : T \backslash T_0 \to E$ tel que $v^*(t) \in G(t) = F(t, x_0(t), y_0(t)) \cap \frac{\alpha_0(t)+a(t)}{2} \overline{B}$ pour tout $t \in T \backslash T_0$.
On pose $v_0(t) = v^*(t), \; pour \; tout \; t \in T \backslash T_0$, et $v_0(t) = 0, \; pour \; tout \; t \in T_0$, donc

$$v_0(t) = v^*(t) \in F(t, x_0(t), y_0(t)) \cap \frac{\alpha_0(t) + a(t)}{2} \overline{B} \quad sur \; T \backslash T_0.$$

Cela implique que

$$v_0(t) \in F(t, x_0(t), y_0(t)) \quad sur \; T \backslash T_0 \quad et \quad v_0(t) \in \frac{\alpha_0(t) + a(t)}{2} \overline{B} \quad sur \; T \backslash T_0.$$

D'où

$$\|v_0(t)\| \leq \frac{\alpha_0(t) + a(t)}{2} < a(t) \quad sur \; T \backslash T_0.$$

D'autre part, pour $t \in T_0$, $v_0(t) = a(t) = 0$ alors, par l'Hypothèse H'(F)(2).

$$\|v_0(t)\| \leq a(t) \quad sur \; T, \tag{5.15}$$

$$v_0(t) \in F(t, x_0(t), y_0(t)) \quad sur \; T. \tag{5.16}$$

Posons, pour tout $t \in T$,

$$x_1(t) = \int_0^t G(t, s) v_0(s) ds. \tag{5.17}$$

D'après la Proposition 5.1 , on trouve que

$$\ddot{x}_1(t) = v_0(t) \quad p.p \; sur \; T.$$

Alors

$$\|\ddot{x}_1(t)\| = \|v_0(t)\| \quad p.p. \tag{5.18}$$

D'après (5.15)

$$\|\ddot{x}_1(t)\| = \|v_0(t)\| \leq a(t) \quad p.p.$$

On obtient que

$$\|\ddot{x}_1(t)\| = \|v_0(t)\| \leq \ddot{r}(t) \quad p.p. \tag{5.19}$$

D'une part, on a par le Lemme 5.2, pour tout $t \in T$

$$\dot{x}_1(t) = \int_0^1 \frac{dG}{dt}(t,s)v_0(s)ds.$$

Donc, il résulte de (5.19) que

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_1(t)\| &= \| \int_0^1 \frac{dG}{dt}(t,s)v_0(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |\frac{dG}{dt}(t,s)|\|v_0(s)\|ds \\
&\leq \int_0^t \|v_0(s)\|ds \\
&\leq \int_0^t \ddot{r}(s)ds \\
&\leq \dot{r}(t).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\|x_1(t)\| =& \| \int_0^1 G(t,s)v_0(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s)|\|v_0(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 \|v_0(s)\|ds \\
&\leq \dot{r}(1).
\end{aligned}$$

De (5.19) on a $\|\ddot{x}_1(t)\| \in \ddot{r}(t)\overline{B} \quad p.p.$, et comme $\ddot{x}_1(t) = v_0(t) \quad p.p.$, en utilisant (5.16) on trouve que $\ddot{x}_1(t) \in F(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \quad p.p.$

Cela implique que

$$\ddot{x}_1(t) \in F(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \cap \ddot{r}(t)\overline{B} \quad p.p.$$

Alors d'après (5.5), on a

$$\ddot{x}_1(t) \in F(t, x_1(t), \dot{x}_1(t)) + n(t)\|\dot{x}_0(t) - \dot{x}_1(t)\|B \quad p.p.,$$

Cela implique que

$$d(\ddot{x}_1(t), F(t, x_1(t), \dot{x}_1(t)) < n(t)\|\dot{x}_0(t) - \dot{x}_1(t)\| \quad p.p.$$

Comme $\dot{x}_0(t) = 0$. On conclut

$$d(\ddot{x}_1(t), F(t, x_1(t), \dot{x}_1(t))) < n(t)\|\dot{x}_1(t)\| \quad p.p., \tag{5.20}$$

avec $\|\dot{x}_1(t)\| \neq 0$.
On pose $T_1 = \{t \in I : \|\dot{x}_1(t)\| = 0\}$, N_1 l'ensemble négligeable tel que (5.20) n'est pas vérifiée et on définit l'application $\alpha_1 : T\backslash(T_1 \cup N_1) \to E$ par $\alpha_1(t) = d(\ddot{x}_1(t), F(t, x_1(t), y_1(t)))$.
On a pour tout $t \in T\backslash(T_1 \cup N_1)$

$$\alpha_1(t) < \frac{\alpha_1(t) + n(t)\|\dot{x}_1(t)\|}{2} < n(t)\|\dot{x}_1(t)\|. \tag{5.21}$$

Comme $x_1 \in C^2(T, E)$, alors d'après l'hypothèse $H'(F)(1)$ et la Proposition 1.10, $t \mapsto d(\ddot{x}_1(t), F(t, x_1(t), \dot{x}_1(t))$ est une fonction mesurable.
Puisque $T_1 \cup N_1$ est un sous ensemble mesurable de T, la multi-application

$$t \mapsto F(t, x_1(t), \dot{x}_1(t)) \cap \left(\ddot{x}_1(t) + \frac{\alpha_1(t) + n(t)\|\dot{x}_1(t)\|}{2}\overline{B}\right) \quad t \in T\backslash(T_1 \cup N_1)$$

est mesurable à valeurs fermées non vides.
Alors, d'après le théorème d'existence de sélection mesurable. On définit l'application $v_1 : T \to E$ par $v_1(t) = v_1^*(t)$ pour tout $t \in T\backslash T_1$ et $v_1(t) = \ddot{x}_1(t)$ pour tout $t \in T_1$.
Pour presque tout $t \in T\backslash T_1$, on a

$$v_1^*(t) = v_1(t) \in F(t, x_1(t), \dot{x}_1(t)) \cap \left(\ddot{x}_1(t) + \frac{\alpha_1(t) + n(t)\|\dot{x}_1(t)\|}{2}\overline{B}\right).$$

Cela implique que

$$v_1(t) \in F(t, x_1(t), \dot{x}_1(t)) \; \textit{pour presque tout} \; t \in T\backslash T_1.$$

D'autre part, on définit la fonction $\varphi : T \to E$ par $\varphi(t) = \|\dot{x}_1(t)\|$, tel que φ est une fonction absolument continue. Alors d'après la Proposition 1.8 on trouve que

$$\ddot{x}_1(t) = 0 \quad \textit{p.p. sur } T_1 \textit{ et } 0 \in F(t, 0, 0).$$

D'oú

$$v_1(t) \in F(t, x_1(t), \dot{x}_1(t)) \quad \textit{p.p sur } T. \tag{5.22}$$

Pour presque tout $t \in T\backslash T_1$, on a

$$v_1(t) = v_1^*(t) \in F(t, x_1(t), \dot{x}_1(t)) \cap \left(\ddot{x}_1(t) + \frac{\alpha_1(t) + n(t)\|\dot{x}_1(t)\|}{2}\overline{B}\right).$$

Alors

$$v_1(t) \in \ddot{x}_1(t) + \frac{\alpha_1(t) + n(t)\|\dot{x}_1(t)\|}{2}\overline{B}.$$

De (5.21), on conclut que

$$\|\ddot{x}_1(t) - v_1(t)\| < n(t)\|\dot{x}_1(t)\| \quad p.p \ sur \ T\backslash T_1.$$

D'autre part, en utilisant la Proposition 1.8, $\ddot{x}_1(t) = 0 \quad p.p, \ sur \ T_1$ et $\ddot{x}_1(t) = v_1(t) \ pour \ t \in T$. D'oú, $\|\ddot{x}_1(t) - v_1(t)\| = k(t)\|x_1(t)\| = 0$. On obtient que

$$\|\ddot{x}_1(t) - v_1(t)\| \leq n(t)\|\dot{x}_1(t)\| \quad p.p \ sur \ T. \tag{5.23}$$

Alors

$$|\|\ddot{x}_1(t)\| - \|v_1(t)\|| \leq n(t)\|\dot{x}_1(t)\| \quad p.p.$$

D'où

$$\|v_1(t)\| \leq \|\ddot{x}_1(t)\| + n(t)\|y_1(t)\| \quad p.p.$$

On obtient

$$\|v_1(t)\| \leq \|v_0(t)\| + n(t)\|\dot{x}_1(t)\| \quad p.p,$$

$$\|v_1(t)\| \leq a(t) + n(t)\dot{r}(t) \quad p.p. \tag{5.24}$$

On pose, pour tout $t \in T$

$$x_2(t) = \int_0^1 G(t,s)v_1(s)ds. \tag{5.25}$$

D'après la proposition 5.1, on trouve que

$$\ddot{x}_2(t) = v_1(t) \quad p.p.$$

alors

$$\|\ddot{x}_2(t)\| = \|v_1(t)\| \quad p.p. \tag{5.26}$$

D'après (5.24)

$$\|\ddot{x}_2(t)\| = \|v_1(t)\| \leq a(t) + n(t)\dot{r}(t) \quad p.p.$$

Donc

$$\|\ddot{x}_2(t)\| \leq \ddot{r}(t) \quad p.p. \tag{5.27}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_2(t)\| &= \| \int_0^1 \frac{dG}{dt}(t,s)v_1(s)ds\| \\
&\leq \int_0^t |\frac{dG}{dt}(t,s)|\|v_1(s)\|ds \\
&\leq \int_0^t \|v_1(s)\|ds \\
&\leq \int_0^t \ddot{r}(s)ds \\
&= \dot{r}(t).
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
\|x_2(t)\| &= \| \int_0^1 G(t,s)v_1(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s)|\|v_1\|(s)ds \\
&\leq \int_0^1 \|v_1\|(s)ds \\
&\leq \dot{r}(1).
\end{aligned}$$

De (5.26) on a $\ddot{x}_2(t) = v_1(t) \quad p.p.$, et de (5.23), (5.15) on obtient

$$\begin{aligned}
\|\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)\| &\leq n(t)\|\dot{x}_1(t)\| \\
&\leq n(t) \int_0^t \|v_0(s)\| \\
&\leq n(t) \int_0^t a(s)ds.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)\| \leq n(t) \int_0^t a(s)ds \quad p.p. \tag{5.28}$$

Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\| &\leq \| \int_0^1 \frac{dG}{dt}(t,s)(\ddot{x}_2(s) - \ddot{x}_1(s))ds\| \\
&\leq \int_0^t |\frac{dG}{dt}(t,s)|\|\ddot{x}_2(s) - \ddot{x}_1(s)\|ds \\
&\leq \int_0^t \|\ddot{x}_2(s) - \ddot{x}_1(s)\|ds \\
&\leq \int_0^t n(\tau) \int_0^\tau a(s)dsd(\tau) \quad p.p. \\
&= \int_0^t (m(t) - m(s))a(s)ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\| = \int_0^t (m(t) - m(s))a(s)ds, \tag{5.29}$$

et

$$\begin{aligned}
\|x_2(t)-x_1(t)\| &= \| \int_0^1 G(t,s)(\ddot{x}_2(s)-\ddot{x}_1(s)\| \\
&\le \int_0^1 |G(t,s)|\|\ddot{x}_2(s)-\ddot{x}_1(s)\|ds \\
&\le \int_0^1 n(\tau)\int_0^\tau a(s)dsd\tau \\
&\le \int_0^1 a(s)\int_s^1 n(\tau)d\tau ds \\
&= \int_0^1 (m(1)-m(s))a(s)ds.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|x_2(t)-x_1(t)\| = \int_0^1 (m(1)-m(s))a(s)ds. \tag{5.30}$$

On conclut que les relation (5.6) - (5.13) sont vérifiées pour $i=1$. Supposons maintenant que $x_1(t),...,x_i(t)$ vérifient les relations (5.6) - (5.13). Alors

$$\ddot{x}_i(t) \in F(t,x_{i-1}(t),\dot{x}_{i-1}(t))p.p, \|\ddot{x}(t)\| \le \dot{r}(t)p.p,$$

$$\|\dot{x}_{i-1}(t)\| \le \dot{r}(t), \|\dot{x}_i(t)\| \le \dot{r}(t),\ \textit{pour tout } t\in T,$$

$$\|x_{i-1}(t)\| \le \dot{r}(1), \|\dot{x}_i(t)\| \le \dot{r}(1),\ \textit{pour tout } t\in T.$$

En utilisant (5.5) et ces relations, pour $x=x_{i-1}(t)$, $y=\dot{x}_{i-1}(t)$ et $x'=x_i(t)$, $y'=\dot{x}_i(t)$, on obtient

$$\ddot{x}_i(t)\in F(t,x_{i-1}(t),\dot{x}_{i-1}(t))\cap \ddot{r}(t)\overline{B} \subset F(t,x_i(t),\dot{x}_i(t)) + n(t)\|\dot{x}_i(t)-\dot{x}_{i-1}(t)\|B.$$

Cette inclusion implique

$$d(\ddot{x}_i(t),F(t,x_i(t),\dot{x}_i(t)) < n(t)\|\dot{x}_i(t)-\dot{x}_{i-1}(t)\| \quad p.p, \tag{5.31}$$

si $\|\dot{x}_i(t)-\dot{x}_{i-1}(t)\| \ne 0$.

Comme ci-dessus, on pose $T_i=\{t\in T : \|\dot{x}_i(t)-\dot{x}_{i-1}(t)\|=0\}$ et N_i l'ensemble négligeable tel que (5.31) n'est pas vérifiée. La fonction $\alpha_i(t)=d(\ddot{x}_i(t),F(t,x_i(t),\dot{x}_i(t))$ est mesurable sur $T\backslash(T_i\cup N_i)$ et $\alpha_i(t) < \frac{\alpha_i(t)+k(t)\|\dot{x}_i(t)-\dot{x}_{i-1}(t)\|}{2} < n(t)\|\dot{x}_i(t)-\dot{x}_{i-1}(t)\|$ pour tout $t\in T\backslash(T_i\cup N_i)$. La multi-application

$$t\mapsto F(t,x_i(t),\dot{x}_i(t))\cap\left(\ddot{x}_i(t)+\frac{\alpha_i(t)+n(t)\|\dot{x}_i(t)-\dot{x}_{i-1}(t)\|}{2}\overline{B}\right), \quad t\in T\backslash(T_i\cup N_i)$$

est mesurable à valeurs fermées non vides. Alors d'après le théorème d'existence de sélection mesurable (voir Théorème1.7), il existe une application mesurable $v_i^* : I\backslash T_i$ tel que

$v_i(t) = v_i^*(t)$ pour $t \in T \backslash T_i$ et $v_i(t) = \ddot{x}_i(t)$ pour $t \in T_i$.

Alors, on a pour presque tout $t \in T \backslash T_i$

$$v_i(t) = v_i^*(t) \in F(t, x_i(t), \dot{x}_i(t)) \cap \left(\ddot{x}_i(t) + \frac{\alpha_i(t) + n(t)\|\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i-1}(t)\|}{2}\overline{B}\right).$$

Cela implique que

$$v_i(t) \in F(t, x_i(t), \dot{x}_i(t)) \ et \ v_i(t) \in \left(\ddot{x}_i(t) + \frac{\alpha_i(t) + n(t)\|\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i-1}(t)\|}{2}\overline{B}\right).$$

D'oú

$$\|\ddot{x}_i(t) - v_i(t)\| \leq \left(\frac{\alpha_i(t) + n(t)\|\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i-1}(t)\|}{2}\right) < n(t)\|\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i-1}(t)\| \quad p.p \ sur \ T \backslash T_i.$$

De plus pour presque tout $t \in T_i$, on a, $v_i(t) = \ddot{x}_i(t)$ et $\|\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i-1}(t)\| = 0$ donc

$$\|\ddot{x}_i(t) - v_i(t)\| = n(t)\|\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i-1}(t)\| = 0,$$

et on a

$$v_i(t) = \ddot{x}_i(t) \in F(t, x_i(t), \dot{x}_i(t)) \quad p.p \ sur \ T_i.$$

D'oú

$$v_i(t) \in F(t, x_i(t), \dot{x}_i(t)) \quad p.p \ surT, \tag{5.32}$$

$$\|\ddot{x}_i(t) - v_i(t)\| \leq n(t)\|\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i-1}(t)\| \quad p.p \ surT. \tag{5.33}$$

On pose, pour tout $t \in T$

$$x_{i+1}(t) = \int_0^1 G(t, s) v_i(s) ds. \tag{5.34}$$

Par conséquent, d'après l'égalité $\ddot{x}_{i+1}(t) = v_i(s)$ $p.p$, et de (5.33) on trouve que

$$\begin{aligned} \|\ddot{x}_{i+1}(t)\| - \|\ddot{x}_1(t)\| &\leq \|\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_1(t)\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{i} \|\ddot{x}_{j+i}(t) - \ddot{x}_j(t)\| \\ &\leq n(t) \sum_{j=1}^{i} \|\dot{x}_j(t) - x_{j-1}(t)\| \quad p.p, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|\ddot{x}_{i+1}(t)\| \leq n(t) \sum_{j=1}^{i} \|\dot{x}_j(t) - \dot{x}_{j-1}(t)\| + \|\ddot{x}_1(t)\| \quad p.p \ surT.$$

En utilisant (5.12) et (5.15) on obtient

$$\|\ddot{x}_{i+1}(t)\| \leq n(t) \left[\sum_{j=0}^{i-1} \int_0^t \frac{[m(t) - m(s)]^j}{j!} a(s) ds\right] + a(t) \quad p.p. \tag{5.35}$$

Or, $1+\frac{z}{1!}+...+\frac{z^j}{j!}\leq e^z$, $z\geq 0$, donc, on déduit de (5.35) que

$$\|\ddot{x}_{i+1}(t)\|\leq n(t)\left[\int_0^t e^{m(t)-m(s)}a(s)ds\right]+a(t)\quad p.p.,$$

Comme $\int_0^t e^{m(t)-m(s)}a(s)ds=\int_0^t exp(\int_0^\tau n(\tau)ds)=\dot{r}(t)$, on obtient

$$\|\ddot{x}_{i+1}(t)\|\leq n(t)\dot{r}(t)+a(t)=\ddot{r}(t)\quad p.p. \tag{5.36}$$

D'après (5.34) et (5.36) on a, pour tout $t\in T$

$$\begin{aligned}\|\dot{x}_{i+1}(t)\| &= \|\int_0^1\frac{dG}{dt}(t,s)v_i(s)ds\|\\ &\leq \int_0^t|\frac{dG}{dt}(t,s)|\|v_i(s)\|ds\\ &\leq \int_0^t\|v_i(s)\|ds\\ &\leq \int_0^t\|\ddot{x}_{i+1}(s)\|ds\\ &\leq \int_0^t\ddot{r}(s)ds\\ &\leq r_0+\dot{r}(t)-r_0=\dot{r}(t).\end{aligned}$$

D'oú

$$\|\dot{x}_{i+1}(t)\|\leq\dot{r}(t). \tag{5.37}$$

De plus

$$\begin{aligned}\|x_{i+1}(t)\| &= \|\int_0^1 G(t,s)v_i(s)ds\|\\ &\leq \int_0^1|G(t,s)|\|v_i(s)\|ds\\ &\leq \int_0^1\|v_i(s)\|ds\\ &\leq \dot{r}(1).\end{aligned}$$

D'autre part de (5.34) on a $\ddot{x}_{i+1}(t)=v_i(s)$ $p.p$, et de (5.33) et (5.12) on obtient

$$\begin{aligned}\|\ddot{x}_{i+1}(t)-\ddot{x}_i(t)\| &\leq n(t)\|\dot{x}_i(t)-\dot{x}_{i-1}(t)\|\quad p.p.,\\ &\leq n(t)\left[\int_0^t\frac{[m(t)-m(s)]^{i-1}}{(i-1)!}a(s)ds\right]\quad p.p.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\|\ddot{x}_{i+1}(t)-\ddot{x}_i(t)\|\leq n(t)\left[\int_0^t\frac{[m(t)-m(s)]^{i-1}}{(i-1)!}a(s)ds\right]\quad p.p. \tag{5.38}$$

alors

$$\|\dot{x}_{i+1}(t)-\dot{x}_i(t)\|\leq\int_0^t\frac{[m(t)-m(s)]^i}{i!}a(s)ds\quad p.p, \tag{5.39}$$

et

$$\|x_{i+1}(t) - x_i(t)\| \leq \int_0^1 n(\tau) \left[\int_0^\tau \frac{[m(\tau) - m(s)]^{i-1}}{i-1!} a(s)ds \right] d(\tau) \quad p.p. \tag{5.40}$$

D'après (5.31)-(5.33) et (5.35)-(5.37), les relations (5.6)-(5.5)-(5.13) sont également vérifiées pour $x_{i+1}(t)$.

Etape 3.

Il résulte de (5.40) et (5.12) que

$$\|x_{i+1}(t) - x_i(t)\|_{C^1} \leq \int_0^1 \frac{[m(1) - m(s)]^i}{i!} a(s)ds. \tag{5.41}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \|x_{i+1}(t) - x_i(t)\|_{C^1} &\leq \int_0^1 \exp(m(1) - m(s))a(s)ds \\ &\leq \exp(m(1))\|a\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Cette inégalité montre que la suite (x_i) est une suite de Cauchy dans $C^1(T, E)$, par conséquent, elle converge vers une application $w \in C^1(T, E)$. De même, (5.11) implique que la suite $(\ddot{x}_i(\cdot))_{i \geq 1}$ converge presque partout vers un application v. De (5.35) nous avons

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \dot{r}(t), \quad \|v(t)\| \leq \ddot{r}(t) \; p.p, \quad \|x(t)\| \leq \dot{r}(1). \tag{5.42}$$

Par conséquent, en utilisant le Théorème de la convergence dominée on trouve que

$$\begin{aligned} \lim_{i \to \infty} \|\ddot{x}_i - v\|_1 &= \lim_{i \to \infty} \int_0^1 \|\ddot{x}_i(t) - v(t)\|dt \\ &= \int_0^1 \lim_{i \to \infty} \|\ddot{x}_i(t) - v(t)\|dt = 0. \end{aligned}$$

Donc la suite $(\ddot{x}_i(\cdot))_{i \geq 1}$ converge vers v dans $L^1(I, E)$. En utilisant (5.6) et passant à la limite quand $i \to \infty$, on obtient

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_{i+1}(t) = \int_0^t \ddot{x}_i(s)ds.$$

Par le Théorème de la convergence dominée on trouve que

$$\|\ddot{x}_i(t) - v\|_1 = \lim_{i \to \infty} \int_0^1 \|\ddot{x}_i(t) - v(t)\|dt = \int_0^1 \lim_{i \to \infty} \|\ddot{x}_i(t) - v(t)\|dt = 0.$$

Donc la suite $(\ddot{x}_i(\cdot))_{i \geq 1}$ converge vers v dans $L^1(T, E)$. On pose $x = x_v$, alors nous avons

$$\|x_i(t) - x_v(t)\| \leq \|\ddot{x}_i - v\|_{L^1},$$

et

$$\|\dot{x}_i(t) - x_v(t)\| \leq \|\ddot{x}_i - v\|_{L^1}.$$

C'est deux inégalités donne

$$\|x_i - x_v\|_{C^1} \leq \|\ddot{x}_i - v\|_{L^1}. \tag{5.43}$$

Par la convergence forte dans $L^1(T,E)$ de $(\ddot{x}_i)$ vers v, la relation (5.43) implique la convergence de $(\ddot{x}_i)$ dans $C^1(T,E)$ vers v. Alors, on aura $x_v = w$ et par la Proposition 5.1,

$$\ddot{x}_v = v \quad p.p, \dot{x}_v(0) = 0, x_v(1) = 0.$$

Puisque, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a

$$d(\ddot{x}_{i+1}(t), F(t, x_v(t), \dot{x}_v(t)) \leq n(t)\|\dot{x}_i(t) - \dot{x}_v(t)\| \quad p.p,$$

par passage à la limite quand $i \to \infty$, on obtient

$$d(\ddot{x}_v(t), F(t, x_v(t), \dot{x}_v(t)) = 0 \quad p.p.$$

D'où

$$\ddot{x}_v(t) \in F(t, x_v(t), \dot{x}_v(t)) \quad p.p.$$

et x_v est une solution de l'inclusion différentielle.

Le Théorème 5.1 implique que si les hypothèses $H(F)$ sont vérifiées alors l'inclusion différentielle

$$\ddot{x}(t) \in \overline{co}F(t, x(t), \dot{x}(t)), \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(1) = 0, \tag{5.44}$$

admet une solution.

□

On donne maintenant deux corollaires du théorème précédentes avec un changement dans les hypothèses.

Hypothèses ($\mathbf{H}(\overline{\mathbf{co}}\mathbf{F})$). *Soit $F : T \times b\overline{B}T \times b\overline{B} \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides vérifiant*

1. *La multi-application $t \mapsto \overline{co}F(t, x(t), y(t))$ est mesurable pour toutes applications $x(\cdot), y(\cdot) \in C(T,E)$ avec $\|x(t)\| \leq b$, $\|y(t)\| \leq b$ pour tout $t \in T$.*
2. *Pour tout $t \in T$*

$$haus_\rho(\overline{co}F(t,x,y), \overline{co}F(t,x',y')) < (m(t) + \beta\rho)\|y - y'\|, \tag{5.45}$$

pour toutes $x, y, x', y' \in b\overline{B}$ tels que $y \neq y'$, $\rho > 0$.

3. *Il existe une fonction strictement positive* $\rho_0 \in L^1(T, \mathbb{R})$ *telle que*

$$d(0, \overline{co}F(t,x,y)) < \rho_0(t), \text{pour tout } x, y \in E \text{ tel que} \quad \|x\| \leq b, \|y\| \leq b. \tag{5.46}$$

On pose

$$\rho(t) = 2\rho_0(t), \tag{5.47}$$

$$l(t) = 4(m(t) + \beta\rho(t)), \tag{5.48}$$

et on prend la solution $\dot{r}_*$ de l'équation différentielle

$$\ddot{r}_*(t) = \rho(t) + l(t)\dot{r}_*(t), \quad t \in T, \quad r_*(0) = r_0 < b, \tag{5.49}$$

Corollaire 5.1. *Si les hypothèses* $H(\overline{co}F)$ *sont vérifiées, alors il existe une solution* x *du problème* (5.44) *telle que*

$$\|x(t)\| \leq \dot{r}_*(1), \|\dot{x}(t)\| \leq \dot{r}(t) \text{ pour tout } t \in T, \tag{5.50}$$

et

$$\|\ddot{x}(t)\| \leq \ddot{r}_*(t) \quad p.p \text{ sur } T. \tag{5.51}$$

avec $\dot{r}(t) \leq b$.

La preuve est similaire à la preuve du Théorème 2.2.

Pour $g(\cdot) \in W^{1.1}(T, E)$, on pose

$$Q(g) = \{(t,x,y) \in T \times E \times E; \|\dot{x}_g(t) - y\| \leq b \text{ et } \|x_g(t) - x\| \leq b\}$$

avec $b > 0$ et considérons $F : Q(g) \rightrightarrows E$. Faisons les hypothèse suivants.

Hypothèses ($\mathbf{H_g(F)}$).

1. *La multi-application* $t \mapsto F(t, x(t), y(t))$ *est mesurable pour toute application* $x(\cdot) \in C(T,E)$, $y(\cdot) \in C(T,E)$, *avec* $\|y(t) - \dot{x}_g(t)\| \leq b$, $\|x(t) - x_g(t)\| \leq b$ *pour tout* $t \in T$.
2. *On a*

$$d(-\dot{g}(t), F(t,x,y)) < a(t) + k(t)\|y - \dot{x}_g(t)\| \quad \text{pour tout } t \in T, \tag{5.52}$$

avec $\|y - \dot{x}_g(t)\| \leq b, \|x - x_g(t)\| \leq b$.

3.

$$haus_\rho(-\dot{g}(t) + F(t,x,y), -\dot{g}(t) + F(t,x',y')) < k(t)\|y - y'\|, \tag{5.53}$$

avec $\|y - \dot{x}_g(t)\| \leq b$, $\|y' - \dot{x}_g(t)\| \leq b$, $\|x - x_g(t)\| \leq b$, $\|x' - x_g(t)\| \leq b \quad y \neq y'$, $\rho = \ddot{r}(t)$.

Considérons l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) \in F(t, x(t), \dot{x}(t)), \quad p.p\ t \in T \\ \dot{x}(0) = 0, x(1) = 0. \end{cases} \tag{5.54}$$

Corollaire 5.2. *Si les hypothèses $H_g(F)$ sont vérifiées, alors il existe une solution x du problème* (5.54) *telle que*

$$\|x(t) - x_g(t)\| \leq \dot{r}(1), \|\dot{x}(t) - \dot{x}_g(t)\| \leq \dot{r}(t) \text{ pour tout } t \in T,$$

et

$$\|\ddot{x}(t) - \ddot{x}_g(t)\| \leq \ddot{r}(t), p.p \text{ sur } T.$$

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a présenté quelques résultats d'existence de solutions pour les inclusions différentielles du premier ordre dans un espace de Banach séparables de dimension infinie et sous différentes hypothèses sur la multi-application F.

Il est réparti en deux parties.

La première concerne, la démonstration des théorèmes d'existence de solutions globales et locales pour les inclusions différentielles du premier ordre avec F une multi-application à valeurs non vides fermées possiblement non bornées.

Dans la deuxième partie, on a démontré un théorème de relaxation pour les inclusions différentielle du premier ordre, où, dans les preuves, nous utilisons le concept de $(\rho - H)$-lipschitzien. Enfin, on a donné un exemple d'une multi-application F pour la quelle l'inclusion convexifiée admet une solution. Ces résultats sont pris du travail de Tolstonogov [21].

Dans le dernier chapitre nous avons essayé de généraliser le théorème d'existence des solutions globales au cas des inclusions différentielles du second ordre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Attouch and B. R. J. Wets, *Quantitative stability of variational systems : I. The epigraphical distance*, Trans. Amer. Math. Soc. 328 (2), (1991)695–729.

[2] J.P. Aubin, A. Cellina, *Differential inclusions*, Set-valued maps and viability theory, Springer-Verlag, Berlin (1984).

[3] D. Azzam-Laouir, *Policopié, cours de mesure et intégration*, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Jijel (2009).

[4] D. Azzam-Laouir, *Cours d'analyse convexe*, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Jijel (2014).

[5] D. Azzam-Laouir, *Polycopié, cours d'analyse multivoque*, Laboratoire de Mathématiques Pure et Appliquées, Université de Jijel (2009).

[6] C. Berghaller et I. Zinger , *The distance to a polyhedron*, Linear Algebra Appl., vol. 169, (1992)111–129.

[7] R. Bouabdalah et N. Bouhali, *Inclusions différentielles avec perturbation non bornée : Théorèmes d'existence et de relaxation*, mémoire de Master, Université Med Seddik Ben Yahia-Jijel (2017-2018).

[8] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, (1983).

[9] A. Filippov, *Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side*, Vestn. Mosk.Univ., Ser. Mat. Mekh. 3, (1967)16–26.

[10] L. Gasinski et N. S. Papageorgiou, *Series in Mathematical Analysis and Applications, Volume 9 :Nonlinear analysis*, National University of Ireland, (2005).

[11] Georgi V. Smirnov, *Introduction to the Theory of Differential Inclusions*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 41, (2001) 1065-7339.

[12] C.J. Himmelberg, *Measurable relations*, Fund. Math. 87, (1975)53–72.

[13] Levakov A. A., *Some properties of solutions of differential inclusions in a Banach space*, Vestn. Belorus. Univ. Ser. 1. Fiz., Mat., Mekh., vol. 1, (1982)45–48.

[14] Loewen P. D. and Rockafellar R. T., *Optimal control of unbounded differential inclusions*, SIAM J. Control Optim., vol. 32, no. 2, (1994)442–470.

[15] A. Makhlouf, *Etude d'une classe d'inclusions différentielles avec second membre pseudo-Lipschitzien*, mémoire de Magister, Université Med Seddik Ben Yahia-Jijel (2010) .

[16] A. Makhlouf, *Existence de solutions pour certaines classes d'inclusions différentielles*, Thèse de doctorat, Université Med Seddik Ben Yahia-Jijel (2015).

[17] S. Melit, *Etude d'une classe de problèmes d'évolution régis par le sous differentiel*, Thèse de doctorat, Université Med Seddik Ben Yahia-Jijel (2017).

[18] K. S. Papageorgiou et S. T. Kiritsy-Yaillourou, *Handbook of Applied Analysis*, Volume 19 (2008).

[19] A. A. Tolstonogov. *Differential inclusions with unbounded right, Hand side :Existance and relaxation theorems*, Proc. SteklovInst. Math. 291(1), (2015)190-207.

[20] A .A. Tolstonogov and Tolstonogov D. A., *Lp-Continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values. Relaxation theorems*, Set-Valued Anal., vol. 87, no. 4, (1996)237–269.

[21] A .A. Tolstonogov. *Existance and relaxation of solutions to differential inclusion with unbounded right, Hand side in a Banach space*, Siberian Mathematical Journal, 58 (4), pp. (2017)727–742.

[22] Q. Zhang et G. Li. *Nonlinear boundary value problems for second order differential inclusions.* Nonlinear Analysis, 70 (2009) 3390–3406.