République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahya - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....
№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Analyse asymptotique de certains problèmes de contrôle optimal

Présenté par :

Meledjem Widad

Devant le jury :

Président	: Yasmina Daikh	MCA Université de Jijel
Encadreur	: Nadir Arada	MCA Université de Jijel
Examinateur	: Amira Makhlouf	MCB Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à M. Nadir Arada pour avoir accepté de m'encadrer dans ce mémoire. Je le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Je remercie Mmes Yasmina Daikh et Amira Makhlouf d'avoir accepté de faire partie du jury.

Mes remerciements vont encore à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation, à mes amies et à toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin.

Mes plus chaleureux remerciements à mes chers parents, qui ont toujours été là pour moi, à mes sœurs pour leur encouragement, à mon frère et à toute ma grande famille.

Widad

Table des matières

Introduction

Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ et considérons l'équation aux dérivées partielles linéaire elliptique donnée par

$$\begin{cases} -\Delta y + by = 0 & \text{dans } \Omega, \\ y = u & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

où $b \in L^\infty(\Omega)$. Il est bien connu que si la donnée u dans la condition de Dirichlet n'est pas une fonction suffisamment régulière (typiquement si $u \in L^2(\Gamma)$), alors la solvabilité de (1) ne peut se faire que dans le cadre variationnel L^2, en utilisant la méthode de transposition et la notion de solution *très faible*. Comme nous le verrons plus loin, des résultats d'interpolation dans les espaces de Sobolev nous permettent de montrer que la solution *très faible* est un peu plus régulière et appartient à l'espace intermédiaire $H^{1/2}(\Omega)$. Mais ce cadre n'est pas plus adapté quand il s'agit d'approximation numérique où le cadre variationnel H^1 (utilisant la notion de solution faible classique) est plus attractif car plus naturel.
La procédure de pénalisation de Robin consiste à approcher la condition au bord de type Dirichlet $(1)_2$ par une condition au bord de type Robin

$$\varepsilon \frac{\partial y}{\partial n} + y = u \qquad \text{sur } \Gamma,$$

où le paramètre de pénalisation $\varepsilon > 0$ est assujétti à tendre vers zéro. Cette procédure induit un effet régularisant et permet de traiter le cas de problèmes avec des données non régulières dans le cadre variationnel H^1. Elle est aussi plus facile à mettre en oeuvre numériquement et est largement utilisée dans les codes utilisant les méthodes numériques variationnelles pour la résolution de problèmes du type de (1).

La question naturelle est quel lien existe-t-il entre les deux problèmes ? Autrement dit, si $y_u^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ est la solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta y + by = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \varepsilon \frac{\partial y}{\partial n} + y = u & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{2}$$

et si $y_u \in L^2(\Omega)$ est la solution *très faible* de (1), la suite $\left(y_u^\varepsilon\right)_\varepsilon$ converge-t-elle vers y_u quand le paramètre de pénalisation ε tend vers zéro, et si oui pour quelle topologie ?

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'analyse mathématique d'un problème de contrôle optimal gouverné par l'équation d'état (1) (le contrôle étant la donnée u dans la condition au bord de type Dirichlet.) Plus précisément, le premier objectif est d'étudier le problème suivant

$$(P) \qquad \begin{cases} \text{Minimiser} \quad J(u) = \frac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega |y_u - y_d|^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |u|^2 \, dx \\ u \in U_{ad}, \end{cases}$$

où $y_d \in L^2(\Omega)$ est une fonction fixée, $\lambda > 0$ et où l'ensemble des contrôles admissibles est donné par

$$U_{ad} = \{u \in L^\infty(\Gamma) \mid \alpha \leq u(x) \leq \beta \quad \text{pour p.t. } x \in \Omega\}, \qquad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Le manque de régularité de l'état que nous avons évoqué plus haut rend délicats tous les aspects de l'analyse mathématique du problème (P), allant de l'existence d'un contrôle optimal aux conditions d'optimalité, en passant par la solvabilité de l'équation adjointe associée. D'où notre deuxième objectif : étudier le problème de contrôle optimal *pénalisé* gouverné par (2). Plus précisément, nous considérons le problème suivant

$$(P^\varepsilon) \qquad \begin{cases} \text{Minimiser} \quad J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega |y_u^\varepsilon - y_d|^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |u|^2 \, dx \\ u \in U_{ad}, \end{cases}$$

Une fois achevée l'analyse mathématique de (P^ε) (celle-ci comportant en particulier la solvabilité de l'équation d'état pénalisée, celle de l'équation adjointe associée, l'existence d'un contrôle optimal, les conditions d'optimalités correspondantes ainsi que sa caractérisation), nous nous tournons vers l'analyse asymptotique qui nous permet de lier les deux problèmes. Nous montrons en particulier que si $\bar{u}$ est un contrôle optimal de (P) et si $\bar{u}^\varepsilon$ est un contrôle optimal de (P^ε) alors

$$\|\bar{u} - \bar{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\varepsilon^{1/2},$$

où C est une constante positive indépendante de ε. Ce résultat est la conséquence de résultats similaires liant l'état $y_{\bar{u}}$ et l'état pénalisé $y_{\bar{u}}^\varepsilon$, ainsi que l'état adjoint et l'état adjoint pénalisé.

La pénalisation de problème de contrôle a été très étudiée au cours des vingt dernières années. Nous citerons en particulier [1], [2], [3] pour les problèmes paraboliques, [4] et [5] pour les problèmes elliptiques. Cette thèse est principalement basée sur les références [5] et [6]. L'analyse mathématique et numérique du problème (P) a été menée dans [6] dans le cas plus général d'une EDP semi-linéaire, d'une fonctionnelle coût non nécessairement quadratique par rapport à la variable état et d'un domaine polygonal convexe. Dans le même cadre, l'étude du problème (P^ε) et l'analyse asymptotique relativement au paramètre de pénalisation a été faite dans [5]. Nous avons préféré considérer le cas d'une équation linéaire, d'un coût quadratique et d'un domaine de classe C^2 afin de mettre en valeur la procédure de pénalisation et de simplifier l'analyse asymptotique (basée sur des conditions d'optimalité suffisantes du second ordre naturellement satisfaites dans notre cas). Il a cependant fallu faire un travail bibliographique et de recherche cohérent et consistant.

Chapitre 1

Problèmes de contrôle optimal dans une condition de Dirichlet

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'existence d'un contrôle optimal et d'établir les conditions d'optimalité pour le problème (P). Comme déjà indiqué dans l'introduction générale, le manque de régularité de la variable contrôle impose de considérer le cadre variationnel L^2 pour l'analyse de l'équation d'état (1) et d'utiliser la méthode de transposition. Pour fonctionner, celle-ci nécessite que soit garantie la solvabilité d'une classe d'EDP linéaires elliptiques de la forme

$$\begin{cases} -\Delta z + bz = f & \text{dans } \Omega, \\ z = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.1}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$. Nous commencerons donc par étudier systématiquement le problème (1.1), obtenant des résultats d'existence et de régularité dans $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et des estimations associées.

Nous passons ensuite à l'étude de l'équation d'état et considérons en premier lieu le cas où le contrôle $u \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Utilisant la méthode de transposition, nous montrons l'existence d'une *solution très faible* y_u dans $L^2(\Omega)$. Nous rappelons ensuite le résultat classique qui stipule que si $u \in H^{1/2}(\Gamma)$, alors la *solution très faible* est en fait une *solution faible* appartenant à $H^1(\Omega)$ (la démonstration, basée sur la méthode de relèvement est aussi donnée). Finalement, utilisant des résultats d'interpolation dans les espaces de Sobolev, nous montrons que si $u \in L^2(\Gamma)$ (et est donc plus régulier que $H^{-1/2}(\Gamma)$ mais moins régulier que $H^{1/2}(\Gamma)$), alors la *solution très faible* y_u appartient à $H^{1/2}(\Omega)$ (elle est donc plus régulière que $L^2(\Omega)$ mais moins régulière que $H^1(\Omega)$). Finalement, utilisant le principe du maximum, nous montrons que si $u \in L^\infty(\Gamma)$, alors $y_u \in L^\infty(\Omega)$.

La section 1.3 est alors dévolue à l'existence d'un contrôle optimal et la section suivante aux conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité. Utilisant ces dernières, nous caractérisons le contrôle optimal et montrons qu'il hérite de la régularité de l'état adjoint. Les notations et des résultats auxiliaires sont placés en appendice à la fin du manuscript.

1.2 Solvabilité de l'équation d'état

1.2.1 Équation avec condition aux limites de type Dirichlet homogène

Dans cette section, nous étudions la solvabilité (existence, unicité et régularité de solution) du problème (1.1). Cette classe de problèmes auxiliaires sera très utilisée par la suite.

Définition 1.2.1. *Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$. Une fonction $z_f \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible de l'équation* (1.1) *si*

$$(\nabla z_f, \nabla \phi) + (b z_f, \phi) = (f, \phi) \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Proposition 1.2.2. *Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$ avec $b \geq 0$. Alors l'équation (1.1) admet une solution faible unique dans $z_f \in H_0^1(\Omega)$. De plus, l'estimation suivante est satisfaite*

$$|z_f|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_P \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

où C_P est la constante de Poincaré.

Démonstration. La formulation variationnelle associée peut-être écrite sous la forme

$$a(z_f, \phi) = F(\phi) \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \tag{1.2}$$

où a est la forme bilinéaire définie par

$$a(\zeta, \phi) = (\nabla \zeta, \nabla \phi) + (b\zeta, \phi) \qquad \forall \zeta, \phi \in H_0^1(\Omega) \tag{1.3}$$

et où F est la forme linéaire définie par

$$F(\phi) = (f, \phi) \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Vérifions que a est continue dans $H_0^1(\Omega)$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité de Poincaré, il vient que

$$\begin{aligned}
|a(\zeta, \phi)| &= |(\nabla \zeta, \nabla \phi) + (bw, \phi)| \\
&\leq \|\nabla \zeta\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)} + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|\zeta\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq (1 + C_P^2 \|b\|_{L^\infty(\Omega)}) |\zeta|_{H_0^1(\Omega)} |\phi|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall \zeta, \phi \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Prouvons à présent que a est coercive dans $H_0^1(\Omega)$. Prenant en compte le fait que $b \geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
a(\phi, \phi) &= (\nabla \phi, \nabla \phi) + (b\phi, \phi) = \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + (b\phi, \phi) \\
&= |\phi|_{H_0^1(\Omega)}^2 + (b\phi, \phi) \\
&\geq |\phi|_{H_0^1(\Omega)}^2 \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant l'inégalité de Poincaré et des arguments classiques, on obtient

$$|F(\phi)| = |(f, \phi)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|f\|_{L^2(\Omega)} |\phi|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

montrant ainsi la continuité de F. Les conditions d'application du théorème de Lax-Milgram étant satisfaites, nous déduisons que l'équation (1.1) admet une solution faible unique $z_f \in H_0^1(\Omega)$.

Pour obtenir l'estimation a priori correspondante, posons $\phi = z_f$ dans la formulation (1.2) et utilisant la coercivité de a et la continuité de F, nous obtenons

$$|z_f|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq a(z_f, z_f) = F(z_f) \leq C_P \|f\|_{L^2(\Omega)} |z_f|_{H_0^1(\Omega)},$$

et donc

$$|z_f|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_P \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ceci termine la démonstration. □

Comme nous le verrons dans la proposition 1.2.4 ci-après, la solution faible de (1.1) est plus régulière que $H_0^1(\Omega)$. Ce résultat est une conséquence des résultats classiques énoncés dans le lemme suivant.

Lemme 1.2.3. *L'opérateur $-\Delta$ est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. De plus, la semi-norme $|\cdot|_{H^2(\Omega)} = \|\Delta\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, équivalente à la norme usuelle $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$. Plus précisement, il existe deux constantes positives C_1 et C_2 tel que*

$$\|\phi\|_{H^2(\Omega)} \leq C_1 |\phi|_{H^2(\Omega)} \leq C_2 \|\phi\|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \tag{1.4}$$

Démonstration. Rappelons en premier lieu que pour $g \in L^2(\Omega)$, le problème

$$\begin{cases} -\Delta\phi = g & \text{dans } \Omega, \\ \phi = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.5}$$

admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et que celle-ci satisfait l'estimation suivante

$$\|\phi\|_{H^2(\Omega)} \leq C_1 \|g\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.6}$$

où C_1 est une constante positive indépendante de g. Une conséquence directe est que l'opérateur $-\Delta$ est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. De plus, la semi-norme $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$ est une norme sur $H^2(\Omega)$, équivalente à la norme usuelle $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$. En effet, remarquant que n'importe quelle fonction $\psi \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ est solution de (1.5) avec $g = -\Delta\psi$, nous déduisons grâce à (1.6) que

$$\|\psi\|_{H^2(\Omega)} \leq C_1 |\psi|_{H^2(\Omega)} \leq C_1\sqrt{2} \|\psi\|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall \psi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Ceci termine la preuve. □

Proposition 1.2.4. *Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$ avec $b \geq 0$. Alors la solution faible z_f de l'équation* (1.1) *appartient à $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. De plus, on a l'estimation suivante*

$$\|z_f\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de b et de f.

Démonstration. D'après la proposition 1.2.2, l'équation (1.1) admet une solution faible $z_f \in H_0^1(\Omega)$. De plus, il est clair que cette solution satisfait (1.5) avec $g = f - bz_f \in L^2(\Omega)$. Il vient alors que $z_f \in H^2(\Omega)$ et grâce à (1.6), l'inégalité de Poincaré et l'estimation donnée dans la proposition 1.2.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|z_f\|_{H^2(\Omega)} &\leq C_1 \|f - bz_f\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|z_f\|_{L^2(\Omega)}\right) \\ &\leq C_1 \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C_P \|b\|_{L^\infty(\Omega)} |z_f|_{H_0^1(\Omega)}\right) \\ &\leq C_1 \left(1 + C_P^2 \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \|f\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

1.2.2 Équation avec condition aux limites de type Dirichlet non homogène

Cette section est dévolue à la solvabilité de l'équation d'état (1). Nous allons commencer par étudier le cas où $u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ et utiliser la méthode de transposition pour montrer l'existence d'une *solution très faible* au problème (1) dans $L^2(\Omega)$. Nous analysons ensuite le cas plus régulier où $u \in H^{1/2}(\Gamma)$ et montrons l'existence d'une *solution faible* classique dans $H^1(\Omega)$. Combinant les résultats ainsi obtenus avec des arguments d'interpolation, nous montrons que dans le cas intermédiaire où $u \in L^2(\Gamma)$ la *solution très faible* définie par transposition appartient à $H^{1/2}(\Omega)$.

Considérons alors le premier cas.

Définition 1.2.5. *Soit $u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$. Une fonction $y_u \in L^2(\Omega)$ est une solution très faible de l'équation* (1) *si*

$$(y_u, -\Delta\phi + b\phi) = -\left\langle u, \frac{\partial\phi}{\partial n}\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)} \qquad \forall\phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \tag{1.7}$$

Nous avons alors le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Proposition 1.2.6. *Soit $u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$ satisfaisant $b \geq 0$. Alors l'équation* (1) *admet une unique solution très faible $y_u \in L^2(\Omega)$. De plus, l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|y_u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\|u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)},$$

où C est une constante indépendante de b et de u.

Démonstration. La preuve sera divisée en deux parties.

Partie 1. Commençons par le cas $b = 0$. Prenant en compte le lemme 1.2.3, il est facile de voir que y_u est solution de (1) si, et seulement si, $\zeta_u = (-\Delta)^{-1} y_u$ est solution du problème suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } \zeta_u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \quad \text{tel que} \\ a_0(\zeta_u, \phi) = F(\phi) \qquad \forall\phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \end{cases} \tag{1.8}$$

où a_0 est la forme bilinéaire définie par

$$a_0(\zeta, \phi) = (\Delta\zeta, \Delta\phi),$$

et où F est la forme linéaire définie par

$$F(\phi) = -\left\langle u, \frac{\partial\phi}{\partial n}\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Vérifions que a_0 est continue dans $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. En effet, de simples calculs montrent que

$$\begin{aligned} |a_0(\zeta, \phi)| &= |(\Delta\zeta, \Delta\phi)| \leq \|\Delta\zeta\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta\phi\|_{L^2(\Omega)} \\ &= |\zeta|_{H^2(\Omega)} |\phi|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\zeta, \phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \end{aligned}$$

De l'autre côté, on a

$$a_0(\phi,\phi) = \|\Delta\phi\|^2_{L^2(\Omega)} = |\phi|^2_{H^2(\Omega)}$$

et par conséquent a_0 est coercive dans $H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. Finalement, utilisant le théorème de trace dans $H^2(\Omega)$ et prenant en compte (1.4), nous obtenons

$$\begin{aligned}|F(\phi)| &= \left| -\left\langle u, \tfrac{\partial\phi}{\partial n}\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)}\right| \\ &\le \|u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \left\|\tfrac{\partial\phi}{\partial n}\right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\le C\,\|u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\,\|\phi\|_{H^2(\Omega)} \\ &\le C\,\|u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\,|\phi|_{H^2(\Omega)}\,,\end{aligned}$$

ce qui montre que F est continue dans $H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. Les conditions d'application du théorème de Lax-Milgram étant satisfaites, nous déduisons que le problème (1.8) admet une solution unique $\zeta_u \in H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. Posant $\phi = \zeta_u$ dans (1.8) et utilisant la coercivité de a_0 et la continuité de F, nous obtenons

$$|\zeta_u|^2_{H^2(\Omega)} \le a_0(\zeta_u,\zeta_u) = F(\zeta_u) \le C\,\|u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\,|\zeta_u|_{H^2(\Omega)}$$

et donc

$$|\zeta_u|_{H^2(\Omega)} \le C\,\|u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\,.$$

L'estimation correspondante à y_u suit alors en remarquant que $\|y_u\|_{L^2(\Omega)} = |\zeta_u|_{H^2(\Omega)}$.

Partie 2. Considérons maintenant le cas $b \neq 0$. D'après la première partie, le problème

$$-\,(y_1,\Delta\phi) = -\left\langle u, \tfrac{\partial\phi}{\partial n}\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)} \qquad \forall\phi \in H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega), \tag{1.9}$$

admet une solution unique $y_1 \in L^2(\Omega)$ et que

$$\|y_1\|_{L^2(\Omega)} \le C\,\|u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\,. \tag{1.10}$$

Vu que $b \ge 0$ et que $by_1 \in L^2(\Omega)$, nous déduisons grâce à la proposition 1.2.2 que le problème

$$\begin{cases}-\Delta y_2 + by_2 = -by_1 & \text{dans } \Omega,\\ y_2 = 0 & \text{sur } \Gamma,\end{cases}$$

admet une solution faible unique $y_2 \in H^1_0(\Omega)$ et qu'elle satisfait

$$\|y_2\|_{L^2(\Omega)} \le C_P\,|y_2|_{H^1_0(\Omega)} \le C_P^2\,\|by_1\|_{L^2(\Omega)} \le C_P^2\,\|b\|_{L^\infty(\Omega)}\,\|y_1\|_{L^2(\Omega)}\,. \tag{1.11}$$

La formule de Green montre alors que y_2 est une solution très faible du problème précédent, i.e.

$$(y_2, -\Delta\phi + b\phi) = -\,(by_1,\phi) \qquad \forall\phi \in H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega). \tag{1.12}$$

Combinant alors (1.9) et (1.12), il vient que $y_u = y_1 + y_2 \in L^2(\Omega)$ satisfait

$$(y_u, -\Delta\phi + b\phi) = -\left\langle u, \frac{\partial\phi}{\partial n}\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)} \qquad \forall\phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

En d'autre termes, y_u est une solution très faible de (1). L'estimation correspondante vient en combinant (1.10) et (1.11).

Afin de conclure la démonstration, il faut montrer que la solution ainsi obtenue est unique. Supposons qu'il existe une deuxième solution χ_u. Alors $y = y_u - \chi_u$ satisfait

$$(y, -\Delta\phi + b\phi) = 0 \qquad \forall\phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Choisissant $\phi = z_y \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, la solution du problème (1.1) correspondant à $f = y$, on obtient

$$\|y\|^2_{L^2(\Omega)} = 0,$$

et donc $y = 0$, i.e. $y_u = \chi_u$. □

Plus de régularité sur le contrôle, nous permet de considérer une formulation variationnelle plus classique et de définir une solution au sens faible.

Définition 1.2.7. *Soit $u \in H^{1/2}(\Gamma)$. Une fonction $y_u \in H^1(\Omega)$ est une solution faible de l'équation* (1) *si*

$$\begin{cases} y_u|_\Gamma = u \\ a\,(y_u, \phi) = 0 \qquad \forall\phi \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{1.13}$$

où a est la forme bilinéaire définie par (1.3).

Utilisant la formule de Green, nous pouvons voir que si une solution faible existe au sens de la définition 1.2.7, alors c'est une solution très faible au sens de la définition 1.2.5.

Proposition 1.2.8. *Soit $u \in H^{1/2}(\Gamma)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$ satisfaisant $b \geq 0$. Alors l'équation* (1) *admet une solution faible unique $y_u \in H^1(\Omega)$. De plus, les estimations suivantes sont satisfaites*

$$\|y_u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \tag{1.14}$$

$$\|y_u\|_{H^{1/2}(\Omega)} \leq C\left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\|u\|_{L^2(\Gamma)}, \tag{1.15}$$

où C est une constante indépendante de b et de u.

Démonstration. La preuve est divisée en trois parties. Dans la première, nous montrons l'existence d'une solution faible et établissons une estimation correspondante dans $H^1(\Omega)$. L'unicité de la solution est traité dans la deuxième partie. La dernière partie est dévolue à l'estimation de la solution dans $H^{1/2}(\Omega)$.

Partie 1. Grâce au théorème de relèvement (voir le théorème de traces dans $H^1(\Omega)$), nous savons qu'il existe $U \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} U_{|\Gamma} = u \\ \|U\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} . \end{cases}$$

Considérons alors le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \psi_u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(\psi_u, \phi) = -a(U, \phi) \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{1.16}$$

où a est la forme bilinéaire définie par (1.3). Nous avons déja vérifié que a continue et coercive sur $H_0^1(\Omega)$ (cf. la démonstration de la proposition 1.2.2). Utilisant les mêmes arguments, on obtient

$$\begin{aligned} |-a(U, \phi)| &\leq |(\nabla U, \nabla \phi)| + |(bU, \phi)| \\ &\leq \|\nabla U\|_{L^2(\Omega)} |\phi|_{H_0^1(\Omega)} + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|U\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(\|\nabla U\|_{L^2(\Omega)} + C_P \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|U\|_{L^2(\Omega)} \right) |\phi|_{H_0^1(\Omega)} , \end{aligned}$$

ce qui montre que la forme linéaire $\phi \mapsto -a(U, \phi)$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$. Les conditions d'application du théorème de Lax-Milgram étant satisfaites, nous déduisons que le problème (1.16) admet une solution faible unique $\psi_u \in H_0^1(\Omega)$ et que

$$|\psi_u|_{H_0^1(\Omega)} \leq \left(\|\nabla U\|_{L^2(\Omega)} + C_P \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|U\|_{L^2(\Omega)} \right) \leq C \left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|U\|_{H^1(\Omega)} .$$

Il est alors clair que $y_u = \psi_u + U \in H^1(\Omega)$ est une solution faible de (1) (au sens de la définition 1.2.7) et que

$$\begin{aligned} \|y_u\|_{H^1(\Omega)} = \|\psi_u + U\|_{H^1(\Omega)} &\leq \|\psi_u\|_{H^1(\Omega)} + \|U\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \left(1 + C_P^2\right)^{1/2} |\psi_u|_{H_0^1} + \|U\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C \left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|U\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C \left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} , \end{aligned}$$

d'où l'estimation.

Partie 2. Supposons qu'il existe une deuxième solution χ_u. Alors $y = y_u - \chi_u \in H_0^1(\Omega)$ et satisfait

$$a(y, \phi) = 0 \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Choisissant $\phi = y$, utilisant la coercivité de a et l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\tfrac{1}{C_P^2} \|y\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq |y|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq a(y, y) = 0,$$

et donc $y = 0$, i.e. $y_u = \chi_u$.

Partie 3. Nous allons estimer y_u dans $H^{1/2}(\Omega)$.

Soit $g \in L^2(\Omega)$ et soit $z_g \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ la solution de l'équation (1.1) correspondante. Posant $\phi = z_g$ dans la formulation très faible (1.7), il vient que

$$(y_u, g) = -\left\langle u, \frac{\partial z_g}{\partial n} \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} = -\left(u, \frac{\partial z_g}{\partial n} \right)_\Gamma. \tag{1.17}$$

Nous savons que $H^{1/2}(\Omega) = H_0^{1/2}(\Omega)$ (cf. [11, Théorème 1.4.2.4]) et donc $(H^{1/2}(\Omega))' = H^{-1/2}(\Omega)$. Utilisant le fait que $L^2(\Omega)$ soit dense dans $H^{-1/2}(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|y_u\|_{H^{1/2}(\Omega)} &= \sup_{\substack{g \in H^{-1/2}(\Omega) \\ \|g\|_{H^{-1/2}(\Omega)} = 1}} \langle g, y_u \rangle_{H^{-1/2}(\Omega), H^{1/2}(\Omega)} \\
&= \langle g_0, y_u \rangle_{H^{-1/2}(\Omega), H^{1/2}(\Omega)} \\
&= \lim_k \langle g_k, y_u \rangle_{H^{-1/2}(\Omega), H^{1/2}(\Omega)} = \lim_k (g_k, y_u) \\
&= \lim_k \left(-\left(u, \frac{\partial z_{g_k}}{\partial n} \right)_\Gamma \right) \\
&\le \lim_k \left(\|u\|_{L^2(\Gamma)} \left\| \frac{\partial z_{g_k}}{\partial n} \right\|_{L^2(\Gamma)} \right).
\end{aligned}$$

De l'autre côté, grâce au Lemme A3 dans [5], on a

$$\left\| \frac{\partial z_{g_k}}{\partial n} \right\|_{L^2(\Gamma)} \le C \|z_{g_k}\|_{H^{3/2}(\Omega)} \le C \left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|g_k\|_{H^{-1/2}(\Omega)},$$

et donc

$$\begin{aligned}
\|y_u\|_{H^{1/2}(\Omega)} &\le \lim_k \left(C \left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|u\|_{L^2(\Gamma)} \|g_k\|_{H^{-1/2}(\Omega)} \right) \\
&= C \left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|u\|_{L^2(\Gamma)} \left(\lim_k \|g_k\|_{H^{-1/2}(\Omega)} \right) \\
&= C \left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|u\|_{L^2(\Gamma)},
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Remarque 1.2.9. *L'injection de* $H^1(\Omega)$ *dans* $H^{1/2}(\Omega)$ *étant continue, en prenant en compte la première estimation énoncée dans proposition* 1.2.8*, nous obtenons*

$$\|y_u\|_{H^{1/2}(\Omega)} \le C \|y_u\|_{H^1(\Omega)} \le C \left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

La deuxième estimation dans la proposition 1.2.8 *est plus précise dans le sens où elle fait intervenir la norme* $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma)}$ *au lieu de* $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$*. Ce détail sera important dans la preuve du résultat suivant.*

Nous nous intéressons à présent au cas où le contrôle u possède une régularité intermédiaire (typiquement $u \in L^2(\Gamma)$) et montrons que la solution très faible correspondante appartient à l'espace intermédiaire $H^{1/2}(\Omega)$.

Proposition 1.2.10. *Soit $u \in L^2(\Gamma)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$ satisfaisant $b \geq 0$. Alors la solution très faible de* (1) *appartient à $H^{1/2}(\Omega)$. De plus, l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|y_u\|_{H^{1/2}(\Omega)} \leq C\left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\|u\|_{L^2(\Gamma)},$$

où C est une constante indépendante de b et de u.

Démonstration. L'idée est de combiner le résultat précédent et des arguments de densité. Soit donc $u \in L^2(\Gamma)$. Il existe $u_k \in H^{1/2}(\Gamma)$ tel que $(u_k)_k$ converge vers u dans $L^2(\Gamma)$. D'après (1.15), la solution de (1) associée à u_k satisfait

$$\|y_{u_k}\|_{H^{1/2}(\Omega)} \leq C\left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\|u_k\|_{L^2(\Gamma)}, \tag{1.18}$$

et

$$\|y_{u_k} - y_{u_m}\|_{H^{1/2}(\Omega)} = \|y_{u_k - u_m}\|_{H^{1/2}(\Omega)} \leq C\left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\|u_k - u_m\|_{L^2(\Gamma)}.$$

La suite $(u_k)_k$ étant convergente dans $L^2(\Omega)$ est une suite de Cauchy dans ce même espace. Grâce à l'inégalité précédente, nous en déduisons que la suite $(y_{u_k})_k$ est une suite de Cauchy dans $H^{1/2}(\Omega)$. Elle y converge donc vers un élément $y \in H^{1/2}(\Omega)$ et pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}(y, -\Delta\phi + b\phi) &= \lim_k\,(y_{u_k}, -\Delta\phi + b\phi)\\ &= \lim_k -\left(u_k, \frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_\Gamma\\ &= -\left(u, \frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_\Gamma,\end{aligned}$$

et donc $y = y_u$. L'estimation est obtenue en passant à la limite dans (1.18). □

Nous finissons cette section par l'étude du cas où le contrôle frontière est borné. Utilisant le principe du maximum pour les solutions faibles de (1.1), nous montrons que la solution très faible de (1) appartient à $L^\infty(\Omega)$ et établissons une estimation correspondante.

Proposition 1.2.11. *Soit $u \in L^\infty(\Gamma)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$ satisfaisant $b \geq 0$. Alors la solution très faible de* (1) *appartient à $L^\infty(\Omega)$. De plus, l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|y_u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Gamma)},$$

où C est une constante indépendante de b et de u.

Démonstration. Vu que $u \in L^\infty(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$, nous savons déjà que la solution très faible appartient à $H^{1/2}(\Omega)$, et donc à $L^2(\Omega)$. Posons $\kappa = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$, $y_\kappa = y_u - \kappa$ et $y_\kappa^+ = \max(y_\kappa, 0)$. Remplaçant dans la formulation variationnelle correspondante à y_u, il vient que

$$(y_\kappa, -\Delta\phi + b\phi) + (\kappa, -\Delta\phi + b\phi) = -\left(u, \frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_\Gamma \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Grâce à la formule de Green, on a

$$(\kappa, \Delta\phi) = -\left(\kappa, \frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_\Gamma$$

et donc

$$(y_\kappa, -\Delta\phi + b\phi) + (\kappa, b\phi) = \left(\kappa - u, \frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_\Gamma \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Pour $g \in L^2(\Omega)$, soit z_g la solution de (1.1) correspondante. De l'identité précédente, nous déduisons que

$$(y_\kappa, g) + (\kappa, bz_g) = \left(\kappa - u, \frac{\partial z_g}{\partial n}\right)_\Gamma \qquad \forall g \in L^2(\Omega).$$

Si $g \geq 0$, alors le principe du maximum classique (voir [13]) implique que

$$z_g \geq 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \frac{\partial z_g}{\partial n} \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Par conséquent, prenant en compte le fait que $b \geq 0$ et que $\kappa - u \geq 0$, il vient que

$$(y_\kappa, g) \leq (y_\kappa, g) + (\kappa, bz_g) = \left(\kappa - u, \frac{\partial z_g}{\partial n}\right)_\Gamma \leq 0 \qquad \forall g \in L^2(\Omega) \text{ tel que } g \geq 0.$$

Choisissant $g = y_\kappa^+ \geq 0$ et remarquant que $y_\kappa\, y_\kappa^+ = (y_\kappa^+)^2$, on obtient alors

$$0 \leq \left\|y_\kappa^+\right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \left(y_\kappa, y_\kappa^+\right) \leq 0,$$

et par conséquent

$$y_\kappa^+ \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y_u \leq \kappa.$$

Des arguments identiques nous permettent de montrer que $-\kappa \leq y_u$. $\square$

1.3 Existence de contrôle optimal

Le but de cette section est d'établir l'existence d'un contrôle optimal au problème (P).

Théorème 1.3.1. *Le problème (P) admet au moins une solution $\bar{u}$.*

Démonstration. Soit $(u_k)_k \subset U_{ad}$ une suite minimisante de (P). Elle est uniformément bornée dans U_{ad} et il existe alors une sous-suite, encore indexée par k, et $\bar{u} \in L^2(\Gamma)$ tel que

$$u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{u} \qquad \text{faiblement dans } L^2(\Gamma).$$

De plus, U_{ad} étant un sous-ensemble convexe fermé de $L^2(\Gamma)$ est faiblement fermé et donc $\bar{u} \in U_{ad}$. De l'autre côté, grâce à la proposition 1.2.10, on a

$$\|y_{u_k}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq C\left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\|u_k\|_{L^2(\Gamma)},$$

et donc $(y_{u_k})_k$ est uniformément bornée dans $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$. Il existe alors une sous-suite, encore indexée par k, et $y \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ tel que

$$y_{u_k} \longrightarrow y \qquad \text{faiblement dans } H^{\frac{1}{2}}(\Omega).$$

L'injection de $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ étant compacte (cf. Théorème 1.4.3.2 dans [8]), nous déduisons que

$$y_{u_k} \longrightarrow y \qquad \text{fortement dans } L^2(\Omega).$$

Prenant en compte ces résultats de convergence et passant à la limite dans la formulation très faible correspondante à y_{u_k},

$$(y_{u_k}, -\Delta\phi + b\phi) = -\left(u_k, \frac{\partial\phi}{\partial n}\right) \qquad \forall\phi \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

on obtient

$$(y, -\Delta\phi + b\phi) = -\left(\bar{u}, \frac{\partial\phi}{\partial n}\right) \qquad \forall\phi \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

autrement dit $y = \bar{y}$. Finalement, utilisant la semi-continuité inférieure de $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma)}$ et la convergence de (y_{u_k}) vers $\bar{y}$ dans $L^2(\Omega)$, nous déduisons que

$$\|\bar{u}\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq \liminf_{k\to+\infty} \|u_k\|^2_{L^2(\Gamma)},$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} \|y_{u_k} - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\bar{y} - y_d\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Combinant ces résultats de convergence, et prenant en compte la définition de J, il vient que

$$J(\bar{u}) \leq \liminf_{k\to\infty} J(u_k) = \inf(P).$$

Ceci montre que $\bar{u} \in U_{ad}$ est un contrôle optimal de (P). □

1.4 Conditions d'optimalité

1.4.1 Différentiabilité du coût par rapport à la variable contrôle

Proposition 1.4.1. *Soit $u \in L^2(\Gamma)$ et soit $y_u \in L^2(\Omega)$ la solution très faible correspondante. Alors*

$$\begin{aligned} J'(u)v &= (y_u - y_d, y_v) + \lambda\,(u, v)_\Gamma \\ &= \left(-\tfrac{\partial p_u}{\partial n} + \lambda u, v\right) \qquad \forall v \in L^2(\Gamma), \end{aligned}$$

où $p_u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ est la solution de l'équation adjointe

$$\begin{cases} -\Delta p + bp = y_u - y_d & \text{dans } \Omega, \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{1.19}$$

Démonstration. Soit $v \in L^2(\Gamma)$ et soit $u_\rho = u + \rho v$, $\rho > 0$. De simples calculs montrent que

$$\begin{aligned} &J(u_\rho) - J(u) \\ &= \tfrac{1}{2}\left\|y_{u_\rho} - y_d\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{\lambda}{2}\left\|u_\rho\right\|^2_{L^2(\Gamma)} - \tfrac{1}{2}\left\|y_u - y_d\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \tfrac{\lambda}{2}\left\|u\right\|^2_{L^2(\Gamma)} \\ &= \tfrac{1}{2}\left\|y_{u_\rho} - y_u + y_u - y_d\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{\lambda}{2}\left\|u_\rho - u + u\right\|^2_{L^2(\Gamma)} \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\left\|y_u - y_d\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \tfrac{\lambda}{2}\left\|u\right\|^2_{L^2(\Gamma)} \\ &= \tfrac{1}{2}\left\|y_{u_\rho} - y_u\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(y_{u_\rho} - y_u, y_u - y_d\right) + \tfrac{\lambda}{2}\left\|u_\rho - u\right\|^2_{L^2(\Gamma)} + \lambda(u_\rho - u, u)_\Gamma. \end{aligned}$$

La linéarité de l'équation d'état implique que $y_{u_\rho} = y_u + \rho y_v$ et donc

$$\tfrac{J(u_\rho) - J(u)}{\rho} = \tfrac{\rho}{2}\left\|y_v\right\|^2_{L^2(\Omega)} + (y_v, y_u - y_d) + \tfrac{\lambda\rho}{2}\left\|v\right\|^2_{L^2(\Gamma)} + \lambda(v, u)_\Gamma.$$

Passant à la limite, nous obtenons

$$J'(u)v = \lim_{\rho \to 0^+} \tfrac{J(u_\rho) - J(u)}{\rho} = (y_v, y_u - y_d) + \lambda\,(v, u)_\Gamma\,.$$

Considérons maintenant l'équation adjointe (1.19). Prenant en compte le fait que $y_u - y_d \in L^2(\Omega)$, et grâce à la proposition 1.2.4, il vient que (1.19) admet une solution unique $p_u \in H^2(\Omega)$. Multipliant l'équation $(1.19)_1$ par y_v et intégrant, on obtient

$$(-\Delta p_u + bp_u, y_v) = (y_u - y_d, y_v) \tag{1.20}$$

De l'autre côté, choisissant p_u comme fonction test dans la formulation variationnelle correspondant à y_v nous donne

$$(y_v, -\Delta p_u + bp_u) = -\left(v, \tfrac{\partial p_u}{\partial n}\right)_\Gamma. \tag{1.21}$$

Combinant (1.20) et (1.21), on obtient finalement que

$$(y_u - y_d, y_v) = -\left(v, \tfrac{\partial p_u}{\partial n}\right)_\Gamma$$

et donc

$$J'(u)v = \left(-\frac{\partial p_u}{\partial n} + \lambda u, v\right)_\Gamma \qquad \forall v \in L^2(\Gamma).$$

Ceci termine la preuve. □

Proposition 1.4.2. *Soit $u \in L^2(\Gamma)$ et soit $y_u \in L^2(\Omega)$ la solution très faible correspondante. Alors*

$$J"(w)uv = (y_u, y_v) + \lambda\,(u, v)_\Gamma \qquad \forall u, v, w \in L^2(\Gamma). \tag{1.22}$$

De plus,

$$\big(J'(u) - J'(v)\big)\,(u - v) = J"(w)\,(u - v)^2 \qquad \forall u, v, w \in L^2(\Gamma). \tag{1.23}$$

Démonstration. Soient $w, v \in L^2(\Gamma)$ et posons $w_\rho = w + \rho v$. Utilisant la proposition 1.4.1, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{J'(w_\rho)u - J'(w)u}{\rho} &= \frac{1}{\rho}\left(\left(y_{w_\rho} - y_d, y_u\right) + \lambda\,(w_\rho, u)_\Gamma - (y_w - y_d, y_u) - \lambda\,(w, u)_\Gamma\right)\\
&= \frac{1}{\rho}\left((y_w + \rho y_v - y_d, y_u) + \lambda\,(w + \rho v, u)_\Gamma - (y_w - y_d, y_u) - \lambda\,(w, u)_\Gamma\right)\\
&= (y_v, y_u) + \lambda\,(v, u)_\Gamma\,,
\end{aligned}$$

et donc

$$J"(w)uv = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{J'(u_\rho)v - J'(u)v}{\rho} == (y_u, y_v) + \lambda\,(w, v)_\Gamma\,.$$

Reste à prouver (1.23). Utilisant la proposition 1.4.1, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left(J'(u) - J'(v)\right)(u - v) &= J'(u)(u - v) - J'(v)(u - v)\\
&= (y_u - y_d, y_{u-v}) + \lambda\,(u, u - v)_\Gamma\\
&\quad - (y_v - y_d, y_{u-v}) - \lambda\,(v, u - v)_\Gamma\\
&= (y_u - y_v, y_{u-v}) + \lambda\,(u - v, u - v)_\Gamma\\
&= (y_{u-v}, y_{u-v}) + \lambda\,\|u - v\|^2_{L^2(\Gamma)}\\
&= \|y_{u-v}\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda\,\|u - v\|^2_{L^2(\Gamma)}\,,
\end{aligned}$$

et la conclusion vient de (1.22). □

Remarque 1.4.3. *Observons que l'expression de $J"$ dans* (1.22) *et* (1.23) *ne dépendent pas de w. De plus,*

$$J"(w)v^2 \geq \lambda\,\|v\|^2_{L^2(\Gamma)} \qquad \forall v, w \in L^2(\Gamma).$$

1.4.2 Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité

Nous sommes en mesure d'établir les conditions nécessaires d'optimalité.

Théorème 1.4.4. *Si $\bar{u} \in U_{ad}$ est un contrôle optimal de (P), alors il existe $\bar{y} \in H^{1/2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $\bar{p} \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ satisfaisant*

Equation d'état

$$\begin{cases} -\Delta \bar{y} + b\bar{y} = 0 & \textit{dans } \Omega, \\ \bar{y} = \bar{u} & \textit{sur } \Gamma, \end{cases}$$

Equation adjointe

$$\begin{cases} -\Delta \bar{p} + b\bar{p} = \bar{y} - y_d & \textit{dans } \Omega, \\ \bar{p} = 0 & \textit{sur } \Gamma, \end{cases}$$

Condition d'optimalité pour le contrôle

$$\left(-\tfrac{\partial \bar{p}}{\partial n} + \lambda \bar{u}, u - \bar{u}\right)_\Gamma \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}. \tag{1.24}$$

Démonstration. Par définition, nous avons

$$J(\bar{u}) \leq J(u) \qquad \forall u \in U_{ad}.$$

Soit $u \in U_{ad}$ et considérons la perturbation convexe $u_\rho = \bar{u} + \rho(u - \bar{u})$, $\rho \in]0,1[$. Il est clair que $u_\rho \in U_{ad}$ et donc

$$\tfrac{J(u_\rho) - J(\bar{u})}{\rho} \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}.$$

Par passage à la limite, nous obtenons

$$J'(\bar{u})(u - \bar{u}) = \lim_{\rho \to 0^+} \tfrac{J(u_\rho) - J(\bar{u})}{\rho} \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad},$$

et la conclusion est alors une conséquence directe de la proposition 1.4.1. □

Le coût J étant quadratique et l'équation d'état étant linéaire, les conditions nécessaires d'optimalité énoncées dans le théorème précédent sont aussi suffisantes. Plus précisement, nous avons le résultat suivant.

Théorème 1.4.5. *Si $\bar{u} \in U_{ad}$ satisfait* (1.24)*, alors $\bar{u}$ est un contrôle optimal de* (P)*.*

Démonstration. Grâce aux propositions 1.4.1 et 1.4.2, on a

$$J'(\bar{u})(u - \bar{u}) = (\bar{y} - y_d, y_u - \bar{y}) + \lambda\,(\bar{u}, u - \bar{u})_\Gamma \qquad \forall u \in L^2(\Gamma),$$

et

$$\begin{aligned} J\text{"}(w)(u - \bar{u})^2 &= \|y_{u-\bar{u}}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u - \bar{u}\|^2_{L^2(\Gamma)} \\ &= \|y_u - \bar{y}\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda\,\|u - \bar{u}\|^2_{L^2(\Gamma)} \qquad \forall u, w \in L^2(\Gamma). \end{aligned}$$

Utilisant alors la définition de J, nous pouvons facilement montrer que

$$\begin{aligned} J(u) &= J(\bar{u}) + J'(\bar{u})\,(u - \bar{u}) + \tfrac{1}{2}\,J\text{"}(w)\,(u - \bar{u})^2 \\ &\geq J(\bar{u}) + J'(\bar{u})\,(u - \bar{u}) \qquad \forall u \in L^2(\Gamma). \end{aligned}$$

Or si $\bar{u} \in U_{ad}$ satisfait (1.24), alors

$$J'(\bar{u})(u - \bar{u}) \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}$$

et par conséquent

$$J(u) \geq J(\bar{u}) \qquad \forall u \in U_{ad},$$

autrement dit, $\bar{u}$ est un contrôle optimal. □

Théorème 1.4.6. *Le contrôle optimal de (P) est unique.*

Démonstration. Supposons qu'il existe deux contrôles optimaux. Alors d'après (1.24), on a

$$J'(\bar{u}_1)\,(\bar{u}_2 - \bar{u}_1) \geq 0 \quad \text{et} \quad J'(\bar{u}_2)\,(\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \geq 0.$$

Ainsi

$$\left(J'(\bar{u}_1) - J'(\bar{u}_2)\right)(\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \leq 0.$$

De l'autre côté, utilisant (1.22) et (1.23), nous avons

$$\lambda \left\|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\right\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq \left(J'(\bar{u}_1) - J'(\bar{u}_2)\right)(\bar{u}_1 - \bar{u}_2).$$

Combinant les deux dernières inégalités, nous déduisons que

$$\lambda \left\|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\right\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq 0$$

et donc $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ □

L'objet du résultat suivant est de montrer que dans le cas particulier de l'ensemble des contrôles admissibles que l'on considère, le contrôle optimal peut-être caractérisé d'une manière simple et naturelle.

Théorème 1.4.7. *Soit $\bar{u} \in U_{ad}$ le contrôle optimal de (P). Alors*

$$\bar{u}(s) = Proj_{[\alpha,\beta]}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s)\right) = \max\left(\alpha, \min\left(\beta, \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s)\right)\right).$$

De plus, $\bar{u} \in H^{1/2}(\Gamma)$ et $\bar{y} \in H^1(\Omega)$.

La démonstration est basée sur la lemme suivant.

Lemme 1.4.8. *Supposons que les hypothèses du théorème 1.4.4 sont satisfaites et soit $\bar{u}$ un contrôle optimal de (P). Alors*

(i) $-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(x) + \lambda\alpha \geq 0$ *si et seulement si* $\bar{u}(x) = \alpha$.

(ii) $-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(x) + \lambda\beta \leq 0$ *si et seulement si* $\bar{u}(x) = \beta$.

(iii) *Si* $-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(x) + \lambda\alpha < 0 < -\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(x) + \lambda\beta$ *alors* $-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(x) + \lambda\bar{u}(x) = 0$.

Démonstration. Soit $v \in [\alpha, \beta]$ et soit $s_0 \in \Gamma$ un point de Lebesgue de la fonction $\left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} + \lambda \bar{u}\right)(v - \bar{u})$. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit u_k la perturbation définie par

$$u_k(s) = \begin{cases} v & \text{si } s \in \Gamma_k(s_0), \\ \bar{u}(s) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\Gamma_k(s_0) = \left\{s \in \Gamma \mid |s - s_0| \leq \frac{1}{k}\right\}$. Il est clair que $u_k \in U_{ad}$. Prenant en compte le théorème 1.4.4, il vient que

$$0 \leq \int_\Gamma \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda \bar{u}(s)\right)(u_k(s) - \bar{u}(s))\, ds = \int_{\Gamma_k(s_0)} \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda \bar{u}(s)\right)(v - \bar{u}(s))\, ds$$

et donc

$$\frac{1}{|\Gamma_k(s_0)|} \int_{\Gamma_k(s_0)} \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda \bar{u}(s)\right)(v - \bar{u}(s))\, ds \geq 0.$$

Passant alors à la limite sur k, et utilisant la définition d'un point de Lebesgue, nous obtenons

$$\left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s_0) + \lambda \bar{u}(s_0)\right)(v - \bar{u}(s_0)) \geq 0.$$

Rappelant que l'ensemble des points de Lebesgue est de mesure pleine, nous déduisons que pour presque tout $s \in \Gamma$, on a

$$\left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda \bar{u}(s)\right)(v - \bar{u}(s)) \geq 0 \quad \forall v \in [\alpha, \beta]. \tag{1.25}$$

Considérons maintenant les différentes assertions.

(i) Si $\bar{u}(s) = \alpha$, alors d'après (1.25), il vient que

$$\left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda \alpha\right)(v - \alpha) \geq 0 \qquad \forall v \in [\alpha, \beta]$$

et donc $\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda \alpha \geq 0$.

Pour montrer la réciproque, commençons par observer que

$$\left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda \bar{u}(s)\right)(\alpha - \bar{u}(s)) \leq \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda \alpha\right)(\alpha - \bar{u}(s)),$$

et qu'en utilisant (1.25), nous avons

$$0 \leq \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda \bar{u}(s)\right)(\alpha - \bar{u}(s)) \leq \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda \alpha\right)(\alpha - \bar{u}(s)). \tag{1.26}$$

De plus, si $-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda \alpha \geq 0$, alors

$$\left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda \bar{u}(s)\right)(\alpha - \bar{u}(s)) \leq \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda \alpha\right)(\alpha - \bar{u}(s)) \leq 0$$

et grâce à (1.26), nous concluons que

$$\left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda \bar{u}(s)\right)(\alpha - \bar{u}(s)) = \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda \alpha\right)(\alpha - \bar{u}(s)) = 0. \tag{1.27}$$

- Si $-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda\alpha > 0$, la deuxième identité dans (1.27) implique que $\bar{u}(s) = \alpha$.
- Si $-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda\alpha = 0$, alors $-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) = -\lambda\alpha$ et en substituant dans la première identité de (1.27), nous obtenons $\lambda\,(\bar{u}(x) - \alpha)^2 = 0$, i.e. $\bar{u}(x) = \alpha$.

(ii) Cette assertion peut-être démontrée en utilisant des arguments similaires à ceux dans (i).

(iii) Si $-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda\alpha < 0 < -\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda\beta$, alors d'après (i) et (ii), nous déduisons que $\alpha < \bar{u}(s) < \beta$. Choisissant $v = \alpha$ dans (1.25), nous obtenons

$$\left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda\bar{u}(s)\right)(\alpha - \bar{u}(s)) \geq 0$$

ce qui implique que $-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda\bar{u}(s) \leq 0$. De manière similaire, en choisissant $v = \beta$ dans (1.25), nous obtenons

$$\left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda\bar{u}(s)\right)(\beta - \bar{u}(s)) \geq 0$$

et donc $-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda\bar{u}(s) \geq 0$. Par conséquent $-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda\bar{u}(x) = 0$. □

Nous sommes en mesure de montrer le théorème principal de cette section.

Démonstration du théorème 1.4.7. Supposons que $\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) \leq \alpha$ alors $-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) + \lambda\alpha \geq 0$ et d'après l'assertion (i) du lemme 1.4.8, on obtient

$$\bar{u}(s) = \alpha = \mathrm{Proj}_{[\alpha,\beta]}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s)\right).$$

De la même manière si $\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) \geq \beta$, alors d'après l'assertion (ii) du lemme 1.4.8, on obtient

$$\bar{u}(x) = \beta = \mathrm{Proj}_{[\alpha,\beta]}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s)\right).$$

Finalement si $\alpha < \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) < \beta$ alors $-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} + \lambda\alpha < 0 < \bar{p}(x) + \lambda\beta$ et d'après l'assertion (iii) du lemme 1.4.8, on a

$$\bar{u}(s) = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) = \mathrm{Proj}_{[\alpha,\beta]}\left(-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s)\right).$$

Ceci prouve la première partie.

La régularité de $\bar{u}$ est alors une conséquence de la régularité de $\bar{p}$ et de la continuité lipschitzienne de la fonction Proj. En effet, la proposition 1.2.11 et le fait que $y_d \in L^2(\Omega)$ impliquent que $\bar{y} - y_d \in L^2(\Omega)$ et, d'après la proposition 1.2.4, l'état adjoint $\bar{p} \in H^2(\Omega)$ satisfait l'estimation suivante

$$\begin{aligned}\|\bar{p}\|_{H^2(\Omega)} &\leq C\left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\|\bar{y} - y_d\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\left(\|\bar{u}\|_{L^\infty(\Gamma)} + \|y_d\|_{L^2(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Prenant en compte le théorème de traces, nous déduisons que

$$\left\|\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}\right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C\,\|\bar{p}\|_{H^2(\Omega)} \leq C\left(\|\bar{u}\|_{L^\infty(\Gamma)} + \|y_d\|_{L^2(\Omega)}\right). \tag{1.28}$$

De l'autre côté, grâce au théorème 1.4.7 et à la continuité lipschitzienne de l'opérateur $\mathrm{Proj}_[\alpha, \beta]$, on obtient

$$|\bar{u}(s) - \bar{u}(t)| = \left|\mathrm{Proj}_{[\alpha,\beta]}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s)\right) - \mathrm{Proj}_{[\alpha,\beta]}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(t)\right)\right| \leq \frac{1}{\lambda}\left|\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(t)\right|,$$

et donc

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} &= \left(\|\bar{u}\|^2_{L^2(\Gamma)} + \int_\Gamma\int_\Gamma \frac{|\bar{u}(s)-\bar{u}(t)|^2}{|s-t|^2} dsdt\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\|\bar{u}\|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{1}{\lambda^2}\int_\Gamma\int_\Gamma \frac{\left|\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(s)-\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(t)\right|^2}{|s-t|^2} dsdt\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\|\bar{u}\|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{1}{\lambda^2}\left\|\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}\right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}\right)^{1/2}. \qquad (1.29)
\end{aligned}$$

Combinant (1.28) et (1.29), nous concluons que $\bar{u} \in H^{1/2}(\Gamma)$. La régularité de l'état $\bar{y}$ est alors une conséquence de la régularité du contrôle optimal $\bar{u}$ et de la proposition 1.2.8. ■

Chapitre 2

Pénalisation de problèmes de contrôle optimal dans une condition de Dirichlet

2.1 Introduction

Nous abordons dans ce chapitre l'étude du problème pénalisé (P^ε). Dans le même esprit que dans le chapitre précédent, nous commençons par étudier la version pénalisée de l'équation (1.1), donnée par

$$\begin{cases} -\Delta z + bz = f & \text{dans } \Omega, \\ \varepsilon \frac{\partial z}{\partial n} + z = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$. L'existence d'une solution faible unique dans $H^1(\Omega)$ est obtenue en utilisant des arguments classiques. D'autres arguments tout aussi classiques nous permettent de garantir dans un premier temps que la solution correspondante appartient à $L^\infty(\Omega)$ et dans un second temps qu'elle appartient à $H^2(\Omega)$. De plus, une analyse minutieuse nous permet d'établir des estimations à priori dans $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ indépendantes du paramètre de pénalisation ε.

Nous considérons ensuite l'analyse de l'équation d'état pénalisée (2). Comme déjà indiqué précédemment, l'introduction de la dérivée normale a un effet régularisateur. Contrairement au cas de l'équation d'état, le cadre variationnel naturel est H^1 et il est possible d'utiliser différentes techniques classiques afin de garantir l'existence et l'unicité d'une solution faible y_u^ε et d'obtenir différents résultats de régularité dépendamment de la régularité du contrôle u. Un autre aspect important que nous considérons est lié aux estimations a priori associées à y_u^ε et à leur dépendance par rapport au paramètre de pénalisation ε. Ces résultats sont résumés dans le tableau suivant.

Régularité de la donnée u	Régularité correspondante de y_u^ε	Dépendance de l'estimation a priori par rapport à ε
$H^{-1/2}(\Gamma)$	$H^1(\Omega)$	ε^0 dans $L^2(\Omega)$ (uniforme) ε^{-1} dans $H^1(\Omega)$
$L^2(\Gamma)$	$H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$	ε^0 dans $L^2(\Omega)$ (uniforme) ε^{-1} dans $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$
$L^\infty(\Gamma)$	$H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$	ε^0 dans $L^\infty(\Omega)$ (uniforme) ε^{-1} dans $H^1(\Omega)$
$H^{1/2}(\Gamma)$	$H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$	ε^0 dans $L^2(\Omega)$ (uniforme) ε^{-1} dans $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ $\varepsilon^{-1/2}$ dans $H^{3/2}(\Omega)$ ε^{-2} dans $H^2(\Omega)$

Dans les deux sections suivantes, nous montrons que le problème (P^ε) admet une solution $\bar{u}^\varepsilon$, établissons les conditions d'optimalité correspondantes et donnons une caractérisation du contrôle optimal. Celle-ci implique en particulier que $\bar{u}^\varepsilon \in L^\infty(\Gamma) \cap H^{1/2}(\Gamma)$. Finalement, nous considérons l'analyse asymptotique de (P^ε). Nous commençons par montrer l'estimation suivante

$$\|y_{\bar{u}} - y_{\bar{u}}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le C\varepsilon,$$

déduisons ensuite une estimation similaire faisant intervenir les états adjoints et finissons par établir l'estimation suivante

$$\|\bar{u} - \bar{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\varepsilon^{1/2},$$

où C est une constante indépendante de ε.

2.2 Solvabilité de l'équation d'état pénalisée

2.2.1 Équation avec condition aux limites de type Robin homogène

Dans cette section, nous étudions la solvabilité (existence, unicité et régularité de solution) du problème (2.1).

Définition 2.2.1. *Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$. Une fonction $z_f^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ est une solution faible de l'équation* (2.1) *si*

$$\left(\nabla z_f^\varepsilon, \nabla\phi\right) + \left(b z_f^\varepsilon, \phi\right) + \tfrac{1}{\varepsilon}\left(z_f^\varepsilon, \phi\right)_\Gamma = (f, \phi) \qquad \forall \phi \in H^1(\Omega).$$

Proposition 2.2.2. *Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$ avec $b \geq 0$ p.p. Alors l'équation* (2.1) *admet une solution faible unique z_f^ε. De plus, l'estimation suivante est satisfaite*

$$\left\|z_f^\varepsilon\right\|_{H^1(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{L^2(\Omega)}\,,$$

où C est une constante positive indépendante de f, b et de ε.

Démonstration. Prenant en compte la définition 2.2.1, nous pouvons écrire la formulation variationnelle associée à (2.1) sous la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } z_f^\varepsilon \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a_\varepsilon\left(z_f^\varepsilon, \phi\right) = F_\varepsilon(\phi) \qquad \forall \phi \in H^1(\Omega), \end{cases} \tag{2.2}$$

où a_ε est le forme bilinéaire définie par

$$a_\varepsilon(\zeta, \phi) = (\nabla\zeta, \nabla\phi) + (b\zeta, \phi) + \tfrac{1}{\varepsilon}(\zeta, \phi)_\Gamma \qquad \forall \zeta, \phi \in H^1(\Omega), \tag{2.3}$$

et où F_ε est la forme linéaire définie par

$$F_\varepsilon(\phi) = (f, \phi) \qquad \forall \phi \in H^1(\Omega).$$

Vérifions que a_ε est continue dans $H^1(\Omega)$. Utilisant la continuité de l'opérateur trace $H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$, nous déduisons l'existence d'une constante $C_0 > 0$ tel que

$$\|\zeta\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_0\,\|\zeta\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall \zeta \in H^1(\Omega).$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned}
|a_\varepsilon(\zeta,\phi)| &= \left|(\nabla\zeta,\nabla\phi)+(b\zeta,\phi)+\tfrac{1}{\varepsilon}(\zeta,\phi)_\Gamma\right| \\
&\le |(\nabla\zeta,\nabla\phi)|+|(b\zeta,\phi)|+\tfrac{1}{\varepsilon}|(\zeta,\phi)_\Gamma| \\
&\le \|\nabla\zeta\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}+\|b\|_{L^\infty(\Omega)}\|\zeta\|_{L^2(\Omega)}\|\phi\|_{L^2(\Omega)}+\tfrac{1}{\varepsilon}\|\zeta\|_{L^2(\Gamma)}\|\phi\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\le \|\zeta\|_{H^1(\Omega)}\|\phi\|_{H^1(\Omega)}+\|b\|_{L^\infty(\Omega)}\|\zeta\|_{H^1(\Omega)}\|\phi\|_{H^1(\Omega)}+\tfrac{C_0^2}{\varepsilon}\|\zeta\|_{H^1(\Omega)}\|\phi\|_{H^1(\Omega)} \\
&\le \left(1+\|b\|_{L^\infty(\Omega)}+\tfrac{C_0^2}{\varepsilon}\right)\|\zeta\|_{H^1(\Omega)}\|\phi\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\zeta,\phi\in H^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Vérifions maintenant que a_ε est coercive dans $H^1(\Omega)$. Utilisant l'inégalité de Friedrichs et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|\zeta\|^2_{H^1(\Omega)} \le C_F\left(\|\nabla\zeta\|^2_{L^2(\Omega)}+\left(\int_\Gamma \zeta\,ds\right)^2\right) \le \bar{C}\left(\|\nabla\zeta\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\zeta\|^2_{L^2(\Gamma)}\right),$$

ce qui, combiné avec le fait que $b\ge 0$ et $\varepsilon\in]0,1[$, donne

$$\begin{aligned}
a_\varepsilon(\zeta,\zeta) &= \|\nabla\zeta\|^2_{L^2(\Omega)}+(b\zeta,\zeta)+\tfrac{1}{\varepsilon}\|\zeta\|^2_{L^2(\Gamma)} \\
&\ge \|\nabla\zeta\|^2_{L^2(\Omega)}+\tfrac{1}{\varepsilon}\|\zeta\|^2_{L^2(\Gamma)} \\
&\ge \|\nabla\zeta\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\zeta\|^2_{L^2(\Gamma)} \\
&\ge \tfrac{1}{\bar{C}}\|\zeta\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\zeta\in H^1(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Finalement, il est clair que F_ε est continue car

$$\begin{aligned}
|F_\varepsilon(\zeta)| &= |(f,\zeta)| \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\zeta\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\zeta\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\zeta\in H^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Les condition d'application du théorème de Lax-Milgram étant satisfaites, nous déduisons que le problème (2.2) admet une solution faible unique $z_f^\varepsilon\in H^1(\Omega)$. De plus, en choisissant $\phi=z_f^\varepsilon$ dans (2.2), il vient que

$$\tfrac{1}{\bar{C}}\left\|z_f^\varepsilon\right\|^2_{H^1(\Omega)} \le a_\varepsilon(z_f^\varepsilon,z_f^\varepsilon)=F_\varepsilon(z_f^\varepsilon)\le\|f\|_{L^2(\Omega)}\left\|z_f^\varepsilon\right\|_{H^1(\Omega)},$$

ce qui donne l'estimation énoncée. □

Proposition 2.2.3. *Soit $f\in L^2(\Omega)$ et $b\in L^\infty(\Omega)$ avec $b\ge 0$ p.p. Alors la solution de l'équation* (2.1) *est bornée. De plus, on a l'estimation suivante*

$$\left\|z_f^\varepsilon\right\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\,\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

où $C>0$ est une constante indépendante de f, b et ε.

Afin de montrer le résultat, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2.4. *Soit $M_0 \in \mathbb{R}$ et supposons que φ est une fonction non négative et non croissante définie dans $[M_0, +\infty[$ satisfaisant la propriété suivante*

$$\begin{cases} \textit{Pour tout } h > k \geq M_0 \\ (h-k)^\alpha \varphi(h) \leq \gamma \varphi(k)^\beta, \end{cases}$$

où $\gamma > 0$, $\alpha > 0$ et $\beta > 1$. Alors,

$$\varphi(M_0 + \omega) = 0 \qquad \textit{où } \omega = \gamma^{\frac{1}{\alpha}} \varphi(M_0)^{\frac{\beta-1}{\alpha}} 2^{\frac{\beta}{\beta-1}}.$$

Démonstration de la proposition 2.2.3. Pour tout $k > 0$, nous considérons la fonction $v_k^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ définie par

$$v_k^\varepsilon(x) = \begin{cases} z_f^\varepsilon(x) - k & \text{si } z_f^\varepsilon(x) \geq k \\ 0 & \text{si } \left|z_f^\varepsilon(x)\right| < k \\ z_f^\varepsilon(x) + k & \text{si } z_f^\varepsilon(x) \leq -k. \end{cases}$$

Nous allons montrer que $v_k^\varepsilon = 0$ presque partout pour k suffisamment grand, ce qui implique que z_f^ε est borné. Afin de simplifier la rédaction, nous poserons $z = z_f^\varepsilon$ et $v_k = v_k^\varepsilon$ dans toute la suite. On introduit les ensembles

$$\Omega_k = \{x \in \Omega \mid |z(x)| \geq k\} \quad \text{et} \quad \Gamma_k = \left\{s \in \Gamma \mid \left|z_{|\Gamma}(s)\right| \geq k\right\}.$$

Le reste de la démonstration sera divisé en trois parties.

<u>Partie 1</u> : *estimation de $\|v_k\|_{H^1(\Omega)}$.*

Prenant v_k comme fonction test dans la formulation variationnelle associée à z, on obtient

$$a_\varepsilon(z, v_k) = (f, v_k), \tag{2.5}$$

où $a_\varepsilon(z, v_k) = (\nabla z, \nabla v_k) + (bz, v_k) + \frac{1}{\varepsilon}(z, v_k)_\Gamma$. Vu que $\nabla z = \nabla v_k$ dans Ω_k et $v_k = 0$ dans $\Omega \backslash \Omega_k$ il vient que

$$\begin{aligned} (\nabla z, \nabla v_k) &= \int_{\Omega_k} \nabla z \cdot \nabla v_k \, dx + \int_{\Omega \backslash \Omega_k} \nabla z \cdot \nabla v_k \, dx \\ &= \int_{\Omega_k} |\nabla v_k|^2 \, dx + 0 \\ &= \|\nabla v_k\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

De plus, puisque

$$\begin{aligned} &z - k > 0 && \text{dans } \Omega_k^+ = \{x \in \Omega \mid z(x) > k\}, \\ &z + k < 0 && \text{dans } \Omega_k^- = \{x \in \Omega \mid z(x) < -k\}, \\ &v_k = 0 && \text{dans } \Omega \backslash \Omega_k, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
(bz, v_k) &= \int_{\Omega_k^+} bz\,(z-k)\,dx + \int_{\Omega_k^-} bz\,(z+k)\,dx \\
&= \int_{\Omega_k^+} b\left[(z-k)^2 + (z-k)\,k\right] dx + \int_{\Omega_k^-} b\left[(z+k)^2 - (z+k)\,k\right] \\
&\geq \int_{\Omega_k^+} b\,(z-k)^2\,dx + \int_{\Omega_k^-} b\,(z+k)^2 \\
&= \int_{\Omega} b v_k^2 dx = (bv_k, v_k)\,. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

De manière similaire, nous pouvons montrer que

$$(z, v_k)_\Gamma \geq \int_\Gamma v_k^2 ds = \|v_k\|^2_{L^2(\Gamma)}\,. \qquad (2.8)$$

Combinant (2.6), (2.7) et (2.8), et utilisant (2.4), il vient que

$$\begin{aligned}
a_\varepsilon(z, v_k) &\geq \|\nabla v_k\|^2_{L^2(\Omega)} + (bv_k, v_k) + \tfrac{1}{\varepsilon}\|v_k\|^2_{L^2(\Gamma)} \\
&= a_\varepsilon(v_k, v_k) \geq \tfrac{1}{C}\|v_k\|^2_{H^1(\Omega)}\,,
\end{aligned}$$

et grâce à (2.5), nous obtenons donc

$$\tfrac{1}{C}\|v_k\|^2_{H^1(\Omega)} \leq (f, v_k)\,. \qquad (2.9)$$

Partie 2 : *estimation du second membre de l'inégalité* (2.9).

• L'inégalité de Hölder et l'inégalité de Sobolev

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leq C_S\|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \qquad (2.10)$$

avec des arguments classiques, donnent

$$\begin{aligned}
|(f, v_k)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v_k\|_{L^2(\Omega)} = \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v_k\|_{L^2(\Omega_k)} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v_k\|_{L^4(\Omega_k)}\|1\|_{L^4(\Omega_k)} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v_k\|_{L^4(\Omega)}|\Omega_k|^{\frac14} \\
&\leq C_S\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v_k\|_{H^1(\Omega)}|\Omega_k|^{\frac14}\,.
\end{aligned}$$

Utilisant alors l'inégalité de Young

$$\alpha\beta \leq \delta\alpha^2 + \tfrac{1}{4\delta}\beta^2 \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \forall \delta > 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
|(f, v_k)| &\leq \delta\|v_k\|^2_{H^1(\Omega)} + \tfrac{1}{4\delta}\left(C_S\|f\|_{L^2(\Omega)}|\Omega_k|^{\frac14}\right)^2 \\
&= \delta\|v_k\|^2_{H^1(\Omega)} + \tfrac{C_S^2}{4\delta}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}|\Omega_k|^{1/2}\,. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Combinant (2.9) et (2.11), nous déduisons que

$$\frac{1}{C}\left\|v_k\right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \delta\left\|v_k\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\frac{C_S^2}{4\delta}\|f\|_{L^2(\Omega)}^2\left|\Omega_k\right|^{1/2}.$$

Choisissant $\delta=\frac{1}{2C}$ implique alors que

$$\left\|v_k\right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}^2\left|\Omega_k\right|^{1/2}, \tag{2.12}$$

où $C>0$ est une constante indépendante de f, b et de k.

• De l'autre côté, étant en dimension 2, nous avons l'inégalité de Sobolev

$$\|v\|_{L^p(\Omega)}+\|v\|_{L^p(\Gamma)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall p \in]1,+\infty[,$$

Et par conséquent

$$\left\|v_k\right\|_{L^p(\Omega_k)}^2+\left\|v_k\right\|_{L^p(\Gamma_k)}^2=\left\|v_k\right\|_{L^p(\Omega)}^2+\left\|v_k\right\|_{L^p(\Gamma)}^2 \leq C\left\|v_k\right\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Remarquant alors que

$$\begin{aligned}
\left\|v_k\right\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_{\Omega_k^+}\left|v_k\right|^p dx+\int_{\Omega_k^-}\left|v_k\right|^p dx \\
&= \int_{\Omega_k^+}|z-k|^p dx+\int_{\Omega_k^-}|z+k|^p dx \\
&= \int_{\Omega_k^+}(z-k)^p dx+\int_{\Omega_k^-}(-z-k)^p dx \\
&= \int_{\Omega_k^+}(|z|-k)^p dx+\int_{\Omega_k^-}(|z|-k)^p dx=\int_{\Omega_k}(|z|-k)^p dx
\end{aligned}$$

et, de la même manière, que

$$\left\|v_k\right\|_{L^p(\Gamma)}^p=\int_{\Gamma_k}(|z|-k)^p dx$$

nous obtenons

$$\left(\int_{\Omega_k}(|z|-k)^p dx\right)^{\frac{2}{p}}+\left(\int_{\Gamma_k}(|z|-k)^p dx\right)^{\frac{2}{p}} \leq C\left\|v_k\right\|_{H^1(\Omega)}^2. \tag{2.13}$$

<u>Partie 3 :</u> *application du lemme 2.2.4.*

Supposons que $h>k$. Alors $\Omega_h \subset \Omega_k$ et $\Gamma_h \subset \Gamma_k$, et par conséquent

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega_k}(|z|-k)^p dx\right)^{\frac{2}{p}} &\geq \left(\int_{\Omega_h}(|z|-k)^p dx\right)^{\frac{2}{p}} \\
&\geq \left(\int_{\Omega_h}(h-k)^p dx\right)^{\frac{2}{p}}=(h-k)^2\left|\Omega_h\right|^{\frac{2}{p}}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

De la même manière, on a

$$\left(\int_{\Gamma_k} (|z|-k)^p \, ds\right)^{\frac{2}{p}} \geq (h-k)^2 \left|\Gamma_h\right|^{\frac{2}{p}}. \tag{2.15}$$

Prenant en compte (2.12), (2.13), (2.14) et (2.15), nous déduisons que

$$\begin{aligned}(h-k)^2 \left(|\Omega_h|^{\frac{2}{p}} + |\Gamma_h|^{\frac{2}{p}}\right) &\leq C \|f\|^2_{L^2(\Omega)} |\Omega_k|^{1/2} \\ &\leq C \|f\|^2_{L^2(\Omega)} \left(|\Omega_k|^{1/2} + |\Gamma_k|^{1/2}\right),\end{aligned}$$

pour tout $p \in [1, +\infty[$. Choisissant $p > 4$ et utilisant l'inégalité

$$\alpha^\lambda + \beta^\lambda \leq (\alpha+\beta)^\lambda \qquad \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \text{ et } \lambda \geq 1,$$

nous obtenons

$$(h-k)^2 \left(|\Omega_h|^{\frac{2}{p}} + |\Gamma_h|^{\frac{2}{p}}\right) \leq C \|f\|^2_{L^2(\Omega)} \left(|\Omega_k|^{\frac{2}{p}} + |\Gamma_k|^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{p}{4}}.$$

Posant $\varphi(h) = |\Omega_h|^{\frac{2}{p}} + |\Gamma_h|^{\frac{2}{p}}$, on a donc

$$(h-k)^2 \varphi(h) \leq C \|f\|^2_{L^2(\Omega)} \varphi(k)^{\frac{p}{4}} \qquad \forall h > k \geq 0.$$

Appliquant maintenant le lemme 2.2.4 avec $\alpha = 2$, $\beta = \frac{p}{4} > 1$, $M_0 = 0$ et $\gamma = C \|f\|^2_{L^2(\Omega)}$, il vient que

$$\varphi(\omega) = 0 \qquad \text{avec } \omega = \gamma^{\frac{1}{2}} \varphi(0)^{\frac{\beta-1}{2}} 2^{\frac{\beta}{\beta-1}}.$$

Autrement dit

$$|z(x)| \leq \omega \text{ pour presque tout } \; x \in \Omega \quad \text{ et } \quad \left|z_{|\Gamma}(s)\right| \leq \omega \text{ pour presque tout } s \in \Gamma.$$

Ceci termine la preuve. ■

Proposition 2.2.5. *Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$ avec $b \geq 0$ p.p. Alors la solution de l'équation* (2.1) *appartient à $H^2(\Omega)$. De plus, on a l'estimation suivante*

$$\left\|z_f^\varepsilon\right\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left(\frac{1}{\varepsilon} + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de f, b et ε.

Démonstration. Remarquons que z_f^ε est aussi solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta z = f - b z_f^\varepsilon & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial z}{\partial n} + z = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} z_f^\varepsilon & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Puisque $z_f^\varepsilon \in H^1(\Omega)$, il vient que $f - bz_f^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ et $z^\varepsilon_{f|\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma)$. Des résultats standard (voir [8]) impliquent alors que $z_f^\varepsilon \in H^2(\Omega)$ et que

$$\left\|z_f^\varepsilon\right\|_{H^2(\Omega)} \leq C\left(\left\|f - bz_f^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\tfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon} z_f^\varepsilon\right\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\right).$$

Utilisant alors la proposition 2.2.2 et le théorème de trace dans $H^1(\Omega)$, nous déduisons que

$$\begin{aligned}\left\|z_f^\varepsilon\right\|_{H^2(\Omega)} &\leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|z_f^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)} + \tfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\left\|z_f^\varepsilon\right\|_{H^1(\Omega)}\right)\\ &\leq C\left(\tfrac{1}{\varepsilon} + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\|f\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

La preuve est terminée. □

2.2.2 Équation avec condition aux limites de type Robin non homogène

Dans cette section, nous étudions la solvabilité (existence, unicité et régularité de solution) de l'équation d'état pénalisée (2).

Définition 2.2.6. *Soit $u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$. Une fonction $y_u^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ est une solution faible de l'équation (2) si*

$$(\nabla y_u^\varepsilon, \nabla\phi) + (by_u^\varepsilon, \phi) + \tfrac{1}{\varepsilon}(y_u^\varepsilon, \phi)_\Gamma = \tfrac{1}{\varepsilon}\langle u, \phi\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} \qquad \forall\phi \in H^1(\Omega).$$

Proposition 2.2.7. *Soit $u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$ avec $b \geq 0$ p.p. Alors l'équation (2) admet une solution faible unique y_u^ε. De plus, l'estimation suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}\|y_u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} &\leq \tfrac{C}{\varepsilon}\|u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)},\\ \|y_u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\leq C\|u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)},\end{aligned} \tag{2.16}$$

où C est une constante positive indépendante de b, u et de ε.

Démonstration. Prenant en compte la définition 2.2.6, nous pouvons écrire la formulation variationnelle associée à (2.1) sous la forme

$$\begin{cases}\text{Trouver } y_u^\varepsilon \in H^1(\Omega) \text{ tel que}\\ a_\varepsilon(y^\varepsilon, \phi) = G_\varepsilon(\phi) \qquad \forall\phi \in H^1(\Omega),\end{cases} \tag{2.17}$$

où a_ε est le forme bilinéaire définie par (2.3) et où G_ε est la forme linéaire définie par

$$G_\varepsilon(\phi) = \tfrac{1}{\varepsilon}\langle u, \phi\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} \qquad \forall\phi \in H^1(\Omega).$$

Nous savons déja (voir la démonstration de la proposition 2.2.2) que la forme bilinéaire a_ε est continue et coercive dans $H^1(\Omega)$. De plus, utilisant le théorème de trace dans $H^1(\Omega)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}|G_\varepsilon(\zeta)| &= \left|\tfrac{1}{\varepsilon}\langle u, \zeta\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)}\right|\\ &\leq \tfrac{1}{\varepsilon}\|u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\|\zeta\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\\ &\leq \tfrac{C}{\varepsilon}\|u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\|\zeta\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\zeta \in H^1(\Omega),\end{aligned}$$

ce qui montre que G_ε est continue dans $H^1(\Omega)$. Grâce au théorème de Lax-Milgram, nous déduisons que le problème (2.17) admet une solution faible unique $y_u^\varepsilon \in H^1(\Omega)$. De plus, en choisissant $\phi = y^\varepsilon$ dans (2.17), il vient que

$$\tfrac{1}{C} \|y_u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a_\varepsilon(y_u^\varepsilon, y_u^\varepsilon) = G_\varepsilon(y_u^\varepsilon) \leq \tfrac{C}{\varepsilon} \|u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|y_u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} ,$$

ce qui donne la première estimation énoncée. La preuve de la deuxième estimation est plus technique et sera omise (pour plus de détails voir [5]). □

Proposition 2.2.8. *Soit $u \in L^2(\Gamma)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$ avec $b \geq 0$ p.p. Alors la solution de l'équation* (2) *est bornée. De plus, on a l'estimation suivante*

$$\|y_u^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tfrac{C}{\varepsilon} \|u\|_{L^2(\Gamma)} ,$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de b, u et ε.

Démonstration. Elle est similaire à celle de la proposition 2.2.3. Pour le confort du lecteur, nous indiquons les modifications à apporter. Pour tout $k > 0$, nous considérons la fonction $w_k^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ définie par

$$w_k^\varepsilon(x) = \begin{cases} y_u^\varepsilon(x) - k & \text{si } y_u^\varepsilon(x) \geq k \\ 0 & \text{si } |y_u^\varepsilon(x)| < k \\ y_u^\varepsilon(x) + k & \text{si } y_u^\varepsilon(x) \leq -k. \end{cases}$$

Nous allons montrer que $w_k^\varepsilon = 0$ presque partout pour k suffisamment grand, ce qui implique que y_u^ε est borné. Afin de simplifier la rédaction, nous poserons $y = y_u^\varepsilon$ et $w_k = w_k^\varepsilon$ dans toute la suite. On introduit les ensembles

$$\Omega_k = \{x \in \Omega \mid |y(x)| \geq k\} \quad \text{et} \quad \Gamma_k = \left\{s \in \Gamma \mid \left|y_{|\Gamma}(s)\right| \geq k\right\}.$$

Prenant w_k comme fonction test dans la formulation variationnelle associée à y, on obtient

$$a_\varepsilon(y, w_k) = \tfrac{1}{\varepsilon} (u, w_k)_\Gamma . \tag{2.18}$$

Utilisant exactement les mêmes arguments que dans la preuve de la proposition 2.2.3, nous pouvons montrer que

$$\tfrac{1}{C} \|w_k\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \tfrac{1}{\varepsilon} (u, w_k)_\Gamma . \tag{2.19}$$

L'inégalité de Hölder, l'inégalité de Sobolev (2.10), le théorème de trace et l'inégalité de Young donnent

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\varepsilon} |(u, w_k)_\Gamma| &\leq \tfrac{1}{\varepsilon} \|u\|_{L^2(\Gamma)} \|w_k\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \tfrac{1}{\varepsilon} \|u\|_{L^2(\Gamma)} \|w_k\|_{L^4(\Gamma)} |\Gamma_k|^{\frac{1}{4}} \\ &\leq \tfrac{C}{\varepsilon} \|u\|_{L^2(\Gamma)} \|w_k\|_{H^1(\Omega)} |\Gamma_k|^{\frac{1}{4}} \\ &\leq \delta \|w_k\|_{H^1(\Omega)}^2 + \tfrac{C^2}{4\delta\varepsilon^2} \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 |\Gamma_k|^{1/2} . \end{aligned} \tag{2.20}$$

Combinant (2.19) et (2.20), nous déduisons que

$$\frac{1}{C}\left\|w_k\right\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \delta \left\|w_k\right\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{C}{\varepsilon^2}\left\|u\right\|^2_{L^2(\Gamma)} \left|\Gamma_k\right|^{1/2}.$$

Choisissant $\delta = \frac{1}{2C}$ implique alors que

$$\left\|w_k\right\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\varepsilon^2}\left\|u\right\|^2_{L^2(\Gamma)} \left|\Gamma_k\right|^{1/2}, \tag{2.21}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de u, b et de k.

De l'autre côté, raisonnant encore une fois exactement comme dans la preuve de la proposition 2.2.3, nous pouvons montrer que

$$(h-k)^2 \left(\left|\Omega_h\right|^{\frac{2}{p}} + \left|\Gamma_h\right|^{\frac{2}{p}}\right) \leq C \left\|w_k\right\|^2_{H^1(\Omega)} \tag{2.22}$$

pour tout $h > k > 0$ et tout $p \in [1, +\infty[$. Prenant en compte (2.21) et(2.22), nous déduisons que

$$\begin{aligned}(h-k)^2 \left(\left|\Omega_h\right|^{\frac{2}{p}} + \left|\Gamma_h\right|^{\frac{2}{p}}\right) &\leq \frac{C}{\varepsilon^2}\left\|u\right\|^2_{L^2(\Gamma)} \left|\Gamma_k\right|^{1/2} \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^2}\left\|u\right\|^2_{L^2(\Gamma)} \left(\left|\Omega_k\right|^{1/2} + \left|\Gamma_k\right|^{1/2}\right),\end{aligned}$$

pour tout $p \in [1, +\infty[$. Choisissant $p > 4$ et utilisant l'inégalité

$$\alpha^\lambda + \beta^\lambda \leq (\alpha + \beta)^\lambda \qquad \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \text{ et } \lambda \geq 1,$$

nous obtenons

$$(h-k)^2 \left(\left|\Omega_h\right|^{\frac{2}{p}} + \left|\Gamma_h\right|^{\frac{2}{p}}\right) \leq \frac{C}{\varepsilon^2}\left\|u\right\|^2_{L^2(\Gamma)} \left(\left|\Omega_k\right|^{\frac{2}{p}} + \left|\Gamma_k\right|^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{p}{4}}.$$

Posant $\varphi(h) = \left|\Omega_h\right|^{\frac{2}{p}} + \left|\Gamma_h\right|^{\frac{2}{p}}$, on a donc

$$(h-k)^2 \varphi(h) \leq \frac{C}{\varepsilon^2}\left\|u\right\|^2_{L^2(\Gamma)} \varphi(k)^{\frac{p}{4}} \qquad \forall h > k \geq 0.$$

Appliquant maintenant le lemme 2.2.4 avec $\alpha = 2$, $\beta = \frac{p}{4} > 1$, $K_0 = 0$ et $\gamma = \frac{C}{\varepsilon^2}\left\|u\right\|^2_{L^2(\Gamma)}$, il vient que

$$\varphi(\omega) = 0 \qquad \text{avec } \omega = \gamma^{\frac{1}{2}} \varphi(0)^{\frac{\beta-1}{2}} 2^{\frac{\beta}{\beta-1}}.$$

Autrement dit

$$|y(x)| \leq \omega \text{ pour presque tout } \; x \in \Omega \quad \text{ et } \quad \left|y_{|\Gamma}(s)\right| \leq \omega \text{ pour presque tout } s \in \Gamma.$$

Ceci termine la preuve. □

Proposition 2.2.9. *Soit $u \in H^{1/2}(\Gamma)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$ avec $b \geq 0$ p.p. Alors la solution de l'équation (2) appartient à $H^2(\Omega)$. De plus, on a l'estimation suivante*

$$\|y_u^\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} \leq C\varepsilon^{-2}\left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)},$$

$$\|y_u^\varepsilon\|_{H^{3/2}(\Omega)} \leq C\varepsilon^{-1/2}\|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \tag{2.23}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de u, b et ε.

Démonstration. Remarquons que y_u^ε est aussi solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta y = -by_u^\varepsilon & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial n} + y = \frac{1}{\varepsilon}\, u + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} y_u^\varepsilon & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Puisque $y_u^\varepsilon \in H^1(\Omega)$, il vient que $-by_u^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ et $y^\varepsilon_{u|\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma)$. Des résultats standard (voir [8]) impliquent alors que $y_u^\varepsilon \in H^2(\Omega)$ et que

$$\|y_u^\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} \leq C\left(\|-by_u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\tfrac{1}{\varepsilon}\, u + \tfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon} y_u^\varepsilon\right\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\right).$$

Utilisant alors la proposition 2.2.7 et le théorème de trace dans $H^1(\Omega)$, nous déduisons que

$$\begin{aligned} \|y_u^\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} &\leq C\left(\|b\|_{L^\infty(\Omega)}\|y_u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \tfrac{1}{\varepsilon}\,\|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \tfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\,\|y_u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}\right) \\ &\leq C\tfrac{1}{\varepsilon^2}\left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \end{aligned}$$

ce qui donne la première estimation. La deuxième estimation est obtenue utilisant les résultats de régularité dans $H^1(\Omega)$ et dans $H^2(\Omega)$ et des arguments d'interpolation. La preuve, très technique, sera omise (pour plus de détails, voir [5]). □

Proposition 2.2.10. *Soit $u \in L^\infty(\Gamma)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$ avec $b \geq 0$ p.p. Alors la solution de (2) satisfait l'estimation suivante*

$$\|y_u^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\,\|u\|_{L^\infty(\Gamma)},$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de u, b et ε.

Démonstration. Nous savons déjà que l'équation (2) admet une solution unique $y_u^\varepsilon \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ (voir la proposition 2.2.8 et la proposition 2.2.7). Il nous faut alors établir l'estimation uniforme.

• Supposons dans un premier temps que $u \geq 0$. Soit $(u_k)_k \subset C_c^1(\Omega)$ une suite de fonctions positives tel que

$$\|u_k\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Gamma)} \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty}\|u_k - u\|_{L^2(\Gamma)} = 0,$$

et soit y_k^ε la solution de (2) correspondant à u_k. Il est facile de voir que $y_u^\varepsilon - y_k^\varepsilon$ est la solution de (2) correspondant à $u - u_k$. Par conséquent, grâce à la proposition 2.2.8, nous avons

$$\|y_u^\varepsilon - y_k^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tfrac{C}{\varepsilon}\, \|u - u_k\|_{L^2(\Gamma)} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } k \to +\infty.$$

Les résultats de régularité classiques nous permettent d'affirmer que $y_k^\varepsilon \in C(\overline{\Omega})$. De plus, d'après le principe du maximum (voir [12]), il existe $s_0 \in \Gamma$ tel que

$$y_k^\varepsilon(s_0) = \max_{s\in\Gamma} |y_k^\varepsilon(s)| = \|y_k^\varepsilon\|_{C(\bar\Omega)} \quad \text{et} \quad \tfrac{\partial y_k^\varepsilon}{\partial n}(s_0) > 0.$$

Rappelant que

$$\tfrac{\partial y_k^\varepsilon}{\partial n}(s_0) = \tfrac{1}{\varepsilon}\left(u_k(s_0) - y_k^\varepsilon(s_0)\right),$$

nous déduisons que

$$u_k(s_0) - y_k^\varepsilon(s_0) = u_k(s_0) - \|y_k^\varepsilon\|_{C(\bar\Omega)} > 0,$$

et donc

$$\|y_k^\varepsilon\|_{C(\bar\Omega)} \leq u_k(s_0) \leq \|u_k\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

Passant à la limite sur k, on obtient

$$\|y_u^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Gamma)}. \tag{2.24}$$

• Considérons maintenant le cas où u n'est pas nécessairement positif. Soit u^+ et u^- les parties positives et négatives de u, de sorte que $u = u^+ - u^-$. Notons y_1^ε et y_2^ε les solutions de l'équation (2) correspondant à u^+ et u^-, respectivement. D'après (2.24), on a

$$\|y_1^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left\|u^+\right\|_{L^\infty(\Gamma)}, \qquad \|y_2^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left\|u^-\right\|_{L^\infty(\Gamma)},$$

et donc

$$\begin{aligned}
\|y_u^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} = \|y_1^\varepsilon - y_2^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \|y_1^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} + \|y_2^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leq \left\|u^+\right\|_{L^\infty(\Gamma)} + \left\|u^-\right\|_{L^\infty(\Gamma)} \\
&\leq 2\,\|u\|_{L^\infty(\Gamma)},
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. □

2.3 Existence de contrôle optimal

Théorème 2.3.1. *Le problème (P^ε) admet au moins une solution $\bar u^\varepsilon$.*

Démonstration. Soit $(u_k^\varepsilon)_k \subset U_{ad}$ une suite minimisante de (P^ε). Elle est uniformément bornée dans U_{ad} et il existe alors une sous-suite, encore indexée par k, et $\bar{u}^\varepsilon \in L^2(\Gamma)$ tel que

$$u_k^\varepsilon \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{u}^\varepsilon \qquad \text{faiblement dans } L^2(\Gamma).$$

De plus, U_{ad} étant un sous-ensemble convexe fermé de $L^2(\Gamma)$ est faiblement fermé et donc $\bar{u}^\varepsilon \in U_{ad}$. De l'autre côté, grâce à la proposition 2.2.7, on a

$$\left\|y^\varepsilon_{u_k^\varepsilon}\right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\varepsilon}\left\|u_k^\varepsilon\right\|_{L^2(\Gamma)},$$

et donc $\left(y^\varepsilon_{u_k^\varepsilon}\right)_k$ est uniformément bornée dans $H^1(\Omega)$. Il existe alors une sous-suite, encore indexée par k, et $y^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ tel que

$$y^\varepsilon_{u_k^\varepsilon} \longrightarrow y^\varepsilon \qquad \text{faiblement dans } H^1(\Omega).$$

De plus, par le théorème de trace dans $H^1(\Omega)$, il vient que

$$y^\varepsilon_{u_k^\varepsilon|\Gamma} \longrightarrow y^\varepsilon{}_{|\Gamma} \qquad \text{faiblement dans } H^{1/2}(\Gamma).$$

Les injections de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $L^2(\Gamma)$ étant compactes (cf. [8]), nous déduisons que

$$y^\varepsilon_{u_k^\varepsilon} \longrightarrow y^\varepsilon \qquad \text{fortement dans } L^2(\Omega),$$

et

$$y^\varepsilon_{u_k^\varepsilon|\Gamma} \longrightarrow y^\varepsilon{}_{|\Gamma} \qquad \text{fortement dans } L^2(\Gamma).$$

Prenant en compte ces résultats de convergence et passant à la limite dans la formulation faible correspondante à $y^\varepsilon_{u_k^\varepsilon}$,

$$\left(\nabla y^\varepsilon_{u_k^\varepsilon}, \nabla\phi\right) + \left(b y^\varepsilon_{u_k^\varepsilon}, \phi\right) + \frac{1}{\varepsilon}\left(y^\varepsilon_{u_k^\varepsilon}, \phi\right)_\Gamma = \frac{1}{\varepsilon}\left(u_k^\varepsilon, \phi\right)_\Gamma \qquad \forall\phi \in H^1(\Omega),$$

on obtient

$$(\nabla y^\varepsilon, \nabla\phi) + (b y^\varepsilon, \phi) + \frac{1}{\varepsilon}\,(y^\varepsilon, \phi)_\Gamma = \frac{1}{\varepsilon}\,(\bar{u}^\varepsilon, \phi)_\Gamma \qquad \forall\phi \in H^1(\Omega),$$

autrement dit $y^\varepsilon = \bar{y}^\varepsilon$. Finalement, utilisant la semi-continuité inférieure de $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma)}$ et la convergence de $\left(y^\varepsilon_{u_k^\varepsilon}\right)_k$ vers $\bar{y}^\varepsilon$ dans $L^2(\Omega)$, nous déduisons que

$$\|\bar{u}^\varepsilon\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq \liminf_{k\to+\infty}\left\|u_k^\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Gamma)},$$

et

$$\lim_{k\to+\infty}\left\|y^\varepsilon_{u_k^\varepsilon} - y_d\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\bar{y}^\varepsilon - y_d\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Combinant ces résultats de convergence, et prenant en compte la définition de J_ε, il vient que

$$J_\varepsilon\left(\bar{u}^\varepsilon\right) \leq \liminf_{k\to\infty} J_\varepsilon\left(u_k^\varepsilon\right) = \inf\left(P^\varepsilon\right).$$

Ceci montre que $\bar{u}^\varepsilon \in U_{ad}$ est un contrôle optimal de (P^ε). $\square$

2.4 Conditions d'optimalité

2.4.1 Différentiabilité du coût J_ε par rapport à la variable contrôle

Proposition 2.4.1. *Soit $u \in L^2(\Gamma)$ et soit $y_u^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ la solution de (2) correspondante. Alors*

$$\begin{aligned} J'_\varepsilon(u)v &= (y_u^\varepsilon - y_d, y_v^\varepsilon) + \lambda\,(u,v)_\Gamma \\ &= \left(-\frac{\partial p_u^\varepsilon}{\partial n} + \lambda u, v\right)_\Gamma \qquad \forall v \in L^2(\Gamma), \end{aligned}$$

où $p_u^\varepsilon \in H^2(\Omega)$ est la solution de l'équation adjointe

$$\begin{cases} -\Delta p + bp = y_u^\varepsilon - y_d & \text{dans } \Omega, \\ \varepsilon \frac{\partial p}{\partial n} + p = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{2.25}$$

Démonstration. Soit $v \in L^2(\Gamma)$ et soit $u_\rho = u + \rho v$, $\rho > 0$. Des arguments identiques à ceux utilisés dans la preuve de la proposition 1.4.1 donnent

$$\frac{J_\varepsilon(u_\rho)-J_\varepsilon(u)}{\rho} = \frac{\rho}{2}\,\|y_v^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + (y_v^\varepsilon, y_u^\varepsilon - y_d) + \frac{\lambda\rho}{2}\,\|v\|^2_{L^2(\Gamma)} + \lambda(v,u)_\Gamma.$$

Passant à la limite, nous obtenons

$$J'_\varepsilon(u)v = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{J_\varepsilon(u_\rho)-J_\varepsilon(u)}{\rho} = (y_v^\varepsilon, y_u^\varepsilon - y_d) + \lambda\,(v,u)_\Gamma\,.$$

Prenant en compte le fait que $y_u^\varepsilon - y_d \in L^2(\Omega)$, et grâce à la proposition 2.2.9, il vient que l'équation adjointe (2.25) admet une solution unique $p_u^\varepsilon \in H^2(\Omega)$. Choisissant y_v^ε comme fonction test dans la formulation variationnelle correspondant à p_u^ε, nous obtenons

$$(\nabla p_u^\varepsilon, \nabla y_v^\varepsilon) + (b p_u^\varepsilon, y_v^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\,(p_u^\varepsilon, y_v^\varepsilon)_\Gamma = (y_u^\varepsilon - y_d, y_v^\varepsilon)\,.$$

De l'autre côté, choisissant p_u^ε comme fonction test dans la formulation variationnelle correspondant à y_v^ε nous donne

$$(\nabla y_v^\varepsilon, \nabla p_u^\varepsilon) + (b y_v^\varepsilon, p_u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\,(y_v^\varepsilon, p_u^\varepsilon)_\Gamma = \frac{1}{\varepsilon}\,(v, p_u^\varepsilon)_\Gamma\,.$$

Combinant les deux identités précédentes, on obtient finalement que

$$(y_u^\varepsilon - y_d, y_v^\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\,(v, p_u^\varepsilon)_\Gamma$$

et donc

$$\begin{aligned} J'_\varepsilon(u)v &= \left(\tfrac{1}{\varepsilon} p_u^\varepsilon + \lambda u, v\right)_\Gamma \\ &= \left(-\frac{\partial p_u^\varepsilon}{\partial n} + \lambda u, v\right)_\Gamma \qquad \forall v \in L^2(\Gamma). \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. □

Proposition 2.4.2. *Soit $u \in L^2(\Gamma)$ et soit $y_u^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ la solution faible correspondante. Alors*

$$J_\varepsilon"(u)vw = (y_v^\varepsilon, y_w^\varepsilon) + \lambda\,(v,w)_\Gamma \qquad \forall v, w \in L^2(\Gamma).$$

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 2.4.1 et d'arguments identiques à ceux utilisés dans la preuve de la proposition 1.4.2. □

2.4.2 Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité

Théorème 2.4.3. *Si $\bar{u}^\varepsilon \in U_{ad}$ est un contrôle optimal de $\left(P^\varepsilon\right)$, alors il existe $\bar{y}^\varepsilon \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\bar{p}^\varepsilon \in H^2(\Omega)$ satisfaisant*

Equation d'état

$$\begin{cases} -\Delta \bar{y}^\varepsilon + b\bar{y}^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \varepsilon \frac{\partial \bar{y}^\varepsilon}{\partial n} + \bar{y}^\varepsilon = \bar{u}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

Equation adjointe

$$\begin{cases} -\Delta \bar{p}^\varepsilon + b\bar{p}^\varepsilon = \bar{y}^\varepsilon - y_d & \text{dans } \Omega, \\ \varepsilon \frac{\partial \bar{p}^\varepsilon}{\partial n} + \bar{p}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

Condition d'optimalité pour le contrôle

$$\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\bar{p}^\varepsilon + \lambda \bar{u}^\varepsilon, u - \bar{u}^\varepsilon\right)_\Gamma \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \tag{2.26}$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 2.4.1 et d'arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de théorème 1.4.4. □

Théorème 2.4.4. *Si $\bar{u}^\varepsilon \in U_{ad}$ satisfait (2.26), alors $\bar{u}^\varepsilon$ est un contrôle optimal de (P^ε). De plus, $\bar{u}^\varepsilon$ est unique.*

Démonstration. C'est une conséquence directe des propositions 2.4.1 et 2.4.2 et d'arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de théorème 1.4.5 et celle du théorème 1.4.6. □

Comme dans le cas de contrôle dans une condition de Dirichlet, le contrôle optimal correspondant au problème pénalisé peut-être caractérisé de manière simple.

Théorème 2.4.5. *Soit $\bar{u}^\varepsilon \in U_{ad}$ le contrôle optimal de $\left(P^\varepsilon\right)$. Alors*

$$\begin{aligned} \bar{u}^\varepsilon(s) &= \mathrm{Proj}_{[\alpha,\beta]}\left(-\tfrac{1}{\lambda\varepsilon}\,\bar{p}^\varepsilon(s)\right) = \max\left(\alpha, \min\left(\beta, -\tfrac{1}{\lambda\varepsilon}\,\bar{p}^\varepsilon(s)\right)\right) \\ &= \mathrm{Proj}_{[\alpha,\beta]}\left(\frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial \bar{p}^\varepsilon}{\partial n}(s)\right). \end{aligned} \tag{2.27}$$

De plus, $\bar{u}^\varepsilon \in H^{1/2}(\Gamma)$ et $\bar{y}^\varepsilon \in H^2(\Omega)$.

Démonstration. Elle est identique à la preuve du théorème 1.4.7 et sera omise. □

2.5 Analyse asymptotique

Proposition 2.5.1. *Soit $u \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^\infty(\Gamma)$. Soit y_u la solution de l'équation (1) et y_u^ε la solution de l'équation (2) correspondantes à u. Alors l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|y_u - y_u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\varepsilon \|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)},$$

où C est une constante indépendante de u et de ε.

Démonstration. Prenant en compte la proposition 1.2.8 et la proposition 2.2.7, il vient que $y_u, y_u^\varepsilon \in H^1(\Omega)$. Il est alors facile de voir que $y = y_u^\varepsilon - y_u$ est la solution faible de l'équation

$$\begin{cases} -\Delta y + by = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \varepsilon \frac{\partial y}{\partial n} + y = -\varepsilon \frac{\partial y_u}{\partial n} & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Utilisant alors (2.16) et le théorème de trace dans $H^1(\Omega)$, il vient que

$$\|y_u^\varepsilon - y_u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left\| -\varepsilon \frac{\partial y_u}{\partial n} \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C\varepsilon \|y_u\|_{H^1(\Omega)}.$$

La conclusion vient alors de la proposition 1.2.8. □

Lemme 2.5.2. *Si $z \in H^{3/2}(\Omega)$ avec $\Delta z \in L^2(\Omega)$, alors $z_{|\Gamma} \in H^1(\Gamma)$ et $\frac{\partial z}{\partial n} \in L^2(\Gamma)$. De plus, nous avons l'estimation suivante*

$$\|z\|_{H^1(\Gamma)} + \left\|\frac{\partial z}{\partial n}\right\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \left(\|z\|_{H^{3/2}(\Omega)} + \|\Delta z\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Démonstration. Soit z_0, z_1 les solutions respectives de

$$-\Delta z_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad z_0 = z_{|\Gamma} \quad \text{sur } \Gamma,$$

et

$$-\Delta z_1 = \Delta z \quad \text{dans } \Omega, \quad z_1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

D'après la proposition 1.2.8 et la proposition 1.2.2, nous avons que $z_0, z_1 \in H^1(\Omega)$. De plus, il est clair que $z = z_1 + z_0$. De l'autre côté, grâce à la proposition 1.2.4, il vient que $z_1 \in H^2(\Omega)$, satisfait l'estimation

$$\|z_1\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|\Delta z\|_{L^2(\Omega)},$$

et donc $z_0 = z - z_1 \in H^{3/2}(\Omega)$. D'après [9], on a

$$\|z_0\|_{H^1(\Gamma)} + \left\| \frac{\partial z_0}{\partial n} \right\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|z_0\|_{H^{3/2}(\Omega)}.$$

Par conséquent, tenant en compte le théorème de trace dans $H^2(\Omega)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|z\|_{H^1(\Gamma)} + \left\|\frac{\partial z}{\partial n}\right\|_{L^2(\Gamma)} &= \|z_0\|_{H^1(\Gamma)} + \left\|\frac{\partial z}{\partial n}\right\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \|z_0\|_{H^1(\Gamma)} + \left\| \frac{\partial z_0}{\partial n} \right\|_{L^2(\Gamma)} + \left\| \frac{\partial z_1}{\partial n} \right\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq C \left(\|z_0\|_{H^{3/2}(\Omega)} + \|z_1\|_{H^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C \left(\|z\|_{H^{3/2}(\Omega)} + \|z_1\|_{H^{3/2}(\Omega)} + \|z_1\|_{H^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C \left(\|z\|_{H^{3/2}(\Omega)} + \|z_1\|_{H^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C \left(\|z\|_{H^{3/2}(\Omega)} + \|\Delta z\|_{L^2(\Omega)} \right), \end{aligned}$$

ce qui complète la preuve. □

Proposition 2.5.3. *Soit $u \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^\infty(\Gamma)$. Soit p_u la solution de l'équation* (1.19) *et p_u^ε la solution de l'équation* (2.25) *correspondantes à u. Alors l'estimation suivante est satisfaite*

$$\left\| \tfrac{\partial p_u}{\partial n} - \tfrac{\partial p_u^\varepsilon}{\partial n} \right\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)^2 \varepsilon^{1/2} \left(\|u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|y_d\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

où C est une constante indépendante de u, b et de ε.

Démonstration. Soit $\psi_u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ la solution faible du problème

$$\begin{cases} -\Delta\psi + b\psi = y_u^\varepsilon - y_d & \text{dans } \Omega, \\ \psi = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Les fonctions y_u, y_d et y_u^ε appartenant à $L^2(\Omega)$, d'après la proposition 1.2.4 et la proposition 2.2.5, il vient que p_u, p_u^ε et ψ_u^ε appartiennent tous à $H^2(\Omega)$. De simples calculs, montrent que $z^\varepsilon = \psi_u^\varepsilon - p_u$ est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta z + bz = y_u^\varepsilon - y_u & \text{dans } \Omega, \\ z = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Grâce au théorème de trace, à la proposition 1.2.4 et à la proposition 2.5.1, il vient que

$$\begin{aligned} \left\| \tfrac{\partial z^\varepsilon}{\partial n} \right\|_{L^2(\Gamma)} &\leq C \|z^\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C\big(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\big) \|y_u^\varepsilon - y_u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\big(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\big)^2 \varepsilon \|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

De l'autre côté, $\omega^\varepsilon = p_u^\varepsilon - \psi_u^\varepsilon$ est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta\omega + b\omega = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \varepsilon \dfrac{\partial\omega}{\partial n} + \omega = -\varepsilon \dfrac{\partial\psi_u^\varepsilon}{\partial n} & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Utilisant le lemme 2.5.2, il vient que

$$\begin{aligned} \left\| \tfrac{\partial \omega^\varepsilon}{\partial n} \right\|_{L^2(\Gamma)} &\leq C \left(\|\omega^\varepsilon\|_{H^{3/2}(\Omega)} + \|\Delta\omega^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\right) \\ &= C \left(\|\omega^\varepsilon\|_{H^{3/2}(\Omega)} + \|-b\omega^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\right) \\ &\leq C \left(\|\omega^\varepsilon\|_{H^{3/2}(\Omega)} + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|\omega^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\right) \\ &\leq C \left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \|\omega^\varepsilon\|_{H^{3/2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Grâce à (2.23), au théorème de trace dans $H^2(\Omega)$ et à la proposition 2.2.7, nous déduisons que

$$\begin{aligned}
\left\|\tfrac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial n}\right\|_{L^2(\Gamma)} &\leq C\left(1+\|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\varepsilon^{-1/2}\left\|-\varepsilon\,\tfrac{\partial\psi_u^\varepsilon}{\partial n}\right\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\\
&\leq C\left(1+\|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\varepsilon^{1/2}\left\|\psi_u^\varepsilon\right\|_{H^2(\Omega)}\\
&\leq C\left(1+\|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\varepsilon^{1/2}\left\|y_u^\varepsilon-y_d\right\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leq C\left(1+\|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\varepsilon^{1/2}\left(\|u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}+\|y_d\|_{L^2(\Omega)}\right). \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

Finalement, remarquant que

$$\left\|\tfrac{\partial p_u}{\partial n}-\tfrac{\partial p_u^\varepsilon}{\partial n}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\|\tfrac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial n}\right\|_{L^2(\Gamma)}+\left\|\tfrac{\partial z^\varepsilon}{\partial n}\right\|_{L^2(\Gamma)}$$

nous obtenons le résultat énoncé en combinant (2.28) et (2.29). □

Maintenant nous sommes en mesure d'établir notre résultat principal.

Théorème 2.5.4. *Soit $\bar{u}$ le contrôle optimal de (P) et $\bar{u}^\varepsilon$ le contrôle optimal de (P^ε). Alors on a l'estimation suivante*

$$\|\bar{u}^\varepsilon-\bar{u}\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\varepsilon^{1/2},$$

où C est une constante indépendante de ε.

Démonstration. Puisque $\bar{u}^\varepsilon \in U_{ad}$, d'après les conditions d'optimalité relatives à (P), on a

$$J'(\bar{u})(\bar{u}-\bar{u}^\varepsilon) \leq 0.$$

De même , puisque $\bar{u} \in U_{ad}$, d'après les conditions d'optimalité relatives à (P^ε), on a

$$J'_\varepsilon(\bar{u}^\varepsilon)(\bar{u}-\bar{u}^\varepsilon) \geq 0.$$

Prenant en compte la proposition 1.4.1 et la proposition 2.4.1, nous déduisons alors que

$$\begin{aligned}
\left(J'(\bar{u})-J'(\bar{u}^\varepsilon)\right)(\bar{u}-\bar{u}^\varepsilon) &\leq -J'(\bar{u}^\varepsilon)(\bar{u}-\bar{u}^\varepsilon)\\
&\leq \left(J'_\varepsilon(\bar{u}^\varepsilon)-J'(\bar{u}^\varepsilon)\right)(\bar{u}-\bar{u}^\varepsilon)\\
&= \left(\tfrac{\partial p_{\bar{u}^\varepsilon}}{\partial n}-\tfrac{\partial \bar{p}^\varepsilon}{\partial n},\bar{u}-\bar{u}^\varepsilon\right)_\Gamma\\
&\leq \left\|\tfrac{\partial p_{\bar{u}^\varepsilon}}{\partial n}-\tfrac{\partial \bar{p}^\varepsilon}{\partial n}\right\|_{L^2(\Gamma)}\|\bar{u}-\bar{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

De l'autre côté, prenant en compte (1.23) et (1.22), on obtient

$$\left(J'(\bar{u})-J'(\bar{u}^\varepsilon)\right)(\bar{u}-\bar{u}^\varepsilon) = J"(\bar{u})(\bar{u}-\bar{u}^\varepsilon)^2 \geq \lambda\|\bar{u}-\bar{u}^\varepsilon\|^2_{L^2(\Gamma)}.$$

Combinant ces deux estimations, nous obtenons finalement que

$$\|\bar{u}-\bar{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} \leq \tfrac{1}{\lambda}\left\|\tfrac{\partial p_{\bar{u}^\varepsilon}}{\partial n}-\tfrac{\partial \bar{p}^\varepsilon}{\partial n}\right\|_{L^2(\Gamma)}$$

et la conclusion vient de la proposition 2.5.3 et du fait que $\bar{u}^\varepsilon$ est borné. □

Appendice : Notations et résultats auxiliaires

Caractérisation de la géométrie du domaine

Soit $n \geq 2$ et soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière Γ. On dira que Ω est de classe $C^{m,\gamma}$ si pour tout point x de la frontière Γ, il existe un système de coordonnées orthogonales $(y_1, \cdots, y_n)$, un hypercube $U^x = \Pi_{i=1}^n]-a_i, a_i[$ et une application

$$\Phi^x : \prod_{i=1}^{n-1}]-a_i, a_i[\quad \longrightarrow \quad]-\tfrac{a_n}{2}, \tfrac{a_n}{2}[$$

de classe $C^{m,\gamma}$ tel que

$$\begin{aligned} \Omega \cap U^x &= \{(y_1, \cdots, y_n) \in U^x \mid y_n > \Phi^x(y_1, \cdots, y_{n-1})\}, \\ \Gamma \cap U^x &= \{(y_1, \cdots, y_n) \in U^x \mid y_n = \Phi^x(y_1, \cdots, y_{n-1})\}. \end{aligned}$$

Espaces de fonctions différentiables

Rappelons qu'un n-uplet de la forme $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est appelé multi-indice d'ordre $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Si α est un multi-indice, on note D^α l'opérateur différentiel défini par

$$D^\alpha z(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} z(x)}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

L'ensemble $C^m(\overline{\Omega})$ représente l'espace de toutes les fonctions $z \in C(\overline{\Omega})$ dont toutes les dérivées partielles $D^{\boldsymbol{\alpha}} z$ ($|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m$) sont bornées et uniformément continues dans $\overline{\Omega}$. De la même façon, nous définissons $C^{m,1}(\overline{\Omega})$ comme l'espace des fonctions $z \in C^m(\overline{\Omega})$ dont toutes les dérivées partielles $D^{\boldsymbol{\alpha}} z$ ($|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m$) sont lipchitziennes dans $\overline{\Omega}$. Munis des normes

$$\|z\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \max_{0 \leqslant |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |D^{\boldsymbol{\alpha}} z(x)|,$$

$$\|z\|_{C^{m,1}(\overline{\Omega})} = \|z\|_{C^m(\overline{\Omega})} + \max_{0 \leqslant |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m} \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^{\boldsymbol{\alpha}} z(x) - D^{\boldsymbol{\alpha}} z(y)|}{|x-y|},$$

$C^m(\overline{\Omega})$ et $C^{m,1}(\overline{\Omega})$ sont des espaces de Banach (Nous désignerons $C^0(\overline{\Omega})$ par $C(\overline{\Omega})$).

Espaces de Lebesgue

Une fonction mesurable (au sens de Lebesgue) $z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dans $L^p(\Omega)$ si

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |z(x)|^p \, dx < \infty, & \text{si } 1 \leqslant p < \infty, \\ \displaystyle\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |z(x)| = \inf \{M \in \mathbb{R} \mid \; |z(x)| \leqslant M \text{ p.p. dans } \Omega\} < \infty, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Munis des normes

$$\begin{cases} \|z\|_{L^p(\Omega)} = \left(\displaystyle\int_\Omega |z(x)^p| \, dx\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leqslant p < \infty, \\ \|z\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_{x\in\Omega} |z(x)| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach. L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(z, y) = \int_\Omega z(x)y(x) \, dx.$$

Espaces de Sobolev

Soit $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω. Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ de la manière suivante

$$H^m(\Omega) = \left\{ z \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha z \in L^2(\Omega) \; \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \; |\alpha| \leq m \right\},$$

muni de la norme

$$\|z\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha z\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous noterons aussi par $H^1_0(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Nous savons que $H^1_0(\Omega)$ est caractérisé de la manière suivante

$$H^1_0(\Omega) = \left\{ z \in H^1(\Omega) \mid z_{|\Gamma} = 0 \right\}.$$

Nous désignerons par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H^1_0(\Omega)$ et on le munit de la norme duale

$$\|f\|_{H^{-1}} = \sup_{|z|_{H^1_0(\Omega)} \leq 1} \langle f, z \rangle_{H^{-1}, H^1_0}.$$

Pour $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, l'espace de Sobolev fractionnaire $H^s(\Omega)$, est défini par la norme :

$$\|y\|_{H^s(\Omega)} = \left(\|y\|^2_{H^m(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{(D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y))^2}{|x-y|^{2(\sigma+\frac{n}{2})}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $s = m + \sigma$, m est la partie entière de s et $\sigma \in]0, 1[$ sa partie décimale.
Nous noterons aussi par $H^s_0(\Omega)$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$.

Inégalités

Nous collectons aussi les inégalités classiques suivantes

$$\|z\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall z \in H_0^1(\Omega) \qquad \text{(Inégalité de Poincaré)},$$

$$\|z\|_{L^4(\Omega)} \leq C_S \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\ z \in H^1(\Omega) \qquad \text{(Inégalité de Sobolev)}.$$

Une conséquence directe de l'inégalité de Poincaré est que la semi-norme

$$|z|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Théorème de Lax-Milgram

Soit H un espace de Hilbert réel de norme $\|\cdot\|_H$. On considère une forme bilinéaire continue sur $H \times H$, i.e.

$$\exists M > 0,\ \forall y, z \in H, \quad |a(y,z)| \leq M \|y\|_H \|z\|_H\,,$$

et on suppose qu'elle est elliptique (ou coercive) sur H, i.e.

$$\exists \alpha > 0,\ \forall z \in H, \quad a(z,z) \geq \alpha \|z\|_H^2\,.$$

On considère aussi une forme linéaire F sur H. Alors le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } y \in H \text{ tel que} \\ \forall z \in H, \quad a(y,z) = F(z), \end{cases}$$

admet une solution unique $z \in H$. De plus, cette solution vérifie

$$\|y\|_H \leq \tfrac{1}{\alpha}\|F\|_{H'}.$$

Théorème de trace pour $H^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ de classe $C^{1,1}$. Alors l'application trace

$$\gamma_0 : \quad v \mapsto \quad \gamma_0(v) = v_{|\Gamma}$$

définie pour $v \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$, se prolonge par continuité en un opérateur de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$. Cela implique en particulier qu'il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\|\gamma_0(v)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

De plus, cet opérateur admet un inverse à droite continu. (cf. Théorème 1.5.1.2 [8])

Théorème de trace pour $H^2(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ de classe $C^{1,1}$. Alors l'application trace

$$(\gamma_0, \gamma_1): \quad v \mapsto \quad \Big(\gamma_0(v) = v_{|\Gamma}, \gamma_1(v) = \big(\tfrac{\partial v}{\partial n}\big)_{|\Gamma}\Big)$$

définie pour $v \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$, se prolonge par continuité en un opérateur de $H^2(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{3/2}(\Gamma)$. Cela implique en particulier qu'il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\|\gamma_0(\tfrac{\partial v}{\partial n})\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C\|v\|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

De plus, cet opérateur admet un inverse à droite continu. (cf. Théorème 1.5.1.2 [8])

Formule de Green dans $H^2(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné de frontière Γ de classe C^1 par morceaux, $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$. Alors

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma.$$

Bibliographie

[1] N. Arada, J.-P. Raymond, Dirichlet boundary control of semilinear parabolic equations. I - Problems with no state constraints, Appl. Math. Optim., 45, 125-143, 2002.

[2] N. Arada, H. El Fekih, J.-P. Raymond, Asymptotic analysis of some control problems. Asymptot. Anal., 24, 343-366, 2000.

[3] F. Ben Belgacem, H. El Fekih, J.-P. Raymond, A penalized Robin approach for solving a parabolic equation with nonsmooth Dirichlet boundary conditions, Asymptot. Anal., 34, 121-136, 2003.

[4] F. Ben Belgacem, H. El Fekih, H. Metoui, Singular perturbation for the Dirichlet boundary control of elliptic problems, ESAIM : M2AN, 37, 833–850, 2003.

[5] E. Casas, M. Mateos, J.-P. Raymond, Penalization of Dirichlet optimal control problems, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 15, 782–809, 2009.

[6] E. Casas, J.-P. Raymond, Error estimates for the numerical approximation of Dirichlet boundary control for semilinear elliptic equations, SIAM J. Control Optim., 45, 1586–1611, 2006.

[7] M. Costabel, M. Dauge, A singularly perturbed mixed boundary value problem, Comm. Partial Diff. Eq., 21, 1919–1949, 1996.

[8] P. Grisvard, Elliptic problems in nonsmooth domains, Pitman, Boston-London-Melbourne, 1985.

[9] D. Jerison, C. Kenig, The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains, J. Funct. Anal., 130 (1995), pp. 161–219.

[10] J.-L. Lions, Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod, 1968.

[11] J.-L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vols. 1 et 2. Dunod, Paris, 1968.

[12] C.V. Pao, Nonlinear parabolic and elliptic equations, Plenum Press, New York, 1992.

[13] G. Stampacchia, Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Ann. Inst. Fourier Grenoble 15, pp. 189-258, 1965.

[14] F. Tröltzsch, Optimal control of partial differential equations : theory, methods, and applications, Vol. 112, American Mathematical Soc., 2010.