République algérienne démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement supérieur
et de la recherche scientifique
Université de Jijel
Faculté des sciences
Département de mathématiques

N° d'ordre : ....
Série : ....

MEMOIRE

présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Mathématiques
Option : Equations Différentielles

THEME

Sur des problèmes d'évolution régis par des opérateurs sous différentiels

Par

Saidi Soumia

Soutenu le 16/02/2010 devant le Jury composé de :

Président:	A. Aibeche	Prof.	Université de Sétif
Rapporteur:	M. Yarou	Prof.	Université de Jijel
Examinateurs:	M. Denche	Prof.	Université de Constantine
	T. Zerzaihi	MC.	Université de Jijel
	W. Chikouche	MC.	Université de Jijel

Remerciements

Mes premiers mots sont chaleureusement adressés à **Mr M. Yarou**, Professeur à l'université de Jijel. Je le remercie d'avoir accepté d'être mon directeur de thèse. Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance pour sa rigueur, sa générosité, des qualités qu'il a su me transmettre et aussi des conseils qu'il m'a donnés.

Je remercie très sincèrement **Mr A. Aibeche**, Professeur à l'université de Sétif, d'avoir accepté d'être Président du jury et d'avoir lu avec attention ce mémoire.

Je remercie vivement **Mr M. Denche**, Professeur à l'université de Constantine, **Mr T. Zerzaihi et Mme W. Chikouche**, maîtres de conférences à l'université de Jijel de m'avoir fait l'honneur de participer au jury.

Une pensée toute spéciale pour les enseignants de l'université de Jijel. Qu'ils trouvent ici, l'expression de mes sentiments les meilleurs.

J'aimerais bien exprimer toute ma gratitude à ma famille qui m'a supportée et encouragée considérablement devant toutes mes études; cette page entière ne suffirait pas pour vous dire combien je vous aime !

Dédicace

Ce mémoire est dédié à :

mes chers parents,

mes sœurs : **Leila, Hadjer, Hind,**

mon unique frère : **Brahim,**

mes chères tantes : **Hassiba, Farida, Nacéha, Saida** ainsi que leurs maris et enfants,

ma grand-mère,

mes enseignants, mes collègues et mes amies.

Table des matières

Chapitre 0

Introduction générale

Dans les espaces de Hilbert, la résolution des inclusions différentielles gouvernées par un opérateur sous-différentiel a suscité l'intérêt de nombreux travaux. Dans ce mémoire, on s'intéresse, d'une part, à l'étude d'existence et d'unicité de solutions pour certains problèmes gouvernés par un opérateur sous-différentiel avec perturbation univoque, et, d'autre part à leurs applications à des problèmes de contrôle optimal de type Bolza.

Le problème concerne l'étude d'existence et d'unicité de solution absolument continue sur un intervalle $I := [T_0, T]$ de $\mathbb{R}$, pour l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) \quad \text{p.p. } t \in I \\ x(T_0) = x_0 \in \operatorname{dom}\varphi(T_0, \cdot), \end{cases}$$

où pour tout $t \in I$, l'opérateur (multi-application) $\partial\varphi(t,\cdot)$ est le sous-différentiel d'une fonction $\varphi(t,\cdot)$ définie d'un espace de Hilbert H dans $[0, +\infty]$, satisfaisant à

(H_1) pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto \varphi(t,x)$ est convexe propre et semi-continue inférieurement (sci) ; et où $\operatorname{dom}\varphi(t,\cdot)$ désigne le domaine effectif de la fonction $\varphi(t,\cdot)$.

Ce type de problèmes fut d'abord résolu, dans le cas autonome, i.e, $\varphi : H \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, par Brézis [8]. Ensuite, de nombreux travaux concernant l'existence et l'unicité de solution pour $(\mathcal{P})$ ont été établis, voir [17], [44], [23], [33].

Dans le cas non-autonome $(\mathcal{P})$, des résultats ont été obtenus, sous des conditions exprimées en termes de φ, ou la fonction conjuguée de Fenchel $\varphi^*(t,\cdot)$, ou l'approximation Yosida de $\partial\varphi(t,\cdot)$, voir [3], [4], [24], [29], [30], [37], [48], [49], [50], [51].

Peralba [39, 40] a démontré l'existence et l'unicité de solution pour $(\mathcal{P})$, sous une hypothèse exprimée en terme de la fonction conjuguée $\varphi^*(t,\cdot)$ de la fonction convexe $\varphi(t,\cdot)$, i.e., (H_2) il existe une fonction Lipschitz non-négative $k : H \to \mathbb{R}$ et une fonction absolument continue $a : I \to \mathbb{R}$ avec $\dot{a} \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ telle que pour tout $x \in H$ et $s,t \in I$

$$\varphi^*(t,x) \leq \varphi^*(s,x) + k(x)|a(t) - a(s)|.$$

Nous entendrons par les hypothèses de Peralba, les conditions (H_1) et (H_2).
On réfère à [4], [29], [30], [48], [49], [51], pour des résultats établis sous des hypothèses sur φ ou sur l'enveloppe de Moreau $\varphi_\lambda(t,\cdot)$. En général, une hypothèse de compacité sur $\varphi(t,\cdot)$, apparaît dans ce type de problèmes $(\mathcal{P})$, avec perturbations univoques ou multivoques, voir [4], [6], [24], [37], [38],[50]. Notre objectif étant d'étudier la relaxation d'un problème de contrôle de type Bolza voir en bas, les conditions sur φ qui ne peuvent pas être transmises au nouveau opérateur généré par φ et f dans $(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)})$, avec des hypothèses de compacité sur $\varphi(t,\cdot)$ ne sont pas appropriées.

Tout au long de ce travail, nous adoptons les hypothèses de Peralba. Notre mémoire comprend 4 chapitres, dans le premier on rappelle quelques concepts de base et résultats qu'on aura utilisé tout au long de ce travail. Au chapitre 2, nous traitons, le cas de perturbations univoques du problème $(\mathcal{P})$, en distinguant celles dépendant uniquement du temps de celles définies sur $I \times H$. Étant donnée une perturbation univoque f dépendant à la fois du temps et de l'espace, nous montrons, sous les hypothèses ci-dessous, qu'il existe une unique application absolument continue $x : I \to H$, solution du problème suivant

$$(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)}) \quad \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t,x(t)) + f(t,x(t)) & \text{p.p. } t \in I \\ x(T_0) = x_0 \in \operatorname{dom}\varphi(T_0,\cdot), \end{cases}$$

dès que f est une application univoque, qui est mesurable par rapport à la première variable, lipschitzienne par rapport à la seconde variable sur tout ensemble borné de H; et qui satisfait à la condition de croissance

$$\|f(t,x)\| \leq \beta(t)(1+\|x\|), \text{ pour tout } (t,x) \in I \times H, \tag{1}$$

où $\beta(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}^+}(I)$.

Certaines conditions garantissant l'existence de solution pour le problème non-autonome $(\mathcal{P})$ au-dessus, sont exprimées en terme de l'enveloppe de Moreau $\varphi_\lambda(t,\cdot)$ ou l'approximation Yosida de $\partial\varphi(t,\cdot)$ et dans ce sens là, elles ne peuvent pas être facilement transmises à l'opérateur $\partial\varphi(t,\cdot)+f(t,\cdot)$ du problème $(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)})$. Par contre, comme nous le verrons, les hypothèses de Peralba sur la fonction φ sont adéquates pour notre étude. En effet, elles nous permettent, dans un espace de Hilbert, en faisant intervenir quelques idées d'Edmond-Thibault [19] (voir aussi [33]) à prouver existence (et unicité) de solution pour $(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)})$, sans aucune condition de compacité. Dans le cas particulier du processus de rafle, i.e., pour $\varphi(t,\cdot)$ étant la fonction indicatrice d'un ensemble fermé convexe ou ρ-prox-régulier $C(t)$, on retrouve des résultats relatifs à $(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)})$ dans Castaing-Salvadori-Thibault [15] en dimension finie, et dans Edmond-Thibault [19] en dimension infinie. Notre approche consiste à établir le résultat espéré, tout d'abord, dans le cas où la perturbation f est indépendante de x. Pour ce faire, on transforme l'inclusion en un problème de perturbation nulle. Ensuite par une discrétisation appropriée, on exploite ce dernier résultat pour traiter le cas général. Dans la deuxième partie de ce chapitre, sous une condition de compacité sur la fonction $\varphi(t,\cdot)$, nous donnons une autre démonstration d'existence de solutions pour $(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)})$, via une méthode de discrétisation, dès que f est de Carathéodory, et satisfait à (1).

Au chapitre 3, nous proposons une application du résultat du chapitre 2 à la théorie du contrôle optimal. Sa description est la suivante.

Soient H un espace de Hilbert séparable, U un espace métrique compact et deux applications $\varphi : I \times H \to [0, +\infty]$, $g : I \times H \times U \to H$. Nous munissons l'intervalle I de la tribu de la mesure de Lebesgue. Soit enfin, une multi-application Lebesgue-mesurable $\Gamma : I \rightrightarrows U$ à valeurs compactes non-vides. Définissons une multi-application Σ de I dans $\mathcal{M}^1_+(U)$, l'ensemble de toutes les mesures de probabilité sur $(U, \mathcal{B}(U))$, définie, pour tout $t \in I$, par

$$\Sigma(t) := \{P \in \mathcal{M}^1_+(U) : P(\Gamma(t)) = 1\}.$$

L'ensemble des sélections Lebesgue-mesurables de $\Gamma(\cdot)$ (resp. $\Sigma(\cdot)$) est noté par S_Γ (resp. S_Σ). Soit $J : I \times H \times U \to \mathbb{R}$ un intégrande.

Dans ce chapitre, nous étudions le lien entre le problème dit "original"

$$\inf_{\zeta(\cdot)\in S_\Gamma} \int_{T_0}^{T} J(t, x_\zeta(t), \zeta(t))\, dt \qquad (P.O)$$

où $x_\zeta(\cdot)$ est l'unique solution absolument continue de

$$(\mathcal{PO}(\zeta)) \qquad \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + g(t, x(t), \zeta(t)) & \text{p.p. } t \in I, \\ x(T_0) = x_0 \in \operatorname{dom}\varphi(T_0, \cdot) \end{cases}$$

et le problème "relaxé"

$$\inf_{\mu\in S_\Sigma} \int_{T_0}^{T} \int_U J(t, x_\mu(t), u)\mu_t(du)\, dt, \qquad (P.R)$$

l'application $x_\mu(\cdot)$ étant la solution absolument continue de

$$(\mathcal{PR}(\mu)) \qquad \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + \int_{\Gamma(t)} g(t, x(t), u)\mu_t(du) & \text{p.p. } t \in I, \\ x(T_0) = x_0 \in \operatorname{dom}\varphi(T_0, \cdot), \end{cases}$$

sous des hypothèses raisonnables sur φ, g et J.

Les contrôles $\mu \in S_\Gamma$ seront identifiés aux mesures de Young (désintégrées) correspondantes, donnant ainsi accès à la puissante et élégante théorie des mesures de Young

[5, 15, 45].

L'égalité

$$\inf(P.O) = \min(P.R),$$

fut démontrée en dimension finie par Jawhar [27, 28] pour des processus de rafle convexes moyennant la positivité de l'intégrande J, puis par Castaing-Salvadori-Thibault [15] dans le cas de processus de rafle mettant en jeu des ensembles ρ-prox réguliers dans $\mathbb{R}^n$ sous des hypothèses moins restrictives sur J. Le résultat de relaxation de [15] fut étendu aux espaces de Hilbert séparables de dimension infinie par Edmond Thibault [18, 19] en 2004. Dans ce chapitre, nous montrons que dans un espace de Hilbert séparable de dimension quelconque, la propriété de relaxation a encore eu lieu dans notre cadre fonctionnel, sous des conditions convenables sur φ, g et J (Théorème 3.3.3).

Le dernier chapitre est consacré à l'étude, dans le cadre Hilbertien, de l'existence et de l'unicité de solution d'un problème plus général dans lequel la perturbation univoque f contient un retard : Étant donné un retard fixé $r > 0$, on considère l'espace $\mathcal{C}_0 := \mathcal{C}_H([-r, 0])$, des fonctions continues sur $[-r, 0]$ à valeurs dans H, muni de la topologie de la convergence uniforme. À chaque $t \in [0, T]$, on associe une application $\tau(t)$ de $\mathcal{C}_H([-r, T])$ dans $\mathcal{C}_H([-r, 0])$ définie, pour $x(\cdot) \in \mathcal{C}_H([-r, T])$, par

$$(\tau(t)x(\cdot))(s) := x(t+s) \ \text{ pour tout } \ s \in [-r, 0].$$

Soit une application univoque $f : [0, T] \times \mathcal{C}_0 \to H$ et ψ un élément fixé de $\mathcal{C}_0$ tel que $\psi(0) \in \operatorname{dom} \varphi(0, \cdot)$; nous montrons l'existence (et l'unicité) de solution de

$$(P_\psi) \qquad \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + f(t, \tau(t)x(\cdot)) & \text{p.p. } t \in [0, T], \\ x(s) = \psi(s) \quad \forall s \in [-r, 0]. \end{cases}$$

Pour ce faire, nous utilisons les résultats du chapitre 2, dès que f est mesurable par rapport à la première variable, lipschitzienne par rapport à la seconde variable et satisfaisant à la condition de croissance linéaire

$$\|f(t, \phi(\cdot))\| \leq \beta(t)(1 + \|\phi(\cdot)\|_{\mathcal{C}_0})$$

pour tout $(t, \phi(\cdot)) \in [0, T] \times \mathcal{C}_0$.

Enfin, par une discrétisation appropriée, on transforme cette inclusion en une du type $(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)})$, pour appliquer le Théorème 2.3.1.

Dans le cas particulier du processus de rafle, i.e., pour $\varphi(t, \cdot)$ étant la fonction indicatrice d'un ensemble ρ-prox-régulier $C(t)$, le problème (P_ψ) correspondant fut résolu par Edmond [20], dans le cadre Hilbertien.

À la fin de ce mémoire, on propose d'intéressants problèmes comme perspectives.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Introduction

Ce chapitre a pour but d'introduire tous les outils nécessaires dont on aura besoin dans la suite. En effet, on va rappeler des notations de base, quelques résultats fondamentaux sur les opérateurs maximaux-monotones, opérateurs sous-différentiels, y compris divers concepts concernant l'analyse multivoque. Une importante partie de ce chapitre sera consacrée aux mesures de Young et intégrandes, ainsi que d'autres résultats classiques.

1.2 Notations et espaces usuels

Tout au long de ce mémoire, nous adoptons les notations et définitions suivantes

$I := [T_0, T]$ $(T_0 < T)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

H est un espace de Hilbert réel, on note par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire et par $\|\cdot\|$ la norme associée. Des fois, on aura besoin d'une hypothèse de séparabilité. Dans ce cas, on précisera que H est un espace de Hilbert séparable. On note par

$\mathbb{B}$ la boule unité fermée de H;

pour tout $\eta > 0$, $B[0, \eta]$ la boule fermée de centre 0 et de rayon η sur H;

1_A la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble donné, définie par

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si I désigne l'intervalle $[T_0, T] \subset \mathbb{R}$, λ est la mesure de Lebesgue sur I.

Sur $C_H(I)$ l'espace des fonctions continues $x : I \to H$, on considère la norme de la convergence uniforme $\|x\|_\infty = \sup_{t \in I} \|x(t)\|$.

On note par $L^p_H(I)$, pour $p \in [1, +\infty[$ (resp. $p = +\infty$) l'espace des fonctions mesurables $x : I \longrightarrow H$ telles que $\int_I \|f(t)\|^p \, dt < +\infty$ (resp. qui sont essentiellement bornées) muni de la norme usuelle $\|x\|_{L^p_H(I)} = (\int_I \|x(t)\|^p \, dt)^{\frac{1}{p}}$(resp. muni de la norme usuelle essentielle supremum norme $\| \cdot \|$).

On rappelle que le dual topologique de $L^1_H(I)$ est $L^\infty_H(I)$.

Ω est un espace topologique et $\mathcal{B}(\Omega)$ est la tribu borélienne sur Ω.

Une partition de I est une suite finie $(t_0, \cdots, t_n)$ telle que

$$T_0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T.$$

1.3 Rappels et résultats fondamentaux

1.3.1 Opérateurs maximaux-monotones

Dans toute la suite nous entendrons par opérateur un opérateur multivoque (ou multi-application) défini sur H, c'est-à-dire une application de H dans l'ensemble de ses parties. Si A est un tel opérateur nous poserons

$$\text{dom}\, A = \{x \in H \; ; \; Ax \neq \emptyset\}.$$

Définition 1.3.1 *[8] Un opérateur A est dit monotone si*

$$\forall x_1, x_2 \in \text{dom}\, A, \; \langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$$

ou plus précisément,

$$\forall y_1 \in Ax_1,\ \forall y_2 \in Ax_2,\ \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Définition 1.3.2 *[39] Un opérateur A est dit maximal-monotone s'il est monotone et si toute extension monotone de A coïncide avec A.*

Définition 1.3.3 *[39] Un opérateur A est dit demi-fermé si la condition suivante est satisfaite, si pour tout $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ dans H forte, et $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ dans H faible, où $x_n \in \mathrm{dom}\, A$ et $y_n \in Ax_n$, alors $x \in \mathrm{dom}\, A$ et $y \in Ax$.*

Proposition 1.3.1 *[39] Tout opérateur maximal-monotone est demi-fermé.*

Pour plus de détails sur les propriétés des opérateurs maximaux-monotones dans les espaces de Hilbert, se reporter à Brézis [8].

1.3.2 Opérateurs sous-différentiels

Beaucoup de ce qui suit reste valable pour un couple d'espaces vectoriels en dualité. Nous restreignons les énoncés au cas qui nous occupe : l'espace Hilbertien H mis en dualité avec lui-même par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soit $\varphi : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Définition 1.3.4 *[39] On dit qu'un élément $y \in H$ est un sous-gradient de φ au point x si*

$$\varphi(x) \in \mathbb{R} \text{ et si } \quad \forall z \in H \quad \varphi(z) \geq \varphi(x) + \langle y, z - x \rangle.$$

L'ensemble des sous-gradients de φ au point x est appelé sous-différentiel de φ au point x et noté $\partial\varphi(x)$. En d'autres termes, $\partial\varphi(x)$ est l'ensemble des "pentes" de toutes les minorantes affines de φ qui sont "exactes au point x".

Définition 1.3.5 *[39] La conjuguée Fenchel φ^* définie sur H par :*

$$\varphi^*(x) = \sup_{y \in H}\{\langle y, x \rangle - \varphi(y)\}$$

est appelée aussi polaire de φ (ou duale de φ).

Deux fonctions φ_1 et φ_2 sont dites mutuellement polaires ou "duales" si $\varphi_1^* = \varphi_2$ et $\varphi_2^* = \varphi_1$.

Définition 1.3.6 *φ est dite semi-continue inférieurement (sci) au point $x_0 \in H$ si,*

$$\varphi(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} \varphi(x).$$

φ est dite sci sur H si φ est sci en tout point de H.

Proposition 1.3.2 *[39] Si φ est propre, i.e., son domaine effectif* ($\operatorname{dom}\varphi$) *défini par*

$$\operatorname{dom}\varphi = \{x \in H ; \varphi(x) < +\infty\}$$

est non vide, convexe et semi-continue inférieurement alors, l'opérateur sous-différentiel $\partial\varphi$ est maximal-monotone. Le sous-différentiel $\partial\varphi(x)$ de φ en $x \in \operatorname{dom}\varphi$ est

$$\partial\varphi(x) = \{y \in H : \varphi(z) \geq \langle y, z - x\rangle + \varphi(x),\ \forall z \in \operatorname{dom}\varphi\}$$

et son domaine effectif est $\operatorname{dom}\partial\varphi = \{x \in H ; \partial\varphi(x) \neq \emptyset\}$.

Proposition 1.3.3 *Si φ est convexe propre semi-continue inférieurement alors φ^* est aussi convexe propre semi-continue inférieurement. Par ailleurs φ et φ^* sont duales.*

Proposition 1.3.4 *Il est souvent utile de régulariser φ via son enveloppe de Moreau*

$$\varphi_\lambda(x) := \inf_{y \in H}[\varphi(y) + \frac{1}{2\lambda}\|x - y\|^2]$$

pour $\lambda > 0$. La famille $(\varphi_\lambda)_\lambda$ est croissante quand $\lambda \downarrow 0$ vers la fonction propre conexe sci φ et d'où elle epi-converge vers φ (voir, exp., [1]). Ceci entaîne en particulier pour toute famille $(x_\lambda)_\lambda$ de H convergeant vers x que

$$\varphi(x) \leq \liminf_{\lambda \downarrow 0} \varphi_\lambda(x_\lambda). \tag{1.1}$$

La fonction enveloppe de Moreau φ_λ possède une dérivée localement Lipschitz continue notée $\nabla\varphi_\lambda$.

Définition 1.3.7 *La fonction φ est dite inf-boule-compacte, si pour tout $r > 0$, l'ensemble $\{x \in H,\ \varphi(x) \leq r\}$ est boule-compacte, i.e., son intersection avec toute boule fermée dans H est compacte.*

Nous sommes maintenant en mesure de formuler clairement les problèmes que nous nous poserons dans les chapitres qui vont suivre.

Il est question, dans chacun d'eux, de résoudre une équation d'évolution de la forme

$$-\dot{x}(t) \in A(t)x(t).$$

C'est-à-dire de trouver une solution d'une telle équation, qu'entendrons-nous par solution ?

Définition 1.3.8 *Si, pour tout $t \in [T_0, T]$, intervalle compact de $\mathbb{R}$, $A(t)$ représente un opérateur défini sur H, on appelle solution sur $[T_0, T]$ de l'équation d'évolution*

$$-\dot{x}(t) \in A(t)x(t),$$

toute fonction x à valeurs dans H, définie et continue sur $[T_0, T]$ absolument continue sur $[\delta, T]$, pour tout $\delta \in]T_0, T[$ et vérifiant

$$-\dot{x}(t) \in A(t)x(t),$$

pour presque tout $t \in [T_0, T]$.
Quand il n'y aura pas d'ambiguïté possible nous disons souvent "solution" au lieu de "solution sur $[T_0, T]$".

Remarque 1.3.1 *(Remarque sur la définition 1.3.8) La fonction x étant absolument continue sur $[\delta, T]$ pour tout $\delta \in]T_0, T[$, elle est presque partout fortement dérivable sur $[T_0, T]$, pour tout $t, s \in]T_0, T]$ $(s < t)$ la fonction dérivée est dans $L^1_H([s,t])$ et on a*

$$x(t) - x(s) = \int_s^t \dot{x}(\tau)\, d\tau.$$

Ceci découle du résultat plus général que voici.

Proposition 1.3.5 (*i*) *Toute fonction x à valeurs dans H, définie et absolument continue sur un intervalle compact $[a, b]$ est presque partout fortement dérivable, de dérivée $\dot{x}$ intégrable et vérifie*

$$\forall t, s \in [T_0, T] \;\; x(t) - x(s) = \int_s^t \dot{x}(\tau)\, d\tau.$$

(*ii*) *Réciproquement, si y appartient à $L^1_H([a, b])$, alors la fonction définie par*

$$x(t) = \int_a^t y(\tau)\, d\tau$$

est absolument continue sur $[a, b]$ (et donc p.p *fortement dérivable sur $[a, b]$) et vérifie $\dot{x}(t) = y(t)$* p.p.

Précisons que nous utiliserons très souvent ce résultat sans nous y référer.

1.3.3 Inclusions différentielles avec mémoire

Les inclusions différentielles avec retard sont des équations différentielles multivoques, où le système ne dépend pas seulement de la valeur initiale mais aussi de l'état antérieur du système. Si une inclusion différentielle exprime qu'à tout instant la vélocité du système dépend de son état à tout instant, les inclusions différentielles avec mémoire, expriment que la vélocité dépend non seulement de l'état du système à cet instant, mais aussi de l'histoire de la trajectoire jusqu'à cet instant. Pour formaliser ce concept, introduisons pour tout $T > 0$ et $r > 0$, l'espace de Banach $C_H([-r, T])$ (resp. $C_0 := C_H([-r, 0]))$ des fonctions continues définies de $[-r, T]$ (resp. $[-r, 0]$) à valeurs dans l'espace de Hilbert H, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles compactes.

$$\|x\|_{C_H([-r,T])} = \max\{\|x(s)\|,\ s \in [-r, T]\},$$

$$(\text{resp. } \|x\|_{C_0} = \max\{\|x(s)\|,\ s \in [-r, 0]\}).$$

Si $x : [-r, T] \to H$, alors pour tout $t \in [0, T]$, on définit la fonction

$$x_t(s) := (\tau(t)x(\cdot))(s) := x(t+s), \quad \text{pour tout} \quad s \in [-r, 0].$$

Il est évident que, si $x \in C_H([-r, T))$, alors $x_t \in C_0$, et l'application $x \mapsto x_t$, est continue au sens de la convergence uniforme.

On rencontre ce genre de problèmes en théorie de contrôle optimal, dans les problèmes de collision, en électrodynamique, ainsi que dans les procédures de planning en micro-économie et dans les problèmes d'évolution biologiques (voir par exemple [25], [26]). Nous ne traitons ici que les problèmes avec retard fini, pour le retard infini, on réfère à [31].

1.3.4 Multi-applications et sélections

Définition 1.3.9 *Soient X, Y deux ensembles non vides. Une multi-application F définie sur X à valeurs dans Y est une fonction qui à tout élément $x \in X$ associe un sous-ensemble $F(x)$ de Y et on note $F : X \rightrightarrows Y$. Le domaine de la multi-application est donné* *par*

$$\mathrm{dom}\,(F) = \{x \in X,\ \ F(x) \neq \emptyset\}.$$

Définition 1.3.10 *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : X \to Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x),\ \forall x \in X.$$

Définition 1.3.11 *Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique et $F : X \rightrightarrows Y$. On dit que F est $(\Sigma, \mathcal{B}(Y))$-mesurable si pour tout ouvert V de Y*

$$F^{-1}(V) = \{x \in X; F(x) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Théorème 1.3.6 *(Théorème d'existence de sélections mesurables)*
Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique complet séparable, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application Σ-mesurable à valeurs fermées. Alors, F admet une sélection mesurable.

Pour plus de détails sur la mesurabilité des multi-applications, on réfère à Castaing-Valadier [16].

1.3.5 Mesures de Young

On va faire les rappels suivants concernant les mesures de Young (voir Castaing, Raynaud de Fitte et Valadier [13], Jawhar [27] et Edmond-Thibault [19]).

Définition 1.3.12 *Soient $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ un espace mesuré complet, σ une mesure finie non-négative et U un espace métrique complet séparable. On note par $\mathcal{Y}(S, \sigma, U)$ l'ensemble de toutes les mesures positives ν sur $(S \times U, \mathcal{S} \otimes \mathcal{B}(U))$ dont les projections sur S (i.e., leurs images par l'application $(s, u) \mapsto s$) égalent σ. Autrement dit, pour tout $E \in \mathcal{S}$, on a $\nu(E \times U) = \sigma(E)$.*
Si $\nu \in \mathcal{Y}(S, \sigma, U)$, alors ν est dite mesure de Young sur $S \times U$.

Définition 1.3.13 *Soit $\mathcal{M}^1_+(U)$ l'ensemble de toutes les mesures positives de probabilité sur $(U, \mathcal{B}(U))$. Selon Castaing, Raynaud de Fitte, et Valadier [13], on note par $\mathcal{Y}_{dis}(S, \sigma, U)$ l'ensemble de toutes les applications $\mu : S \longrightarrow \mathcal{M}^1_+(U)$ (σ-presque partout égalité) qui sont λ-mesurables au sens suivant, pour tout $B \in \mathcal{B}(U)$, la fonction $s \mapsto \mu_s(B)$ est $\mathcal{S}$-mesurable.*

Remarque 1.3.2 1) *Dans Jawhar [27], l'ensemble* $\mathcal{Y}_{dis}(S,\sigma,U)$ *est noté par* $R(S,U)$ *et chacun de ses éléments est dit mesure de probabilité de transition sur* $S \times U$.

2) *Si* $\mu \in \mathcal{Y}_{dis}(S,\sigma,U)$, $A \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{B}(U)$ *et si* $\mathbf{1}_A$ *est la fonction caractéristique de* A, *alors la fonction* $s \mapsto \int_U \mathbf{1}_A(s,u)\mu_s(du)$ *est* $\mathcal{S}$*-mesurable sur* S *et la fonction ensemble* ν *définie par*

$$\nu(A) = \int_S \int_U \mathbf{1}_A(s,u)\mu_s(du)\sigma(ds) \tag{1.2}$$

pour tout $A \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{B}(U)$ *est une mesure de Young sur* $S \times U$. *Par conséquent, tout élément de* $\mathcal{Y}_{dis}(S,\sigma,U)$ *est dit mesure désintégrée de Young.*

3) *Réciproquement, sous les mêmes hypothèses qu'en haut sur* S *et* U, *toute mesure de Young sur* $S \times U$ *est associée à un certain* $\mu \in \mathcal{Y}_{dis}(S,\sigma,U)$ *défini de la même manière qu'en haut.*

Remarque 1.3.3 1) *Si* ν *est une mesure de Young correspondante à l'élément* $\mu \in \mathcal{Y}_{dis}(S,\sigma,U)$, *i.e., la mesure de Young définie par* (1.2), *alors, pour toute fonction* $\psi : S \times U \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ *qui est* $\mathcal{S} \otimes \mathcal{B}(U)$*-mesurable et non-négative (resp.* ν*- intégrable), la fonction* $s \mapsto \int_U \psi(s,u)\mu_s(du)$ *est* σ*-mesurable (resp.* σ*-intégrable) et l'on a*

$$\int_{S\times U} \psi \, d\nu = \int_S \int_U \psi(s,u)\mu_s(du)\sigma(ds).$$

2) *Si* ν *est la mesure de Young associée à* $\mu \in \mathcal{Y}_{dis}(S,\sigma,U)$ *on ne fera pas de différence entre* ν *et* μ, *i.e., pour tout* $s \in S$, *on écrira* ν_s *au lieu de* μ_s.

3) *Toute fonction* $\mathcal{S}$*-mesurable* $u(\cdot) : S \longrightarrow U$ *définit une mesure de Young sur* $S \times U$ *dite mesure de Young associée à* $u(\cdot)$. *C'est la mesure de Young correspondante à l'élément* μ *de* $\mathcal{Y}_{dis}(S,\sigma,U)$ *définie par* $\mu_s := \delta_{u(s)}$, *où* $\delta_{u(s)}$ *est la masse de Dirac au point* $u(s)$, *i.e., pour tout* $B \in \mathcal{B}(U)$, $\delta_{u(s)}(B) = 1$ *si* $u(s) \in B$ *et* 0 *ailleurs.*

1.3.6 Intégrande de Carathéodory

Définition 1.3.14 *On appelle intégrande toute fonction* $\psi : S \times U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ *qui est* $\mathcal{S} \otimes \mathcal{B}(U)$*-mesurable. Un intégrande est dit de Carathéodory si, pour tout* $s \in S$, *la fonction* $\psi(s,\cdot)$ *est continue et prend des valeurs finies sur* U. *Un intégrande* ψ *est dit* L^1*-borné s'il existe une fonction non-négative* $\gamma \in L^1_{\mathbb{R}}(S,\sigma)$ *telle que* $|\psi(s,u)| \leq \gamma(s)$ *pour tout* $(s,u) \in S \times U$.

Définition 1.3.15 *Une suite (ν^n) de $\mathcal{Y}(S,\sigma,U)$ converge vers ν dans $\mathcal{Y}(S,\sigma,U)$ si, pour tout intégrande de Carathéodory L^1-borné ψ,*

$$\lim_n \int_{S\times U} \psi \, d\nu^n = \int_{S\times U} \psi \, d\nu. \tag{1.3}$$

Définition 1.3.16 *On dit qu'une suite (μ^n) de $\mathcal{Y}_{dis}(S,\sigma,U)$ converge vers μ dans $\mathcal{Y}_{dis}(S,\sigma,U)$ si la suite des mesures de Young correspondantes converge dans $\mathcal{Y}(S,\sigma,U)$. Cela revient à dire que, pour tout intégrande de Carathéodory L^1-borné ψ,*

$$\lim_n \int_S \int_U \psi(s,u)\mu_s^n(du)\sigma(ds) = \int_S \int_U \psi(s,u)\mu_s(du)\sigma(ds). \tag{1.4}$$

Supposons maintenant que H est un espace de Hilbert séparable, alors

Proposition 1.3.7 *Soient $h_n(\cdot), h(\cdot) \in C_H(I)$ $(n \geq 1)$ et $\mu^n, \mu \in \mathcal{Y}_{dis}(I,\lambda,U)$. Supposons que $(h_n(\cdot))$ converge uniformément vers $h(\cdot)$ et (μ^n) converge vers μ dans $\mathcal{Y}_{dis}(I,\lambda,U)$. Soit $\theta^n \in \mathcal{Y}(I,\lambda,H\times U)$ définie par $\theta_t^n := \delta_{h_n(t)} \otimes \mu_t^n$. Alors, θ^n converge dans $\mathcal{Y}(I,\lambda,H\times U)$ vers la mesure de Young $\theta \in \mathcal{Y}(I,\lambda,H\times U)$ définie par $\theta_t := \delta_{h(t)} \otimes \mu_t$.*

Définition 1.3.17 *Une suite de fonctions $(f_n(\cdot))$ est dite uniformément intégrable dans $L^1_{\mathbb{R}}(I)$ si elle est bornée dans $L^1_{\mathbb{R}}(I)$ et*

$$\lim_{\lambda(A)\to 0} \sup_n \int_A |f_n(t)| \, dt = 0.$$

Proposition 1.3.8 *Soit $u_n(\cdot) : I \longrightarrow U$ $(n \geq 1)$ une suite de fonctions mesurables. Supposons que la suite des mesures de Young associées (ν^n) (où, $\nu_t^n := \delta_{u_n(t)}$) converge vers ν dans $\mathcal{Y}(I,\lambda,U)$. Soit $\psi : I\times U \to \mathbb{R}$ un intégrande de Carathéodory. Supposons que la suite $(\psi(\cdot,u_n(\cdot)))_n$ est uniformément intégrable dans $L^1_{\mathbb{R}}(I)$. Alors, ψ est ν-intégrable et*

$$\int_{I\times U} \psi \, d\nu = \lim_n \int_I \psi(t,u_n(t)) \, dt.$$

Proposition 1.3.9 *Si U est un espace métrique compact, alors toute suite dans $\mathcal{Y}_{dis}(I,\lambda,U)$ possède une sous-suite convergente dans $\mathcal{Y}_{dis}(I,\lambda,U)$.*

1.3.7 Quelques résultats

Définition 1.3.18 *Une fonction $f : I \times H \longrightarrow H$ est dite de Carathéodory, si elle est mesurable par rapport à la première variable et continue par rapport à la deuxième.*

Proposition 1.3.10 *(Lemme de Gronwall : forme intégrale)*
Soient $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, $a, b \in L^\infty(T_0, T)$ et $\lambda \in L^1(T_0, T)$, $\lambda(t) \geq 0$ pour presque tout $t \in [T_0, T]$. Alors

$$a(t) \leq b(t) + \int_{T_0}^{t} \lambda(s)a(s)\, ds \quad \text{p.p. dans } [T_0, T], \tag{1.5}$$

implique que pour presque tout $t \in [T_0, T]$

$$a(t) \leq b(t) + \int_{T_0}^{t} \exp^{\Lambda(t)-\Lambda(s)} \lambda(s)b(s)\, ds, \tag{1.6}$$

où $\Lambda(t) = \int_{T_0}^{t} \lambda(\tau)\, d\tau$.

On aura besoin dans la suite des conséquences suivantes du Lemme de Gronwall, où $I := [T_0, T]$.

Lemme 1.3.11 *[19] Soit $(x_n(\cdot))$ une suite de fonctions absolument continues définies de I à valeurs dans H. Supposons que $\lim_n x_n(T_0) = 0$ et, pour tout n,*

$$\frac{d}{dt}(\|x_n(t)\|^2) \leq \beta_n(t)\|x_n(t)\|^2 + \alpha_n(t) \text{ p.p. } t \in I,$$

où $\alpha_n(\cdot), \beta_n(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}^+}(I)$. Supposons de plus que la suite $(\beta_n(\cdot))$ est bornée dans $L^1_{\mathbb{R}}(I)$ et $\lim_n \int_{T_0}^{T} \alpha_n(t)\, dt = 0$. Alors,

$$\lim_n \|x_n(\cdot)\|_\infty = 0.$$

Lemme 1.3.12 *[19] Soit $(\eta_n(\cdot))$ une suite de fonctions non-négatives et absolument continues définies de I dans $\mathbb{R}$. Supposons que $\lim_n \eta_n(T_0) = 0$ et, pour tout n,*

$$\dot{\eta}_n(t) \leq \beta(t)\eta_n(t) + \alpha_n(t) \text{ p.p. } t \in I,$$

où $\alpha_n(\cdot), \beta(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}}(I)$ avec $\beta(\cdot) \geq 0$. Supposons de plus que la suite $(\alpha_n(\cdot))$ est bornée dans $L^1_{\mathbb{R}}(I)$ et, pour tout $t \in [T_0, T]$, on a $\lim_n \int_{T_0}^{t} \alpha_n(s)\, ds = 0$. Alors, pour tout $t \in [T_0, T]$,

$$\lim_n \eta_n(t) = 0.$$

Lemme 1.3.13 *[20] Soient $(x_n(\cdot))$ une suite de fonctions non-négatives définies sur I, (α_n) une suite de nombres réels, et $\beta(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}^+}(I)$. Supposons que $\lim_n \alpha_n = 0$ et, pour tout n,*

$$x_n(t) \leq \int_{T_0}^{t} \beta(s)x_n(s)\, ds + \alpha_n. \tag{1.7}$$

Alors, pour tout $t \in [T_0, T]$,

$$\lim_n x_n(t) = 0.$$

Chapitre 2

Existence et unicité de solution pour un problème d'évolution avec une perturbation univoque

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité de solution sur $I := [T_0, T]$ de l'équation d'évolution avec perturbation univoque de l'inclusion différentielle originale

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) & \text{p.p. } t \in I \\ x(T_0) = x_0 \in \operatorname{dom}\varphi(T_0, \cdot), \end{cases}$$

où $\varphi : I \times H \to [0, +\infty]$, et où $\partial\varphi(t, \cdot)$ est le sous-différentiel d'une fonction $\varphi(t, \cdot)$ convexe propre semi-continue inférieurement (sci).

Dans le cas autonome, i.e., $\varphi : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, Brézis [8] a résolu le problème $(\mathcal{P})$, où φ est une fonction convexe propre sci, en se servant de la théorie des opérateurs maximaux-monotones et des semi-groupes de contractions associés. Degiovanni-Marino-Tosques [17] (voir [44]) ont introduit les concepts de Φ-convexité et Φ-monotonicité des sous-différentiels pour étudier les problèmes d'évolution correspondants, en utilisant des outils variationels. Dans [23], des résultats d'existence et d'unicité ont été obtenues pour les problèmes d'évolution gouvernés par le sous-différentiel (de Clarcke) d'une fonction fortement convexe composite qualifiée. Récemment, ces résultats ont été généralisés par Thibault-Marcellin [33] (voir [32]) pour une fonction pln φ.

Dans le cas non-autonome $(\mathcal{P})$, de nombreux résults ont été établis sous différentes conditions exprimées en termes de φ, ou la fonction conjuguée de Fenchel $\varphi^*(t,\cdot)$, ou l'approximation Yosida de $\partial\varphi(t,\cdot)$. On réfère à [3], [4], [24], [29], [30], [37], [48], [49], [50], [51].

Peralba [39, 40] a étudié le problème $(\mathcal{P})$, sous une hypothèse exprimée en terme de la fonction conjuguée $\varphi^*(t,\cdot)$ de la fonction convexe $\varphi(t,\cdot)$, i.e., il existe une fonction Lipschitz non-négative $k : H \to \mathbb{R}$ et une fonction absolument continue $a : I \to \mathbb{R}$ avec $\dot{a} \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ tel que pour tout $x \in H$ et $s, t \in I$

$$\varphi^*(t,x) \leq \varphi^*(s,x) + k(x)|a(t) - a(s)|.$$

Certains résultats ont été aussi obtenus en se servant d'hypothèses requises sur φ ou sur l'enveloppe de Moreau $\varphi_\lambda(t,\cdot)$, voir [4], [29], [30], [48], [49], [51]. D'autres auteurs traitent le problème $(\mathcal{P})$, avec une perturbation multivoque ou univoque, sous en général quelques hypothèses de compacité sur $\varphi(t,\cdot)$ (voir, exp., [4], [6], [24], [37], [38]).

Tout d'abord, nous rappelons le résultat d'existence et d'unicité de solution pour $(\mathcal{P}_h)$ (voir [39])

$$(\mathcal{P}_h) \qquad \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + h(t) \\ x(T_0) = x_0 \in \operatorname{dom}\varphi(T_0,\cdot) \end{cases}$$

où la perturbation h est univoque dépendant seulement du temps et est $L^2_H([T_0,T])$. Ensuite, sous les hypothèses de Peralba, nous établissons le plus important Théorème de ce Chapitre concernant $(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)})$, par des techniques faisant intervenir à la fois des résultats obtenus pour $(\mathcal{P}_h)$, et ceux de [19].

2.2 Cas où la perturbation dépend du temps

Cette section est essentiellement consacrée à l'étude du problème $(\mathcal{P}_h)$ dont la perturbation est univoque dépendant du temps. Sous de convenables hypothèses sur la fonction conjuguée $\varphi^*(t,\cdot)$ de la fonction convexe $\varphi(t,\cdot)$, Peralba [39, 40] a démontré existence et unicité de solution pour $(\mathcal{P}_h)$.

Dans le cas autonome, la résolution du problème $(\mathcal{P}_h)$, a suscité l'intérêt de nombreux auteurs tels que Brézis [8], dans le cadre convexe, ou encore Guillaume dans le cas particulier où la fonction φ est fortement convexe composite qualifiée [22]. En manipulant des fonctions Φ-convexes d'ordre 2, Tosques [44] procéda à une étude locale de $(\mathcal{P}_h)$. Récemment, les résultats d'existence globale dans [8], Théorèmes 3.4 et 3.6, et [22], Théorème 9.1.2, ont été étendus au contexte pln par Marcellin [32].

Dans le cas non-autonome, on réfère à Attouch-Damlamian [2, 3, 4] pour le cas de dimension finie, via les méthodes du point fixe.

Commençons par rappeler le résultat fondamental de Peralba [39, 40] assurant l'existence et l'unicité de solution absolument continue pour le problème non perturbé $(\mathcal{P})$.

Théorème 2.2.1 *[39] Soient H un espace de Hilbert, $I := [T_0, T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \times H \longrightarrow [0, +\infty]$ vérifiant les deux hypothèses suivantes :*

(H_1) Pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto \varphi(t,x)$ est convexe propre et semi-continue inférieurement.

(H_2) Il existe deux fonctions,

l'une $k : H \longrightarrow \mathbb{R}^+$ Lipschitzienne de rapport ρ,

l'autre $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ absolument continue sur I et à dérivée à dans $L^2_{\mathbb{R}^+}(I)$,

telles que, pour tout $(t,s,x) \in I \times I \times H$ on ait

$$\varphi^*(t,x) \leq \varphi^*(s,x) + k(x)|a(t) - a(s)| \tag{2.1}$$

où $\varphi^*(t,\cdot)$ représente la fonction duale de $\varphi(t,\cdot)$.

Alors, pour tout $x_0 \in \operatorname{dom} \varphi(T_0, \cdot)$, *le problème d'évolution*

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) \\ x(T_0) = x_0 \end{cases}$$

possède une unique solution $x(\cdot)$ *absolument continue sur* $[T_0, T]$. *De plus, pour tout* $t \in I : x(t) \in \operatorname{dom} \varphi(t, \cdot)$ et $t \mapsto \varphi(t, x(t))$ *est absolument continue sur* $[T_0, T]$.

L'hypothèse (H_1) *et la Proposition* 1.3.2 *entraînent que, pour tout* $t \in I$, $\partial\varphi(t, \cdot)$ *est maximal-monotone. L'unicité de la solution résulte alors classiquement de la monotonie de ces opérateurs.*

Remarque 2.2.1 *L'unique solution* $x(\cdot)$ *de* $(\mathcal{P})$ *satisfait à*

$$|\varphi(t_2, x(t_2)) - \varphi(t_1, x(t_1))| \leq \int_{t_1}^{t_2} [(k(0) + \rho\|\dot{x}(t)\|)\dot{a}(t) + \|\dot{x}(t)\|^2]\, dt, \tag{2.2}$$

pour tout $T_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$.

Remarque 2.2.2 *La méthode de Peralba (comme d'autres précédentes méthodes) associe à* $(\mathcal{P})$ *l'équation différentielle régularisée* $(\mathcal{P}^\lambda)$

$$\begin{cases} -\dot{x}_\lambda(t) = \nabla\varphi(t, x_\lambda(t)) \quad \text{p.p. } t \in I \\ x_\lambda(T_0) = x_0 \end{cases}$$

et montre que la famille $(x_\lambda(\cdot))_{\lambda>0}$ *de solutions de* $(\mathcal{P}^\lambda)$ *converge uniformément quand* $\lambda \downarrow 0$ *vers la fonction* $x(\cdot)$ *qui est la solution absolument continue de* $(\mathcal{P})$. *Elle montre aussi que la famille des dérivées* $(\dot{x}_\lambda(\cdot))_\lambda$ *converge en norme dans* $L^2_H(I)$ *vers* $\dot{x}(\cdot)$. *Parmi les résultats intermédiaires de [39], il a été établi, quand* $\varphi(\cdot, \cdot) \geq 0$, *que l'estimation suivante de la dérivée de* x_λ

$$\|\dot{x}_\lambda\|^2_{L^2_H} \leq \sqrt{T - T_0}k(0)\|\dot{a}\|_{L^2_{\mathbb{R}}} + \rho\|\dot{x}_\lambda\|_{L^2_H}\|\dot{a}\|_{L^2_{\mathbb{R}}} + \varphi_\lambda(T_0, x_0) - \varphi_\lambda(T, x_\lambda(T)) \tag{2.3}$$

a lieu.

Cette inégalité constitue un outil clé pour avoir une estimation appropriée de la dérivée de la solution du problème $(\mathcal{P})$. *Elle va jouer un rôle crucial dans notre développement.*

Proposition 2.2.2 *L'unique solution absolument continue* $x(\cdot)$ *de* $(\mathcal{P})$ *satisfait à*

$$\|\dot{x}\|_{L^2_H} \leq \frac{\rho}{2}\|\dot{a}\|_{L^2_{\mathbb{R}}} + [\sqrt{T - T_0}k(0)\|\dot{a}\|_{L^2_{\mathbb{R}}} + \frac{\rho^2}{4}\|\dot{a}\|^2_{L^2_{\mathbb{R}}} + \varphi(T_0, x_0) - \varphi(T, x(T))]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4}$$

Démonstration. De (2.3), on peut écrire

$$\|\dot{x}_\lambda\|^2_{L^2_H} \le \sqrt{T-T_0}k(0)\|\dot{a}\|_{L^2_{\mathbb{R}^+}} + \rho\|\dot{x}_\lambda\|_{L^2_H}\|\dot{a}\|_{L^2_{\mathbb{R}^+}} + \varphi_\lambda(T_0,x_0) - \varphi_\lambda(T,x_\lambda(T)). \tag{2.5}$$

On a vu dans la Remarque 2.2.2, que $(x_\lambda(\cdot))_\lambda$ converge uniformément vers $x(\cdot)$ et donc par (1.1), on a

$$\varphi(T,x(T)) \le \liminf_{\lambda\downarrow 0} \varphi_\lambda(T,x_\lambda(T)).$$

De plus, par la convergence ponctuelle (de manière croissante) de $(\varphi(t,\cdot))_\lambda$ vers $\varphi(t,\cdot)$ on a aussi $\lim_{\lambda\downarrow 0}\varphi_\lambda(T_0,x_0) = \varphi(T_0,x_0)$. En se servant de ces deux résultats, avec la convergence en norme dans $L^2_H(I)$ de $(\dot{x}_\lambda(\cdot))_\lambda$ vers $\dot{x}(\cdot)$, rappelée juste avant l'énoncé de la Proposition, et en passant à la limite supérieure dans (2.5), on obtient

$$\|\dot{x}\|^2_{L^2_H} \le \sqrt{T-T_0}k(0)\|\dot{a}\|_{L^2_{\mathbb{R}^+}} + \rho\|\dot{x}\|_{L^2_H}\|\dot{a}\|_{L^2_{\mathbb{R}^+}} + \varphi(T_0,x_0) - \varphi(T,x(T)),$$

l'estimation cherchée découle directement de cette dernière inégalité. La démonstration de la Proposition est terminée. □

Remarque 2.2.3 *(Remarques concernant les hypothèses)*
Il était question de trouver des hypothèses de régularité sur les variations de $\varphi(t,x)$ (ou tout au moins sur celles de $\partial\varphi(t,x)$) en fonction de t assurant l'existence d'une solution de l'équation

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t,x(t)).$$

Pourquoi avoir, dans ces conditions, formulé de telles hypothèses sur $\varphi^*(t,x)$ (duale de $\varphi(t,x)$) plutôt que sur $\varphi(t,x)$ elle même ?
Remarquons d'abord que l'équation étudiée

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t,x(t))$$

équivaut à la suivante

$$x(t) \in \partial\varphi^*(t,-\dot{x}(t))$$

et qu'il n'y a donc pas lieu de privilégier φ plutôt que sa duale φ^*. En d'autres termes disons qu'une hypothèse sur φ^* est tout aussi naturelle qu'une semblable sur φ.
Notons par ailleurs qu'une fonction convexe propre semi-continue inférieurement est l'enveleppe supérieure de ses minorantes affines et que son sous-différentiel n'est rien d'autre que l'ensemble des "pentes" de celles des minorantes qui sont exactes.

Étudier ces minorantes c'est précisément étudier la duale de la fonction convexe semi-continue inférieuremnt.
Pour ce qui est de l'hypothèse (H_2) elle-même elle a été motivée par le "problème de rafle" étudié par Moreau ([35]).
Trouver une solution du problème d'évolution

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\psi_{C(t)}(x(t)) \\ x(T_0) = x_0 \qquad\qquad x_0 \in C(T_0) \end{cases}$$

où $\psi_{C(t)}$ est la fonction indicatrice du convexe fermé $C(t)$.
Rappelons qu'on peut interpréter grossièrement ce problème de la façon suivante : le point $x(t)$, qu'on assimile à un point matériel situé dans un plan, se trouve à l'instant initial dans le convexe $C(T_0)$; il reste fixe tant qu'il n'est pas atteint par la frontière du convexe $C(t)$; il démarre, dès que la dite frontière l'atteint, avec une vitesse normale à celle-ci.
Dans un tel contexte il était naturel de rechercher des hypothèses de régularité des variations de $C(t)$ en fonction de t.
C'est ce qu'a fait Moreau dans [35] où il a imposé à $C(t)$ une variation absolument continue. Notons que cette hypothèse, a ensuite été affaiblie grâce à une notion de "rétraction" (Moreau [36]). Or l'hypothèse de continuité absolue faite sur $C(t)$ équivaut à une condition, sur la fonction d'appui $\varphi^*(t,\cdot)$ du convexe $C(t)$, de la forme

$$|\varphi^*(t,x) - \varphi^*(s,x)| \leq \|x\||v(t) - v(s)|$$

où v est absolument continue. C'est ceci qui nous a conduit à l'hypothèse (H_2). Le choix de cette hypothèse (H_2) sur φ^* est donc justifié.

On aura besoin de l'application suivante du Théorème 2.2.1 concernant un problème d'évolution, où la perturbation univoque dépend uniquement du temps. Dans le reste de ce travail, pour toute fonction $h : I \to H$, on note par $|h|$ la fonction de I dans $\mathbb{R}$ définie par $|h|(t) := \|h(t)\|$ pour tout $t \in I$.

Proposition 2.2.3 *Sous les hypothèses du Théorème* 2.2.1, *si* $h \in L^2_H(I)$ *et* $x_0 \in \operatorname{dom} \varphi(T_0, \cdot)$, *alors l'équation différentielle*

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + h(t) \\ x(T_0) = x_0 \in \operatorname{dom} \varphi(T_0, \cdot) \end{cases} \tag{2.6}$$

admet une unique solution absolument continue $x(\cdot)$ *qui satisfait*

$$\begin{aligned} \|\dot{x}\|_{L^2_H} \leq \frac{1}{2}(\rho + 1)\|\dot{a} + |h|\|_{L^2_{\mathbb{R}}} + \|h\|_{L^2_H} + & \\ [\sqrt{T - T_0}k(0)\|\dot{a} + |h|\|_{L^2_{\mathbb{R}}} + \frac{(\rho+1)^2}{4}\|\dot{a} + |h|\|^2_{L^2_{\mathbb{R}}} + \varphi(T_0, x_0) - \varphi(T, x(T))]^{\frac{1}{2}} & \quad (2.7) \end{aligned}$$

$$|\varphi(t_2, x(t_2)) - \varphi(t_1, x(t_1))| \leq \int_{t_1}^{t_2} [k(0) + (\rho + 1)\|\dot{x}(t) + h(t)\|][\dot{a}(t) + |h|(t)]\, dt \tag{2.8}$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{x}(t) + h(t)\|^2\, dt$$

pour $T_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$.

Démonstration. Nous allons nous ramener à une inclusion du type

$$-\dot{x}_1(t) \in \partial\varphi_1(t, x_1(t))$$

où φ_1 vérifie les hypothèses (H_1) et (H_2).

En effet , si on pose

$$\psi(t) = \int_{T_0}^{t} h(s)\, ds, \ \forall t \in [T_0, T]$$

l'inclusion

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + h(t)$$

équivaut à la suivante

$$-\frac{d}{dt}[x(t) + \psi(t)] \in \partial\varphi(t, x(t))$$

laquelle se met, après avoir posé

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) + \psi(t) \\ \varphi_1(t, x) &= \varphi(t, x - \psi(t)) \end{aligned}$$

sous la forme

$$-\dot{x}_1(t) \in \partial\varphi_1(t, x_1(t)).$$

Nous sommes ainsi amenés à étudier la fonction φ_1. Il est évident que φ_1 est non-négative, et pour tout $t \in [T_0, T]$, $\varphi_1(t, \cdot)$ est convexe propre et sci sur H. Il reste maintenant à vérifier les propriétés de $\varphi_1^*(t, \cdot)$ duale de $\varphi_1(t, \cdot)$. Notons d'abord que

$$\varphi_1^*(t, x) = \varphi^*(t, x) + \langle x, \psi(t) \rangle,$$

pour tout $(t, x) \in I \times H$. Ainsi

$$\varphi_1^*(t, x) \leq \varphi_1^*(s, x) + k(x)|a(t) - a(s)| + \|x\|\|\psi(t) - \psi(s)\|$$

pour tout $(t, s, x) \in I \times I \times H$. Par conséquent,

$$\varphi_1^*(t, x) \leq \varphi_1^*(s, x) + k_1(x)[|a(t) - a(s)| + \|\psi(t) - \psi(s)\|]$$

où $$k_1(x) = k(x) + \|x\|, \ \forall x \in H.$$

Soit $a_1(t) = \displaystyle\int_{T_0}^{t} [\dot{a}(\tau) + \|h(\tau)\|] \, d\tau$. Alors

$$\varphi_1^*(t, x) \leq \varphi_1^*(s, x) + k_1(x)|a_1(t) - a_1(s)| \tag{2.9}$$

pour tout $(t, s, x) \in I \times I \times H$. Il suffit enfin de noter que k_1 est $(\rho+1)$-Lipschitz, et que la fonction a_1 est absolument continue et à dérivée $\dot{a}_1 = \dot{a} + |h| \in L^2_{\mathbb{R}^+}(I)$. Ainsi l'hypothèse (H_2) est vérifiée et le Théorème 2.2.1 est applicable.

La Proposition 2.2.2, implique

$$\|\dot{x}_1\|_{L^2_H} \leq \frac{\rho+1}{2}\|\dot{a}_1\|_{L^2_{\mathbb{R}}} + [\sqrt{T - T_0}k_1(0)\|\dot{a}_1\|_{L^2_{\mathbb{R}}} + \frac{(\rho+1)^2}{4}\|\dot{a}_1\|^2_{L^2_{\mathbb{R}}} + \varphi_1(T_0, x_1(T_0)) - \varphi_1(T, x_1(T))]^{\frac{1}{2}},$$

et comme $k_1(0) = k(0)$, on conclut que

$$\|\dot{x}\|_{L^2_H} \leq \frac{\rho+1}{2}\|\dot{a} + |h|\|_{L^2_{\mathbb{R}}} + \|h\|_{L^2_H} + [\sqrt{T - T_0}k(0)\|\dot{a} + |h|\|_{L^2_{\mathbb{R}}} + \frac{(\rho+1)^2}{4}\|\dot{a} + |h|\|^2_{L^2_{\mathbb{R}}} + \varphi(T_0, x_0) - \varphi(T, x(T))]^{\frac{1}{2}}.$$

En vertu de l'inégalité (2.2), Remarque 2.2.1, l' estimation (2.8) a lieu. Ceci achève la démonstration de la Proposition. □

On s'adresse maintenant au cas d'une perturbation dépendant de deux variables (le temps et l'état). On aura besoin de faire les rappels suivants

Définition 2.2.1 *[39] Soit $A(t)$ un opérateur défini sur H, pour tout $t \in [T_0, T]$. Considérons la multi application $\mathcal{A} : L^2_H([T_0, T]) \to L^2_H([T_0, T])$ définie par*

$$\mathcal{A}x = \{y \in L^2_H([T_0, T]) : y(t) \in A(t)x(t) \text{ p.p.}\}.$$

Proposition 2.2.4 *[39] Si pour tout $t \in [T_0, T]$, $A(t) = \partial\varphi(t, \cdot)$ où φ satisfait aux hypothèses (H_1), (H_2) du Théorème 2.2.1, alors $\mathcal{A}$ est maximal-monotone.*

2.3 Cas où la perturbation dépend du temps et de l'état

Notre objectif est d'établir, dans un espace de Hilbert de dimension infinie, en s'appuyant sur les résultats obtenus pour $(\mathcal{P}_h)$ et via une méthode de discrétisation, un nouveau résultat concernant l'existence et l'unicité de solution pour le problème d'évolution suivant

$$(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)}) \qquad \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + f(t, x(t)) & \text{p.p. } t \in I \\ x(T_0) = x_0 \in \operatorname{dom}\varphi(T_0, \cdot), \end{cases}$$

où $f : I \times H \longrightarrow H$ est une fonction univoque, qui est mesurable par rapport à la première variable, Lipschitz par rapport à la deuxième variable sur tout sous-ensemble borné de H et satisfaisant à la condition de croissance

$$\|f(t, x)\| \leq \beta(t)(1 + \|x\|)\ \forall (t, x) \in [T_0, T] \times H,$$

où $\beta(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}^+}(I)$.

Dans le cas autonome, étant donnée $f(t,\cdot)$ globalement Lipschitzienne sur H avec une constante Lipschitz indépendante du temps et pour φ convexe, le problème $(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)})$ fut résolu par Brézis ([8], Proposition 3.12). Récemment, Thibault-Marcellin [33, 32], ont démontré l'existence et l'unicité d'une solution globale de $(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)})$, pour une fonction pln φ définie sur H.

Dans le cas non-autonome, quand la perturbation est univoque et monotone, de nombreux résultats d'existence, unicité et régularité ont été établis, voir Guillaume-Syam [24]. Mentionnons aussi les récents travaux d'Edmond-Thibault [18, 19], qui ont étendu au cadre général Hilbertien certains résultats de Castaing-Salvadori-Thibault [15] valables dans $\mathbb{R}^n$, pour la fonction $\varphi : [0,1] \times H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\varphi(t,x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C(t), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $C(t)$ ρ-prox-régulier pour tout $t \in [0,1]$ et bougeant de manière absolument continue en temps. Le problème $(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)})$ correspondant est connu sous le nom de "processus de rafle" avec perturbation Lipschitzienne.

2.3.1 Perturbation "mesurable/Lipschitz"

Commençons par établir un Théorème d'existence et d'unicité pour $(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)})$, où f est mesurable par rapport à la première variable, Lipschitz par rapport à la deuxième. Inspirés du développement du Théorème 1 d'Edmond-Thibault [19], nous démontrons le résultat suivant

Théorème 2.3.1 *Soient la fonction $\varphi : I \times H \longrightarrow [0,+\infty]$ satisfaisant (H_1) et (H_2) du Théorème* 2.2.1, *et $f : I \times H \longrightarrow H$ une fonction telle que*

i) f est séparément mesurable sur I;

ii) pour tout $\eta > 0$, il existe une fonction non-négative $\gamma_\eta(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ telle que, pour tout $t \in I$ et pour tout $(x,y) \in B[0,\eta] \times B[0,\eta]$,

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le \gamma_\eta(t)\|x - y\|;$$

iii) Il existe une fonction non-négative $\beta(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ telle que, pour tout $t \in I$ et pour tout $x \in H$,

$$\|f(t,x)\| \leq \beta(t)(1 + \|x\|). \tag{2.10}$$

Alors, pour tout $x_0 \in \mathrm{dom}\ \varphi(T_0, \cdot)$, le problème perturbé suivant

$$(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)}) \qquad \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + f(t, x(t)) & \text{p.p. } t \in I \\ x(T_0) = x_0 \end{cases}$$

possède une unique solution $x(\cdot)$ absolument continue sur I, qui satisfait à

$$\int_{T_0}^{T} \|\dot{x}(t)\|^2\, dt \leq \alpha + \sigma \int_{T_0}^{T} \|f(t, x(t))\|^2\, dt, \tag{2.11}$$

où

$$\alpha = (k^2(0) + 3(\rho+1)^2) \int_{T_0}^{T} \dot{a}^2(t)\, dt + 2[T - T_0 + \varphi(T_0, x_0) - \varphi(T, x(T))], \tag{2.12}$$

$$\sigma = k^2(0) + 3(\rho+1)^2 + 4. \tag{2.13}$$

Démonstration. Posons

$$m = \frac{1}{4(T - T_0)(k^2(0) + 3(\rho+1)^2 + 4)} > 0. \tag{2.14}$$

D'abord, supposons que

$$\int_{T_0}^{T} \beta^2(s)\, ds < m. \tag{2.15}$$

Notre démonstration d'existence consiste à définir des partitions de l'intervalle I, et à établir des estimations dépendant du point initial de chaque sous-intervalle. Nous allons donc, construire une suite de fonctions $(x_n(\cdot))$ dans $C_H(I)$, où pour tout n, $x_n(\cdot)$ est solution d'un problème avec perturbation univoque dépendant seulement du temps dans chaque sous-intervalle. Nous nous appuyerons sur les résultats obtenus dans la Proposition 2.2.3. Enfin, nous démontrerons que cette suite converge uniformément vers l'unique solution $x(\cdot)$ du problème $(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)})$.

A) **Construction de la suite $(x_n(\cdot))$.**

Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$, une partition de $I := [T_0, T]$ définie par

$$t_i^n = T_0 + i\frac{T - T_0}{n} \quad (0 \leq i \leq n).$$

Soit le problème suivant sur l'intervalle $[t_0^n, t_1^n]$:

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + f(t, x_0) & \text{p.p. } t \in [t_0^n, t_1^n] \\ x(t_0^n) = x_0 \in \operatorname{dom}\varphi(T_0, \cdot), \end{cases}$$

où $f(\cdot, x_0)$ est une fonction qui ne dépend que de t et est $L_H^2([t_0^n, t_1^n])$ (par hypothèse *iii*)). La Proposition 2.2.3 est applicable, ce problème possède alors une unique solution absolument continue que l'on note par $x_0^n(\cdot) : [t_0^n, t_1^n] \longrightarrow H$ et qui satisfait en vertu de (2.7), l'estimation

$$\|\dot{x}_0^n\|_{L_H^2} \leq \frac{(\rho+1)}{2}\|\dot{a} + |h_0^n|\|_{L_{\mathbb{R}}^2} + \|f(\cdot, x_0)\|_{L_H^2} +$$

$$[\sqrt{t_1^n - t_0^n}k(0)\|\dot{a} + |h_0^n|\|_{L_{\mathbb{R}}^2} + \frac{(\rho+1)^2}{4}\|\dot{a} + |h_0^n|\|_{L_{\mathbb{R}}^2}^2 + \varphi(T_0, x_0) - \varphi(t_1^n, x_0^n(t_1^n))]^{\frac{1}{2}},$$

où $|h_0^n| : t \mapsto \|f(t, x_0)\|$, pour tout $t \in [t_0^n, t_1^n]$.

De même, le problème

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + f(t, x_0^n(t_1^n)) & \text{p.p. } t \in [t_1^n, t_2^n] \\ x(t_1^n) = x_0^n(t_1^n) \in \operatorname{dom}\ \varphi(t_1^n, \cdot) \end{cases}$$

possède une unique solution absolument continue que l'on note par $x_1^n(\cdot) : [t_1^n, t_2^n] \longrightarrow H$ avec $x_1^n(t_1^n) = x_0^n(t_1^n)$, et vérifiant l'estimation (2.7) relative à l'intervalle $[t_1^n, t_2^n]$.

Ainsi de suite, pour tout n, il existe une suite finie de fonctions absolument continues $x_i^n(\cdot) : [t_i^n, t_{i+1}^n] \longrightarrow H \quad (0 \leq i \leq n-1)$ telle que pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$,

$$\begin{cases} -\dot{x}_i^n(t) \in \partial\varphi(t, x_i^n(t)) + f(t, x_{i-1}^n(t_i^n)) & \text{p.p. } t \in [t_i^n, t_{i+1}^n] \\ x_i^n(t_i^n) = x_{i-1}^n(t_i^n) \in \operatorname{dom}\ \varphi(t_i^n, \cdot) \end{cases}$$

avec

$$\|\dot{x}_i^n\|_{L_H^2} \leq \frac{(\rho+1)}{2}\|\dot{a} + |h_i^n|\|_{L_{\mathbb{R}}^2} + \|f(\cdot, x_i^n(t_i^n))\|_{L_H^2} + \tag{2.16}$$

$$[\sqrt{t_{i+1}^n - t_i^n}k(0)\|\dot{a} + |h_i^n|\|_{L_{\mathbb{R}}^2} + \frac{(\rho+1)^2}{4}\|\dot{a} + |h_i^n|\|_{L_{\mathbb{R}}^2}^2 + \varphi(t_i^n, x_i^n(t_i^n)) - \varphi(t_{i+1}^n, x_i^n(t_{i+1}^n))]^{\frac{1}{2}}$$

où $x_{-1}^n(T_0) = x_0$ et $|h_i^n| : t \mapsto \|f(t, x_{i-1}^n(t_i^n))\|$, pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$.

On définit $x_n(\cdot) : [T_0, T] \longrightarrow H$ par

$$x_n(t) = x_i^n(t), \text{ pour tout } t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]\ ,\ i \in \{0, \cdots, n-1\}.$$

Il est évident que $x_n(\cdot)$ est absolument continue sur $[T_0, T]$, posons,

$$\begin{cases} \theta_n(T_0) = T_0 \\ \theta_n(t) = t_i^n \qquad \text{si } t \in]t_i^n, t_{i+1}^n],\ i \in \{0, \cdots, n-1\}, \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} -\dot{x}_n(t) \in \partial\varphi(t, x_n(t)) + f(t, x_n(\theta_n(t))) \quad \text{p.p. } t \in [T_0, T] \\ x_n(T_0) = x_0. \end{cases}$$

Notons que la fonction $f(\cdot, x_n(\theta_n(\cdot)))$ définie pour $t \in [T_0, T]$ appartient à $L_H^2([T_0, T])$, car par hypothèse *iii*), on a pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, $f(\cdot, x_i^n(t_i^n))$ est $L_H^2([t_i^n, t_{i+1}^n])$.

Posons

$$h_n(t) = f(t, x_n(\theta_n(t))),\ \forall t \in [T_0, T],$$

et

$$|h_n| : t \mapsto \|h_n(t)\|,\ \forall t \in [T_0, T].$$

Alors, pour $I_i := [t_i^n, t_{i+1}^n]$, l'inégalité suivante

$$\|\dot{x}_n\|_{L_H^2(I_i)} \leq \frac{(\rho+1)}{2}\|\dot{a} + |h_n|\|_{L_{\mathbb{R}}^2(I_i)} + \|h_n\|_{L_H^2(I_i)} + [\sqrt{t_{i+1}^n - t_i^n}k(0)\|\dot{a} + |h_n|\|_{L_{\mathbb{R}}^2(I_i)} + \frac{(\rho+1)^2}{4}\|\dot{a} + |h_n|\|_{L_{\mathbb{R}}^2(I_i)}^2 + \varphi(t_i^n, x_n(t_i^n)) - \varphi(t_{i+1}^n, x_n(t_{i+1}^n))]^{\frac{1}{2}}$$

a lieu. Remarquons que

$$\begin{aligned} \sqrt{t_{i+1}^n - t_i^n}k(0)\|\dot{a} + |h_n|\|_{L_{\mathbb{R}}^2(I_i)} &= 2\sqrt{t_{i+1}^n - t_i^n}(\frac{k(0)}{2}\|\dot{a} + |h_n|\|_{L_{\mathbb{R}}^2(I_i)}) \\ &\leq (t_{i+1}^n - t_i^n) + \frac{k^2(0)}{4}\|\dot{a} + |h_n|\|_{L_{\mathbb{R}}^2(I_i)}^2, \end{aligned}$$

on obtient alors,

$$\|\dot{x}_n\|_{L^2_H(I_i)} \leq \frac{(\rho+1)}{2}\|\dot{a}+|h_n|\|_{L^2_{\mathbb{R}}(I_i)} + \|h_n\|_{L^2_H(I_i)} +$$

$$[(t^n_{i+1}-t^n_i) + \frac{(k^2(0)+(\rho+1)^2)}{4}\|\dot{a}+|h_n|\|^2_{L^2_{\mathbb{R}}(I_i)} + \varphi(t^n_i, x_n(t^n_i)) - \varphi(t^n_{i+1}, x_n(t^n_{i+1}))]^{\frac{1}{2}}$$

et d'où

$$\|\dot{x}_n\|^2_{L^2_H(I_i)} \leq 2[\frac{(\rho+1)}{2}\|\dot{a}+|h_n|\|_{L^2_{\mathbb{R}}(I_i)} + \|h_n\|_{L^2_H(I_i)}]^2 +$$

$$2[(t^n_{i+1}-t^n_i) + \frac{(k^2(0)+(\rho+1)^2)}{4}\|\dot{a}+|h_n|\|^2_{L^2_{\mathbb{R}}(I_i)} + \varphi(t^n_i, x_n(t^n_i)) - \varphi(t^n_{i+1}, x_n(t^n_{i+1}))].$$

Ceci implique,

$$\|\dot{x}_n\|^2_{L^2_H(I_i)} \leq (\rho+1)^2\|\dot{a}+|h_n|\|^2_{L^2_{\mathbb{R}}(I_i)} + 4\|h_n\|^2_{L^2_H(I_i)} +$$

$$2[(t^n_{i+1}-t^n_i) + \varphi(t^n_i, x_n(t^n_i)) - \varphi(t^n_{i+1}, x_n(t^n_{i+1}))] + \frac{(k^2(0)+(\rho+1)^2)}{2}\|\dot{a}+|h_n|\|^2_{L^2_{\mathbb{R}}(I_i)}.$$

Posons

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{2}(k^2(0)+3(\rho+1)^2), \\ c_i &= 2[(t^n_{i+1}-t^n_i) + \varphi(t^n_i, x_n(t^n_i)) - \varphi(t^n_{i+1}, x_n(t^n_{i+1}))], \end{aligned}$$

il résulte que,

$$\|\dot{x}_n\|^2_{L^2_H(I_i)} \leq b_0\|\dot{a}+|h_n|\|^2_{L^2_{\mathbb{R}}} + 4\|h_n\|^2_{L^2_H} + c_i. \tag{2.17}$$

Soit $\sigma = 2(b_0+2)$, on a alors

$$\|\dot{x}_n\|^2_{L^2_H(I_i)} \leq 2b_0\|\dot{a}\|^2_{L^2_{\mathbb{R}}(I_i)} + \sigma\|h_n\|^2_{L^2_H(I_i)} + c_i.$$

Ceci équivaut à,

$$\int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} \|\dot{x}_n(t)\|^2\, dt \leq 2b_0 \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} \dot{a}^2(t)\, dt + \sigma \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} \|h_n(t)\|^2\, dt + c_i. \tag{2.18}$$

On a par hypothèse, $\|f(t,x)\| \leq \beta(t)(1+\|x\|)$, pour tout $t \in I$ et pout tout $x \in H$, il résulte alors que, pour $i \in \{0,\cdots,n-1\}$,

$$\begin{aligned}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{x}_n(t)\|^2\,dt &\leq 2b_0 \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \dot{a}^2(t)\,dt + \sigma(1+\|x_n(t_i^n)\|)^2 \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \beta^2(t)\,dt + c_i \\ &\leq 2b_0 \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \dot{a}^2(t)\,dt + \sigma(1+\max\|x_n(t_i^n)\|)^2 \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \beta^2(t)\,dt + c_i,\end{aligned}$$

ceci étant vrai pour tout $i \in \{0,\cdots,n-1\}$, il en résulte alors

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{x}_n(t)\|^2\,dt \leq 2b_0 \int_{T_0}^{T} \dot{a}^2(t)\,dt + \sigma(1+\|x_n(\cdot)\|_\infty)^2 \int_{T_0}^{T} \beta^2(t)\,dt + c_n$$

où

$$c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i = 2[T - T_0 + \varphi(T_0,x_0) - \varphi(T,x_n(T))].$$

Comme $-\varphi(T,x_n(T)) \leq 0$, posons $d = 2(T - T_0 + \varphi(T_0,x_0))$, il s'en suit que

$$\int_{T_0}^{T} \|\dot{x}_n(t)\|^2\,dt \leq 2b_0 \int_{T_0}^{T} \dot{a}^2(t)\,dt + 2\sigma(1+\|x_n(\cdot)\|_\infty^2) \int_{T_0}^{T} \beta^2(t)\,dt + d$$

ainsi,

$$\int_{T_0}^{T} \|\dot{x}_n(t)\|^2\,dt \leq b + c\|x_n(\cdot)\|_\infty^2, \tag{2.19}$$

où

$$b = 2b_0 \int_{T_0}^{T} \dot{a}^2(t)\,dt + 2\sigma \int_{T_0}^{T} \beta^2(t)\,dt + d \quad \text{et} \quad c = 2\sigma \int_{T_0}^{T} \beta^2(t)\,dt.$$

En se servant de la continuité absolue de $x_n(\cdot)$, de l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur I, et de (2.19), on a pour tout $s \in I$

$$\|x_n(s) - x_0\|^2 \leq (s - T_0) \int_{T_0}^{s} \|\dot{x}_n(t)\|^2\,dt \leq (T - T_0)(b + c\|x_n(\cdot)\|_\infty^2)$$

et d'où

$$\|x_n(s)\|^2 \leq 2\|x_0\|^2 + 2\|x_n(s) - x_0\|^2 \leq 2\|x_0\|^2 + 2(T - T_0)(b + c\|x_n(\cdot)\|_\infty^2).$$

Par Conséquent, pour tout n, on a

$$(1 - 2(T - T_0)c)\|x_n(\cdot)\|_\infty^2 \;\leq\; 2(\|x_0\|^2 + (T - T_0)b).$$

Tenant compte de (2.15), i.e., $2(T - T_0)c < 1$, on a, pour presque tout t et pour tout n,

$$\|x_n(\cdot)\|_\infty \leq M \tag{2.20}$$

et

$$\|h_n(t)\| = \|f(t, x_n(\theta_n(t)))\| \leq \beta(t)(1 + M) \tag{2.21}$$

où

$$M := \left(\frac{2(\|x_0\|^2 + (T - T_0)b)}{1 - 2(T - T_0)c}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En vertu de (2.19) et (2.20), on a

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{T_0}^{T} \|\dot{x}_n(t)\|^2\, dt \leq b + cM^2. \tag{2.22}$$

De (2.21), on déduit que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\dot{x}_n(\cdot) + f(\cdot, x_n(\theta_n(\cdot)))\|_{L^2_H(I)} < +\infty. \tag{2.23}$$

Donc, on peut supposer, sans perdre de généralité, que $(\dot{x}_n(\cdot) + f(\cdot, x_n(\theta_n(\cdot))))$ converge faiblement dans $L^2_H(I)$. Il s'en suit de (2.18),

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{x}_n(t)\|^2\, dt \leq 2b_0 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \dot{a}^2(t)\, dt + \sigma \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|h_n(t)\|^2\, dt + \sum_{i=0}^{n-1} c_i.$$

D'où, on a, pour tout n,

$$\int_{T_0}^{T} \|\dot{x}_n(t)\|^2\, dt \leq 2b_0 \int_{T_0}^{T} \dot{a}^2(t)\, dt + \sigma \int_{T_0}^{T} \|f(t, x_n(\theta_n(t)))\|^2\, dt + c_n. \tag{2.24}$$

B) **Convergence de la suite** $(x_n(\cdot))$.

Nous allons maintenant prouver que, $(x_n(\cdot))$ converge uniformément sur I vers une fonction absolument continue qui n'est autre que la solution de $(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)})$. Démontrons que la suite $(x_n(\cdot))_n$ satisfait au critère uniforme de Cauchy sur I.

Soit p et q deux entiers arbitraires. On sait que l'on a, pour presque tout $t \in I$,

$$-\dot{x}_p(t) - f(t, x_p(\theta_p(t))) \in \partial\varphi(t, x_p(t))$$

$$-\dot{x}_q(t) - f(t, x_q(\theta_q(t))) \in \partial\varphi(t, x_q(t)).$$

$\partial\varphi(t, \cdot)$ étant monotone entraîne que,

$$\langle -\dot{x}_p(t) - f(t, x_p(\theta_p(t))) + \dot{x}_q(t) + f(t, x_q(\theta_q(t))), x_p(t) - x_q(t)\rangle \geq 0$$

alors,

$$\langle \dot{x}_p(t) - \dot{x}_q(t), x_p(t) - x_q(t)\rangle \leq \langle -f(t, x_p(\theta_p(t))) + f(t, x_q(\theta_q(t))), x_p(t) - x_q(t)\rangle.$$

Observons que

$\langle -f(t, x_p(\theta_p(t))) + f(t, x_q(\theta_q(t))), x_p(t) - x_q(t)\rangle =$

$\langle f(t, x_q(\theta_q(t))) - f(t, x_q(t)), x_p(t) - x_q(t)\rangle + \langle f(t, x_q(t)) - f(t, x_p(t)), x_p(t) - x_q(t)\rangle + \langle f(t, x_p(t)) -$
$f(t, x_p(\theta_p(t))), x_p(t) - x_q(t)\rangle$.

En vertu de l'hypothèse *ii)* et (2.20), il existe une fonction non-négative $\gamma_M(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ telle que l'on ait, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x_p(t) - x_q(t)\|^2 &= \langle \dot{x}_p(t) - \dot{x}_q(t), x_p(t) - x_q(t)\rangle \\ &\leq \gamma_M(t)\|x_p(t) - x_q(t)\|^2 \qquad (2.25) \\ &+\gamma_M(t)\|x_p(t) - x_q(t)\|[\|x_p(t) - x_p(\theta_p(t))\| + \|x_q(\theta_q(t)) - x_q(t)\|].\end{aligned}$$

De la continuité absolue de $x_p(\cdot)$, pour tout p et pour tout t, on a

$$\|x_p(t) - x_p(\theta_p(t))\| \leq \int_{\theta_p(t)}^{t} \|\dot{x}_p(s)\|\, ds.$$

En se servant de (2.20), il vient, pour tout $t \in I$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x_p(t) - x_q(t)\|^2 \leq \gamma_M(t)\|x_p(t) - x_q(t)\|^2 + 2M\gamma_M(t)\left(\int_{\theta_p(t)}^{t} \|\dot{x}_p(s)\|\, ds + \int_{\theta_q(t)}^{t} \|\dot{x}_q(s)\|\, ds\right).$$

Rappelons que (par construction) $0 \leq t - \theta_p(t) \leq (T - T_0)/p$, pour tout $t \in [T_0, T]$ et tout $p \in \mathbb{N}$. Par conséquent, pour tout $T_0 \leq t \leq T$, il vient

$$\begin{aligned}\int_{\theta_p(t)}^{t} \|\dot{x}_p(s)\| \, ds &\leq (t - \theta_p(t))^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\theta_p(t)}^{t} \|\dot{x}_p(s)\|^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{T - T_0}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{T_0}^{T} \|\dot{x}_p(s)\|^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

De (2.22),

$$\mathcal{S} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\dot{x}_n\|_{L^2_H([T_0,T])} < +\infty,$$

ainsi, pour tout $t \in [T_0, T]$, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x_p(t) - x_q(t)\|^2 \leq \gamma_M(t)\|x_p(t) - x_q(t)\|^2 + 2M\mathcal{S}\gamma_M(t)\left[\left(\frac{T - T_0}{p}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{T - T_0}{q}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Posons,

$$G_{p,q}(t) = 2M\mathcal{S}\gamma_M(t)\left[\left(\frac{T - T_0}{p}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{T - T_0}{q}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Puisque $\gamma_M(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}^+}(I)$ et $\frac{T-T_0}{p}, \frac{T-T_0}{q} \longrightarrow 0$ quand $p, q \to +\infty$, il résulte alors

$$\lim_{p,q \to \infty} G_{p,q}(t) = 0 \text{ p.p. } t \in I.$$

Comme de plus, $|G_{p,q}(t)| < 4(T - T_0)^{\frac{1}{2}} M\mathcal{S}\gamma_M(t)$ pour tout $t \in I$, il s'en suit du Théorème de la convergence dominée que

$$\lim_{p,q \to \infty} \int_{T_0}^{T} G_{p,q}(s) \, ds = 0 \text{ p.p.} \tag{2.26}$$

D'où, compte tenu du fait que, $\|x_p(T_0) - x_q(T_0)\| = 0$, entraîne, via le Lemme 1.3.11,

$$\lim_{p,q \to \infty} \|x_p(\cdot) - x_q(\cdot)\|_\infty = 0.$$

Par conséquent $(x_n(\cdot))$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}_H(I)$, donc elle converge uniformément sur I vers une fonction $x(\cdot) \in \mathcal{C}_H(I)$.

Observons de plus que, pour $T_0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\|x_n(t) - x_n(s)\| = \|\int_s^t \dot{x}_n(\tau) \, d\tau\| \leq (t - s)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{T_0}^{T} \|\dot{x}_n(\tau)\|^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leq (t - s)^{\frac{1}{2}} \mathcal{S},$$

et

$$\begin{aligned}\|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| &\leq \|x_n(\theta_n(t)) - x_n(t)\| + \|x_n(t) - x(t)\| \\ &\leq (t - \theta_n(t))^{\frac{1}{2}} \mathcal{S} + \|x_n(t) - x(t)\|,\end{aligned}$$

ainsi,

$$\|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| \leq \left(\frac{T - T_0}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{S} + \|x_n(t) - x(t)\|.$$

On conclut que $\|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pour tout $t \in I$.

Le comportement Lipschitz de $f(t, \cdot)$ pour tout t fixe dans $[T_0, T]$, entraîne que

$$\lim_{n\to\infty} \|f(t, x_n(\theta_n(t))) - f(t, x(t))\| = 0, \text{ avec}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{T_0}^{T} \|f(t, x_n(\theta_n(t))) - f(t, x(t))\|^2 \, dt = 0, \tag{2.27}$$

par le Théorème de convergence dominée de Lebesgue. D'où,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{T_0}^{T} \|f(t, x_n(\theta_n(t)))\|^2 \, dt = \int_{T_0}^{T} \|f(t, x(t))\|^2 \, dt. \tag{2.28}$$

En faisant tendre n vers l'infini dans (2.20) et (2.21), on obtient

$$\|x(\cdot)\|_\infty \leq M, \tag{2.29}$$

$$\|f(t, x)\| \leq \beta(t)(1 + M). \tag{2.30}$$

De plus, en vertu de (2.22), la suite des vélocités est bornée dans $L^2_H([T_0, T])$. Supposons donc que la suite $(\dot{x}_n)_n$, quitte à la remplacer par une sous-suite notée encore $(\dot{x}_n)_n$, est faiblement convergente dans $L^2_H([T_0, T])$; soit $z(\cdot)$ sa limite faible.

Pour tout n, tout $y \in H$ et pour tout $T_0 \leq s \leq t \leq T$, la continuité absolue de $(x_n(\cdot))_n$, implique

$$\int_{T_0}^{T} \langle y \mathbf{1}_{[s,t]}(\tau), \dot{x}_n(\tau) \rangle \, d\tau = \langle y, x_n(t) - x_n(s) \rangle.$$

Ensuite, passons à la limite dans l'égalité précédente

$$\langle y, \int_s^t z(\tau)\, d\tau\rangle = \langle y, x(t) - x(s)\rangle.$$

Alors, étant donné $s, t \in [T_0, T]$ avec $s \leq t$, on a $\int_s^t z(\tau)\ d\tau = x(t) - x(s)$, $x(\cdot)$ est donc absolument continue, et $z(\cdot)$ coïncide presque partout sur $[T_0, T]$ avec $\dot{x}(\cdot)$. D'où, $\dot{x}(\cdot) \in L^2_H([T_0, T])$, et

$$\dot{x}_n \to \dot{x} \text{ faiblement dans } L^2_H([T_0, T]). \tag{2.31}$$

Ainsi, en passant à la limite supérieure sur n dans (2.24), et en tenant compte de (2.28) et (2.31), il revient

$$\int_{T_0}^T \|\dot{x}(t)\|^2\, dt \ \leq\ 2b_0 \int_{T_0}^T \dot{a}^2(t)\, dt + \sigma \int_{T_0}^T \|f(t, x(t))\|^2\, dt + \limsup_n\ c_n.$$

Comme $x_n(T) \to x(T)$, il s'en suit de la semi-continuité inférieure de $x \mapsto \varphi(t, x)$ que,

$$\begin{aligned} \limsup_n c_n &= 2[T - T_0 + \varphi(T_0, x_0) - \liminf_n \varphi(T, x_n(T))] \\ &\leq 2[T - T_0 + \varphi(T_0, x_0) - \varphi(T, x(T))]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_{T_0}^T \|\dot{x}(t)\|^2\, dt \leq \alpha + \sigma \int_{T_0}^T \|f(t, x(t))\|^2\, dt, \tag{2.32}$$

où

$$\alpha \ =\ 2b_0 \int_{T_0}^T \dot{a}^2(t)\, dt + 2[T - T_0 + \varphi(T_0, x_0) - \varphi(T, x(T))].$$

C) Montrons que $x(\cdot)$ est solution de $(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)})$.

Rappelons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} -\dot{x}_n(t) \in \partial\varphi(t, x_n(t)) + f(t, x_n(\theta_n(t))) & \text{p.p. } t \in [T_0, T] \\ x_n(T_0) = x_0. \end{cases}$$

Pour établir que

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + f(t, x(t)) \text{ p.p. } t \in [T_0, T],$$

introduisons d'abord, l'opérateur $\mathcal{A}$ défini sur $L^2_H([T_0,T])$ par

$$\mathcal{A}x = \{y \in L^2_H([T_0,T]) : y(t) \in \partial\varphi(t,x(t)) \quad \text{p.p. sur } [T_0,T]\}.$$

$\mathcal{A}$ étant maximal-monotone sur $L^2_H([T_0,T])$ (Proposition 2.2.4), remarquons que

- $x_n(t) \in \operatorname{dom}\mathcal{A}(t)$, $-\dot{x}_n(t) - f(t,x_n(\theta_n(t))) \in \mathcal{A}x_n(t)$, $\forall t \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $x_n(\cdot) \longrightarrow x(\cdot)$ fortement dans $L^2_H(I)$;
- $-\dot{x}_n(\cdot) - f(\cdot,x_n(\theta_n(\cdot))) \longrightarrow -\dot{x}(\cdot) - f(\cdot,x(\cdot))$ faiblement dans $L^2_H(I)$ via (2.27);

la demi-fermeture de $\mathcal{A}$ entraîne que, $x(\cdot)$ est solution de l'inclusion differentielle $(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)})$.

Maintenant, on s'adresse au cas général quand $\int_{T_0}^T \beta^2(s)\,ds \geq m$. Fixons un certain $\delta > 0$ tel que pour tout sous-intervalle J de I avec longueur$(J) < \delta$ on a $\int_J \beta^2(s)\,ds < m$, et fixons aussi un certain entier N tel que $(T-T_0)/N < \delta$. Posons $T_i := T_0 + \frac{i}{N}(T-T_0)$ pour $i = 0,\cdots,N$ et observons que pour tout $i = 1,\cdots,N$ nous avons

$$\int_{T_{i-1}}^{T_i} \beta^2(s)\,ds < m < \frac{1}{4(T_i - T_{i-1})(k^2(0) + 3(\rho+1)^2 + 4)}$$

et d'où (2.15) relative à l'intervalle $[T_{i-1},T_i]$ est satisfaite. Par conséquent, en appliquant ce qui précéde aux intervalles $[T_0,T_1]$, $[T_1,T_2]$, $\cdots$, et à $[T_{N-1},T]$, on obtient des solutions absolument continues $y_1(\cdot)$ sur $[T_0,T_1]$ avec $y_1(T_0) = x_0$, $y_2(\cdot)$ sur $[T_1,T_2]$ avec $y_2(T_1) = y_1(T_1)$, $\cdots$, $y_N(\cdot)$ sur $[T_{N-1},T]$ avec $y_N(T_{N-1}) = y_{N-1}(T_{N-1})$. D'où, il est évident que l'application $x(\cdot)$ de $I = [T_0,T]$ dans H définie par $x(t) = y_i(t)$ pour tout $t \in [T_{i-1},T_i]$, $i = 1,2,\cdots,N$ est solution absolument continue sur I de $(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)})$. Il est évident aussi que (2.32) relative à l'intervalle $[T_{i-1},T_i]$, est satisfaite pour tout $i = 1,\cdots,N$. D'où, l'inégalité (2.11) a lieu. Comme de plus $-\varphi(T,x(T)) \leq 0$, il s'en suit

$$\int_{T_0}^{T} \|\dot{x}(t)\|^2\,dt \leq \alpha^0 + \sigma \int_{T_0}^{T} \|f(t,x(t))\|^2\,dt, \tag{2.33}$$

où,

$$\alpha^0 = (k^2(0) + 3(\rho+1)^2)\int_{T_0}^{T} \dot{a}^2(t)\,dt + 2[T - T_0 + \varphi(T_0,x_0)]. \tag{2.34}$$

L'unicité découle de la monotonicité de l'opérateur sous-différentiel et la condition de Lipschitz sur f par rapport à la deuxième variable. Ceci achève la démonstration. □

Nous avons par conséquent, les propriétés suivantes concernant la solution du problème précédent. Dans le reste de ce mémoire, nous entendrons par α, α^0, σ et m, les constantes définies par (2.12), (2.34), (2.13), et (2.14) respectivement.

Proposition 2.3.2 *L'unique solution $x(\cdot)$ de $(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)})$ satisfait à*

$$\|x(t) - x_0\| \leq [\xi(T)]^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, on a

$$\|f(t, x(t))\| \leq \beta(t)(1 + K) \text{ p.p. } t \in I,$$

et

$$\int_{T_0}^{T} \|\dot{x}(t)\|^2 \, dt \leq \alpha^0 + \sigma(1 + K)^2 \int_{T_0}^{T} \beta^2(t) \, dt,$$

où

$$K := \|x_0\| + [\xi(T)]^{\frac{1}{2}},$$

et où la fonction non-négative $\xi(\cdot)$ est continue et croissante, définie sur $[T_0, T]$ par

$$\xi(s) = b(s) + 2\sigma(s - T_0) \int_{T_0}^{s} b(\tau)\beta^2(\tau) \exp(2\sigma \int_{\tau}^{s} (\theta - T_0)\beta^2(\theta) \, d\theta) \, d\tau,$$

et pour tout $t \in [T_0, T]$

$$b(t) = (t - T_0)[\alpha^0 + 2\sigma(1 + \|x_0\|)^2 \int_{T_0}^{t} \beta^2(\theta) \, d\theta].$$

Démonstration. Soit $x(\cdot)$ l'unique solution de $(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)})$. En se servant de la continuité absolue de $x(\cdot)$ sur $[T_0, T]$, (2.33), et de l'hypothèse *iii*), on a pour $T_0 \leq s < T$,

$$\begin{aligned} \|x(s) - x_0\|^2 &\leq (s - T_0) \int_{T_0}^{s} \|\dot{x}(\tau)\|^2 \, d\tau \\ &\leq (s - T_0)[\alpha^0 + \sigma \int_{T_0}^{s} \beta^2(\tau)(1 + \|x(\tau)\|)^2 \, d\tau]. \end{aligned}$$

D'où, pour tout $s \in [T_0, T]$

$$\|x(s) - x_0\|^2 \leq \alpha^0(s - T_0) + 2\sigma(s - T_0)(1 + \|x_0\|)^2 \int_{T_0}^{s} \beta^2(\tau) \, d\tau + 2\sigma(s - T_0) \int_{T_0}^{s} \beta^2(\tau)\|x(\tau) - x_0\|^2 \, d\tau.$$

L'inégalité de Gronwall, entraîne, pour tout $s \in [T_0, T]$, et pour

$$\xi(s) = b(s) + c(s) \int_{T_0}^{s} b(\tau)\beta^2(\tau) \exp(\int_{\tau}^{s} \beta^2(\theta)c(\theta)\, d\theta)\, d\tau,$$

que,

$$\|x(s) - x_0\|^2 \leq \xi(s), \tag{2.35}$$

où

$$\begin{aligned} b(t) &= (t - T_0)[\alpha^0 + 2\sigma(1 + \|x_0\|)^2 \int_{T_0}^{t} \beta^2(\theta)\, d\theta], \\ c(t) &= 2\sigma(t - T_0). \end{aligned}$$

Évidemment les fonctions $b(\cdot)$, $c(\cdot)$ et $\xi(\cdot)$ sont croissantes et continues sur $[T_0, T]$.

Il s'en suit de (2.35),

$$\|x(\cdot)\|_\infty \leq K,$$

où $K = \|x_0\| + [\xi(T)]^{\frac{1}{2}}$. Par conséquent,

$$\|f(t, x(t))\| \leq \beta(t)(1 + K) \text{ p.p. } t \in I.$$

La démonstration de la Proposition est donc terminée. □

La Proposition suivante donne un résultat topologique concernant la fonction $a \mapsto x_a(\cdot)$, qui associe à tout $a \in \operatorname{dom} \varphi(T_0, \cdot)$, l'unique solution du problème précédent avec la condition initiale a.

Proposition 2.3.3 *Sous les hypothèses du Théorème* 2.3.1, *pour tout* $a \in$ dom $\varphi(T_0, \cdot)$, *soit* $x_a(\cdot)$ *l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + f(t, x(t)) & \text{p.p. } t \in [T_0, T] \\ x(T_0) = a. \end{cases}$$

Alors, la fonction $\psi : a \mapsto x_a(\cdot)$ *de* dom $\varphi(T_0, \cdot)$ *dans l'espace* $C_H([T_0, T])$ *muni de la norme de la convergence uniforme est Lipschitz sur tout sous-ensemble borné de* dom $\varphi(T_0, \cdot)$.

Démonstration. Soit M un nombre réel positif fixe. Nous allons montrer que la fonction ψ est Lipschitz sur dom $\varphi(T_0, \cdot) \cap M\mathbb{B}$.

En vertu du Théorème 2.3.1, et de la Proposition 2.3.2, il existe un nombre réel M_1 dépendant seulement de M tel que, pour tout $y \in$ dom $\varphi(T_0, \cdot) \cap M\mathbb{B}$ et, pour presque tout $t \in [T_0, T]$,

$$\|f(t, x_y(t))\| \leq (1 + M_1)\beta(t) \tag{2.36}$$

et

$$\int_{T_0}^{T} \|\dot{x}_y(t)\|^2 \, dt \leq \alpha^0 + \sigma(1 + M_1)^2 \int_{T_0}^{T} \beta^2(t) \, dt.$$

Grâce à cette dernière inégalité, pour un certain $\eta_1 > 0$ dépendant seulement de M, pour tout $y \in$ dom $\varphi(T_0, \cdot) \cap M\mathbb{B}$ et, pour tout $t \in [T_0, T]$, on a

$$x_y(t) \in B[0, \eta_1]. \tag{2.37}$$

Fixons $a, b \in$ dom $\varphi(T_0, \cdot) \cap M\mathbb{B}$. $\partial\varphi(t, \cdot)$ étant maximal-monotone entraîne que, pour presque tout $t \in I$,

$$\langle -\dot{x}_a(t) - f(t, x_a(t)) + \dot{x}_b(t) + f(t, x_b(t)), x_a(t) - x_b(t) \rangle \geq 0$$

et alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|x_a(t) - x_b(t)\|^2) \leq \|f(t, x_a(t)) - f(t, x_b(t))\| \|x_a(t) - x_b(t)\|. \tag{2.38}$$

Par hypothèse *ii*), il existe une fonction non-négative $\gamma_{\eta_1}(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ telle que $f(t, \cdot)$ est $\gamma_{\eta_1}(t)$-Lipschitz sur $B[0, \eta_1]$(cette fonction dépend seulement de M), avec (2.37), entraîne que pour presque tout $t \in [T_0, T]$,

$$\frac{d}{dt}(\|x_a(t) - x_b(t)\|^2) \leq 2\gamma_{\eta_1}(t)\|x_a(t) - x_b(t)\|^2.$$

Via le Lemme de Gronwall, on obtient, pour tout $t \in [T_0, T]$

$$\sup_{t \in [T_0, T]} \|x_a(t) - x_b(t)\|^2 \leq \|a - b\|^2 \exp\{2 \int_{T_0}^{T} \gamma_{\eta_1}(s) \, ds\}.$$

D'où,

$$\|x_a(\cdot) - x_b(\cdot)\|_\infty \leq B\|a - b\|.$$

où

$$B := \exp\{\int_{T_0}^{T} \gamma_{\eta_1}(s)\, ds\}.$$

Ce qui achève la démonstration de la Proposition. □

Nous allons terminer ce chapitre par démontrer existence de solution pour le problème $(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)})$, où la perturbation de Carathéodory satisfait à la condition de croissance linéaire. Nous remplacerons la condition de Lipschitz sur f, par une hypothèse de compacité sur $\varphi(t, \cdot)$.

2.3.2 Perturbation de Carathéodory

Notre résultat (Théorème 2.3.1), a été établi sans aucune condition de compacité (laquelle a été remplacée par une condition de Lipschitz sur la perturbation).
Les résultats antérieurs avec des perturbations multivoques basés sur la condition de compacité suivante : φ_t étant inf-boule-compacte (voir Théorème 4.4[6], Théorème 2.5[11]) utilisent un argument du point fixe. Sous cette condition de compacité sur la fonction φ_t, nous allons démontrer notre deuxième résultat d'existence pour le cas particulier d'une perturbation univoque (de Carathéodory), via une autre méthode que le point fixe.

Théorème 2.3.4 *Soit la fonction $\varphi : I \times H \longrightarrow [0, +\infty]$ satisfaisant (H_1) et (H_2) du Théorème 2.2.1. Supposons que φ_t soit inf-boule-compacte et considérons une fonction $f : I \times H \longrightarrow H$ de Carathéodory telle qu'il existe une fonction non-négative $\beta(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ telle que, pour tout $(t, x) \in I \times H$, on a*

$$\|f(t, x)\| \leq \beta(t)(1 + \|x\|). \tag{2.39}$$

Alors, pour tout $x_0 \in \operatorname{dom} \varphi(T_0, \cdot)$, le problème suivant

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + f(t, x(t)) & \text{p.p. } t \in I \\ x(T_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.40}$$

admet au moins une solution absolument continuous $x(\cdot)$.

Démonstration. On reprend les mêmes étapes que dans A) de la démonstration du Théorème 2.3.1, tout en gardant les mêmes notations. Ensuite, on procéde comme suit, pour avoir la convergence de la suite $(x_n(\cdot))$: Rappelons que la suite (x_n) est bornée et équicontinue dans $C_H(I)$, puisque $(\dot{x}_n)$ est bornée dans $L^2_H([T_0, T])$. Tenant compte de l'inégalité (2.8) de la Proposition 2.2.3, pour tout $t \in [T_0, T]$ fixe et tout n, on a

$$|\varphi(t, x_n(t)) - \varphi(T_0, x_0)| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{T_0}^{t} [k(0) + (\rho + 1)\|\dot{x}_n + h_n\|][\dot{a} + |h_n|]\, dt$$

$$+ \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{T_0}^{t} \|\dot{x}_n + h_n\|^2 < +\infty.$$

Comme φ_t est inf-boule-compacte par hypothèse, on voit bien que l'ensemble $\{x_n(t) : n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact pour la norme de la topologie de H. Par conséquent, $\{x_n\}$ est relativement compacte. On peut alors extraire une sous-suite de $(x_n(\cdot))$ qui converge uniformément sur I, vers une fonction $x(\cdot) \in C_H(I)$, solution du problème considéré. Ceci achève la démonstration du Théorème. $\square$

Remarque 2.3.1 - *Pour avoir l'unicité de solution, la perturbation f doit être de plus, Lipschitz par rapport à la deuxième variable.*

- *Chaque solution $x(\cdot)$ du problème précédent satisfait aux inégalités de la Proposition* 2.3.2.

Chapitre 3

Application à un problème de contrôle optimal de type Bolza

3.1 Introduction

Notre analyse de problèmes d'évolution, dans un espace de Hilbert, perturbés par une fonction Lipschitz est surtout motivée (comme a été établi dans le cas du processus de rafle avec perturbation Lipschitz dans [13, 19]) par leurs applications à des problèmes de contrôle optimal. Nous consacrons ce chatitre à la relaxation de problèmes de contrôle optimal, faisant intervenir des mesures de Young, et soumis à des contraintes sous forme d'inclusions différentielles perturbées gouvernées par le sous-différentiel d'une fonction φ satisfaisant aux hypothèses (H_1) et (H_2), via le Théorème d'existence et d'unicité (Théorème 2.3.1). Notre problème est le suivant :

Étant donné un espace de Hilbert séparable H, $I := [T_0, T]$, un espace métrique compact U et une multi-application Lebesgue-mesurable $\Gamma : I \rightrightarrows U$ à valeurs compactes non-vides, on considère la multi-application Lebesgue-mesurable Σ de I à valeurs dans $\mathcal{M}_+^1(U)$, l'ensemble de toutes les mesures de probabilité sur $(U, \mathcal{B}(U))$, définie, pour tout $t \in I$, par

$$\Sigma(t) := \{P \in \mathcal{M}_+^1(U) : P(\Gamma(t)) = 1\}.$$

On note par S_Γ (resp. S_Σ) l'ensemble des sélections Lebesgue-mesurables de Γ (resp. Σ).

Soit $g : I \times H \times U \to H$ une application univoque satisfaisant à certaines conditions, en particulier une condition de type Lipschitz par rapport à la seconde variable. Pour $x_0 \in \operatorname{dom}\varphi(T_0,\cdot)$, $\zeta \in S_\Gamma$, et $\mu \in S_\Sigma$, on considère les deux problèmes perturbés suivants

$$(\mathcal{PO}(\zeta)) \qquad \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t,x(t)) + g(t,x(t),\zeta(t)) & \text{p.p. } t \in I \\ x(T_0) = x_0 \end{cases}$$

et

$$(\mathcal{PR}(\mu)) \qquad \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t,x(t)) + \displaystyle\int_{\Gamma(t)} g(t,x(t),u)\mu_t(du) & \text{p.p. } t \in I \\ x(T_0) = x_0. \end{cases}$$

Nous allons voir que les hypothèses sur g garantissent, par nos résultats, l'existence en dimension infinie d'une solution unique pour chacun de ces problèmes. Ces solutions seront notées par $x_\zeta(\cdot)$ et $x_\mu(\cdot)$ respectivement.

Maintenant, un intégrande $J : I \times H \times U \to \mathbb{R}$ étant donné, les problèmes de contrôle optimal suivants ont un sens en dimension infinie :

$$\inf_{\zeta(\cdot)\in S_\Gamma} \int_{T_0}^{T} J(t,x_\zeta(t),\zeta(t))\,dt \qquad (P.O)$$

et

$$\inf_{\mu\in S_\Sigma} \int_{T_0}^{T} \int_U J(t,x_\mu(t),u)\mu_t(du)\,dt. \qquad (P.R)$$

Le deuxième est appelé problème relaxé.

Les deux questions qui se posent sont les suivantes

- le problème $(P.R)$ a-t-il une solution optimale ?
- si oui, l'égalité $\inf(P.O) = \min(P.R)$ a-t-elle lieu ?

Des problèmes de relaxation similaires, faisant intervenir les mesures de Young, ont été récemment étudiés dans le cas de dimension finie, par Castaing et Raynaud de Fitte [14], pour des équations différentielles ordinaires correspondant au cas $\varphi \equiv 0$ et U étant un produit d'espaces métriques compacts. Avant, on rétrouvait des résultats analogues avec des équations différentielles ordinaires dans les papiers de Gouila-Houri [21] et de Warga [46, 47].

Quelques années passées, Jawhar [27, 28] a démontré le Théorème de relaxation pour les problèmes de contrôle gouvernés par le processus de rafle convexe et pour J non-négative. Ensuite, d'analogues résultats ont été obtenus pour le processus de rafle non-convexe par Castaing, Salvadori, et Thibault [15] sous de faibles hypothèses sur l'intégrande J. Après, Castaing, Jofré et Salvadori [9] ont étudié les problèmes de contrôle gouvernés par le processus de rafle non-convexe, et ceux gouvernés par un opérateur m-accrétif $A(t) = \partial\varphi(t, \cdot)$, où $g : [0,1] \times \mathcal{C}_0 \times S \times Z \to \mathbb{R}^d$, S, Z étant deux espaces métriques compacts. Les précédents travaux sont valables en dimension finie.

L'analyse dans [15] a été attentivement étendu aux espaces de Hilbert par Edmond et Thibault [18, 19] et par Marcellin [32] pour les problèmes de contrôle gouvernés par l'opérateur sous-différentiel d'une fonction pln $\varphi : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Dans tout ce qui s'en suit, H est un espace de Hilbert séparable, l'espace métrique U est compact. On rappelle aussi que $I := [T_0, T]$ et λ est la mesure de Lebesgue sur I. Nous entendrons par α, α^0, σ et m, les constantes définies par (2.12), (2.34), (2.13), et (2.14) respectivement.

3.2 Contrôle original et contrôle relaxé

Soit $\Gamma : I \rightrightarrows U$ une multi-application λ-mesurable à valeurs compactes non vides. Considérons la multi-application $\Sigma(\cdot)$ définie sur I par

$$\Sigma(t) := \{P \in \mathcal{M}_+^1(U) : P(\Gamma(t)) = 1\}.$$

On note par S_Γ (resp. S_Σ) l'ensemble de toutes les sélections λ-mesurables (égalité presque partout) de Γ (resp. Σ). L'ensemble S_Σ est non vide. Il est évident que, $S_\Gamma \subset S_\Sigma$ dans le sens suivant, pour tout $\zeta \in S_\Gamma$, la mesure de Young μ où $(\mu_t = \delta_{\zeta(t)})_{t\in I}$ satisfait $\mu \in S_\Sigma$.

Proposition 3.2.1 [27] *Soit $\Gamma : I \rightrightarrows U$ une multi-application λ-mesurable dans les compacts non vides de U. Alors, la multi-application $\Sigma(\cdot)$ définie sur I par*

$$\Sigma(t) = \{P \in \mathcal{M}^1_+(U) : P(\Gamma(t)) = 1\}$$

est mesurable à valeurs convexes compactes non vides de $\mathcal{M}^1_+(U)$ et l'ensemble S_Σ des sélections λ-mesurables de Σ est non vide et est séquentiellement fermé dans $\mathcal{Y}_{dis}(I, \lambda, U)$.

Les éléments de S_Γ sont dits contrôles originaux et ceux de S_Σ contrôles relaxés.

Soit $g : I \times H \times U \longrightarrow H$ une fonction vérifiant :

i) pour tout $t \in I$, $g(t, \cdot, \cdot)$ est continue sur $H \times U$;

ii) pour tout $(x, u) \in H \times U$, $g(\cdot, x, u)$ est λ-mesurable sur I;

iii) pour tout $\eta > 0$, il existe une fonction non-négative $\gamma_\eta(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ telle que, pour tout $(t, u) \in I \times U$ et pour tout $x, y \in B[0, \eta]$,

$$\|g(t, x, u) - g(t, y, u)\| \leq \gamma_\eta(t)\|x - y\|;$$

iv) il existe une fonction non-négative $\beta(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ telle que, pour tout $(t, x, u) \in I \times H \times U$, on a

$$\|g(t, x, u)\| \leq \beta(t)(1 + \|x\|).$$

Supposons que φ vérifie (H_1) et (H_2). Étant donné $x_0 \in \operatorname{dom} \varphi(T_0, \cdot)$, $\zeta \in S_\Gamma$, et $\mu \in S_\Sigma$, considérons les deux problèmes d'évolution suivants :

$$(\mathcal{PO}(\zeta)) \quad \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + g(t, x(t), \zeta(t)) & \text{p.p. } t \in I \\ x(T_0) = x_0 \end{cases}$$

et

$$(\mathcal{PR}(\mu)) \quad \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + \displaystyle\int_{\Gamma(t)} g(t, x(t), u)\mu_t(du) & \text{p.p. } t \in I \\ x(T_0) = x_0. \end{cases}$$

En vertu de la Remarque 1.3.3 1), la fonction

$$h_\mu(t,x) := \int_{\Gamma(t)} g(t,x,u)\mu_t(du) = \int_U g(t,x,u)\mu_t(du)$$

est séparément λ-mesurable sur I. De plus, grâce aux hypothèses sur g et le fait que $\mu_t(\Gamma(t)) = \mu_t(U) = 1$, on a

- pour tout $\eta > 0$, pour tout $t \in I$ et pour tout $x, y \in B[0,\eta]$,

$$\|h_\mu(t,x) - h_\mu(t,y)\| \le \gamma_\eta(t)\|x-y\|;$$

- pour tout $(t,x) \in I \times H$, on a

$$\|h_\mu(t,x)\| \le \beta(t)(1+\|x\|). \tag{3.1}$$

Par conséquent, le Théorème 2.3.1 entraîne que, pour tout $\zeta \in S_\Gamma$ et pour tout $\mu \in S_\Sigma$, chacun des problèmes $(\mathcal{PO}(\zeta))$ et $(\mathcal{PR}(\mu))$ possède une unique solution, que l'on note par $x_\zeta(\cdot)$ et $x_\mu(\cdot)$ respectivement. De plus, on a

$$\{x_\zeta(\cdot) : \zeta \in S_\Gamma\} \subset \{x_\mu(\cdot) : \mu \in S_\Sigma\}.$$

Remarque 3.2.1 *Une autre conclusion utile de la Proposition 2.3.2 assure que pour tout $\mu \in S_\Sigma$ et pour tout $s, t \in [T_0, T]$,*

$$\|x_\mu(t) - x_0\| \le [\xi(T)]^{\frac{1}{2}},$$

où

$$\xi(s) = b(s) + 2\sigma(s-T_0)\int_{T_0}^{s} b(\tau)\beta^2(\tau)\exp(2\sigma\int_{\tau}^{s}(\theta - T_0)\beta^2(\theta)\,d\theta)\,d\tau,$$

et pour tout $t \in [T_0, T]$

$$b(t) \;=\; (t-T_0)[\alpha^0 + 2\sigma(1+\|x_0\|)^2\int_{T_0}^{t}\beta^2(\theta)\,d\theta].$$

En particulier, ceci révéle que

$$\sup\{\|x_\mu(t)\| : t \in [T_0,T],\ \mu \in S_\Sigma\} \le \|x_0\| + [\xi(T)]^{\frac{1}{2}} := \xi_{T_0,T}.$$

Proposition 3.2.2 *Résultat de densité de Castaing et Valadier dans une forme qui découle directement de celui de Castaing, Salvadori et Thibault (voir Proposition 3.2[15]) Pour tout $\mu \in S_\Sigma$, il existe une suite $(\zeta_n(\cdot))$ dans S_Γ telle que la suite des mesures de Young associées (μ^n), où, $\mu_t^n := \delta_{\zeta_n(t)}$ converge dans $\mathcal{Y}(I,\lambda,U)$ vers μ.*

3.3 Résultat de relaxation

Le problème de contrôle optimal de type Bolza à relaxer dans ce présent travail est le suivant :

$$\inf_{\zeta(\cdot)\in S_\Gamma} \int_{T_0}^{T} J(t, x_\zeta(t), \zeta(t))\, dt \qquad (P.O)$$

où $x_\zeta(\cdot)$ est l'unique solution absolument continue de

$$(\mathcal{PO}(\zeta)) \qquad \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + g(t, x(t), \zeta(t)) & \text{p.p. } t \in I \\ x(T_0) = x_0 \end{cases}$$

et la fonction du coût $J : I \times H \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ est un intégrande tel que pour tout $t \in I$, $J(t, \cdot, \cdot)$ est continue sur $H \times U$, qui est bornée.

Le problème de contrôle relaxé est

$$\inf_{\mu\in S_\Sigma} \int_{T_0}^{T} \int_U J(t, x_\mu(t), u)\mu_t(du)\, dt \qquad (P.R)$$

avec $x_\mu(\cdot)$ étant la solution absolument continue de

$$(\mathcal{PR}(\mu)) \qquad \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + \int_{\Gamma(t)} g(t, x(t), u)\mu_t(du) & \text{p.p. } t \in I \\ x(T_0) = x_0. \end{cases}$$

Remarque 3.3.1 1 *La fonction du coût J dans $(P.O)$ et $(P.R)$ prend des valeurs dans $[Tm_J, +\infty]$, où $m_J := \inf J$.*

2 *En raison de l'hypothèse de bornitude sur J et l'inclusion*

$$\emptyset \neq \{x_\zeta(\cdot) : \zeta \in S_\Gamma\} \subset \{x_\mu(\cdot) : \mu \in S_\Sigma\},$$

il est vrai que

$$-\infty < \inf(P.R) \leq \inf(P.O) \leq +\infty. \qquad (3.2)$$

Lemme 3.3.1 *Soient $h_n(\cdot), h_\infty(\cdot) : I \to H$ $(n \geq 1)$ des fonctions λ-mesurables et ν^n, $\nu^\infty \in \mathcal{Y}(I, \lambda, U)$. Supposons que (ν^n) converge vers ν^∞ dans $\mathcal{Y}(I, \lambda, U)$ et $(h_n(t))$ converge faiblement dans H vers $h_\infty(t)$ pour tout $t \in I$. Soit $\theta^n, \theta^\infty \in \mathcal{Y}(I, \lambda, H \times U)$*

définies par $\theta_t^n := \delta_{h_n(t)} \otimes \nu_t^n$ *et* $\theta_t^\infty := \delta_{h_\infty(t)} \otimes \nu_t^\infty$. *Soit* $\phi : I \times (H \times U) \to \mathbb{R}$ *un intégrande tel que, pour tout* $t \in I$, $\phi(t, \cdot, \cdot)$ *est séquentiellement continue sur* $H^w \times U$, *où* H^w *désigne l'espace* H *muni de la topologie faible. Supposons de plus que, la fonction mesurable* $t \mapsto \sup_{(n,u)\in(\mathbb{N}\cup\{\infty\})\times H} |\phi(t, h_n(t), u)|$ *est* λ*-intégrable sur* I. *Alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I\times H\times U} \phi \, d\theta^n = \int_{I\times H\times U} \phi \, d\theta.$$

Remarque 3.3.2 *En fait, dans le Lemme précédent, on a seulement besoin que* ϕ *satisfasse*

$$\phi(t, h_n(t), u_n) \to \phi(t, h_\infty(t), u)$$

pour tout $t \in I$ *et toute suite* (u_n) *convergeant vers* u.

Proposition 3.3.2 *Sous les hypothèses en haut, supposons de plus que,*
(H_3) *Pour toute suite bornée* $(x_n(\cdot))$ *dans* $(C_H(I), \|\cdot\|_\infty)$ *et pour toute suite* $(\zeta_n(\cdot))$ *dans* S_Γ, *la suite* $(J(\cdot, x_n(\cdot), \zeta_n(\cdot)))$ *est uniformément intégrable dans* $L^1_{\mathbb{R}}(I)$.
Soit $\mu \in S_\Sigma$. *Alors, la fonction* $t \mapsto \int_U J(t, x_\mu(t), u)\mu_t(du)$ *appartient à* $L^1_{\mathbb{R}}(I)$. *De plus, pour toute suite* $(\zeta_n(\cdot))$ *dans* S_Γ *telle que la suite des mesures de Young associées converge dans* $\mathcal{Y}(I, \lambda, U)$ *vers* μ, *la suite* $(x_{\zeta_n}(\cdot))$ *converge uniformément dans* $C_H(I)$ *vers* $x_\mu(\cdot)$ *et*

$$\int_{T_0}^T \int_U J(t, x_\mu(t), u)\mu_t(du) \, dt = \lim_n \int_{T_0}^T J(t, x_{\zeta_n}(t), \zeta_n(t)) \, dt.$$

Remarque 3.3.3

1. *Sous l'hypothèse* (H_3), *la fonction objective dans* $(P.O)$ *est finie et chacun de* $\inf(P.O)$ *et* $\inf(P.R)$ *est un nombre réel.*
2. *De même, en vertu de la Proposition* 3.2.2, *il n'est pas difficile de vérifier que la fonction du coût dans* $(P.R)$ *est finie sous l'hypothèse* (H_3).

Démonstration. Fixons $\mu \in S_\Sigma$.

$A)$ D'abord, nous allons démontrer que, pour toute suite $(\zeta_n(\cdot))$ dans S_Γ telle que la suite des mesures de Young associées converge dans $\mathcal{Y}(I, \lambda, U)$ vers μ, la suite $(x_{\zeta_n}(\cdot))$ converge uniformément dans $C_H(I)$ vers $x_\mu(\cdot)$.

Fixons une suite $(\zeta_n(\cdot))$ dans S_Γ telle que la suite des mesures de Young associées (μ^n) converge dans $\mathcal{Y}(I, \lambda, U)$ vers μ. Rappelons que, pour tout n, $x_{\mu^n}(\cdot)$ est l'unique solution du problème perturbé

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + \int_{\Gamma(t)} g(t, x(t), u)\mu_t^n(du) & \text{p.p. } t \in I \\ x(T_0) = x_0. \end{cases}$$

En vertu du Théorème 2.3.1, en posant, pour tout $(t, x) \in I \times H$,

$$h_n(t, x) = \int_{\Gamma(t)} g(t, x, u)\mu_t^n(du),$$

on a, pour presque tout $t \in I$

$$\int_{T_0}^{T} \|\dot{x}_{\mu^n}(t)\|^2 \, dt \leq \alpha^0 + \sigma \int_{T_0}^{T} \|h_n(t, x_{\mu^n}(t))\|^2 \, dt. \tag{3.3}$$

De la Remarque 3.2.1, il résulte

$$\|h_n(t, x_{\mu^n}(t))\| \leq \beta(t)(1 + \xi_{T_0,T}) \text{ p.p. } t \in I.$$

Notons par $x_\mu(\cdot)$ l'unique solution du problème perturbé

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + \int_{\Gamma(t)} g(t, x(t), u)\mu_t(du) & \text{p.p. } t \in I \\ x(T_0) = x_0. \end{cases} \tag{3.4}$$

On va prouver que $(x_{\mu^n}(\cdot))$ converge uniformément dans $\mathcal{C}_H(I)$ vers $x_\mu(\cdot)$, en démontrant que toute sous-suite de $(x_{\mu^n}(\cdot))$ possède une sous-suite convergeant uniformément dans $\mathcal{C}_H(I)$ vers $x_\mu(\cdot)$.

Fixons une sous-suite de $(x_{\mu^n}(\cdot))$. Cette sous-suite sera encore notée $(x_{\mu^n}(\cdot))$. Grâce à (3.3), on peut encore extraire une autre sous-suite, et supposer que la sous-suite correspondante $(\dot{x}_{\mu^n}(\cdot))$ converge faiblement dans $L^1_{\mathbb{R}}(I)$(puisqu'elle converge dans $L^2_{\mathbb{R}}(I)$) vers une fonction $a(\cdot) \in \mathcal{C}_H(I)$; il s'en suit que, pour tout $t \in I$,

$$\int_{T_0}^{t} \dot{x}_{\mu^n}(s) \, ds \longrightarrow \int_{T_0}^{t} a(s) \, ds \text{ faiblement dans } H.$$

Alors, définissons une fonction $x(\cdot) \in \mathcal{C}_H(I)$ par

$$x(t) := x_0 + \int_{T_0}^{t} a(s) \, ds.$$

On a, pour tout $t \in I$

$$x_{\mu^n}(t) \longrightarrow x(t) \text{ faiblement dans } H.$$

Démontrons maintenant, que la sous-suite $(x_{\mu^n}(\cdot))$ converge ponctuellement vers $x_\mu(\cdot)$. De (3.4) et le Théorème 2.3.1, avec

$$h(t,x) = \int_{\Gamma(t)} g(t,x,u)\mu_t(du),$$

on a pour presque tout $t \in I$,

$$\int_{T_0}^{T} \|\dot{x}_\mu(t)\|^2 \, dt \leq \alpha^0 + \sigma \int_{T_0}^{T} \|h(t, x_\mu(t))\|^2 \, dt. \tag{3.5}$$

En vertu de la Remarque 3.2.1, on a

$$\|h(t, x_\mu(t))\| \leq \beta(t)(1 + \xi_{T_0,T}) \text{ p.p. } t \in I.$$

Par les définitions de $x_{\mu^n}(\cdot)$ et $x_\mu(\cdot)$, on a, pour presque tout $t \in I$ et tout n

$$-\dot{x}_{\mu^n}(t) \in \partial\varphi(t, x_{\mu^n}(t)) + h_n(t, x_{\mu^n}(t))$$

$$-\dot{x}_\mu(t) \in \partial\varphi(t, x_\mu(t)) + h(t, x_\mu(t))$$

$$x_{\mu^n}(T_0) = x_\mu(T_0) = x_0 \in \operatorname{dom}\varphi(T_0, \cdot).$$

La propriété de monotonicité du $\partial\varphi(t,\cdot)$ assure que

$$\langle -\dot{x}_{\mu^n}(t) + \dot{x}_\mu(t) - h_n(t, x_{\mu^n}(t)) + h(t, x_\mu(t)), x_{\mu^n}(t) - x_\mu(t)\rangle \geq 0,$$

pour tout n et pour presque tout $t \in I$. D'où

$$\langle \dot{x}_{\mu^n}(t) - \dot{x}_\mu(t), x_{\mu^n}(t) - x_\mu(t)\rangle \leq \langle -h_n(t, x_{\mu^n}(t)) + h(t, x_\mu(t)), x_{\mu^n}(t) - x_\mu(t)\rangle$$

ceci équivaut à,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|x_{\mu^n}(t) - x_\mu(t)\|^2) \leq \langle h_n(t, x_{\mu^n}(t)) - h(t, x_\mu(t)), x_\mu(t) - x_{\mu^n}(t)\rangle.$$

Mais,

$$\langle h_n(t, x_{\mu^n}(t)) - h(t, x_\mu(t)), x_\mu(t) - x_{\mu^n}(t)\rangle$$
$$= \langle h_n(t, x_{\mu^n}(t)) - h_n(t, x_\mu(t)), x_\mu(t) - x_{\mu^n}(t)\rangle$$
$$+\langle h_n(t, x_\mu(t)) - h(t, x_\mu(t)), x_\mu(t) - x_{\mu^n}(t)\rangle.$$

Notons que de (3.3), (3.5) et le fait que $x_\mu(\cdot)$, $x_{\mu^n}(\cdot) \in \mathcal{C}_H(I)$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout n et pour tout $t \in I$,

$$x_{\mu^n}(t), x_\mu(t) \in B[0, \eta].$$

Les hypothèses sur g impliquent qu'il existe une fonction non-négative $\gamma_\eta(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ telle que, pour tout n et pour tout $t \in I$, $h_n(t, \cdot)$ est $\gamma_\eta(t)$-Lipschitz sur $B[0, \eta]$.
Ainsi, on a, pour tout n et pour presque tout $t \in I$,

$$\frac{d}{dt}(\|x_{\mu^n}(t) - x_\mu(t)\|^2) \leq 2\gamma_\eta(t)\|x_{\mu^n}(t) - x_\mu(t)\|^2 + 2\varsigma_n(t), \tag{3.6}$$

où

$$\varsigma_n(t) := \langle h_n(t, x_\mu(t)) - h(t, x_\mu(t)), x_\mu(t) - x_{\mu^n}(t)\rangle. \tag{3.7}$$

Notons que grâce à (3.1) et aux définitions de h_n et h, pour tout n et pour tout $t \in I$,

$$|\varsigma_n(t)| \leq 4\eta(1+\eta)\beta(t), \tag{3.8}$$

et par conséquent la suite $(\varsigma_n(\cdot))$ est bornée dans $L^1_{\mathbb{R}}(I)$. Montrons que $\lim_n \int_{T_0}^s \varsigma_n(t)\, dt = 0$ pour tout $s \in I$. Par les définitions de h_n et h, on a

$$\begin{aligned}\int_{T_0}^s \varsigma_n(t)\, dt \;&=\; \int_{T_0}^s \int_{\Gamma(t)} \langle g(t, x_\mu(t), u), x_\mu(t) - x_{\mu^n}(t)\rangle \mu_t^n(du)\, dt \\ &\quad - \int_{T_0}^s \int_{\Gamma(t)} \langle g(t, x_\mu(t), u), x_\mu(t) - x_{\mu^n}(t)\rangle \mu_t(du)\, dt.\end{aligned}$$

Posons, pour $(t, x, u) \in I \times H \times U$,

$$\phi(t, x, u) := \langle g(t, x_\mu(t), u), x_\mu(t) - x\rangle \mathbf{1}_{[T_0, s]}(t).$$

Évidemment, pour tout $t \in I$, la fonction $\phi(t, \cdot, \cdot)$ est séquentiellement continue sur $H^w \times U$ et, avec $x_\infty(\cdot) := x(\cdot)$, pour tout $(t, n, u) \in I \times (\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \times U$, on a

$$|\phi(t, x_{\mu^n}(t), u)| \leq 2\eta(1+\eta)\beta(t). \tag{3.9}$$

Comme, pour tout n et pour tout $t \in I$, μ_t^n et μ_t sont des mesures de probabilité satisfaisant $\mu_t^n(\Gamma(t)) = \mu_t(\Gamma(t)) = 1$, on peut écrire

$$\int_{T_0}^{s} \varsigma_n(t)\, dt = \int_{T_0}^{T} \int_U \phi(t, x_{\mu^n}(t), u)\mu_t^n(du)\, dt - \int_{T_0}^{T} \int_U \phi(t, x_{\mu^n}(t), u)\mu_t(du)\, dt.$$

Considérons les mesures de Young $\theta^n, \rho^n, \theta \in \mathcal{Y}(I, \lambda, H \times U)$ définies par $\theta_t^n := \delta_{x_{\mu^n}(t)} \otimes \mu_t^n$, $\rho_t^n := \delta_{x_{\mu^n}(t)} \otimes \mu_t$ et $\theta_t := \delta_{x(t)} \otimes \mu_t$, la dernière égalité équivaut à la suivante

$$\int_{T_0}^{s} \varsigma_n(t)\, dt = \int_{I \times H \times U} \phi\, d\theta^n - \int_{I \times H \times U} \phi\, d\rho^n$$

Via le Lemme 3.3.1, on a

$$\lim_{n \to \infty} \int_{T_0}^{s} \varsigma_n(t)\, dt = \int_{I \times H \times U} \phi\, d\theta - \int_{I \times H \times U} \phi\, d\theta = 0.$$

D'où, en appliquant le Lemme 1.3.12 à l'inégalité (3.6), on conclut que la sous-suite $(x_{\mu^n}(\cdot))$ converge ponctuellement vers $x_\mu(\cdot)$.

Montrons que la convergence est actuellement uniforme. De retour à (3.6) et (3.7), on a, pour presque tout $t \in I$,

$$\frac{d}{dt}(\|x_{\mu^n}(t) - x_\mu(t)\|^2) \leq 2\gamma_\eta(t)\|x_{\mu^n}(t) - x_\mu(t)\|^2 + 2|\varsigma_n(t)|.$$

et

$$\begin{aligned} |\varsigma_n(t)| &\leq (\|h_n(t, x_\mu(t))\| + \|h(t, x_\mu(t))\|)\|x_\mu(t) - x_{\mu^n}(t)\| \\ &\leq 2(1+\eta)\beta(t)\|x_\mu(t) - x_{\mu^n}(t)\|. \end{aligned}$$

Comme la sous-suite $(x_{\mu^n}(\cdot))$ converge ponctuellement vers $x_\mu(\cdot)$ sur I, il s'en suit que $\varsigma_n(t) \to 0$ pour presque tout $t \in I$. Ceci, avec (3.8), entraîne, via le Théorème de la convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{T_0}^{s}|\varsigma_n(t)|\,dt=0.$$

Il s'en suit du Lemme 1.3.11 que, la sous-suite $(x_{\mu^n}(\cdot))$ converge uniformément vers $x_\mu(\cdot)$ dans $\mathcal{C}_H(I)$.

B)Maintenant, nous allons montrer que la fonction

$$t\mapsto\int_U J(t,x_\mu(t),u)\mu_t(du)$$

est λ-intégrable et

$$\lim_n\int_{T_0}^{T}J(t,x_{\zeta_n}(t),\zeta_n(t))\,dt=\int_{T_0}^{T}\int_U J(t,x_\mu(t),u)\mu_t(du)\,dt.$$

Considérons, pour tout n, la mesure de Young $\theta^n\in\mathcal{Y}(I,\lambda,H\times U)$ définie par

$$\theta_t^n:=\delta_{x_{\zeta_n}(t)}\otimes\delta_{\zeta_n(t)}.$$

Comme, pour tout $t\in I$, on a $\mu_t^n:=\delta_{\zeta_n(t)}$ et alors $x_{\mu^n}(t)=x_{\zeta_n}(t)$, par la Proposition 1.3.7, la suite (θ^n) converge dans $\mathcal{Y}(I,\lambda,H\times U)$ vers la mesure de Young θ définie par $\theta_t:=\delta_{x_\mu(t)}\otimes\mu_t$.

Pour tout n, soit $v_n(\cdot):I\longrightarrow H\times U$ la fonction définie par $v_n(t)=(x_{\zeta_n}(t),\zeta_n(t))$. On a, $\theta_t^n:=\delta_{v_n(t)}$ pour tout $t\in I$. Comme, par hypothèse, la suite $(J(\cdot,v_n(\cdot)))$ est uniformément intégrable, via la Proposition 1.3.8, on obtient que J est θ-intégrable et

$$\lim_n\int_{T_0}^{T}J(t,x_{\zeta_n}(t),\zeta_n(t))\,dt=\int_{I\times H\times U}J\,d\theta.$$

En vertu de la Remarque 1.3.3 1), la fonction

$$t\mapsto\int_{H\times U}J(t,x,u)\delta_{x_\mu(t)}\otimes\mu_t(d(x,u))=\int_U J(t,x_\mu(t),u)\mu_t(du)$$

est λ-intégrable et

$$\int_{I\times H\times U}J\,d\theta=\int_{T_0}^{T}\int_U J(t,x_\mu(t),u)\mu_t(du)\,dt.$$

Par conséquent

$$\lim_n \int_{T_0}^{T} J(t, x_{\zeta_n}(t), \zeta_n(t))\, dt = \int_{T_0}^{T} \int_U J(t, x_\mu(t), u)\mu_t(du)\, dt.$$

Ceci achève la démonstration de la Proposition. □

Remarque 3.3.4 *En effet, nous avons démontré que, pour* $\mu^n, \mu \in S_\Sigma$ $(n \geq 1)$, *si la suite* (μ^n) *converge dans* $\mathcal{Y}(I, \lambda, U)$ *vers* μ *alors* $(x_{\mu^n}(\cdot))$ *converge uniformément vers* $x_\mu(\cdot)$ *dans* $\mathcal{C}_H(I)$.

Démontrons maintenant le résultat le plus important de cette section, concernant les deux problèmes de contrôle suivants :

$$\inf_{\zeta(\cdot)\in S_\Gamma} \int_{T_0}^{T} J(t, x_\zeta(t), \zeta(t))\, dt \tag{P.O}$$

et

$$\inf_{\mu\in S_\Sigma} \int_{T_0}^{T} \int_U J(t, x_\mu(t), u)\mu_t(du)\, dt. \tag{P.R}$$

Théorème 3.3.3 *Sous les hypothèses de la Proposition* 3.3.2 *le problème de contrôle* $(P.R)$ *admet une solution optimale. De plus, on a*

$$\min(P.R) = \inf(P.O).$$

Démonstration. De la Proposition 3.3.2, l'égalité $\inf(P.R) = \inf(P.O)$ est vraie.

En effet, pour tout $\mu \in S_\Sigma$, du résultat de densité de Castaing et Valadier (Proposition 3.2.2), il existe une suite $\zeta_n(\cdot) \in S_\Gamma$ telle que les mesures de Young associées converge dans $\mathcal{Y}(I, \lambda, U)$ vers μ, et la Proposition 3.3.2 assure que

$$\lim_n \int_{T_0}^{T} J(t, x_{\zeta_n}(t), \zeta_n(t))\, dt = \int_{T_0}^{T} \int_U J(t, x_\mu(t), u)\mu_t(du)\, dt.$$

Comme il est évident que, pour tout n

$$\int_{T_0}^{T} J(t, x_{\zeta_n}(t), \zeta_n(t))\, dt \geq \inf(P.O),$$

on a

$$\int_{T_0}^{T}\int_U J(t,x_\mu(t),u)\mu_t(du)\,dt \geq \inf(P.O),$$

et d'où

$$\inf(P.R) \geq \inf(P.O).$$

L'inégalité inverse (3.2) étant toujours vraie implique que

$$\inf(P.R) = \inf(P.O). \tag{3.10}$$

Reste à démontrer que $\inf(P.R)$ est un minimum.

Pour cela, soit $(\zeta_n(\cdot))$ une suite minimisante de $(P.O)$, i.e., $\zeta_n(\cdot) \in S_\Gamma$ pour tout n et

$$\inf(P.O) = \lim_n \int_{T_0}^{T} J(t,x_{\zeta_n}(t),\zeta_n(t))\,dt. \tag{3.11}$$

Pour tout n, on définit $\mu^n : I \longrightarrow \mathcal{M}_+^1(U)$ par $\mu_t^n := \delta_{\zeta_n(t)}$.

Il est clair que $\mu^n \in S_\Sigma$. Ainsi, de la Proposition 1.3.9 et la Proposition 3.2.1, on peut extraire une sous-suite μ^n que l'on suppose convergente dans $\mathcal{Y}_{dis}(I,\lambda,U)$ vers $\mu \in S_\Sigma$. Il s'en suit de la Proposition 3.3.2 que la suite $(x_{\zeta_n}(\cdot))$ converge uniformément vers l'unique solution $x_\mu(\cdot)$ du problème $(\mathcal{PR}(\mu))$ et

$$\lim_n \int_{T_0}^{T} J(t,x_{\zeta_n}(t),\zeta_n(t))\,dt = \int_{T_0}^{T}\int_U J(t,x_\mu(t),u)\mu_t(du)\,dt.$$

D'où, tenant compte de (3.11), on a

$$\inf(P.O) = \int_{T_0}^{T}\int_U J(t,x_\mu(t),u)\mu_t(du)\,dt. \tag{3.12}$$

Maintenant, l'égalité (3.10) révéle que μ est actuellement un contrôle optimal relaxé, i.e.,

$$\inf(P.O) = \min(P.R).$$

Ce qui achève la démonstration du Théorème. □

Chapitre 4

Existence et unicité de solution pour un problème d'évolution avec une perturbation univoque contenant un retard

4.1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre, à l'étude d'une inclusion d'évolution gouvernée par l'opérateur sous-différentiel où, la perturbation univoque contient un retard.

Dans tout ce qui s'en suit, I est l'intervalle $[0, T]$, i.e., $T_0 = 0$.

Soit $r \geq 0$. Considérons l'espace $\mathcal{C}_0 := \mathcal{C}_H([-r, 0])$ muni de la norme de la convergence uniforme notée par $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_0}$. À tout $t \in [0, T]$, on associe une fonction

$$\tau(t) : \mathcal{C}_H([-r, t]) \to \mathcal{C}_0$$

définie, pour tout $x(\cdot) \in \mathcal{C}_H([-r, t])$ par

$$(\tau(t)x(\cdot))(s) := x(t+s) \text{ pour tout } s \in [-r, 0].$$

Soient $\varphi : [0, T] \times H \to [0, +\infty]$ et $f : I \times \mathcal{C}_0 \to H$ deux fonctions. Soit ψ un élément fixé de $\mathcal{C}_0$ tel que $\psi(0) \in \operatorname{dom} \varphi(0, \cdot)$. Nous allons établir un Théorème d'existence et d'unicité pour

$$(P_\psi) \qquad \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + f(t, \tau(t)x(\cdot)) & \text{p.p. } t \in [0, T], \\ x(s) = \psi(s) \quad \forall s \in [-r, 0]. \end{cases}$$

On appelle solution de (P_ψ) toute fonction $x(\cdot) : [-r, T] \to H$ telle que

(a) pour tout $s \in [-r, 0]$, on a $x(s) = \psi(s)$;

(b) la restriction $x|_{[0,T]}(\cdot)$ de $x(\cdot)$ est absolument continue et sa dérivée, notée par $\dot{x}(\cdot)$, satisfait à l'inclusion

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + f(t, \tau(t)x(\cdot)) \quad \text{p.p. } t \in [0, T].$$

Mitidieri-Vrabie [34], ont établi un Théorème d'existence locale pour le problème suivant

$$-\dot{x}(t) \in Ax(t) + f(t, \tau(t)x(\cdot)) \quad \text{p.p. } t \in [0, T],$$

où X est un espace de Banach, $U \subset \mathcal{C}_X([-r, 0])$, $A : \mathrm{Dom}\, A \subset X \to 2^X$ est un opérateur m-accrétif, et $f : [0, T] \times U \to X$. Existence et unicité ont été obtenues pour le processus de rafle avec retard [9], i.e., $\varphi(t, \cdot)$ étant la fonction indicatrice d'un ensemble $C(t)$ non vide fermé de $\mathbb{R}^d$, qui est ρ-prox-régulier, où $f : [0, 1] \times \mathcal{C}_{\mathbb{R}^d}([-r, 0]) \to \mathbb{R}^d$.

Le problème généralisant (P_ψ) s'obtient en remplaçant f par une multi-application, $F : [0, T] \times \mathcal{C}_0 \to H$, i.e.,

$$(P_F) \qquad \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + F(t, \tau(t)x(\cdot)) & \text{p.p. } t \in [0, T], \\ x(s) = \psi(s) \quad \forall s \in [-r, 0]. \end{cases}$$

Dans le cas particulier du processus de rafle, où $\varphi(t, \cdot)$ étant la fonction indicatrice d'un ensemble mobile convexe fermé, ou ρ-prox-régulier $C(t)$, le problème (P_F) correspondant a été résolu par Castaing-Monteiro Marques [10] dans le cas convexe. Ensuite, Thibault [41] a démontré, en dimension finie, l'existence de solutions pour des ensembles généraux $C(t)$ et pour F satisfaisant

$$F(t, \phi(\cdot)) \subset \beta(t)\mathbb{B}$$

pour tout $(t, \phi(\cdot)) \in [0, T] \times \mathcal{C}_0$, où $\beta(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}^+}([0, T])$. Castaing-Salvadori-Thibault [15] ont établi le même résultat pour les ensembles $C(t)$, qui sont bornés et ρ-prox-réguliers, où F satisfait à une condition de croissance plus générale du type

$$F(t, \phi(\cdot)) \subset \beta(t)(1 + \|\phi(0)\|)\mathbb{B} \tag{4.1}$$

pour tout $(t, \phi(\cdot)) \in [0, T] \times \mathcal{C}_0$. Après, Bounkhel-Yarou [7] (voir aussi [12]) ont prouvé, en dimension infinie, existence de solutions où la multi-application F prend toutes ses valeurs contenues dans un ensemble compact fixe. Récemment, un résultat plus général où F satisfait à (4.1) avec $\mathbb{B}$ remplacé par un ensemble compact fixe, a été obtenu dans [18].

On s'adresse dans ce chapitre, en dimension infinie, au cas où F est univoque. On va établir un résultat d'existence sans aucune condition de compacité. Plus précisemment, on démontre que le problème (P_ψ), possède une unique solution, dès que f est mesurable par rapport à la première variable, Lipschitz par rapport à la deuxième, et

$$\|f(t, \phi(\cdot))\| \leq \beta(t)(1 + \|\phi(\cdot)\|_{\mathcal{C}_0})$$

pour tout $(t, \phi(\cdot)) \in [0, T] \times \mathcal{C}_0$. Inspirés de quelques idées d'Edmond [20], nous allons nous ramener à une inclusion du type $(P_{f(\cdot,\cdot)})$, pour appliquer les résultats du Théorème 2.3.1 (concernant un problème perturbé sans retard). On procède comme suit : On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une partition de $[0, T]$ donnée par $t_i^n := \dfrac{iT}{n}$ $(i = 0, \cdots, n)$. Ensuite, sur chaque sous-intervalle $[t_i^n, t_{i+1}^n]$, on remplace f par la fonction $f_i^n : [t_i^n, t_{i+1}^n] \times H \to H$ définie par $f_i^n(t, x) := f(t, \tau(t)h_i^n(\cdot, x))$, où

$$h_0^n(t, x) = \begin{cases} \psi(t) & \text{si} \quad t \in [-r, 0] \\ \psi(0) + \frac{n}{T}t(x - \psi(0)) & \text{si} \quad t \in [0, t_1^n], \end{cases}$$

et $h_i^n(\cdot, \cdot)$ $(i \geq 1)$ sont définies d'une quasi similaire manière. Ainsi de suite, on obtient un problème perturbé sans retard pour lequel, le Théorème 2.3.1 assure l'existence de solution

$x_n(\cdot)$. En faisant intervenir autres techniques (en raison d'absence de compacité), cette adaptation nous permet de démontrer la convergence de la suite $(x_n(\cdot))$ vers la solution du problème original.

Nous entendrons par σ et m, les constantes définies par (2.13), et (2.14) respectivement.

4.2 Théorème d'existence et d'unicité

Maintenant, nous allons démontrer notre résultat d'existence et d'unicité concernant le problème (P_ψ).

Théorème 4.2.1 *Soient la fonction $\varphi : I \times H \longrightarrow [0, +\infty]$ satisfaisant (H_1) et (H_2) du Théorème 2.2.1, et $f : I \times C_0 \to H$ une fonction vérifiant :*

(i) pour tout $\phi \in C_0$, $f(\cdot, \phi)$ est mesurable ;

(ii) pour tout $\eta > 0$, il existe une fonction non-négative $\gamma_\eta(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ telle que, pour tout $\phi_1, \phi_2 \in C_0$ avec $\|\phi_i\|_{C_0} \leq \eta$ $(i = 1, 2)$ et pour tout $t \in I$,

$$\|f(t, \phi_1) - f(t, \phi_2)\| \leq \gamma_\eta(t)\|\phi_1 - \phi_2\|_{C_0};$$

(iii) il existe une fonction non-négative $\beta(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ telle que, pour tout $t \in I$ et pour tout $\phi \in C_0$,

$$\|f(t, \phi)\| \leq \beta(t)(1 + \|\phi\|_{C_0}).$$

Alors, pour tout $\psi \in C_0$ avec $\psi(0) \in \operatorname{dom} \varphi(0, \cdot)$, le problème (P_ψ) admet une unique solution qui satisfait l'inégalité suivante

$$\int_0^T \|\dot{x}(t)\|^2 \, dt \leq \kappa + \sigma \int_0^T \|f(t, \tau(t)x(\cdot))\|^2 \, dt, \tag{4.2}$$

où,

$$\kappa = (k^2(0) + 3(\rho + 1)^2) \int_0^T \dot{a}^2(t) \, dt + 2[T + \varphi(0, \psi(0)) - \varphi(T, x(T))].$$

Démonstration. I) Supposons d'abord, que

$$\int_0^T \beta^2(s) \, ds < m. \tag{4.3}$$

Nous allons construire une suite de fonctions $(x_n(\cdot))$ dans $\mathcal{C}_H([-r,T])$ qui converge uniformément sur $[-r,T]$ vers une solution de (P_ψ).

A) Construction de la suite $(x_n(\cdot))$.

On va introduire une discrétisation inspirée de celle utilisée dans [15, 20]. Pour tout $n \geq 1$, considérons la partition de $[0,T]$ définie par les points $t_i^n := \frac{iT}{n}(i = 0, \cdots, n)$. Définissons sur $[-r, t_1^n] \times H$ la fonction h_0^n par

$$h_0^n(t,x) = \begin{cases} \psi(t) & \text{si} \quad t \in [-r,0] \\ \psi(0) + \frac{n}{T}t(x - \psi(0)) & \text{si} \quad t \in [0, t_1^n]. \end{cases}$$

Soit la fonction $f_0^n : [0, t_1^n] \times H \to H$ définie par

$$f_0^n(t,x) := f(t, \tau(t)h_0^n(\cdot, x)).$$

On a, pour tout $t \in [0, t_1^n]$ et pour tout $x, y \in H$,

$$\begin{aligned} \|\tau(t)h_0^n(\cdot,x) - \tau(t)h_0^n(\cdot,y)\|_{C_0} &= \sup_{s\in[-r,0]} \|h_0^n(t+s,x) - h_0^n(t+s,y)\| \\ &= \sup_{s\in[-r+t,t]} \|h_0^n(s,x) - h_0^n(s,y)\| \\ &= \sup_{s\in[0,t]} \|h_0^n(s,x) - h_0^n(s,y)\| \\ &= \sup_{s\in[0,t]} \frac{n}{T}s\|x-y\|, \\ &\leq \|x-y\|. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|\tau(t)h_0^n(\cdot,x)\|_{C_0} &= \sup_{s\in[-r+t,t]} \|h_0^n(s,x)\| \\ &\leq \max\{\|\psi\|_{C_0}, \sup_{s\in[0,t]} \|\psi(0) + \frac{n}{T}s(x - \psi(0))\|\} \\ &\leq \max\{\|\psi\|_{C_0}, \sup_{s\in[0,t]} ((1 - \frac{n}{T}s)\|\psi(0)\| + \frac{n}{T}s\|x\|)\} \\ &\leq \max\{\|\psi\|_{C_0}, \|\psi(0)\| + \|x\|\} \\ &\leq \|\psi\|_{C_0} + \|x\|. \end{aligned}$$

Pour tout $\eta > 0$, pour tout $(x,y) \in B[0,\eta] \times B[0,\eta]$ et pour tout $t \in [0,t_1^n]$, on a

$$\|\tau(t)h_0^n(\cdot,x)\|_{\mathcal{C}_0} \leq \|\psi\|_{\mathcal{C}_0} + \eta, \text{ et } \|\tau(t)h_0^n(\cdot,y)\|_{\mathcal{C}_0} \leq \|\psi\|_{\mathcal{C}_0} + \eta.$$

Alors, par l'hypothèse (ii), il existe une fonction non-négative notée par $\gamma_\eta(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ telle que pour tout $t \in [0,t_1^n]$, et pour tout $x,y \in B[0,\eta]$,

$$\|f_0^n(t,x) - f_0^n(t,y)\| \leq \gamma_\eta(t)\|x-y\|.$$

De plus, grâce à (iii), pour tout $(t,x) \in [0,t_1^n] \times H$,

$$\begin{aligned}
\|f_0^n(t,x)\| = \|f(t,\tau(t)h_0^n(\cdot,x))\| &\leq \beta(t)(1 + \|\tau(t)h_0^n(\cdot,x)\|_{\mathcal{C}_0}) \\
&\leq \beta(t)(1 + \|\psi\|_{\mathcal{C}_0} + \|x\|) \\
&\leq (1 + \|\psi\|_{\mathcal{C}_0})\beta(t)(1 + \|x\|).
\end{aligned}$$

Notons aussi que, $h_0^n(\cdot,x)$ étant uniformément continue sur $[0,t_1^n]$, la fonction $t \mapsto \tau(t)h_0^n(\cdot,x)$ est continue de $[0,t_1^n]$ dans $(\mathcal{C}_0, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_0})$, ainsi $f_0^n(\cdot,x)$ est mesurable. Par conséquent, le Théorème 2.3.1 entraîne l'existence d'une et une unique fonction absolument continue $x_0^n(\cdot) : [0,t_1^n] \to H$ telle que $x_0^n(0) = \psi(0)$ et, pour presque tout $t \in [0,t_1^n]$,

$$\dot{x}_0^n(t) + f_0^n(t,x_0^n(t)) \in -\partial\varphi(t,x_0^n(t)) \text{ p.p. } t \in [0,t_1^n],$$

avec

$$\int_0^{t_1^n} \|\dot{x}_0^n(t)\|^2\,dt \leq \kappa_0 + \sigma\int_0^{t_1^n} \|f(t,\tau(t)h_0^n(\cdot,x_0^n(t)))\|^2\,dt, \tag{4.4}$$

où

$$\kappa_0 \;=\; (k^2(0) + 3(\rho+1)^2)\int_0^{t_1^n} \dot{a}^2(t)\,dt + 2[t_1^n + \varphi(0,\psi(0)) - \varphi(t_1^n, x_0^n(t_1^n))].$$

Maintenant, définissons : $h_1^n : [-r,t_2^n] \times H \to H$ par

$$h_1^n(t,x) = \begin{cases} \psi(t) & \text{si } \; t \in [-r,0], \\ x_0^n(t) & \text{si } \; t \in [0,t_1^n], \\ x_0^n(t_1^n) + \frac{n}{T}(t-t_1^n)(x - x_0^n(t_1^n)) & \text{si } \; t \in [t_1^n,t_2^n]. \end{cases}$$

Comme précédemment, on montre que, pour tout $t \in [0, t_2^n]$, la fonction $x \mapsto \tau(t)h_1^n(\cdot, x)$ est 1-Lipschitz et

$$\|\tau(t)h_1^n(\cdot, x)\|_{C_0} \leq \max\{\|\psi\|_{C_0}, \|x_0^n\|_{C_H([0,t_1^n])}\} + \|x\|.$$

D'où, la fonction $f_1^n : [t_1^n, t_2^n] \times H \to H$ définie par

$$f_1^n(t, x) := f(t, \tau(t)h_1^n(\cdot, x))$$

satisfait aux hypothèses du Théorème 2.3.1, et donc il existe une unique fonction absolument continue $x_1^n(\cdot) : [t_1^n, t_2^n] \to H$ telle que $x_1^n(t_1^n) = x_0^n(t_1^n)$ et,

$$\dot{x}_1^n(t) + f_1^n(t, x_1^n(t)) \in -\partial\varphi(t, x_1^n(t)) \text{ p.p. } t \in [t_1^n, t_2^n],$$

avec

$$\int_{t_1^n}^{t_2^n} \|\dot{x}_1^n(t)\|^2 \, dt \leq \kappa_1 + \sigma \int_{t_1^n}^{t_2^n} \|f(t, \tau(t)h_1^n(\cdot, x_1^n(t)))\|^2 \, dt, \tag{4.5}$$

où

$$\kappa_1 = (k^2(0) + 3(\rho+1)^2) \int_{t_1^n}^{t_2^n} \dot{a}^2(t) \, dt + 2[t_2^n - t_1^n + \varphi(t_1^n, x_1^n(t_1^n)) - \varphi(t_2^n, x_1^n(t_2^n))].$$

Maintenant, supposons que $x_0^n(\cdot), \cdots, x_{i-1}^n(\cdot)$ $(1 \leq i \leq n-1)$ sont définies de la même façon. Soit $h_i^n : [-r, t_{i+1}^n] \times H \to H$ définie par

$$h_i^n(t, x) = \begin{cases} \psi(t) & \text{si } \ t \in [-r, 0], \\ x_j^n(t) & \text{si } \ t \in [t_j^n, t_{j+1}^n], j \in \{0, \cdots, i-1\}, \\ x_{i-1}^n(t_i^n) + \frac{n}{T}(t - t_i^n)(x - x_{i-1}^n(t_i^n)) & \text{si } \ t \in [t_i^n, t_{i+1}^n] \end{cases}$$

et considérons la fonction $f_i^n : [t_i^n, t_{i+1}^n] \times H \to H$ définie par

$$f_i^n(t, x) := f(t, \tau(t)h_i^n(\cdot, x)).$$

De même qu'en haut, il n'est pas difficile à démontrer que, pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$ et pour tout $x, y \in H$,

$$\|\tau(t)h_i^n(\cdot, x) - \tau(t)h_i^n(\cdot, y)\|_{C_0} \leq \|x - y\|$$

et

$$\|\tau(t)h_i^n(\cdot,x)\|_{C_0} \leq A_i^n + \|x\|, \tag{4.6}$$

où

$$A_i^n := \max\{\|\psi\|_{C_0}, \max_{0\leq j\leq i-1} \|x_j^n\|_{C_H([t_j^n,t_{j+1}^n])}\}.$$

Il s'en suit que la fonction $f_i^n(\cdot,\cdot)$ vérifie les hypothèses du Théorème 2.3.1. D'où, il existe une et une unique fonction absolument continue $x_i^n(\cdot) : [t_i^n, t_{i+1}^n] \to H$ telle que $x_i^n(t_i^n) = x_{i-1}^n(t_i^n)$,

$$\dot{x}_i^n(t) + f_i^n(t, x_i^n(t)) \in -\partial\varphi(t, x_i^n(t)) \text{ p.p. } t \in [t_i^n, t_{i+1}^n].$$

De même, on définit $x_0^n(\cdot), \cdots, x_{n-1}^n(\cdot)$ telles que, pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, $x_i^n(\cdot)$ est absolument continue sur $[t_i^n, t_{i+1}^n]$, $x_i^n(t_i^n) = x_{i-1}^n(t_i^n)$ (avec la convention $x_{-1}^n(0) := \psi(0)$),

$$\dot{x}_i^n(t) + f_i^n(t, x_i^n(t)) \in -\partial\varphi(t, x_i^n(t)) \text{ p.p. } t \in [t_i^n, t_{i+1}^n],$$

avec

$$\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{x}_i^n(t)\|^2\, dt \leq \kappa_i + \sigma \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|f(t, \tau(t)h_i^n(\cdot, x_i^n(t)))\|^2\, dt, \tag{4.7}$$

où

$$\kappa_i \;=\; (k^2(0) + 3(\rho+1)^2) \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \dot{a}^2(t)\, dt + 2[t_{i+1}^n - t_i^n + \varphi(t_i^n, x_i^n(t_i^n)) - \varphi(t_{i+1}^n, x_i^n(t_{i+1}^n))].$$

Soit la fonction $x_n(\cdot) : [-r, T] \to H$ définie par

$$x_n(t) := \begin{cases} \psi(t) & \text{si} \quad t \in [-r, 0], \\ x_i^n(t) & \text{si} \quad t \in [t_i^n, t_{i+1}^n],\ i \in \{0, \cdots, n-1\}. \end{cases}$$

Alors, pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$,

$$h_i^n(t,x) = \begin{cases} x_n(t) & \text{si} \quad t \in [-r, t_i^n], \\ x_n(t_i^n) + \frac{n}{T}(t - t_i^n)(x - x_n(t_i^n)) & \text{si} \quad t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]. \end{cases}$$

On pose

$$\theta_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t = 0, \\ t_i^n & \text{si} \quad t \in]t_i^n, t_{i+1}^n],\ i \in \{0, \cdots, n-1\}. \end{cases}$$

On a, par construction, $x_n(0) = \psi(0)$ et, pour presque tout $t \in I$,

$$\dot{x}_n(t) + f(t, \tau(t) h^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t))) \in -\partial\varphi(t, x_n(t)), \tag{4.8}$$

avec

$$x_n(s) = \psi(s) \quad \text{pour tout } s \in [-r, 0].$$

En vertu de (4.7), on a

$$\int_0^T \|\dot{x}_n(t)\|^2 \, dt \leq \kappa_n + \sigma \int_0^T \|f(t, \tau(t) h^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t)))\|^2 \, dt, \tag{4.9}$$

où

$$\kappa_n \;=\; (k^2(0) + 3(\rho+1)^2) \int_0^T \dot{a}^2(t) \, dt + 2[T + \varphi(0, \psi(0)) - \varphi(T, x_n(T))].$$

Comme $-\varphi(T, x_n(T)) \leq 0$, posons

$$\kappa^0 \;=\; (k^2(0) + 3(\rho+1)^2) \int_0^T \dot{a}^2(t) \, dt + 2[T + \varphi(0, \psi(0))],$$

on a alors,

$$\int_0^T \|\dot{x}_n(t)\|^2 \, dt \leq \kappa^0 + \sigma \int_0^T \|f(t, \tau(t) h^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t)))\|^2 \, dt. \tag{4.10}$$

De (4.6)

$$\|\tau(t) h^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t))\|_{C_0} \leq 2\|x_n(\cdot)\|_{C_H([-r,T])}, \tag{4.11}$$

ceci, avec (iii), implique que

$$\|f(t, \tau(t) h^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t)))\|_{C_0} \leq \beta(t)(1 + 2\|x_n(\cdot)\|_{C_H([-r,T])}) \text{ p.p. } t \in I. \tag{4.12}$$

Tenant compte de (4.10), (4.12), et *iii)* on déduit que $(\dot{x}_n(\cdot))$ est bornée dans $L^2_H([0,T])$.

B) Nous allons montrer que $(x_n(\cdot))$ converge uniformément dans $C_H([-r,T])$.

De (4.12), (4.10) s'écrit comme suit

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|\dot{x}_n(t)\|^2\,dt &\leq \kappa^0 + \sigma(1+2\|x_n(\cdot)\|_{C_H([-r,T])})^2 \int_0^T \beta^2(t)\,dt,\\
&\leq \kappa^0 + 2\sigma(1+4\|x_n(\cdot)\|^2_{C_H([-r,T])}) \int_0^T \beta^2(t)\,dt,\\
&\leq l + 8\sigma\|x_n(\cdot)\|^2_{C_H([-r,T])} \int_0^T \beta^2(t)\,dt,
\end{aligned}$$

où

$$l \;:=\; \kappa^0 + 2\sigma \int_0^T \beta^2(t)\,dt.$$

En se servant de la continuité absolue de $x_n(\cdot)$ pour tout n, et de l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur $[0,T]$, pour tout $s \in I$, on a

$$\begin{aligned}
\|x_n(s)-\psi(0)\|^2 &\leq s(\int_0^s \|\dot{x}_n(s)\|^2\,ds)\\
&\leq T\int_0^T \|\dot{x}_n(s)\|^2\,ds,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\|x_n(s)\|^2 &\leq 2\|x_n(s)-\psi(0)\|^2 + 2\|\psi(0)\|^2\\
&\leq 2\|x_n(s)-\psi(0)\|^2 + 2\|\psi\|^2_{C_0}.
\end{aligned}$$

Alors, il résulte de ce qui précéde

$$\|x_n(s)\|^2 \;\leq\; 2Tl + 16T\sigma\|x_n(\cdot)\|^2_{C_H([-r,T])} \int_0^T \beta^2(t)\,dt + 2\|\psi\|^2_{C_0}.$$

Tenant compte de (4.3), i.e., $16\sigma T\int_0^T \beta^2(t)\,dt < 1$, il s'en suit que

$$\|x_n(\cdot)\|_{C_H([-r,T])} \leq \frac{M}{2}, \tag{4.13}$$

où

$$M := \sqrt{\frac{8(Tl + \|\psi\|^2_{C_0})}{1 - 16\sigma T \int_0^T \beta^2(t)\, dt}}.$$

Démontrons maintenant que, $(x_n(\cdot))$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}_H([0,T])$. De (4.8), et de la monotonicité de l'opérateur sous-différentiel, pour $p, q \geq 1$ et pour presque tout $t \in I$, on a

$$\langle -\dot{x}_p(t) - z_p(t) + \dot{x}_q(t) + z_q(t), x_p(t) - x_q(t)\rangle \geq 0$$

où

$$z_p(t) = f(t, \tau(t) h^p_{\frac{p}{T}\theta_p(t)}(\cdot, x_p(t))).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\langle \dot{x}_p(t) - \dot{x}_q(t), x_p(t) - x_q(t)\rangle &\leq \langle -z_p(t) + z_q(t), x_p(t) - x_q(t)\rangle \\ &\leq \|z_p(t) - z_q(t)\|\|x_p(t) - x_q(t)\|\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|x_p(t) - x_q(t)\|^2) \leq B_{p,q}(t)\|x_p(t) - x_q(t)\|, \tag{4.14}$$

où

$$B_{p,q}(t) := \|f(t, \tau(t) h^p_{\frac{p}{T}\theta_p(t)}(\cdot, x_p(t))) - f(t, \tau(t) h^q_{\frac{q}{T}\theta_q(t)}(\cdot, x_q(t)))\|.$$

Par hypothèse (ii), (4.11), et (4.13), on a, pour une fonction non-négative $\gamma_M(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ et pour tout $t \in I$

$$B_{p,q}(t) \leq \gamma_M(t)\|\tau(t) h^p_{\frac{p}{T}\theta_p(t)}(\cdot, x_p(t)) - \tau(t) h^q_{\frac{q}{T}\theta_q(t)}(\cdot, x_q(t))\|_{C_0}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}B_{p,q}(t) \leq\ & \gamma_M(t)\|\tau(t) h^p_{\frac{p}{T}\theta_p(t)}(\cdot, x_p(t)) - \tau(t) h^p_{\frac{p}{T}\theta_p(t)}(\cdot, x_q(t))\|_{C_0} + \\ & \gamma_M(t)\|\tau(t) h^p_{\frac{p}{T}\theta_p(t)}(\cdot, x_q(t)) - \tau(t) h^q_{\frac{q}{T}\theta_q(t)}(\cdot, x_q(t))\|_{C_0}.\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \tau(t)h^p_{\frac{p}{T}\theta_p(t)}(\cdot, x)$ étant 1-Lipschitz, il résulte alors

$$\begin{aligned} B_{p,q}(t) &\leq \gamma_M(t)\|x_p(t) - x_q(t)\| \\ &+\gamma_M(t)\|\tau(t)h^p_{\frac{p}{T}\theta_p(t)}(\cdot, x_q(t)) - \tau(t)h^q_{\frac{q}{T}\theta_q(t)}(\cdot, x_q(t))\|_{C_0}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Soit $i \in \{0, \cdots, p-1\}$ et $j \in \{0, \cdots, q-1\}$ telle que $t \in]t^p_i, t^p_{i+1}]$ et $t \in]t^q_j, t^q_{j+1}]$. Alors,

$$\begin{aligned} &\|\tau(t)h^p_{\frac{p}{T}\theta_p(t)}(\cdot, x_q(t)) - \tau(t)h^q_{\frac{q}{T}\theta_q(t)}(\cdot, x_q(t))\|_{C_0} \\ &\qquad = \sup_{s\in[-r+t,t]} \|h^p_i(s, x_q(t)) - h^q_j(s, x_q(t))\| \\ &\qquad \leq \sup_{s\in[0,t]} \|h^p_i(s, x_q(t)) - h^q_j(s, x_q(t))\|. \end{aligned}$$

Si $t^p_i \leq t^q_j$ on obtient

$$\sup_{s\in[0,t]} \|h^p_i(s, x_q(t)) - h^q_j(s, x_q(t))\| = \max\{A^1_{p,q}(t), A^2_{p,q}(t), A^3_{p,q}(t)\},$$

avec

$$A^1_{p,q}(t) := \sup_{s\in[0,t^p_i]} \|x_p(s) - x_q(s)\|,$$

$$A^2_{p,q}(t) := \sup_{s\in[t^p_i,t^q_j]} \|x_p(t^p_i) + \frac{p}{T}(s - t^p_i)(x_q(t) - x_p(t^p_i)) - x_q(s)\|,$$

et

$$\begin{aligned} A^3_{p,q}(t) := \sup_{s\in[t^q_j,t]} &\|x_p(t^p_i) + \frac{p}{T}(s - t^p_i)(x_q(t) - x_p(t^p_i)) \\ &-x_q(t^q_j) - \frac{q}{T}(s - t^q_j)(x_q(t) - x_q(t^q_j))\|. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} A^2_{p,q}(t) \leq \sup_{s\in[t^p_i,t^q_j]} &\|x_p(t^p_i) - x_p(s)\| + \|x_p(s) - x_q(s)\| \\ &+\frac{p}{T}(s - t^p_i)(\|x_q(t) - x_p(t)\| + \|x_p(t) - x_p(t^p_i)\|). \end{aligned}$$

Tenant compte de (4.12) et (4.13), il s'en suit que, pour tout n

$$\|f(t, \tau(t)h^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t)))\| \leq \beta(t)(1 + M).$$

De retour à (4.10), on obtient

$$\int_0^T \|\dot{x}_n(t)\|^2 \, dt \leq \kappa^0 + \sigma(1+M)^2 \int_0^T \beta^2(t) \, dt < +\infty. \tag{4.16}$$

D'où, posons

$$\mathcal{S}_1 = \sup_n \|\dot{x}_n\|_{L^2_H([0,T])}.$$

De la continuité absolue de x_p, pour tout p, il revient que pour tout $s \in [t_i^p, t_j^q]$, $s < t$

$$\begin{aligned}
\|x_p(t_i^p) - x_p(s)\| &\leq \int_{t_i^p}^{s} \|\dot{x}_p(\tau)\| \, d\tau \\
&\leq \int_{t_i^p}^{t} \|\dot{x}_p(\tau)\| \, d\tau \\
&\leq \mathcal{S}_1 (t - t_i^p)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
A^2_{p,q}(t) &\leq \sup_{s \in [t_i^p, t_j^q]} \{ \int_{t_i^p}^{t} \|\dot{x}_p(\tau)\| \, d\tau + \|x_p(s) - x_q(s)\| + \|x_q(t) - x_p(t)\| + \int_{t_i^p}^{t} \|\dot{x}_p(\tau)\| \, d\tau \} \\
&\leq 2\mathcal{S}_1 (t - t_i^p)^{\frac{1}{2}} + \sup_{s \in [t_i^p, t]} \|x_p(s) - x_q(s)\|.
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
A^3_{p,q}(t) \leq & \sup_{s \in [t_j^q, t]} \{ \|x_p(t_i^p) - x_p(t)\| + \|x_p(t) - x_q(t)\| + \|x_q(t) - x_q(t_j^q)\| \\
& + \frac{p}{T}(s - t_i^p)(\|x_q(t) - x_p(t)\| + \|x_p(t) - x_p(t_i^p)\|) \\
& + \frac{q}{T}(s - t_j^q)\|x_q(t) - x_q(t_j^q)\| \} \\
\leq & \int_{t_i^p}^{t} \|\dot{x}_p(\tau)\| \, d\tau + \|x_p(t) - x_q(t)\| + \int_{t_j^q}^{t} \|\dot{x}_q(\tau)\| \, d\tau \\
& + \|x_q(t) - x_p(t)\| + \int_{t_i^p}^{t} \|\dot{x}_p(\tau)\| \, d\tau + \int_{t_j^q}^{t} \|\dot{x}_q(\tau)\| \, d\tau.
\end{aligned}$$

Alors,

$$A^3_{p,q}(t) \leq 2\mathcal{S}_1[(t - t_i^p)^{\frac{1}{2}} + (t - t_j^q)^{\frac{1}{2}}] + 2\|x_p(t) - x_q(t)\|.$$

Par conséquent, si $t_i^p \leq t_j^q$, on aura

$$\begin{aligned}
&\sup_{s\in[0,t]} \|h_i^p(s,x_q(t)) - h_j^q(s,x_q(t))\| \leq \\
&\max\{\sup_{s\in[0,t_i^p]} \|x_p(s) - x_q(s)\|, \sup_{s\in[t_i^p,t]} \|x_p(s) - x_q(s)\|, 2\|x_p(t) - x_q(t)\|\} \\
&+2\mathcal{S}_1[(t-t_i^p)^{\frac{1}{2}} + (t-t_j^q)^{\frac{1}{2}}] \\
&\leq 2\|x_p(\cdot) - x_q(\cdot)\|_{C_H([0,t])} + 2\mathcal{S}_1[(t-t_i^p)^{\frac{1}{2}} + (t-t_j^q)^{\frac{1}{2}}].
\end{aligned}$$

De même, si $t_j^q \leq t_i^p$, en échangeant t_j^q et t_i^p, on obtiendra la même précédente inégalité. D'où, pour tout $t \in [-r,T]$, on a

$$\begin{aligned}
\|\tau(t)h^p_{\frac{p}{T}\theta_p(t)}(\cdot,x_q(t)) - \tau(t)h^q_{\frac{q}{T}\theta_q(t)}(\cdot,x_q(t))\|_{C_0} &\leq 2\|x_p(\cdot) - x_q(\cdot)\|_{C_H([0,t])} \\
&+2\mathcal{S}_1[(t-\theta_p(t))^{\frac{1}{2}} + (t-\theta_q(t))^{\frac{1}{2}}].
\end{aligned}$$

De retour à (4.15), on obtient

$$B_{p,q}(t) \quad \leq \quad 3\gamma_M(t)\|x_p(\cdot) - x_q(\cdot)\|_{C_H([0,t])} + 2\gamma_M(t)b_{p,q}(t),$$

où

$$b_{p,q}(t) := \mathcal{S}_1[(t-\theta_p(t))^{\frac{1}{2}} + (t-\theta_q(t))^{\frac{1}{2}}].$$

(4.14) s'écrit alors pour presque tout $t \in I$, comme suit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|x_p(t) - x_q(t)\|^2) \leq 3\gamma_M(t)\|x_p(\cdot) - x_q(\cdot)\|^2_{C_H([0,t])} + 2\|x_p(\cdot) - x_q(\cdot)\|_{C_H([0,t])}\gamma_M(t)b_{p,q}(t);$$

tenant compte de (4.13), il en résulte que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|x_p(t) - x_q(t)\|^2) \quad \leq \quad 3\gamma_M(t)\|x_p(\cdot) - x_q(\cdot)\|^2_{C_H([0,t])} + 2M\gamma_M(t)b_{p,q}(t). \quad (4.17)$$

Dans la suite, on se sert de la continuité de la fonction : $t \mapsto \|x_p(\cdot) - x_q(\cdot)\|_{C_H([0,t])}$.

Par integration sur $[0,t]$, on a

$$\frac{1}{2}(\|x_p(t) - x_q(t)\|^2) \quad \leq \quad 3\int_0^t \gamma_M(s)\|x_p(\cdot) - x_q(\cdot)\|^2_{C_H([0,s])}ds + 2M\int_0^t \gamma_M(s)b_{p,q}(s)\, ds.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $t \in [0,T]$, il s'en suit alors que

$$\|x_p(\cdot) - x_q(\cdot)\|^2_{C_H([0,t])} \leq a_{p,q} + 6\int_0^t \gamma_M(s)\|x_p(\cdot) - x_q(\cdot)\|^2_{C_H([0,s])}\, ds,$$

où

$$a_{p,q} := 4M\int_0^T \gamma_M(s)b_{p,q}(s)\, ds.$$

Notons que pour tout t, $\lim_{p\to\infty}\theta_p(t) = t$, $\lim_{q\to\infty}\theta_q(t) = t$, et alors $\lim_{p,q\to\infty} b_{p,q}(t) = 0$. Ainsi, par le Théorème de la convergence dominée, on obtient $\lim_{p,q\to\infty} a_{p,q} = 0$ et, via le Lemme 1.3.13

$$\lim_{p,q\to\infty}\|x_p(\cdot) - x_q(\cdot)\|_\infty = 0,$$

et d'où la convergence uniforme de la suite $(x_n(\cdot))$ dans $C_H([-r,T])$ vers une fonction $x(\cdot) \in C_H([-r,T])$ avec $x(s) = \psi(s)$ pour tout $s \in [-r,0]$. De plus, grâce à (4.16), on peut supposer que $(\dot{x}_n(\cdot))$ converge faiblement dans $L^2_H([0,T])$ vers une fonction $g(\cdot) \in L^2_H([0,T])$. Il en résulte que, pour tout $t \in [0,T]$, $x(t) = \psi(0) + \int_0^t g(s)\, ds$ et d'où $x(\cdot)$ est absolument continue sur $[0,T]$ avec $\dot{x}(t) = g(t)$ pour presque tout $t \in [0,T]$. Par conséquent,

$$\dot{x}_n(\cdot) \to \dot{x}(\cdot) \text{ faiblement dans } L^2_H([0,T]). \tag{4.18}$$

C) Montrons maintenant que, $x(\cdot)$ est une solution du problème (P_ψ).

D'abord, démontrons que, pour tout $t \in]0,T]$, on a

$$\lim_n f(t, \tau(t)h^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t))) = f(t, \tau(t)x(\cdot)).$$

Fixons $t \in]0,T]$. Pour tout $n \geq 1$, il existe $j \in \{0,\cdots,n-1\}$ tel que $t \in]t^n_j, t^n_{j+1}]$ et $\theta_n(t) = t^n_j$. Alors,

$$\begin{aligned}
\|\tau(t)h^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t)) - \tau(t)x(\cdot)\|_{C_0} &= \sup_{s\in[-r,0]}\|h^n_j(t+s, x_n(t)) - x(t+s)\| \\
&= \sup_{s\in[-r+t,t]}\|h^n_j(s, x_n(t)) - x(s)\| \\
&\leq \max\{\sup_{s\in[0,t^n_j]}\|x_n(s) - x(s)\|, B^1_{n,m}(t)\},
\end{aligned}$$

où

$$B^1_{n,m}(t) := \sup_{s\in[t_j^n,t]} \|x_n(t_j^n) + \frac{n}{T}(s-t_j^n)(x_n(t)-x_n(t_j^n)) - x(s)\|.$$

On a

$$\begin{aligned} B^1_{n,m}(t) &\leq \sup_{s\in[t_j^n,t]} (\|x_n(t_j^n) - x(s)\| + \|x_n(t) - x_n(t_j^n)\|) \\ &\leq \sup_{s\in[t_j^n,t]} (\|x_n(t_j^n) - x_n(s)\| + \|x_n(s) - x(s)\| + \|x_n(t) - x_n(t_j^n)\|). \end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$B^1_{n,m}(t) \leq \sup_{s\in[t_j^n,t]} \|x_n(s) - x(s)\| + 2\int_{\theta_n(t)}^t \|\dot{x}_n(\tau)\| \, d\tau.$$

Par conséquent,

$$\|\tau(t)h^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t)) - \tau(t)x(\cdot)\|_{C_0} \leq \|x_n(\cdot) - x(\cdot)\|_\infty + 2S(t-\theta_n(t))^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi,

$$\|\tau(t)h^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t)) - \tau(t)x(\cdot)\|_{C_0} \to 0.$$

Le comportement Lipschitz de $f(t,\cdot)$ pour tout t fixe dans $[0,T]$ conduit à

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \|f(t,\tau(t)h^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t))) - f(t,\tau(t)x(\cdot))\| = 0, \text{ avec} \\ &\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|f(t,\tau(t)h^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t))) - f(t,\tau(t)x(\cdot))\|^2 \, dt = 0, \end{aligned}$$

par le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue. Alors,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|f(t,\tau(t)h^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t)))\|^2 \, dt = \int_0^T \|f(t,\tau(t)x(\cdot))\|^2 \, dt. \tag{4.19}$$

Alors, en passant à la limite supérieure sur n dans (4.9), et en se servant de (4.18) et (4.19), il résulte

$$\int_0^T \|\dot{x}(t)\|^2 \, dt \leq \limsup_n \kappa_n + \sigma \int_0^T \|f(t,\tau(t)x(\cdot))\|^2 \, dt. \tag{4.20}$$

Comme $x_n(t) \to x(t)$ et $\varphi(t,\cdot)$ étant sci pour tout $t \in I$, il s'en suit

$$\begin{aligned}\limsup_n \kappa_n &= (k^2(0)+3(\rho+1)^2)\int_0^T \dot{a}^2(t)\,dt + 2[T+\varphi(0,\psi(0)) - \liminf_n \varphi(T,x_n(T))]\\ &\leq (k^2(0)+3(\rho+1)^2)\int_0^T \dot{a}^2(t)\,dt + 2[T+\varphi(0,\psi(0)) - \varphi(T,x(T))].\end{aligned}$$

D'où,

$$\int_0^T \|\dot{x}(t)\|^2\,dt \leq \kappa + \sigma \int_0^T \|f(t,\tau(t)x(\cdot))\|^2\,dt, \tag{4.21}$$

où

$$\kappa = (k^2(0)+3(\rho+1)^2)\int_0^T \dot{a}^2(t)\,dt + 2[T+\varphi(0,\psi(0)) - \varphi(T,x(T))].$$

Pour établir que

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t,x(t)) + f(t,\tau(t)x(\cdot)) \text{ p.p. } t \in [0,T],$$

introduisons d'abord, l'opérateur $\mathcal{A}$ défini sur $L^2_H([0,T])$ par

$$\mathcal{A}x = \{y \in L^2_H([0,T]) : y(t) \in \partial\varphi(t,x(t)) \text{ p.p. sur } [0,T]\}.$$

Alors, on a, pour tout $t \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-\dot{x}_n(t) - f(t,\tau(t)h^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)}(\cdot,x_n(t))) \in \mathcal{A}x_n(t).$$

$\mathcal{A}$ étant maximal-monotone sur $L^2_H([0,T])$, remarquons que

- $x_n(t) \in \operatorname{dom}\mathcal{A}(t)$, $-\dot{x}_n(t) - f(t,\tau(t)h^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)}(\cdot,x_n(t))) \in \mathcal{A}x_n(t)$, $\forall t \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $x_n(\cdot) \longrightarrow x(\cdot)$ fortement dans $L^2_H(I)$;
- $-\dot{x}_n(\cdot) - f(t,\tau(t)h^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)}(\cdot,x_n(t))) \longrightarrow -\dot{x}(\cdot) - f(t,\tau(t)x(\cdot))$ faiblement dans $L^2_H(I)$;

la demi-fermeture de $\mathcal{A}$ entraîne que, $x(\cdot)$ est solution de l'inclusion différentielle (P_ψ).

II) Maintenant, supposons que $\int_0^T \beta^2(s)\,ds \geq m$.

Considérons une partition $0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_n = T$ de $[0,T]$ telle que, pour tout $i \in \{0,\cdots,n-1\}$,

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} \beta^2(s)\,ds < m. \tag{4.22}$$

En vertu de la partie I), il existe une fonction $x_0(\cdot) : [-r, T_1] \to H$ absolument continue sur $[0, T_1]$ telle que

$$x_0(s) = \psi(s) \text{ pour tout } s \in [-r, 0],$$

et

$$\dot{x}_0(t) + f(t, \tau(t)x_0(\cdot)) \in -\partial\varphi(t, x_0(t)) \text{ p.p. } t \in [0, T_1].$$

Supposons que, pour tout $i \in \{0, \cdots, n-2\}$, il existe une fonction $x_i(\cdot) : [-r, T_{i+1}] \to H$ absolument continue sur $[0, T_{i+1}]$ telle que

$$x_i(s) = \psi(s) \text{ pour tout } s \in [-r, 0], \tag{4.23}$$

et

$$\dot{x}_i(t) + f(t, \tau(t)x_i(\cdot)) \in -\partial\varphi(t, x_i(t)) \text{ p.p. } t \in [0, T_{i+1}]. \tag{4.24}$$

En vertu de (4.21), l'inégalité

$$\int_0^{T_{i+1}} \|\dot{x}_i(t)\|^2 \, dt \leq \xi_i + \sigma \int_0^{T_{i+1}} \|f(t, \tau(t)x_i(\cdot))\|^2 \, dt,$$

a lieu, où

$$\xi_i = (k^2(0) + 3(\rho+1)^2) \int_0^{T_{i+1}} \dot{a}^2(t) \, dt + 2[T_{i+1} + \varphi(0, \psi(0)) - \varphi(T_{i+1}, x_i(T_{i+1}))].$$

Définissons $\tilde{f} : [0, T_{i+2} - T_{i+1}] \times \mathcal{C}_0 \to H$, $\tilde{\varphi} : [0, T_{i+2} - T_{i+1}] \times H \to [0, +\infty]$, et $\tilde{\psi}(\cdot) : [-r, 0] \to H$ par

$$\tilde{f}(t, \phi) := f(t + T_{i+1}, \phi), \; \tilde{\varphi}(t, x) := \varphi(t + T_{i+1}, x), \tag{4.25}$$

et

$$\tilde{\psi}(s) := x_i(s + T_{i+1}).$$

Soit $\tilde{a}(\cdot) : [0, T_{i+2} - T_{i+1}] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{a}(t) := a(t + T_{i+1}). \tag{4.26}$$

Définissons aussi $\tilde{\beta}(\cdot) : [0, T_{i+2} - T_{i+1}] \to \mathbb{R}$ par

$$\tilde{\beta}(t) = \beta(t + T_{i+1}).$$

Évidemment, pour tout $t \in [0, T_{i+2} - T_{i+1}]$ et pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0$

$$\|\tilde{f}(t,\phi)\| \leq \tilde{\beta}(t)(1 + \|\phi\|_{\mathcal{C}_0})$$

avec (4.22) qui s'écrit

$$\int_0^{T_{i+2}-T_{i+1}} \tilde{\beta}(s)\, ds < m.$$

En vertu de la partie **I)** encore une fois, il existe une fonction $\tilde{x}(\cdot) : [-r, T_{i+2} - T_{i+1}] \to H$ qui est absolument continue sur $[0, T_{i+2} - T_{i+1}]$ telle que

$$\tilde{x}(s) = \tilde{\psi}(s) \text{ pour tout } s \in [-r, 0], \tag{4.27}$$

et

$$\dot{\tilde{x}}(t) + \tilde{f}(t, \tau(t)\tilde{x}(\cdot)) \in -\partial\tilde{\varphi}(t, \tilde{x}(t)) \text{ p.p. } t \in [0, T_{i+2} - T_{i+1}]. \tag{4.28}$$

Considérons la fonction $x_{i+1}(\cdot) : [-r, T_{i+2}] \to H$ définie par

$$x_{i+1}(t) = \begin{cases} x_i(t) & \text{si} \quad t \in [-r, T_{i+1}], \\ \tilde{x}(t - T_{i+1}) & \text{si} \quad t \in [T_{i+1}, T_{i+2}]. \end{cases}$$

Il résulte de (4.25) et (4.28) que

$$\dot{x}_{i+1}(t) + f(t, \tau(t)x_{i+1}(\cdot)) \in -\partial\varphi(t, x_{i+1}(t)) \text{ p.p. } t \in [T_{i+1}, T_{i+2}]. \tag{4.29}$$

De (4.23) et (4.24), avec (4.29), on obtient

$$x_{i+1}(s) = \psi(s) \text{ pour tout } s \in [-r, 0]$$

et

$$\dot{x}_{i+1}(t) + f(t, \tau(t)x_{i+1}(\cdot)) \in -\partial\varphi(t, x_{i+1}(t)) \text{ p.p. } t \in [0, T_{i+2}].$$

Tenant compte de (4.28) et (4.21), il résulte

$$\int_{T_{i+1}}^{T_{i+2}} \|\dot{\tilde{x}}(t - T_{i+1})\|^2 \, dt = \int_0^{T_{i+2}-T_{i+1}} \|\dot{\tilde{x}}(t)\|^2 \, dt \leq \xi_{i+1} + \sigma \int_0^{T_{i+2}-T_{i+1}} \|\tilde{f}(t, \tau(t)\tilde{x}(\cdot))\|^2 dt,$$

où

$$\xi_{i+1} = (k^2(0) + 3(\rho+1)^2) \int_0^{T_{i+2}-T_{i+1}} \dot{\tilde{a}}^2(t) \, dt$$
$$+2[T_{i+2} - T_{i+1} + \tilde{\varphi}(0, \tilde{x}(0)) - \tilde{\varphi}(T_{i+2} - T_{i+1}, \tilde{x}(T_{i+2} - T_{i+1}))].$$

De (4.25) et (4.26), on obtient

$$\xi_{i+1} = (k^2(0) + 3(\rho+1)^2) \int_{T_{i+1}}^{T_{i+2}} \dot{a}^2(t) \, dt + 2[T_{i+2} - T_{i+1}$$
$$+\varphi(T_{i+1}, \tilde{x}(0)) - \varphi(T_{i+2}, \tilde{x}(T_{i+2} - T_{i+1}))].$$

Comme $x_{i+1}(t + T_{i+1}) = \tilde{x}(t)$, il s'en suit alors,

$$\xi_{i+1} = (k^2(0) + 3(\rho+1)^2) \int_{T_{i+1}}^{T_{i+2}} \dot{a}^2(t) \, dt$$
$$+2[T_{i+2} - T_{i+1} + \varphi(T_{i+1}, x_{i+1}(T_{i+1})) - \varphi(T_{i+2}, x_{i+1}(T_{i+2}))].$$

Combinons ces résultats avec la définition de x_{i+1}, et le fait que $x_i(T_{i+1}) = x_{i+1}(T_{i+1})$, on

a

$$\begin{aligned} \int_0^{T_{i+2}} \|\dot{x}_{i+1}(t)\|^2 \, dt &= \int_0^{T_{i+1}} \|\dot{x}_i(t)\|^2 \, dt + \int_{T_{i+1}}^{T_{i+2}} \|\dot{\tilde{x}}(t)\|^2 \, dt \\ &\leq \xi_{i+2} + \sigma \int_0^{T_{i+2}} \|f(t, \tau(t)x_{i+1}(\cdot))\|^2 \, dt, \end{aligned} \tag{4.30}$$

où

$$\xi_{i+2} = (k^2(0) + 3(\rho+1)^2) \int_0^{T_{i+2}} \dot{a}^2(t) \, dt + 2[T_{i+2} + \varphi(0, \psi(0)) - \varphi(T_{i+2}, x_{i+1}(T_{i+2}))].$$

En répétant cette opération, on obtient une solution sur l'intervalle tout entier $[-r, T]$.

Il est évident que (4.2) a lieu. On a aussi

$$\int_0^T \|\dot{x}(t)\|^2 \, dt \leq \kappa^0 + \sigma \int_0^T \|f(t, \tau(t)x(\cdot))\|^2 \, dt, \tag{4.31}$$

où

$$\kappa^0 = (k^2(0) + 3(\rho+1)^2) \int_0^T \dot{a}^2(t)\, dt + 2[T + \varphi(0, \psi(0))]. \tag{4.32}$$

Étudions maintenant, l'unicité de cette solution. Supposons que $x_1(\cdot)$ et $x_2(\cdot)$ sont deux solutions de (P_ψ). Considérons

$$\eta := \max(\|x_1(\cdot)\|_{C_H([-r,T])}, \|x_2(\cdot)\|_{C_H([-r,T])}).$$

Alors, pour $i = 1, 2$ et pour tout $t \in [0, T]$,

$$\|\tau(t)x_i(\cdot)\|_{C_0} \leq \eta. \tag{4.33}$$

$\partial\varphi(t, \cdot)$ étant monotone entraîne, pour presque tout $t \in I$,

$$\langle -\dot{x}_1(t) - f(t, \tau(t)x_1(\cdot)) + \dot{x}_2(t) + f(t, \tau(t)x_2(\cdot)), x_1(t) - x_2(t)\rangle \geq 0,$$

et alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|x_1(t) - x_2(t)\|^2) \leq \|x_1(t) - x_2(t)\| \|f(t, \tau(t)x_1(\cdot)) - f(t, \tau(t)x_2(\cdot))\|. \tag{4.34}$$

En vertu de (ii) et (4.33), il existe une fonction non-négative $\gamma_\eta(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$, telle que, pour presque tout $t \in I$,

$$\frac{d}{dt}(\|x_1(t) - x_2(t)\|^2) \leq 2\gamma_\eta(t)\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|^2_{C_H([0,t])}.$$

Par intégration sur $[0, t]$, on obtient

$$\|x_1(t) - x_2(t)\|^2 \leq 2\int_0^t \gamma_\eta(s)\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|^2_{C_H([0,s])}\, ds.$$

Ceci implique que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|^2_{C_H([0,t])} \leq 2\int_0^t \gamma_\eta(s)\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|^2_{C_H([0,s])}\, ds.$$

Via le Lemme de Gronwall, on a

$$\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{C_H([0,T])} = 0,$$

ce qui prove que $x_1(\cdot) = x_2(\cdot)$. Ceci achève la démonstration. □

La Proposition suivante donne une estimation de la solution du problème (P_ψ).

Proposition 4.2.2 *Notons par $x(\cdot)$ l'unique solution de (P_ψ), alors pour*

$$K_1 := \|\psi\|_{C_0} + [\xi_1(T)]^{\frac{1}{2}},$$

on a

$$\|x(\cdot)\|_{C_H([-r,T])} \leq K_1,$$

et

$$\int_0^T \|\dot{x}(t)\|^2 \, dt \leq \kappa^0 + \sigma(1+K_1)^2 \int_0^T \beta^2(t) \, dt,$$

où $\xi_1(\cdot)$ est une fonction continue, croissante, et non-négative définie sur $[0,T]$ par

$$\xi_1(s) = b_1(s) + 2\sigma s \int_0^s b_1(\tau)\beta^2(\tau) \exp(2\sigma \int_\tau^s \theta\beta^2(\theta) \, d\theta) \, d\tau,$$

et pour tout $t \in [0,T]$

$$b_1(t) \;=\; t[\kappa^0 + 2\sigma(1+\|\psi\|_{C_0})^2 \int_0^t \beta^2(\theta) \, d\theta],$$

κ^0 est définie par (4.32).

Démonstration. Soit $x(\cdot)$ l'unique solution de (P_ψ). Alors,

$$\int_0^T \|\dot{x}(t)\|^2 \, dt \leq \kappa^0 + \sigma \int_0^T \|f(t, \tau(t)x(\cdot))\|^2 \, dt. \tag{4.35}$$

En vertu de *iii*), on a

$$\begin{aligned}
\|f(r, \tau(\theta)x(\cdot))\| &\leq \beta(\theta)(1 + \|\tau(\theta)x(\cdot)\|_{C_0}) \\
&\leq \beta(\theta)(1 + \max(\|\psi\|_{C_0}, \sup_{s\in[0,\theta]} \|x(s)\|)) \\
&\leq \beta(\theta)(1 + \|x(\cdot) - \psi(0)\|_{C_H([0,\theta])} + \|\psi\|_{C_0}),
\end{aligned}$$

d'où, pour tout $\theta \in [0,T]$,

$$\|f(r, \tau(\theta)x(\cdot))\|^2 \leq 2\beta^2(\theta)[(1+\|\psi\|_{C_0})^2 + \|x(\cdot) - \psi(0)\|^2_{C_H([0,\theta])}].$$

De cette inégalité, (4.35) et la continuité absolue de $x(\cdot)$ sur $[0,T]$, résulte, pour presque tout $s \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
\|x(s)-\psi(0)\|^2 &\leq s\int_0^s \|\dot{x}(\theta)\|^2\,d\theta \\
&\leq s[\kappa^0 + 2\sigma(1+\|\psi\|_{C_0})^2 \int_0^s \beta^2(\theta)\,d\theta + 2\sigma \int_0^s \beta^2(\theta)\|x(\cdot)-\psi(0)\|^2_{C_H([0,\theta])}\,d\theta].
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $s \in [0,T]$, on obtient

$$\|x(\cdot)-\psi(0)\|\|^2_{C_H([0,s])} \leq s[\kappa^0+2\sigma(1+\|\psi\|_{C_0})^2 \int_0^s \beta^2(\theta)\,d\theta]+2\sigma s \int_0^s \beta^2(\theta)\|x(\cdot)-\psi(0)\|^2_{C_H([0,\theta])}\,d\theta.$$

L'inégalité de Gronwall, entraîne, pour tout $s \in [0,T]$, et pour

$$\xi_1(s) = b_1(s) + c_1(s)\int_0^s b_1(t)\beta^2(t)\exp(\int_\tau^s \beta^2(\theta)c_1(\theta)\,d\theta)dt,$$

que

$$\|x(\cdot)-\psi(0)\|^2_{C_H([0,s])} \leq \xi_1(s),$$

où

$$\begin{aligned}
b_1(t) &= t[\kappa^0 + 2\sigma(1+\|\psi\|_{C_0})^2 \int_0^t \beta^2(\theta)\,d\theta], \\
c_1(t) &= 2\sigma t.
\end{aligned}$$

Il est clair que de telles fonctions $b_1(\cdot)$, $c_1(\cdot)$ et $\xi_1(\cdot)$ sont croissantes et continues sur $[0,T]$.

Par conséquent, posons

$$K_1 := \|\psi\|_{C_0} + [\xi_1(T)]^{\frac{1}{2}}$$

on obtient

$$\|x(\cdot)\|_{C_H([-r,T])} \leq K_1.$$

Ainsi

$$\|f(s,\tau(s)x(\cdot))\| \leq (1+K_1)\beta(s) \text{ p.p. } s \in [0,T].$$

et de (4.35),

$$\int_0^T \|\dot{x}(t)\|^2\, dt \leq \kappa^0 + \sigma(1+K_1)^2 \int_0^T \beta^2(t)\, dt.$$

La démonstration de la Proposition est ainsi terminée. □

L'application $\psi \mapsto x_\psi(\cdot)$ qui associe à tout ψ dans l'ensemble $\mathcal{C} := \{\psi \in \mathcal{C}_H([-r,0]) : \psi(0) \in \operatorname{dom}\varphi(0,\cdot)\}$, l'unique solution du problème (P_ψ) est continue. C'est le but du résultat suivant.

Proposition 4.2.3 *Sous les hypothèses du Théorème* 4.2.1, *pour tout* $\psi \in \mathcal{C}$, *soit* $x_\psi(\cdot)$ *l'unique solution du problème perturbé avec retard*

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t,x(t)) + f(t,\tau(t)x(\cdot)) & \text{p.p. } t \in [0,T] \\ x(s) = \psi(s) \quad \forall s \in [-r,0]. \end{cases}$$

Alors, l'application $\psi \mapsto x_\psi(\cdot)$ *de* $\mathcal{C}$ *dans l'espace* $\mathcal{C}_H([-r,T])$ *muni de la norme de la convergence uniforme est Lipschitz sur tout sous-ensemble borné de* $\mathcal{C}$.

Démonstration. Soit M un nombre réel positif fixe. Nous allons montrer que l'application $\psi \mapsto x_\psi(\cdot)$ est Lipschitz sur $\mathcal{C} \cap M\mathbb{B}_0$, où $\mathbb{B}_0$ est la boule unité de $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_H([-r,0])$. En vertu de la Proposition 4.2.2, il existe un nombre réel M_1 dépendant seulement de M tel que, pour tout $\psi \in \mathcal{C} \cap M\mathbb{B}_0$ et, pour presque tout $t \in [0,T]$,

$$\|f(t,\tau(t)x_\psi(\cdot))\| \leq (1+M_1)\beta(t) \tag{4.36}$$

et

$$\int_0^T \|\dot{x}_\psi(t)\|^2\, dt \leq \kappa^0 + \sigma(1+M_1)^2 \int_0^T \beta^2(t)\, dt.$$

Grâce à cette dernière inégalité, pour un certain $\eta > 0$ dépendant seulement de M, pour tout $\psi \in \mathcal{C} \cap M\mathbb{B}_0$ et, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\|x_\psi(\cdot)\|_{\mathcal{C}_H([-r,T])} \leq \eta. \tag{4.37}$$

Fixons $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C} \cap M\mathbb{B}_0$. $\partial\varphi(t,\cdot)$ étant monotone entraîne, pour presque tout $t \in I$,

$$\langle -\dot{x}_{\psi_1}(t) - f(t,\tau(t)x_{\psi_1}(\cdot)) + \dot{x}_{\psi_2}(t) + f(t,\tau(t)x_{\psi_2}(\cdot)), x_{\psi_1}(t) - x_{\psi_2}(t)\rangle \geq 0$$

et alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|x_{\psi_1}(t) - x_{\psi_2}(t)\|^2) \leq \|x_{\psi_1}(t) - x_{\psi_2}(t)\|\|f(t, \tau(t)x_{\psi_1}(\cdot)) - f(t, \tau(t)x_{\psi_2}(\cdot))\|. \quad (4.38)$$

En vertu de (ii), il existe une fonction non-négative $\gamma_\eta(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ telle que $f(t, \cdot)$ est $\gamma_\eta(t)$-Lipschitz sur $\eta\mathbb{B}_0$ (cette fonction dépend seulement de M), l'inégalité en haut, avec (4.37), entraîne que pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\frac{d}{dt}(\|x_{\psi_1}(t) - x_{\psi_2}(t)\|^2) \leq 2\gamma_\eta(t)\|x_{\psi_1}(\cdot) - x_{\psi_2}(\cdot)\|^2_{C_H([-r,t])}.$$

Par intégration sur $[0, t]$, on déduit que

$$\|x_{\psi_1}(\cdot) - x_{\psi_2}(\cdot)\|^2_{C_H([-r,t])} \leq \|\psi_1(\cdot) - \psi_2(\cdot)\|^2_{C_0} + 2\int_0^t \gamma_\eta(s)\|x_{\psi_1}(\cdot) - x_{\psi_2}(\cdot)\|^2_{C_H([-r,s])}\, ds.$$

Via le Lemme de Gronwall, on obtient, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}\|x_{\psi_1}(\cdot) - x_{\psi_2}(\cdot)\|^2_{C_H([-r,t])} &\leq \|\psi_1(\cdot) - \psi_2(\cdot)\|^2_{C_0} \\ &\quad + 2\|\psi_1(\cdot) - \psi_2(\cdot)\|^2_{C_0}\int_0^T \gamma_\eta(s)\exp\{2\int_0^T \gamma_\eta(r)dr\}\, ds.\end{aligned}$$

D'où,

$$\|x_{\psi_1}(\cdot) - x_{\psi_2}(\cdot)\|_{C_H([-r,T])} \leq L\|\psi_1(\cdot) - \psi_2(\cdot)\|_{C_0},$$

où

$$L := (1 + 2\exp\{2\int_0^T \gamma_\eta(r)dr\}\int_0^T \gamma_\eta(s)\, ds)^{\frac{1}{2}}.$$

Ce qui achève la démonstration. □

Perspectives

Le présent travail présente de nombreuses perspectives ; en effet, les hypothèses de Peralba peuvent être utilisées pour généraliser le Théorème 2.3.1 dans un espace de Hilbert de dimension infinie, en remplaçant $f(\cdot,\cdot)$ par une multi application $F(\cdot,\cdot)$, sous des conditions convenables sur F. D'un autre coté, l'étude d'un problème de contrôle optimal gouverné par l'opérateur sous différentiel avec une perturbation univoque contenant un retard, en faisant intervenir à la fois les résultats obtenus dans le Théorème 4.2.1 et la Proposition 3.3.2, fera l'objet de futurs développements. Le cas d'existence de solution BV (à variation bornée) est aussi intéressant comme perspective ainsi que le cas général d'un opérateur maximal monotone.

Bibliographie

[1] Attouch, H. : Variational convergence for functions and operators, Applicable mathematics series, Pitman, Boston-London-Melbourne 1984.

[2] Attouch, H., Damlamian, A. : On multivalued evolution equations in Hilbert spaces. Israel J. Math. 12, (1972), 373-390.

[3] Attouch, H., Damlamian, A. : Problèmes d'évolution dans les Hilberts et applications (French). J. Math. Pures Appl. (9) 54, (1975), 53-74.

[4] Attouch, H., Damlamian, A. : Strong solutions for parabolic vatiational inequalities. Nonlinear Anal. 2 (1978), 329-353.

[5] Aubin, J.P., Celina, A. : Differential inclusions Set-valued maps and viability theory. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984.

[6] Benabdellah, H., Castaing, C., Salvadori, A. : Compactness and discretization methods for differential inclusions and evolution problems. Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, XLV, 9-51(1997).

[7] Bounkhel, M., Yarou, M. : Existence results for first and second order nonconvex sweeping process with delay. Port. Math. 61(2), (2004), 2007-2030.

[8] Brézis, H. : Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. Lecture Notes in Math. North-Holland/American Elsevier, Amsterdam/New York (1973).

[9] Castaing, C., Jofré, A., Salvadori, A. : Control problems governed by functional evolution inclusions with Young measures. Journal of nonlinear and convex analysis. Volume 5, (2004), 131-152.

[10] Castaing, C., Monteiro Marques, M.D.P. : Topological properties of solution sets for sweeping processes with delay. Port. Math. 54, (1997), 485-507.

[11] Castaing, C., Aicha Faik, L., Salvadori, A. : Evolution equations governed by m-accretive and subdifferential operators with delay. Int. J. Appl. Math. 2 (2000), no. 9, 1005-1026.

[12] Castaing, C., Ibrahim, A. G., Yarou, M. : Existence problems in second order evolution inclusions : Discretization and variational approach. Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 12, No 6, pp. 1435-1477, 2008.

[13] Castaing, C., Raynaud de Fitte, P., Valadier, M. : Young measures on Topological Spaces With Applications in Control Theory and Probability Theory. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.

[14] Castaing, C., Raynaud de Fitte, P. : On the fiber product of Young measures with applications to a control problem with measures. Adv. math. Econ. Vol 6, (2004), 1-38.

[15] Castaing, C., Salvadori, A., Thibault, L. : Functional evolution equations governed by nonconvex sweeping process. Journal of nonlinear and convex analysis. Volume 2, november 2, (2001), 217-241.

[16] Castaing, C., Valadier, M. : Convex analysis and Measurable Multifunctions. Lecture Notes in Math., 580, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1977).

[17] Degiovanni, M., Marino, A., Tosques, M. : Evolution equations with lack of convexity. Nonlinear Anal. 9, No. 12, 1401-1443 (1985).

[18] Edmond, J.F. : Problèmes d'évolution associés à des ensembles prox-réguliers. Inclusions et intégration de sous-différentiels. Thèse de Doctorat, Université Montpellier II, 2004.

[19] Edmond, J.F., Thibault, L. : Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process. Math. Program, Ser. B 104, (2005), 347-373.

[20] Edmond, J.F. : Delay perturbed sweeping process. Set-Valued Anal (2006)14 : 295-317.

[21] Gouila-Houri, A. : Sur la généralisation de la notion de commande d'un système guidable. Rev. Française Informat. Recherche Opérationnelle 4, (1967), 7-32.

[22] Guillaume, S. : Problèmes d'optimisation et d'évolution en analyse non convexe de type convexe composite. Thèse de Doctorat, Université Montpellier II, 1996.

[23] Guillaume, S. : Subdifferential evolution inclusion in nonconvex analysis. Positivity 4, No. 4, (2000), 357-395.

[24] Guillaume, S., Syam, A. : On a time-dependent subdifferential evolution inclusion with a nonconvex upper-semicontinuous perturbation. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, No. 11, 1-22, 2005.

[25] Hale, J. : Functional differential equations. Springer, Berlin, 1971.

[26] Hale, J., and Lunel, S. M. V. : Introduction to functional differential equations. Springer, Berlin, 1993.

[27] Jawhar, A. : Mesures de transition et applications. Sém. Anal. Convexe Montpellier, exposé No. 13, (1984).

[28] Jawhar, A. : Existence de solutions optimales pour des problèmes de contrôle de systèmes gouvernés par des équations différentielles multivoques. Sém. Anal. Convexe Montpellier, exposé No. 1, (1985).

[29] Kenmochi, N. : Some nonlinear parabolic variational inequalities. Israel Journ. Math. 22 (1975), 304-331.

[30] Kubo, M. : Characterisation of a class of evolution operators generated by time dependent subdifferential. Funkcialaj Ekvacioj 32 (1989), 301-321.

[31] Lakshmikantham, V., Wen, L., and Zhang, B. : Theory of differential equations with unbounded delay. Kluwer academic publishers 1994.

[32] Marcellin, S. : Intégration d'epsilon-sous différentiels et problèmes d'évolution non convexes. Thèse de doctorat de spécialité, Languedoc, décembre 2004.

[33] Marcellin, S., Thibault, L. : Evolution problems associated with primal lower nice functions. Journal of convex analysis, 13, (2006), n°2, 385-421.

[34] Mitidieri, E., Vrabie, I. : Existence for nonlinear functional differential equations Hiroshima Math. J. 17 (1987), 627-649.

[35] Moreau, J. J. : Rafle par un convexe variable. Séminaire d'analyse convexe, Montpellier, exposé No. 15 (1ère partie), (1971).

[36] Moreau, J. J. : Rétraction d'une multiapplication. Séminaire d'analyse convexe, Montpellier (1972), exposé No. 13, 89 p.

[37] Otani M. : Nonmonotone perturbations for nonlinear parabolic equations associated with subdifferential operators, Cauchy problems. J. Differential Equations, 46,(1982), 268-299.

[38] Papageorgiou, N.S. : Multivalued Perturbation of Subdifferential Type Evolution Equations in Hilbert Spaces. Journal of Differential Equations 76, 238-255(1988).

[39] Peralba, J.C. : Équations d'évolution dans un espace de Hilbert, associées à des opérateurs sous-différentiels. Thèse de doctorat de spécialité, Languedoc, 1972-1973.

[40] Peralba, J.C. : Un problème d'évolution relatif à un opérateur sous différentiel dépendant du temps. Séminaire d'analyse convexe. Montpellier, exposé No. 6, (1972).

[41] Thibault, L. : Sweeping process with regular and nonregular sets. J. Differential Equations 193, 1-26(2003).

[42] Saïdi, S., Thibault, L., and Yarou, Y. : Relaxation of optimal control problems involving time dependent subdifferential operators (soumis).

[43] Tosques, M. : Quasi-autonomous evolution equations associated with (ϕ, φ)-monotone operators, proceeding of the International Workshop on Integral Functionals in the Calculus of Variations (Trieste, 1985). Rend. Circ. Mat. Palermo(2) Suppl. No. 15, 163-180 (1987).

[44] Tosques, M. : Quasi-autonomous parabolic evolution equations associated with a class of nonlinear operators. Ricerche Mat. 38. No. 1, 63-92 (1989).

[45] Valadier, M. :Comparaison de trois théorèmes de désintégration (French), Travaux du Séminaire d'Analyse Convexe, Vol. II, Exp. No. 10, 21 pp. Secrétariat des Math., Publ. No. 122,U.E.R. de Math., Univ. Sci. Tech. Languedoc, Montpellier, 1972.

[46] Warga, J. : Functions of relaxed controls. SIAM J. Control 5, 628-641(1967).

[47] Warga, J. : Optimal control of differential and functional equations. Academic Press, New York, 1972.

[48] Watanabe, J. : On certain nonlinear evolution equations. J. Math. Soc. Japan 25 (1973), 446-463.

[49] Yamada Y. : On evolution equations generated by subdifferential operators. J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 23 (1976), 491-515.

[50] Yamazaki N. : Attractors of asymptotically periodic multivalued dynamical systems governed by time-dependent subdifferentials. Elect. J. Diff. Eq., 107 (2004), 1-22.

[51] Yotsutani, S. : Evolution equations associated with subdifferentials. J. Math. Soc. Japan, 31 (1978), 623-646.

ملخص

حل بعض المسائل التطويرية ذات مؤثر تحت تفاضلي تابع للزمن

استقطبت دراسة الاحتواءات التفاضلية في فضاء هيلبرت، الكثير من الاهتمام و العديد من الأبحاث خاصة في السنوات الأخيرة. من جملة ما سنهتم به في هذه المذكرة حل المسائل التطويرية المتعلقة بالمؤثر تحت التفاضلي التابع للزمن في فضاء هيلبرت، و المشوشة بتابع ذو متغيرين هما الزمن و الموضع بدون تأخر. ندرس أساسا الوجود و الوحدانية، ثم نتناول تطبيقها على مسالة بولزا في التحكم الأمثل. نبرهن أيضا في فضاء هيلبرت، أن حل مسالة تطورية ذات مؤثر تحت تفاضلي تابع للزمن، مشوشة بتابع يحتوي على تأخر قابل للقياس بالنسبة للمتغير الأول و لبشيزي بالنسبة للمتغير الثاني، موجود و وحيد.

Abstract

On evolution inclusions associated with time dependent subdifferentials

Differential inclusions inolving subdifferential operators, in Hilbert spaces, have been considered in several frameworks. On the one hand, we provide in the setting of infinite dimensional Hilbert space, a result concerning the existence and uniqueness of solutions for evolution problems associated with time-dependent subdifferential operators with single-valued perturbations. This result is then used to extend to optimal control problems associated with such equations the relaxation theorems with Young measures. On the other hand, we investigate the existence and uniqueness of solutions for a differential inclusion involving a subdifferential operator with time delay in the infinite dimensional setting. The perturbation which contains the delay is single-valued, separately measurable, and separately Lipschitz. We prove, without any compactness condition, that the problem has one and only one solution.

Résumé

Sur des problèmes d'évolution régis par des opérateurs sous différentiels

Les inclusions différentielles gouvernées par les opérateurs sous différentiels, dans les espaces de Hilbert, ont été considérées dans plusieurs travaux. Dans ce mémoire, nous établissons dans le cadre Hilbertien de dimension infinie, un théorème d'existence et d'unicité de solution à des problèmes d'évolution gouvernés par les opérateurs sous différentiels dépendant du temps avec perturbations univoques. Ensuite, nous exploitons ce résultat pour étendre aux problèmes de contrôle optimal liés à de telles équations les théorèmes de relaxation via les mesures Young. Nous étudions aussi l'existence et l'unicité de solutions pour une inclusion différentielle gouvernée par l'opérateur sous différentiel avec retard. La perturbation qui contient le retard est univoque, séparément mesurable et séparément Lipschitz. Nous montrons, sans aucune condition de compacité, que le problème admet une unique solution.