République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....
№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.
Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Problème de Cauchy dans un espace de Banach

Présenté par :

- Fennour Fatima. **- Boumimez Somia.**

Devant le jury :

Président	: **Saïdi Soumia**	**M.C.A.**	Université de Jijel
Encadreur	: **Azzam-Laouir Dalila**	**Prof.**	Université de Jijel
Examinateur	: **Izza Sabrina**	**M.C.B.**	Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Avant tout, nous remercions le bon Dieu le tout puissant qui nous a aidé à terminer ce modeste travail.

Nos sincères remerciements et reconnaissances vont à notre encadreur madame **Azzam-Laouir Dalila** pour son aide, ainsi que pour la confiance qu'elle nous a prodiguée durant la réalisation de ce travail. Elle a su motiver chaque étape de notre travail par des remarques pertinentes et a su nous faire progresser dans nos recherches.

Remerciements s'adressent aux membres de jury Professeurs **Saïdi Soumia**, **Izza Sabrina** qui nous ont honoré en acceptant d'évaluer ce travail.

Nous pouvons terminer ces lignes sans remercier nos amis et nos parents qui n'ont jamais cessé de nous encourager. Nos parents, à qui nous ne trouverons pas les mots pour leur dire exactement tout ce que nous leur devons. A chaque pas et à chaque détour du chemin ils étaient là, avec sollicitude, affection, et confiance en nous. Merci aussi à nos sœurs et nos frères de nous avoir mené si loin.

Enfin nous n'oublierons pas tous ceux qui nous ont encouragé, de près ou de loin à terminer ce travail, à tous ceux-ci.

Merci . . Merci .. Merci . . Merci

Somia & Fatima.

Dédicace

À

Mon père Housin.

Ma mère Saida.

Mon fiancé Hichem.

Mes frères et mes soeurs.

Mes petites princesses Rimas, Mayar.

Mes grandes familles Boumimez et Mehimeh.

Mes amies, en particulier ...Fatima, Insaf, Meriem.

Tous mes collègues de la promotion "2018-2019".

Tous ceux qui sont proches à mon cœur.

B.Somia.

Dédicace

À

Mon père Chaker.

Ma mère Fatiha.

Mes frères et mes soeurs.

Mon grand frère Ilyas, et ma petite soeur ma princesse Keltoum.

Iyad, Amine.

Ma grande famille Fennour.

Mes amies, en particulier ...Somia, Sara.

Tous mes collègues de la promotion "2018-2019".

Tous ceux qui sont proches à mon cœur.

F.Fatima.

Table des matières

Introduction

Au cours des dernières décennies, les méthodes fonctionnelles ont joué un rôle crucial dans la théorie qualitative des équations aux dérivées partielles.

Une étape importante a été l'élargissement, au début des années 70, de la dynamique non linéaire du type accrétif (dissipatif) de la théorie de Hille – Yosida sur les semi-groupes d'opérateurs linéaires continus. La principale réalisation est que le problème de Cauchy associé à des opérateurs maximaux accrétifs non linéaires dans les espaces de Banach est bien posé et la dynamique correspondante est exprimée par la formule exponentielle. Ce résultat fondamental est la pierre angulaire de toute la théorie de l'existence d'une dynamique infinie non linéaire de type dissipatif, et sa contribution au développement de la théorie moderne des équations aux dérivées partielles non linéaires ne peut être sous-estimée. [3]

Le but de ce mémoire était de faire nos premiers pas dans la recherche, ceci a commencé par la lecture du chapitre 3 de la référence [3], portant sur l'existence et l'unicité de solutions pour des inclusions différentielles gouvernées par des opérateurs ω-accrétifs dans un espace de Banach.

Nous avons essayé de bien comprendre les méthodes utilisées dans les preuves des théorèmes principaux que nous avons bien détaillées, en soulignant les outils et les notions de base que nous avons rassemblé dans un premier chapitre préliminaire, ceci a rendu la lecture des résultats plus simple et les étapes des preuves plus compréhensibles. Notre manuscrit est structuré en 3 chapitres.

Dans le premier chapitre, on rappelle les notions essentielles et les résultats de base concernant l'analyse multivoque et l'optimisation. On a décrit des définitions et des théorèmes nécessaires pour le développement de notre travail.

Le deuxième chapitre concerne la théorie générale d'opérateur accrétif respectivement (maximal-accrétif, ω- accrétif) et leurs caractéristiques dans un espace de Banach.

Dans le dernier chapitre, qui est en fait le chapitre principal de notre étude, nous avons considéré le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} f(t) \in \frac{d}{dt}y(t) + Ay(t) \qquad t \in [0,T] \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

où $A : E \rightrightarrows E$ est un opérateur ω-accrétif, $y_0 \in E$ et $f \in L^1([0,T],E)$.
Et nous avons exposé des théorèmes d'existence et d'unicité de solutions faibles et fortes dans l'espace de Banach E.

Chapitre 1

Notations et préliminaires

1.1 Notations générales

Dans tout le manuscrit nous avons utilisé les notations suivantes

- X un espace vectoriel topologique
- $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, E^* son dual topologique muni de la norme $\|.\|_*$, i.e., E^* est l'espace vectoriel normé des formes linéaires continues sur E
- I l'identité de E
- $\langle ., . \rangle$ le produit de dualité entre E et E^*
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels
- $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs
- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels
- $\overline{\mathbb{R}} = \big[-\infty, +\infty\big]$
- $|.|$ la valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$
- $\overline{A}$ l'adhérence de $A \subset X$
- $conv(A)$ l'enveloppe convexe de l'ensemble $A \subset X$
- $\overline{conv(A)}$ l'enveloppe convexe fermée de $A \subset X$
- *p.p.* presque partout
- $\sigma\big(E, E^*\big)$ $\big($resp. $\sigma\big(E^*, E\big)\big)$ la topologie faible sur E $\big($resp. la topologie faible* sur $E^*\big)$
- $\rightharpoonup$ désigne la convergence faible
- $\rightharpoonup^*$ désigne la convergence faible*
- $\longrightarrow$ désigne la convergence forte
- $V(x_0)$ est l'ensemble des voisinages du point $x_0 \in E$

- $\liminf$ $\big($resp. $\limsup\big)$ désigne la limite inférieure $\big($resp. supérieure$\big)$
- $t \downarrow 0$ veut dire t tend vers 0 et $t > 0$
- $t \uparrow 0$ veut dire t tend vers 0 et $t < 0$
- d^+ la dérivé à droite, i.e., si $y : [0, T] \to E$ est une fonction dérivable à droite, on a
$$\frac{d^+}{dt}y(t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{y(t+\varepsilon) - y(t)}{\varepsilon}.$$
- d^- la dérivé à gauche, i.e., si $y : [0, T] \to E$ est une fonction dérivable à gauche, on a
$$\frac{d^-}{dt}y(t) = \lim_{\varepsilon\uparrow 0} \frac{y(t) - y(t-\varepsilon)}{\varepsilon}.$$
- $B_E(0, 1)$, $\overline{B}_E(0, 1)$ la boule unité ouverte, fermée de E
- δ_A la fonction indicatrice d'un ensemble A, définie par
$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$
- Soit$\big(\Omega, \Sigma, \mu\big)$ un espace mesuré et soit $p \in \big[1, +\infty\big[$. On note par $L^p\big(\Omega, \Sigma, \mu\big)$ l'espace quotient de Banach des fonctions $p^{ième}$ intégrables définies sur Ω à valeurs dans E muni de sa norme
$$\big\|u\big\|_p = \left(\int_\Omega \big\|u(t)\big\|^p d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}},$$
pour tout $u \in L^p(\Omega, E, \mu)$, et par $L^\infty(\Omega, E, \mu)$ l'espace des fonctions essentiellement bornées définies sur Ω à valeurs dans E muni de sa norme
$$\|u\|_\infty = \inf\big\{c \geq 0, \quad \|u(t)\| \leq c \ p.p\big\}.$$
Par $C([0, T]; E)$ on note l'espace des applications continues définies sur $[0, T]$ à valeurs dans E muni de sa norme
$$\big\|u\big\|_C = \sup_{t\in[0,T]} \big\|u(t)\big\|.$$
- Soit $[0, T]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$, $W^{1,1}([0, T]; E)$ est l'espace de Sobolev défini par
$$W^{1,1}([0, T]; E) = \big\{y \in C([0, T]; E),\ y' \in L^1([0, T]; E)\big\}.$$

1.2 Notions sur les Multi-applications

Nous donnons dans cette section quelques définitions concernant les multi-applications, aussi appelées correspondances, applications multivoques ou multifonctions. (Voir [1], [7])

Définition 1.1. *Soient X, Y deux ensembles non vides, on appelle multi-application toute applications F définie sur X à valeurs dans $P(Y)$, tel que $P(Y)$ est la famille de tous les ensembles de Y, c'est à dire $F : X \longrightarrow P(Y)$ ou bien $F : X \longrightarrow 2^Y$ ou bien $F : X \rightrightarrows Y$. Donc pour tout $x \in X$, $F(x)$ est un sous ensemble de Y. Si l'ensemble $F(x)$ contient au plus un élément $y \in Y$ on dira que F est un opérateur univoque.*

Définition 1.2. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On définit*

1. *Le domaine de F, qu'on note $D(F)$, l'ensemble*
$$D(F) = \big\{x \in X;\ F(x) \neq \emptyset\big\}.$$
2. *Le graphe de F, qu'on note $Gph(F)$, le sous ensemble de $X \times Y$ défini par*
$$Gph(F) = \big\{(x, y) \in D(F) \times Y;\ y \in F(x)\big\}.$$
3. *Le rang de F, qu'on note $R(F)$, l'ensemble*
$$R(F) = \big\{y \in Y;\ \exists x \in D(F),\ y \in F(x)\big\}.$$
4. *La multi-application inverse $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ est définie par*
$$F^{-1}(y) = \big\{x \in X;\ y \in F(x)\big\},\ \forall y \in Y.$$
Et nous avons
$$\begin{aligned} D(F^{-1}) &= \big\{y \in Y;\ F^{-1}(y) \neq \emptyset\big\} \\ &= \big\{y \in Y;\ \exists x \in D(F),\ x \in F^{-1}(y)\big\} \\ &= \big\{y \in Y;\ \exists x \in D(F),\ y \in F(x)\big\} \\ &= R(F). \end{aligned}$$
5. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λF est la multi-application*
$$x \in X \mapsto (\lambda F)(x) = \big\{\lambda y, \quad y \in F(x)\big\},$$
avec
$$D(\lambda F) = D(F).$$
6. *Soit $G : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors la multi-application $F + G$ est définie par*
$$x \in X \longmapsto (F + G)(x) = \big\{y_1 + y_2, \quad y_1 \in F(x) \text{ et } y_2 \in G(x)\big\},$$
avec
$$D(F + G) = D(F) \cap D(G).$$

1.3 Topologie faible et topologie faible*

On introduit dans cette section quelques résultats fondamentaux sur les topologies faible et faible*. On s'est servit de [1] et [7] comme référence.

Définition 1.3. *Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et E^* sont dual topologique muni de la norme*

$$\|f\|_* = \sup_{\|x\|\leq 1} \left|\langle f, x\rangle\right|$$

on note $\langle f, x\rangle$ au lieu de $f(x)$.
Soit $f \in E^*$ et soit

$$\begin{aligned} \varphi_f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_f(x) = \langle f, x\rangle. \end{aligned}$$

Lorsque f parcourt E^*, on obtient une famille de fonctions $(\varphi_f)_{f\in E^*}$. On appelle la topologie faible sur E, la topologie la moins fine sur E rendant continues les applications $(\varphi_f)_{f\in E^*}$ et on la note $\sigma(E, E^*)$.

Proposition 1.4. *Soit $(x_n)_n$ un suite de points de E, et $x \in E$ et soit $(f_n)_n \subset E^*$. Alors*

1. $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$ *pour tout* $f \in E^*$.
2. *Si* $x_n \longrightarrow x$ *alors* $x_n \rightharpoonup x$.
3. *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *alors* $(\|x_n\|)_n$ *est bornée et* $\|x\| \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \|x_n\|$.
4. *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *et* $f_n \longrightarrow f$ *alors* $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$ *dans* $\mathbb{R}$.

Définition 1.5. *Soit $x \in E$ fixé et*

$$\begin{aligned} \psi_x : E^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \psi_x(f) = \langle f, x\rangle. \end{aligned}$$

Lorsque x parcourt E, on obtient une famille de formes linéaires continues $(\psi_x)_{x\in E}$, la topologie la moins fine sur E^* rendant ces applications continues est appelée topologie faible et on la note $\sigma(E^*, E)$.*

Proposition 1.6. *Soit $(f_n)_n \subset E^*$. Alors*

1. $f_n \rightharpoonup^* f \Longleftrightarrow \langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle, \quad \forall x \in E$.
2. $f_n \longrightarrow f \Longrightarrow f_n \rightharpoonup^* f$.
3. $f_n \rightharpoonup f \Longrightarrow f_n \rightharpoonup^* f$.

4. *Si* $f_n \rightharpoonup f$ *alors* $\left(\|f_n\|_*\right)_n$ *est bornée et* $\|f\|_* \leq \liminf\limits_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n\|_*$.
5. *Si* $f_n \rightharpoonup^* f$ *et* $x_n \longrightarrow x$ *alors* $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$ *dans* $\mathbb{R}$.

Théorème 1.7. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace de Banach. Alors* $\overline{B}_{E^*}(0,1)$ *est faiblement* compacte, c'est à dire* $\overline{B}_{E^*}(0,1)$ *est* $\sigma(E^*, E)$*- compacte dans* E^**.*

1.4 Fonctions conjuguées

Pour plus de détails sur cette section et dans les trois sections qui suivent, on peut se référer à [2]

Définition 1.8. *Soit* $\left(E, \|.\|\right)$ *un espace vectoriel normé et soit* E^* *son dual topologique. Soit* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$*. On appelle fonction conjuguée de* f*, la fonction notée* f^**, définie par*

$$\begin{aligned} f^* : E^* &\to \overline{\mathbb{R}} \\ x^* &\mapsto f^*(x^*) = \sup_{x\in E}\left[\langle x^*, x\rangle - f(x)\right]. \end{aligned}$$

Exemple 1.9. *Soit*

$$\begin{aligned} f : E &\to \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto f(x) = \|x\|. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} f^*(x^*) &= \sup_{x\in E}\left[\langle x^*, x\rangle - f(x)\right] \\ &= \sup_{x\in E}\left[\langle x^*, x\rangle - \|x\|\right] \\ &= \sup_{x\in E/\{0\}} [\langle x^*, x\rangle - \|x\|] \\ &= \sup_{x\in E/\{0\}}\left[\|x\|\left(\frac{\langle x^*, x\rangle}{\|x\|} - 1\right)\right], \end{aligned}$$

on pose $t = \|x\|$, *on obtient*

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \sup_{t\in]0,+\infty[} t\Big[\sup_{x\in E/\{0\}} \frac{\langle x^*, x\rangle}{\|x\|} - 1\Big] \\ &= \sup_{t\in]0,+\infty[} t\Big[\|x^*\| - 1\Big] \\ &= \begin{cases} 0 & si\ \|x^*\| \leq 1 \\ +\infty & si\ \|x^*\| > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & si\ x^* \in \overline{B}(0,1) \\ +\infty & sinon \end{cases} \end{aligned}$$

i.e.,

$$f^*(x^*) = \delta_{\overline{B}(0,1)}(x^*).$$

1.5 Fonctions propres convexes

On considère X un espace vectoriel topologique et f une fonction définie sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.10. *On dit que* f *est propre ssi pour tout* $x \in X$, $f(x) \neq -\infty$ *et il existe* $x_0 \in X$ *tel que* $f(x_0) \neq +\infty$. *On appelle domaine effectif de* f, *l'ensemble*

$$dom(f) = \big\{x \in X; \quad f(x) < +\infty\big\}.$$

Alors $f : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ *est propre ssi* $dom(f) \neq \emptyset$.

Définition 1.11. *On dit qu'un ensemble* $A \subset X$ *est convexe ssi pour tous* $x, y \in A$ *et pour tout* $t \in [0, 1]$, *on a*

$$tx + (1-t)y \in A.$$

Définition 1.12. *On dit que* f *est convexe ssi pour tous* $x, y \in dom(f)$ *et pour tout* $t \in [0, 1]$, *on a*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Lemme 1.13. *1. Soit la fonction*

$$\begin{aligned} p :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto p(\lambda). \end{aligned}$$

Si p *est croissante alors* $\lim_{\lambda\downarrow 0} p(\lambda) = \inf_{\lambda>0} p(\lambda)$.

2. *Soient* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0, v \in X$ *et soit*

$$\begin{aligned} g :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto g(t) = \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}. \end{aligned}$$

Si f *est convexe alors* g *est croissante.*

Preuve.

1. Supposons que p est croissante et montrons que $\lim_{\lambda \downarrow 0} p(\lambda) = \inf_{\lambda > 0} p(\lambda)$.
   Nous avons

$$l = \inf_{\lambda > 0} p(\lambda) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \lambda_\varepsilon > 0 \ t.q \quad l \leq p(\lambda_\varepsilon) < l + \varepsilon.$$

   Alors pour tout $\lambda < \lambda_\varepsilon$, $p(\lambda) \leq p(\lambda_\varepsilon)$, et donc

$$p(\lambda) < l + \varepsilon,$$

   c'est dire,

$$l - \varepsilon < p(\lambda) < l + \varepsilon.$$

   D'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda_\varepsilon > 0, \forall \lambda > 0, \lambda < \lambda_\varepsilon \Longrightarrow |p(\lambda) - l| < \varepsilon,$$

   i.e.,

$$l = \lim_{\lambda \downarrow 0} p(\lambda).$$

   Par conséquent,

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} p(\lambda) = \inf_{\lambda > 0} p(\lambda).$$

2. Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0, v \in X$ et soit $g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(t) = \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}, \quad \forall t \in]0, +\infty[.$$

   Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in]0, +\infty[$ tel que $\lambda_1 < \lambda_2$, alors $0 < \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 1$. Nous avons, grâce à la convexité de f,

$$\begin{aligned} f(x_0+\lambda_1 v) &= f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}x_0+\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)x_0+\lambda_1 v\right) \\ &= f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(x_0+\lambda_2 v)+\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)x_0\right) \\ &\leq \frac{\lambda_1}{\lambda_2}f(x_0+\lambda_2 v)+\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)f(x_0) \\ &= \lambda_1\left(\frac{f(x_0+\lambda_2 v)-f(x_0)}{\lambda_2}\right)+f(x_0). \end{aligned}$$

D'où

$$f(x_0+\lambda_1 v)-f(x_0)\leq \lambda_1\frac{f(x_0+\lambda_2 v)-f(x_0)}{\lambda_2},$$

et donc

$$\frac{f(x_0+\lambda_1 v)-f(x_0)}{\lambda_1}\leq\frac{f(x_0+\lambda_2 v)-f(x_0)}{\lambda_2},$$

i.e., $g(\lambda_1)\leq g(\lambda_2)$, on conclut alors que g est croissante.

■

1.6 Sous différentiabilité

Définition 1.14. *Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé et soit $f:E\longrightarrow\mathbb{R}$, soient $x,v\in E$. On appelle dérivée directionnelle de f au point x dans la direction v, qu'on noté $f'(x;v)$ si elle existe, la quantité définie par*

$$f'(x;v)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}.$$

Si $f(x)=\|x\|$ on note $\langle x,v\rangle_+=f'(x;v)$, c'est à dire

$$\langle x,v\rangle_+=\lim_{t\downarrow 0}\frac{\|x+tv\|-\|x\|}{t}.$$

Définition 1.15. *Soit $\big(E,\|.\|\big)$ un espace vectoriel normé et E^* son dual topologique. Soit $f:E\to\overline{\mathbb{R}}$, et soit $x\in E$ tel que $f(x)\in\mathbb{R}$. Un point $x^*\in E^*$ est un sous gradient à f au point x ssi pour tout $y\in E$, $\quad f(y)\geq f(x)+\langle x^*,y-x\rangle$.*
L'ensemble de tous les points sous gradients à f au point x est appelé le sous différentiel de f au point x et est noté $\partial f(x)$, i.e.,

$$\partial f(x)=\left\{x^*\in E^*, f(y)\geq f(x)+\langle x^*,y-x\rangle,\quad\forall y\in E\right\}.$$

Proposition 1.16. *Soient $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé, f propre, et soit $x\in E$ tel que $f(x)<+\infty$. Alors les propriétés suivantes sont équivalents :*

1. $x^* \in \partial f(x)$.
2. $f^*(x^*) + f(x) \leq \langle x^*, x\rangle$.
3. $f^*(x^*) + f(x) = \langle x^*, x\rangle$.

Théorème 1.17. *Soit $f : E \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre convexe. Si f est finie et continue au point x alors*

$$f'(x; v) = \sup\big\{\langle x^*, v\rangle, \quad x^* \in \partial f(x)\big\}.$$

1.7 Les cônes

Définition 1.18. *Soit E un espace vectoriel et soit $A \subset E$, on dit que A est un cône ssi pour tout $x \in A$ et pour tout $\lambda \geq 0$, $\lambda x \in A$. Si de plus A est convexe on dit que A est un cône convexe.*

Proposition 1.19. *Soit $A \subset E$ alors :*
A est un cône convexe ssi A est un cône et pour tous $x, y \in A$, $x + y \in A$.

Preuve.
Supposons que A est un cône convexe.
Soient $x, y \in A$. Pour $t = \frac{1}{2}$, nous avons

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in A,$$

i.e.,

$$\frac{1}{2}(x + y) \in A,$$

et comme A est un cône

$$\lambda(\frac{1}{2}(x + y)) \in A, \qquad \forall\lambda \geq 0.$$

On choisit $\lambda = 2$, alors

$$2(\frac{1}{2}(x + y)) \in A \Longrightarrow x + y \in A.$$

D'où A est un cône et pour tous $x, y \in A$, $x + y \in A$.
Inversement, soient $x, y \in A$, $t \in [0, 1]$. Nous avons alors

$$x \in A \Longrightarrow tx \in A,$$

et

$$y \in A \Longrightarrow (1 - t)y \in A,$$

ceci donne

$$tx + (1-t)y \in A,$$

donc A est convexe. D'où A est un cône convexe. ■

1.8 Quelques résultats et définitions utiles

On va donner dans cette section quelques résultats et définitions utiles dans les démonstrations de nos résultats principaux.

Théorème 1.20 (Séparation de Hahn-Banach)**.** *(Voir [2])*
Soient $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, A sous ensemble convexe fermé non vide de E, et soit $y \notin A$. Alors il existe une forme linéaire continue $x^* \in E^*$ $(x^* \neq 0)$, et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\langle x^*, y\rangle \leq \alpha < \langle x^*, x\rangle, \qquad \forall x \in A.$$

Théorème 1.21 (Théorème de convergence monotone de Beppo-Levi)**.** *(Voir [6])*
Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions réelles mesurables et positives. Alors la fonction $x \mapsto f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ est une fonction mesurable et

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)d\mu(x).$$

Théorème 1.22. *(Voir[8])*
Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré de mesure finie et E un espace de Banach. Soit $f : \Omega \longrightarrow E$ une application Bochner-intégrable. Alors, $\forall A \in \Sigma$ tel que $\mu(A) \neq 0$, nous avons

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu \in \overline{conv\,(f(A))}.$$

Preuve.
Supposons qu'il existe $A \in \Sigma$ tel que $\mu(A) \neq 0$ et

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f(s)d\mu(s) \notin \overline{conv(f(A)}.$$

Par le Théorème de séparation de Hahn-Banach, il existe $x^* \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que

$$\begin{aligned} &\left\langle x^*, \frac{1}{\mu(A)} \int_A f(s)d\mu(s) \right\rangle \leq \alpha < \langle x^*, f(v)\rangle \qquad \forall v \in A \\ \Longrightarrow\ &\frac{1}{\mu(A)} \int_A \langle x^*, f(s)\rangle d\mu(s) \leq \alpha < \langle x^*, f(v)\rangle \qquad \forall v \in A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \int_A \left(\frac{1}{\mu(A)} \int_A \langle x^*, f(s)\rangle d\mu(s) \right) d\mu < \int_A \langle x^*, f(v)\rangle d\mu(v) \\
&\Longrightarrow \mu(A) \frac{1}{\mu(A)} \int_A \langle x^*, f(s)\rangle d\mu(s) < \int_A \langle x^*, f(v)\rangle d\mu(v) \\
&\Longrightarrow \int_A \langle x^*, f(s)\rangle d\mu(s) < \int_A \langle x^*, f(v)\rangle d\mu(v),
\end{aligned}$$

ce qui est absurde. D'où le résultat. ■

Théorème 1.23. *(Voir[9])*
Soit (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré et soit* $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$. *Alors*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \ \textit{tel que}\ \forall A \in \Sigma,\ \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \varepsilon.$$

Preuve.
Soit pour $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \Omega$, $f_n(x) = \inf(|f(x)|, n)$. Nous avons
$\forall x \in \Omega$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|f(x)| \leq n_0 \Longrightarrow \forall n \geq n_0$, $|f(x)| \leq n \Longrightarrow f_n(x) = |f(x)|$ $\Longrightarrow |f_n(x) - |f(x)|| = 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$. D'où
$\forall x \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - |f(x)|| < \varepsilon \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = |f(x)|$.
C'est à dire $(f_n)_n$ converge simplement vers $|f|$.
De plus,

$$\forall x \in \Omega,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leq |f(x)| \ \textit{et}\ f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu),$$

il aussi bien clair que $(f_n(x))_n$ et croissante, en effet, pour $x \in \Omega$

$$f_n(x) = \inf(|f(x)|, n) \leq \inf(|f(x)|, n+1) = f_{n+1}(x).$$

Par le Théorème de la convergence monotone (Théorème 1.21)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x) d\mu(x) = \int_\Omega |f(x)| d\mu(x) \\
&\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \Longrightarrow \left| \int_\Omega f_n(x) d\mu(x) - \int_\Omega |f(x)| d\mu(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

donc

$$\int_\Omega (|f(x)| - f_n(x))\, d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par tout $A \in \Sigma$

$$\begin{aligned}
\int_A |f(x)| d\mu(x) &= \int_A |f(x)| d\mu(x) - \int_A f_n(x) d\mu(x) + \int_A f_n(x) d\mu(x) \\
&\leq \left| \int_\Omega |f(x)| d\mu(x) - \int_\Omega f_n(x) d\mu(x) \right| + \int_A f_n(x) d\mu(x) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + n\mu(A).
\end{aligned}$$

Si $\mu(A) < \delta = \frac{\varepsilon}{2n}$, alors

$$\int_A |f(x)| d\mu(x) < \varepsilon.$$

$\blacksquare$

Définition 1.24. *Soit (E, d) un espace métrique complet et soit l'application $T : E \to E$. On dit que T est une application lipschitzienne, s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments x, y de E,*

$$d(T(x), T(y)) \leq k\ d(x, y).$$

Si $k \leq 1$, on dit que T est non expansive.
Si $k < 1$, on dit que T est contraction.

Théorème 1.25 (Théorème du point fixe de Banach)**.** *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et soit $T : E \to E$ une contraction. Alors T admet un unique point fixe $x \in E$, i.e.,$\exists! x \in E$, tel que $T(x) = x$.*

Chapitre 2

Les opérateurs accrétifs non linéaires dans les espaces de Banach

Dans ce chapitre, on considère un espace vectoriel normé E muni de sa norme $\|.\|$, et E^* son dual topologique et on suppose que $A : D(A) \subset E \rightrightarrows E$ est un opérateur multivoque, $D(A)$ son domaine de définition, i.e., $D(A) = \{x \in E; Ax \neq \emptyset\}$ et $R(A)$ son rang, i.e., $R(A) = \{y \in E; \exists x \in D(A),\ y \in Ax\}$. Les résultats de ce chapitre sont dans une large part pris de [3] et [4].

2.1 Notion d'opérateur accrétif

On va introduire dans cette section la notion d'un opérateur accrétif et donner ses caractérisations.

Définition 2.1. *On appelle la correspondance de dualité $J : E \rightrightarrows E^*$, la multi-application définie par*

$$J(x) = \left\{x^* \in E^*, \langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|_*^2\right\}.$$

Définition 2.2. *Soit $A : E \rightrightarrows E$. On dit que l'opérateur A est accrétif, si $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Gph(A)$, $\exists w^* \in J(x_1 - x_2)$ tel que*

$$\langle y_1 - y_2, w^*\rangle \geq 0.$$

Lemme 2.3. *Soient $x, y \in E$, alors il existe $w^* \in J(x)$ tel que $\langle y, w^*\rangle \geq 0$ ssi*

$$\|x\| \leq \|x + \lambda y\|, \quad \forall \lambda > 0.$$

Preuve.

Soient $x, y \in E$.

1. Supposons qu'il existe $w^* \in J(x)$ tel que $\langle y, w^*\rangle \geq 0$ et montrons que $\|x\| \leq \|x+\lambda y\|,\ \forall \lambda > 0$.

   Par définition de $J(x)$

$$\langle x, w^*\rangle = \|x\|^2 = \|w^*\|_*^2 \Longrightarrow \|x\| = \|w^*\|_*.$$

   D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\langle y, w^*\rangle \geq 0 &\Longrightarrow \lambda\langle y, w^*\rangle \geq 0,\ \forall \lambda > 0\\ &\Longrightarrow \langle \lambda y, w^*\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

   Alors

$$\begin{aligned}\|x\|^2 = \langle x, w^*\rangle &\leq \langle x, w^*\rangle + \langle \lambda y, w^*\rangle = \langle x+\lambda y, w^*\rangle\\ &\leq \|x+\lambda y\|\|w^*\|_* = \|x+\lambda y\|\|x\|,\end{aligned}$$

   par conséquent,

$$\|x\| \leq \|x+\lambda y\|.$$

2. Inversement, supposons que $\|x\| \leq \|x+\lambda y\|$, $\forall \lambda > 0$, et montrons qu'il existe $w^* \in J(x)$ tel que $\langle y, w^*\rangle \geq 0$.

   Soit pour tout $\lambda > 0$, $w_\lambda^* \in J(x+\lambda y)$. Sans perte de généralité, on peut prendre $x \neq 0$ et donc $w_\lambda^* \neq 0$. On défini $f_\lambda \in E^*$ par : $f_\lambda = \frac{w_\lambda^*}{\|w_\lambda^*\|_*}$, $\|f_\lambda\|_* = \|\frac{w_\lambda^*}{\|w_\lambda^*\|_*}\|_* = 1$, i.e., $f_\lambda \in \overline{B}_{E^*}(0,1)$. On sait que $\overline{B}_{E^*}(0,1)$ est $\sigma(E^*, E)$ compacte (Théorème 1.7), et donc on peut extraire de $(f_\lambda)_{\lambda>0}$ une sous suite notée aussi $(f_\lambda)_{\lambda>0}$ et qui converge faiblement* vers un élément $f \in \overline{B}_{E^*}(0,1)$. Alors

   $f_\lambda \rightharpoonup^* f \Longrightarrow \langle x, f_\lambda\rangle \longrightarrow \langle x, f\rangle$, comme $w_\lambda^* \in J(x+\lambda y)$, on peut écrire

$$\langle x+\lambda y, w_\lambda^*\rangle = \|x+\lambda y\|^2 = \|w_\lambda^*\|_*^2.$$

   D'où

$$\begin{aligned}\|x+\lambda y\| &= \frac{1}{\|w_\lambda^*\|_*}\langle x+\lambda y, w_\lambda^*\rangle\\ &= \langle x+\lambda y, \frac{w_\lambda^*}{\|w_\lambda^*\|_*}\rangle = \langle x+\lambda y, f_\lambda\rangle\\ &= \langle x, f_\lambda\rangle + \lambda\langle y, f_\lambda\rangle \qquad (*)\\ &\leq \|x\|\|f_\lambda\|_* + \lambda\langle y, f_\lambda\rangle = \|x\| + \lambda\langle y, f_\lambda\rangle, \qquad (**)\end{aligned}$$

ceci implique par $(*)$ (puisque $\|x\| \leq \|x+\lambda y\|$) que $\|x\| \leq \langle x, f_\lambda \rangle + \lambda \langle y, f_\lambda \rangle$. Alors

$$\|x\| \leq \lim_{\lambda \to 0} \left(\langle x, f_\lambda \rangle + \lambda \langle y, f_\lambda \rangle \right) = \langle x, f \rangle. \tag{2.1}$$

D'autre part, on a

$$\langle f, x \rangle \leq \|f\|_* \|x\| \leq \|x\|. \tag{2.2}$$

Par (2.1) et (2.2) on obtient $\|x\| = \langle x, f \rangle$, i.e.,

$$\|x\|^2 = \langle x, \|x\| f \rangle \geq 0.$$

Remarquons alors que puisque $\|x\| = \langle x, f \rangle \leq \|x\| \|f\|_*$ on aura $\|f\|_* \geq 1$ et comme $f \in \overline{B}_{E^*}(0,1)$, $\|f\|_* \leq 1$, on conclut que $\|f\|_* = 1$. Posons $w^* = \|x\| f$. Alors $\|w^*\|^2 = \|x\|^2 = \langle x, w^* \rangle$, c'est à dire $w^* \in J(x)$. On conclut alors, l'existence de $w^* = \|x\| f \in J(x)$ tel que

$$\langle y, w^* \rangle = \langle y, \|x\| f \rangle = \|x\| \langle y, f \rangle \geq 0,$$

car par $(**)$

$$\langle y, f_\lambda \rangle \geq \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda} \geq 0 \quad \forall \lambda > 0,$$

et donc

$$\langle y, f \rangle = \lim_{\lambda \to 0} \langle y, f_\lambda \rangle \geq 0.$$

■

Définition 2.4. *Un opérateur accrétif est dit m-accrétif si son graphe n'est pas contenu proprement dans le graphe d'un autre opérateur accrétif.*

Définition 2.5. *Soit $A : E \rightrightarrows E$. La résolvante de A est donnée par*

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Proposition 2.6. *La résolvante $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ d'un opérateur m-accrétif A est un opérateur univoque défini sur E tout entier.*

Preuve.

Supposons que J_λ n'est pas univoque. Soit $x \in E$ et soient $y_1, y_2 \in J_\lambda x$, on a

$$x \in y_1 + \lambda A y_1 \text{ et } x \in y_2 + \lambda A y_2$$

donc

$$\frac{1}{\lambda}(x - y_1) \in A y_1 \text{ et } \frac{1}{\lambda}(x - y_2) \in A y_2.$$

Par l'accrétivité de A, il existe $w^* \in J(y_1 - y_2)$ tel que

$$\left\langle \frac{1}{\lambda}(x - y_1) - \frac{1}{\lambda}(x - y_2), w^* \right\rangle \geq 0$$

donc

$$\begin{aligned} &\langle -y_1 + y_2, w^* \rangle \geq 0 \\ &\Longrightarrow -\langle y_1 - y_2, w^* \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

par la définition de J, on a

$$-\langle y_1 - y_2, w^* \rangle = -\|y_1 - y_2\|^2 \geq 0.$$

D'où $y_1 = y_2$. Par conséquent, $J_\lambda x$ est un singleton et par suite J_λ est un opérateur univoque. Son domaine de définition

$$D(J_\lambda) = \{x \in E,\ J_\lambda x \neq \emptyset\} = E.$$

■

Proposition 2.7. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *A est m-accrétif.*
2. *A est accrétif et $R(I + \lambda A) = E$.*
3. *pour tout $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction définie sur E.*

Preuve.

3) $\Longrightarrow$ 2)

Supposons que $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction pour tout $\lambda > 0$, et montrons que A est accrétif et que $R(I + \lambda A) = E$.

Pour tous $x_1, x_2 \in D(A)$, pour tous $y_1 \in (I + \lambda A)x_1$, $y_2 \in (I + \lambda A)x_2$, on a

$$\|(I + \lambda A)^{-1}y_1 - (I + \lambda A)^{-1}y_2\| \leq \|y_1 - y_2\|.$$

Soient $z_1 \in Ax_1$, $z_2 \in Ax_2$, on a

$$x_1 + \lambda z_1 \in (I + \lambda A)x_1 \quad \text{et} \quad x_2 + \lambda z_2 \in (I + \lambda A)x_2.$$

Utilisant le fait que $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction, on trouve

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\| &= \|(I + \lambda A)^{-1}(x_1 + \lambda z_1) - (I + \lambda A)^{-1}(x_2 + \lambda z_2)\| \\ &\leq \|(x_1 + \lambda z_1) - (x_2 + \lambda z_2)\| \end{aligned}$$

donc
$$\|x_1 - x_2\| \leq \|(x_1 - x_2) + \lambda(z_1 - z_2)\|,$$
par le Lemme 2.3, il existe $w^* \in J(x_1 - x_2)$ tel que
$$\langle z_1 - z_2, w^* \rangle \geq 0.$$
D'où l'accrétivité de A.

Puisque pour tout $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction sur tout E, i.e., $R(I + \lambda A) = D((I + \lambda A)^{-1}) = E$.

$2) \Longrightarrow 1)$

Supposons que $R(I + \lambda A) = E$, $\forall \lambda > 0$ et montrons que A est m-accrétif.

Soit B un autre opérateur accrétif tel que $Gph(A) \subset Gph(B)$ et soit $x \in D(A)$. Pour tout $(x, y) \in Gph(B)$, $y + x \in E$, par l'hypothèse, $\lambda y + x \in R(I + \lambda A)$, alors il existe $z \in D(A)$ tel que $x + \lambda y \in z + \lambda Az$, comme le graphe de A est inclus dans le graphe de B, on trouve $x + \lambda y \in z + \lambda Bz$.

On a $y \in Bx$ et $y + \frac{1}{\lambda}(x - z) \in Bz$ et B accrétif, alors il existe $w^* \in J(x - z)$ tel que $\langle w^*, y - y - \frac{1}{\lambda}(x - z)\rangle \geq 0$. D'autre part,
$$w^* \in J(x - z) \Longleftrightarrow \langle w^*, x - z \rangle = \|w^*\|_*^2 = \|x - z\|^2.$$
D'où
$$\begin{aligned}
\langle y - y - \frac{1}{\lambda}(x - z), w^* \rangle \geq 0 &\Longrightarrow \frac{1}{\lambda}\langle -x + z, w^* \rangle \geq 0 \\
&\Longrightarrow -\frac{1}{\lambda}\langle x - z, w^* \rangle \geq 0 \\
&\Longrightarrow -\frac{1}{\lambda}\|x - z\|^2 \geq 0 \Longrightarrow \|x - z\|^2 = 0 \\
&\Longrightarrow x = z,
\end{aligned}$$
comme $x + \lambda y \in z + \lambda Az$, on aura $x + \lambda y \in x + \lambda Ax$. Donc $y \in Ax \Longrightarrow A = B$, d'où la m-accrétivité de A.

$1) \Longrightarrow 3)$

Supposons que A est m-accrétif et montrons que $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction pour tout $\lambda > 0$.

On a $R(I + \lambda A) = D((I + \lambda A)^{-1}) = E$, alors pour tous $y_1, y_2 \in E$ il existe $x_1, x_2 \in D(A)$ tel que
$$y_1 \in x_1 + \lambda Ax_1 \quad \text{et} \quad y_2 \in x_2 + \lambda Ax_2,$$
donc il existe $z_1 \in Ax_1$ et $z_2 \in Ax_2$ tels que
$$y_1 = x_1 + \lambda z_1 \quad \text{et} \quad y_2 = x_2 + \lambda z_2.$$

Alors, par l'accrétivité de A, il existe $w^* \in J(x_1 - x_2)$ tel que

$$\langle z_1 - z_2, w^* \rangle \geq 0.$$

Par définition de J, on obtient

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x_2\|^2 &= \langle x_1 - x_2, w^* \rangle \\
&\leq \langle x_1 - x_2, w^* \rangle + \lambda \langle z_1 - z_2, w^* \rangle \\
&= \langle x_1 - x_2 + \lambda(z_1 - z_2), w^* \rangle \\
&\leq \|x_1 - x_2 + \lambda(z_1 - z_2)\| \|w^*\|_*
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + \lambda(z_1 - z_2)\| = \|y_1 - y_2\|,$$

par conséquent

$$\|(I + \lambda A)^{-1} y_1 - (I + \lambda A)^{-1} y_2\| \leq \|y_1 - y_2\|,$$

et donc $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction définie sur E. ■

Définition 2.8. *Un opérateur $A : E \rightrightarrows E$ est dissipatif (respectivement maximal dissipatif (m-dissipatif)), si $(-A)$ est accrétif (respectivement m-accrétif).*

Définition 2.9. *Soit $\omega \in \mathbb{R}$. On dit que A est ω-accrétif (ω-m-accrétif) si $A + \omega I$ est accrétif (m-accrétif).*

Remarque 2.10. *Un opérateur m-accrétif est maximal accrétif.*

Proposition 2.11. *Soit E un espace de Banach, soient $x, v \in E$, alors*

$$\langle x, v \rangle_+ = \inf_{t>0} \frac{\|x + tv\| - \|x\|}{t}.$$

Preuve.
Par la Définition 1.14

$$\langle x, v \rangle_+ = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\|x + tv\| - \|x\|}{t},$$

et on sait que $x \mapsto \|x\|$ est convexe. Donc le résultat découle du Lemme 1.13 ■

Définition 2.12. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On définit*

$$\langle x, v \rangle_- = \lim_{t \uparrow 0} \frac{\|x + tv\| - \|x\|}{t}, \ \forall x, v \in E.$$

Dons ce qui suit, nous allons donner et démontrer quelques propriétés de $\langle .,. \rangle_+$ et $\langle .,. \rangle_-$ utiles pour les preuves de nos résultats.

Proposition 2.13. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé alors :*

i) $|\langle x, y\rangle_\pm| \leq \|y\|, \ \forall x, y \in E.$

ii) $|\langle x, y\rangle_\pm - \langle x, z\rangle_\pm| \leq \|y - z\|, \ \forall x, y \in E.$

iii) $\langle x, y\rangle_+ = -\langle x, -y\rangle_- = -\langle -x, y\rangle_-, \ \forall x, y \in E.$

iv) $\langle \alpha x, \beta y\rangle_\pm = \beta \langle x, y\rangle_\pm, \ \forall \alpha > 0, \ \forall \beta \geq 0, \ \forall x, y \in E.$

v) $\langle x, y + z\rangle_+ \leq \langle x, y\rangle_+ + \langle x, z\rangle_+$ *et* $\langle x, y + z\rangle_- \geq \langle x, y\rangle_- + \langle x, z\rangle_-, \ \forall x, y, z \in E.$

vi) $\langle x, \alpha x + y\rangle_+ = \alpha\|x\| + \langle x, y\rangle_+, \ \forall \alpha \geq 0, \ \forall x, y \in E.$

vii) $\langle x, y\rangle_+ = \max\big\{\langle y, x^*\rangle, x^* \in \Phi(x)\big\}$ *et* $\langle x, y\rangle_- = \min\big\{\langle y, x^*\rangle, x^* \in \Phi(x)\big\},$ $\forall x, y \in E,$ *avec*

$$\Phi(x) = \big\{x^* \in E^*, \langle x, x^*\rangle = \|x\|, \|x^*\|_* = 1\big\}, \quad si\ x \neq 0,$$

et

$$\Phi(0) = \{x^* \in E^*, \|x^*\|_* \leq 1\}.$$

viii) $\langle x, y\rangle_+ \leq \|x + y\| - \|x\|, \quad \forall x, y \in E.$

Preuve.

i) Montrons que $|\langle x, y\rangle_\pm| \leq \|y\|, \ \forall x, y \in E$. En effet

(a)

$$\begin{aligned}
|\langle x, y\rangle_+| &= \left|\lim_{t\downarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}\right| \\
&= \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\Big|\|x + ty\| - \|x\|\Big| \\
&\leq \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\|x + ty - x\| \\
&= \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} t\|y\| = \|y\|.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
|\langle x, y\rangle_-| &= \left|\lim_{t\uparrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}\right| \\
&= \lim_{t\uparrow 0} \frac{1}{|t|}\Big|\|x + ty\| - \|x\|\Big| \\
&\leq \lim_{t\uparrow 0} \frac{1}{|t|}\|x + ty - x\| \\
&= \lim_{t\uparrow 0} \frac{1}{|t|}|t|\|y\| = \|y\|.
\end{aligned}$$

ii) Montrons que $|\langle x,y\rangle_\pm - \langle x,z\rangle_\pm| \leq \|y-z\|, \ \forall x,y,z \in E$.

(a)

$$\begin{aligned}
|\langle x,y\rangle_+ - \langle x,z\rangle_+| &= \left|\lim_{t\downarrow 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t} - \lim_{t\downarrow 0}\frac{\|x+tz\|-\|x\|}{t}\right| \\
&= \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\,|\|x+ty\|-\|x\|-\|x+tz\|+\|x\|| \\
&= \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\,|\|x+ty\|-\|x+tz\|| \\
&\leq \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\|x+ty-x-tz\| \\
&= \|y-z\|.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
|\langle x,y\rangle_- - \langle x,z\rangle_-| &= \left|\lim_{t\uparrow 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t} - \lim_{t\uparrow 0}\frac{\|x+tz\|-\|x\|}{t}\right| \\
&= \lim_{t\uparrow 0}\frac{1}{|t|}\,|\|x+ty\|-\|x\|-\|x+tz\|+\|x\|| \\
&= \lim_{t\uparrow 0}\frac{1}{|t|}\,|\|x+ty\|-\|x+tz\|| \\
&\leq \lim_{t\uparrow 0}\frac{1}{|t|}\|x+ty-x-tz\| \\
&= \|y-z\|.
\end{aligned}$$

iii) Montrons que $\langle x,y\rangle_+ = -\langle x,-y\rangle_- = -\langle -x,y\rangle_-, \ \forall x,y \in E$. On a

$$\begin{aligned}
\langle x,y\rangle_+ &= \lim_{t\downarrow 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t} \\
&= \lim_{t\downarrow 0}\frac{\|x-t(-y)\|-\|x\|}{t} \\
&= -\lim_{t\downarrow 0}\frac{\|x-t(-y)\|-\|x\|}{-t},
\end{aligned}$$

on pose $\tau = -t$ alors, lorsque $t \downarrow 0$ on aura $\tau \uparrow 0$, d'où

$$\begin{aligned}
\langle x,y\rangle_+ &= -\lim_{\tau\uparrow 0}\frac{\|x+\tau(-y)\|-\|x\|}{\tau} \\
&= -\langle x,-y\rangle_- \\
&= -\lim_{\tau\uparrow 0}\frac{\|x-\tau y\|-\|x\|}{\tau} \\
&= -\lim_{\tau\uparrow 0}\frac{\|-x+\tau y\|-\|x\|}{\tau} \\
&= -\langle -x,y\rangle_-.
\end{aligned}$$

iv) Montrons que $\langle \alpha x,\beta y\rangle_\pm = \beta\langle x,y\rangle_\pm$, $\forall\beta \geq 0$, $\forall\alpha > 0, \ \forall x,y \in E$.

(a) Montrons que $\langle \alpha x, \beta y\rangle_+ = \beta\langle x, y\rangle_+$.

Si $\beta = 0$

$$\langle \alpha x, 0\rangle_+ = \inf_{t>0} \frac{\|\alpha x + 0\| - \|\alpha x\|}{t} = 0 = 0\langle x, y\rangle_+.$$

Si $\beta > 0$

$$\begin{aligned}\langle \alpha x, \beta y\rangle_+ &= \inf_{t>0} \frac{\|\alpha x + t\beta y\| - \|\alpha x\|}{t}\\ &= \inf_{t>0} \alpha\frac{\|x + \frac{t}{\alpha}\beta y\| - \|x\|}{t}\\ &= \inf_{t>0} \frac{\|x + \frac{t}{\alpha}\beta y\| - \|x\|}{\frac{t}{\alpha}},\end{aligned}$$

on pose $r = \frac{t\beta}{\alpha}$, alors si $t > 0, r > 0$, et donc

$$\begin{aligned}\langle \alpha x, \beta y\rangle_+ &= \beta \inf_{r>0} \frac{\|x + ry\| - \|x\|}{r}\\ &= \beta\langle x, y\rangle_+.\end{aligned}$$

(b) Montrons que $\langle \alpha x, \beta y\rangle_- = \beta\langle x, y\rangle_-$, $\forall\beta \geq 0$, $\forall\alpha > 0$.

Si $\beta = 0$

$$\langle \alpha x, 0\rangle_- = \lim_{t\uparrow 0} \frac{\|\alpha x + 0\| - \|\alpha x\|}{t} = 0 = 0\langle x, y\rangle_-.$$

Si $\beta > 0$

$$\begin{aligned}\langle \alpha x, \beta y\rangle_- &= \lim_{t\uparrow 0} \frac{\|\alpha x + t\beta y\| - \|\alpha x\|}{t}\\ &= \lim_{t\uparrow 0} \alpha\frac{\|x + \frac{t}{\alpha}\beta y\| - \|x\|}{t}\\ &= \lim_{t\uparrow 0} \frac{\|x + \frac{t}{\alpha}\beta y\| - \|x\|}{\frac{t}{\alpha}},\end{aligned}$$

on pose $r = \frac{t\beta}{\alpha} \uparrow 0$, donc

$$\begin{aligned}\langle \alpha x, \beta y\rangle_- &= \beta \lim_{r\uparrow 0} \frac{\|x + ry\| - \|x\|}{r}\\ &= \beta\langle x, y\rangle_-.\end{aligned}$$

v) Montrons que :

(a) $\langle x, y + z\rangle_+ \leq \langle x, y\rangle_+ + \langle x, z\rangle_+$, $\forall x, y, z \in E$. On a

$$\langle x, y\rangle_+ + \langle x, z\rangle_+ = \lim_{t\downarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} + \lim_{t\downarrow 0} \frac{\|x + tz\| - \|x\|}{t}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t\downarrow 0} \frac{\|x+ty\|+\|x+tz\|-2\|x\|}{t} \\
&\geq \lim_{t\downarrow 0} \frac{\|2x+t(y+z)\|-2\|x\|}{t} \\
&= \lim_{t\downarrow 0} 2\frac{\|x+\frac{t}{2}(y+z)\|-\|x\|}{t} \\
&= \lim_{t\downarrow 0} \frac{\|x+\frac{t}{2}(y+z)\|-\|x\|}{t/2},
\end{aligned}$$

on pose $r = \frac{t}{2}$, donc

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle_+ + \langle x, z\rangle_+ &\geq \lim_{r\downarrow 0} \frac{\|x+r(y+z)\|-\|x\|}{r} \\
&= \langle x, y+z\rangle_+.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

(b) $\langle x, y+z\rangle_- \geq \langle x, y\rangle_- + \langle x, z\rangle_-$, $\forall x, y, z \in E$. Utilisant la relation (iii), on obtient

$$\begin{aligned}
\langle x, y+z\rangle_- &= -\langle x, -y-z\rangle_+ \\
&\geq -\langle x, -y\rangle_+ - \langle x, -z\rangle_+ \\
&= \langle x, y\rangle_- + \langle x, z\rangle_-.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

vi) Montrons que $\langle x, \alpha x + y\rangle_+ = \alpha\|x\| + \big\langle x, y\rangle_+, \;\forall \alpha \geq 0, \forall x, y \in E.$
Si $\alpha = 0$

$$\begin{aligned}
\langle x, 0x+y\rangle_+ &= \langle x, y\rangle_+ \\
&= 0\|x\| + \langle x, y\rangle_+.
\end{aligned}$$

Si $\alpha > 0$, utilisant la relation (iv), on obtient

$$\begin{aligned}
\langle x, \alpha x + y\rangle_+ &= \langle x, \alpha(x + \frac{1}{\alpha}y)\rangle_+ \\
&= \alpha\langle x, x + \frac{1}{\alpha}y\rangle_+ \\
&= \alpha \inf_{t>0} \frac{\|x+tx+\frac{t}{\alpha}y\|-\|x\|}{t} \\
&= \alpha \inf_{t>0} \frac{\|x+tx+\frac{1}{\alpha}ty\|-\|x\|}{t} - \alpha\|x\| + \alpha\|x\| \\
&= \alpha\|x\| + \inf_{t>0} \alpha\frac{\|x+tx+\frac{t}{\alpha}y\|-\|x\|-t\|x\|}{t}
\end{aligned}$$

$$= \alpha\|x\| + \inf_{t>0} \alpha \frac{\|(1+t)x + \frac{t}{\alpha}y\| - (1+t)\|x\|}{t}$$
$$= \alpha\|x\| + \inf_{t>0} \frac{\|x + \frac{t}{\alpha(1+t)}y\| - \|x\|}{\frac{t}{\alpha(1+t)}}$$

on pose $r = \frac{t}{\alpha(1+t)} > 0$, alors

$$\begin{aligned}\langle x, \alpha x + y\rangle_+ &= \alpha\|x\| + \inf_{r>0} \frac{\|x + ry\| - \|x\|}{r} \\ &= \alpha\|x\| + \langle x, y\rangle_+.\end{aligned}$$

vii) Montrons que :

(a) $\langle x, y\rangle_+ = \max\{\langle y, x^*\rangle, x^* \in \Phi(x)\}$, $\forall x, y \in E$, avec

$$\Phi(x) = \{x^* \in E^*, \langle x, x^*\rangle = \|x\|, \|x^*\|_* = 1\}, \quad si\ x \neq 0,$$

et

$$\Phi(0) = \{x^* \in E^*, \|x^*\|_* \leq 1\}.$$

On sait que la fonction $x \mapsto f(x) = \|x\|$ est une fonction propre convexe, de plus elle est finie et continue en tout point $x \in E$, et $f'(x; y) = \langle x, y\rangle_+$. D'après le Théorème 1.17, on sait aussi que

$$\langle x, y\rangle_+ = \sup\{\langle y, x^*\rangle, x^* \in \partial(\|x\|)\}.$$

Donc, il suffit de montrer que $\partial(\|x\|) = \Phi(x)$. En effet, en utilisant l'exemple 1.9 et la Proposition 1.16, on a

$$\begin{aligned}\partial(\|x\|) &= \{x^* \in E^*, \delta_{\overline{B}(0,1)}(x^*) + \|x\| = \langle x^*, x\rangle\} \\ &= \{x^* \in E^*, +\infty + \|x\| = \langle x^*, x\rangle, \|x^*\|_* > 1\} \\ &\quad \cup \{x^* \in E^*, \|x\| = \langle x^*, x\rangle, \|x^*\|_* \leqslant 1\} \\ &= \emptyset \cup \{x^* \in E^*, \|x\| = \langle x^*, x\rangle, \|x^*\|_* \leqslant 1\} \\ &= \{x^* \in E^*, \|x\| = \langle x^*, x\rangle, \|x^*\|_* \leqslant 1\}.\end{aligned}$$

Montrons que $\partial(\|x\|) = \Phi(x)$.
Si $x = 0$

$$\begin{aligned}\partial(\|0\|) &= \{x^* \in E^*, \|0\| = \langle x^*, 0\rangle, \|x^*\|_* \leqslant 1\} \\ &= \{x^* \in E^*, \|x^*\|_* \leqslant 1\} \\ &= \Phi(0).\end{aligned}$$

Si $x \neq 0$

$$\begin{aligned} x^* \in \Phi(x) &\Leftrightarrow \|x\| = \langle x^*, x\rangle \quad et \quad \|x^*\|_* = 1 \\ &\Rightarrow \|x\| = \langle x^*, x\rangle \quad et \quad \|x^*\|_* \leq 1 \end{aligned}$$

donc $x^* \in \partial(\|x\|)$. D'où

$$\Phi(x) \subset \partial(\|x\|).$$

Inversement

$$\begin{aligned} x^* \in \partial(\|x\|) &\Leftrightarrow \|x\| = \langle x^*, x\rangle \quad et \quad \|x^*\|_* \leq 1 \\ &\Rightarrow \|x\| = \langle x^*, x\rangle \leqslant \|x\|\|x^*\|_* \quad et \quad \|x^*\|_* \leq 1 \\ &\Rightarrow \|x\| \leqslant \|x\|\|x^*\|_* \quad et \quad \|x^*\|_* \leq 1 \\ &\Rightarrow \|x^*\|_* \geq 1 \quad et \quad \|x^*\|_* \leq 1. \end{aligned}$$

Alors

$$\|x^*\|_* = 1.$$

d'où

$$\partial(\|x\|) \subset \Phi(x).$$

Donc

$$\partial(\|x\|) = \Phi(x).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle_+ &= \sup\big\{\langle y, x^*\rangle, x^* \in \Phi(x)\big\} \\ &= \max\big\{\langle y, x^*\rangle, x^* \in \Phi(x)\big\}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

(b) $\langle x, y\rangle_- = \min\{\langle y, x^*\rangle, x^* \in \Phi(x)\}, \quad \forall x, y \in E$. On a

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle_- &= -\langle x, -y\rangle_+ \\ &= -\max\big\{\langle -y, x^*\rangle, x^* \in \Phi(x)\big\} \\ &= -\max\big\{-\langle y, x^*\rangle, x^* \in \Phi(x)\big\} \\ &= \min\big\{\langle y, x^*\rangle, x^* \in \Phi(x)\big\}. \end{aligned}$$

viii) Montrons que $\langle x, y\rangle_+ \leq \|x+y\| - \|x\|$.

On a

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle_+ &= \inf_{\lambda>0} \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda} \\ &\leq \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda} \qquad \forall \lambda > 0, \end{aligned}$$

pour $\lambda = 1$, on obtient

$$\langle x, y\rangle_+ \leq \|x+y\| - \|x\|.$$

■

Lemme 2.14. *Pour tout $x \in E$, nous avons*

$$\|x\|\Phi(x) = J(x).$$

Preuve.

Il suffit de montrer que pour tout $x \in E$

$$x^* \in \Phi(x) \Longleftrightarrow \|x\|x^* \in J(x).$$

On a

$$\begin{aligned} x^* \in \Phi(x) &\Longleftrightarrow \langle x, x^*\rangle = \|x\| \quad \text{et} \quad \|x^*\|_* = 1 \\ &\Longleftrightarrow \|x\|\langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 \quad \text{et} \quad \|x^*\|_*^2 = 1 \\ &\Longleftrightarrow \langle x, \|x\|x^*\rangle = \|x\|^2 \quad \text{et} \quad \|x\|^2\|x^*\|_*^2 = \|x\|^2 \\ &\Longleftrightarrow \langle x, \|x\|x^*\rangle = \|x\|^2 \quad \text{et} \quad \|\|x\|x^*\|_*^2 = \|x\|^2 \\ &\Longleftrightarrow \langle x, \|x\|x^*\rangle = \|x\|^2 = \|\|x\|x^*\|_*^2 \\ &\Longleftrightarrow \|x\|x^* \in J(x). \end{aligned}$$

■

Proposition 2.15. *Soit $A : E \rightrightarrows E$ un opérateur ω-accrétif $(\omega > 0)$. Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Gph(A + \omega I)$. Alors*

$$\|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\| \geq (1 - \omega\lambda)\|x_1 - x_2\| \ , \ \forall\ 0 < \lambda < \frac{1}{\omega}.$$

Preuve.

On a A ω-accrétif, alors pour tous $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Gph(A+\omega I)$, il existe $w^* \in J(x_1-x_2)$

tel que $\langle y_1 - y_2, w^* \rangle \geq 0$. (Voir Définition 2.2)

D'après le Lemme 2.3, on a

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|, \quad \forall\ 0 < \lambda < \frac{1}{\omega}.$$

$0 < \lambda < \frac{1}{\omega} \Longrightarrow 0 < (1 - \lambda\omega) < 1$. Donc

$$(1 - \lambda\omega)\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|.$$

D'où le résultat. ■

Proposition 2.16. *Soit $A : E \rightrightarrows E$ un opérateur ω-accrétif ($\omega > 0$). Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Gph(A)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *il existe $w^* \in J(x_1 - x_2)$ tel que $\langle y_1 - y_2, w^* \rangle \geq -\omega\|x_1 - x_2\|^2$.*
2. *$\|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\| \geq (1 - \lambda\omega)\|x_1 - x_2\|, \quad \forall 0 < \lambda < \frac{1}{\omega}$.*
3. *$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle_+ \geq -\omega\|x_1 - x_2\|$.*

Preuve.

Montrons que 2) $\Longleftrightarrow$ 3)

$$\begin{aligned}
&\|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\| \geq (1 - \lambda w)\|x_1 - x_2\| \\
&\Longleftrightarrow \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\| \geq \|x_1 - x_2\| - \lambda w\|x_1 - x_2\| \\
&\Longleftrightarrow \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\| - \|x_1 - x_2\| \geq \ -\lambda w\|x_1 - x_2\| \\
&\Longleftrightarrow \frac{\|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\| - \|x_1 - x_2\|}{\lambda} \geq \ -w\|x_1 - x_2\| \\
&\Longleftrightarrow \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\| - \|x_1 - x_2\|}{\lambda} \geq \ -w\|x_1 - x_2\| \\
&\Longleftrightarrow \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle_+ \geq -w\|x_1 - x_2\|.
\end{aligned}$$

Montrons que 3) $\Longleftrightarrow$ 1)

On a, en utilisant (vii) de la Proposition 2.13 et le Lemme 2.14,

$$\begin{aligned}
&\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle_+ \geq -w\|x_1 - x_2\| \\
&\Longleftrightarrow \max\left\{\langle y_1 - y_2, y^* \rangle, \quad y^* \in \Phi(x_1 - x_2)\right\} \geq -\omega\|x_1 - x_2\| \\
&\Longleftrightarrow \exists y^* \in \Phi(x_1 - x_2) \ \text{ tel que } \ \langle y_1 - y_2, y^* \rangle \geq -\omega\|x_1 - x_2\| \\
&\Longleftrightarrow \exists \|x_1 - x_2\|y^* \in J(x_1 - x_2) \ \text{ tel que } \ \|x_1 - x_2\|\langle y_1 - y_2, y^* \rangle \geq -\omega\|x_1 - x_2\|^2 \\
&\Longleftrightarrow \exists \|x_1 - x_2\|y^* \in J(x_1 - x_2) \ \text{ tel que } \ \langle y_1 - y_2, \|x_1 - x_2\|y^* \rangle \geq -\omega\|x_1 - x_2\|^2 \\
&\Longleftrightarrow \exists w^* \in J(x_1 - x_2) \ \text{ tel que } \ \langle y_1 - y_2, w^* \rangle \geq -\omega\|x_1 - x_2\|^2.
\end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Problème de Cauchy dans un espace de Banach

Définition 3.1. *Soit E un espace de Banach réel avec la norme $\|.\|$ et soit E^* son dual topologique. Soit $A : E \rightrightarrows E$ un opérateur ω-accrétif ($\omega \in \mathbb{R}$).*
Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} f(t) \in \frac{d}{dt}y(t) + Ay(t) \quad\quad p.p.t \in [0.T] \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $y_0 \in E$ et $f \in L^1([0,T]; E)$.

Définition 3.2. *Une solution forte du problème (3.1) est une fonction $y \in W^{1,1}([0,T]; E)$ vérifiant : $f(t) - \frac{d}{dt}y(t) \in Ay(t),\ p.p.t \in]0,T],\ y(0) = y_0$.*

Lemme 3.3. *Soit $y = y(t)$ une fonction définie sur $[0,T]$ à valeurs dans E. On suppose que $y(.)$ et $\|y(.)\|$ sont dérivables à gauche et à droite du point $t = s$, alors*

$$\|y(s)\|\frac{d^{\pm}}{ds}\|y(s)\| = \left\langle \frac{d^{\pm}}{ds}y(s),\ w^* \right\rangle,\ \forall w^* \in J(y(s)). \tag{3.2}$$

$$\frac{d^{\pm}}{ds}\|y(s)\| = \left\langle y(s), \frac{d^{\pm}}{ds}y(s) \right\rangle_{\pm}. \tag{3.3}$$

Preuve.

1. Montrons que

$$\|y(s)\|\frac{d^{\pm}}{ds}\|y(s)\| = \left\langle \frac{d^{\pm}}{ds}y(s), w^* \right\rangle,\ \forall w^* \in J(y(s)).$$

(a) Montrons que

$$\|y(s)\|\frac{d^+}{ds}\|y(s)\| = \left\langle \frac{d^+}{ds}y(s), w^* \right\rangle, \ \forall\ w^* \in J(y(s)).$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $w^* \in J(y(s))$. Alors

$w^* \in J(y(s)) \Longleftrightarrow \langle y(s), w^* \rangle = \|y(s)\|^2 = \|w^*\|_*^2$.

Comme

$$\begin{aligned}\langle y(s+\varepsilon) - y(s), w^* \rangle &= \langle y(s+\varepsilon), w^* \rangle - \langle y(s), w^* \rangle \\ &= \langle y(s+\varepsilon), w^* \rangle - \|y(s)\|^2 \\ &= \langle y(s+\varepsilon), w^* \rangle - \|y(s)\|\|w^*\|_* \\ &\leq \|y(s+\varepsilon)\|\|w^*\|_* - \|y(s)\|\|w^*\|_* \\ &= (\|y(s+\varepsilon)\| - \|y(s)\|)\|w^*\|_*,\end{aligned}$$

on obtient

$$\langle y(s+\varepsilon) - y(s), w^* \rangle \leq (\|y(s+\varepsilon)\| - \|y(s)\|)\|w^*\|_*,$$

on passe à la limite ($\varepsilon \downarrow 0$)

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\langle y(s+\varepsilon) - y(s), w^* \rangle \leq \|w^*\|_* \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\|y(s+\varepsilon)\| - \|y(s)\|}{\varepsilon} \\ &\Longleftrightarrow \left\langle \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{y(s+\varepsilon) - y(s)}{\varepsilon}, w^* \right\rangle \leq \|w^*\|_* \frac{d^+}{ds}\|y(s)\|.\end{aligned}$$

D'où

$$\left\langle \frac{d^+}{ds}y(s), w^* \right\rangle \leq \|w^*\|_* \frac{d^+}{ds}\|y(s)\|. \tag{3.4}$$

De la même manière, on a

$$\begin{aligned}&\langle y(s-\varepsilon) - y(s), w^* \rangle \leq (\|y(s-\varepsilon)\| - \|y(s)\|)\|w^*\|_* \\ &\Longleftrightarrow -\langle y(s) - y(s-\varepsilon), w^* \rangle \leq -(\|y(s)\| - \|y(s-\varepsilon)\|)\|w^*\|_* \\ &\Longleftrightarrow \langle y(s) - y(s-\varepsilon), w^* \rangle \geq (\|y(s)\| - \|y(s-\varepsilon)\|)\|w^*\|_*\end{aligned}$$

on passe à la limite ($\varepsilon \downarrow 0$)

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\langle y(s) - y(s-\varepsilon), w^* \rangle \geq \|w^*\|_* \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\|y(s)\| - \|y(s-\varepsilon)\|}{\varepsilon},$$

donc

$$\left\langle \frac{d^+}{ds} y(s), w^* \right\rangle \geq \|w^*\|_* \frac{d^+}{ds} \|y(s)\|. \tag{3.5}$$

Par (3.4) et (3.5)

$$\left\langle \frac{d^+}{ds} y(s), w^* \right\rangle = \|y(s)\| \frac{d^+}{ds} \|y(s)\|.$$

(b) Montrons que

$$\|y(s)\| \frac{d^-}{ds} \|y(s)\| = \left\langle \frac{d^-}{ds} y(s), w^* \right\rangle, \forall w^* \in J(y(s)).$$

Soit $\varepsilon < 0$ et soit $w^* \in J(y(s))$. Alors
$w^* \in J(y(s)) \Longleftrightarrow \langle y(s), w^* \rangle = \|y(s)\|^2 = \|w^*\|_*^2$.
Comme

$$\begin{aligned} \langle y(s+\varepsilon) - y(s), w^* \rangle &= \langle y(s+\varepsilon), w^* \rangle - \langle y(s), w^* \rangle \\ &= \langle y(s+\varepsilon), w^* \rangle - \|y(s)\|^2 \\ &= \langle y(s+\varepsilon), w^* \rangle - \|y(s)\| \|w^*\|_* \\ &\leq \|y(s+\varepsilon)\| \|w^*\| - \|y(s)\| \|w^*\|_* \\ &= (\|y(s+\varepsilon)\| - \|y(s)\|) \|w^*\|_*, \end{aligned}$$

on obtient

$$\langle y(s+\varepsilon) - y(s), w^* \rangle \leq (\|y(s+\varepsilon)\| - \|y(s)\|) \|w^*\|_*,$$

on passe à la limite ($\varepsilon \uparrow 0$)

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \uparrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \langle y(s+\varepsilon) - y(s), w^* \rangle \geq \|w^*\|_* \lim_{\varepsilon \uparrow 0} \frac{\|y(s+\varepsilon)\| - \|y(s)\|}{\varepsilon} \\ \Longleftrightarrow &\left\langle \lim_{\varepsilon \uparrow 0} \frac{y(s+\varepsilon) - y(s)}{\varepsilon}, w^* \right\rangle \geq \|w^*\|_* \frac{d^-}{ds} \|y(s)\|. \end{aligned}$$

D'où

$$\left\langle \frac{d^-}{ds} y(s), w^* \right\rangle \geq \|w^*\|_* \frac{d^-}{ds} \|y(s)\|. \tag{3.6}$$

De la même manière, on a

$$\begin{aligned} &\langle y(s-\varepsilon) - y(s), w^* \rangle \leq (\|y(s-\varepsilon)\| - \|y(s)\|) \|w^*\|_* \\ \Longleftrightarrow\ &-\langle y(s) - y(s-\varepsilon), w^* \rangle \leq -(\|y(s)\| - \|y(s-\varepsilon)\|) \|w^*\|_* \\ \Longleftrightarrow\ &\langle y(s) - y(s-\varepsilon), w^* \rangle \geq (\|y(s)\| - \|y(s-\varepsilon)\|) \|w^*\|_* \end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon\uparrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\langle y(s)-y(s-\varepsilon),w^*\rangle \leq \|w^*\|_* \lim_{\varepsilon\uparrow 0}\frac{\|y(s)\|-\|y(s-\varepsilon)\|}{\varepsilon},$$

donc

$$\left\langle \frac{d^-}{ds}y(s),w^*\right\rangle \leq \|w^*\|_*\frac{d^-}{ds}\|y(s)\|. \tag{3.7}$$

Par (3.6) et (3.7)

$$\left\langle \frac{d^-}{ds}y(s),w^*\right\rangle = \|y(s)\|\frac{d^-}{ds}\|y(s)\|.$$

2. Montrons maintenant que

$$\frac{d^\pm}{ds}\|y(s)\| = \left\langle y(s),\frac{d^\pm}{ds}y(s)\right\rangle_\pm.$$

(a) Montrons que

$$\frac{d^+}{ds}\|y(s)\| = \left\langle y(s),\frac{d^+}{ds}y(s)\right\rangle_+.$$

Par la propriété (vii) de la Proposition 2.13, on a

$$\left\langle y(s),\frac{d^+}{ds}y(s)\right\rangle_+ = \max\left\{\left\langle \frac{d^+}{ds}y(s),w^*\right\rangle, w^*\in\Phi(y(s))\right\},$$

et par la Lemme 2.14, on sait que

$$\|y(s)\|\Phi(y(s)) = J(y(s)).$$

Alors pour tout $w^*\in\Phi(y(s))$, $\|y(s)\|w^*\in J(y(s))$, d'après (3.2)

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d^+}{ds}y(s),\|y(s)\|w^*\right\rangle &= \|y(s)\|\frac{d^+}{ds}\|y(s)\|\\ \Longleftrightarrow \|y(s)\|\left\langle \frac{d^+}{ds}y(s),w^*\right\rangle &= \|y(s)\|\frac{d^+}{ds}\|y(s)\|.\end{aligned}$$

D'où

$$\left\langle \frac{d^+}{ds}y(s),w^*\right\rangle = \frac{d^+}{ds}\|y(s)\|.$$

Et donc

$$\begin{aligned}\left\langle y(s),\frac{d^+}{ds}y(s)\right\rangle_+ &= \max\left\{\left\langle \frac{d^+}{ds}y(s),w^*\right\rangle,\quad w^*\in\Phi(y(s))\right\}\\ \left\langle y(s),\frac{d^+}{ds}y(s)\right\rangle_+ &= \max\left\{\frac{d^+}{ds}\|y(s)\|,\quad w^*\in\Phi(y(s))\right\}\\ &= \frac{d^+}{ds}\|y(s)\|.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

(b) Montrons que
$$\frac{d^-}{ds}\|y(s)\| = \left\langle y(s), \frac{d^-}{ds}y(s)\right\rangle_- .$$

Et comme par la propriété (vii) de la Proposition 2.13 on a
$$\left\langle y(s), \frac{d^-}{ds}y(s)\right\rangle_- = \min\left\{\left\langle \frac{d^-}{ds}y(s), w^*\right\rangle, w^* \in \Phi(y(s))\right\},$$
et par la Lemme 2.14, on sait que
$$\|y(s)\|\Phi(y(s)) = J(y(s)).$$
Alors pour tout $w^* \in \Phi(y(s))$, $\|y(s)\|w^* \in J(y(s))$, d'après (3.2)
$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d^-}{ds}y(s), \|y(s)\|w^*\right\rangle &= \|y(s)\|\frac{d^-}{ds}\|y(s)\| \\ \Longleftrightarrow \|y(s)\|\left\langle \frac{d^-}{ds}y(s), w^*\right\rangle &= \|y(s)\|\frac{d^-}{ds}\|y(s)\|.\end{aligned}$$
D'où
$$\left\langle \frac{d^-}{ds}y(s), w^*\right\rangle = \frac{d^-}{ds}\|y(s)\|.$$
Alors
$$\begin{aligned}\left\langle y(s), \frac{d^-}{ds}y(s)\right\rangle_- &= \min\left\{\frac{d^-}{ds}\|y(s)\|, \quad w^* \in \Phi(y(s))\right\} \\ &= \frac{d^-}{ds}\|y(s)\|.\end{aligned}$$
Ceci finit la preuve du Lemme. ■

Remarque 3.4. *Si $y(.)$ et $\|y(.)\|$ sont différentiables, alors*
$$\frac{d}{ds}\|y(s)\| = \langle y(s), \frac{d}{ds}y(s)\rangle_\pm .$$

Proposition 3.5. *Soient $A : E \rightrightarrows E$ un opérateur ω-accrétif $(\omega \in \mathbb{R})$, $f_i \in L^1([0,T];E)$, $y_0^i \in \overline{D(A)}$,$i = 1, 2$ et soit $y_i \in W^{1,1}([0,T];E)$, $i = 1, 2$, des solutions fortes du problème*
$$(P_i) \qquad \begin{cases} f_i(t) \in \frac{d}{dt}y_i(t) + Ay_i(t) \quad p.p.t \in [0.T] \\ y_i(0) = y_0^i. \end{cases} \tag{3.8}$$
$i = 1, 2$. *Alors*
$$\begin{aligned}\|y_1(t) - y_2(t)\| &\le e^{\omega t}\|y_0^1 - y_0^2\| + \int_0^t e^{\omega(t-s)}\langle y_1(s) - y_2(s), f_1(s) - f_2(s)\rangle_+ ds \\ &\le e^{\omega t}\|y_0^1 - y_0^2\| + \int_0^t e^{\omega(t-s)}\|f_1(s) - f_2(s)\|ds.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Preuve.

Montrons que

$$\begin{aligned}\|y_1(t)-y_2(t)\| &\le e^{\omega t}\|y_0^1-y_0^2\|+\int_0^t e^{\omega(t-s)}\big\langle y_1(s)-y_2(s), f_1(s)-f_2(s)\big\rangle_+ ds\\ &\le e^{\omega t}\|y_0^1-y_0^2\|+\int_0^t e^{\omega(t-s)}\|f_1(s)-f_2(s)\|ds.\end{aligned}$$

Soient $f_1, f_2 \in L^1([0,T];E)$ et $y_0^1,\ y_0^2 \in \overline{D(A)}$ et soient y_1, y_2 des solutions fortes des problèmes (P_1), (P_2) respectivement. Alors

$$f_1(s)-\frac{d}{ds}y_1(s)\in Ay_1(s),$$

$$f_2(s)-\frac{d}{ds}y_2(s)\in Ay_2(s).$$

Comme A est ω-accrétif, on a par la Proposition 2.16 (3),

$$\big\langle y_1(s)-y_2(s), f_1(s)-\frac{d}{ds}y_1(s)-f_2(s)+\frac{d}{ds}y_2(s)\big\rangle_+\ge -\omega\|y_1(s)-y_2(s)\|,$$

et d'après la Proposition 2.13 (v), on trouve que

$$\begin{aligned}\big\langle y_1(s)-y_2(s), f_1(s)-f_2(s)\big\rangle_+ + \big\langle y_1(s)-y_2(s), -\frac{d}{ds}y_1(s)+\frac{d}{ds}y_2(s)\big\rangle_+ \ge\\ -\omega\|y_1(s)-y_2(s)\|,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}-\big\langle y_1(s)-y_2(s), -\frac{d}{ds}y_1(s)+\frac{d}{ds}y_2(s)\big\rangle_+ \le \big\langle y_1(s)-y_2(s), f_1(s)-f_2(s)\big\rangle_+\\ +\omega\|y_1(s)-y_2(s)\|,\end{aligned}$$

et par (iii) de la même Proposition, on trouve

$$\big\langle y_1(s)-y_2(s), \frac{d}{ds}y_1(s)-\frac{d}{ds}y_2(s)\big\rangle_- \le \big\langle y_1(s)-y_2(s), f_1(s)-f_2(s)\big\rangle_+ +\omega\|y_1(s)-y_2(s)\|,$$

et d' après le Lemme précédent

$$\frac{d^-}{ds}\|y_1(s)-y_2(s)\| = \big\langle y_1(s)-y_2(s), \frac{d}{ds}y_1(s)-\frac{d}{ds}y_2(s)\big\rangle_-,$$

donc

$$\frac{d^-}{ds}\|y_1(s)-y_2(s)\| \le \big\langle y_1(s)-y_2(s), f_1(s)-f_2(s)\big\rangle_+ +\omega\|y_1(s)-y_2(s)\|,$$

et comme $\|y_1(s)-y_2(s)\|$ est différentiable. Alors

$$\frac{d}{ds}\|y_1(s)-y_2(s)\| \le \big\langle y_1(s)-y_2(s), f_1(s)-f_2(s)\big\rangle_+ +\omega\|y_1(s)-y_2(s)\|,$$

d'où pour tout $t \in [0,T]$,

$$e^{\omega(t-s)}\frac{d}{ds}\|y_1(s)-y_2(s)\| \leq e^{\omega(t-s)}\big\langle y_1(s)-y_2(s), f_1(s)-f_2(s)\big\rangle_+ + \omega e^{\omega(t-s)}\|y_1(s)-y_2(s)\|,$$

en intégrant sur $[0,t],\ t \in]0,T]$, on aura

$$\int_0^t e^{\omega(t-s)}\frac{d}{ds}\|y_1(s)-y_2(s)\|ds \leq \int_0^t e^{\omega(t-s)}\big\langle y_1(s)-y_2(s), f_1(s)-f_2(s)\big\rangle_+ ds + \int_0^t \omega e^{\omega(t-s)}\|y_1(s)-y_2(s)\|ds,$$

une intégration par parties du terme à gauche, nous donne

$$e^{\omega(t-s)}\|y_1(s)-y_2(s)\|\Big|_0^t + \int_0^t \omega e^{\omega(t-s)}\|y_1(s)-y_2(s)\|ds \leq \int_0^t e^{\omega(t-s)}\big\langle y_1(s)-y_2(s), f_1(s)-f_2(s)\big\rangle_+ ds + \int_0^t \omega e^{\omega(t-s)}\|y_1(s)-y_2(s)\|ds$$

$$\Longleftrightarrow \|y_1(t)-y_2(t)\| - e^{\omega t}\|y_0^1-y_0^2\| \leq \int_0^t e^{\omega(t-s)}\big\langle y_1(s)-y_2(s), f_1(s)-f_2(s)\big\rangle_+ ds.$$

D'où

$$\|y_1(t)-y_2(t)\| \leq e^{\omega t}\|y_0^1-y_0^2\| + \int_0^t e^{\omega(t-s)}\big\langle y_1(s)-y_2(s), f_1(s)-f_2(s)\big\rangle_+ ds,$$

et par suite, utilisant la Proposition 2.13 (i), on obtient

$$\|y_1(t)-y_2(t)\| \leq e^{\omega t}\|y_0^1-y_0^2\| + \int_0^t e^{\omega(t-s)}\|f_1(s)-f_2(s)\|ds.$$

■

Remarque 3.6. *Il est clair que toute solution forte du problème* (3.1) *est unique et continue.*
En effet, soit $y \in W^{1,1}([0,T];E)$ une solution forte de (3.1).
On a $W^{1,1}([0,T];E) = \{y \in C([0,T];E),\ y' \in L^1([0,T];E)\}$, donc
$y \in W^{1,1}([0,T];E) \Longrightarrow y \in C([0,T];E)$, c' est à dire y est continue.
Pour l'unicité, supposons qu'il existe deux solutions fortes y_1 et y_2 de (3.1) *et montrons que $y_1 = y_2$. Nous avons*

$$\begin{cases} f(t) \in \frac{d}{dt}y_1(t) + Ay_1(t), & p.p. t \in [0,T] \\ y_1(0) = y_0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(t) \in \frac{d}{dt}y_2(t) + Ay_2(t), & p.p. t \in [0,T] \\ y_2(0) = y_0, \end{cases}$$

D'après la Proposition 3.5. On a

$$\begin{aligned}\|y_1(t) - y_2(t)\| &\leq e^{\omega t}\|y_1(0) - y_2(0)\| + \int_0^t e^{\omega(t-s)}\big\|f(s) - f(s)\big\|ds \\ &= e^{\omega t}\|y_0 - y_0\| \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $y_1(t) = y_2(t)$ *pour tout* $t \in [0, T]$*, i.e.,* $y_1 = y_2$.

Définition 3.7. *Soit* $f \in L^1([0, T]; E)$ *et soit* $\varepsilon > 0$*. Une* ε*-discrétisation sur* $[0, T]$ *de l'inclusion* $f \in y' + Ay$ *consiste en une partition* $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_N$ *de l'intervalle* $[0, t_N]$ *et une suite finie* $\{f_i\}_{i=1}^N \subset E$*, tel que*

$$t_i - t_{i-1} < \varepsilon \quad pour\ i = 1, ..., N,\ T - \varepsilon < t_N \leq T, \tag{3.10}$$

et

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f(s) - f_i\|\, ds < \varepsilon. \tag{3.11}$$

On note $D_A^\varepsilon(0 = t_0, t_1, ..., t_N; f_1, ..., f_N)$ *cette* ε*-discrétisation.*
Une $D_A^\varepsilon(0 = t_0, t_1, ..., t_N; f_1, ..., f_N)$ *solution à* (3.1) *est une fonction constante par morceaux* $z : [0, t_N] \longrightarrow E$ *dont les valeurs* z_i *sur* $]t_{i-1}, t_i]$ *satisfont l'équation aux différences finies*

$$f_i \in \frac{z_i - z_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + Az_i, \quad i = 1, ..., N. \tag{3.12}$$

La fonction $z = \{z_i\}_{i=1}^N$ *est appelée solution* ε*-approximante du problème de Cauchy* (3.1)*, si elle satisfait de plus*

$$\|z(0) - y_0\| \leq \varepsilon. \tag{3.13}$$

Définition 3.8. *On appelle solution faible du problème de Cauchy* (3.1) *toute fonction* $y \in C([0, T]; E)$ *satisfaisant la propriété : pour chaque* $\varepsilon > 0$ *il existe une solution* ε*-approximante* z *de l'inclusion* $f \in y' + Ay$ *sur* $[0, T]$ *tel que* $\|y(t) - z(t)\| \leq \varepsilon$ *pour tout* $t \in [0.T]$ *et* $y(0) = y_0$.

Remarque 3.9. *Notons que chaque solution forte* $y \in W^{1,1}([0, T]; E)$ *de* (3.1) *est une solution faible. En effet, soit* $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N$ *une* ε*-discrétisation de* $[0, T]$*, pour tout* $t \in]t_{i-1}, t_i[$ *tel que* $t_i - t_{i-1} \leq \varepsilon$*, on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = \frac{d}{dt} y(t),$$

donc

$$\left\|\frac{d}{dt}y(t)-\frac{y(t_i)-y(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right\|\leq\varepsilon,\quad t_i-t_{i-1}<\varepsilon,\ i=1,...,N, \tag{3.14}$$

et d'après le Théorème 1.23, on a $f\in L^1([0,T];E)$

$$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ |t_i-t_{i-1}|<\delta\Longrightarrow\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|f(t)-f(t_i)\|\,dt\leq\frac{\varepsilon}{T}(t_i-t_{i-1}),$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|f(t)-f(t_i)\|\,dt &\leq\frac{\varepsilon}{T}\sum_{i=1}^{N}(t_i-t_{i-1})\\ &=\frac{\varepsilon}{T}t_N<\frac{\varepsilon}{T}T=\varepsilon.\end{aligned}$$

On pose $z:[0,T]\longrightarrow E$ *la fonction définie par* $z=z_i=y(t_i)$ *sur* $]t_{i-1},t_i]$, *on a*

$$f(t)\in\frac{dy}{dt}(t)+Ay(t),\qquad\forall t\in]t_{i-1},t_i],$$

pour $\varepsilon\to0$, *et d'après l'estimation* (3.14), *on obtient, en posant* $f_i=f(t_i)$

$$f_i\in\frac{y(t_i)-y(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}+Ay(t_i),\quad i=1,...,N,$$

donc

$$f_i\in\frac{z_i-z_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}+Az_i,\quad i=1,...,N.$$

Et

$$\|z(0)-y_0\|=\|z(0)-y(0)\|=\|z(0)-z(0)\|=0<\varepsilon.$$

Donc z *est une solution* ε*-approximante.*
On a, $\forall t\in[0,T]$, $\exists i\in\mathbb{N}$ *tel que* $t\in]t_{i-1},t_i]$ *et* $\|y(t)-z(t)\|=\|y(t)-y(t_i)\|$,
et y *est continue sur* $[0,T]$ *alors elle est continue sur* $]t_{i-1},t_i]\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\varepsilon>0$, $\forall t\in]t_{i-1},t_i]$, $|t-t_i|<\delta\Longrightarrow\|y(t)-y(t_i)\|<\varepsilon\Longrightarrow\|y(t)-z(t)\|<\varepsilon$,
donc y *est une solution faible de* (3.1).

Théorème 3.10. *Soient* $A:E\rightrightarrows E$ *un opérateur* ω*-accrétif,* $y_0\in\overline{D(A)}$, *et* $f\in L^1([0,T];E)$. *Supposons que pour tout* $\varepsilon>0$, *le problème* (3.1) *admet une solution* ε*-approximante. Alors le problème de Cauchy* (3.1) *admet une solution faible unique* y. *De plus, il existe une fonction continue* $\delta=\delta(\varepsilon)$ *tel que* $\delta(0)=0$ *et si* z *est une solution* ε*-approximante de* (3.1), *alors*

$$\|y(t)-z(t)\|\leq\delta(\varepsilon)\qquad\forall\ t\in[0,T-\varepsilon]. \tag{3.15}$$

Soient $f, g \in L^1([0,T];E)$ et $y, \bar{y}$ deux solutions faibles de (3.1) correspondant à f, g, respectivement. Alors

$$\|y(t)-\bar{y}(t)\| \leq e^{\omega(t-s)}\|y(s)-\bar{y}(s)\| + \int_s^t e^{\omega(t-\tau)}\big\langle y(\tau)-\bar{y}(\tau), f(\tau)-g(\tau)\big\rangle_+ d\tau \qquad \forall\ 0 \leq s < t \leq T. \tag{3.16}$$

Avant de passer à la démonstration de ce Théorème, nous avons besoin des deux Lemmes fondamentaux suivants. Suppose que z est une $D_A^\varepsilon(0=t_0,t_1,...,t_N;f_1,...,f_N)$ solution et w est une $D_A^\varepsilon(0=s_0,s_1,...,s_M;g_1,...,g_M)$ solution avec les valeurs nodales z_i et w_j respectivement. Posons $a_{i,j}=\|z_i-w_j\|$, $\delta_i=(t_i-t_{i-1})$, $\gamma_j=(s_j-s_{j-1})$.

Lemme 3.11. *Pour tout $1 \leq i \leq N$, et pour tout $1 \leq j \leq M$, on a*

$$a_{i,j} \leq \left(1-\omega\frac{\delta_i\gamma_j}{\delta_i+\gamma_j}\right)^{-1}\left(\frac{\gamma_j}{\delta_i+\gamma_j}a_{i-1,j}+\frac{\delta_i}{\delta_i+\gamma_j}a_{i,j-1}+\frac{\delta_i\gamma_j}{\delta_i+\gamma_j}\big\langle z_i-w_j, f_i-g_j\big\rangle_+\right). \tag{3.17}$$

De plus, pour tout $(x,v)\in Gph(A)$, on a

$$a_{i,0} \leq \alpha_{i,1}\|z_0-x\| + \|w_0-x\| + \sum_{k=1}^{i}\alpha_{i,k}\delta_k\left(\|f_k\|+\|v\|\right), \quad 0 \leq i \leq N, \tag{3.18}$$

et

$$a_{0,j} \leq \beta_{j,1}\|w_0-x\| + \|z_0-x\| + \sum_{k=1}^{j}\beta_{j,k}\gamma_k\left(\|g_k\|+\|v\|\right), \quad 0 \leq j \leq M, \tag{3.19}$$

où

$$\alpha_{i,k} = \prod_{m=k}^{i}(1-\omega\delta_m)^{-1}, \quad \beta_{j,k} = \prod_{m=k}^{j}(1-\omega\gamma_m)^{-1}. \tag{3.20}$$

Preuve.

Sachant que z et w sont des solutions ε-approximantes du problème (3.1) relatives aux ε-discrétisations $D_A^\varepsilon(0=t_0,t_1,...,t_N;f_1,...,f_N)$ et $D_A^\varepsilon(0=s_0,s_1,...,s_M;g_1,...,g_M)$, respectivement, alors

$$f_i \in \frac{z_i-z_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} + Az_i, \quad g_j \in \frac{w_j-w_{j-1}}{s_j-s_{j-1}} + Aw_j,$$

donc

$$f_i + \delta_i^{-1}(z_{i-1}-z_i) \in Az_i, \quad g_j + \gamma_j^{-1}(w_{j-1}-w_j) \in Aw_j, \tag{3.21}$$

et comme A est ω-accrétif, nous obtenons par la Proposition 2.16 (iii),

$$\left\langle z_i - w_j, f_i + \delta_i^{-1}(z_{i-1} - z_i) - g_j - \gamma_j^{-1}(w_{j-1} - w_j)\right\rangle_+ \geq -\omega\|z_i - w_j\|.$$

Par conséquent, utilisant la Proposition 2.13 (iv),(v) et $(viii)$, on aura

$$\begin{aligned}
-\omega\|z_i - w_j\| &\leq \left\langle z_i - w_j, f_i - g_j\right\rangle_+ + \delta_i^{-1}\left\langle z_i - w_j, z_{i-1} - z_i\right\rangle_+ + \gamma_j^{-1}\left\langle z_i - w_j, w_j - w_{j-1}\right\rangle_+ \\
&\leq \left\langle z_i - w_j, f_i - g_j\right\rangle_+ + \delta_i^{-1}\left(\|z_i - w_j + z_{i-1} - z_i\| - \|z_i - w_j\|\right) \\
&\quad + \gamma_j^{-1}\left(\|z_i - w_j + w_j - w_{j-1}\| - \|z_i - w_j\|\right) \\
&= \left\langle z_i - w_j, f_i - g_j\right\rangle_+ - \delta_i^{-1}\left(\|z_i - w_j\| - \|z_{i-1} - w_j\|\right) \\
&\quad - \gamma_j^{-1}\left(\|z_i - w_j\| - \|z_i - w_{j-1}\|\right),
\end{aligned}$$

c'est à dire,

$$-\omega a_{i,j} \leq \left\langle z_i - w_j, f_i - g_j\right\rangle_+ - \delta_i^{-1}a_{i,j} + \delta_i^{-1}a_{i-1,j} - \gamma_j^{-1}a_{i,j} + \gamma_j^{-1}a_{i,j-1},$$

par suite

$$\begin{aligned}
&(\delta_i^{-1} + \gamma_j^{-1} - \omega)a_{i,j} \leq \left\langle z_i - w_j, f_i - g_j\right\rangle_+ + \delta_i^{-1}a_{i-1,j} + \gamma_j^{-1}a_{i,j-1} \\
&\Longrightarrow \frac{\gamma_j + \delta_i - \omega\delta_i\gamma_j}{\delta_i\gamma_j}a_{i,j} \leq \left\langle z_i - w_j, f_i - g_j\right\rangle_+ + \delta_i^{-1}a_{i-1,j} + \gamma_j^{-1}a_{i,j-1} \\
&\Longrightarrow \frac{\gamma_j + \delta_i}{\gamma_j + \delta_i}\left(\frac{\gamma_j + \delta_i - \omega\delta_i\gamma_j}{\delta_i\gamma_j}\right)a_{i,j} \leq \left\langle z_i - w_j, f_i - g_j\right\rangle_+ + \delta_i^{-1}a_{i-1,j} + \gamma_j^{-1}a_{i,j-1} \\
&\Longrightarrow \frac{\gamma_j + \delta_i}{\delta_i\gamma_j}\left(1 - \omega\frac{\delta_i\gamma_j}{\gamma_j + \delta_i}\right)a_{i,j} \leq \left\langle z_i - w_j, f_i - g_j\right\rangle_+ + \delta_i^{-1}a_{i-1,j} + \gamma_j^{-1}a_{i,j-1}.
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors,

$$a_{i,j} \leq \left(1 - \omega\frac{\delta_i\gamma_j}{\gamma_j + \delta_i}\right)^{-1}\left(\frac{\gamma_j}{\gamma_j + \delta_i}a_{i-1,j} + \frac{\delta_i}{\gamma_j + \delta_i}a_{i,j-1} + \frac{\delta_i\gamma_j}{\gamma_j + \delta_i}\left\langle z_i - w_j, f_i - g_j\right\rangle_+\right).$$

D'où (3.17).

Soient maintenant $(x, v) \in Gph(A)$. On choisit $\lambda = \delta_i$, dans la Proposition 2.16 (ii), on obtient

$$(1 - \delta_i\omega)\|z_i - x\| \leq \left\|z_i - x + \delta_i\left(f_i + \delta_i^{-1}(z_{i-1} - z_i) - v\right)\right\|,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|z_i - x\| &\leq (1 - \delta_i\omega)^{-1}\left\|z_i - x + \delta_i(f_i - v) + z_{i-1} - z_i\right\| \\
&= (1 - \delta_i\omega)^{-1}\left\|z_{i-1} - x + \delta_i(f_i - v)\right\| \\
&\leq (1 - \delta_i\omega)^{-1}\left(\|z_{i-1} - x\| + \delta_i\left\|(f_i - v)\right\|\right) \\
&\leq (1 - \delta_i\omega)^{-1}\|z_{i-1} - x\| + (1 - \delta_i\omega)^{-1}\delta_i\left(\left\|f_i\right\| + \left\|v\right\|\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$
\begin{aligned}
a_{i,0} = &\|z_i - w_0\| \\
\leq &\|w_0 - x\| + \|z_i - x\| \\
\leq &\|w_0 - x\| + (1-\delta_i\omega)^{-1}\|z_{i-1} - x\| + (1-\delta_i\omega)^{-1}\delta_i \left(\|f_i\| + \|v\|\right) \\
\leq &\|w_0 - x\| + (1-\delta_i\omega)^{-1}\left((1-\delta_{i-1}\omega)^{-1}\|z_{i-2} - x\| + (1-\delta_{i-1}\omega)^{-1}\delta_{i-1}\left(\|f_{i-1}\| + \|v\|\right)\right) \\
&\quad + (1-\delta_i\omega)^{-1}\delta_i\left(\|f_i\| + \|v\|\right) \\
= &\|w_0 - x\| + (1-\delta_i\omega)^{-1}(1-\delta_{i-1}\omega)^{-1}\|z_{i-2} - x\| \\
&\quad + (1-\delta_i\omega)^{-1}(1-\delta_{i-1}\omega)^{-1}\delta_{i-1}\left(\|f_{i-1}\| + \|v\|\right) + (1-\delta_i\omega)^{-1}\delta_i\left(\|f_i\| + \|v\|\right) \\
\leq &\|w_0 - x\| + (1-\delta_i\omega)^{-1}(1-\delta_{i-1}\omega)^{-1}\Big((1-\delta_{i-2}\omega)^{-1}\|z_{i-3} - x\| \\
&+ (1-\delta_{i-2}\omega)^{-1}\delta_{i-2}\left(\|f_{i-2}\| + \|v\|\right)\Big) + (1-\delta_i\omega)^{-1}(1-\delta_{i-1}\omega)^{-1}\delta_{i-1}\left(\|f_{i-1}\| + \|v\|\right) \\
&\quad + (1-\delta_i\omega)^{-1}\delta_i\left(\|f_i\| + \|v\|\right).
\end{aligned}
$$

En continuant ainsi, on obtient

$$
\begin{aligned}
a_{i,0} \leq &\|w_0 - x\| + (1-\delta_i\omega)^{-1}(1-\delta_{i-1}\omega)^{-1}...(1-\delta_1\omega)^{-1}\|z_0 - x\| + (1-\delta_i\omega)^{-1}\delta_i\left(\|f_i\| + \|v\|\right) \\
&+ (1-\delta_i\omega)^{-1}(1-\delta_{i-1}\omega)^{-1}\delta_{i-1}\left(\|f_{i-1}\| + \|v\|\right) ... \\
&\qquad + (1-\delta_i\omega)^{-1}...(1-\delta_1\omega)^{-1}\delta_1\left(\|f_1\| + \|v\|\right) \\
= &\|w_0 - x\| + \left(\prod_{m=1}^{i}(1-\delta_m\omega)^{-1}\right)\|z_0 - x\| + \sum_{k=1}^{i}\left(\prod_{m=k}^{i}(1-\delta_m\omega)^{-1}\right)\delta_k\left(\|f_k\| + \|v\|\right).
\end{aligned}
$$

i.e.,

$$a_{i,0} \leq \alpha_{i,1}\|z_0 - x\| + \|w_0 - x\| + \sum_{k=1}^{i}\alpha_{i,k}\delta_k\left(\|f_k\| + \|v\|\right).$$

De la même manière, on obtient

$$a_{0,j} \leq \beta_{j,1}\|w_0 - x\| + \|z_0 - x\| + \sum_{k=1}^{j}\beta_{j,k}\gamma_k\left(\|g_k\| + \|v\|\right), \quad 0 \leq j \leq M.$$

■

Dans le but de fournir des estimations explicites pour les $a_{i,j}$, nous allons nous servir d'une technique des schémas numériques aux différences finies. Plus précisément, considérons les fonctions ψ et φ définies sur $[0,T]\times[0,T]$ et qui satisfont à l'équation hyperbolique linéaire du premier ordre

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,s) + \frac{\partial\psi}{\partial s}(t,s) - \omega\psi(t,s) = \varphi(t,s), \quad 0 \leq t \leq T,\ 0 \leq s \leq T, \tag{3.22}$$

et les conditions aux limites

$$\psi(t,s) = b(t-s) \quad \text{pour } t=0 \text{ } ou \text{ } s=0, \tag{3.23}$$

tel que $b \in C([-T,T])$ et φ sera définie ultérieurement.

Il existe une relation étroite entre l'équation (3.22) et l'inégalité (3.17). En effet, définissons la grille

$$D = \{(t_i, s_j);\ 0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_N < T, 0 = s_0 \leq s_1 \leq ... \leq s_M < T\},$$

et approximons l'équation (3.22) par les équations aux différences

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j}}{\delta_i} + \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1}}{\gamma_J} - \omega\psi_{i,j} = \varphi_{i,j}, \\ \text{pour } i = 1, ..., N,\ j = 1, ..., M, \end{aligned} \tag{3.24}$$

où $\delta_i = t_i - t_{i-1}$, $\gamma_j = s_j - s_{j-1}$, et $\varphi_{i,j}$ une approximation constante par morceaux de φ. On a

$$\begin{aligned} &\frac{\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j}}{\delta_i} + \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1}}{\gamma_j} - \omega\psi_{i,j} = \varphi_{i,j} \\ &\Longleftrightarrow \gamma_j\psi_{i,j} - \gamma_j\psi_{i-1,j} + \delta_i\psi_{i,j} - \delta_i\psi_{i,j-1} - \omega\delta_i\gamma_j\psi_{i,j} = \delta_i\gamma_j\varphi_{i,j} \\ &\Longleftrightarrow (\delta_i + \gamma_j - \omega\delta_i\gamma_j)\psi_{i,j} = \gamma_j\psi_{i-1,j} + \delta_i\psi_{i,j-1} + \delta_i\gamma_j\varphi_{i,j} \\ &\Longleftrightarrow \left(1 - \omega\frac{\delta_i\gamma_j}{\delta_i + \gamma_j}\right)\psi_{i,j} = \frac{\gamma_j}{\delta_i + \gamma_j}\psi_{i-1,j} + \frac{\delta_i}{\delta_i + \gamma_j}\psi_{i,j-1} + \frac{\delta_i\gamma_j}{\delta_i + \gamma_j}\varphi_{i,j}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \psi_{i,j} = \left(1 - \omega\frac{\delta_i\gamma_j}{\delta_i + \gamma_j}\right)^{-1}\left(\frac{\gamma_j}{\delta_i + \gamma_j}\psi_{i-1,j} + \frac{\delta_i}{\delta_i + \gamma_j}\psi_{i,j-1} + \frac{\delta_i\gamma_j}{\delta_i + \gamma_j}\varphi_{i,j}\right), \\ \forall\ i = 1, ..., N,\ j = 1, ..., M. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Dans la suite, nous allons prendre

$$\varphi(t,s) = \|f(t) - g(s)\|, \quad \varphi_{i,j} = \|f_i - g_j\|, \quad i = 1, ..., N,\ j = 1, ..., M,$$

où f_i, g_j sont les approximations de $f, g \in L^1([0,T]; E)$, respectivement.

L'intégration des équations (3.22) et (3.23), par la méthode des caractéristiques, nous donne :

si $0 \leq s < t \leq T$

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial t}(t,s) + \frac{\partial\psi}{\partial s}(t,s) - \omega\psi(t,s) = \varphi(t,s) \\ \psi(t,0) = b(t). \end{cases}$$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et soit $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, tel que

$$F\left(t, s, \frac{\partial \psi}{\partial t}(t,s), \frac{\partial \psi}{\partial s}(t,s), \psi(t,s)\right) = \varphi(t,s),$$

et

$$\begin{aligned} x : I &\longrightarrow \Omega \\ \tau &\longmapsto x(\tau) = (x_1(\tau), x_2(\tau)), \end{aligned}$$

une courbe de classe C^1 définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
On pose $z(\tau) = \psi(x(\tau))$ et $p(\tau) = \nabla\psi(x(\tau)) = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x(\tau)) + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x(\tau)) = p_1(\tau) + p_2(\tau)$, avec $p_1(\tau) = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x(\tau))$ et $p_2(\tau) = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x(\tau))$.
Alors

$$F(x(\tau), p(\tau), z(\tau)) = p_1(\tau) + p_2(\tau) - \omega z(\tau) = \varphi(x(\tau)).$$

Pour un moment, on va supposer que $\psi \in C^1(\Omega)$. Alors les fonctions z et p sont de classe C^1 sur I, l'une à valeurs réelles, l'autre à valeurs vectorielles. En dérivant les deux fonctions par rapport à τ, on obtient

$$z'(\tau) = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x(\tau))x_1'(\tau) + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x(\tau))x_2'(\tau) = p_1(\tau)x_1'(\tau) + p_2(\tau)x_2'(\tau).$$

Supposons que la courbe x est choisie telle que $x'(\tau) = \nabla_p F(x(\tau), z(\tau), p(\tau))$. Alors on peut simplifier les trois équations ci-dessus. Les fonctions x_1, x_2 et z vérifient un système d'équations différentielles, dit système des équations différentielles caractéristiques :

$$\begin{aligned} x_1'(\tau) &= \frac{\partial F}{\partial p_1}(x(\tau), z(\tau), p(\tau)) = 1, \\ x_2'(\tau) &= \frac{\partial F}{\partial p_2}(x(\tau), z(\tau), p(\tau)) = 1, \\ z'(\tau) &= p_1(\tau) + p_2(\tau) = \omega z(\tau) + \varphi(x(\tau)). \end{aligned}$$

Puisque $\psi(t, 0) = b(t)$ on pose $x_1(0) = \alpha$ et $x_2(0) = 0$, donc

$$z(0) = \psi(x(0)) = \psi(x_1(0), x_2(0)) = \psi(\alpha, 0) = b(\alpha).$$

En intégrant x_1', x_2' sur $[0, \tau]$, on obtient

$$\begin{cases} x_1(\tau) &= \tau + \alpha \\ x_2(\tau) &= \tau. \end{cases} \tag{3.26}$$

Maintenant on va résoudre l'équation différentielle suivante :

$$z'(\tau) = \omega z(\tau) + \varphi(x(\tau)). \tag{3.27}$$

La solution générale de l'équation homogène associée à (3.27) est

$$z(\tau) = ce^{\omega\tau},$$

pour $\tau = 0$ on a $z(0) = c = b(\alpha)$, donc la solution de l'équation homogène est

$$z(\tau) = b(\alpha)e^{\omega\tau}. \tag{3.28}$$

Par (3.26) et (3.28), on a $\begin{cases} \tau = x_2(\tau) \\ \alpha = x_1(\tau) - x_2(\tau) \\ z(\tau) = b(\alpha)e^{\omega\tau}. \end{cases}$

Par la méthode de la variation de la constante, la solution de l'équation non homogène est de la forme

$$z(\tau) = c(\tau)e^{\omega\tau},$$

alors

$$z'(\tau) = c'(\tau)e^{\omega\tau} + \omega c(\tau)e^{\omega\tau},$$

par l'équation (3.27), on a

$$c'(\tau)e^{\omega\tau} + \omega c(\tau)e^{\omega\tau} = \omega c(\tau)e^{\omega\tau} + \varphi(x(\tau)),$$

donc

$$c'(\tau) = e^{-\omega\tau}\varphi(x(\tau)),$$

en intégrant c' sur l'intervalle $[0, \tau]$ et en prenant en compte le fait que $z(0) = c(0) = b(\alpha)$, on trouve

$$\begin{aligned} c(\tau) &= c(0) + \int_0^\tau e^{-\omega r}\varphi(x(r))dr \\ &= b(\alpha) + \int_0^\tau e^{-\omega r}\varphi(x(r))dr. \end{aligned}$$

Donc la solution de l'équation (3.27) est donnée par

$$\begin{aligned} z(\tau) &= \left(b(\alpha) + \int_0^\tau e^{-\omega r}\varphi(x(r))dr\right)e^{\omega\tau} \\ &= e^{\omega\tau}b(\alpha) + \int_0^\tau e^{\omega(\tau-r)}\varphi(r+\alpha, r)dr, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\psi(t, s) = e^{\omega s}b(t-s) + \int_0^s e^{\omega(s-r)}\varphi(r+t-s, r)dr.$$

Maintenant, si $0 \leq t < s \leq T$, alors on a à résoudre

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t}(t,s) + \frac{\partial \psi}{\partial s}(t,s) - \omega \psi(t,s) = \varphi(t,s) \\ \psi(0,s) = b(-s). \end{cases}$$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et soit $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, tel que

$$F\left(t, s, \frac{\partial \psi}{\partial t}(t,s), \frac{\partial \psi}{\partial s}(t,s), \psi(t,s)\right) = \varphi(t,s),$$

et

$$\begin{aligned} x : I &\longrightarrow \Omega \\ \tau &\longmapsto x(\tau) = (x_1(\tau), x_2(\tau)), \end{aligned}$$

une courbe de classe C^1 définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
On pose $z(\tau) = \psi(x(\tau))$ et $p(\tau) = \nabla \psi(x(\tau)) = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x(\tau)) + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x(\tau)) = p_1(\tau) + p_2(\tau)$, avec $p_1(\tau) = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x(\tau))$ et $p_2(\tau) = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x(\tau))$.
Alors

$$F(x(\tau), p(\tau), z(\tau)) = p_1(\tau) + p_2(\tau) - \omega z(\tau) = \varphi(x(\tau)).$$

Comme dans le premier cas, en dérivant les deux fonctions z et p par rapport à τ, on obtient

$$z'(\tau) = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x(\tau))x_1'(\tau) + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x(\tau))x_2'(\tau) = p_1(\tau)x_1'(\tau) + p_2(\tau)x_2'(\tau).$$

Supposons que la courbe x est choisie telle que $x'(\tau) = \nabla_p F(x(\tau), z(\tau), p(\tau))$. Alors on peut simplifier les trois équations ci-dessus. Les fonctions x_1, x_2 et z vérifient un système d'équations différentielles, dit système des équations différentielles caractéristiques :

$$\begin{aligned} x_1'(\tau) &= \frac{\partial F}{\partial p_1}(x(\tau), z(\tau), p(\tau)) = 1, \\ x_2'(\tau) &= \frac{\partial F}{\partial p_2}(x(\tau), z(\tau), p(\tau)) = 1, \\ z'(\tau) &= p_1(\tau) + p_2(\tau) = \omega z(\tau) + \varphi(x(\tau)). \end{aligned}$$

Puisque $\psi(0,s) = b(-s)$, on pose $x_1(0) = 0$ et $x_2(0) = \beta$, donc

$$z(0) = \psi(x(0)) = \psi(x_1(0), x_2(0)) = \psi(0, \beta) = b(-\beta).$$

En intégrant x_1', x_2' sur $[0, \tau]$, on obtient

$$\begin{cases} x_1(\tau) &= \tau \\ x_2(\tau) &= \tau + \beta. \end{cases} \tag{3.29}$$

Maintenant on va résoudre l'équation différentielle suivante :

$$z'(\tau) = \omega z(\tau) + \varphi(x(\tau)). \tag{3.30}$$

La solution générale de l'équation homogène associée à (3.30) est

$$z(\tau) = ce^{\omega\tau},$$

pour $\tau = 0$ on a $z(0) = c = b(-\beta)$, donc la solution de l'équation homogène est

$$z(\tau) = b(-\beta)e^{\omega\tau}. \tag{3.31}$$

Par (3.29) et (3.31), on a $\begin{cases} \tau = x_1(\tau) \\ \beta = x_2(\tau) - x_1(\tau) \\ z(\tau) = b(-\beta)e^{\omega\tau}. \end{cases}$

Par la méthode de la variation de la constante, la solution de l'équation non homogène est de la forme

$$z(\tau) = c(\tau)e^{\omega\tau},$$

alors

$$z'(\tau) = c'(\tau)e^{\omega\tau} + \omega c(\tau)e^{\omega\tau},$$

par l'équation (3.30), on a

$$c'(\tau)e^{\omega\tau} + \omega c(\tau)e^{\omega\tau} = \omega c(\tau)e^{\omega\tau} + \varphi(x(\tau)),$$

donc

$$c'(\tau) = e^{-\omega\tau}\varphi(x(\tau)),$$

en intégrant c' sur l'intervalle $[0, \tau]$ et en prenant en compte le fait que $z(0) = c(0) = b(-\beta)$, on trouve

$$\begin{aligned} c(\tau) &= c(0) + \int_0^\tau e^{-\omega r}\varphi(x(r))dr \\ &= b(-\beta) + \int_0^\tau e^{-\omega r}\varphi(x(r))dr. \end{aligned}$$

Donc la solution de l'équation (3.30) est donnée par

$$\begin{aligned} z(\tau) &= \left(b(-\beta) + \int_0^\tau e^{-\omega r}\varphi(x(r))dr\right) e^{\omega\tau} \\ &= e^{\omega\tau}b(-\beta) + \int_0^\tau e^{\omega(\tau-r)}\varphi(r, r+\beta)dr, \end{aligned}$$

par conséquent
$$\psi(t,s) = e^{\omega t}b(t-s) + \int_0^t e^{\omega(t-r)}\varphi(r, r+s-t)dr.$$
En conclusion, nous avons
$$\psi(t,s) = \begin{cases} e^{\omega s}b(t-s) + \int_0^s e^{\omega(s-r)}\varphi(r+t-s, r)dr & si\ 0 \leq s < t \leq T, \\ e^{\omega t}b(t-s) + \int_0^t e^{\omega(t-r)}\varphi(r, r+s-t)dr & si\ 0 \leq t < s \leq T. \end{cases} \tag{3.32}$$
Dans la suite, posons $\psi(t,s) = G(b,\varphi)$, $\Omega =]0,T[\times]0,T[$, et pour toute fonction mesurable $\varphi : [0,T] \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$, posons
$$\|\varphi\|_\Omega = \inf\left\{\|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1} :\ |\varphi(t,s)| \leq |f(t)| + |g(s)|,\ p.p.\ (t,s) \in \Omega\right\}. \tag{3.33}$$
Soit $\Omega(\mathit{\Delta}) = [0, t_N] \times [0, s_M]$, et soient $B : [-s_M, t_N] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi : \Omega(\mathit{\Delta}) \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions étagées, c'est à dire, nous avons des réels $b_{i,j}, \phi_{i,j}$ tel que $b(0) = B(0)$ et
$$B(t+s) = b_{i,j} \qquad t_{i-1} < t \leq t_i,\ -s_j \leq s < -s_{j-1},$$
$$\phi(t,s) = \phi_{i,j} \qquad (t,s) \in\ ]t_{i-1}, t_i]\times]s_{j-1}, s_j].$$
Observons que par (3.25), si on pose
$$F(\psi_{i,j}) = \left(1 - \omega\frac{\delta_i\gamma_j}{\delta_i+\gamma_j}\right)^{-1}\left(\frac{\gamma_j}{\delta_i+\gamma_j}\psi_{i-1,j} + \frac{\delta_i}{\delta_i+\gamma_j}\psi_{i,j-1} + \frac{\delta_i\gamma_j}{\delta_i+\gamma_j}\varphi_{i,j}\right),$$
$$i = 1...N,\ j = 1...M,$$
alors par (3.24)
$$\begin{aligned} F(\psi_{i,j}) &= \left(1 - \omega\frac{\delta_i\gamma_j}{\delta_i+\gamma_j}\right)^{-1}\left(\frac{\gamma_j}{\delta_i+\gamma_j}\psi_{i-1,j} + \frac{\delta_i}{\delta_i+\gamma_j}\psi_{i,j-1} + \frac{\gamma_J}{\delta_i+\gamma_J}(\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j})\right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta_i}{\delta_i+\gamma_J}(\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1}) - \omega\frac{\delta_i\gamma_J}{\delta_i+\gamma_J}\psi_{i,j}\right) \\ &= \left(1 - \omega\frac{\delta_i\gamma_j}{\delta_i+\gamma_j}\right)^{-1}\left(1 - \omega\frac{\delta_i\gamma_j}{\delta_i+\gamma_j}\right)\psi_{i,j} \\ &= \psi_{i,j}. \end{aligned}$$

Par le Théorème du point fixe de Banach, si la mesure de $\mathit{\Delta}$, $m(\mathit{\Delta}) = max\big\{(\delta_i, \gamma_j); i, j\big\}$ est suffisamment petite, alors le système (3.32) avec les conditions aux limites
$$\psi_{i,j} = b_{i,j} \qquad i = 0\ ou\ j = 0, \tag{3.34}$$
admet une unique solution $\{\psi_{ij}\}$, $i = 1, ..., N$, $j = 1, ..., M$.

On note $\Psi = H_{\mathit{\Delta}}(B, \phi)$ la fonction constante par morceaux définie sur Ω par
$$\Psi(t,s) = \psi_{i,j}(t,s) \qquad (t,s) \in]t_{i-1}, t_i]\times]s_{j-1}, s_j],$$

i.e., Ψ est la solution de (3.25), (3.34).

Nous avons alors le Lemme suivant qui exprime la convergence du schéma (3.25), (3.34) lorsque $m(\varDelta) \longrightarrow 0$.

Lemme 3.12. *Soient $b \in C([-T,T])$ et $\varphi \in L^1(\Omega)$. Alors*

$$\|G(b,\varphi) - H_\varDelta(B,\phi)\|_{L^\infty(\Omega(\varDelta))} \longrightarrow 0 \tag{3.35}$$

lorsque

$$m(\varDelta) + \|b - B\|_{L^\infty(]-s_M,t_N[)} + \|\varphi - \phi\|_{\Omega(\varDelta)} \longrightarrow 0. \tag{3.36}$$

Preuve.

Nous allons montrer (3.35) juste dans le cas $\omega = 0$.

Nous montrons dans un premier temps l'estimation

$$\|H_\varDelta(B,\phi)\|_{L^\infty(\Omega(\varDelta))} \leq \|B\|_{L^\infty(]-s_M,t_N[)} + \|\phi\|_{\Omega(\varDelta)}. \tag{3.37}$$

On a $\Psi = H_\varDelta(B,\phi) = H_\varDelta(B,0) + H_\varDelta(0,\phi)$, tel que

$$H_\varDelta(B,0) = \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(N,M)} \lambda_i b_{i,j} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1,$$

donc

$$\|H_\varDelta(B,0)\|_{L^\infty(\Omega(\varDelta))} = \left\| \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(N,M)} \lambda_i b_{i,j} \right\|_{L^\infty(\Omega(\varDelta))} \leq \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(N,M)} \lambda_i \|B\|_{L^\infty(]-s_M,t_N[)} = \|B\|_{L^\infty(]-s_M,t_N[)}.$$

Montrons que

$$\|H_\varDelta(0,\phi)\|_{L^\infty(\Omega(\varDelta))} \leq \|\phi\|_{\Omega(\varDelta)}.$$

On a

$$\|f\|_{L^1([0,T];E)} = \int_0^T |f(t)|dt = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f_i|dt,$$

on pose $\alpha_i = |f_i|$, alors

$$\|f\|_{L^1([0,T];E)} = \sum_{i=1}^{N} \delta_i \alpha_i.$$

De la même manière, en posant $\beta_j = |g_j|$, on trouve que

$$\|g\|_{L^1([0,T];E)} = \sum_{j=1}^{M} \gamma_j \beta_j,$$

Par la définition (3.33) de la norme $\|.\|_{\Omega(\Delta)}$, on a

$$\|\phi\|_{\Omega(\Delta)} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{N} \delta_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{M} \gamma_j \beta_j, \quad \alpha_i + \beta_j \geq |\phi_{i,j}|,\ i = 1, .., N,\ j = 1, .., M \right\}. \quad (3.38)$$

Soient $g_{i,j} = \alpha_i + \beta_j \geq |\phi_{i,j}|$ et

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{i} \alpha_k \delta_k + \sum_{k=1}^{j} \beta_k \gamma_k.$$

Alors $\psi_{i,j} = d_{i,j}$ satisfont l'équation (3.25) avec $\phi_{i,j} = g_{i,j}$. En effet, comme on a supposé $\omega = 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma_j}{\delta_i + \gamma_j} d_{i-1,j} + \frac{\delta_i}{\delta_i + \gamma_j} d_{i,j-1} + \frac{\delta_i \gamma_j}{\delta_i + \gamma_j} g_{i,j} \\
&= \frac{\gamma_j}{\delta_i + \gamma_j} \left(\sum_{k=1}^{i-1} \delta_k \alpha_k + \sum_{k=1}^{j} \beta_k \gamma_k \right) + \frac{\delta_i}{\delta_i + \gamma_j} \left(\sum_{k=1}^{i} \delta_k \alpha_k + \sum_{k=1}^{j-1} \beta_k \gamma_k \right) + \frac{\delta_i \gamma_j}{\delta_i + \gamma_j} (\alpha_i + \beta_j) \\
&= \left(\frac{\gamma_j}{\delta_i + \gamma_j} \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k \delta_k + \frac{\delta_i}{\delta_i + \gamma_j} \sum_{k=1}^{i} \alpha_k \delta_k + \frac{\delta_i \gamma_j}{\delta_i + \gamma_j} \alpha_i \right) + \left(\frac{\gamma_j}{\delta_i + \gamma_j} \sum_{k=1}^{j} \beta_k \gamma_k \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\delta_i}{\delta_i + \gamma_j} \sum_{k=1}^{j-1} \beta_k \gamma_k + \frac{\delta_i \gamma_j}{\delta_i + \gamma_j} \beta_j \right) \\
&= \left(\frac{\gamma_j}{\delta_i + \gamma_j} \left(\sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k \delta_k + \alpha_i \delta_i \right) + \frac{\delta_i}{\delta_i + \gamma_j} \sum_{k=1}^{i} \alpha_k \delta_k \right) + \left(\frac{\gamma_j}{\delta_i + \gamma_j} \sum_{k=1}^{j} \beta_k \gamma_k \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\delta_i}{\delta_i + \gamma_j} \left(\sum_{k=1}^{j-1} \beta_k \gamma_k + \beta_j \gamma_j \right) \right) \\
&= \frac{\gamma_j}{\delta_i + \gamma_j} \sum_{k=1}^{i} \alpha_k \delta_k + \frac{\delta_i}{\delta_i + \gamma_j} \sum_{k=1}^{i} \alpha_k \delta_k + \frac{\gamma_j}{\delta_i + \gamma_j} \sum_{k=1}^{j} \beta_k \gamma_k + \frac{\delta_i}{\delta_i + \gamma_j} \sum_{k=1}^{j} \beta_k \gamma_k \\
&= \frac{\delta_i + \gamma_j}{\delta_i + \gamma_j} \sum_{k=1}^{i} \alpha_k \delta_k + \frac{\delta_i + \gamma_j}{\delta_i + \gamma_j} \sum_{k=1}^{j} \beta_k \gamma_k \\
&= \sum_{k=1}^{i} \alpha_k \delta_k + \sum_{k=1}^{j} \beta_k \gamma_k = d_{i,j}.
\end{aligned}$$

Par conséquent $d = H_\Delta(\tilde{B}, g)$ avec $d = \{d_{i,j}\}$, $d_{i,j} = \widetilde{b}_{i,j}$ pour $i = 0$ ou $j = 0$, $\widetilde{B} = \{\widetilde{b}_{i,j}\}$ et $g = \{g_{i,j}\}$, et tel que $g_{i,j} \geq |\phi_{i,j}|$.
Si $b_{i,j} \geq 0$, alors

$$d = H_\Delta(\widetilde{B}, g) = H_\Delta(\widetilde{B}, 0) + H_\Delta(0, g) \geq H_\Delta(0, g) \geq H_\Delta(0, \phi).$$

On a

$$H_\Delta(0, \phi) \leq d \Longrightarrow \|H_\Delta(0, \phi)\|_{L^\infty(\Omega(\Delta))} \leq d,$$

donc

$$\|H_\Delta(0,\phi)\|_{L^\infty(\Omega(\Delta))} \le d_{i,j}, \quad \forall\ i = 1,..,N,\ j = 1,..,M,$$

par suite

$$\|H_\Delta(0,\phi)\|_{L^\infty(\Omega(\Delta))} \le \inf\{d_{i,j}\},$$

d'après l'estimation (3.38), on obtient

$$\|H_\Delta(0,\phi)\|_{L^\infty(\Omega(\Delta))} \le \|\phi\|_{\Omega(\Delta)}.$$

Maintenant, posons $\widetilde{\psi} = G(\widetilde{b},\widetilde{\varphi})$ et supposons d'abord que $\widetilde{\psi}_{tt}, \widetilde{\psi}_{ss} \in L^\infty(\Omega)$. Alors par (3.24) on peut voir que $\widetilde{\psi}_{i,j} = \widetilde{\psi}(t_i, s_j)$ satisfait le système

$$\frac{\widetilde{\psi}_{i,j} - \widetilde{\psi}_{i-1,j}}{\delta_i} + \frac{\widetilde{\psi}_{i,j} - \widetilde{\psi}_{i,j-1}}{\gamma_j} = \widetilde{\varphi}_{i,j} + e_{i,j}, \qquad \widetilde{\psi}_{i,0} = \widetilde{b}(t_i),\ \widetilde{\psi}_{0,j} = \widetilde{b}(-s_j),$$
$$i = 0,1,...,N,\ j = 0,1,...,M,$$

où $e = \{e_{i,j}\}$ satisfait l'estimation

$$|e_{i,j}| \le \gamma_j \|\widetilde{\psi}_{ss}\|_{L^\infty(\Omega)} + \delta_i \|\widetilde{\psi}_{tt}\|_{L^\infty(\Omega)}, \forall i,j.$$

D'où

$$\begin{aligned} |e_{i,j}| &\le max(\delta_i,\gamma_j)(\|\widetilde{\psi}_{ss}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\widetilde{\psi}_{tt}\|_{L^\infty(\Omega)}) \qquad i = 1,...,N,\ j = 1,...,M \\ &= m(\Delta)\left(\|\widetilde{\psi}_{ss}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\widetilde{\psi}_{tt}\|_{L^\infty(\Omega)}\right), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \|e\|_{\Omega(\Delta)} = \inf\Bigg\{ &\sum_{i=1}^N \delta_i m(\Delta)\|\widetilde{\psi}_{tt}\|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{j=1}^M \gamma_j m(\Delta)\|\widetilde{\psi}_{ss}\|_{L^\infty(\Omega)}, \\ &|e_{i,j}| \le m(\Delta)\left(\|\widetilde{\psi}_{ss}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\widetilde{\psi}_{tt}\|_{L^\infty(\Omega)}\right),\ i = 1,...,N,\ j = 1,...,M\Bigg\} \\ = \inf\Bigg\{ &m(\Delta)\|\widetilde{\psi}_{tt}\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{i=1}^N \delta_i + m(\Delta)\|\widetilde{\psi}_{ss}\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{j=1}^M \gamma_j, \\ &|e_{i,j}| \le m(\Delta)\left(\|\widetilde{\psi}_{ss}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\widetilde{\psi}_{tt}\|_{L^\infty(\Omega)}\right),\ i = 1,...,N,\ j = 1,...,M\Bigg\} \\ \le &\left(m(\Delta)\|\widetilde{\psi}_{tt}\|_{L^\infty(\Omega)} + m(\Delta)\|\widetilde{\psi}_{ss}\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \sup\left(\sum_{i=1}^N \delta_i, \sum_{j=1}^M \gamma_j\right) \\ = &\, c\ m(\Delta)\left(\|\widetilde{\psi}_{tt}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\widetilde{\psi}_{ss}\|_{L^\infty(\Omega)}\right), \end{aligned}$$

où

$$c = \sup\left(\sum_{i=1}^N \delta_i, \sum_{j=1}^M \gamma_j\right),$$

par suite

$$\begin{aligned}\|G(\widetilde{b},\widetilde{\varphi})-H_{\Delta}(B,\phi)\|_{L^\infty(\Omega(\Delta))} &= \|H_{\Delta}(\widetilde{b},\widetilde{\varphi}+e)-H_{\Delta}(B,\phi)\|_{L^\infty(\Omega(\Delta))}\\ &= \|H_{\Delta}(\widetilde{b}-B,\widetilde{\varphi}+e-\phi)\|_{L^\infty(\Omega(\Delta))}.\end{aligned}$$

D'après (3.37)

$$\begin{aligned}\|H_{\Delta}(\widetilde{b}-B,\widetilde{\varphi}+e-\phi)\|_{L^\infty(\Omega(\Delta))} &\leq \|\widetilde{b}-B\|_{L^\infty\left(]-s_M,t_N[\right)}+\|\widetilde{\varphi}+e-\phi\|_{\Omega(\Delta)}\\ &\leq \|\widetilde{b}-B\|_{L^\infty\left(]-s_M,t_N[\right)}+\|\widetilde{\varphi}-\phi\|_{\Omega(\Delta)}+\|e\|_{\Omega(\Delta)}\\ &\leq \|\widetilde{b}-B\|_{L^\infty\left(]-s_M,t_N[\right)}+\|\widetilde{\varphi}-\phi\|_{\Omega(\Delta)}\\ &\quad + c\, m(\Delta)\left(\|\widetilde{\psi}_{tt}\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\widetilde{\psi}_{ss}\|_{L^\infty(\Omega)}\right).\end{aligned} \tag{3.39}$$

Maintenant, soient $\varphi,\widetilde{\varphi}\in L^1(\Omega)$, $b,\widetilde{b}\in C([-T,T])$ et soit $\widetilde{\psi}=G(\widetilde{b},\widetilde{\varphi})$. On a

$$\begin{aligned}&\|G(b,\varphi)-H_{\Delta}(B,\phi)\|_{L^\infty(\Omega(\Delta))} = \|G(b,\varphi)-G(\widetilde{b},\widetilde{\varphi})+G(\widetilde{b},\widetilde{\varphi})-H_{\Delta}(B,\phi)\|_{L^\infty(\Omega(\Delta))}\\ &\leq \|G(b,\varphi)-G(\widetilde{b},\widetilde{\varphi})\|_{L^\infty(\Omega(\Delta))}+\|G(\widetilde{b},\widetilde{\varphi})-H_{\Delta}(B,\phi)\|_{L^\infty(\Omega(\Delta))}\\ &= \|H_{\Delta}(b-\widetilde{b},\varphi-\widetilde{\varphi}-e)\|_{L^\infty(\Omega(\Delta))}+\|G(\widetilde{b},\widetilde{\varphi})-H_{\Delta}(B,\phi)\|_{L^\infty(\Omega(\Delta))}\\ &= \|H_{\Delta}(b-\widetilde{b},\varphi-\widetilde{\varphi}-e)\|_{L^\infty(\Omega(\Delta))}+\|H_{\Delta}(\widetilde{b}-B,\widetilde{\varphi}+e-\varphi)\|_{L^\infty(\Omega(\Delta))}.\end{aligned} \tag{3.40}$$

Par (3.39), on a

$$\begin{aligned}\|G(b,\varphi)-H_{\Delta}(B,\phi)\|_{L^\infty(\Omega(\Delta))} &\leq \|b-\widetilde{b}\|_{L^\infty\left(]-s_M,t_N[\right)}+\|\varphi-\widetilde{\varphi}\|_{\Omega(\Delta)}\\ &\quad + c\, m(\Delta)\left(\|\widetilde{\psi}_{tt}\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\widetilde{\psi}_{ss}\|_{L^\infty(\Omega)}\right)+\|\widetilde{b}-B\|_{L^\infty(]-s_M,t_N[)}\\ &\quad + \|\widetilde{\varphi}-\phi\|_{\Omega(\Delta)}+c\, m(\Delta)\left(\|\widetilde{\psi}_{tt}\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\widetilde{\psi}_{ss}\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\\ &\leq \|b-\widetilde{b}\|_{L^\infty\left(]-s_M,t_N[\right)}+\|\varphi-\widetilde{\varphi}\|_{\Omega(\Delta)}+\|B-b\|_{L^\infty\left(]-s_M,t_N[\right)}\\ &\quad + \|b-\widetilde{b}\|_{L^\infty\left(]-s_M,t_N[\right)}+\|\widetilde{\varphi}-\phi\|_{\Omega(\Delta)}\\ &\quad + 2c\, m(\Delta)\left(\|\widetilde{\psi}_{tt}\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\widetilde{\psi}_{ss}\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\\ &= 2\|b-\widetilde{b}\|_{L^\infty\left(]-s_M,t_N[\right)}+\|\varphi-\widetilde{\varphi}\|_{\Omega(\Delta)}+\|B-b\|_{L^\infty\left(]-s_M,t_N[\right)}\\ &\quad + \|\widetilde{\varphi}-\phi\|_{\Omega(\Delta)}+2c\, m(\Delta)\left(\|\widetilde{\psi}_{tt}\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\widetilde{\psi}_{ss}\|_{L^\infty(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Soit $\eta>0$, on peut choisir $\widetilde{b}$ et $\widetilde{\varphi}$, tel que

$$\|b-\widetilde{b}\|_{L^\infty\left(]-s_M,t_N[\right)}\leq\eta \quad et \quad \|\varphi-\widetilde{\varphi}\|_{\Omega(\Delta)}\leq\eta,$$

d'après l'hypothèse

$$m(\Delta)+\|b-B\|_{L^\infty(]-s_M,t_N[)}+\|\varphi-\phi\|_{\Omega(\Delta)}\longrightarrow 0.$$

Alors

$$\|G(b,\varphi)-H_{\Delta}(B,\phi)\|_{L^\infty(\Omega(\Delta))}\leq 4\eta,$$

pour $\eta \longrightarrow 0$, on trouve

$$\|G(b,\varphi)-H_{\Delta}(B,\phi)\|_{L^\infty(\Omega(\Delta))}\longrightarrow 0.$$

■

Preuve. du Théorème 3.10.

Soit $(x,v)\in Gph(A)$ tel que $\|y_0-x\|\leq\varepsilon$, nous appliquons le Lemme 3.12, avec $\varphi(t,s)=\big\|f(t)-g(s)\big\|$, $\phi=\{\phi_{i,j}\}$, $\phi_{i,j}=\big\|f_i-g_j\big\|$, $1\leq i\leq N$, $1\leq j\leq M$, f_i et g_j sont les valeurs de f et g aux points $t_i,\ s_j$ respectivement, et

$$\begin{aligned}
&B(t)=b_{i,0}, \qquad t_{i-1}<t\leq t_i,\ i=1,...,N,\\
&B(s)=b_{0,j}, \qquad -s_j<s\leq -s_{j-1},\ j=1,...,M,\\
&b(t)=e^{\omega t}\|z_0-x\|+\|w_0-x\|+\int_0^t e^{\omega(t-\tau)}\big(\big\|f(\tau)\big\|+\big\|v\big\|\big)d\tau \qquad \forall t\in[0,T],\\
&b(-s)=e^{\omega s}\|w_0-x\|+\|z_0-x\|+\int_0^s e^{\omega(s-\tau)}\big(\big\|g(\tau)\big\|+\big\|v\big\|\big)d\tau \qquad \forall s\in[0,T],
\end{aligned}$$

ici, $b_{i,0}$ est le côté droit de (3.18) et $b_{0,j}$ est le côté droit de (3.19).

On a

$$\begin{aligned}
|b(t)-B(t)| &= |b(t)-b_{i,0}|\\
&=\Big|e^{\omega t}\|z_0-x\|+\|w_0-x\|+\int_0^t e^{\omega(t-\tau)}\big(\big\|f(\tau)\big\|+\big\|v\big\|\big)d\tau-\alpha_{i,1}\|z_0-x\|-\|w_0-x\|\\
&\qquad -\sum_{k=1}^{i}\alpha_{i,k}\delta_k\left(\big\|f_k\big\|+\big\|v\big\|\right)\Big|\\
&=\Big|(e^{\omega t}-\alpha_{i,1})\|z_0-x\|+\int_0^t e^{\omega(t-\tau)}\big(\big\|f(\tau)\big\|+\big\|v\big\|\big)d\tau-\sum_{k=1}^{i}\alpha_{i,k}\delta_k\left(\big\|f_k\big\|+\big\|v\big\|\right)\Big|\\
&=\Big|(e^{\omega t}-\alpha_{i,1})\|z_0-x\|+\int_0^t e^{\omega(t-\tau)}\big(\big\|f(\tau)\big\|+\big\|v\big\|\big)d\tau-\sum_{k=1}^{i}\alpha_{i,k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\big\|f_k\big\|+\big\|v\big\|\right)d\tau\Big|\\
&\leq\Big|(e^{\omega t}-\alpha_{i,1})\|z_0-x\|+\int_0^t e^{\omega t}\big(\big\|f(\tau)\big\|+\big\|v\big\|\big)d\tau-\sum_{k=1}^{i}\alpha_{i,k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\big\|f_k\big\|+\big\|v\big\|\right)d\tau\Big|
\end{aligned}$$

$$= \Big|(e^{\omega t}-\alpha_{i,1})\|z_0-x\| + \sum_{k=1}^{i-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\omega t}\big(\|f(\tau)\|+\|v\|\big)d\tau + \int_{t_{i-1}}^{t} e^{wt}\big(\|f(\tau)\|+\|v\|\big)d\tau$$
$$- \sum_{k=1}^{i}\alpha_{i,k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\|f_k\|+\|v\|\right)d\tau\Big|$$
$$= \Big|(e^{\omega t}-\alpha_{i,1})\|z_0-x\| + \sum_{k=1}^{i-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\omega t}\big(\|f(\tau)\|-\|f_k\|\big)d\tau + \sum_{k=1}^{i-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\omega t}\big(\|f_k\|+\|v\|\big)d\tau$$
$$+ \int_{t_{i-1}}^{t} e^{wt}\big(\|f(\tau)\|+\|v\|\big)d\tau - \sum_{k=1}^{i}\alpha_{i,k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\|f_k\|+\|v\|\right)d\tau\Big|$$
$$= \Big|(e^{\omega t}-\alpha_{i,1})\|z_0-x\| + \sum_{k=1}^{i-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\omega t}\big(\|f(\tau)\|-\|f_k\|\big)d\tau + \sum_{k=1}^{i-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k} (e^{\omega t}-\alpha_{i,k})\big(\|f_k\|+\|v\|\big)d\tau$$
$$+ \int_{t_{i-1}}^{t} e^{wt}\big(\|f(\tau)\|+\|v\|\big)d\tau - \alpha_{i,i}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\|f_i\|+\|v\|\right)d\tau\Big|$$
$$= \Big|(e^{\omega t}-\alpha_{i,1})\|z_0-x\| + \sum_{k=1}^{i-1}e^{\omega t}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \big(\|f(\tau)\|-\|f_k\|\big)d\tau + \sum_{k=1}^{i-1}(e^{\omega t}-\alpha_{i,k})\int_{t_{k-1}}^{t_k} \big(\|f_k\|+\|v\|\big)d\tau$$
$$+ \int_{t_{i-1}}^{t} e^{wt}\big(\|f(\tau)\|+\|v\|\big)d\tau - \alpha_{i,i}\int_{t_{i-1}}^{t}\left(\|f_i\|+\|v\|\right)d\tau - \alpha_{i,i}\int_{t}^{t_i}\left(\|f_i\|+\|v\|\right)d\tau\Big|$$
$$= \Big|(e^{\omega t}-\alpha_{i,1})\|z_0-x\| + \sum_{k=1}^{i-1}e^{\omega t}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \big(\|f(\tau)\|-\|f_k\|\big)d\tau + \sum_{k=1}^{i-1}(e^{\omega t}-\alpha_{i,k})\int_{t_{k-1}}^{t_k} \big(\|f_k\|+\|v\|\big)d\tau$$
$$+ \int_{t_{i-1}}^{t} (e^{wt}-\alpha_{i,i})\big(\|f(\tau)\|+\|f_i\|+\|v\|\big)d\tau + \int_{t_{i-1}}^{t}\left(\alpha_{i,i}\|f(\tau)\|-e^{wt}\|f_i\|\right)d\tau$$
$$- \alpha_{i,i}\int_{t}^{t_i}\left(\|f_i\|+\|v\|\right)d\tau\Big|$$
$$\leq \big|(e^{\omega t}-\alpha_{i,1})\big|\|z_0-x\| + \sum_{k=1}^{i-1}e^{\omega t}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \Big|\big(\|f(\tau)\|-\|f_k\|\big)\Big|d\tau$$
$$+ \sum_{k=1}^{i-1}\big|(e^{\omega t}-\alpha_{i,k})\big|\int_{t_{k-1}}^{t_k} \big(\|f_k\|+\|v\|\big)d\tau + \int_{t_{i-1}}^{t}\big|(e^{wt}-\alpha_{i,i})\big|\big(\|f(\tau)\|+\|f_i\|+\|v\|\big)d\tau$$
$$+ \int_{t_{i-1}}^{t}\Big|\left(\alpha_{i,i}\|f(\tau)\|-e^{wt}\|f_i\|\right)\Big|d\tau + \big|\alpha_{i,i}\big|\int_{t}^{t_i}\left(\|f_i\|+\|v\|\right)d\tau$$
$$\leq \big|(e^{\omega t}-\alpha_{i,1})\big|\|z_0-x\| + \sum_{k=1}^{i-1}e^{\omega t}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|f(\tau)-f_k\|d\tau + \sum_{k=1}^{i-1}\big|(e^{\omega t}-\alpha_{i,k})\big|\big(\|f_k\|+\|v\|\big)(t_k-t_{k-1})$$
$$+ \int_{t_{i-1}}^{t}\big|(e^{wt}-\alpha_{i,i})\big|\big(\|f(\tau)\|+\|f_i\|+\|v\|\big)d\tau + \int_{t_{i-1}}^{t}\Big|\left(\alpha_{i,i}\|f(\tau)\|-e^{wt}\|f_i\|\right)\Big|d\tau$$
$$+ \big|\alpha_{i,i}\big|\int_{t}^{t_i}\left(\|f_i\|+\|v\|\right)d\tau,$$

par (3.10) et (3.11), on obtient

$$|b(t)-B(t)| \leq \big|(e^{\omega t}-\alpha_{i,1})\big|\varepsilon + e^{wt}\varepsilon + \sum_{k=1}^{i-1}\varepsilon\big|(e^{\omega t}-\alpha_{i,k})\big|\big(\|f_k\|+\|v\|\big) + \int_{t_{i-1}}^{t}\big|(e^{wt}-\alpha_{i,i})\big|$$

$$\big(\|f(\tau)\|+\|f_i\|+\|v\|\big)d\tau + \int_{t_{i-1}}^{t}\Big|\big(\alpha_{i,i}\|f(\tau)\|-e^{wt}\|f_i\|\big)\Big|d\tau + |\alpha_{i,i}|\int_{t}^{t_i}\big(\|f_i\|+\|v\|\big)\,d\tau \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Par conséquent

$$B(t)\to b(t) = e^{\omega t}\|z_0-x\| + \|w_0-x\| + \int_0^t e^{\omega(t-\tau)}\big(\|f(\tau)\|+\|v\|\big)d\tau,$$
$$\forall t\in[0,T].$$

De la même manière, on a

$$B(s)\to b(-s) = e^{\omega s}\|w_0-x\| + \|z_0-x\| + \int_0^s e^{\omega(s-\tau)}\big(\|g(\tau)\|+\|v\|\big)d\tau,$$
$$\forall s\in[0,T].$$

D'autre part,

$$\|\varphi-\phi\|_{\Omega(\Delta)} = \inf\Big\{\big\|f-f_i\big\|_{L^1([0,T];E)} + \big\|g-g_j\big\|_{L^1([0,T];E)};\ \big|\varphi(t,s)-\phi\big| \leq |f(t)-f_j| + |g(s)-g_j|\,,$$
$$(t,s)\in\Omega\Big\},$$

donc, d'après l'estimation (3.11)

$$\begin{aligned}
\|\varphi-\phi\|_{\Omega(\Delta)} &\leq \big\|f-f_i\big\|_{L^1([0,T];E)} + \big\|g-g_j\big\|_{L^1([0,T];E)} \qquad \forall i=1,...,N,\ j=1,...,M\\
&= \int_0^T\big\|f(t)-f_i\big\|dt + \int_0^T\big\|g(s)-g_j\big\|ds \qquad \forall i=1,...,N,\ j=1,...,M\\
&= \sum_{i=1}^{N}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\big\|f(t)-f_i\big\|dt + \sum_{j=1}^{M}\int_{s_{j-1}}^{s_j}\big\|g(s)-g_j\big\|ds\\
&\leq \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

et par le Lemme 3.11

$$a_{i,j} = \|z_i-w_j\| \leq \left(1-\omega\frac{\delta_i\gamma_j}{\delta_i+\gamma_j}\right)^{-1}\left(\frac{\gamma_j}{\delta_i+\gamma_j}a_{i-1,j} + \frac{\delta_i}{\delta_i+\gamma_j}a_{i,j-1}\right.$$
$$\left. + \frac{\delta_i\gamma_j}{\delta_i+\gamma_j}\big\langle z_i-w_j, f_i-g_j\big\rangle_+\right),$$

d'après la Proposition 2.13 (i), on aura

$$\begin{aligned}
a_{i,j} &\leq \left(1-\omega\frac{\delta_i\gamma_j}{\delta_i+\gamma_j}\right)^{-1}\left(\frac{\gamma_j}{\delta_i+\gamma_j}a_{i-1,j} + \frac{\delta_i}{\delta_i+\gamma_j}a_{i,j-1} + \frac{\delta_i\gamma_j}{\delta_i+\gamma_j}\big\|f_i-g_j\big\|\right)\\
&= \left(1-\omega\frac{\delta_i\gamma_j}{\delta_i+\gamma_j}\right)^{-1}\left(\frac{\gamma_j}{\delta_i+\gamma_j}a_{i-1,j} + \frac{\delta_i}{\delta_i+\gamma_j}a_{i,j-1} + \frac{\delta_i\gamma_j}{\delta_i+\gamma_j}\phi_{i,j}\right),
\end{aligned}$$

c'est à dire,

$$a_{i,j} \leq \psi_{i,j} = H_\Delta(B,\phi)_{i,j}, \qquad \forall i = 1,...,N, \ j = 1,...,M,$$

donc $\|z(t) - w(s)\| \leq H_\Delta(B,\phi)$, et par le Lemme 3.12, pour tout $\eta > 0$, on a

$$\|z(t) - w(s)\| \leq G(b,\varphi)(t,s) + \eta, \qquad \forall t,s \in [0,T], \tag{3.41}$$

pour $0 < \varepsilon < \eta$. Si $f \equiv g$ et $z_0 = w_0$, d'après (3.32)

$$G(b,\varphi)(t,t) = e^{\omega t}b(0) + \int_0^t e^{\omega(t-\tau)}\varphi(\tau,\tau)d\tau, \qquad \forall 0 \leq t \leq T,$$

et

$$\varphi(\tau,\tau) = \big\|f(\tau) - g(\tau)\big\| = 0,$$

donc

$$\begin{aligned} G(b,\varphi)(t,t) &= e^{\omega t}b(0) = e^{\omega t}\left(e^{\omega 0}\|z_0 - x\| + \|z_0 - x\|\right) \\ &= 2e^{\omega t}\|z_0 - x\|, \end{aligned}$$

en remplaçant dans (3.41), on trouve

$$\|z(t) - w(t)\| \leq \eta + 2e^{\omega t}\|z_0 - x\|, \quad \forall x \in D(A), \ \forall t \in [0,T].$$

Puisque $\|y_0 - x\| \leq \varepsilon$, $y_0 \in \overline{D(A)}$, et x est arbitraire dans $D(A)$, il s'ensuit que la suite (z_ε) de solutions ε-approximantes satisfait le critère de Cauchy, et donc $y(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} z_\varepsilon(t)$ existe uniformément sur $[0,T]$. Maintenant, on prend $s = t + h$ et $f \equiv g$ et $z_0 = w_0 = y_0$, donc $z_\varepsilon = w_\varepsilon$. D'après (3.32) et (3.41), on a

$$\begin{aligned} \|z_\varepsilon(t) - w_\varepsilon(t+h)\| &= \|w_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t+h)\| \\ &\leq G(b,\varphi)(t+h,t) + \eta \\ &= e^{\omega t}b(h) + \int_0^t e^{\omega(t-\tau)}\varphi(\tau+h,\tau)d\tau + \eta \\ &= e^{\omega t}\left(e^{\omega h}\|z_0 - x\| + \|w_0 - x\|\right) + \int_0^h e^{\omega(t+h-\tau)}\left(\big\|f(\tau)\big\| + \big\|v\big\|\right)d\tau \\ &\qquad + \int_0^t e^{\omega(t-\tau)}\big\|f(\tau+h) - f(\tau)\big\|d\tau + \eta \\ &= e^{\omega t}\left(e^{\omega h} + 1\right)\|y_0 - x\| + \int_0^h e^{\omega(t+h-\tau)}\left(\big\|f(\tau)\big\| + \big\|v\big\|\right)d\tau \\ &\qquad + \int_0^t e^{\omega(t-\tau)}\big\|f(\tau+h) - f(\tau)\big\|d\tau + \eta, \end{aligned}$$

quand $\eta \to 0$ alors $\varepsilon \to 0$, donc

$$\begin{aligned}\|y(t+h)-y(t)\| \leq e^{\omega t}\left(e^{\omega h}+1\right)\|y_0-x\| &+ \int_0^h e^{\omega(t+h-\tau)}\left(\big\|f(\tau)\big\|+\big\|v\big\|\right)d\tau \\ &+ \int_0^t e^{\omega(t-\tau)}\big\|f(\tau+h)-f(\tau)\big\|d\tau,\end{aligned}$$

comme f est continue et $\|y_0-x\| \leq \varepsilon$, donc y est continue.
Maintenant,

$$\begin{aligned}\|z(t)-y(t)\| &= \|z(t)+w(t)-w(t)-y(t)\| \\ &\leq \|z(t)-w(t)\|+\|w(t)-y(t)\|,\end{aligned}$$

d'après (3.41), pour $f \equiv g$, $t=s$, on a

$$\begin{aligned}\|z(t)-y(t)\| &\leq G(b,\varphi)(t,t)+\eta+\|w(t)-y(t)\| \\ &= 2e^{\omega t}\|z_0-x\|+\eta+\|w(t)-y(t)\|,\end{aligned}$$

par la Définition 3.8, on trouve

$$\begin{aligned}\|z(t)-y(t)\| &\leq 2e^{\omega T}\varepsilon+\eta+\varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon\left(e^{\omega T}+1\right),\end{aligned}$$

car si on fait $\eta \longrightarrow 0$ alors $\varepsilon \longrightarrow 0$.
Si on prend $\delta(\varepsilon)=2\varepsilon\left(e^{\omega T}+1\right)$, c'est une fonction continue et vérifier $\delta(0)=0$, et

$$\|z(t)-y(t)\| \leq \delta(\varepsilon),$$

où z est n'importe quelle solution ε-approximante et $\delta(\varepsilon) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$.
Finalement, on prend $t=s$ dans (3.41) et on fait tendre η vers zéro, alors par (3.32)

$$\|z(t)-w(t)\| \leq e^{\omega t}(\|z_0-x\|+\|w_0-x\|)+\int_0^t e^{\omega(t-\tau)}\big\|f(\tau)-g(\tau)\big\|d\tau,$$

on a z est une solution ε-approximante de $f \in y'+Ay$, et w est une solution ε-approximante de $g \in \bar{y}'+A\bar{y}$, alors pour $\varepsilon \to 0$, nous obtenons l'inégalité

$$\|y(t)-\bar{y}(t)\| \leq e^{\omega t}\|y(0)-\bar{y}(0)\|+\int_0^t e^{\omega(t-\tau)}\big\|f(\tau)-g(\tau)\big\|d\tau.$$

En prenant $\varphi(t,s)=\big\langle y(t)-\bar{y}(s), f(t)-g(s)\big\rangle_+$ et $t=s$, alors par (3.32)

$$\begin{aligned}G(b,\varphi)(t,t) &= e^{\omega t}b(0)+\int_0^t e^{\omega(t-\tau)}\big\langle y(\tau)-\bar{y}(\tau), f(\tau)-g(\tau)\big\rangle_+ d\tau \\ &= e^{\omega t}\|y(0)-\bar{y}(0)\|+\int_0^t e^{\omega(t-\tau)}\big\langle y(\tau)-\bar{y}(\tau), f(\tau)-g(\tau)\big\rangle_+ d\tau,\end{aligned}$$

donc

$$\|y(t)-\bar{y}(t)\| \leq e^{\omega t}\|y(0)-\bar{y}(0)\| + \int_0^t e^{\omega(t-\tau)}\big\langle y(\tau)-\bar{y}(\tau), f(\tau)-g(\tau)\big\rangle_+ d\tau, \qquad (3.42)$$

et ainsi (3.16) est vraie pour $s=0$, et pour tout $s \in]0,T[$, on pose $t=t'-s$, $y_s(t)=y(t+s)$ et $\bar{y}_s(t)=\bar{y}(t+s)$, remplaçant dans (3.42) on trouve

$$\begin{aligned}
&\|y(t+s)-\bar{y}(t+s)\| = \|y_s(t)-\bar{y}_s(t)\| \\
&\leq e^{\omega t}\|y_s(0)-\bar{y}_s(0)\| + \int_0^t e^{\omega(t-\tau)}\big\langle y_s(\tau)-\bar{y}_s(\tau), f(\tau)-g(\tau)\big\rangle_+ d\tau \\
&= e^{\omega(t'-s)}\|y(s)-\bar{y}(s)\| + \int_0^{t'-s} e^{\omega(t'-s-\tau)}\big\langle y(\tau+s)-\bar{y}(\tau+s), f(\tau+s)-g(\tau+s)\big\rangle_+ d\tau \\
&= e^{\omega(t'-s)}\|y(s)-\bar{y}(s)\| + \int_0^{t'-s} e^{\omega(t'-(\tau+s))}\big\langle y(\tau+s)-\bar{y}(\tau+s), f(\tau+s)-g(\tau+s)\big\rangle_+ d\tau,
\end{aligned}$$

si on prendre $\tau+s=\tau'$ on obtient

$$\|y(t')-\bar{y}(t')\| \leq e^{\omega(t'-s)}\|y(s)-\bar{y}(s)\| + \int_s^{t'} e^{\omega(t'-\tau')}\big\langle y(\tau')-\bar{y}(\tau'), f(\tau')-g(\tau')\big\rangle_+ d\tau'.$$

Par conséquente

$$\|y(t)-\bar{y}(t)\| \leq e^{\omega(t-s)}\|y(s)-\bar{y}(s)\| + \int_s^t e^{\omega(t-\tau)}\big\langle y(\tau)-\bar{y}(\tau), f(\tau)-g(\tau)\big\rangle_+ d\tau, \qquad \forall s \in]0,T[.$$

Ceci finit la preuve du Théorème. ■

Théorème 3.13. *Soit C un cône convexe fermé de E et soit A un opérateur ω-accrétif dans $E \times E$ tel que*

$$D(A) \subset C \subset \bigcap_{0<\lambda<\lambda_0} R(I+\lambda A), \qquad \text{pour un certain } \lambda_0 > 0. \qquad (3.43)$$

Soient $y_0 \in \overline{D(A)}$, $f \in L^1([0,T];E)$ tel que $f(t) \in C$, $\forall t \in [0,T]$. Alors le problème (3.1) *admet une solution faible unique y. Si y et $\bar{y}$ sont deux solutions faibles de* (3.1) *correspondant à f et g respectivement, alors*

$$\|y(t)-\bar{y}(t)\| \leq e^{\omega(t-s)}\|y(s)-\bar{y}(s)\| + \int_s^t e^{\omega(t-\tau)}\big\langle y(\tau)-\bar{y}(\tau), f(\tau)-g(\tau)\big\rangle_+ d\tau, \quad \forall 0 \leq s < t \leq T. \qquad (3.44)$$

Preuve.

Soit $f \in L^1([0,T];E)$ et soit f_i l'approximation de f, i.e.,

$$f_i = \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(s)ds \qquad i=1,2,...,N,$$

où $\{t_0 = 0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = T\}$ est une partition de l'intervalle $[0,T]$ tel que $t_i - t_{i-1} < \varepsilon$, et $y_0 \in \overline{D(A)}$, on pose

$$z_0 = y_0 \in \overline{D(A)} \subset \overline{C} = C \subset \bigcap_{0<\lambda<\lambda_0} R(I + \lambda A),$$

comme $f \in C$, $\forall t \in [0,T]$, et C est un cône convexe, d'après le Théorème 1.22, on trouve

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} f(s)ds \in \overline{conv(f([t_0,t_1]))} \subset C \\ &\Longrightarrow (t_1 - t_0)f_1 \in C, \end{aligned}$$

comme $z_0 \in C$, d'après la Proposition 1.19, on trouve

$$\begin{aligned} &(t_1 - t_0)f_1 + z_0 \in C \\ &\Longrightarrow (t_1 - t_0)f_1 + z_0 \in \bigcap_{0<\lambda<\lambda_0} R(I + \lambda A), \end{aligned}$$

pour ε assez petit, on aura

$$(t_1 - t_0)f_1 + z_0 \in R(I + (t_1 - t_0)A),$$

donc il existe $z_1 \in D(A)$, tel que

$$\begin{aligned} &(t_1 - t_0)f_1 + z_0 \in z_1 + (t_1 - t_0)Az_1 \\ &\Longrightarrow f_1 \in \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0} + Az_1. \end{aligned}$$

On a $z_1 \in D(A) \subset C$, on trouve

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(s)ds \in C \\ &\Longrightarrow (t_2 - t_1)f_2 \in C \\ &\Longrightarrow (t_2 - t_1)f_2 + z_1 \in C \\ &\Longrightarrow (t_2 - t_1)f_2 + z_1 \in \bigcap_{0<\lambda<\lambda_0} R(I + \lambda A), \end{aligned}$$

pour ε assez petit, on aura

$$(t_2 - t_1)f_2 + z_1 \in R(I + (t_2 - t_1)A),$$

donc, il existe $z_2 \in D(A)$, tel que

$$\begin{aligned} &(t_2 - t_1)f_1 + z_1 \in z_2 + (t_2 - t_1)Az_2 \\ &\Longrightarrow f_2 \in \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} + Az_2. \end{aligned}$$

Ainsi de suite, il existe $z_i \in D(A)$, tel que

$$f_i \in \frac{z_i - z_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + Az_i. \tag{3.45}$$

Donc, nous avons pour ε assez petit, la fonction $z = y$ sur $]t_{i-1}, t_i]$, est bien définie et par la relation (3.45) est une solution ε-approximante de problème (3.1).
Donc par le Théorème 3.10, le problème (3.1) admet une solution faible unique ■

Corollaire 3.14. *Soit A un opérateur ω-m-accrétif. Alors pour tout $y_0 \in \overline{D(A)}$ et $f \in L^1([0,T];E)$ il existe une solution faible unique y de* (3.1)*.*

Preuve.
En effet puisque A est ω-m-accrétif alors A est ω-accrétif et $R(I + \lambda A) = E$, pour tout $\lambda > 0$.
L'espace E étant un espace vectoriel normé donc E est un cône convexe fermé, en prenant dans le Théorème 3.13, $C = E$, alors l'estimation (3.43) est bien vérifiée. Par suite, le problème (3.1) admet une solution faible unique. ■

Dans la suite, nous allons souvent faire référence à l'application :

$$\begin{aligned} T : \overline{D(A)} \times L^1([0,T];E) &\longrightarrow C([0,T];E) \\ (y_0, f) &\longrightarrow T(y_0, f) = y, \end{aligned}$$

comme étant l'évolution non linéaire associée à A, i.e., y solution de (3.1). Il convient de noter que, en particulier, la condition (3.43) est vérifiée si $C = E$ et A est ω-m-accrétif dans $E \times E$.
Dans le cas particulier où $f \equiv 0$, si A est ω-accrétif et

$$R(I + \lambda A) \supset \overline{D(A)}, \text{ pour tout } \lambda > 0, \tag{3.46}$$

alors nous avons par le Théorème 3.10, le résultat suivant

Théorème 3.15 (Crandall et Liggett)**.** *Soit A un opérateur ω-accrétif, satisfaisant la condition* (3.46) *et soit $y_0 \in \overline{D(A)}$. Alors le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} 0 \in \frac{d}{dt} y(t) + Ay(t), \quad t > 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{3.47}$$

admet un solution faible unique. De plus,

$$y(t) = \lim_{n \to \infty} \left(I + \frac{t}{n} A \right)^{-n} y_0 \tag{3.48}$$

uniformément en t sur les intervalles compacts.

Preuve.

En effet, dans ce cas, si $t_0 = 0$, $t_i = i\varepsilon$, $i = 1, ..., N$, alors la solution z_ε relative á la ε-discrétisation $D_A^\varepsilon\,(0 = t_0, t_1, ..., t_N)$, est donnée par le schéma itératif suivant, (voir l'estimation (3.45), où $f = 0$)

$$0 \in \frac{z_\varepsilon(i\varepsilon) - z_\varepsilon((i-1)\varepsilon)}{\varepsilon} + Az_\varepsilon(i\varepsilon),$$

donc

$$\begin{aligned} & z_\varepsilon((i-1)\varepsilon) \in z_\varepsilon(i\varepsilon) + \varepsilon A z_\varepsilon(i\varepsilon) \\ \Longrightarrow\ & z_\varepsilon((i-1)\varepsilon) \in (I + \varepsilon A)\, z_\varepsilon(i\varepsilon), \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} & z_\varepsilon(i\varepsilon) = (I + \varepsilon A)^{-1} z_\varepsilon((i-1)\varepsilon) \\ \Longrightarrow\ & z_\varepsilon(i\varepsilon) = (I + \varepsilon A)^{-2} z_\varepsilon((i-2)\varepsilon), \end{aligned}$$

par itération on trouve

$$z_\varepsilon(i\varepsilon) = (I + \varepsilon A)^{-i} y_0,$$

et comme $\varepsilon = \frac{t_i}{i}$, on peut écrit

$$z_\varepsilon(t_i) = (I + \varepsilon A)^{-i} y_0,$$

et comme $z_\varepsilon(t) = z_\varepsilon(t_i)$ pour $t \in](i-1)\varepsilon, i\varepsilon]$, alors

$$z_\varepsilon(t) = (I + \varepsilon A)^{-i} y_0 \qquad t \in](i-1)\varepsilon, i\varepsilon].$$

Soit y une solution faible de (3.1), d'après l'estimation (3.15), on a

$$\left\| y(t) - (I + \varepsilon A)^{-i} y_0 \right\| \leq \delta\left(\frac{t_i}{i}\right), \qquad t \in](i-1)\varepsilon, i\varepsilon[,$$

donc

$$\lim_{i\to\infty} \left\| y(t) - (I + \varepsilon A)^{-i} y_0 \right\| \leq \lim_{i\to\infty} \delta\left(\frac{t_i}{i}\right) = 0,$$

par conséquent

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{t}{n} A\right)^{-n} y_0.$$

■

Corollaire 3.16. *Soit A un opérateur ω-m-accrétif et $y_0 \in \overline{D(A)}$. Alors le problème de Cauchy* (3.47) *admet une solution faible unique donnée par la formule exponentielle* (3.48).

Preuve.
A ω-m-accrétif et $y_0 \in \overline{D(A)}$, et $f = 0 \in L^1([0,T];E)$, d'après le Corollaire 3.14, le problème (3.47) admet une solution faible unique, donc la formule exponentielle (3.48) est unique. $\blacksquare$

Conclusion

Dans notre travail, nous avons étudié l'existence et l'unicité de solution du problème de Cauchy dans les espaces du Banach, pour l'inclusion différentielle gouvernée par un opérateur ω-accrétif, et comme cas particulier le problème de Grandall-Ligget.

Bibliographie

[1] **D. Azzam-Laaouir**, *Cours d'analyse multivoque*, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliqués, Jijel, (2019).

[2] **D. Azzam-Laaouir**, *Cours d'optimisation*, $2^{éme}$ année Master Analyse Fonctionnelle Promotion 2019-2020.

[3] **V. Barbu**, *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, (2010).

[4] **I. L. Vrabie**, *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, (1986).

[5] **R. Chill**, *Introduction aux équations aux dérivées*, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliqués, Metz, (2010).

[6] **T. Gallay**, *Théorie de la mesure et l'intégration*, Université Joseph Fourier, Grenoble, (2009).

[7] **J. P. Aubin and A. Cellina**, *Differential Inclusions Set-Valued Maps and Viability Theory*, Springer Verlag, Berlin, (1984).

[8] **J. Diestel and J. J Jr. Uhl.**, *Vector measures*, Providence(RI) : American Mathematical Society, (1977).

[9] **G. Coq**, *Théorie de la mesure, Exercices corrigés*, Université de Poitiers, Année 2009-2010.