République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique Université Mohammed Seddik Ben Yahia de Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....

№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème :

Sur des problèmes d'évolution avec perturbation multivoque

Présenté par :

Bouket Soumia

Bourouis Cheima

Soutenu le : juillet 2019

Devant le jury composé de :

Président	**: Selamnia Fatiha**	**M.C.B**	Université de Jijel
Encadreur	**: Saïdi Soumia**	**M.C.A**	Université de Jijel
Examinateur	**: Melit Samira**	**M.C.B**	Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

Dédicace

À

Mon père Abd Elwahid,

Ma mère Rachida,

Mon Mari Mohammed,

Mes frères Mohamed, Toufik et mes sœurs Soria, Saliha,

Widad, Samira, Sabah, Rima,

Mes petites princesses Oumauma, Maram,

Mes grandes familles Bouket, Mesbah,

Tous mes collègues de la promotion "2018-2019",

Tous ceux qui sont proches à mon cœur.

B. Soumia.

Dédicace

À

Mon père Ahmed,

Ma mére Samia,

Mes frères

Mon grand frère Amine, et mon petit frère,

mes princes Aymen, Islam, Fadi,

Ma grande famille et mes amies,

Tous mes collègues de la promotion "2018, 2019",

Tous ceux qui sont proches à mon cœur.

B.cheima.

REMERCIEMENTS

Nous commençons par remercier Dieu le tout puissant, de nous avoir donné courage, volonté et patience pour mener bon terme ce travail.

Nous tenons à remercier notre directrice de ce mémoire : **Mme. Saïdi Soumia**, Maître de Conférences à l'université de Jijel, pour son aide précieuse, ses conseils et son orientation durant l'élaboration de ce mémoire. Nous la remercions également pour sa gentillesse et sa disponibilité.

Nous tenons à remercier les membres de jury : **Mme Selamnia Fatiha**, Maître de Conférences à l'université de Jijel, qui nous a fait l'honneur de présider ce jury. Nos remerciements s'adressent aussi à **Mme Melit Samira**, Maître de Conférences à l'université de Jijel, d'accepter examiner ce travail. Nous tenons à remercier nos enseignants qui nous ont accompagné du scolaire jusqu'à l'université. Nous remercions chaleureusement nos parents, d'être toujours présents à nos cotés, pour leur soutient moral et matériel, nous espérons être à la hauteur de leur confiance.

Enfin, nous remercions toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS GÉNÉRALES

Tout au long de ce mémoire, on adopte les notations suivantes :

$[0,\, T]$	intervalle de $\mathbb{R}$.
$H := \mathbb{R}^d$	espace de Hilbert de dimension finie.
$\mathcal{C}_H([0,T])$	espace des fonctions continues $f : [0,T] \to H,$ noté encore $\mathcal{C}([0,T],H)$.
$\mathbb{N}$	ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels.
$\overline{\mathbb{R}}$	$[-\infty,\, +\infty]$.
$\mathbb{R}_+$	ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{1}_S$	fonction indicatrice définie par $$\mathbb{1}_S(x) = \begin{cases} 0 & si\ x\ \in\ S \\ +\infty & si\ x\ \notin\ S. \end{cases}$$
$d(x,S)$	distance entre $x \in X$ et un sous-ensemble S d'un espace métrique X, notée aussi $d_S(x)$.
$\lvert S\rvert$	$:= \sup\{\lvert\lvert y\rvert\rvert,\ y \in S\}$ où S est un sous-ensemble de H
$\lvert \cdot \rvert$	valeur absolue.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produit scalaire dans H.
$\lvert\lvert \cdot \rvert\rvert$	norme associée à $\langle \cdot,\, \cdot \rangle$.
$\lvert\lvert \cdot \rvert\rvert_\infty$	norme de la convergence uniforme où $\lvert\lvert f\rvert\rvert_\infty = \sup\limits_{x \in [0,T]} \lvert\lvert f(x)\rvert\rvert, f : [0,T] \to H.$

p.p.	presque partout.
$\dot{u} = \dfrac{du}{dt}$	dérivée de u par rapport à t.
$\overline{B}_H[0,\ 1]$	boule unité fermée dans H de centre 0 et de rayon 1.
$B_H[0,\ 1]$	boule unité ouverte dans H de centre 0 et de rayon 1.
$:=$	égal par définition.
$L^1_H([0,T])$	espace des fonctions intégrables $f : [0,T] \to H$.
$L^2_H([0,T])$	espace des fonctions mesurables $f : [0,T] \to H$ telles que : $\int_0^T \|\|f(t)\|\|^2\, dt < +\infty$.
$L^\infty_H([0,T])$	espace des fonctions mesurables $f : [0,T] \to H$ et il existe c tel que $\|f(x)\| \leq c$ p.p.
$sur[0,T]$.	
X	espace topologique.
X'	espace dual de X.
$\sigma(X, X')$	topologie faible sur X.
$\to$	convergence forte.
$\rightharpoonup$	convergence faible.

INTRODUCTION

L'inclusion différentielle est une généralisation de la notion d'équation différentielle ordinaire. Par conséquent, tous les problèmes envisagés pour les équations différentielles, à savoir l'existence de la solution, la continuation de la solution, la dépendance à des conditions et paramètres initiaux, sont présents dans la théorie des inclusions différentielles.

Comme une inclusion différentielle comporte généralement de nombreuses solutions à partir d'un point donné, de nouveaux problèmes apparaissent, tels que l'investigation des propriétés topologiques de l'ensemble de solutions, la sélection de solutions à propriétés données, la relation entre l'ensemble de solutions du problème original avec l'ensemble de solutions du problème convexifié, etc. Pour résoudre ces problèmes, des techniques mathématiques spéciales ont été développées.

Ainsi, les inclusions différentielles ne sont pas seulement des modèles pour de nombreux processus dynamiques, mais ils fournissent également un outil puissant pour divers branches de l'analyse mathématique.

Le thème de recherche considéré dans ce mémoire est autour des problèmes d'évolution avec perturbation multivoque. Il est réparti en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques résultats fondamentaux de topologie, mesurabilité et modes de convergence. On rassemble aussi des notions d'analyse fonctionnelle et d'analyse convexe. On parle notamment de multi-fonctions et sélections. On termine ce chapitre par rappeler des résultats utiles tels que le théorème du point fixe et le théorème d'Ascoli-Arzelà.

Dans les chapitres suivants, on travaille dans un espace de dimension finie $H = \mathbb{R}^d$.

Le deuxième chapitre est composé de deux sections. Dans la première, on étudie le cas d'inclusion différentielle du premier ordre avec perturbation univoque de la forme

$$(\mathcal{P}_{h(\cdot)}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + h(t), \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases}$$

où $N_{C(t)}(u(t))$ est le cône normal d'un ensemble r-prox régulier fermé non vide $C(t)$ au point $u(t)$. La perturbation $h : [0, T] \to H$ est une fonction vérifiant des conditions appropriées.

Dans la deuxième section, on s'intéresse à l'existence de solutions dans le cas multivoque. Le problème est le suivant

$$(\mathcal{P}_{G(\cdot,\cdot)}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + G(t, u(t)), \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases}$$

où $G : [0, T] \times H \to H$ est une multi-fonction semi-continue supérieurement mesurable satisfaisant $G(t, u) \subset p(t) + q(t)||u||\overline{B}_H[0, 1]$ pour tous $(t, u) \in [0, T] \times H$, où p et q sont des fonctions intégrables. On procède par le théorème du point fixe pour démontrer le résultat d'existence.

Soit r un retard fini. Soit $\mathcal{C}_0 := \mathcal{C}_H([-r, 0])$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de $[-r, 0]$ dans H muni de la norme de la convergence uniforme. Pour tout $t \in [0, 1]$, soit $\tau(t) : \mathcal{C}_H([-r, t]) \to \mathcal{C}_0$ une fonction définie par $(\tau(t)u)(s) = u(t + s), \forall s \in [-r, 0], \forall u \in \mathcal{C}_H([-r, t])$. On considère une multi-fonction G satisfaisant des conditions convenables.

Dans le troisième chapitre, on discute l'existence des solutions de l'inclusion différentielle avec retard de forme

$$(\mathcal{P}_\tau) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + F(t, \tau(t)u), p.p \ sur \ t \in [0, 1], \\ u(s) = \varphi(s), \forall s \in [-r, 0], u(t) \in C(t), \forall t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Les résultats d'existence (et d'unicité s'il y a lieu) de solutions aux problèmes considérés dans ce mémoire sont pris de [8], [1].

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Ce chapitre a pour but d'introduire tous les outils nécessaires dont on aura besoin dans la suite. En effet, on va rappeler des notions de base, quelques résultats fondamentaux, y compris divers concepts concernant l'analyse multivoque. Essentiellement, on rappelle le théorème du point fixe, le théorème d'Ascoli-Arzelà, ainsi que d'autres résultats classiques. Le contenu du chapitre a été pris des références [3], [8], [9], [18], [19].

1.1 Rappels et résultats fondamentaux

Dans tout ce qui s'ensuit X est un ensemble non vide.

***Définition* 1.1.1.** *On considère $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$, où $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble de toutes les parties de X. Γ est dite topologie si*

1. *$\emptyset \in \Gamma$, $X \in \Gamma$.*

2. *Une intersection finie d'éléments de Γ appartient à Γ.*

3. *Une réunion quelconque d'éléments de Γ appartient à Γ.*

Dans ce cas, le couple (X, Γ) est dit espace topologique.

Les éléments de Γ sont appelés ensembles ouverts.

Les sous-ensembles fermés de X *sont les complémentaires des ouverts.*

***Définition* 1.1.2.**

Soit (X, Γ) un espace topologique et $x \in X$. On dit qu'une partie V de X est un voisinage de x s'il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset V$.

***Définition* 1.1.3.** *On dit que X un espace séparé si pour tous points distincts x et y dans X, il existe un voisinage V_x de x dans X, et un voisinage V_y de y dans X tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$.*

***Définition* 1.1.4.** *On appelle Tribu sur X toute famille Γ de parties de X telle que :*

1. *$\emptyset \in \Gamma$.*
2. *Γ est stable par passage aux complémentaires.*
3. *Γ est stable par passage aux réunions dénombrables.*

Dans ce cas, le couple (X, Γ) est appelé espace mesurable.

***Définition* 1.1.5.** *(Application mesurable)*

Soient (X_1, Γ_1) et (X_2, Γ_2) deux espaces mesurables. Une application $f : (X_1, \Gamma_1) \to (X_2, \Gamma_2)$ est dite mesurable si $f^{-1}(A) \in \Gamma_1$, pour tout $A \in \Gamma_2$.

***Définition* 1.1.6.** *Soit* (X, Γ) *un espace mesurable. Une mesure sur* (X, Γ) *est une application $\mu : \Gamma \to [0, +\infty]$ vérifiant*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$.*
2. *Pour toute famille $\{A_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de Γ deux à deux disjoints (c'est-à-dire que $A_n \bigcap A_m = \emptyset \quad$ lorsque $n \neq m$), on a la propriété d'additivité dénombrable*
$$\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

On dit alors que (X, Γ, μ) *est un espace mesuré.*

Lorsque μ(X) *$< \infty$, on dit que la mesure μ est finie.*

Un ensemble A est dit μ-négligeable s'il existe $B \in \Gamma$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

***Définition* 1.1.7.** (*Propriété vraie μ-presque partout*)

On dit qu'une propriété est vraie μ-presque partout sur X si la propriété est fausse sur une partie μ-négligeable de X, on note μ p.p.

***Définition* 1.1.8.**

L'application $d : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to [0, +\infty[$ est une distance sur X si pour tous x, y, $z \in \mathrm{X}$, on a

1. $d(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*inégalité triangulaire*).

   Dans ce cas, on dit que (X, d) *est un espace métrique.*

***Définition* 1.1.9.**

Soient (X, d) un espace métrique, $S \subset X$ et $x_0 \in X$, alors

$$d(x_0, S) = \inf_{x \in S} d(x_0, x),$$

$d(x_0, S)$ est la plus petite distance entre le point x_0 et l'ensemble S, notée encore $d_S(x_0)$.

***Définition* 1.1.10.** *On appelle norme sur un espace vectoriel réel ou complexe X, de dimension finie ou infinie, toute application $x \mapsto ||x||$ de X dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions*

i) $\forall x \in \mathrm{X} : \; ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

ii) $\forall x \in \mathrm{X}, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \; ||\lambda x|| = |\lambda|.||x||,$

iii) $\forall x, y \in \mathrm{X} : \; ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$

Toute norme définit naturellement une distance : $d(x, y) = ||x - y||$.

***Définition* 1.1.11.** *On appelle espace vectoriel normé le couple $(\mathrm{X}, || \cdot ||)$ où X est un espace vectoriel et $|| \cdot ||$ est une norme sur X.*

***Définition* 1.1.12.** *Soit $(\mathrm{X}, || \cdot ||)$ un espace vectoriel normé. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite une suite de Cauchy si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, \, q \in \mathbb{N}, \, p > q \geq n_0 : \; ||x_p - x_q|| < \varepsilon.$$

***Définition* 1.1.13.** *Soit* $(\mathrm{X}, ||\cdot||)$ *un espace vectoriel normé. On dit que* $(\mathrm{X}, ||\cdot||)$ *est un espace complet si et seulement si toute suite de Cauchy pour* $||\cdot||$*, composée d'éléments de* X*, admet une limite dans* X*. On dit aussi que* X *est un espace de Banach.*

***Définition* 1.1.14.** *(Continuité séquentielle)*
Soient (X_1, Γ_1)*,* (X_2, Γ_2) *deux espaces topologiques et* $f : \mathrm{X}_1 \longrightarrow \mathrm{X}_2$*. La fonction* f *est dite séquentiellement continue en* $x \in \mathrm{X}_1$ *si pour toute suite* $(x_n) \subset \mathrm{X}_1$ *telle que* $x_n \longrightarrow x$*, alors, on a :* $f(x_n) \longrightarrow f(x)$*.*
La fonction f *est séquentiellement continue sur* X_1 *si elle est séquentiellement continue en tout point de* X_1*.*

***Définition* 1.1.15.** *Soit* (X, Γ) *un espace topologique et soit* $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$*. On dit que* A *est dense dans* X *si* $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{X}$*, où l'on note* $\overline{\mathrm{A}}$ *l'adhérence de A qui le plus petit fermé contenant A.*

***Définition* 1.1.16.** *On dit qu'un espace topologique* (X, Γ) *est séparable s'il existe un sous-ensemble* $A \subset \mathrm{X}$ *dénombrable et dense dans* X*.*

***Définition* 1.1.17.** *Soit* (X, Γ) *un espace topologique.*

1. *Un recouvrement de* X *est une famille* $(A_i)_{i \in I}$ *de partie de* X *telle que* $X \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} A_i$*.*
Si de plus, I *est un ensemble fini, on dit que* $(A_i)_{i \in I}$ *est un recouvrement fini de* X*.*

2. *Soit* $(A_i)_{i \in I}$ *un recouvrement de* X*. Soit* $J \subset I$ *tel que* $X \subset \bigcup\limits_{j \in J} A_j$*, on dit que* $(A_j)_{j \in J}$ *est un sous-recouvrement de* $(A_i)_{i \in I}$*.*

3. *Un recouvrement ouvert de* X *est une famille d'ouverts* $(U_i)_{i \in I}$ *tel que* $X \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i$*.*

***Définition* 1.1.18.** *On dit que* X *est compact s'il est séparé et de tout recouvrement ouvert de* X*, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

***Définition* 1.1.19.** *Soit* (X, Γ) *un espace topologique. On dit que*

- $K \subset \mathrm{X}$ *est compact si de tout recouvrement de* K *par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*
- $A \subset \mathrm{X}$ *est relativement compact si* $\overline{A}$ *est compact.*

Soient E, X deux espaces normés, $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications et $f : X \to E$.

***Définition* 1.1.20.** (*Convergence ponctuelle*)
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers f (sur X) si et seulement si, pour tout x de X, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ dans E.

***Définition* 1.1.21.** *(Convergence uniforme)*

1) On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (sur X) si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \quad (n \geq N \Rightarrow ||f_n(x) - f(x)|| < \varepsilon).$$

2) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f sont bornées, alors pour montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X, il faut et il suffit de montrer que :

$$||f_n - f||_\infty \to 0.$$

***Définition* 1.1.22.**
Soit X un espace de Banach. Soit $f \in X'$ et soit

$$\begin{aligned} \varphi_f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_f(x) = \langle f, x \rangle. \end{aligned}$$

Lorsque f parcourt $X^{'}$, on obtient une famille d'applications $(\varphi_f)_{f\in X'}$.
On appelle topologie faible sur X, la topologie la moins fine sur X rendant les applications $(\varphi_f)_{f\in X'}$ continues sur X et on la note $\sigma(X, X')$.

***Définition* 1.1.23.** *(Convergence faible)*
Soit (x_n) une suite de points de X, alors

$$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle \; \forall f \in X'.$$

Corollaire 1.1.1.

Dans un espace de Hilbert, toute suite bornée admet une sous-suite faiblement convergente.

1.2 Généralités sur l'analyse convexe

Soit H un espace de Hilbert.

***Définition* 1.2.1.**

Un ensemble $S \subset H$ est convexe si $\forall x,\, y \in S, \forall t \in [0,\,1]: \quad tx + (1-t)y \in S$.

Une fonction $\psi : H \to]-\infty,\, +\infty]$ est dite convexe si

$$\forall x,\, y \in H, \quad \forall t \in [0,\,1]: \quad \psi(tx + (1-t)y) \leq t\psi(x) + (1-t)\psi(y).$$

***Définition* 1.2.2.**

Le sous-différentiel proximal d'une fonction semi-continue inférieurement f au point x noté $\partial^p f(x)$ est l'ensemble de tous les $\xi \in H$ pour lesquels, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x' \in x + \delta B_H[0,1] \quad on\, a : \langle \xi, x' - x \rangle \leq f(x') - f(x) + \delta ||x' - x||^2,$$

où $B_H[0,1]$ est la boule ouverte de centre 0 et le rayon 1.

***Définition* 1.2.3.**

Soient S un sous-ensemble non vide fermé de H et $x \in S$. On définit le cône normal proximal de S en x noté $N^p(S,x)$ ou $N^p_S(x)$ par

$$N^p(S,x) = \partial^p \mathbb{1}_S(x),$$

qui s'exprime comme suit

$$N^p(S,x) = \{\xi \in H \ \exists\ \delta > 0; \forall x' \in (x + \delta B_H[0,1]) \cap S, \langle \xi, x' - x \rangle \leq \delta ||x' - x||^2\}.$$

***Proposition* 1.2.1.**

Soient S un sous-ensemble non vide fermé de H et $x \in S$, alors

a) $N^p(S,x) = \{\xi \in H : \exists \delta > 0, \langle \xi, x' - x \rangle \leq \delta ||x' - x||^2,\ \forall x' \in S\}$.

b) $N^p(S,x)$ est convexe.

c) Si S est convexe, alors $N^p(S,x) = \{\xi \in H,\ tel\ que : \langle \xi, x' - x \rangle \leq 0,\ \forall x' \in S\}$.

***Définition* 1.2.4.**

Soit S un sous-ensemble non vide fermé de H et soit $\bar{x} \in S$. Le cône normal de Fréchet est donné par

$$N_S^F(\bar{x}) := \{y \in H : \limsup_{x \to^S \bar{x}} \langle y, \frac{x - \bar{x}}{\|x - \bar{x}\|} \rangle \leq 0\},$$

avec $x \to^S \bar{x}$ signifie que $x \to \bar{x}$ et $x \in S$.

***Théorème* 1.2.1.** *(Relation entre le cône et le sous différentiel de la fonction distance)*

Soient S un sous-ensemble non vide fermé de H et $x \in S$ alors :

$$\partial^p d(S, x) = N^p(S, x) \cap \overline{B}_H[0, 1],$$

où $\overline{B}_H[0, 1]$ est la boule unité fermée de H.

***Définition* 1.2.5.** *(Ensemble r-prox régulier)*

Soit $r \in]0, +\infty]$. Un sous ensemble S est r-prox régulier si est seulment si : si pour $x \in S$ et tout $v \in N^p(S, x)$ tel que $v \neq 0$ on a :

$$\langle \frac{v}{||v||}, y - x \rangle \leq \frac{1}{2r} ||y - x||^2, \ \forall y \in S,$$

par convention $\frac{1}{r} = 0$ pour $r = +\infty$.

***Proposition* 1.2.2.**

Tout ensemble r-prox régulier vérifie l'estimation suivante :

$$\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -||x_1 - x_2||^2, \ \forall i = 1, 2 \ \ x_i \in S, \ ||v_i|| \leq r.$$

1.3 Multi-fonctions et sélections

Soient X et Y deux ensembles non vides.

***Définition* 1.3.1.** *Une multi-fonction ou multi-application F définie sur X à valeurs dans l'ensemble de parties de Y est une fonction qui à tout élément $x \in X$ associe un sous-ensemble $F(x)$ de Y et on note $F : X \rightrightarrows Y$.*

***Définition* 1.3.2.** *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : X \longrightarrow Y$ vérifiant $f(x) \in F(x), \forall x \in X$.*

***Définition* 1.3.3.**

Soient (X, Γ) un espace mesurable, Y un espace métrique, et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-fonction. On dit que F est mesurable si pour tout ouvert V de Y

$$F^{-1}(V) = \{x \in X,\ F(x) \cap V \neq \emptyset\} \in \Gamma.$$

***Théorème* 1.3.1.** *Soient (X, Γ) un espace mesurable, Y un espace métrique complet séparable et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application mesurable à valeurs fermées. Alors, elle admet au moins une sélection mesurable.*

***Définition* 1.3.4.** *(Graphe de multi-fonction)*

Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-fonction. On appelle graphe de F noté graph (F) l'ensemble défini par :

$$graph(F) = \{(x, y) \in X \times Y,\ y \in F(x)\}.$$

***Définition* 1.3.5.**

La multi-fonction $F : I \rightrightarrows X$ (I et X sont deux espaces topologiques) est dite semi-continue supérieurement (scs) au point $t_0 \in I$ si est seulement si, pour tout ouvert Ude X tel que $F(t_0) \subset U$, il existe un voisinage V de t_0 tel que $F(t) \subset U, \forall t \in V$.

***Définition* 1.3.6.**

La multi-fonction F est dite scs sur I si F est scs en tout point de I.

On rappelle le résultat suivant (voir proposition 1.17 [14]).

***Proposition* 1.3.1.**

Soit φ une fonction de type Lipschitz définie de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors, le sous-différentiel de φ noté $\partial\varphi$ est une multi-fonction semi-continue supérieurement à valeurs convexes compactes dans $\mathbb{R}^d$.

***Définition* 1.3.7.** *(Multi-fonction intégralement bornée)*

Soit E un espace normé. Soit $F : I \rightrightarrows E$ une multi-fonction mesurable. La multi-fonction F est dite intégralement bornée si il existe $h \in L^1_E(I)$ telle que $|F(t)| \leq h(t)$ presque pour tout $t \in I$.

***Théorème* 1.3.2.** *Soit $F : I \rightrightarrows E$ une multi-fonction intégrablement bornée à valeurs non vides convexes faiblement compactes dans un espace de Banach séparable. Alors, S^1_F est $\sigma(L^1_E(I), L^\infty_E(I))$-compact où S^1_F est l'ensemble des sélections intégrables de F défini par*

$$S^1_F := \{f \in L^1_E([I) : f(t) \in F(t) \text{ p.p.}\}.$$

1.4 Quelques notions d'analyse fonctionnelle

***Définition* 1.4.1.** *(Fonction scalairement intégrable)*
Soit H un espace de Hilbert. Soit $f : I \to H$ une fonction. La fonction f est dite scalairement intégrable si pour tout $y \in H$, $\langle y, f(\cdot)\rangle$ est intégrable.

***Théorème* 1.4.1.** *(Fonction absolument continue)*
Soit un intervalle $[a,\, b]$ de $\mathbb{R}$, une fonction $\psi :\ [a,\, b] \longmapsto H$ est dite absolument continue si est seulement si elle est l'intégrale de sa dérivée, i.e.,

$$\psi(b)\text{-}\psi(a) = \int_a^b \dot{\psi}(t)\ dt.$$

***Remarque* 1.4.2.**
1. *Toute fonction absolument continue est une fonction continue.*
2. *Toute fonction absolument continue est dérivable presque partout.*

***Définition* 1.4.2.** *(Fonction lipschitzienne)*
Soit $\psi : H \to \mathbb{R}$. On dit que ψ est Lipschitz de rapport $L > 0$ ou L-Lipschitz, si et seulement si,

$$\forall\ x,\, y\ \in\ H,\ |\psi(x) - \psi(y)| \leq L||x - y||.$$

La fonction ψ est dite non-expansive si elle est 1-Lipschitz.

***Remarque* 1.4.3.**
Toute fonction Lipschitz est absolument continue.

***Théorème* 1.4.4.** *(Théorème de Kakutani-Ky Fan)*
Soit S un sous-ensemble convexe faiblement compact d'un espace de Banach. Soit $F : S \rightrightarrows S$ une multi-fonction à valeurs faiblement fermées convexes. Si le graphe de F est faiblement fermé, alors, il existe $x \in S$ tel que $x \in F(x)$, i.e., F admet un point fixe.

***Théorème* 1.4.5.** *(Théorème de fermeture)*

Soit H un espace de Hilbert. On considère une multi-fonction ϕ définie sur $[0,T]\times H$ à valeurs non vides convexes compactes dans H telle que pour $t\in[0,T]$, $\phi(t,\cdot)$ est semi-continue supérieurement. On suppose qu'il existe des applications (f_n), f de $[0,T]$ dans H et (g_n), g sont scalairement intégrables de $[0,T]$ dans H telles que

a) $g_n(t)\in\phi(t,f_n(t))$ *p.p.*

b) Pour tout $x\in H$ fixé, la suite $\langle x,g_n(\cdot)\rangle$ converge vers $\langle x,g(\cdot)\rangle$ par rapport à la topologie faible $\sigma(L^1_H([0,T]),L^\infty_H([0,T]))$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)=f(t)$ *p.p.*

Alors, $g(t)\in\phi(t,f(t))$ p.p.

***Théorème* 1.4.6.** *(Théorème d'Ascoli- Arzelà)*

Soit (X,d) un espace métrique compact et (Y,d') un espace métrique complet. Alors, une partie $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}_Y(X)$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme, si et seulement si les deux conditions sont satisfaites :

1. *$\mathcal{H}$ est équicontinue .i.e :*

$$\forall x\in X,\ \forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall f\in\mathcal{H},\ \forall y\in X:\ (d(x,y)<\delta)\Rightarrow(d'(f(x),f(y))<\epsilon).$$

2. *Pour tout $x\in X$, l'ensemble $\mathcal{H}(x)=\{f(x),f\in\mathcal{H}\}$ est relativement compact.*

***Lemme* 1.4.1.** *(Inégalité de Gronwall)*

Soient $\alpha,\beta,r:[0,T]\to[0,+\infty[$ des fonctions intégrables positives pour tout $t\in[0,T]$

$$r(t)\le\alpha(t)+\beta(t)\int_0^t r(s)ds.$$

Alors, on a

$$r(t)\le\alpha(t)+\beta(t)\int_0^t[\alpha(s)\exp(\int_s^t\beta(\tau)d\tau)]ds$$

pour tout $t\in[0,T]$.

***Lemme* 1.4.2.** *(Lemme de Gronwall "Forme intégrale")*

Soient $\psi:[0,T]\to\mathbb{R}_+$ et $\phi:[0,T]\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues qui vérifient

$$\forall t\ge t_0:\quad \phi(t)\le K+\int_{t_0}^t\psi(s)\phi(s)ds$$

où K est une constante. Alors, on a

$$\forall t \geq t_0 : \quad \phi(t) \leq K \exp(\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds).$$

CHAPITRE 2

EXISTENCE DE SOLUTIONS POUR UN PROBLÈME D'ÉVOLUTION PERTURBÉ

Tout au long de ce chapitre on note $\partial^p d(S,x) = \partial d(S,x)$ et $N^p(S,x) = N(S,x)$, on travaille dans un espace de dimension finie $H = \mathbb{R}^d$.

Le but de ce chapitre est d'établir le résultat d'existence de solutions absolument continues de l'inclusion différentielle de la forme

$$(\mathcal{P}_{G(\cdot,\cdot)}) \begin{cases} -\dot{u}(t) & \in & N_{C(t)}(u(t)) + G(t,u(t)), \\ u(0) & = & u_0 \in C(0), \end{cases}$$

où G est une perturbation multivoque définie sur $[0,T] \times H$ à valeurs convexes compactes dans H. On commence par rappeler le théorème d'existence et d'unicité de solution absolument continue au problème d'évolution de la forme

$$(\mathcal{P}_{h(\cdot)}) \begin{cases} -\dot{u}(t) & \in & N_{C(t)}(u(t)) + h(t), \\ u(0) & = & u_0 \in C(0), \end{cases}$$

où $h \in L^1_H([0,T])$. On montre aussi que l'ensemble de solutions de ce problème est compact dans $\mathcal{C}_H(I)$. Enfin, grâce au résultat d'existence correspondant à $(\mathcal{P}_{h(\cdot)})$ et d'autres techniques telles que le théorème du point fixe, on démontre le résultat d'existence relatif à $(\mathcal{P}_{G(\cdot,\cdot)})$. Cette partie a été prise de [8], [15].

2.1 Cas d'une perturbation univoque

On commence par énoncer les Théorèmes 2.1, 2.2 ainsi que Corollaire 2.1. de [15]. Les démonstrations étant longues, alors, on les a enlevées.

***Théorème* 2.1.1.**

On suppose qu'il existe un nombre $r(t) > 0$. Soit $C(t)$ un sous-ensemble $r(t)$-prox régulier de H tel que : il existe une fonction croissante, absolument continue $v : [0,T] \to \mathbb{R}$ satisfaisant

$$|d(e, C(t)) - d(e, C(s))| \leq |v(t) - v(s)| \, \forall t, s \in I, \; \forall e \in H. \tag{2.1.1}$$

De plus, on suppose que

$$2\int_0^t \dot{v}(s)ds < r(t) \quad pour \quad t > 0. \tag{2.1.2}$$

Alors, une fonction $x(\cdot)$ est une solution de l'inclusion différentielle

$$\dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)), x(0) = x_0 \in C(0) \tag{2.1.3}$$

si et seulement si x est une solution de l'inclusion différentielle

$$\dot{x}(t) \in -\dot{v}(t)\partial d_{C(t)}(x(t)), x(0) \in C(0). \tag{2.1.4}$$

.

***Théorème* 2.1.2.**

On suppose qu'il existe un nombre $r(t) > 0$. Soit $C(t)$ un sous-ensemble $r(t)$-prox régulier de H satisfaisant (2.1.1)-(2.1.2). *Alors, les inclusions différentielles* (2.1.3) *et* (2.1.4) *ont le même ensemble de solutions et cet ensemble de solutions est non vide. De plus, pour toute solution $x(\cdot)$, on a*

$$||\dot{x}(t)|| \leq \dot{v}(t) \quad \text{p.p. } t \in [0,T].$$

Corollaire 2.1.1.

Sous les hypothèses du Théorème 2.1.2, on suppose de plus que la fonction $t \mapsto \frac{\dot{v}(t)}{r(t)}$ *est intégrable sur* $[0, T]$. *Alors, le processus de rafle* (2.1.3) *admet une unique solution* $x(\cdot)$, *et cette solution satisfait* $||\dot{x}(t)|| \leq \dot{v}(t)$. *De plus, si* x_a *indique l'unique solution associée à* $a \in C(0)$, *alors, la fonction* $a \mapsto x_a$ *est lipschitzienne sur* $C(0)$ *dans l'espace des fonctions continue de* $[0, T]$ *dans* H *muni du la norme sup.*

On revient maintenant aux hypothèses de [8]. On suppose que :

(H_1) Pour tout $t \in [0, T]$, $C(t)$ est un sous-ensemble non vide fermé de H qui est r-prox régulier pour tout $r \in]0, +\infty[$ fixé.

(H_2) $C(t)$ varie de manière absolument continue c'est-à-dire, il existe une fonction absolument continue $v : [0, T] \to \mathbb{R}$ telle que :

$$|d(x, C(t)) - d(y, C(s))| \leq ||x - y|| + |v(t) - v(s)| \;\forall x, y \in H \;et\; \forall s, t \in [0, T].$$

Rappelons que l'hypothèse (H_1) garantit que pour tout réel non-négatif $\delta < r$, tout point de $C(t) + \delta \overline{B}_H[0, 1]$ a le point le plus proche dans $C(t)$ (voir par exemple [13]).

***Proposition* 2.1.1.**

On suppose que les hypothèses (H_1) *et* (H_2) *sont satisfaites. Alors, pour tout* $h \in L^1_H([0, T])$ *l'inclusion différentielle*

$$(\mathcal{P}_{h(\cdot)}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + h(t) \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases}$$

admet une unique solution absolument continue $u(\cdot)$ *qui vérifie*

$$||\dot{u}(t) + h(t)|| \leq |\dot{v}(t)| + ||h(t)||.$$

De plus, soit m *une fonction intégrable, positive définie sur* $[0, T]$ *et soit*

$$\mathcal{H} = \{h \in L^1_H([0, T]), ||h(t)|| \leq m(t) \; p.p\}.$$

Alors, l'ensemble de solutions $\{u_h, h \in \mathcal{H}\}$, *où* u_h *est l'unique solution absolument continue de l'inclusion ci dessus est compact dans* $\mathcal{C}_H([0, T])$, *et l'application* $h \mapsto u_h$ *est continue sur* $\mathcal{H}$ *où* $\mathcal{H}$ *est muni de la topologie faible* $\sigma(L^1_H([0, T]), L^\infty_H([0, T]))$.

Démonstration. Soit $h \in L^1_H([0,T])$. On pose

$$\psi(t) = \int_0^t h(s)ds, \ D(t) = C(t) + \psi(t), \ \forall t \in [0,T].$$

Il est clair que tous les ensembles $D(t)$ sont non vides fermés et r-prox réguliers, alors les ensembles $D(t)$ satisfont (H_1).

Pour tous $s, t \in [0,T]$ et tout $e \in H$, on a

$$\begin{aligned}
|d(e, D(s)) - d(e, D(t))| &= |d(e - \psi(s), C(s)) - d(e - \psi(t), C(t))| \\
&\leq ||\psi(t) - \psi(s)|| + |v(t) - v(s)| \\
&\leq || \int_0^t h(\tau)d\tau - \int_0^s h(\tau)d\tau|| + | \int_0^t \dot{v}(\tau)d\tau - \int_0^s \dot{v}(\tau)d\tau| \\
&\leq || \int_s^t h(\tau)d\tau|| + | \int_s^t \dot{v}(\tau)d\tau| \\
&\leq \int_s^t ||h(\tau)||d\tau + \int_s^t |\dot{v}(\tau)|d\tau = \int_s^t [||h(\tau)|| + |\dot{v}(\tau)|]d\tau \\
&\leq |V(t) - V(s)|,
\end{aligned}$$

où

$$V(t) := \int_0^t (|\dot{v}(s)| + ||h(s)||)ds.$$

Alors, les ensembles $D(t)$ satisfont (H_2) avec la fonction V au lieu de la fonction v.

L'inclusion différentielle suivante

$$(\mathcal{P}_h(\cdot)) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + h(t) \\ u(0) = u_0 \in C(0). \end{cases}$$

équivaut à

$$\begin{cases} -\dot{y}(t) \in N_{D(t)}(y(t)) \\ y(0) = u_0 \in C(0) = D(0). \end{cases}$$

avec

$$y(t) := u(t) + \psi(t), \forall t \in [0,T].$$

En effet, $C(t)$ étant un ensemble non vide fermé, $-\dot{y}(t) \in N_{C(t)}(u(t))$, de la Proposition 1.2.1, il existe $\delta > 0$, tel que

$$\langle -\dot{y}(t), x - u(t) \rangle \leq \delta ||x - u(t)||^2, \ \ \forall x \in C(t)$$

i.e.,

$$\langle -\dot{y}(t), (x+\psi(t)) - (u(t)+\psi(t))\rangle \leq \delta||(x+\psi(t)) - (u(t)+\psi(t))||^2, \ \ \forall x \in C(t)$$

$$\langle -\dot{y}(t), z - y(t)\rangle \leq \delta||z - y(t)||^2, \ \ \forall z \in D(t)$$

car $z = x + \psi(t) \in D(t)$ pour tout $x \in C(t)$. D'où, $-\dot{y}(t) \in N_{D(t)}(y(t))$ et l'équivalence des deux inclusions a lieu, avec $y(0) = u_0 \in C(0) = D(0)$.

D'après le Théorème 2.1.2 et le Corollaire 2.1.1, on sait que $(\mathcal{P}_h(\cdot))$ admet une unique solution absolument continue tel que $y(\cdot)$ satisfait l'inclusion

$$\begin{cases} -\dot{y}(t) \in \dot{V}(t)\partial d_{D(t)}(y(t)) \\ y(0) = u_0 \in C(0) = D(0). \end{cases} .$$

Alors, on a

$$||\dot{y}(t)|| = ||\dot{u}(t) + h(t)|| \leq |\dot{v}(t)| + ||h(t)||.$$

Ainsi, le problème $(\mathcal{P}_h(\cdot))$ admet une unique solution absolument continue u_h et pour tout $h \in \mathcal{H}$, l'estimation suivante

$$\begin{aligned} ||\dot{u}_h(t)|| &= ||\dot{u}_h(t) + h(t) - h(t)|| \\ &\leq ||\dot{u}_h(t)| + h(t)|| + ||h(t)|| \\ &\leq |\dot{v}(t)| + 2||h(t)|| \\ &\leq |\dot{v}(t)| + 2m(t), \end{aligned}$$

a lieu pour presque tout $t \in [0, T]$.

On va montrer que $\{u_h, \ h \in \mathcal{H}\}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}_H(I)$.

Soit $h \in \mathcal{H}$, alors pour tout $t \in I$, on a

$$u_h(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}_h(s)ds$$

$$||u_h(t)|| \leq ||u_0|| + \int_0^t ||\dot{u}_h(s)||ds = ||u_0|| + \int_0^T \big(|\dot{v}(s)| + 2m(s)\big)ds < \infty,$$

$(u_h(t))$ étant bornée (H de dimension finie) alors $(u_h(t))$ est relativement compact dans H.

La suite (u_h) étant équi-continue car pour tous $s, t \in [0, T]$, on a

$$
\begin{aligned}
||u_h(s) - u_h(t)|| &= || \int_s^t \dot{u}_h(\tau) d\tau || \\
&\leq \int_s^t ||\dot{u}_h(\tau)|| d\tau \\
&\leq \int_s^t [|\dot{v}(\tau)| + 2m(\tau)] d\tau.
\end{aligned}
$$

Par application du théorème d'Ascoli-Arzéla (Théorème 1.4.6), découle le résultat.

Montrons la continuité de $h \mapsto u_h$. On note que $\mathcal{H}$ et

$$\mathcal{K} := \{h \in L^1_H([0,T]) : ||h(t)|| \leq |\dot{v}(t)| + 2m(t) \ p.p\}$$

sont des sous-ensembles faiblement compacts de $L^1_H([0,T])$. Soit (h_n) une suite dans $\mathcal{H}$ qui converge faiblement vers $h \in \mathcal{H}$. Par l'estimation précédente $\dot{u}_{h_n} \in \mathcal{K}$ pour tout n. Alors, on peut extraire des sous-suites telles que $(\dot{u}_{h_n})$ converge faiblement dans $L^1_H([0,T])$ vers la fonction $z \in \mathcal{K}$ et (u_{h_n}) converge uniformément vers la fonction $w \in \mathcal{C}_H([0,T])$ avec :

$$w(t) = u_0 + \int_0^t z(s) ds, \forall \in [0,T].$$

D'où, $\dot{w} = z$ p.p. En utilisant le Théorème 2.1.1, il résulte que u_{h_n} satisfait l'inclusion

$$
\begin{cases}
-\dot{u}_{h_n}(t) \in \dot{W}(t) \partial d_{C(t)}(u_{h_n}(t)) + h_n(t), \\
u_{h_n} = u_0(0) \in C(0),
\end{cases}
$$

où

$$W(t) = \int_0^t (|\dot{v}(s)| + m(s)) ds, \forall t \in [0,T].$$

On a $(\dot{u}_{h_n} + h_n)$ converge faiblement vers $\dot{w} + h$ dans $L^1_H([0,T])$ et (u_{h_n}) converge uniformément vers w. Or, la fonction distance $d_{C(t)}(\cdot)$ d'un ensemble fermé r-prox régulier $C(t)$ étant de type Lipschitz, d'après Proposition 1.3.1, la multi-fonction $x \rightrightarrows \dot{W}(t) \partial d_{C(t)}(x)$ est semi-continue supérieurement à valeurs compactes convexes sur H. En utilisant le résultat de fermeture (voir Théorème 1.4.5), on trouve

$$
\begin{cases}
-\dot{w}(t) \in \dot{W}(t) \partial d_{C(t)}(w(t)) + h(t), \\
w(0) = u_0 \in C(0).
\end{cases}
$$

Alors, la fonction absolument continue w satisfait l'inclusion

$$\begin{cases} -\dot{w}(t) \in N_{C(t)}(w(t)) + h(t), \\ w(0) = u_0 \in C(0), \end{cases}$$

De l'unicité de la solution résulte $w = u_h$. D'où la continuité séquentielle de $h \mapsto u_h$. On déduit la continuité de cette application (les espaces sont métriques).

En utilisant le Théorème 2.1.1, il résulte que l'ensemble de solutions de l'inclusion

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + m(t)\overline{B}_H[0,1], \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases}$$

est compact dans $\mathcal{C}_H([0,T])$. □

Maintenant, on s'intéresse à chercher un lien entre la solution de

$$\begin{cases} -\dot{u}_f(t) \in N_{C(t)}(u_f(t)) + f(t), \\ u_f(0) = u_0 \in C(0), \end{cases}$$

et la solution de

$$\begin{cases} -\dot{u}_g(t) \in N_{C(t)}(u_g(t)) + g(t), \\ u_g(0) = u_0 \in C(0), \end{cases}$$

où f et g sont deux fonctions intégrables.

On pose par convention $\frac{1}{r} = 0$ pour $r = +\infty$,

$$\gamma := \exp\,(\frac{1}{r}\int_0^T |\dot{v}(s)|ds) \geq 1.$$

***Proposition* 2.1.2.**

Soient $f, g \in L^1_H([0,T])$ avec $||f(t)|| \leq \sigma(t)$ et $||g(t)|| \leq \sigma(t)$ où σ est une fonction intégrable. Sous les hypothèses de la Proposition 2.1.1, on a : pour tout $t \in [0,T]$

$$||u_f(t) - u_g(t)|| \leq \ \gamma \exp\,(\frac{1}{r}\int_0^T \sigma(s)ds)\int_0^t ||f(s) - g(s)||ds$$

Démonstration. Comme

$$-\dot{u}_f(t) \in N_{C(t)}(u_f(t)) + f(t),$$

et

$$-\dot{u}_g(t) \in N_{C(t)}(u_g(t)) + g(t),$$

on a de la Proposition 2.1.1, pour presque par tout $t \in [0, T]$

$$||\dot{u}_f(t) + f(t)|| \leq |\dot{v}(t)| + ||f(t)|| \leq |\dot{v}(t)| + \sigma(t),$$

et

$$||\dot{u}_g(t) + g(t)|| \leq |\dot{v}(t)| + ||g(t)|| \leq |\dot{v}(t)| + \sigma(t).$$

Alors, pour tout $t \in [0, T]$

$\frac{-r}{|\dot{v}(t)|+\sigma(t)}(\dot{u}_f(t) + f(t)) \in N_{C(t)}(u_f(t))$ et $||\frac{-r}{|\dot{v}(t)|+\sigma(t)}(\dot{u}_f(t) + f(t))|| \leq r$,

et

$\frac{-r}{|\dot{v}(t)|+\sigma(t)}(\dot{u}_g(t) + g(t)) \in N_{C(t)}(u_g(t))$ et $||\frac{-r}{|\dot{v}(t)|+\sigma(t)}(\dot{u}_g(t) + g(t))|| \leq r$.

D'où, de [12]

$$\langle \dot{u}_f(t) - f(t) - (-\dot{u}_g(t) - g(t)), u_f(t) - u_g(t) \rangle \geq -\frac{1}{r}(|\dot{v}(t)| + \sigma(t))||u_f(t) - u_g(t)||^2.$$

Il s'en suit que pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
&\langle \dot{u}_f(t) - \dot{u}_g(t), u_f(t) - u_g(t) \rangle \\
&\leq \langle g(t) - f(t), u_f(t) - u_g(t) \rangle + \frac{1}{r}(|\dot{v}(t)| + \sigma(t))||u_f(t) - u_g(t)||^2,
\end{aligned}$$

et l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(||u_f(t) - u_g(t)||^2) = 2\frac{d}{dt}(||u_f(t) - u_g(t)||)||u_f(t) - u_g(t)|| \\
&\leq 2(||f(t) - g(t)|| + \frac{|\dot{v}(t)| + \sigma(t))}{r}||u_f(t) - u_g(t)||)||u_f(t) - u_g(t)||.
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

a lieu. De plus, pour tout $t_0 \in]0, T[$ tel que $\frac{d}{dt}||u_f(\cdot) - u_g(\cdot)||(t_0)$ existe, il n'est pas difficile de voir

$$\frac{d}{dt}||u_f(\cdot) - u_g(\cdot)||(t_0) = 0 \tag{2.1.6}$$

car pour tout t au voisinage de t_0, $||u_f(t) - u_g(t)|| - ||u_f(t_0) - u_g(t_0)|| = ||u_f(t) - u_g(t)|| \geq 0$.

La fonction $t \mapsto ||u_f(t) - u_g(t)||$ étant absolument continue (car la norme est lipschitzienne), (2.1.5) et (2.1.6) entrainent que pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\frac{d}{dt}(||u_f(t) - u_g(t)||) \leq ||f(t) - g(t)|| + \frac{|\dot{v}(t)| + \sigma(t))}{r}||u_f(t) - u_g(t)||.$$

Comme $||u_f(0) - u_g(0)|| = 0$, d'après le lemme de Gronwall (Lemme 1.4.2), on obtient pour tout $t \in [0, T]$

$$||u_f(t) - u_g(t)|| \leq \exp\,(\frac{1}{r}\int_0^t |\dot{v}(t)| + \sigma(s)) \int_0^T ||f(s) - g(s)||ds,$$

et donc

$$||u_f(t) - u_g(t)|| \leq \gamma \exp\,(\frac{1}{r}\int_0^t \sigma(s)ds) \int_0^T ||f(s) - g(s)||ds.$$

□

2.2 Cas d'une perturbation multivoque

On commence cette section par le lemme suivant.

***Lemme* 2.2.1.**

On suppose que (H_1) et (H_2) sont satisfaits. Soit $G : [0, T] \times H \rightrightarrows H$ une multi-fonction à valeurs compactes telle que

(i) Pour toute fonction absolument continue $u : [0, T] \to H$, la multi-fonction $t \rightrightarrows G(t, u(t))$ est intégrable sur $[0, T]$.

(ii) Il existe deux fonctions $p, q \in L^1_{\mathbb{R}_+}([0, T])$ telles que

$G(t, x) \subset (p(t) + q(t)||x||)\ \overline{B}_H[0, 1]$, $\forall\ (t, x) \in [0, T] \times H$.

Si $u(\cdot)$ est une solution absolument continue de l' inclusion différentielle suivante :

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + G(t, u(t)) \text{ p.p. } u(0) = u_0, \tag{2.2.1}$$

alors, pour presque tout $t \in [0, T]$

$$||\dot{u}(t)|| \leq \alpha(t) + \beta(t)$$

avec

$$\alpha(t) = |\dot{v}(t)| + 2p(t) + 2q(t)||u_0||$$

et

$$\beta(t) = 2q(t)\int_0^t [\alpha(s)\exp(2\int_s^t q(\tau)d\tau)]ds.$$

Démonstration.

On suppose que $u(\cdot)$ est une solution absolument continue de (2.2.1). De (i) et les techniques usuels pour les multi-fonctions mesurables, il existe une fonction mesurable $\varphi : [0,T] \to H$ telle que

$$\varphi(t) \in G(t,u(t)) \quad et \quad -\dot{u}(t) - \varphi(t) \in N_{C(t)}(u(t)), \tag{2.2.2}$$

pour tout $t \in [0,T]$. De (ii), on a

$$||\varphi(t)|| \leq p(t) + q(t)||u(t)||,$$

alors φ est intégrable sur $[0,T]$ car p et q sont intégrables et u est bornée sur $[0,T]$.
On pose $\psi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds$ pour tout $t \in [0,T]$, alors ψ est absolument continue et $\dot{\psi}(t) = \varphi(t)$, $\forall\ t \in [0,T]$. On fixe $t \in [0,T]$ tel que (2.2.2) satisfaite, $\dot{v}(t)$ existe, et $\dot{\psi}(t) = \varphi(t)$ a lieu. De (H_1), $N_{C(t)}(u(t))$ coïncide avec le cône normal de Fréchet $N^F_{C(t)}(u(t))$. Donc par définition, il existe une fonction $\epsilon : H \longrightarrow [0,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{x\to u(t)} \epsilon(x) = 0$ et pour tout $x \in C(t)$

$$\langle -\dot{u}(t) - \varphi(t), x - u(t)\rangle \leq \epsilon(x)||x - u(t)||. \tag{2.2.3}$$

On fixe $\sigma > 1$ et on observe de (H_2), pour tout $s < t$

$$\begin{aligned}
&d(u(s) + \psi(s) - \psi(t), C(t))\\
&\leq d(u(s) + \psi(s) - \psi(t), C(s)) + |v(s) - v(t)|\\
&\leq ||\psi(s) - \psi(t)|| + |v(s) - v(t)|,
\end{aligned}$$

où l'inégalité précédente a lieu car $u(s) \in C(s)$. Donc il existe $y(s) \in C(t)$ tel que :

$$||u(s) + \psi(s) - \psi(t) - y(s)|| \leq \sigma||\psi(s) - \psi(t)|| + \sigma|v(s) - v(t)|,$$

et d'après (2.2.3).

$$\begin{aligned}
&\langle -\dot{u}(t) - \varphi(t), u(s) + \psi(s) - \psi(t) - y(s) + y(s) - u(t)\rangle\\
&\leq \sigma||\dot{u}(t) + \varphi(t)||(||\psi(s) - \psi(t)|| + |v(s) - v(t)|) + \epsilon(y(s))||y(s) - u(t)||\\
&\leq \sigma||\dot{u}(t) + \varphi(t)||(||\psi(s) - \psi(t)|| + |v(s) - v(t)|)\\
&+ \epsilon(y(s))(\sigma||\psi(s) - \psi(t)|| + \sigma|v(s) - v(t)|)\\
&+ \epsilon(y(s))(||u(s) + \psi(s) - \psi(t) - u(t)||).
\end{aligned}$$

Comme $t-s>0$, l'inégalité précédente entraîne

$$\begin{aligned}&\langle \dot{u}(t)+\varphi(t), \frac{u(s)-u(t)}{s-t}+\frac{\psi(s)-\psi(t)}{s-t}\rangle\\&\leq \sigma||\dot{u}(t)-\varphi(t)||(||\frac{\psi(s)-\psi(t)}{s-t}||+|\frac{v(s)-v(t)}{s-t}|)+\eta(s),\end{aligned}$$

avec $\lim_{s\uparrow t}\eta(s)=0$ car

$$\lim_{s\uparrow t}\frac{1}{t-s}(\sigma||\psi(s)-\psi(t)||+\sigma|v(s)-v(t)|+||u(s)-u(t)+\psi(s)-\psi(t)||),$$

existe dans $\mathbb{R}$ et $\lim_{s\to t}\epsilon(y(s))=0$. Alors, par passage à la limite quand $s\uparrow t$, il résulte

$$\langle \dot{u}(t)+\varphi(t), \dot{u}(t)+\varphi(t)\rangle \leq \sigma||\dot{u}(t)+\varphi(t)||(||\varphi(t)||+|\dot{v}(t)||),$$

pour tout $\sigma>1$, on obtient

$$||\dot{u}(t)+\varphi(t)|| \leq ||\varphi(t)||+|\dot{v}(t)| \tag{2.2.4}$$

et donc, d'après (ii), on peut supposer pour t fixé (en haut)

$$||\dot{u}(t)|| \leq |\dot{v}(t)|+2||\varphi(t)|| \leq |\dot{v}(t)|+2p(t)+2q(t)||u(t)||.$$

On va maintenant appliquer l'inégalité de Gronwall (Lemme 1.4.1). On observe d'abord que l'inégalité ci-dessous assure pour tout $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}||\dot{u}(t)|| &\leq |\dot{v}(t)|+2p(t)+2q(t)||u_0+\int_0^t \dot{u}(s)ds||\\&\leq |\dot{v}(t)|+2p(t)+2q(t)||u_0||+2q(t)\int_0^t ||\dot{u}(s)||ds,\end{aligned}$$

par l'inégalité de Gronwall, on trouve

$$||\dot{u}(t)|| \leq \alpha(t)+2q(t)\int_0^t[\alpha(s)\exp(2\int_s^t q(\tau)d\tau)]ds,$$

où $\alpha(t):=|\dot{v}(t)|+2p(t)+2q(t)||u_0||$. □

***Théorème* 2.2.1.**

On suppose que (H_1) et (H_2) sont satisfaits. Soit $G:[0,T]\times H\rightrightarrows H$ est une multi-fonction à valeurs compactes convexes telle que :

(i) Pour tout $t \in [0,T]$, la multi-fonction $x \rightrightarrows G(t,x)$ est semi-continue supérieurement sur H.

(ii) Pour tout $x \in H$, la multi-fonction $t \rightrightarrows G(t,x)$ est mesurable sur $[0,T]$.

(iii) Il existe deux fonctions p et q dans $L^1_{\mathbb{R}_+}([0,T])$ telles que :

$$G(t,x) \subset (p(t) + q(t)||x||)\overline{B}_H[0,1], \forall (t,x)) \in [0,T] \times H.$$

Alors, pour tout $u_0 \in C(0)$, il existe une solution absolument continue $u : [0,T] \times H$ du problème

$$\dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) + G(t,u(t)), \text{ p.p. } u(0) = u_0,$$

et pour toute solution $u(\cdot)$, on a

$$||\dot{u}(t)|| \leq \alpha(t) + \beta(t)$$

pour tout $t \in [0,T]$ où $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont données dans le lemme précédent.

Démonstration.

Étape 1 :

On suppose que $G(t,x) \subset m(t)\overline{B}_H[0,1]$ pour tout $(t,x) \in [0,T] \times B_H$, m est une fonction intégrable non-négative sur $[0,T]$. Soit $\Delta(t) = m(t)\overline{B}_H[0,1], \forall t \in [0,T]$. Alors, Δ est une multi-fonction à valeurs convexes compactes et intégrablement bornée et l'ensemble $\mathcal{S}^1_\Delta = \{f \in L^1_H([0,T]), f(t) \in \Delta(t) = m(t)B_H([0,1])\}$ des sélections intégrables de Δ est non vide et $\sigma(L^1_H([0,1]), L^\infty_H([0,1]))$ compact.

Pour tout $f \in \mathcal{S}^1_\Delta$, soit u_f l'unique solution absolument continue de

$$\dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) + f(t) \text{ p.p. } u(0) = u_0 \in C(0),$$

dont l'existence est assurée par la Proposition 2.1.1. Pour tout $f \in \mathcal{S}^1_\Delta$, on a

$$G(t,u_f(t)) \subset \Delta(t), \forall t \in [0,T].$$

De la Proposition 2.1.1, l'ensemble $\mathcal{X} := \{u_f : f \in \mathcal{S}^1_\Delta\}$ est compact dans $\mathcal{C}_H([0,T])$. Pour tout $f \in \mathcal{S}^1_\Delta$, on définit $\psi : S^1_\Delta \rightrightarrows L^1_H([0,T])$ tell que
$\psi(f) := \{g \in L^1_H([0,T]) : g(t) \in G(t,u_f(t)) \text{ p.p. } \quad t \in [0,T]\}$.

On va montrer que la multi-fonction ψ à valeurs convexes faiblement compactes définie sur S^1_Δ qui prend des valeurs convexes faiblement compactes dans S^1_Δ est semi-continue supérieurement. Comme S^1_Δ est convexe faiblement compact dans $L^1_H([0,T])$, il suffit de montrer que le graphe de ψ est séquentiellement compact pour la topologie considérée. Soit (f_n) une suite dans S^1_Δ qui converge faiblement dans $L^1_H([0,T])$ vers $f \in S^1_\Delta$. Par la Proposition 2.1.1, (u_{f_n}) converge uniformément vers $u_f \in \mathcal{X}$. Soit $g_n \in \psi(f_n)$. Comme la suite (g_n) est inclue dans l'ensemble convexe faiblement compact S^1_Δ, on peut supposer que (g_n) converge faiblement vers $g \in S^1_\Delta$, il résulte du Théorème1.4.5 que $g(t) \in G(t, u_f(t))$ p.p. D'où, le graphe de ψ est faiblement compact dans $S^1_\Delta \times S^1_\Delta$. Par le Théorème 1.4.4 du point fixe, ψ admet un point fixe $f \in S^1_\Delta$. Il s'en suit que u_f est une solution absolument continue de

$$\dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) + f(t) \ p.p. u(0) = u_0 \in C(0) \ et \ f(t) \in G(t, u_f(t)) \ p.p. \ t \in [0,T].$$

Étape 2 :

On passe maintenant au cas général. On suppose que G satisfait (i)-(iii). Pour $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ données par le Lemme 2.2.1, on pose $\gamma(t) := ||u_0|| + \int_0^t [\alpha(s) + \beta(s)]ds$. Considérons la fonction $\Pi : [0,T] \times H \longrightarrow H$ où $\Pi(t,x) = \begin{cases} x & si \ ||x|| \le \gamma(t) \\ \frac{\gamma(t)x}{||x||} & si \ ||x|| > \gamma(t) \end{cases}$

et on pose

$$G_0(t,x) = G(t, \Pi(t,x)).$$

Alors, $G_0(t,\cdot)$ est semi-continue supérieurement par la propriété (i) et $G(t,\cdot)$ et mesurable par la propriété (ii) sur $G(\cdot, x)$. Pour $m(t) = p(t) + q(t)\gamma(t)$, on a $G_0(t,x) \subset m(t)\overline{B}_H[0,1]$ pour tout $x \in H$. Comme $u(\cdot)$ est une solution de

$$\dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) + G(t, u(t)) \ p.p. \ u(0) = u_0,$$

si et seulement si $u(\cdot)$ est une solution de

$$\dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) + G_0(t, u(t)) \ p.p. \ u(0) = u_0,$$

on peut appliquer l'étape 1 à la dernière inclusion pour terminer la démonstration. □

CHAPITRE 3

EXISTENCE DE SOLUTIONS POUR UN PROBLÈME D'ÉVOLUTION PERTURBÉ AVEC RETARD

Tout au long de ce chapitre, on travaille dans un espace de dimension finie $H = \mathbb{R}^d$.
Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence de solutions pour l'inclusion différentielle contenant un retard fini régie par le processus de la rafle.
Dans tout ce qui s'en suit, on suppose $T = 1$.
Soit r un retard fini. Soit $\mathcal{C}_0 := \mathcal{C}_H([-r, 0])$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de $[-r, 0]$ dans H muni de la norme de la convergence uniforme. Pour tout $t \in [0, 1]$, soit $\tau(t) : \mathcal{C}_H([-r, t]) \to \mathcal{C}_0$ une fonction définie par $(\tau(t)u)(s) = u(t + s), \forall s \in [-r, 0], \forall u \in \mathcal{C}_H([-r, t])$.
On considère une multi-fonction G satisfaisant des conditions convenables. Il s'agit de résoudre le problème de la forme

$$(\mathcal{P}_\tau) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + F(t, \tau(t)u), p.p \; sur \; t \in [0, 1], \\ u(s) = \varphi(s), \forall s \in [-r, 0], u(t) \in C(t), \forall t \in [0, 1], \end{cases}$$

et ce par une méthode de discrétisation, en combinant le résultat d'existence du chapitre 2 concernant le problème d'évolution avec perturbation multivoque ne contenant pas un retard.
Cette partie a été prise de [8].

Avant de donner le résultat principal du chapitre, on énonce la remarque suivante sans la démontrer.

***Remarque* 3.0.1.** *On pose*

$$\alpha'(t) := \dot{v}(t) + 2p(t) + 2q(t)|C([0,T])|$$

$$\beta'(t) := 2q(t)\int_0^t [\alpha'(s)\exp(2\int_s^t q(\tau)d\tau)]ds.$$

Alors, pour tout intervalle $[s_0, t_0] \subset [0, T]$ *et pour toute solution absolument continue de*

$$\dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) + G(t, u(t)) \text{ p.p. } t \in [s_0, t_0],\ u(s_0) = u_0 \in C(s_0),$$

on a l'estimation suivante

$$||\dot{u}(t)|| \leq \gamma'(t) := \alpha'(t) + \beta'(t)$$

pour presque tout $t \in [s_0, t_0]$.

3.1 Résultat d'existence

On suppose que :

(H_1) Pour tout $t \in [0,T]$, $C(t)$ est un sous-ensemble non vide fermé de H qui est r-prox régulier pour tout $r \in]0, +\infty]$ fixé.

(H_2) $C(t)$ varie de manière absolument continue c'est-à-dire, il existe une fonction absolument continue $v : [0,T] \to \mathbb{R}$ telle que :

$$|d(x, C(t)) - d(y, C(s))| \leq ||x - y|| + |v(t) - v(s)| \ \forall x, y \in H \text{ et } \forall s, t \in [0, T].$$

On démontre le théorème d'existence du chapitre 3.

***Théorème* 3.1.1.** *On suppose que* (H_1) *et* (H_2) *sont satisfaites et* $C(t)$ *est un sous-ensemble compact de* H *pour tout* $t \in I$. *Soit* $\varphi \in \mathcal{C}_H([-r, 0])$ *avec* $\varphi(0) \in C(0)$. *Soit* F *une multi-fonction* $F : [0,1] \times \mathcal{C}_H([-r, 0]) \rightrightarrows H$ *séparément mesurable et séparément semi-continue supérieurement à valeurs convexes compactes satisfaisant la condition croissance* $|F(t, u(t))| \leq p(t) + q(t)||u(0)||$

pour tout $(t,u) \in [0,1] \times \mathcal{C}_H([-r,0])$ *où* $p(\cdot)$ *et* $q(\cdot)$ *sont des fonctions intégrables non-négatives définies sur* $[0,1]$. *Alors, l'ensemble de solutions de*

$$(P_\tau) \begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) + F(t,\tau(t)u), \ p.p \ sur \ t \in [0,1], \\ u(s) = \varphi(s), \ \forall s \in [-r,0], \ u(t) \in C(t), \ \forall t \in [0,1], \end{cases}$$

est non vide et compact dans $\mathcal{C}_H([-r,1])$.

Démonstration. La démonstration repose sur le Théorème 2.2.1 et une technique de discrétisation développée dans [4] et [5]. Nous considérons une partition de $[0,1]$ par les points $t_n^k = \frac{k}{n}$, $k = 0,1,2,3...n$. Une suite (u_n) dans $\mathcal{C}_H([-r,1])$ sera définie telle que sa sous-suite converge uniformément sur $[-r,1]$ à une solution $u(\cdot)$ de $(\mathcal{P}_\tau)$.

Étape1 : Affirmation : pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $0 \leq k \leq n-1$, il existe $u_{\frac{k}{n}} \in C(\frac{k}{n})$ et une fonction continue $u_n : [-r, \frac{k+1}{n}] \to H$ qui vérifie les propriétés suivantes

(i) $u_n = \varphi$ sur $[-r,0]$.

(ii) La restriction de u_n sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ est une solution absolument continue du problème $-\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + F(t, \tau(\frac{k+1}{n}) f_k^n(\cdot, u(t)))$ p.p. $t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ avec $u(\frac{k}{n}) = u_{n,k}$, où f_k^n est une fonction continue de $[-r, \frac{k+1}{n}] \times H$ dans H définie par

$$f_k^n(t,x) = \begin{cases} u_n(t) \ si \ t \in [-r, \frac{k}{n}] \\ u_n(\frac{k}{n}) + n(t - \frac{k}{n})(x - u_n(\frac{k}{n})) \ si \ t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]. \end{cases}$$

De plus, (ii) signifie que la restriction de u sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ est une solution absolument continue de l'inclusion ci dessus avec valeur initiale $u(\frac{k}{n}) = u_{n,k}$. Pour tout $(t,x) \in [-r, \frac{1}{n}] \times H$, on pose

$$f_0^n(t,x) = \begin{cases} \varphi(t) \ si \ t \in [-r,0], \\ \varphi(0) + nt(x - \varphi(0)) \ si \ t \in [0, \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Notons que $f_0^n(\frac{1}{n}, x) = x, \forall x \in H$. On va montrer que la fonction $x \mapsto \tau(\frac{1}{n}) f_0^n(\cdot, x)$ définie de H dans $\mathcal{C}_H([-r,0])$ est non-expansive. En effet, nous avons

$$||\tau(\frac{1}{n}) f_0^n \cdot, x) - \tau(\frac{1}{n}) f_0^n(\cdot, y)||_{\mathcal{C}_H([-r,0])} = \sup_{t \in [-r,0]} ||f_0^n(t + \frac{1}{n}, x) - f_0^n(t + \frac{1}{n}, y)||$$

$$= \sup_{s \in [-r+\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]} ||f_0^n(s,x) - f_0^n(s,y)|| = \sup_{s \in [0, \frac{1}{n}]} ||ns(x-y)|| = ||x-y||.$$

D'où, la multi-fonction $(t,x) \rightrightarrows F_0^n(t,x) := F(t,\tau(\frac{1}{n})f_0^n(\cdot,x))$ est semi-continue supérieurement et satisfait

$$|F(t,\tau(\frac{1}{n})f_0^n(\cdot,x))| \leq p(t)+q(t)||\tau(\frac{1}{n})f_0^n(0,x)|| = p(t)+q(t)||x||,$$

pour tout $(t,x) \in [0,1]\times H$. Le Théorème 2.2.1 assure l'existence d'une solution absolument continue $v_0^n : [0,\frac{1}{n}] \to H$ au problème

$$\dot{v}_0^n \in -N_{C(t)}(v_0^n(t)) + F(t,\tau(\frac{1}{n})f_0^n(\cdot,v_0^n(t)))\ p.p.t \in [0,\frac{1}{n}]\ et\ v_0^n = \varphi(0).$$

De plus, on a $||\dot{v}_0^n(t)|| \leq \gamma'(t) := \alpha'(t)+\beta'(t)$ $p.p$ $t \in [0,\frac{1}{n}]$, où
$\alpha'(t) := \dot{v}(t) + 2p(t) + 2q(t)|C([0,T])|$ et $\beta'(t) := 2q(t)\int_0^t[\alpha'(s)\exp(2\int_s^t q(\tau)d\tau)]ds$
(voir Remarque 3.0.1), rappelons que les ensembles $C(t)$ sont compacts. On pose

$$u_n(t) = \begin{cases} \varphi(t) & si\ t \in [-r,0], \\ v_0^n(0) & si\ t \in [0,\frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Alors, u_n est bien définie sur $[-r,\frac{1}{n}]$ avec $u_n = \varphi$ sur $[-r,0]$ et

$$\begin{aligned} -\dot{u}_n(t) &\in N_{C(t)}(u_n(t)) + F(t,\tau(\frac{1}{n})f_0^n(\cdot,u_n(t)))\ p.p.\ t \in [0,\frac{1}{n}] \\ u_n(t) &\in C(t),\ \forall t \in [0,\frac{1}{n}], \end{aligned}$$

avec $||\dot{u}(t)|| \leq \gamma'(t)$ $p.p.$ $t \in [0,\frac{1}{n}]$. Supposons que u_n est définie sur $[-r,\frac{K}{n}]$ avec $u_n = \varphi$ sur $[-r,0]$ est une solution absolument continue du problème

$$\begin{aligned} &\dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) + F(t,\tau(\frac{k}{n}))f_{k-1}^n(\cdot,u(t))\ p.p.\ sur\ t \in [\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}], \\ &u(\frac{k-1}{n}) = u_n(\frac{k-1}{n}) := u_{n,k-1}, \end{aligned}$$

avec $||\dot{u}_n(t)|| \leq \gamma'(t)$ p.p. où $f_{k-1}^n : [-r,\frac{k}{n}]\times H \to H$ est définie par

$$f_{k-1}^n(t,x) = \begin{cases} u_n(t)\ si\ t \in [-r,\frac{k-1}{n}], \\ u_n(\frac{k-1}{n}) + n(t-\frac{k-1}{n})(x-u_n(\frac{k-1}{n}))\ si\ t \in [\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]. \end{cases}$$

Par conséquent, on peut définir de la même manière $f_k^n : [-r,\frac{k+1}{n}]\times H \to H$ par

$$f_k^n(t,x) = \begin{cases} u_n(t)\ si\ t \in [-r,\frac{k}{n}], \\ u_n(\frac{k}{n}) + n(t-\frac{k}{n})(x-u_n(\frac{k}{n}))\ si\ t \in [\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]. \end{cases}$$

Notons que $\tau(\frac{k+1}{n})f_k^n(0,x) = f_k^n(\frac{k+1}{n},x) = x$ pour tout $x \in H$. Alors, pour tous $x, y \in H$, nous avons

$$\begin{aligned}
&||\tau(\frac{k+1}{n})f_k^n(\cdot,x) - \tau(\frac{k+1}{n})f_k^n(\cdot,y)||_{C_H([-r,0])}\\
&= \sup_{t\in[-r,0]} ||f_k^n(t+\frac{k+1}{n},x) - f_k^n(t+\frac{k+1}{n},y)||\\
&= \sup_{s\in[-r+\frac{k+1}{n},\frac{k+1}{n}]} ||f_k^n(s,x) - f_k^n(s,y)||.
\end{aligned}$$

On va vérifier que la fonction $x \to \tau(\frac{k+1}{n})f_k^n(\cdot,x)$ de H dans $\mathcal{C}_H([-r,0])$ est non-expansive. Il ya deux cas

(1) Si $-r + \frac{k+1}{n} < \frac{k}{n}$, nous avons

sur $[-r, \frac{k}{n}]$,

$$\sup_{s\in[-r,\frac{k}{n}]} ||f_k^n(s,x) - f_k^n(s,y)|| = 0$$

donc

$$\begin{aligned}
\sup_{s\in[-r+\frac{k+1}{n},\frac{k+1}{n}]} ||f_k^n(s,x) - f_k^n(s,y)|| &= \sup_{s\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]} ||f_k^n(s,x) - f_k^n(s,y)|\\
&= \sup_{s\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]} ||n(s-\frac{k}{n})(x-y)|| = ||x-y||.
\end{aligned}$$

(2) Si $\frac{k}{n} \leq -r + \frac{k+1}{n} \leq \frac{k+1}{n}$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\sup_{s\in[-r+\frac{k+1}{n},\frac{k+1}{n}]} ||f_k^n(s,x) - f_k^n(s,y)||\\
&\leq \sup_{s\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]} ||f_k^n(s,x) - f_k^n(s,y)|
\end{aligned}$$

(car $[-r + \frac{k+1}{n}] \subset [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$)

$$= \sup_{s\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]} ||n(s-\frac{k}{n})(x-y)|| = ||x-y||.$$

La multi-fonction $F_k^n : [0,1] \times H \rightrightarrows H$ à valeurs convexes compactes définie par

$$F_k^n(t,x) := F(t, \tau(\frac{k+1}{n})f_k^n(\cdot,x))$$

est séparément mesurable et séparément semi-continue supérieurement. Comme F_k^n satisfait les conditions précédentes

$$|F(t,\tau(\frac{k+1}{n})f_k^n(\cdot,x)))| \leq p(t) + q(t)||\tau(\frac{k+1}{n})f_k^n(0,x)|| = p(t) + q(t)||x||,$$

pour tous $(t,x) \in [0,1] \times H \to H$.

Le Théorème 2.2.1 assure l'existence d'une solution absolument continue $v_k^n : [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \to H$ du problème

$$\begin{aligned}
&\dot{v}_k^n(t) \in -N_{C(t)}(v_k^n(t)) + F_k^n(t, v_k^n(t)) \quad p.p\ t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}],\\
&v_k^n(\frac{k}{n}) = u_n(\frac{k}{n}),\\
&||\dot{v}_k^n(\frac{k}{n})|| \le \gamma'(t)\ p.p.\ t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}].
\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe $g_k^n \in L_H^1([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}])$ tel que

$$g_k^n \in F(t, \tau(\frac{k+1}{n}) f_k^n(\cdot, v_k^n(t)))\ p.p.\ t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}],$$

et

$$\begin{aligned}
&\dot{v}_k^n(t) \in -N_{C(t)}(v_k^n(t)) + g_k^n(t), p.p.\ t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}],\\
&v_k^n(\frac{k}{n}) = u_n(\frac{k}{n}).
\end{aligned}$$

Par induction, on peut construire la fonction u_n sur l'intervalle $[-r,1]$ avec $u_n = \varphi$ sur $[-r,1]$ telle que pour tout intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, elle est une solution absolument continue de

$$\dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(t) + F(t, \tau(\frac{k+1}{n}) f_k^n(\cdot, u(t))\ p.p.\ t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$$

avec $u(\frac{k}{n}) := u_{n,k}$ et $||\dot{u}(t)|| \le \gamma'(t)\ p.p.$

Il suffit, en gardant la notation précédente, de définir $u_n = v_k^n$ sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, $g_n(t) = g_k^n(t)$ pour tout $t \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, et $u_n = \varphi$ sur $[-r,0]$.

Nous avons $\delta_n(t) = \frac{k}{n}, \theta_n(t) = \frac{k+1}{n}$ pour tout $t \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ et à l'aide de la notation précédente, il est facile de vérifier que

$$g_n(t) \in F(t, \tau(\theta_n(t)) f_{n\theta_n(t)-1}^n(\cdot, u_n(t)))\ p.p.\ t \in]0,1],$$

avec

$$|F(t, \tau(\theta_n(t)) f_{n\theta_n(t)-1}^n(\cdot, u_n(t))| \le p(t) + q(t)||u_n(t)||. \tag{3.1.1}$$

Par construction, u_n est continue sur $[-r,1]$ avec $u_n = \varphi$ sur $[-r,0]$ et sa restriction sur $[0,1]$ vérifie

$$\dot{u}_n(t) \in -N_{C(t)}(u_n(t)) + g_n(t)\ p.p.\ t \in]0,1], \tag{3.1.2}$$

avec $u_n(0) = \varphi(0)$ et $||\dot{u}_n(t)|| \leq \gamma'(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

Étape 2

On va montrer que (u_n) converge uniformément sur $[-r,1]$ vers la fonction $u \in \mathcal{C}_H([-r,1])$. Soient (u_n) et (g_n) comme dans (3.1.1) et (3.1.2). Nous avons

$$||g_n(t)|| \leq p(t) + q(t)||u_n(t)|| \leq m(t) := p(t) + q(t)(||\varphi(0)|| + \int_0^t \gamma'(s)ds) \ p.p.t \in [0,1]$$

et pour tout n. Il s'ensuite que (g_n) est relativement faiblement compact sur $L^1_H([0,1])$. Supposons que (g_n) converge vers $g \in L^1_H([0,1])$ sur $\sigma(L^1_H([0,1]), L^\infty_{H'}([0,1]))$. Il est évident que la suite (u_n) converge sur $\mathcal{C}_H([0,1])$.

Supposons que (u_n) converge sur $\mathcal{C}_H([0,1])$ vers une fonction $v \in \mathcal{C}_H([0,1])$ avec

$$v(t) = \varphi(0) + \int_0^t \dot{v}(s)ds$$

pour tout $t \in [0,1]$, pour tout $t \in [-r,1]$, on a

$$u(t) = \begin{cases} \varphi \ si \ t \in [-r,0], \\ v \ si \ t \in [0,1]. \end{cases}$$

Alors $u \in \mathcal{C}_H([-r,1])$ et (u_n) converge vers u sur $\mathcal{C}_H([-r,1])$.

Étape 3

Montrons que $\tau(\theta_n(t))f^n_{n\theta_n(t)-1}(\cdot, u(t))$ converge sur $]0,1]$ vers $\tau(t)u$ dans l'espace de Banach $\mathcal{C}_H([-r,0])$.

On fixe $t \in]0,1]$. Soit n un entier positive pour tout $\frac{1}{n} < r$. Il y a un entier $0 \leq k \leq n-1$ pour tout $t \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$. Alors, nous avons l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
&||\tau(\theta_n(t))f^n_{n\theta_n(t)-1}(\cdot, u(t)) - \tau(t)u||_{\mathcal{C}_H([-r,0])} \\
&\leq \sup_{e\in[-r,0]} ||f^n_k(\tfrac{k+1}{n} + e, u_n(t)) - u(\tfrac{k+1}{n} + e)|| + \sup_{e\in[-r,0]} ||u(\tfrac{k+1}{n} + e)) - u(e+t)|| \\
&\leq \sup_{e\in[-r,-\frac{1}{n}]} ||u_n(\tfrac{k+1}{n} + e)) - u(\tfrac{k+1}{n} + e)|| + \sup_{e\in[-\frac{1}{n},0]} ||u_n(\tfrac{k}{n}) + n(e + \tfrac{1}{n})(u_n(t) - u_n(\tfrac{k}{n})) \\
&-u(\tfrac{k+1}{n} + e)|| + \sup_{e\in[-r,0]} ||u(\tfrac{k+1}{n} + e) - u(e+t)|| \\
&\leq \sup_{[-r,-\frac{1}{n}]} ||u_n(\tfrac{k+1}{n} + e) - u(\tfrac{k+1}{n} + e)|| + \sup_{e\in[-\frac{1}{n},0]} ||ne(u_n(t)) - u_n(\tfrac{k}{n})|| \\
&+ \sup_{e\in[-\frac{1}{n},0]} ||u_n(t) - u(\tfrac{k+1}{n} + e)|| + \sup_{e\in[-r,0]} ||u(\tfrac{k+1}{n} + e) - u(e+t)|| \\
&\leq \sup_{e\in[-r,-\frac{1}{n}]} ||u_n(\tfrac{k+1}{n} + e) - u(\tfrac{k+1}{n} + e)|| + ||u_n(t) - u_n(\tfrac{k}{n})|| + ||u_n(t) - u(t)|| \\
&+ \sup_{e\in[-\frac{1}{n},0]} (||u(t) - u(\tfrac{k+1}{n} + e)|| + \sup_{e\in[-r,0]} ||u(\tfrac{k+1}{n} + e) - u(e+t)||.
\end{aligned}$$

Nous allons montrer que l'estimation précédent

$$||\tau(\theta_n(t))f^n_{n\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t)) - \tau(t)u||_{\mathcal{C}_{H([-r,0])}} \to 0$$

quand $n \to \infty$. Nous avons $u_n(t) - u(t) \to 0$. De plus, on a

$$||u_n(t) - u_n(\frac{k}{n})|| \leq ||u_n(t) - u(t)|| + ||u(t) - u(\delta_n(t))|| + ||u(\delta_n(t)) - u_n(\delta_n(t))||.$$

Comme $\delta_n(t) \to t$ et u est continue, $||u(t)-u(\delta_n(t))|| \to 0$ tel que $||u(\delta_n(t))-u_n(\delta_n(t))|| \to 0$ car u_n converge uniformément vers u. Alors $||u_n(t)-u_n(\delta_n(t))|| \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$. u est uniformément continue, il y a $\eta > 0$ pour tout $|s-t| \leq \eta \Longrightarrow ||u(s)-u(t)|| \leq \varepsilon$. Or, nous avons $|\frac{k+1}{n}+e-t| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $e \in [-\frac{1}{n}, 0]$. D'où $\sup\limits_{e\in[-\frac{1}{n},0]} (||u(t) - u(\frac{k+1}{n} + e)||) \leq \varepsilon$ pour $\frac{1}{n} \leq \eta$. De même, on a $|\frac{k+1}{n} + e - (e+t)| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $e \in [-r, 0]$, alors $\sup\limits_{e\in[-r,0]} ||u(\frac{k+1}{n} + e) - u(e+t)|| \leq \varepsilon$ pour$\frac{1}{n} \leq \eta$. Comme $u_n \to u$ converge uniformément, pour n assez grand, nous avons $\sup\limits_{e\in[-r,1]} ||u_n(e) - u(e)|| \leq \varepsilon$. Mais

$$\begin{aligned}
&\sup_{[-r,-\frac{1}{n}]} ||u_n(\frac{k+1}{n} + e) - u(\frac{k+1}{n} + e)|| \\
&= \sup_{e\in[-r+\frac{k+1}{n},\frac{k}{n}]} ||u_n(e) - u(e)|| \\
&\leq \sup_{e\in[-r,1]} ||u_n(e) - u(e)|| \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc, nous pouvons conclure que $\tau(\theta_n(t))f^n_{n\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t)) \to \tau(t)u$ *dans* $\mathcal{C}_H([-r, 0])$.

Étape 4.

$g(t) \in F(t, \tau(t)u)$ *p.p.* $t \in]0, 1]$ et conclusion.

En effet, nous avons $g_n(t) \in F(t, \tau(\theta_n(t))f^n_{n\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t))$ *p.p.* $t \in]0, t]$. Comme $g_n \to g$ faiblement dans $L^1_H([0, 1])$ et $||\tau(\theta_n(t))f_n(\cdot, u_n(t)) - \tau(t)u|| \to 0$ pour tout $t \in]0, \frac{1}{n}]$ et la multifonction $F(t, \cdot)$ est semi continue supérieurement sur $\mathcal{C}_H([-r, 0])$, par un résultat de fermeture (voir Théorème 1.4.5), on a $g(t) \in F(t, \tau(t)u)$ *p.p.* $t \in]0, 1]$, de plus (3.1.2) et Proposition 2.1.1 assure que

$$\dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) + g(t) \text{ p.p. } t \in [0, 1].$$

Cela montre que u est une solution de $(\mathcal{P}_\tau)$. De ce qui précède résulte la compacité de l'ensemble de solutions.

□

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a rassemblé quelques résultats de [8], [15] sur une classe d'inclusions différentielles liée au processus de la rafle perturbé.

D'abord, on a étudié en dimension finie l'existence de solutions pour le problème

$$(\mathcal{P}_h(\cdot))\begin{cases}-\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + h(t),\\ u(0) = u_0 \in C(0),\end{cases}$$

où $h \in L^1_H([0,T])$ et $N_{C(t)}$ est le cône normal d'un ensemble r-prox régulier $C(t)$.

Ensuite, on a résolu le problème

$$(\mathcal{P}_G(\cdot,\ \cdot))\begin{cases}-\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + G(t, u(t)),\\ u(0) = u_0 \in C(0),\end{cases}$$

où G est une multi-fonction.

On a terminé ce mémoire par l'étude du problème avec retard

$$(\mathcal{P}_\tau)\begin{cases}-\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + F(t, \tau(t)u)\ p.p \quad sur \quad t \in [0,1],\\ u(s) = \varphi(s), \forall s \in [-r, 0], u(t) \in C(t), \forall t \in [0,1],\end{cases}$$

De nombreux travaux concernant les inclusions différentielles avec perturbation univoque (ou multivoque) du premier ordre régies par le cône normal d'un ensemble fermé ou r-prox régulier ou par le sous différentiel d'une fonction convexe semi-continue inférieurement, avec ou sans retard se trouvent dans la littérature. Pour plus de détails, on réfère le lecteur à consulter par exemple [2], [4], [6], [7], [10], [11], [12], [16], [17].

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.P. Aubin, A. Cellina, Differential inclusions, Set-valued maps and viability theory, Springer-Verlag, Berlin(1984).

[2] H. Benabdellah, C. Castaing, A. Salvadori, Compactness and discretization methods for differential inclusions and evolution problems, Atti. Sem. Math. Fis. Univ. Modena, XLV (1997) 9-51.

[3] M. Bounkhel, D. Bounkhel, Inégalités variationnelles non convexes, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 11 (2005) 574-594.

[4] C. Castaing, A. Faik, A. Salvadori, Evolution equations governed by m-accretive and subdifferential operators with delay, Int. J. Appl. Math. 2(9) (2000) 1005-1026.

[5] C. Castaing, A.G. Ibrahim, Functional differential inclusion on closed sets in Banach spaces, Adv. Math. Econ 2 (2000) 21-39.

[6] C. Castaing, S. Marcellin, Evolution inclusions with pln functions and application to viscosity and control, J. Nonlinear Convex Anal. 8 (2007) 227-255.

[7] C. Castaing, M.D.P. Monteiro Marques, Topological properties of solution sets for sweeping process with delay, Port. Math. 54 (1997) 485–507.

[8] C. Castaing, A. Salvadori, L. Thibault, Functional evolution equations governed by nonconvex sweeping process, J. Nonlinear Convex Anal. 2 (2001) 217-241.

[9] C. Castaing, M. Valadier, Convex analysis and measurable multifunctions, Lecture Notes in Math., 580, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1977).

[10] J.F. Edmond, L. Thibault, Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process, Math. Program, Ser. B 104 (2005) 347-373.

[11] J.F. Edmond, L. Thibault, BV solution of nonconvex sweeping process differential inclusion with perturbation, J. Differential Equations 226 (1) (2006) 135-159.

[12] M. Kunze, M.D.P. Monteiro Marques, BV solutions to evolution problems with time-dependent domains, Set-Valued Anal. 5 (1997) 57-72.

[13] R.A. Poliquin, R.T. Rockafellar, L. Thibault, Local différentiabilité of distance functions, Trans, Amer Math Soc. 352(11) (2000) 5231–5249.

[14] L. Thibault, Propriétés des sous-différentiels de fonctions localement Lipschitziennes définies sur un espace de Banach séparable-Applications, thèse de doctorat, Montpellier II University, (1976).

[15] L. Thibault, Sweeping process with regular and nonregular sets, J. Differential Equations 193 (2003) 1–26.

[16] S. Saïdi, L. Thibault, M. Yarou, Relaxation of optimal control problems involving time dependent subdifferential operators, Numer. Funct. Anal. Optim. 34 (10) (2013) 1156-1186.

[17] S. Saïdi, M.F. Yarou, Set-valued perturbation for time dependent subdifferential operator, Topol. Methods Nonlinear Anal. 46 (1) (2015) 447-470.

[18] Y. Sonntag, Topologie et analyse fonctionnelle, ellipses, édition marketing S.A, (1998).

[19] J.V. Tiel, Convex analysis, an introductory text, Royal Netherlands Meteorological Institute, John Wiley and Sons Ltd, (1984).