République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik BenYahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

№ d'ordre ....

№ de séries ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Inclusions différentielles gouvernées par des opérateurs maximaux monotones non stationnaires

Présenté par

Aibeche Amira *Maza Souad*

Devant le jury :

Président	R. Belhadef	M. C. B Université de Jijel
Encadreur	S. Izza	M. C. B Université de Jijel
Examinateur	A. Makhlouf	M. C. B Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

Dédicace

Je dédie ce modeste travail avant tous

À l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et ma source de joie et de bonheur. Je sais que tu es fière de moi. Que dieu te garde dans son vaste paradis, à toi **mon père Hocine** je t'aime.

À la lumière de ma vie, la source de mes efforts et mon bonheur, **ma mère Nora** que j'adore.

A mes grands parents **Bachir et Safia** pour leur soutien moral et pour leurs encouragements, que Dieu vous protège.

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence en ce jour, à tous mes très chers frères : **Farouk, Younes et Mahdi** . À mes sœures **Ranya, Sonia et Maroi**. À mon fiancé **Mouad**.

À ma chère amie et binôme **Souad**, toutes mes amies : **Imane, Basma, Sara, Amina,** . Elles n'ont cessé de me soutenir, par leurs encouragements et leurs profonde affections. Je vous souhaite du fond de mon cœur une belle vie pleine de joie, de bonheur et de succès. A toute personne que à une place dans non cœur, j'estime et j'aime.

A. Amira

Dédicace

Je dédie ce modeste travail avant tous

À l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et ma source de joie et de bonheur. Je sais que tu es fière de moi. **mon père Messaoud** je t'aime.

À la lumière de ma vie, la source de mes efforts et mon bonheur, **ma mère Zoubida** que j'adore.

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence en ce jour, à tous mes très chers frères : **Mohamed et Saleh**. À mes sœures **Manel, Nadjet, Samia, Assia et Alima et leurs fils Rania et sifou**.

À ma chère amie et binôme **Amira**, toutes mes amies : **Firdaws, Farah, Imane, Amina, Sara, Imane**. Elles n'ont cessé de me soutenir, par leurs encouragements et leurs profondes affections. Je vous souhaite du fond de mon cœur une belle vie plein de joie, de bonheur et de succès. A toute personne que à une place dans non cœur, j'estime et j'aime.

M. Souad

Remerciement

Avant tout, nous remercions Dieux le tout puissant, pour la volonté, la santé et la patience qu'il nous a données pour terminer ce travail.
Nous remercions en particulier notre encadreur ***Dr. Izza Sabrina*** *pour avoir dirigé ce travail, pour son aide, ses encouragements, ses précieux conseils et pour la patience qu'elle nous a accordée pendant la réalisation de ce mémoire.*
Un grand merci également aux membres du jury : le président ***Dr. Rafik Belhadef****, l'examinatrice* ***Dr. Amira Makhlouf*** *pour l'honneur qu'ils nous ont faites en acceptant d'évaluer notre travail.*
Nos vifs remerciements vont à tous les enseignants du département de mathématiques et tous nos enseignants durant nos vie scolaires.
Enfin nous remercions toutes les personnes qui nous ont encouragées pour terminer ce travail de loin ou de près.

merci . . merci . . merci . . merci . .

Amira et Souad

Table des matières

Introduction **7**

1 Préliminaires et notations **9**

1.1 Notations générales 9

1.2 Notions sur les Multi-applications 10

1.3 Distance de Hausdorff 11

1.4 Topologie faible 12

1.5 Continuité des fonctions 13

1.6 Fonctions à variations bornées 13

1.7 Ensembles et fonctions convexes 14

1.7.1 Ensembles convexes 14

1.7.2 Fonctions convexes 15

1.7.3 Les cônes 16

1.8 Quelques théorèmes et définitions utiles 17

2 Étude des opérateurs maximaux monotones **19**

2.1 Propriétés fondamentales des opérateurs maximaux monotones 19

2.2 Distance de Vladimirov 20

2.3 Opérateurs dépendants continument du temps 31

3 Inclusions différentielles non stationnaires **33**

3.1 Opérateurs constants par morceaux 33

3.2 Borne supérieure de la variation de la solution 39

3.3 Existence et unicité de la solution d'un opérateur régulier 45

Conclusion **53**

Bibliographie **53**

Introduction

Les inclusions différentielles gouvernées par des opérateurs maximaux monotones (aussi celles gouvernées par des opérateurs de grandes classes comme accrétifs, m-accrétifs,...), ont été intensivement étudiées au milieu des années soixante. La théorie des inclusions différentielles stationnaires a fait l'objet d'études approfondies (exemple [5]). Les résultats connus dans le cas d'un opérateur qui dépend du temps, sont ceux des inclusions réduites essentiellement au cas où la fermeture du domaine effectif de l'opérateur ne dépend pas du temps. Sauf exception la théorie des processus de la rafle ; qui est un cas particulier d'opérateurs maximaux monotones, dans cette théorie on étudie des opérateurs de la forme spéciale $A^t = \partial\delta_{C^t}$ (avec $\delta_{C^t} = N_{C^t}$ est la fonction indicatrice d'un ensemble C^t convexe fermé variable dans un espace de Hilbert et N_{C^t} et un cône, généralement l'intérieur de C^t est non vide), plusieurs auteurs ont montré que de nombreux résultats de la théorie des processus de la rafle peuvent être étendus au cas des inclusions différentielles gouvernées par des opérateurs maximaux monotones généraux A^t (pour lesquels l'intérieur du domaine effectif est non vide pour chaque t).

Dans la théorie des opérateurs maximaux monotones voir [5] on étudie les inclusions différentielles d'évolution de la forme

$$\dot{x}(t) + Ax(t) \ni f(t), \quad x(0) = x_0 \in \overline{D(A)}, \tag{1}$$

où $f(.) \in L^1\big([0,T];H\big)$, i.e. ; une fonction intégrable au sens de Lebesgue sur le segment $[0,T]$, avec des valeurs dans H.

Par une solution forte de l'inclusion (1) nous voulons dire une fonction $x(.) \in C\big([0,T];H\big)$ avec $x(0) = x_0$, absolument continue sur tout compact de $(0,T]$ et satisfaisant les conditions

$$x(t) \in D(A), \quad \dot{x}(t) + Ax(t) \ni f(t)$$

presque partout sur $[0,T]$. Une fonction $x(.) \in C\big([0,T];H\big)$ est dite une solution faible de l'inclusions (1), s'il existe des suites $(f_n(.))_n \in L^1\big([0,T];H\big)$, $(x_n(.))_n \in C\big([0,T];H\big)$, telles que $x_n(.)$ est une solution forte de l'inclusion

$$\dot{x}_n(t) + Ax_n(t) \ni f_n(t)$$

pour chaque n, la suite $(f_n(\cdot))_n$ converge vers f pour $n \to \infty$ dans $L^1\big([0,T];H\big)$, la suite $(x_n(\cdot))_n$ converge vers x pour $n \to \infty$, uniformément sur $[0,T]$.
Pour tout opérateur maximal monotone A dans H, tout $f(.) \in L^1\big([0,T];H\big)$ et $x_0 \in \overline{D(A)}$, il existe une solution faible unique de l'inclusion (1).

Ce mémoire représente nos premiers pas dans le domaine de la recherche, ceci par la lecture, l'étude et le détail des résultats d'un article [12], portant sur l'existence de solutions à variations bornées pour une inclusion différentielle régie par un opérateur maximal monotone dépendant du temps.

Notre mémoire est organisé en trois chapitres. Dans le chapitre 1, on rappelle des notions de base sur l'analyse multivoque, l'analyse convexe et l'analyse fonctionnelle et on ennonce des résultats et des théorèmes fondamentaux utilisés tout au long de ce mémoire.

Dans le chapitre 2 on introduit les définitions, les propriétés fondamentales qui caractérisent les opérateurs maximaux monotones avec d'autres résultat que nous avons utilisés dans ce chapitre et le chapitre 3, on donne la définition de la distance de Vladimirov entre deux opérateurs maximaux monotones suivie par des lemmes importants résumant quelques propriétés de cette distance et qui nous ont servi dans les preuves des résultats du chapitre 3.

Dans le chapitre 3 on s'intéresse à l'existence et l'unicité des solutions pour un problème non stationnaire gouverné par un opérateur maximal monotone. Le problème concerne l'étude de l'existence et l'unicité de la solution à variation bornée sur $[0,T]$, pour l'inclusion différentielle

$$\dot{x}(t) \in -A^t x(t),\ x(0) = x_0 \in \overline{D(A^0)},$$

où $A^t : D(A^t) \subset H \longrightarrow 2^H$ est un opérateur maximal monotone.

Chapitre 1

Préliminaires et notations

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base, tous les résultats et les définitions qui nous seront utiles tout au long de ce mémoire.
On commence par quelques notations, par suite nous présentons des définitions et concepts fondamentaux et quelques théorèmes utiles.

1.1 Notations générales

Dans toute la suite nous allons adopter les notations suivantes

- H un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme qui lui est associée $| \cdot |$.
- E espace vectoriel normé muni de la norme $| \cdot |_E$.
- E' dual topologique de E.
- $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.
- $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs.
- $\overline{C}$ l'adhérence de $C \subset H$.
- $int(C)$ l'intérieur de l'ensemble C .
- $\sigma(E, E')$ la topologie faible de E.
- $x_n \longrightarrow x$ exprime que la suite x_n converge fortement vers x.
- $x_n \rightharpoonup x$ exprime que la suite x_n converge faiblement vers x.
- $B(x_0, r) = \bar{B}(x_0, r)$ la boule fermée de centre x_0 et de rayon r.

- $B_R = \bar{B}(0, R)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon R.
- I_H l'identité de H.
- $C([0, T]; H)$ l'espace des fonctions continues définies sur $[0, T]$ à valeurs dans H, muni de la norme $|\cdot|_C$ définie par $|f|_C = \sup\limits_{t\in[0,T]} |f(t)|$.
- $L^1([0, T]; H)$ l'espace des fonctions intégrables définies sur $[0, T]$ à valeurs dans H.
- $VB[a, b]$ l'espace des fonctions à variations bornées.

1.2 Notions sur les Multi-applications

On introduit dans cette section le concept d'une multi-application, aussi appelée application multivoque ou multifonction, ces définitions ont été prises de la référence [1].

Définition 1.2.1. *Soient X, T deux ensembles non vides. On dit que F est une multi-application ou application multivoque de T dans X si F est une application de T à valeurs dans 2^X où $2^X = P(X)$ l'ensemble de toutes les parties de X, et on note*

$$F : T \longrightarrow 2^X \ \textit{ou} \ \ F : T \rightrightarrows X.$$

Donc pour tout $t \in T$, $F(t)$ est un sous ensemble de X. Si l'ensemble $F(t)$ contient au plus un élément $x \in X$ on dira que F est une application univoque.

Définition 1.2.2. *Soit $F : T \longrightarrow 2^X$ une multi-application. Alors*

1. *Le domaine de F qu'on note $D(F)$ est défini par*
$$D(F) = \{t \in T;\ F(t) \neq \emptyset\}.$$
2. *L'image de F qu'on note $Im(F)$ est définie par*
$$Im(F) = \big\{x \in X;\ \exists t \in T,\ x \in F(t)\big\}.$$
3. *La multi-application inverse $F^{-1} : X \longrightarrow 2^T$ est définie par*
$$F^{-1}(x) = \big\{t \in T;\ x \in F(t)\big\},\ \forall x \in X.$$
4. *Le graphe de F qu'on note $\Gamma(F)$ est le sous ensemble de $T \times X$ défini par*
$$\Gamma(F) = \big\{(t, x) \in T \times X;\ x \in F(t)\big\}.$$

1.3 Distance de Hausdorff

Nous allons donner dans cette section quelques résultats sur la distance de Hausdorff qui ont été prises de la référence [4].

Définition 1.3.1. *(Espace métrique) Soit X un ensemble non vide. On appelle distance sur X toute application d définie de $X \times X$ dans $\mathbb{R}^+$ et vérifiant les propriétés suivantes*

1. $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$
2. $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = d(y,x);$
3. $\forall x, y, z \in X,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z);$

Le couple (X,d) s'appelle espace métrique.

Soit (X,d) un espace métrique, supposons dans la suite que $d(x,y) < +\infty$, pour tous $x, y \in X$.

Définition 1.3.2.

1. *Soit A une partie de X, la distance d'un point $x \in X$ à A est donnée par*
$$d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y).$$
2. *Soient A et B deux sous ensembles de X, on appelle écart entre A et B qu'on note $e(A,B)$ la quantité définie par*
$$e(A,B) = \sup_{x \in A} d(x,B) = \sup_{x \in A} \big(\inf_{y \in B} d(x,y) \big).$$
3. *On appelle distance de Hausdorff entre A et B qu'on note $d_H(A,B)$ la quantité définie par*
$$d_H(A,B) = max\big\{e(A,B), e(B,A)\big\}.$$

Remarque. *Il est clair que $d_H(A,B) = d_H(B,A)$.*

Proposition 1.3.1. *Soient A, B, C trois sous ensembles de X.*

1. $e(A,\emptyset) = +\infty$ *(si $A \neq \emptyset$),*
   $e(\emptyset, B) = 0.$
2. $e(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \bar{B},$
   $d_H(A,B) = 0 \Leftrightarrow \bar{A} = \bar{B}.$
3. $e(A,C) \leq e(A,B) + e(B,C),$
   $d_H(A,C) \leq d_H(A,B) + d_H(B,C).$

Remarque. *Par convention on pose :* $\sup \emptyset = 0$ *et* $\inf \emptyset = +\infty.$

1.4 Topologie faible

Pour plus de résultats sur la topologie faible voir [6].
Soit $(E, |.|_E)$ un espace de Banach et E' son dual topologique défini par

$$E' = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ linaire continue}\},$$

muni de la norme

$$|f|_{E'} = \sup_{|x|\leq 1} \left|f(x)\right|_E .$$

Définition 1.4.1. *La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$, où pour $f \in E'$ fixée, φ_f est définie par*

$$\begin{aligned} \varphi_f :& E \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \varphi_f(x) = \langle f, x\rangle \end{aligned}$$

et on désigne par $x_n \rightharpoonup x$ la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Proposition 1.4.1. *Pour tout $x \in E$ on a*

$$|x|_E = \sup_{|f|_{E'}\leq 1} \left|\langle f, x\rangle\right|.$$

Remarque. *Soit E un espace de Banach, et soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $x \in E$.*

1. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers x si*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} |x_n - x|_E = 0.$$

   On note $x_n \longrightarrow x$.

2. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x si*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \langle f, x_n - x\rangle = 0,\ \forall f \in E'.$$

   On note $x_n \rightharpoonup x$.

Proposition 1.4.2. *Soit $(x_n)_n$ une suite de points de E, et soit $(f_n)_n \subset E'$. Alors*

1. *Si $x_n \longrightarrow x$ alors $x_n \rightharpoonup x$.*
2. *$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$ pour tout $f \in E'$.*
3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ alors $(|x_n|)_n$ est bornée et $|x| \leq \liminf_{n\to+\infty} |x_n|$.*
4. *Si $x_n \rightharpoonup x$ et $f_n \longrightarrow f$ dans E' alors $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.*

1.5 Continuité des fonctions

Définition 1.5.1. *(continuité simple). Soient E, F deux espaces vectoriels normés, $f : E \longrightarrow F$ et $x_0 \in E$. On dit que f est continue au point x_0 si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in E,\ |x - x_0|_E \leq \delta,\ alors\ |f(x) - f(x_0)|_F \leq \varepsilon.$$

Définition 1.5.2. *(continuité uniforme). Soient E, F deux espaces vectoriels normés, une fonction $f : E \longrightarrow F$ est dite uniformément continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta(\varepsilon) > 0$, tel que pour tous $x,\ y \in E$*

$$|x - y|_E < \delta(\varepsilon),\ alors\ |f(x) - f(y)|_F < \varepsilon.$$

Définition 1.5.3. *On dit que $f : E \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement (s.c.i) au point x_0 si et seulement si pour tout $h \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(x_0) > h$, il existe $V \in \vartheta(x_0)$ tel que pour tout $x \in V$ on a $f(x) > h$.*
Où $\vartheta(x_0)$ est l'ensemble de tout les voisinages du point x_0.

Définition 1.5.4. *On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to E$ est absolument continue si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de $[a, b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant*

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta,$$

nous avons

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)|_E < \varepsilon.$$

Théorème 1.5.5. [*1*] *Soit E un espace de Banach. Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow E$ est absolument continue si et seulement si*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(t)dt.$$

1.6 Fonctions à variations bornées

Définition 1.6.1. [*8*] *On appelle subdivision d'un intervalle $[a, b]$, la suite σ définie par $\sigma = \{t_0, t_1, ..., t_n\},\ n \in \mathbb{N}$ telle que*

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b.$$

On note par $P\big([a, b]\big)$ l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a, b]$.

Définition 1.6.2. *[8]Soit $f : I \longrightarrow H$, où I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.*
Soit $[a,b]$ un sous intervalle non vide de I, et soit σ une subdivision quelconque de $[a,b]$ i.e. ; $\sigma \in P\big([a,b]\big)$. On appelle variation totale de f sur $[a,b]$ la quantité donnée par

$$var\big(f,[a,b]\big) = \sup\Big\{\sum_{i=1}^{n}\big|f(t_i) - f(t_{i-1})\big|,\ t_i \in \sigma,\ \sigma \in P\big([a,b]\big)\Big\}.$$

Remarque. *La fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est à variation bornée sur $[a,b]$, si $var\big(f,[a,b]\big)$ est finie.*
Si f est à variation bornée sur $[a,b]$, nous écrivons $f \in VB[a,b]$.

Théorème 1.6.3. *[9] Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et c un point arbitraire dans $]a,b[$. Alors $f \in VB[a,b]$ si et seulement si $f \in VB[a,c]$ et $f \in VB[c,b]$ et on a*

$$var\big(f,[a,b]\big) = var\big(f,[a,c]\big) + var\big(f,[c,b]\big).$$

Théorème 1.6.4. *[7] Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continument dérivable, alors f est à variation bornée et dans ce cas on a*

$$var\big(f,[a,b]\big) = \int_a^b \big|\dot{f}(t)\big|dt.$$

Théorème 1.6.5. *[7] Si la fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est absolument continue sur $[a,b]$, alors f est à variation bornée sur $[a,b]$.*

Proposition 1.6.1. *Toute fonction à variation bornée est bornée.*

Théorème 1.6.6. *Soit (f_n) une suite de fonctions à variations bornées sur $[a,b]$, si $var\big(f_n,[a,b]\big) \leq M < +\infty$, pour tout n et $f_n \to f$ sur $[a,b]$ alors f est à variation bornée et $var\big(f,[a,b]\big) \leq M$.*

1.7 Ensembles et fonctions convexes

1.7.1 Ensembles convexes

Définition 1.7.1. *Soient E un espace vectoriel, A un sous ensemble de E. On dit que A est convexe si et seulement si pour tous $x, y \in A$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a*

$$tx + (1-t)\,y \in A.$$

1.7.2 Fonctions convexes

Pour plus de résultats voir [11].

Définition 1.7.2. *Soient E un espace vectoriel et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est propre si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(x) \neq -\infty$ et il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq +\infty$. On appelle domaine effectif de f l'ensemble*

$$D(f) = \{x \in E,\ f(x) < +\infty\}.$$

Alors $f : E \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est propre si et seulement si

$$D(f) \neq \emptyset.$$

Définition 1.7.3. *L'épigraphe de f qu'on note $epi(f)$ est l'ensemble défini par*

$$epi(f) = \big\{(x, r) \in E \times \mathbb{R}, f(x) \leq r\big\}$$

Définition 1.7.4. *Soient E un espace vectoriel et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est convexe si et seulement si pour tous $x, y \in E$ et pour tout $t \in [0, 1]$, on a*

$$f\big(tx + (1-t)\, y\big) \leq t f(x) + (1-t)\, f(y).$$

Proposition 1.7.1. *$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.*

Définition 1.7.5. *Soit A un sous ensemble de E. On appelle la fonction indicatrice de A, la fonction*

$$\delta_A : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$
$$x \longmapsto \delta_A(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in A \\ +\infty & si\ x \notin A \end{cases}$$

Proposition 1.7.2.

1. *δ_A est propre si et seulement si $A \neq \emptyset$.*
2. *δ_A est convexe si et seulement si A est convexe.*
3. *δ_A est s.c.i si et seulement si A est fermé.*

Définition 1.7.6. *Soient E un espace vectoriel normé, E' son dual topologique, $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \in \mathbb{R}$. Alors un point $x' \in E$ est dit sous gradient de f au point x_0 si et seulement si*

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle x', x - x_0 \rangle,\ \forall x \in E.$$

L'ensemble de tous les sous gradients de f au point x_0 est appelé le sous différentiel de f au point x_0 et on le note $\partial f(x_0)$ i.e.;

$$\partial f(x_0) = \big\{x' \in E';\ f(x) \geq f(x_0) + \langle x', x - x_0\rangle,\ \forall x \in E\big\}.$$

On dit que f est sous différentiable au point x_0 si et seulement si $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.

Remarque. *Soient E un espace vectoriel normé et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in E$.*

1. *Si $f(x_0) = +\infty$, alors $\partial f(x_0) = \emptyset$.*
2. *Le sous différentiel de f est une multi-application de E à valeurs dans E'.*
3. *Le sous différentiel de f au point x_0 est un sous ensemble convexe fermé de E'.*

1.7.3 Les cônes

On s'est servit de [3] comme référence.

Définition 1.7.7. *Soient E un espace vectoriel, K un sous ensemble de E. On dit que K est un cône si*

$$\forall x \in K,\ \forall \lambda \geq 0,\ \lambda x \in K.$$

Proposition 1.7.3. *Soient E un espace vectoriel, K un cône dans E. Alors K est convexe si et seulement si*

$$\forall x,\ y \in K,\ x + y \in K.$$

Définition 1.7.8. *Soient A un sous ensemble de E et $x_0 \in E$. On appelle cône normal à A au point x_0 le sous différentiel de la fonction indicatrice de A au point x_0. On le note $N_A(x_0)$ i.e.;*

$$N_A(x_0) = \partial \delta_A(x_0),$$

et on a

$$N_A(x_0) = \begin{cases} \{x' \in E', \langle x', y - x_0\rangle \leq 0, \forall y \in A\} & si\ x_0 \in A \\ \emptyset & si\ x_0 \notin A \end{cases}$$

En effet

- 1^{er} *cas : si $x_0 \notin A$ donc*

$$\begin{aligned} \partial \delta_A(x_0) &= \big\{x' \in E',\ \delta_A(y) \geq \delta_A(x_0) + \langle x', y - x_0\rangle,\ \forall y \in E\big\} \\ &= \big\{x' \in E',\ \delta_A(y) \geq +\infty,\ \forall y \in E\big\} \\ &= \big\{x' \in E',\ 0 > +\infty,\ \forall y \in A\big\} \cap \big\{x' \in E',\ +\infty \geq +\infty,\ \forall y \in E \setminus A\big\} \\ &= \emptyset \cap E' \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

C.à.d. ; si $x_0 \notin A$, on a $N_A(x_0) = \emptyset$.

- 2^e *cas : si $x_0 \in A$ donc*

$$\begin{aligned}
\partial\delta_A(x_0) &= \big\{x' \in E',\ \delta_A(y) \geq \delta_A(x_0) + \langle x', y - x_0\rangle,\ \forall y \in E\big\} \\
&= \big\{x' \in E',\ \delta_A(y) \geq \langle x', y - x_0\rangle,\ \forall y \in E\big\} \\
&= \big\{x' \in E',\ 0 \geq \langle x', y - x_0\rangle,\ \forall y \in A\big\} \cap \big\{x' \in E',\ +\infty \geq \langle x', y - x_0\rangle,\ \forall y \in E \setminus A\big\} \\
&= \big\{x' \in E',\ \langle x', y - x_0\rangle \leq 0,\ \forall y \in A\big\} \cap E' \\
&= \big\{x' \in E',\ \langle x', y - x_0\rangle \leq 0,\ \forall y \in A\big\}.
\end{aligned}$$

C.à.d. ; si $x_0 \in A$, on a $N_A(x_0) = \big\{x' \in E',\ \langle x', y - x_0\rangle \leq 0,\ \forall y \in A\big\}$.

Par conséquent

$$N_A(x_0) = \begin{cases} \big\{x' \in E', \langle x', y - x_0\rangle \leq 0, \forall y \in A\big\} & si\ x_0 \in A, \\ \emptyset & si\ x_0 \notin A. \end{cases}$$

1.8 Quelques théorèmes et définitions utiles

On va donner dans cette section quelques résultats et définitions qui nous avons utilisés dans les démonstrations de nos résultats principaux.

Définition 1.8.1. *[6] Soient H un espace de Hilbert, C un sous ensemble non vide convexe fermé de H et $y \in H$. Alors il existe un unique point $x \in C$ tel que*

$$|y - x| = d(y, C) = \inf_{z \in C} |z - y|.$$

Ce point est appelé projection de y sur C, qu'on note $Proj_C(y)$, et pour tout $z \in C$ on a l'inégalité variationnelle suivante

$$\big\langle y - Proj_C(y), z - Proj_C(y)\big\rangle \leq 0.$$

Proposition 1.8.1. *(Inégalité de Cauchy-schwartz). Soit H un espace pré-Hilbertien, alors pour tous $x,\ y \in H$*

$$\big|\langle x, y\rangle\big|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

ou

$$\big|\langle x, y\rangle\big| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Proposition 1.8.2. *Soit E un espace vectoriel normé, alors pour tous $x,\ y \in E$ nous avons*

$$\big||x|_E - |y|_E\big|_E \leq |x - y|_E.$$

Définition 1.8.2. *[10] Soient* (X, θ) *un espace topologique,* A *un sous ensemble de* X *et soit* $(O_i)_{i\in I} \subset X$.

- *On dit que* $(O_i)_{i\in I}$ *est un recouvrement de* A *si et seulement si* $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i$.
- *On dit que* $(O_i)_{i\in I}$ *est un recouvrement de* X *si et seulement si* $X \subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i$,

mais comme $\bigcup\limits_{i\in I} O_i \subset X$, *alors* $(O_i)_{i\in I}$ *est un recouvrement de* X *si et seulement si* $X = \bigcup\limits_{i\in I} O_i$.
Si $(O_i)_{i\in I}$ *est une famille d'ouverts et* $X = \bigcup\limits_{i\in I} O_i$, *on dit que* $(O_i)_{i\in I}$ *est un recouvrement ouvert de* X.

Définition 1.8.3. *[10] Soit* (X, θ) *un espace topologique séparé. On dit que* X *est compact si et seulement si de tout recouvrement ouvert de* X *on peut extraire un sous recouvrement finie i.e. ;*

$$\forall (O_i)_{i\in I} \subset \theta,\ X = \bigcup_{i\in I} O_i,\ \exists j \subset I,\ J\ est\ finie\ et\ X = \bigcup_{i\in J} O_i,$$

ou bien, $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} O_{i_k}$.

Remarque. *Dans* $\mathbb{R}$ *les parties compactes sont les intervalles bornés fermés.*

Chapitre 2

Étude des opérateurs maximaux monotones

Dans ce chapitre on considère un espace de Hilbert réel H muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $| \cdot |$ et on suppose que $A : D(A) \subset H \to 2^H$ est un opérateur multivoque, $D(A)$ son domaine. Les résultats de ce chapitre sont en partie tirés de [2], [5] et [12].

2.1 Propriétés fondamentales des opérateurs maximaux monotones

Dans cette section nous allons introduire, quelque notions et propriétés des opérateurs monotones et donner leurs caractérisations. (pour plus de détails voir [2], [5], [6] et [12]). On considère A un opérateur définie sur $D(A) \subset H$ à valeurs dans 2^H.

Définition 2.1.1. *A est dit monotone si pour tous $x_1, x_2 \in D(A)$, pour tous $y_1 \in Ax_1$, $y_2 \in Ax_2$, c'est à dires pour tous $(x_1, y_1) \in \Gamma(A), (x_2, y_2) \in \Gamma(A)$ on a*

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Si A est univoque on écrit

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Dans le cas où $H = \mathbb{R}$ ceci veut dire que A est croissant.

Proposition 2.1.1. *A est monotone si et seulement si pour tous $x_1,\ x_2 \in D(A),\ y_1 \in Ax_1,\ y_2 \in Ax_2$ et λ un réel positif on a*

$$|x_1 - x_2| \leq \big|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\big|.$$

Définition 2.1.2. *A est dit maximal monotone si A est monotone et s'il n'existe aucun autre opérateur monotone B, $B \neq A$ tel que $\Gamma(A) \subset \Gamma(B)$, i.e. ; A est monotone et pour tout $(x_1, y_1) \in H^2$ tel que pour tout $x_2 \in D(A)$ et pour tout $y_2 \in Ax_2$ on a*

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0 \Rightarrow y_1 \in Ax_1.$$

Définition 2.1.3. *Soit A un opérateur, alors la résolvante de A est donnée par, pour tout $\lambda > 0$*

$$J_\lambda = (I_H + \lambda A)^{-1},$$

où I_H est l'identité de H. Autre notation $J_A^\lambda = (I_H + \lambda A)^{-1}$.

Proposition 2.1.2. *La résolvante $J_\lambda = (I_H + \lambda A)^{-1}$ d'un opérateur maximal monotone A est un opérateur univoque défini sur tout H.*

Définition 2.1.4. *On dit que A est une contraction si*

$$\forall (x, u),\ (y, v) \in \Gamma(A),\ |u - v| \leq |x - y|.$$

Proposition 2.1.3. *([5] Proposition 2.2) Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *A est maximal monotone.*
2. *A est monotone et pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$Im\,(I_H + \lambda A) = \big\{y \in H,\ y = x + \lambda z,\ x \in D(A),\ z \in Ax\big\} = H.$$

3. *Pour tout $\lambda > 0$, $(I_H + A)^{-1}$ est une contraction définie sur H.*

Théorème 2.1.5. *([5] Théorème 2.2) Soit A un opérateur maximal monotone. Alors $\overline{D(A)}$ est convexe, et pour tout $x \in H$ on a*

$$\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda x = Proj_{\overline{D(A)}}(x).$$

2.2 Distance de Vladimirov

Dans cette section nous allons définir la distance de Vladimirov entre deux opérateurs maximaux monotones introduite par ce dernier dans [12] et nous donnerons quelques unes de ces propriétés.

Nous supposerons que tous les opérateurs A considérés ici

$$D(A) \subset B_R = \{x \in H,\ |x| \leq R\}. \tag{2.1}$$

Définition 2.2.1. *Soient $A_1 : H \to 2^H$ et $A_2 : H \to 2^H$ deux opérateurs maximaux monotones. La distance de Vladimirov entre deux opérateurs maximaux monotones A_1 et A_2 est donnée par*

$$d_V(A_1, A_2) = \sup_{\substack{x_i \in D(A_i),\ y_i \in A_i x_i \\ i=1,2}} \frac{\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1 \rangle}{|y_1| + |y_2| + 1}.$$

La distance d_V n'est pas une métrique car l'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite.

Lemme 2.2.1. *Soient $A_1 : H \to 2^H$ et $A_2 : H \to 2^H$ deux opérateurs maximaux monotones. Alors $d_V(A_1, A_2) = 0$ si et seulement si $A_1 = A_2$.*

Démonstration.

" $\Leftarrow$ " Tout d'abord supposons que $A_1 = A_2$ et montrons que $d_V(A_1, A_2) = 0$.

Soient $x_1,\ x_2 \in D(A_1)$, $y_1 \in A_1 x_1$ et $y_2 \in A_1 x_2$, A_1 est monotone alors

$$\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1 \rangle \leq 0,$$

d'où pour tous $x_i \in D(A_1),\ y_i \in A_1 x_i,\ i = 1, 2$

$$\frac{\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1 \rangle}{|y_1| + |y_2| + 1} \leq 0,$$

c'est à dire ;

$$\sup_{\substack{x_i \in D(A_1), y_i \in A_1 x_i \\ i=1,2}} \frac{\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1 \rangle}{|y_1| + |y_2| + 1} \leq 0,$$

par suite

$$d_V(A_1, A_1) \leq 0. \tag{2.2}$$

D'autre part

$$d_V(A_1, A_1) = \sup_{\substack{x_i \in D(A_1),\ y_i \in A_1 x_i \\ i=1,2}} \frac{\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1 \rangle}{|y_1| + |y_2| + 1} \geq 0 \tag{2.3}$$

(car pour $x_1 = x_2$ on a $\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1 \rangle = 0$ alors $\sup_{\substack{x_i \in D(A_1),\ y_i \in A_1 x_i \\ i=1,2}} \dfrac{\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1 \rangle}{|y_1| + |y_2| + 1} \geq 0$),

de (2.2) et (2.3) on a

$$d_V(A_1, A_2) = 0.$$

Inversement " $\Rightarrow$ "

Supposons que $d_V(A_1, A_2) = 0$ et soit A un opérateur tel que $\Gamma(A) = \Gamma(A_1) \cup \Gamma(A_2)$, A ainsi défini est monotone, c'est à dire ; pour tous $x_1,\ x_2 \in D(A)$, $y_1 \in Ax_1,\ y_2 \in Ax_2$ (i.e. ; $(x_1, y_1) \in \Gamma(A)$, $(x_2, y_2) \in \Gamma(A)$) on a

$$\big\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1 \big\rangle \leq 0. \tag{2.4}$$

En effet

Soit (x_1, y_1) et $(x_2, y_2) \in \Gamma(A)$, trois cas se présentent

- 1^{er} cas (x_1, y_1) et $(x_2, y_2) \in \Gamma(A_1)$, d'après la monotonie de A_1, (2.4) est satisfaite.
- 2^e cas (x_1, y_1) et $(x_2, y_2) \in \Gamma(A_2)$, d'après la monotonie de A_2, (2.4) est satisfaite.
- 3^e cas $(x_1, y_1) \in \Gamma(A_1) \subset \Gamma(A)$ et $(x_2, y_2) \in \Gamma(A_2) \subset \Gamma(A)$ et $d_V(A_1, A_2) = 0$, alors $\big\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \big\rangle \geq 0$. D'où (2.4) est satisfaite.

En conclusion pour tous $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2)$ dans $\Gamma(A)$ on a

$$\big\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \big\rangle \geq 0,$$

i.e. ; A est monotone. Mais $A_i,\ i = 1, 2$ sont maximaux monotones avec $\Gamma(A_i) \subset \Gamma(A)$, alors d'après la définition 2.1.2, $A_i = A$ i.e. ; $A = A_1 = A_2$. donc

$$A_1 = A_2$$

. ■

Lemme 2.2.2. *Soient $A_1,\ A_2 : H \to 2^H$ deux opérateurs maximaux monotones, alors*

$$d_H\big(D(A_1), D(A_2)\big) \leq d_V(A_1, A_2)$$

Démonstration. Supposons que

$$d_H\big(D(A_1), D(A_2)\big) = e\big(D(A_1), D(A_2)\big) = \sup_{x_1 \in D(A_1)} d\big(x_1, D(A_2)\big).$$

Tout d'abord, soit $x_1 \in D(A_1),\ y_1 \in A_1x_1$, comme A_2 est un opérateur maximal monotone, on a pour tout $\lambda > 0$, il existe un unique $x_2^\lambda = J_2^\lambda x_1 \in D(A_2)$ tel que $\dfrac{x_1 - x_2^\lambda}{\lambda} \in A_2x_2^\lambda$.

En effet

on a A_2 opérateur maximal monotone alors d'après la Proposition 2.1.2 on trouve $J_2^\lambda = (I_H + \lambda A_2)^{-1}$ est univoque, mais

$$x_2^\lambda = J_2^\lambda x_1 = (I_H + \lambda A_2)^{-1}x_1,$$

donc

$$x_1 \in (I_H + \lambda A_2)x_2^\lambda,$$

par suite

$$x_1 \in x_2^\lambda + \lambda A_2 x_2^\lambda,$$

d'où

$$\frac{x_1 - x_2^\lambda}{\lambda} \in A_2 x_2^\lambda.$$

D'après la définition de la distance de Vladimirov on a

$$\frac{\left\langle y_1 - \frac{x_1 - x_2^\lambda}{\lambda}, x_2^\lambda - x_1 \right\rangle}{|y_1| + |\frac{x_1 - x_2^\lambda}{\lambda}| + 1} \leq d_V(A_1, A_2),$$

donc

$$\left\langle y_1 - \frac{x_1 - x_2^\lambda}{\lambda}, x_2^\lambda - x_1 \right\rangle \leq d_V\big(A_1, A_2\big)\big(|y_1| + |\frac{x_1 - x_2^\lambda}{\lambda}| + 1\big). \tag{2.5}$$

Maintenant montrons que : $|x_1 - proj_{\overline{D(A_2)}} x_1| \leq d_V(A_1, A_2)$.
D'après (2.5) on trouve

$$\begin{aligned}\left\langle \lambda y_1 - \lambda \frac{x_1 - x_2^\lambda}{\lambda}, x_2^\lambda - x_1 \right\rangle &\leq \lambda d_V\big(A_1, A_2\big)\big(|y_1| + |\frac{x_1 - x_2^\lambda}{\lambda}| + 1\big) \\ &\leq \lambda d_V\big(A_1, A_2\big)\big(|y_1| + 1\big) + d_V\big(A_1, A_2\big)\big|x_1 - x_2^\lambda\big|.\end{aligned}$$

Faisant tendre $\lambda \to 0$ on obtient

$$\lim_{\lambda \to 0} \langle x_2^\lambda - x_1, x_2^\lambda - x_1 \rangle \leq d_V(A_1, A_2) \lim_{\lambda \to 0} |x_1 - x_2^\lambda|,$$

i.e. ;

$$\lim_{\lambda \to 0} |x_2^\lambda - x_1|^2 \leq d_V(A_1, A_2) \lim_{\lambda \to 0} |x_1 - x_2^\lambda|,$$

alors

$$|x_1 - \lim_{\lambda \to 0} x_2^\lambda| \leq d_V(A_1, A_2).$$

D'après le théorème 2.1.5 on a $\lim\limits_{\lambda \to 0} x_2^\lambda = \lim_{\lambda \to 0} J_2^\lambda(x_1) = proj_{\overline{D(A_2)}} x_1$, alors

$$|x_1 - proj_{\overline{D(A_2)}} x_1| \leq d_V(A_1, A_2), \ \forall x_1 \in \overline{D(A_1)}, \tag{2.6}$$

donc

$$|x_1 - proj_{\overline{D(A_2)}} x_1| \leq d_V(A_1, A_2), \ \forall x_1 \in D(A_1).$$

C'est à dire ;

$$d\big(x_1, \overline{D(A_2)}\big) \leq d_V(A_1, A_2), \ \forall x_1 \in D(A_1),$$

donc

$$\sup_{x_1 \in D(A_1)} d\big(x_1, \overline{D(A_2)}\big) \leq d_V(A_1, A_2).$$

D'où

$$\sup_{x_1 \in D(A_1)} d\big(x_1, D(A_2)\big) \leq d_V(A_1, A_2).$$

En effet,

Posons $d_V(A_1, A_2) = m$, on a

$$d\big(x_1, \overline{D(A_2)}\big) \leq m \Leftrightarrow \inf_{y \in \overline{D(A_2)}} |x_1 - y| \leq m,$$

par la caractérisation de l'infimum

$$\forall \varepsilon,\ \exists y^\varepsilon \in \overline{D(A_2)},\ d\big(x_1, \overline{D(A_2)}\big) \leq |x_1 - y^\varepsilon| < m + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.7}$$

comme $y^\varepsilon \in \overline{D(A_2)}$ alors il existe $(y_n^\varepsilon)_n \subset D(A_2)$ telle que,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0, |y_n^\varepsilon - y^\varepsilon| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.8}$$

par (2.7) et(2.8) on a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |x_1 - y_n^\varepsilon| = |x_1 - y_n^\varepsilon + y^\varepsilon - y^\varepsilon| &\leq |x_1 - y^\varepsilon| + |y^\varepsilon - y_n^\varepsilon| \\ &< m + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = m + \varepsilon. \end{aligned}$$

Mais $y_n^\varepsilon \in D(A_2)$ on peut écrire donc

$$\inf_{y_n^\varepsilon \in D(A_2)} |x_1 - y_n^\varepsilon| < m + \varepsilon \Leftrightarrow d(x_1, D(A_2)) < \varepsilon + m,$$

en faisant tendre ε vers 0 on obtient

$$d\big(x_1, D(A_2)\big) \leq m = d_V\big(A_1, A_2\big),\ \forall x_1 \in D(A_1),$$

alors

$$\sup_{x_1 \in D(A_1)} d\big(x_1, D(A_2)\big) \leq m.$$

D'où

$$d_H\big(D(A_1), D(A_2)\big) \leq d_V\big(A_1, A_2\big). \tag{2.9}$$

De la même manière on montre (2.9) dans le cas où

$$d_H\big(D(A_1), D(A_2)\big) = e(A_1, A_2) = \sup_{x_1 \in D(A_2)} d\big(x_1, D(A_1)\big).$$

■

Lemme 2.2.3. *Soient $A : H \to 2^H$ un opérateur maximal monotone, p un élément de H et $B : H \to 2^H$ un opérateur défini par*

$$Bx = A(x + p),\ x \in D(B) = D(A) - p,$$

alors

$$d_V(A, B) \leq |p|.$$

Démonstration. Prenons $x_1 \in D(A),\ x_2 \in D(B),\ y_1 \in Ax_1$ et $y_2 \in Bx_2$, d'après la définition de B on a $Bx_2 = A(x_2 + p)$, et comme A est monotone on a

$$\big\langle y_2 - y_1, x_1 - (x_2 + p)\big\rangle \leq 0,$$

donc

$$\begin{aligned}\langle y_2 - y_1, x_1 - x_2\rangle &\leq \langle y_2 - y_1, p\rangle \\ &\leq |p||y_2 - y_1| \\ &\leq |p|\big(|y_2| + |y_1|\big) \\ &\leq |p|\big(|y_2| + |y_1| + 1\big),\end{aligned}$$

alors pour tous $x_1 \in D(A),\ x_2 \in D(B),\ y_1 \in Ax_1,\ y_2 \in Bx_2$

$$\frac{\langle y_2 - y_1, x_1 - x_2\rangle}{|y_1| + |y_2| + 1} \leq |p|,$$

par suite

$$\sup_{\substack{x_1 \in D(A),\ x_2 \in D(B) \\ y_1 \in Ax_1,\ y_2 \in Bx_2}} \frac{\langle y_2 - y_1, x_1 - x_2\rangle}{|y_1| + |y_2| + 1} \leq |p|.$$

D'où

$$d_V(A, B) \leq |p|.$$

■

Lemme 2.2.4. *Soient C_1, C_2 deux ensembles convexes fermés dans H et $A_i : H \to 2^H$ des opérateurs maximaux monotones définies par $A_i = \partial\delta_{C_i},\ i = 1, 2$. Alors*

$$d_V(A_1, A_2) = d_H(C_1, C_2).$$

Démonstration. D'après le lemme 2.2.2 on a

$$d_H\big(D(A_1), D(A_2)\big) \leq d_V(A_1, A_2), \tag{2.10}$$

aussi $D(A_i) = C_i,\ i = 1, 2$ car $A_i = \partial\delta_{C_i}$ alors (2.10) s'écrit aussi

$$d_H\big(C_1, C_2\big) \leq d_V(A_1, A_2) \tag{2.11}$$

Soient $x_i \in C_i$, $y_i \in A_i x_i = \partial\delta_{C_i}(x_i) = N_{C_i}(x_i)$, $i = 1, 2$ avec

$$N_{C_i}(x) = \big\{y_i \in H,\ \langle y_i,\ x_i - z_i\rangle \geq 0,\ z_i \in C_i\big\}.$$

Alors on a

$$\langle y_1, x_1 - z_1\rangle \geq 0,\ \forall x_1 \in C_1,\ z_1 \in C_1, \tag{2.12}$$

et

$$\langle y_2, x_2 - z_2\rangle \geq 0,\ \forall x_2 \in C_2,\ z_2 \in C_2, \tag{2.13}$$

Soit $x_2 \in C_2$, de (2.12) on a

$$\langle y_1, x_1 - z_1 - x_2 + x_2\rangle = \langle y_1, x_1 - x_2\rangle + \langle y_1, x_2 - z_1\rangle \geq 0,\ \forall z_1 \in C_1,$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned}\langle y_1, x_2 - x_1\rangle &\leq \langle y_1, x_2 - z_1\rangle,\ \forall z_1 \in C_1,\ x_2 \in C_2\\ &\leq |y_1||x_2 - z_1|,\ \forall z_1 \in C_1,\ x_2 \in C_2,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\langle y_1, x_2 - x_1\rangle &\leq |y_1| \inf_{z_1 \in C_1} |x_2 - z_1|,\ \forall x_2 \in C_2\\ &\leq |y_1| d(x_2, C_1),\ x_2 \in C_2\\ &\leq |y_1| \sup_{x_2 \in C_2} d(x_2, C_1)\\ &\leq |y_1| d_H(C_1, C_2).\end{aligned}$$

D'où

$$\langle y_1, x_2 - x_1\rangle \leq d_H(C_1, C_2)|y_1|. \tag{2.14}$$

Soit $x_1 \in C_1$, de (2.13) on a

$$\langle y_2, x_2 - x_1 + x_1 - z_2\rangle = \langle y_2, x_2 - x_1\rangle + \langle y_2, x_1 - z_2\rangle \geq 0,\ \forall z_2 \in C_2,$$

qui est équivalent à

$$\begin{aligned}\langle y_2, x_1 - x_2\rangle &\leq \langle y_2, x_1 - z_2\rangle,\ \forall z_2 \in C_2,\ \forall x_1 \in C_1\\ &\leq |y_2||x_1 - z_2|,\ \forall z_2 \in C_2,\ \forall x_1 \in C_1,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\langle y_2, x_1 - x_2\rangle &\leq |y_2| \inf_{z_2 \in C_2} |x_1 - z_2|,\ \forall x_1 \in C_1\\ &\leq |y_2| d(x_1, C_2),\ \forall x_1 \in C_1\\ &\leq |y_2| \sup_{x_1 \in C_1} d(x_1, C_2)\\ &\leq |y_2| d_H(C_1, C_2).\end{aligned}$$

D'où

$$\langle y_2, x_1 - x_2\rangle \leq d_H(C_1, C_2)|y_2|. \tag{2.15}$$

De (2.14) et (2.15) on a

$$\langle y_1, x_2 - x_1\rangle + \langle y_2, x_1 - x_2\rangle \leq d_H\big(C_1, C_2\big)\big(|y_1| + |y_2|\big),$$

par suite

$$\langle y_1, x_2 - x_1\rangle - \langle y_2, x_2 - x_1\rangle \leq d_H(C_1, C_2)(|y_1| + |y_2|),$$

ceci équivaut à

$$\begin{aligned}\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1\rangle &\leq d_H\big(C_1, C_2\big)\big(|y_1| + |y_2|\big)\\ &\leq d_H\big(C_1, C_2\big)\big(|y_1| + |y_2| + 1\big),\end{aligned}$$

ainsi

$$\frac{\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1\rangle}{|y_1| + |y_2| + 1} \leq d_H(C_1, C_2),\ \forall x_i \in C_i = D(A_i),\ y_i \in A_i x_i,\ i = 1, 2$$

donc

$$\sup_{\substack{x_i \in D(A_i),\ y_i \in A_i x_i\\ i=1,2}} \frac{\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1\rangle}{|y_1| + |y_2| + 1} \leq d_H(C_1, C_2).$$

$$d_V(A_1, A_2) \leq d_H(C_1, C_2), \tag{2.16}$$

de (2.11) et (2.16) on conclut que

$$d_V(A_1, A_2) = d_H(C_1, C_2).$$

■

Lemme 2.2.5. *Soient $A_1,\ A_2,\ A_3 : H \to 2^H$ des opérateurs maximaux monotones. Pour tout $R > 0$, il existe $d_1,\ d_2$ et $\gamma > 0$ tel que $D(A_1),\ D(A_2)$ et $D(A_3) \subset B_R$ et*

$$d_V(A_1, A_2) \leq d_1,\ d_V(A_2, A_3) \leq d_2 \tag{2.17}$$

alors

$$d_V(A_1, A_2) \leq d_1 + \gamma(d_1 + R + 1) + (\sqrt{d_2} + d_2).$$

Démonstration. Soient $(x_1, y_1) \in \Gamma(A_1)$, $(x_2, y_2) \in \Gamma(A_3)$ et soit $(x_3, y_3) \in \Gamma(A_2)$, vérifiant

$$x_3 + \frac{y_3}{|y_2| + 1} = x_2 + \frac{y_2}{|y_2| + 1}. \tag{2.18}$$

On a

$$d_V(A_1, A_2) = \sup_{\substack{x_1 \in D(A_1), y_1 \in A_1 x_1\\ x_3 \in D(A_2), y_3 \in A_2 x_3}} \frac{\langle y_1 - y_3, x_3 - x_1\rangle}{|y_1| + |y_3| + 1},$$

alors

$$d_V(A_1,A_2) \geq \frac{\langle y_1-y_3, x_3-x_1\rangle}{|y_1|+|y_3|+1}, \forall x_1 \in D(A_1), x_3 \in D(A_2), y_1 \in A_1x_1, y_3 \in A_2x_3.$$

Donc

$$\langle y_1-y_3, x_3-x_1\rangle \leq d_V\big(A_1,A_2\big)\big(|y_1|+|y_3|+1\big),$$

D'où, d'après (2.17) on a

$$\langle y_1-y_3, x_3-x_1\rangle \leq d_1\big(|y_1|+|y_3|+1\big). \tag{2.19}$$

D'autre part,

$$d_V(A_2,A_3) = \sup_{\substack{x_i\in D(A_i), y_i \in A_i x_i\\ i=2,3}} \frac{\langle y_3-y_2, x_2-x_3\rangle}{|y_3|+|y_2|+1},$$

alors

$$\langle y_3-y_2, x_2-x_3\rangle \leq d_V\big(A_2,A_3\big)\big(|y_3|+|y_2|+1\big),\ \forall x_i \in D(A_i),\ y_i \in A_ix_i,\ i=2,3.$$

Donc, (2.17) implique

$$\langle y_3-y_2, x_2-x_3\rangle \leq d_2\big(|y_3|+|y_2|+1\big),\ \forall x_i \in D(A_i),\ y_i \in A_ix_i,\ i=2,3. \tag{2.20}$$

D'après (2.18) on a

$$\begin{aligned}\langle y_3-y_2, x_2-x_3\rangle &= \Big\langle y_3-y_2, x_2-x_2-\frac{y_2}{|y_2|+1}+\frac{y_3}{|y_2|+1}\Big\rangle\\ &= \Big\langle y_3-y_2, \frac{y_3-y_2}{|y_2|+1}\Big\rangle\\ &= \frac{1}{|y_2|+1}\big\langle y_3-y_2, y_3-y_2\big\rangle\\ &= \frac{1}{|y_2|+1}|y_3-y_2|^2,\end{aligned}$$

et (2.20) nous donne

$$\frac{|y_3-y_2|^2}{|y_2|+1} \leq d_2\big(|y_3|+|y_2|+1\big),$$

donc

$$|y_3-y_2|^2 \leq d_2\big(|y_2|+1\big)\big(|y_3|+|y_2|+1\big). \tag{2.21}$$

Aussi de (2.18) on a

$$\frac{y_3}{|y_2|+1} = x_2-x_3+\frac{y_2}{|y_2|+1},$$

donc

$$|y_3| = \big|x_2-x_3+\frac{y_2}{|y_2|+1}\big|\big(|y_2|+1|\big).$$

Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha + 1 = \left| x_2 - x_3 + \frac{y_2}{|y_2|+1} \right|$.
D'où

$$|y_3| = \big(\alpha + 1\big)\big(|y_2| + 1\big).$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\big||y_3| - |y_2|\big|^2 &= \big|(\alpha+1)(|y_2|+1) - |y_2|\big|^2 \\
&= \big|\alpha(|y_2|+1) + |y_2| + 1 - |y_2|\big|^2 \\
&= \big|\alpha(|y_2|+1) + 1\big|^2 \\
&\geq \alpha^2\big(|y_2|+1\big)^2.
\end{aligned}$$

D'où

$$\alpha^2\big(|y_2|+1\big)^2 \leq \big||y_3| - |y_2|\big|^2$$

grâce à la Proposition 1.8.2 on obtient

$$\alpha^2\big(|y_2|+1\big)^2 \leq |y_3 - y_2|^2. \tag{2.22}$$

D'après (2.21) on a

$$\begin{aligned}
|y_3 - y_2|^2 &\leq d_2\big(|y_2|+1\big)\big(|y_3| + |y_2| + 1\big) \\
&= d_2\big(|y_2|+1\big)\big((\alpha+1)(|y_2|+1) + |y_2| + 1\big) \\
&= d_2\big(|y_2|+1\big)^2(\alpha+2).
\end{aligned}$$

D'où

$$|y_3 - y_2|^2 \leq d_2\big(|y_2|+1\big)^2(\alpha+2). \tag{2.23}$$

D'après (2.22) et (2.23) on trouve

$$\alpha^2\big(|y_2|+1\big)^2 \leq d_2\big(|y_2|+1\big)^2(\alpha+2), \tag{2.24}$$

donc (2.24) implique

$$\alpha^2 \leq d_2\alpha + 2d_2$$

alors

$$\alpha^2 - d_2\alpha \leq 2d_2.$$

D'où

$$\alpha^2 - d_2\alpha - 2d_2 \leq 0. \tag{2.25}$$

et puisque $\triangle = 8d_2 + d_2^2 > 0$, ils existent α_1 et α_2 deux réels où

$$\alpha_1 = \frac{d_2 - \sqrt{8d_2 + d_2^2}}{2} \leq 0, \;\; \alpha_2 = \frac{d_2 + \sqrt{8d_2 + d_2^2}}{2} \geq 0$$

tel que $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, pour que (2.25) soit vérifiée
par suite

$$\alpha \leq \frac{d_2}{2} + \sqrt{d_2}\frac{\sqrt{8+d_2}}{d_2}$$

si on prend $c_1 = \dfrac{\sqrt{8+d_2}}{2}$ et $c_2 = \dfrac{1}{2}$, alors

$$\alpha \leq c_1\sqrt{d_2} + c_2 d_2.$$

Cette inégalité donne une limite supérieure pour $|y_3|$ i.e. ;

$$|y_3| \leq \big(c_1\sqrt{d_2} + c_2 d_2 + 1\big)\big(|y_2| + 1\big),$$

alors d'après (2.23) on a

$$\begin{aligned} |y_3 - y_2| &\leq \big(|y_2| + 1\big)\sqrt{d_2(\alpha + 2)} \\ &\leq \big(|y_2 + 1|\big)\sqrt{d_2(c_1\sqrt{d_2} + c_2 d_2 + 2)} \\ &\leq \big(|y_2| + 1\big)\sqrt{d_2(c_1\sqrt{d_2} + 2) + c_2 d_2^2} \\ &\leq \big(|y_2| + 1\big)\big(\sqrt{d_2}\sqrt{c_1\sqrt{d_2} + 2} + d_2\sqrt{c_2}\big), \end{aligned}$$

donc

$$|y_3 - y_2| \leq \big(|y_2| + 1\big)\big(\sqrt{d_2}\sqrt{c_1\sqrt{d_2} + 2} + d_2\sqrt{c_2}\big).$$

Si on pose $c_4 = \sqrt{c_2}$ et $c_3 = \sqrt{c_1\sqrt{d_2} + 2}$, on obtient

$$|y_3 - y_2| \leq \big(c_3\sqrt{d_2} + c_4 d_2\big)\big(|y_2| + 1\big). \tag{2.26}$$

D'où, en vertu (2.18) on a

$$|x_3 - x_2| = \frac{|y_2 - y_3|}{|y_2| + 1} \leq c_3\sqrt{d_2} + c_4 d_2$$

par suite

$$|x_3 - x_2| \leq \big(c_3\sqrt{d_2} + c_4 d_2\big) \tag{2.27}$$

d'après (2.19), (2.26), (2.27) et $|x_3 - x_1| \leq 2R$ car $(x_3 \in D(A_2) \subset B_R,\ x_1 \in D(A_1) \subset B_R$

alors $|x_3 - x_1| \leq |x_3| + |x_1| \leq R + R = 2R$), on trouve

$$\begin{aligned}
\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1\rangle &= \langle y_1 - y_3, x_3 - x_1\rangle + \langle y_3 - y_2, x_3 - x_1\rangle + \langle y_1 - y_2, x_2 - x_3\rangle \\
&\leq d_1\big(|y_1| + |y_3| + 1\big) + |y_3 - y_2||x_3 - x_1| + |y_1 - y_2||x_2 - x_3| \\
&\leq d_1\big(|y_1| + |y_3 - y_2| + |y_2| + 1\big) + 2R\big(c_3\sqrt{d_2} + c_4 d_2\big)\big(|y_2| + 1\big) \\
&+ \big(|y_1| + |y_2|\big)\big(c_3\sqrt{d_2} + c_4 d_2\big) \\
&\leq d_1\big(|y_1| + |y_2| + 1\big) + d_1|y_3 - y_2| + 2R\big(c_3\sqrt{d_2} + c_4 d_2\big)\big(|y_2| + 1\big) \\
&+ \big(c_3\sqrt{d_2} + c_4 d_2\big)\big(|y_1| + |y_2|\big) \\
&\leq d_1\big(|y_1| + |y_2| + 1\big) + d_1\big(c_3\sqrt{d_2} + c_4 d_2\big)\big(|y_2| + 1\big) \\
&+ 2R\big(c_3\sqrt{d_2} + c_4 d_2\big)\big(|y_2| + 1\big) + \big(c_3\sqrt{d_2} + c_4 d_2\big)\big(|y_1| + |y_2|\big) \\
&\leq d_1\big(|y_1| + |y_2| + 1\big) + d_1\big(c_3\sqrt{d_2} + c_4 d_2\big)\big(|y_1| + |y_2| + 1\big) \\
&+ 2R\big(c_3\sqrt{d_2} + c_4 d_2\big)\big(|y_1| + |y_2| + 1\big) + \big(c_3\sqrt{d_2} + c_4 d_2\big)\big(|y_1| + |y_2| + 1\big) \\
&\leq \big(|y_1| + |y_2| + 1\big)\big(d_1 + d_1(c_3\sqrt{d_2} + c_4 d_2) + 2R(c_3\sqrt{d_2} + c_4 d_2) + (c_3\sqrt{d_2} + c_4 d_2)\big),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{\big\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1\big\rangle}{|y_1| + |y_2| + 1} &\leq d_1 + (c_3\sqrt{d_2} + c_4 d_2)(d_1 + 2R + 1) \\
&\leq d_1 + c_3\sqrt{d_2}(d_1 + 2R + 1) + c_4 d_2(d_1 + 2R + 1),
\end{aligned}$$

si on prend $\gamma = \max(c_3, c_4)$ alors, pour tous $x_1 \in D(A_1)$, $y_1 \in A_1 x_1$ et $x_2 \in D(A_3)$, $y_2 \in A_3 x_2$ on obtient

$$\sup_{\substack{x_1 \in D(A_1),\ y_1 \in A_1 x_1 \\ x_2 \in D(A_3),\ y_2 \in A_3 x_2}} \frac{\big\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1\big\rangle}{|y_1| + |y_2| + 1} \leq d_1 + \gamma\big(\sqrt{d_2} + d_2\big)\big(d_1 + 2R + 1\big).$$

D'où

$$d_V(A_1, A_3) \leq d_1 + \gamma\big(\sqrt{d_2} + d_2\big)\big(d_1 + 2R + 1\big).$$

■

2.3 Opérateurs dépendants continument du temps

Définition 2.3.1. *Soit $A^t : H \to 2^H$ un opérateur maximal monotone. On dit que A^t est continue en $t \in [0, T]$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ pour tout $t_1 \in [0, T]$ tel que $|t_1 - t| < \delta$ on a $d_V(A^{t_1}, A^t) < \varepsilon$.*
On dit qu'un opérateur A^t est continue sur $[0, T]$ si et seulement si il est continue en tout point $t \in [0, T]$.

Définition 2.3.2. *Un opérateur $A^t : H \to 2^H$, défini pour $t \in [0, T]$ est dit régulier si*

a) l'opérateur A^t est maximal monotone pour $0 \leq t \leq T$.

b) $intD(A^t) \neq \emptyset, 0 \leq t \leq T$.

c) l'application $t \to A^t$ est continue au sens de la distance d_V i.e. ;

$$\lim_{t_i \to t} d_V(A^{t_i}, A^t) = 0, \ \ 0 \leq t \leq T.$$

Définition 2.3.3. *Supposons que $A^t : H \to 2^H$, A_i^t $(i = 1, 2, \cdots)$ sont des opérateurs maximaux monotones dans H, défini pour $0 \leq t \leq T$, on dit que la suite $(A_i^t)_i$ converge uniformément sur $[0, T]$ vers A^t pour $i \to \infty$, si*

$$\lim_{i \to \infty} \sup_{t \in [0,T]} d_V(A_i^t, A^t) = 0.$$

Lemme 2.3.1. *Si A^t est un opérateur régulier sur $[0, T]$ alors il existe une suite d'opérateurs $(A_i^t)_i$ maximaux monotones constants par morceaux, qui converge uniformément sur $[0, T]$ vers A^t, pour toute telle suite il existe un indice i_0 tel que pour $i \geq i_0$, nous avons $intD(A_i^t) \neq \emptyset$.*

Chapitre 3

Inclusions différentielles non stationnaires

Dans ce chapitre, notre objectif est l'étude de l'existence et l'unicité de la solution de l'inclusion différentielle

$$\dot{x}(t) + A^t x(t) \ni 0, \quad x(0) = x_0 \in \overline{D(A^0)} \tag{3.1}$$

où A^t est un opérateur maximal monotone dépendant du temps.

3.1 Opérateurs constants par morceaux

Nous déterminons la solution de l'inclusion (3.1) pour les opérateurs maximaux monotones A^t qui sont constants par morceaux sur $[0, T]$. Soit

$$A^t = A_i, \ t_i \leq t \leq t_{i+1}, \ i = 0, 1 \cdots, k,$$

$$t_0 = 0, \ t_k = T, \ x(0) = x_0 \in \overline{D(A_0)}.$$

Dans ce cas, par une solution $x(\cdot)$ de l'inclusion (3.1), nous entendons une fonctions continue à droite, $x(\cdot) : [0, T] \to H$, définie comme suite

a) Sur l'intervalle $[0, t_1)$ la fonction $x(\cdot)$ coïncide avec la solution de l'inclusion

$$\dot{x}(t) + A_0 x(t) \ni 0, \ x(0) = x_0.$$

b) Si la fonction $x(\cdot)$ est définie sur $[0, t_i)$ et $x_i^- = \lim\limits_{t \to t_i^-} x(t)$, alors $x(\cdot)$ sur $[t_i, t_{i+1})$ est la solution de l'inclusion

$$\dot{x}(t) + A_i x(t) \ni 0, \ x(t_i) = proj_{\overline{D(A_i)}} x_i^-.$$

Le lemme qui suit va être utilisé dans les démonstrations des théorèmes principaux de ce chapitre.

Lemme 3.1.1. *Soient D_1, D_2 deux ensembles convexes fermés dans H et d_0 un réel positif, tel que $d_H(D_1, D_2) \leq d_0$.*
Supposons que $x_1,\ x_2 \in H,\ y_i = proj_{D_i} x_i,\ (i = 1, 2)$. Alors

$$|y_1 - y_2|^2 \leq |x_1 - x_2|^2 + 2d_0\big(|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|\big). \tag{3.2}$$

Démonstration. On note $p_i = y_i - x_i,\ (i = 1, 2)$. Par la définition de la distance de Hausdorff, on obtient

$$\langle y_1 - y_2, p_1\rangle \leq d_0|p_1|,\ \langle y_2 - y_1, p_2\rangle \leq d_0|p_2|. \tag{3.3}$$

En effet
Soient $y_1 \in D_1,\ y_2 \in D_2$

$$\begin{aligned} |y_1 - y_2| &= |y_1 - d + d - y_2|,\ \forall d \in D_1 \\ &\leq |y_1 - d| + |d - y_2|,\ \forall d \in D_1, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |y_1 - y_2| &\leq \inf_{d\in D_1} |y_1 - d| + \inf_{d\in D_1} |d - y_2| \\ &\leq 0 + d(y_2, D_1) \\ &\leq e(D_1, D_2) \\ &\leq d_H(D_1 D_2) \\ &\leq d_0. \end{aligned}$$

D'où

$$|y_1 - y_2| \leq d_0$$

donc

$$\begin{aligned} \langle y_1 - y_2, p_1\rangle &\leq |y_1 - y_2||p_1| \\ &\leq d_0|p_1| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle y_2 - y_1, p_1\rangle &\leq |y_2 - y_1||p_2| \\ &\leq d_0|p_2|. \end{aligned}$$

De $x_i = y_i - p_i,\ (i = 1, 2)$ il vient

$$\begin{aligned}
|x_2 - x_1|^2 &= |y_2 - p_2 - y_1 + p_1|^2 \\
&= \big|(y_2 - y_1) - (p_2 - p_1)\big|^2 \\
&= |y_2 - y_1|^2 - 2\langle y_2 - y_1, p_2 - p_1\rangle + |p_2 - p_1|^2 \\
&= |y_2 - y_1|^2 + 2\langle y_2 - y_1, p_1\rangle - 2\langle y_2 - y_1, p_2\rangle + |p_2 - p_1|^2.
\end{aligned}$$

Donc

$$|y_2 - y_1|^2 = |x_2 - x_1|^2 + 2\langle y_1 - y_2, p_1\rangle + 2\langle y_2 - y_1, p_2\rangle - |p_2 - p_1|^2$$

et (3.3) nous donne

$$\begin{aligned}
|y_1 - y_2|^2 &\leq |x_1 - x_2|^2 + 2d_0\big(|p_1| + |p_2|\big) - |p_2 - p_1|^2 \\
&\leq |x_1 - x_2|^2 + 2d_0\big(|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|\big) - |p_2 - p_1|^2 \\
&\leq |x_1 - x_2|^2 + 2d_0\big(|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|\big).
\end{aligned}$$

D'où

$$|y_1 - y_2|^2 \leq |x_1 - x_2|^2 + 2d_0\big(|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|\big).$$

$\blacksquare$

Proposition 3.1.1. *$\big($[5] Proposition 3.2$\big)$ Soient $A : H \to 2^H$ un opérateur maximal monotone, $f(\cdot) \in L^1\big([0, T]; H\big)$ et $u(\cdot) \in C\big([0, T]; H\big)$.*
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *$u(\cdot)$ est solution forte de l'équation $f \in \dfrac{du}{dt} + Au$*
2. *$u(\cdot)$ est absolument continue sur tout compact de $[0, T]$ et $u(\cdot)$ est solution faible de l'équation $f \in \dfrac{du}{dt} + Au$*

Lemme 3.1.2. *Soient $A_1^t : H \to 2^H$ et $A_2^t : H \to 2^H$ deux opérateurs maximaux monotones constants par morceaux sur $[0, T]$ soit $intD(A_i^t) \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$, avec $0 \leq t \leq T$ et $d_V(A_1^t, A_2^t) \leq d_0,\ 0 \leq t \leq T$. Supposons que $x_i(\cdot)$ $(i = 1, 2)$ est une solution de l'inclusion*

$$\dot{x}_i + A_i^t x_i(t) \in 0,\ x_i(0) = x_i^0 \in \overline{D(A_i^0)},\ i = 1, 2.$$

Alors

$$|x_1(T) - x_2(T)|^2 \leq |x_1^0 - x_2^0|^2 + 2d_0(V_1 + V_2 + T),$$

où

$$V_i = var(x_i, [0, T]),\ i = 1, 2.$$

Démonstration. Tout d'abord supposons que $A_i^t = A_i, 0 \leq t \leq T$. Alors $x_i(\cdot)$ $(i = 1,\ 2)$ sont des fonctions absolument continues sur $[0, T]$ (d'après la proposition 3.1.1).
Posons pour $i = 1, 2$, $y_i \in A_i^t x_i$ et $z_i \in D(A_i)$, alors

$$\begin{aligned}
\big\langle y_1 - y_2, z_2 - z_1 \big\rangle &= \frac{\big\langle y_1 - y_2, z_2 - z_1 \big\rangle}{|y_1| + |y_2| + 1}\big(|y_1| + |y_2| + 1\big) \\
&\leq \sup_{\substack{z_i \in D(A_i) \\ y_i \in A_i^t x_i,\ i=1,2}} \frac{\big\langle y_1 - y_2, z_2 - z_1 \big\rangle}{|y_1| + |y_2| + 1}\big(|y_1| + |y_2| + 1\big) \\
&\leq d_V\big(A_1^t, A_2^t\big)\big(|y_1| + |y_2| + 1\big) \\
&\leq d_0\big(|y_1| + |y_2| + 1\big).
\end{aligned}$$

D'où

$$\big\langle y_1 - y_2, z_2 - z_1 \big\rangle \leq d_0\big(|y_1| + |y_2| + 1\big). \tag{3.4}$$

En particulier pour $y_i = -\dot{x}_i(t)$ et $z_i = x_i(t)$ $(i = 1, 2)$, de (3.4) on trouve

$$\big\langle \dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t), x_2(t) - x_1(t) \big\rangle \leq d_0\big(|\dot{x}_1(t)| + |\dot{x}_2(t)| + 1\big),$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|x_1(t) - x_2(t)|^2 &= 2\big\langle \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t), x_1(t) - x_2(t) \big\rangle \\
&\leq 2d_0\big(|\dot{x}_1(t)| + |\dot{x}_2(t)| + 1\big).
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{d}{dt}\big|x_1(t) - x_2(t)\big|^2 \leq 2d_0\big(|\dot{x}_1(t)| + |\dot{x}_2(t)| + 1\big). \tag{3.5}$$

En intégrant (3.5) sur l'intervalle $[0, T]$, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^T \frac{d}{dt}\big|x_1(t) - x_2(t)\big|^2 dt &= \big|x_1(T) - x_2(T)\big|^2 - \big|x_1(0) - x_2(0)\big|^2 \\
&\leq 2d_0 \int_0^T \big(|\dot{x}_1(t)| + |\dot{x}_2(t)| + 1\big) \\
&\leq 2d_0 \left[\int_0^T |\dot{x}_1(t)|dt + \int_0^T |\dot{x}_2(t)|dt + \int_0^T dt\right] \\
&= 2d_0\big(V_1 + V_2 + T\big).
\end{aligned}$$

Revenant au cas des opérateurs constants par morceaux, c'est à dire il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} = T$ telle que sur chaque intervalle $[t_j, t_{j+1}[$, les deux opérateurs sont constants. On fait une intégration de (3.5) sur l'intervalle $[t_j, t]$ tel que

$t < t_{j+1}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{t_j}^{t} \frac{d}{ds}\big|x_1(s)-x_2(s)\big|^2 ds &= \big|x_1(t)-x_2(t)\big|^2 - \big|x_1(t_j)-x_2(t_j)\big|^2 \\ &\leq 2d_0\left[\int_{t_j}^{t}|\dot{x}_1|ds + \int_{t_j}^{t}|\dot{x}_2(s)|ds + \int_{t_j}^{t} ds\right] \\ &\leq 2d_0\big[var\big(x_1,[t_j,t]\big) + var\big(x_2,[t_j,t]\big) + t - t_j\big],\end{aligned}$$

par passage à la limite quand $t \to t_{j+1}^-$

$$\lim_{t\to t_{j+1}^-}\big|x_1(t)-x_2(t)\big|^2 \leq \big|x_1(t_j)-x_2(t_j)\big|^2 + 2d_0 \lim_{t\to t_{j+1}^-}\big[var\big(x_1,[t_j,t]\big)+var\big(x_2,[t_j,t]\big)+t-t_j\big].$$

D'où

$$\big|x_1^-(t_{j+1})-x_2^-(t_{j+1})\big|^2 \leq \big|x_1(t_j)-x_2(t_j)\big|^2 + 2d_0\big[\lim_{t\to t_{j+1}^-} var\big(x_1,[t_j,t]\big) + \lim_{t\to t_{j+1}^-} var\big(x_2,[t_j,t]\big) + t_{j+1}-t_j\big]. \tag{3.6}$$

Posons pour $i = 1,2$

$$x_i(t_{j+1}) = proj_{\overline{D(A_i^j)}} x_i^-(t_{j+1})$$

où $x_i(t_{j+1}) \in \overline{D(A_i^j)}$ et

$$p_i = x_i(t_{j+1}) - x_i^-(t_{j+1}),$$

d'après le lemme 3.1.1 on trouve

$$\big\langle x_1(t_{j+1}) - x_2(t_{j+1}), p_1\big\rangle \leq d_H\left(\overline{D(A_1^j)}, \overline{D(A_2^j)}\right)|p_1|,$$

et

$$\big\langle x_2(t_{j+1}) - x_1(t_{j+1}), p_2\big\rangle \leq d_H\left(\overline{D(A_1^j)}, \overline{D(A_2^j)}\right)|p_2|,$$

alors

$$\begin{aligned}&\big|x_1(t_{j+1}) - x_2(t_{j+1})\big|^2 \\ &\quad= \big|x_1^-(t_{j+1}) - x_2^-(t_{j+1})\big|^2 + 2\big\langle x_1(t_{j+1}) - x_2(t_{j+1}), p_1\big\rangle + 2\big\langle x_2(t_{j+1}) - x_1(t_{j+1}), p_2\big\rangle - |p_1-p_2|^2 \\ &\quad\leq \big|x_1^-(t_{j+1}) - x_2^-(t_{j+1})\big|^2 + 2d_H\left(\overline{D(A_1^j)}, \overline{D(A_2^j)}\right)\big(|p_1|+|p_2|\big) - |p_1-p_2|^2 \\ &\quad\leq \big|x_1^-(t_{j+1}) - x_2^-(t_{j+1})\big|^2 + 2d_H\left(\overline{D(A_1^j)}, \overline{D(A_2^j)}\right)\big(|p_1|+|p_2|\big) \\ &\quad= \big|x_1^-(t_{j+1}) - x_2^-(t_{j+1})\big|^2 + 2d_H\left(\overline{D(A_1^j)}, \overline{D(A_2^j)}\right)\big(|x_1(t_{j+1}) - x_1^-(t_{j+1})| + |x_2(t_{j+1}) - x_2^-(t_{j+1})|\big).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}&\big|x_1(t_{j+1}) - x_2(t_{j+1})\big|^2 - \big|x_1^-(t_{j+1}) - x_2^-(t_{j+1})\big|^2 \\ &\qquad\leq 2d_H\left(\overline{D(A_1^j)}, \overline{D(A_2^j)}\right)\big(|x_1(t_{j+1}) - x_1^-(t_{j+1})| + |x_2(t_{j+1}) - x_2^-(t_{j+1})|\big)\end{aligned}$$

d'autre part d'après le lemme 2.2.2 on obtient

$$\begin{aligned}\big|x_1(t_{j+1})-x_2(t_{j+1})\big|^2-\big|x_1^-(t_{j+1})-x_2^-(t_{j+1})\big|^2 \\ &\leq 2d_V\left(A_1^j,A_2^j\right)\left(|x_1(t_{j+1})-x_1^-(t_{j+1})|+|x_2(t_{j+1})-x_2^-(t_{j+1})|\right)\\ &\leq 2d_0\left(|x_1(t_{j+1})-x_1^-(t_{j+1})|+|x_2(t_{j+1})-x_2^-(t_{j+1})|\right).\end{aligned}$$

D'où

$$\big|x_1(t_{j+1})-x_2(t_{j+1})\big|^2-\big|x_1^-(t_{j+1})-x_2^-(t_{j+1})\big|^2\leq 2d_0\left(|x_1(t_{j+1})-x_1^-(t_{j+1})|+|x_2(t_{j+1})-x_2^-(t_{j+1})|\right). \tag{3.7}$$

On fait la somme de (3.6) et (3.7) on obtient

$$\begin{aligned}\big|x_1(t_{j+1})-x_2(t_{j+1})\big|^2-\big|x_1(t_j)-x_2(t_j)\big|^2 \\ &\leq 2d_0\Big[\lim_{t\to t_{j+1}^-} var\big(x_1,[t_j,t]\big)+\big|x_1^-(t_{j+1})-x_1(t_{j+1})\big|\\ &+\lim_{t\to t_{j+1}^-} var\big(x_2,[t_j,t]\big)+\big|x_2^-(t_{j+1})-x_2(t_{j+1})\big|+t_{j+1}-t_j\Big]\\ &\leq 2d_0\Big[\Big(\lim_{t\to t_{j+1}^-}\int_{t_j}^{t}\big|\dot{x_1}(s)\big|ds+\big|x_1(t_{j+1})-x_1(t)\big|\Big)\\ &+\lim_{t\to t_{j+1}^-}\Big(\int_{t_j}^{t}\big|\dot{x_2}(s)\big|ds+\big|x_2(t_{j+1})-x_2(t)\big|\Big)+t_{j+1}-t_j\Big]\\ &\leq 2d_0\Big[\lim_{t\to t_{j+1}^-}\Big(\int_{t_j}^{t}\big|\dot{x_1}(s)\big|ds+\Big|\int_{t}^{t_{j+1}}\dot{x_1}(s)ds\Big|\Big)\\ &+\lim_{t\to t_{j+1}^-}\Big(\int_{t_j}^{t}\big|\dot{x_2}(s)\big|ds+\Big|\int_{t}^{t_{j+1}}\dot{x_2}(s)ds\Big|\Big)+t_{j+1}-t_j\Big]\\ &\leq 2d_0\Big[\lim_{t\to t_{j+1}^-}\Big(\int_{t_j}^{t}\big|\dot{x_1}(s)\big|ds+\int_{t}^{t_{j+1}}\big|\dot{x_1}(s)\big|ds\Big)\\ &+\lim_{t\to t_{j+1}^-}\Big(\int_{t_j}^{t}\big|\dot{x_2}(s)\big|ds+\int_{t}^{t_{j+1}}\big|\dot{x_2}(s)\big|ds\Big)+t_{j+1}-t_j\Big]\\ &\leq 2d_0\Big[\int_{t_j}^{t_{j+1}}\big|\dot{x_1}(s)\big|ds+\int_{t_j}^{t_{j+1}}\big|\dot{x_2}(s)\big|ds+t_{j+1}-t_j\Big]\\ &\leq 2d_0\Big[var\big(x_1,[t_j,t_{j+1}]\big)+var\big(x_2,[t_j,t_{j+1}]\big)+t_{j+1}-t_j\Big].\end{aligned}$$

D'où

$$\big|x_1(t_{j+1})-x_2(t_{j+1})\big|^2-\big|x_1(t_j)-x_2(t_j)\big|^2\leq 2d_0\big[var\big(x_1,[t_j,t_{j+1}]\big)+var\big(x_2,[t_j,t_{j+1}]\big)+t_{j+1}-t_j\big].$$

Ainsi ; pour $j=0$

$$\big|x_1(t_1)-x_2(t_1)\big|^2-\big|x_1(0)-x_2(0)\big|^2\leq 2d_0\big[var\big(x_1,[0,t_1]\big)+var\big(x_2,[0,t_1]\big)+t_1\big].$$

Pour $j = 0, \cdots, k-1$

$$\big|x_1(t_{j+1}) - x_2(t_{j+1})\big|^2 - \big|x_1(t_j) - x_2(t_j)\big|^2 \leq 2d_0\big[var\big(x_1, [t_j, t_{j+1}]\big) + var\big(x_2, [t_j, t_{j+1}]\big) + t_{j+1} - t_j\big]. \tag{3.8}$$

Pour $j = k-1$

$$\big|x_1(T) - x_2(T)\big|^2 - \big|x_1(t_{k-1}) - x_2(t_{k-1})\big|^2 \leq 2d_0\big[var\big(x_1, [t_{k-1}, T]\big) + var\big(x_2, [t_{k-1}, T]\big) + T - t_{k-1}\big].$$

On fait la somme membre à membre des équations (3.8) ($j = 0, ..., k-1$) on obtient

$$\big|x_1(T) - x_2(T)\big|^2 - \big|x_1(0) - x_2(0)\big|^2 \leq 2d_0\Big[\sum_{j=0}^{k-1}\big(var\big(x_1, [t_j, t_{j+1}]\big) + var\big(x_2, [t_j, t_{j+1}]\big) + t_{j+1} - t_j\big)\Big],$$

donc

$$\begin{aligned}\big|x_1(T) - x_2(T)\big|^2 - \big|x_1^0 - x_2^0\big|^2 &\leq 2d_0\Big[\sum_{j=0}^{k-1} var\big(x_1, [t_j, t_{j+1}]\big) + \sum_{j=0}^{k-1} var\big(x_2, [t_j, t_{j+1}]\big) + \sum_{j=0}^{k-1}(t_{j+1} - t_j)\Big] \\ &\leq 2d_0\Big[var\big(x_1, [0, T]\big) + var\big(x_2, [0, T]\big) + T\Big] \\ &\leq 2d_0\big[V_1 + V_2 + T\big].\end{aligned}$$

■

Définition 3.1.1. *Soit $A^t : H \to 2^H$ un opérateur régulier sur $[0, T]$, on appelle $x(\cdot) \in C\big([0, T]; H\big)$ une solution de l'inclusion (3.1) si $(x(\cdot))_i$ converge uniformément vers $x(\cdot)$ sur $[0, T]$, où $x_i(\cdot)$ est la solution de l'inclusion*

$$\dot{x}_i(t) + A_i^t(t) \ni 0, \;\; x_i(0) = x_i^0 \in \overline{D(A_i^0)},$$

$(A_i^t)_i$ est une suite d'opérateurs maximaux monotones constants par morceaux convergent uniformément sur $[0, T]$ vers A^t pour $i \to \infty$ et $x_i^0 \to x_0$.

3.2 Borne supérieure de la variation de la solution

Dans le but de prouver l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (3.1) avec l'opérateur A^t régulier, nous établissons une limite supérieure de la variation de la solution $y(\cdot)$ sur $[0, T]$ de l'inclusion

$$\dot{y}(t) + A_i^t y(t) \ni 0, \;\; y(0) = y_0 \in \overline{D(A_i^0)}$$

avec $(A_i^t)_i$ une suite d'opérateurs maximaux monotones constants par morceaux convergent vers A^t uniformément sur $[0, T]$, dans le sens de la distance d_V.

Lemme 3.2.1. *Soient $A : H \to 2^H$ un opérateur maximal monotone, avec $D(A) \subset B_R$, $\bar{x} \in D(A)$ et $B(\bar{x}, r) \subset D(A)$, $\big(r > 0,\ B(\bar{x}, r) = \{z \in H,\ |z - \bar{x}| \leq r\}\big)$.*
Supposons qu'il existe $M > 0$, tel que $|y| \leq M$ pour tout $y \in Ax,\ x \in \bar{B}(\bar{x}, r)$, et soit $x(\cdot)$ la solution de l'inclusion

$$\dot{x}(t) + Ax(t) \ni 0,\ x(0) = x_0 \in \overline{D(A)}.$$

Alors, la variation de $x(\cdot)$ sur $[0, T]$ est bornée par la quantité $V = V(r, R, M, T)$.

Démonstration. La fonction $x(\cdot)$ est absolument continue (d'après la proposition 3.1.1) et on a

$$\frac{d}{dt}\big|x(t) - \bar{x}\big|^2 = 2\big\langle \dot{x}(t), x(t) - \bar{x}\big\rangle,\ -\dot{x}(t) \in Ax(t), \tag{3.9}$$

presque partout sur $[0, T]$.
En vertu de la monotonie de A, pour tout $p \in H$ vérifiant $\bar{x} + p \in D(A)$ on trouve pour tous $y \in Ax(t)$ et $y' \in A(\bar{x} + p)$, avec $\bar{x} + p \in B(\bar{x}, r)$ alors $|y'| \leq M$

$$\big\langle y - y', x(t) - (\bar{x} + p)\big\rangle = \big\langle y - y', x(t) - \bar{x} - p\big\rangle \geq 0. \tag{3.10}$$

On suppose que $p = r\dfrac{y}{|y|}$, alors

$$\Big\langle y - y', x(t) - \bar{x} - r\frac{y}{|y|}\Big\rangle \geq 0,$$

donc

$$\big\langle y, x(t) - \bar{x}\big\rangle - \frac{r}{|y|}\big\langle y, y\big\rangle - \big\langle y', x(t) - \bar{x}\big\rangle + \frac{r}{|y|}\big\langle y', y\big\rangle \geq 0,$$

par suite

$$\begin{aligned}
\big\langle y, x(t) - \bar{x}\big\rangle &\geq \frac{r}{|y|}|y|^2 - \big\langle y', \bar{x} - x(t)\big\rangle - \frac{r}{|y|}\big\langle y', y\big\rangle \\
&\geq r|y| - |y'||\bar{x} - x(t)| - r|y'| \\
&\geq r|y| - |y'|\big(|x(t) - \bar{x}| + r\big) \\
&\geq r|y| - M|\big(|x(t) - \bar{x}| + r\big).
\end{aligned}$$

D'où

$$\langle y, x(t) - \bar{x}\rangle \geq r|y| - M(|x(t) - \bar{x}| + r). \tag{3.11}$$

Si on prend $y = -\dot{x}(t) \in Ax(t)$, alors (3.11) donne

$$\begin{aligned}
r| - \dot{x}(t)| - M\big(|x(t) - \bar{x}| + r\big) &\leq \big\langle -\dot{x}(t), x(t) - \bar{x}\big\rangle \\
&= -\big\langle \dot{x}(t), x(t) - \bar{x}\big\rangle \\
&= \big\langle \dot{x}(t), \bar{x} - x(t)\big\rangle \\
&\leq \big|\dot{x}(t)\big|\big|x(t) - \bar{x}\big|.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}-2r\big|\dot{x}(t)\big| + 2M\big(\big|x(t)-\bar{x}\big| + r\big) &\geq 2\big|\dot{x}(t)\big|\big|x(t)-\bar{x}\big| \\ &\geq 2\big\langle \dot{x}(t), x(t)-\bar{x}\big\rangle.\end{aligned}$$

D'après (3.9) on a

$$\frac{d}{dt}\big|x(t)-\bar{x}\big|^2 \leq 2M\big(\big|x(t)-\bar{x}\big| + r\big) - 2r\big|\dot{x}(t)\big|, \tag{3.12}$$

alors

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\big|x(t)-\bar{x}\big|^2 dt \leq 2M\int_0^T \big|x(t)-\bar{x}\big|dt + 2Mr\int_0^T dt - 2r\int_0^T \big|\dot{x}(t)\big|dt,$$

par suite

$$\big|x(T)-\bar{x}\big|^2 - \big|x(0)-\bar{x}\big|^2 \leq 2M\int_0^T \big|x(t)-\bar{x}\big|dt + 2MrT - 2rvar\big(x,[0,T]\big),$$

donc

$$2rvar\big(x,[0,T]\big) \leq \big|x(0)-\bar{x}\big|^2 - \big|x(T)-\bar{x}\big|^2 + 2MrT + 2M\int_0^T \big|x(t)-\bar{x}\big|dt.$$

D'autre part on a $\big|x(t)-\bar{x}\big| \leq 2R$ (car $|x(t)-\bar{x}| \leq |x(t)|+|\bar{x}| \leq R+R = 2R$), $0 \leq t \leq T$, alors

$$\begin{aligned}2rvar\big(x,[0,T]\big) &\leq \big|x(0)-\bar{x}\big|^2 - \big|x(T)-\bar{x}\big|^2 + 2MrT + 2M\int_0^T \big|x(t)-\bar{x}\big|dt \\ &\leq \big(\big|x(0)-\bar{x}\big| - \big|x(T)-\bar{x}\big|\big)\big(\big|x(0)-\bar{x}\big| + \big|x(T)-\bar{x}\big|\big) + 2MrT + 2M\int_0^T 2Rdt \\ &\leq 4R\big(\big|x(0)-\bar{x}\big| - \big|x(T)-\bar{x}\big|\big) + 2MrT + 4MRT \\ &\leq 4R\big|x(0)-x(T)\big| + 2MrT + 4MRT \\ &\leq 4R\big(\big|x(0)\big| + \big|x(T)\big|\big) + 2MrT + 4MRT \\ &\leq 8R^2 + 2MrT + 4MRT,\end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}var\big(x,[0,T]\big) &\leq \frac{1}{2r}\big[8R^2 + 2MrT + 4MRT\big] \\ &= \frac{1}{r}\big[4R^2 + MrT + 2MRT\big] \\ &= V.\end{aligned}$$

D'où

$$var\big(x,[0,T]\big) \leq V.$$

■

Définition 3.2.1. *L'opérateur maximal monotone $A : H \to 2^H$ est un opérateur M-borné sur $B(x,r)$ si $B(x,r) \subset D(A)$ et $|z| \leq M$ pour $z \in Ay$, $y \in B(x,r)$.*

Définition 3.2.2. *On dit qu'un opérateur $S^t : [0,T] \to 2^H$ est un tube solide s'il existe des suites finies*

$$t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_k > T,\ x_0, \cdots, x_k \in H,\ r_0, r_1, \cdots, r_k > 0,$$

tel que $S^t = B(x_i, r_i)$ pour $t_i \leq t < t_{i+1},\ i = 0, \cdots, k-1$.

Définition 3.2.3. *Soit $M > 0$. Un opérateur maximal monotone $A^t : H \longrightarrow 2^H$ dépendant du temps est dit M-borné sur le tube solide S^t si pour chaque $t \in [0,T]$ nous avons l'inclusion $S^t \subset D(A^t)$ et $|y| \leq M$ pour tout $x \in S^t,\ y \in A^t x$.*

Lemme 3.2.2. *Soit S^t un tube solide, $0 \leq t \leq T$. Pour chaque $M > 0$, il existe $V = V(S^t, M, T, R)$ tel que si A^t est un opérateur maximal monotone de $H \longrightarrow 2^H$ constant par morceaux et M-borné sur S^t et si $x(\cdot)$ est la solution de l'inclusion (3.1), alors $var\big(x, [0,T]\big) \leq V$.*

Démonstration.
Tout d'abord, supposons que $S^t = B(\bar{x}, r),\ 0 \leq t \leq T$ et l'opérateur A^t est constant par morceaux et égal à A_i sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}[\subset [0,T],\ i = 0, \cdots, k-1$.
On montre que

$$var\big(x, [t_i, t_{i+1}]\big) \leq V_i = V(r, R, M, t_{i+1} - t_i).$$

Pour cela, comme il découle de la preuve du lemme 3.2.1, il suffit de montrer l'inégalité

$$\big|x^-(t_{i+1}) - \bar{x}\big|^2 - \big|x(t_i) - \bar{x}\big|^2 \geq r\big|x^-(t_{i+1}) - x(t_i)\big|, \tag{3.13}$$

où

$$x^-(t_{i+1}) = \lim_{t \to t_{i+1}^-} x(t),$$

d'après la définition 1.8.1 et que $x(t_i) = Proj_{\overline{D(A^{t_i})}} x^-(t_i)$, pour tout $y \in \overline{D(A^{t_i})}$ on trouve

$$\big\langle x^-(t_{i+1}) - x(t_i), x(t_i) - y \big\rangle \geq 0. \tag{3.14}$$

Si on prend

$$y = \bar{x} + r \frac{x^-(t_{i+1}) - x(t_i)}{\big|x^-(t_{i+1}) - x(t_i)\big|},$$

(3.14) implique que

$$\left\langle x^-(t_{i+1}) - x(t_i), x(t_i) - \bar{x} - r \frac{x^-(t_{i+1}) - x(t_i)}{\big|x^-(t_{i+1}) - x(t_i)\big|} \right\rangle \geq 0,$$

donc

$$\begin{aligned}
\left\langle x^-(t_{i+1}) - x(t_i), x(t_i) - \bar{x} \right\rangle &\geq r \left\langle x^-(t_{i+1}) - x(t_i), \frac{x^-(t_{i+1}) - x(t_i)}{\left|x^-(t_{i+1}) - x(t_i)\right|} \right\rangle \\
&= \frac{r}{\left|x^-(t_{i+1}) - x(t_i)\right|} \left|x^-(t_{i+1}) - x(t_i)\right|^2 \\
&= r\left|x^-(t_{i+1}) - x(t_i)\right|,
\end{aligned}$$

d'où

$$\left\langle x^-(t_{i+1}) - x(t_i), x(t_i) - \bar{x} \right\rangle \geq r\left|x^-(t_{i+1}) - x(t_i)\right|. \tag{3.15}$$

Par suite, (3.15) donne

$$\left\langle x^-(t_{i+1}) - x(t_i), x(t_i) - \bar{x} + x^-(t_{i+1}) - x^-(t_{i+1}) \right\rangle \geq r\left|x^-(t_{i+1}) - x(t_i)\right|,$$

qui est équivalent à

$$\left\langle x^-(t_{i+1}) - x(t_i), x^-(t_{i+1}) - \bar{x} \right\rangle + \left\langle x^-(t_{i+1}) - x(t_i), x(t_i) - x^-(t_{i+1}) \right\rangle \geq r\left|x^-(t_{i+1}) - x(t_i)\right|,$$

donc

$$\begin{aligned}
\left\langle x^-(t_{i+1}) - x(t_i), x^-(t_{i+1}) - \bar{x} \right\rangle &\geq r\left|x^-(t_{i+1}) - x(t_i)\right| - \left\langle x^-(t_{i+1}) - x(t_i), x(t_i) - x^-(t_{i+1}) \right\rangle \\
&\geq r\left|x^-(t_{i+1}) - x(t_i)\right| + \left\langle x^-(t_{i+1}) - x(t_i), x^-(t_{i+1}) - x(t_i) \right\rangle \\
&= r\left|x^-(t_{i+1}) - x(t_i)\right| + \left|x^-(t_{i+1}) - x(t_i)\right|^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

D'où

$$\left\langle x^-(t_{i+1}) - x(t_i), x^-(t_{i+1}) - \bar{x} \right\rangle \geq 0. \tag{3.16}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\left\langle x^-(t_{i+1}) - x(t_i), x(t_i) - \bar{x} \right\rangle &= \left\langle x^-(t_{i+1}) - x(t_i) + \bar{x} - \bar{x}, x(t_i) - \bar{x} \right\rangle \\
&= \left\langle x^-(t_{i+1}) - \bar{x}, x(t_i) - \bar{x} \right\rangle - \left\langle x(t_i) - \bar{x}, x(t_i) - \bar{x} \right\rangle \\
&= \left\langle x^-(t_{i+1}) - \bar{x}, x(t_i) - \bar{x} + x^-(t_{i+1}) - x^-(t_{i+1}) \right\rangle - \left|x(t_i) - \bar{x}\right|^2 \\
&= \left\langle x^-(t_{i+1}) - \bar{x}, x^-(t_{i+1}) - \bar{x} \right\rangle + \left\langle x^-(t_{i+1}) - \bar{x}, x(t_i) - x^-(t_{i+1}) \right\rangle - \left|x(t_i) - \bar{x}\right|^2 \\
&= \left|x^-(t_{i+1}) - \bar{x}\right|^2 - \left|x(t_i) - \bar{x}\right|^2 + \left\langle x^-(t_{i+1}) - \bar{x}, x(t_i) - x^-(t_{i+1}) \right\rangle,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left\langle x^-(t_{i+1}) - x(t_i), x(t_i) - \bar{x} \right\rangle &= \left|x^-(t_{i+1}) - \bar{x}\right|^2 - \left|x(t_i) - \bar{x}\right|^2 + \left\langle x^-(t_{i+1}) - \bar{x}, x(t_i) - x^-(t_{i+1}) \right\rangle \\
&= \left|x^-(t_{i+1}) - \bar{x}\right|^2 - \left|x(t_i) - \bar{x}\right|^2 - \left\langle x^-(t_{i+1}) - x(t_i), x^-(t_{i+1}) - \bar{x} \right\rangle
\end{aligned} \tag{3.17}$$

et comme d'après (3.16) on a

$$\big|x^-(t_{i+1})-\bar{x}\big|^2-\big|x(t_i)-\bar{x}\big|^2\geq\big|x^-(t_{i+1})-\bar{x}\big|^2-\big|x(t_i)-\bar{x}\big|^2-\big\langle x^-(t_{i+1})-x(t_i),x^-(t_{i+1})-\bar{x}\big\rangle. \tag{3.18}$$

Alors (3.15), (3.17) et (3.18) donnent

$$\big|x^-(t_{i+1})-\bar{x}\big|^2-\big|x(t_i)-\bar{x}\big|^2\geq r\big|x^-(t_{i+1})-x(t_i)\big|.$$

D'autre part on a

$$\big|x^-(t_{i+1})-\bar{x}\big|^2-\big|x(t_i)-\bar{x}\big|^2=\int_{t_i}^{t_{i+1}}\big|x(t)-\bar{x}\big|^2dt.$$

D'après (3.12) on a

$$\begin{aligned}r\big|x^-(t_{i+1})-x(t_i)\big| &\leq 2M\int_{t_i}^{t_{i+1}}\big(\big|x(t)-\bar{x}\big|+r\big)dt-2r\int_{t_i}^{t_{i+1}}\big|\dot{x}(t)\big|dt\\ &\leq 2M\int_{t_i}^{t_{i+1}}\big(2R+r\big)dt-2rvar\big(x,[t_i,t_{i+1}[\big)\end{aligned}$$

alors

$$2rvar\big(x,[t_i,t_{i+1}[\big)\leq 2M(2R+r)(t_{i+1}-t_i)-r\big|x^-(t_{i+1})-x(t_i)\big|,$$

donc

$$\begin{aligned}var\big(x,[t_i,t_{i+1}[\big) &\leq \frac{M}{r}(2R+r)(t_{i+1}-t_i)-\frac{1}{2}|x^-(t_{i+1})-x(t_i)|\\ &\leq \frac{M}{r}(2R+r)(t_{i+1}-t_i)\\ &\leq V_i=V\big(i,R,M,t_{i+1}-t_i\big).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}var\big(x,[0,T]\big) &\leq \sum_{i=0}^{k-1}var\big(x,[t_i,t_{i+1}[\big)\\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1}V_i\\ &=V.\end{aligned}$$

Considérons maintenant, le cas où S^t est variable i.e. ; $S^t=B(\bar{x}_i,r_i)$, pour tout $t\in[t_i,t_{i+1}[$, $i=0,\cdots,k-1$. De la même manière que dans le cas ou S^t est constant on trouve les résultats suivants

$$\big|x^-(t_{i+1})-\bar{x}_i\big|^2-\big|x(t_{i+1})-\bar{x}_i\big|^2\geq r_i\big|x^-(t_{i+1})-x(t_{i+1})\big|,$$

donc

$$\begin{aligned} var\big(x,[t_i,t_{i+1}]\big) &\leq \frac{M}{r_i}(2R+r_i)(t_{i+1}-t_i) \\ &\leq V_i'. \end{aligned}$$

D'où

$$var(x,[0,T]) \leq \sum_{i=0}^{k-1} V_i' = V'.$$

■

3.3 Existence et unicité de la solution d'un opérateur régulier

Le but de cette section est de montrer l'existence et l'unicité des solutions pour une inclusion différentielle du premier ordre avec une condition initiale.
Prouvons d'abord trois lemmes auxiliaires.

Lemme 3.3.1. *Soit A^t un opérateur régulier. Alors il existe $M > 0$ et un tube solide S^t, $(0 \leq t \leq T)$ sur lequel l'opérateur A^t est M-borné.*

Démonstration. Tout d'abord, on fixe $t \in [0,T]$ et on prend $\bar{x} \in intD(A^t)$ puisque A^t est un opérateur régulier, il existe $r,\ M > 0$ tels que l'opérateur A^t est M-borné sur $B(\bar{x},r)$ (car A^t est continu).
Soit A_1 un opérateur maximal monotone tel que $\bar{x} \in D(A_1)$, $d_V(A^t,A_1) \leq \frac{r}{4}$ et $B(\bar{x},\frac{r}{2}) \subset D(A_1)$.
On a

$$d_V(A_1,A^t) \geq \sup_{\substack{x\in B(\bar{x},\frac{r}{2}),y\in B(\bar{x},r) \\ z\in A_1x,p\in A^ty}} \frac{\big\langle z-p,y-x\big\rangle}{|z|+|p|+1},$$

alors pour tous $x \in B(\bar{x},\frac{r}{2}),\ y \in B(\bar{x},r),\ z \in A_1x,\ p \in A^ty$

$$d_V(A_1,A^t) \geq \frac{\big\langle z-p,y-x\big\rangle}{|z|+|p|+1},$$

mais on a

$$d_V(A^t,A_1) \leq \frac{r}{4},$$

donc

$$\frac{\big\langle z-p,y-x\big\rangle}{|z|+|p|+1} \leq \frac{r}{4}.$$

D'où
$$\langle z-p, y-x\rangle \leq \frac{r}{4}\big(|z|+|p|+1\big). \tag{3.19}$$
On considère $y = x + \dfrac{r}{2}\dfrac{z}{|z|}$, d'après (3.19) on trouve
$$\begin{aligned}
\frac{r}{4}\big(|z|+|p|+1\big) &\geq \Big\langle z-p, \frac{r}{2}\frac{z}{|z|}\Big\rangle \\
&\geq \frac{r}{2|z|}\langle z-p, z\rangle \\
&\geq \frac{r}{2|z|}\big(\langle z,z\rangle - \langle p,z\rangle\big) \\
&\geq \frac{r}{2|z|}\big(|z|^2 - \langle p,z\rangle\big) \\
&\geq \frac{r}{2}|z| - \frac{r}{2|z|}\langle p,z\rangle.
\end{aligned}$$
D'où
$$\frac{r}{4}\big(|z|+|p|+1\big) \geq \frac{r}{2}|z| - \frac{r}{2|z|}\langle p,z\rangle, \tag{3.20}$$
comme $p \in A^t y$ et $y \in B(\bar{x}, r)$ on a $|p| \leq M$, alors (3.20) est équivalente à
$$\begin{aligned}
\frac{r}{2}|z| &\leq \frac{r}{2|z|}\langle p,z\rangle + \frac{r}{4}\big(|z|+|p|+1\big) \\
&\leq \frac{r}{2|z|}|p||z| + \frac{r}{4}\big(|z|+|p|+1\big) \\
&\leq \frac{r}{2}|p| + \frac{r}{4}\big(|z|+|p|+1\big) \\
&\leq \frac{r}{2}M + \frac{r}{4}\big(|z|+M+1\big),
\end{aligned}$$
alors
$$|z| \leq M + \frac{1}{2}\big(|z|+M+1\big),$$
par suite
$$\frac{1}{2}|z| \leq \frac{3}{2}M + \frac{1}{2},$$
donc
$$|z| \leq 3M+1.$$
Alors A_1 est $(3M+1)$-borné sur $B(\bar{x}, \frac{r}{2})$.
D'autre part d'après la continuité de l'application $t \longrightarrow A^t$ au point $\tau \in [0,T]$, on a
$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall t \in [0,T],\ |\tau - t| \leq \varepsilon \Rightarrow d_V(A^\tau, A^t) \leq \varepsilon',$$
en particulier pour $\varepsilon' = \dfrac{r}{4}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in]\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon[$, alors $d_V(A^\tau, A^t) \leq \dfrac{r}{4}$. Soient $\tau \in [0,T]$ fixé, $\bar{x}_\tau \in intD(A^\tau)$, d'après la première partie de la preuve, il existe $r_\tau,\ M_\tau > 0$, tel que A^τ est M_τ-borné sur $B(\bar{x}_\tau, r_\tau)$.

On a $[0,T] \subset \bigcup\limits_{\tau\in[0,T]}]\tau-\varepsilon,\tau+\varepsilon[$, $\big($tel que $\big(]\tau-\varepsilon,\tau+\varepsilon[\big)_\tau$ est un recouvrement ouvert de $[0,T]\big)$, et puisque $[0,T]$ est compact, $\exists\,\{\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_k\}\subset[0,T]$ tel que $\big(]\tau_i-\varepsilon,\tau_i+\varepsilon[\big)_i$ $(\, i = 0,\cdots,k)$ est un sous recouvrement fini de $[0,T]$ avec $0=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_k=T$ c'est a dire $[0,T]\subset\bigcup\limits_{i=0}^{k}]\tau_i-\varepsilon,\tau_i+\varepsilon[$.

Si on prend $M' = \max\limits_{0\le i\le k} M_{\tau_i}$ et $S^t = B(\bar{x}_{\tau_i},\frac{r_{\tau_i}}{2}),\ \tau_i\le t\le\tau_{i+1},\ i=0,\cdots,k-1$. Alors $B(\bar{x}_{\tau_i},\frac{r_{\tau_i}}{2})\subset D(A^t)$, donc $S^t\subset D(A^t)$.

Soient $z\in A^t x,\ \exists i\in\{0,\cdots,k\}$ tel que $x\in B(\bar{x}_{\tau_i},\frac{r_{\tau_i}}{2}) = S^t$, pour tout $t\in[\tau_i,\tau_{i+1}[$.

En utilisant la même démonstration que la 1^{er} partie on obtient

$$|z|\le 3M_{\tau_i}+1\le 3M'+1 = M,\ \forall i = 0\cdots k.$$

i.e. ; pour tous $t\in[0,T]$, $x\in S^t$ et $z\in A^t x$ on a $|z|\le M$.

Donc A^t est M-borné sur S^t. ■

Lemme 3.3.2. *Soit $A^t : H\to 2^H$ un opérateur dépendant du temps et M-borné sur le tube solide S^t. Alors pour tout tube solide $\widetilde{S}^t$ tel que $\widetilde{S}^t\subset intS^t$ pour tous $t\in[0,T]$ et tout $\widetilde{M}>M$, il existe $d_0>0$ tel que tout opérateur maximal monotone A_1^t qui satisfait l'inégalité*

$$d_V(A^t,A_1^t)\le d_0,\ 0\le t\le T$$

est $\widetilde{M}$-borné sur $\widetilde{S}^t$.

Démonstration. Soit $A : H\to 2^H$ un opérateur maximal monotone M-borné sur $B(x,r) = S^t$ pour tout $t\in[0,T]$ et soit $\widetilde{M}>M$, $\widetilde{r}<r$.

D'après la démonstration du lemme 3.3.1, soit $A_1 : H\to 2^H$ opérateur maximal monotone et posons $d_V(A,A_1) = d$ on a $B(x,\tilde{r})\subset D(A_1)$.

Soit $x'\in B(x,\tilde{r})$ et $z\in A_1x'$ alors pour tous $y\in B(x,r)$ et $p\in Ay$

$$\langle z-p, y-x'\rangle\le d\big(|z|+|p|+1\big),$$

on prend $y-x' = \tilde{r}\frac{z}{|z|}$, alors

$$\langle z-p,\tilde{r}\frac{z}{|z|}\rangle\le d\big(|z|+M+1\big),$$

donc

$$\frac{\tilde{r}}{|z|}\langle z,z\rangle-\frac{\tilde{r}}{|z|}\langle p,z\rangle\le d\big(|z|+M+1\big),$$

par suite

$$\begin{aligned}\tilde{r}|z| &\leq \frac{\tilde{r}}{z}\langle p, z\rangle + d|z| + dM + d\\ &\leq \tilde{r}M + d|z| + dM + d\\ &\leq (\tilde{r}+d)M + d|z| + d.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}|z| &\leq \frac{\tilde{r}+d}{\tilde{r}-d}M + \frac{d}{\tilde{r}-d}\\ &= \frac{1}{\tilde{r}-d}\big[(\tilde{r}+d)M + d\big]\\ &\leq \widetilde{M}.\end{aligned}$$

Alors pour tout $\widetilde{M} > M$ et $\tilde{r} < r$, il existe $d_0 \geq d$ tel que $d_0 = \frac{(\widetilde{M}-M)\tilde{r}}{M+\widetilde{M}+1}$ et pour tout $z \in A_1 x'$ on a $|z| \leq \widetilde{M}$ i.e. ; A_1 est $\widetilde{M}$-borné sur $B(x, \tilde{r})$.
On conclut pour $x' \in B(x, \tilde{r})$, $\widetilde{S}^t = B(x, \tilde{r}) \subset intS^t = B(x, r)$ et si A est M-borné sur S^t alors il existe d_0 tel que A_1 est $\widetilde{M}$-borné sur $\widetilde{S}^t$.
On généralisé de la même manière que dans la démonstration du lemme 3.3.1 pour le cas où S^t n'est pas constant, donc A_1^t est $\widetilde{M}$-borné sur $\widetilde{S}^t$. ■

Lemme 3.3.3. *Pour tout opérateur régulier A^t il existe $d_0 > 0$ et $V > 0$ tel que si A_1^t est un opérateur maximal monotone constant par morceaux, $d(A^t, A_1^t) \leq d_0$, $0 \leq t \leq T$, soit $x(\cdot)$ est la solution de l'inclusion*

$$\dot{x}(t) + A_1^t x(t) \ni 0,\ \ x(0) = x_0 \in \overline{D(A_1^0)},$$

alors

$$var\big(x, [0, T]\big) \leq V.$$

Démonstration. Comme A^t est régulier, alors d'après le lemme 3.3.1 il existe $M > 0$ et un tube solide S^t, $0 \leq t \leq T$ tel que A^t est M-borné.
On prend $\widetilde{S}^t$ un autre tube solide tel que $\widetilde{S}^t \subset intS^t$, $0 \leq t \leq T$ et $\widetilde{M} > M$, alors d'après le lemme 3.3.2 il existe $d_0 > 0$ tel que tout opérateur maximal monotone A_1^t constant par morceaux qui satisfait l'inégalité $d(A^t, A_1^t) \leq d_0$ est $\widetilde{M}$-borné sur $\widetilde{S}^t$ donc d'après le lemme 3.2.2, pour tout $\widetilde{M} > 0$, il existe $V = V(\widetilde{S}^t,\ \widetilde{M}, T, R)$ tel que

$$var\big(x, [0, T]\big) \leq V.$$

■

Théorème 3.3.1. *Pour tout opérateur régulier A^t $(0 \leq t \leq T)$, il existe une solution unique de l'inclusion (3.1) telle que sa variation sur $[0, T]$ est bornée.*

Démonstration.

Étape 1 : Existence

Soit A^t un opérateur régulier $(0 \leq t \leq T)$, d'après le lemme 2.3.1 il existe une suite $(A_i^t)_i$ d'opérateurs maximaux monotones constants par morceaux qui converge uniformément sur $[0, T]$ vers A^t, c'est a dire ; pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe i_1, pour tout $i > i_1$, on a

$$d_V(A_i^t, A^t) \leq \varepsilon_1 \tag{3.21}$$

On prend $x_i^0 \in \overline{D(A_i^0)}$ $(i = 1, 2, \cdots)$, d'après le lemme 2.2.2 on a

$$d_H\big(D(A_i^t), D(A^t)\big) \leq d_V(A_i^t, A^t), \ \forall t \in [0, T]$$

alors, d'après (3.21) on a pour tout $t \in [0, T]$, $\forall i > i_1$

$$\begin{aligned} d_H\big(D(A_i^t), D(A^t)\big) &\leq d_V(A_i^t, A^t) \\ &\leq \sup_{t \in [0,T]} d_V(A_i^t, A^t) \\ &\leq \varepsilon_1, \end{aligned}$$

en particulier pour $t = 0$, $\forall i > i_1$

$$d_H\big(D(A_i^0), D(A^0)\big) \leq d_V(A_i^0, A^0) \leq \varepsilon_1.$$

D'où

$$d_H\big(D(A_i^0), D(A^0)\big) \leq \varepsilon_1 \tag{3.22}$$

d'autre part, pour tout $i > i_1$

$$\begin{aligned} |x_i^0 - x_0| &= |x_i^0 - x + x - x_0|, \ \forall x \in D(A^0) \\ &\leq |x_i^0 - x| + |x - x_0|, \ \forall x \in D(A^0) \\ &\leq \inf_{x \in D(A^0)} |x_i^0 - x| + \inf_{x \in D(A^0)} |x - x_0| \\ &\leq 0 + d\big(x_i^0, D(A^0)\big), \ \forall x_i^0 \in D(A_i^0) \\ &\leq e\big(D(A_i^0), D(A^0)\big) \\ &\leq d_H\big(D(A_i^0), D(A^0)\big) \\ &\leq \varepsilon_1. \end{aligned}$$

D'où pour tout $i > i_1$

$$|x_i^0 - x_0| \leq \varepsilon_1 \; alors \; \lim_{i\to\infty} |x_i^0 - x_0| = 0.$$

Soit $x_i(\cdot)$ la solution de l'inclusion

$$\dot{x}_i(t) + A_i^t x_i(t) \ni 0, \; x_i(0) = x_i^0, \; i = 1, 2, \cdots$$

D'après le Lemme 3.2.1, toute solution $x_i(\cdot)$ a une variation bornée sur $[0, T]$ et d'après le lemme 3.3.3, toutes les $V_i = var(x_i, [0, T])$ sont bornées par une unique constante V. D'après (3.21) et en vertu du lemme 2.2.5, pour tout $\varepsilon_1 > 0$ il existe un indice i_1 tel que pour tout $i, \; j \geq i_1$, $d_V(A_i^t, A^t) \leq \varepsilon_1$ et $d_V(A_j^t, A^t) \leq \varepsilon_1$ alors

$$\begin{aligned} d_V(A_i^t, A_j^t) &\leq \varepsilon_1 + \gamma(\varepsilon_1 + R + 1)(\sqrt{\varepsilon_1} + \varepsilon_1) \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

donc

$$d_V(A_i^t, A_j^t) \leq \varepsilon, \; 0 \leq t \leq T\cdot$$

Maintenant les conditions du lemme 3.1.2 sont vérifies, alors pour tout $t \in [0, T]$ et tous $i, \; j$ suffisamment grands, on a l'inégalité

$$|x_i(t) - x_j(t)|^2 \leq |x_i^0 - x_j^0|^2 + 2\varepsilon(2V + t). \tag{3.23}$$

Ainsi, d'après (3.23) $(x_i(t))_i$ est une suite de Cauchy dans H qui est complet alors $(x_i(t))_i$ converge vers $x(t)$ sur $[0, T]$ tel que $x(t) \in \overline{D(A^t)} \; et \; x_i(t) \in \overline{D(A_i^t)}, \; \forall t \in [0, T]$.
De plus, pour tout $i > i_1$ on a

$$\begin{aligned} |x_i(t) - x(t)| &\leq d_H(\overline{D(A_i^t)}, \overline{D(A^t)}), \; \forall t \in [0, T] \\ &\leq d_V(A_i^t, A^t), \; \forall t \in [0, T] \\ &\leq \varepsilon_1, \end{aligned}$$

alors

$$\lim_{i\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} |x_i(t) - x(t)| \leq \varepsilon_1.$$

D'où la suite de fonction $(x_i(\cdot))_i$ converge uniformément sur $[0, T]$ pour $i \to \infty$ vers $x(\cdot)$, telle que $x(0) = x_0 = \lim_{i\to\infty} x_i^0$. La variation de la fonction $x(\cdot)$ sur $[0, T]$ est bornée supérieurement par la quantité V. $x(\cdot)$ est continue sur $[0, T]$ puisque $x_i(\cdot)$ sont continues et convergent uniformément vers $x(\cdot)$ sur $[0, T]$.

Étape 2 : Unicité

Soit $(B_i^t)_i$ une autre suite d'opérateurs maximaux monotones constants par morceaux convergent uniformément vers A^t sur $[0,T]$ pour $i \to \infty$, i.e. ; pour tout $\varepsilon_2 > 0$ il existe i_2 tel que pour tout $i > i_2$, on a

$$d_V(B_i^t, A^t) \leq \varepsilon_2, \ \forall t \in [0,T].$$

À cette suite $(B_i^t)_i$ et à la suite correspondante des valeurs initiales $(x_i)_i$ avec $x_i^0 \in \overline{D(B_i^0)}$, correspond une solution $x'(\cdot)$ de l'inclusion (3.1).
De la même manière, en répétant les arguments donnés ci-dessus et comme

$$d_V(A_i^t, A^t) \leq \varepsilon_1 \ et \ d_V(B_i^t, A^t) \leq \varepsilon_2,$$

on applique le lemme 2.2.5 alors il existe $\varepsilon' = \varepsilon_1 + \gamma(\varepsilon_1 + R + 1)(\sqrt{\varepsilon_2} + \varepsilon_2)$ tel que

$$d_V(A_i^t, B_i^t) \leq \varepsilon'.$$

en utilisant le Lemme 3.1.2, on obtient une estimation semblable à l'estimation (3.23)

$$|x_i^{'}(t) - x_i(t)|^2 \leq |x_i^{'0} - x_i^0|^2 + 2\varepsilon'(2V + t), \ \forall t \in [0,T],$$

pour un i suffisamment grand on a

$$\sup_{t\in[0,T]} |x_i^{'}(t) - x_i(t)|^2 \leq |x_i^{'0} - x_i^0|^2 + 2\varepsilon'(2V + T),$$

alors

$$\lim_{i\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} |x_i^{'}(t) - x_i(t)|^2 \leq \lim_{i\to\infty} \big(|x_i^{'0} - x_i^0|^2 + 2\varepsilon'(2V + T)\big),$$

donc

$$\lim_{i\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} |x_i^{'}(t) - x_i(t)|^2 = 0,$$

par suite

$$\lim_{i\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} |x_i^{'}(t) - x_i(t)| = 0,$$

alors

$$\lim_{i\to\infty} |x_i^{'}(\cdot) - x_i(\cdot)|_C = 0.$$

D'où

$$|x_i^{'}(\cdot) - x_i(\cdot)|_C = 0,$$

par conséquent

$$x(\cdot) = x'(\cdot).$$

D'où l'unicité de la solution. ■

Théorème 3.3.2. *La solution de l'inclusion (3.1) dépend des paramètres continument au sens suivant. Si A^t est un opérateur régulier, $x_0 \in D(A^0)$ et $(A_i^t)_i$ est une suite d'opérateurs réguliers converge uniformément sur $[0,T]$ vers A^t pour $i \to \infty$, $x_0^i \in \overline{D(A_i^0)}$, avec $\lim\limits_{i\to\infty} |x_0^i - x_0| = 0$ et $x_i(\cdot)$ est la solution de l'inclusion*

$$\dot{x}_i(t) + A_i^t x_i(t) \ni 0,\ \ x_i(0) = x_i^0,\ \ i = 0, 2, \cdots \tag{3.24}$$

Alors la suite $(x_i(\cdot))_i$ converge uniformément sur $[0,T]$ vers la solution $x(t)$ de l'inclusion (3.1) quand $i \to \infty$.

Démonstration. On a $x_i(\cdot)$ est la solution de l'inclusion (3.24). Soit $0 \leq t \leq s \leq T$ alors D'après le lemme 3.1.2 pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a

$$|x_i(t) - x(t)|^2 \leq |x_i^0 - x_0|^2 + \big[\sup_{0\leq t\leq s} d_V(A_i^s, A^s)\big(var(x_i, [0,t]) + var(x, [0,t]) + t\big)\big]$$

donc

$$|x_i(t) - x(t)|^2 \leq |x_i^0 - x_0|^2 + \max_{0\leq s\leq T} d_V(A_i^s, A^s)(var(x_i, [0,T]) + var(x, [0,T]) + T),$$

et d'après le lemme 3.3.3 on a $var(x_i, [0,T]) \leq V < \infty$, alors d'après le théorème 1.6.6 on obtient $var(x, [0,T] \leq V < \infty)$ et

$$\max_{0\leq s\leq T} d_V(A_i^s, A^s) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par la définition 3.1.1 on a $\lim\limits_{i\to\infty} |x_i^0 - x_0| = 0$, c'est à dire ; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $i > i_0$, tel que $|x_i^0 - x_0| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$,
par passage à la limite on a

$$\lim_{i\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} |x_i(t) - x(t)|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

D'où, $x_i(\cdot)$ convergent uniformément vers $x(\cdot)$. ■

Conclusion

Notre but dans ce mémoire, dans une première partie était d'étudier les opérateurs monotones, en particulier le concept le plus important dans cette théorie, les opérateurs maximaux monotones. Ici nous avons énoncé la définition de la distance de Vladimirov et des résultats importants sur ses propriétés dans un espace de Hilbert.

Dans la deuxième partie nous avons donné les propriétés des solutions et des résultats sur l'existence et l'unicité de celles-ci pour une inclusion différentielle gouvernée par un opérateur maximal monotone non stationnaire dans un espace de Hilbert.

Bibliographie

[1] **J.P. Aubin and A. Cellina**, *Differential inclusions set-valued maps and viability theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New york Tokyo (1984).

[2] **V. Barbu**, *Nonlinear differential equations of monotone types in Banach spaces*, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, (2010).

[3] **H. H. Bauschke and Patrick L. Combette auth**, *Convexe Analysis and Monotone Operateur Theory in Hilbert Spaces*, Springer-Science, Business Media, LLC (2011).

[4] **G. Beer**, *Topologies on closed and closed convex sets.* Kluwer Academic Publishers, (1993).

[5] **H. Brézis**, *Opérateurs maximaux monotones*, North-Holland, Amesterdam, London, (1973).

[6] **H. Brézis**, *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Masson, (1993).

[7] **X. Gourdon**, *Analyse*, Ellipses, (1994).

[8] **D. P. Manuel Monteiro Marques**, *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems*, Berlin, (1993).

[9] **W. Rudin**, *Principles of mathematical analysis*,Third edition, Mc Gaw-Hill, (1976).

[10] **Y. Sonntag**, *Topologie Et Analyse Fonctionnelle.* ellipses, (1997).

[11] **J. V. Tiel**, *convex analysis an introductory text*, Winey, (1984).

[12] **A. A. Vladimirov**, *Differential Inclusions With Nonstationary Maximal Monotone Operators*, Institute for Control Problems. Translated from Funktsional l'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, Vol. 24, pp. 14-24, October-December, 1990.