République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....

№ de série : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité Mathématiques.

Option Analyse Fonctionnelle.

Thème

Sur les multi-applications Pettis intégrables

par

Boulhammes Imene.

Bouredjoul Amina.

Devant le jury

Président	D. Azzam-Laouir	Prof. Université de Jijel
Encadreur	I. Boutana	M.C.B. Université de Jijel
Examinateur	F. Selamnia	M.C.B. Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

Table des matières

Introduction

Les inclusions différentielles représentent un sujet largement abordé ces dernières années. Elle sont utilisées pour construire des modèles Mathématiques de phénomènes physiques et d'économie, par conséquent, elles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées. L'étude revient souvent à déterminer les solutions quand elles existent, ou à donner une étude analytique pour en dégager leurs propriétés.

Au fil des années plusieurs auteurs se sont intéressés à l'étude de l'intégrale de Pettis qui est l'une des extensions de l'intégrale de Lebesgue aux cas vectoriel. Elle a été introduite par Pettis (1938) [12], et beaucoup étudiée ensuite, par Musial [11], Castaing [8] et de nombreux autres chercheurs.

L'intégrale de Pettis est un concept plus général que celui de Bochner dans la théorie de l'intégration dans les espaces de dimension infinie, en effet, il est connu qu'un espace de Banach E est de dimension infinie si est seulement si il existe une application Pettis intégrable qui n'est pas Bochner intégrable.

Le but de ce travail est de présenter quelques résultats dans ce domaine, se rapportant à la Pettis intégrabilité, avec une application à une inclusion différentielle du second ordre dans un espace de Banach séparable avec conditions aux limites en deux points de la forme

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases}\ddot{u}(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)), \text{ p.p. } t \in [0,1],\\ u(0) = u(1) = 0.\end{cases}$$

Ce mémoire se présente en trois chapitres. Dans le premier, on présente les théorèmes fondamentaux pour mener à bien ce travail, on donne aussi un rappel sur l'analyse fonctionnelle et l'analyse multivoque.

Le deuxième chapitre est destiné à l'étude de la Pettis intégration et de la Bochner intégration avec une comparaison entre les deux.

Le troisième chapitre concerne l'étude des propriétés topologiques de l'ensemble des solutions de l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_\Gamma)\begin{cases}\ddot{u}(t)\in\Gamma(t), \quad \text{p.p. } t\in[0,1],\\ u(0)=u(1)=0,\end{cases}$$

où, $\Gamma : [0,1] \rightrightarrows E$ est une multi-application mesurable scalairement Pettis uniformément intégrable, à valeurs convexes compactes, et on présente un théorème d'existence pour l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_F)$ où F est une multi-application semi continue supérieurement à valeurs convexes compactes et $F(t,u(t),\dot{u}(t))\subset\Gamma(t),$ p.p. $t\in[0,1]$.

L'étude des équation ordinaires du second ordre avec deux conditions aux limites semblent revenir à Hartman (1964)[9], cette étude a été généralisée par Gupta (1992), Marano (1992,1994), Gomaa (2000), ils ont donné des résultats d'existence pour des équations et inclusions différentielles du second ordre avec des conditions aux limites en deux et trois points. Tous ces résultats ont été obtenus dans un espace de dimension finie. Azzam, Castaing et Thilbault [4] ont généralisé ces résultats aux espaces de Banach séparables.

Chapitre 1

Notations et préliminaires

1.1 Notations

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et théorèmes de base qui nous seront utiles dans les chapitres suivants.

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce mémoire. Soient E un espace de Banach, $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ son dual topologique, $i.e$, l'espace des formes linéaires continues définies sur E, $\langle ., . \rangle$ leur produit de dualité, E'' le bidual de E , $i.e$, l'espace des formes linéaires continues définies sur E' et $\| \, . \, \|$ la norme de E.

on note par

- $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$.
- $\sigma(E, E')$ la topologie faible sur E.
- E_σ l'espace de Banach E muni de la topologie faible.
- $\tau(E', E)$ la topologie de Mackey.
- $\overline{B}_E$ la boule unité fermée de E.
- $\overline{B}_{E'}$ la boule unité fermée de E'.
- $D(f)$ domaine (effectif) de la fonction f.
- $co(A)$ l'enveloppe convexe de A, A un sous ensemble de E.
- $\overline{co}(A)$ l'enveloppe convexe fermée de A.
- $\delta(., A)$ la fonction indicatrice de A, définie par

$$\delta(x, A) = \begin{cases} 0, & si \quad x \in A, \\ +\infty, & si \quad x \notin A. \end{cases}$$

- $\delta^*(.,A)$ la fonction polaire de $\delta(.,A)$, appelée aussi fonction d'appui de A, définie sur E' par

$$\delta^*(x',A) = \sup_{x\in A}\langle x',x\rangle,\ \forall x' \in E'. \tag{1.1}$$

Notons que, si A est un convexe fermé de E, nous avons la relation suivante

$$d(x,A) = \sup_{x'\in \overline{B}_{E'}} \big[\langle x',x\rangle - \delta^*(x',A)\big],\ \forall x \in E \tag{1.2}$$

avec

$$d(x,A) = \inf_{a\in A} \parallel x-a \parallel,$$

est la distance du point x à l'ensemble A.

- $\mathbb{1}_A$ la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble donné, définie par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x \in A, \\ 0, & si \quad x \notin A. \end{cases}$$

On note par

- $\mathcal{L}([0,1])$ la tribu de Lebesgue sur $[0,1]$.
- $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de tous les sous ensembles de E.
- $\mathcal{B}(E)$ la tribu de Borel sur l'espace E.
- $\mathbf{L}^p_E([0,1])$ $(1 \le p < \infty)$ l'espace des applications $p^{\text{ème}}$ intégrables, c'est à dire, $\int_{[0,1]} \parallel u(t) \parallel^p dt < +\infty$, définies sur $[0,1]$ à valeurs dans l'espace de Banach E muni de la norme,

$$\parallel u(.) \parallel_{\mathbf{L}^p} = \Big(\int_{[0,1]} \parallel u(t) \parallel^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

- $\mathbf{L}^\infty_E([0,1])$ l'espace des applications $u : [0,1] \to E$ essentiellement bornées sur E muni de la norme,

$$\parallel u(.) \parallel_{\mathbf{L}^\infty} = \inf\big\{c \ge 0,\ \parallel u(t) \parallel \le c,\ \text{p.p sur } [0,1]\big\}.$$

- $\mathbf{C}_E([0,1])$ l'espace de Banach de toutes les applications $u : [0,1] \to E$ continument différentiables muni de la norme sup,

$$\parallel u(.) \parallel_{\mathbf{C}} = \sup_{t\in[0,1]} \parallel u(t) \parallel .$$

- $\mathbf{C}^1_E([0,1])$ l'espace de Banach de toutes les applications continues $u : [0,1] \to E$, ayant une dérivée continue $\dot{u}$, muni de la norme,

$$\parallel u(.) \parallel_{\mathbf{C}^1} = \max\Big\{ \sup_{t\in[0,1]} \parallel u(t) \parallel, \sup_{t\in[0,1]} \parallel \dot{u}(t) \parallel \Big\} = \max\big\{ \parallel u(.) \parallel_{\mathbf{c}}, \parallel \dot{u}(.) \parallel_{\mathbf{c}} \big\}$$

• $\mathbf{S}_\Gamma$ l'ensemble des sélections mesurables de la multi-application Γ.

• $\mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$ l'ensemble des sélections Pettis-intégrables de la multi-application Γ.

• $\mathbf{P}^1_E([0,1])$ l'espace de toutes les applications Pettis-intégrables définies sur $[0,1]$ à valeurs dans E.

• $\mathbf{W}^{2,1}_{P,E}([0,1])$ l'espace de toutes les applications $u \in \mathbf{C}_E([0,1])$ ayant une dérivée première absolument continue et une dérivée seconde faible dans $\mathbf{P}^1_E([0,1])$.

1.2 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Les résultats de cette section sont pris des références [6, 13]

1.2.1 Espace topologique

Définition 1.2.1. *Soit X un ensemble non vide. On dit que Θ est une topologie sur X si elle vérifie les propriétés suivantes*
1) $\emptyset$ et X sont des éléments de Θ.
2) Toute intersection finie d'éléments de Θ est un élément de Θ. C'est à dire,

$$\forall O_1, O_2, ..., O_n \in \Theta, \ \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \Theta.$$

3) Toute réunion (quelconque) d'éléments de Θ est un élément de Θ. C'est à dire,

$$\forall (O_i)_{i\in I} \subset \Theta, \ \bigcup_{i=1}^{n} O_i \in \Theta.$$

• *Les éléments de Θ sont appelés les ouverts de la topologie Θ.*

Définition 1.2.2. *On appelle espace topologique le couple (X,Θ) constitué par un ensemble X et par une topologie Θ sur cet ensemble.*

Définition 1.2.3. *Soient (X,Θ) un espace topologique, on appelle complémentaire de A dans X et on note $X\backslash A$ lorsque il n'y a pas d'ambiguïté l'ensemble $\{x \in X, x \notin A\}$.*

Définition 1.2.4. *Soient (X,Θ) un espace topologique et $x \in X$. On dit qu'une partie V de X est un voisinage de x s'il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset V$. Plus généralement, soit A une partie de X, on appelle voisinage de A toute partie V de X telle qu'il existe un ouvert U de X vérifiant $A \subset U \subset V$.*

Définition 1.2.5. *Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique (X, Θ). On dit que A est un fermé ou partie fermée de X lorsque le complémentaire de A dans X est ouvert. Autrement dit, si l'on a $X \backslash A \in \Theta$.*

Proposition 1.2.1. *Soit X un espace topologique. Alors*
1) *Toute intersection de fermés est un fermé.*
2) *Toute réunion finie de fermés est un fermé.*

Ces propriétés des parties fermées découlent directement des propriétés vérifiées par les parties ouvertes d'une topologie et des égalités suivantes

$$X \setminus (\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i), \quad X \setminus (\bigcap_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus U_i)$$

Définition 1.2.6. *Soient X un espace topologique, $x \in X$ et $A \subset X$.*
On dit que x est adhérent à A lorsque tout voisinage de x rencontre A. L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et se note $\overline{A}$.

Définition 1.2.7. *Soit (X, Θ) un espace topologique et soient $A, B \subset X$. On dit que A est dense dans B si et seulement si $A \subset B \subset \overline{A}$.*
- *On dit que A est dense dans X ou que A est partout dense si $A \subset X \subset \overline{A}$, et comme nous avons toujours $\overline{A} \subset X$, alors A est partout dense si et seulement si $\overline{A} = X$.*

Définition 1.2.8. *(**Espace séparable**).*
Soit (X, Θ) un espace topologique et soit $A \subset X$. On dit que X est séparable si et seulement si il admet un sous ensemble dénombrable partout dense.

Exemple 1.2.1. $\mathbb{R}^n$ *est séparable.*

Définition 1.2.9. *(**Espace métrisable**).*
Un espace topologique est dit métrisable s'il existe une distance induisant sa topologie.

1.2.2 Espace métrique

Définition 1.2.10. *Soit X un ensemble non vide. On dit que $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ est une distance sur X si et seulement si elle vérifie les trois propriétés suivantes :*
1) $\forall x, y \in X, \ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \ x = y.$
2) $\forall x, y \in X, \ d(x, y) = d(y, x).$

3) $\forall x, y, z \in X,\ d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ *(inégalité triangulaire).*

• *On appelle espace métrique tout couple* (X,d) *constitué d'un ensemble* X *et d'une distance sur* X.

Définition 1.2.11. *Soient* X *un espace métrique et* A *une partie non vide de* X. *La distance d'un point* $x \in X$ *à l'ensemble* A *est donnée par*

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a).$$

Définition 1.2.12. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de l'espace métrique* (X,d). *Soit* $x \in X$. *On dit que la suite* $(x_n)_n$ *converge vers* $x \in X$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} :\ n \ge n_0 \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Proposition 1.2.2. *Soient* X *un espace métrique et* A *un ensemble non vide de* X. *Alors,*

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x,A) = 0 \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \subset X,\ \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Proposition 1.2.3. *Soit* X *un espace métrique. On dit que* x *est une valeur d'adhérence de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si et seulement si il existe une suite extraite* $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* x.

1.2.3 Espace complet

Définition 1.2.13. *Soit* X *un espace métrique. La suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite une suite de Cauchy si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N} :\ p, q \ge n_0 \Longrightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Définition 1.2.14. *Soit* X *un espace métrique. On dit que* X *est un espace complet si et seulement si toute suite de Cauchy de* X *converge dans* X.

Définition 1.2.15. *Soit* X *un espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Une norme sur X *est une fonction* $N : X \to \mathbb{R}_+$ *vérifiant*
1) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2) $\forall x \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{R};\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
3) $\forall x, y \in X,\ N(x+y) \le N(x) + N(y)$.

• *Le couple* (X,N) *où* X *est un espace vectoriel et* N *est une norme sur* X *est appelé espace normé et on note souvent* $\|\ .\ \|$ *au lieu de* N.

Définition 1.2.16. *Un espace de Banach est un espace vectoriel (réel ou complexe) normé complet.*

1.2.4 Espace compact

Définition 1.2.17. *Soit X un espace topologique. On dit que X est un espace de Hausdorff (ou espace séparé) si*

$$\forall x, y \in X,\ x \neq y :\ \exists V \in \mathcal{V}(x),\ \exists W \in \mathcal{V}(y) \quad \textit{tell que } V \cap W = \emptyset.$$

$\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x, $\mathcal{V}(y)$ l'ensemble des voisinages de y.

Remarque 1.2.1. *Tout espace métrique est un espace de Hausdorff.*

Définition 1.2.18. *(**Recouvrement d'un ensemble**).*
Soit (X, Θ) un espace topologique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de X. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de $B \subset X$ si $B \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.
- *Soit $B = X$, $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X si $X \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ et comme $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \subset X$ on aura $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X si $X = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.*
- *Si de plus I est un ensemble fini, on dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement fini de X.*
- *Si $(A_i)_{i\in I} \subset \Theta$ on dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert.*

Définition 1.2.19. *(**Sous recouvrement**).*
Soit $(A_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $B \subset X$. Si $J \subset I$ et $(A_j)_{j\in J}$ est un recouvrement de B, alors $(A_j)_{j\in J}$ est appelé un sous-recouvrement du recouvrement $(A_i)_{i\in I}$ de B.

Définition 1.2.20. *Soit (X, Θ) un espace topologique. On dit que X est compact s'il est séparé et de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Exemple 1.2.2.
- *$\mathbb{R}$ n'est pas compact.*
- *Tout intervalle de la forme $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est compact.*
- *Tout ensemble A fermé borné de $\mathbb{R}^n$ est compact.*

Proposition 1.2.4. *Tout sous-ensemble fermé d'un espace topologique compact est compact.*

Définition 1.2.21.
Soit X un espace topologique,

• *Un sous-ensemble S de X est dit compact si de tout recouvrement ouvert de S on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

• *S est dit séquentiellement compact si toute suite de points de S admet une sous-suite qui converge vers un point de S.*

• *S est relativement compact si $\overline{S}$ est compact.*

• *S est relativement séquentiellement compact si toute suite de points de S admet une sous-suite qui converge vers un point de X.*

Définition 1.2.22. *Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est précompact (ou bien totalement borné) si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$ il existe un recouvrement fini de E par des boules de rayon ε, c'est à dire $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.*

Théorème 1.2.1. *Tout espace métrique précompact est séparable.*

Théorème 1.2.2. *Soit (X, d) un espace métrique, alors*

$$X \text{ compact} \quad \Longleftrightarrow \quad X \text{ complet et précompact.}$$

1.2.5 Notions de mesurabilité

Définition 1.2.23. *Soit T un ensemble non vide. On appelle tribu ou σ-algèbre sur T une famille Σ de parties de T possédant les propriétés suivantes :*

1) $T \in \Sigma$.

2) Si $A \in \Sigma$, alors $T \setminus A \in \Sigma$.

3) Si $A_n \in \Sigma$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

• *On appelle espace mesurable tout couple (T, Σ) formé d'un ensemble T et d'une tribu Σ sur T.*

• *Si la troisième relation est vraie pour les unions finies seulement, on dit que Σ est une algèbre sur T.*

• *Si T est un espace topologique, la tribu Borélienne sur T notée $\mathcal{B}(X)$ est la plus petite tribu contenant la topologie de T.*

Définition 1.2.24. *Soit (T, Σ) un espace mesurable et soient X un espace métrique, $\mathcal{B}(X)$ la tribu Borélienne sur X et $f : T \to X$.*

• *On dit que f est $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$-mesurable si et seulement si $\forall A \in \mathcal{B}(X), f^{-1}(A) \in \Sigma$.*

• *On dit que f est Σ-étagée (resp. dénombrablement Σ-étagée) si f est Σ-mesurable et $f(T)$ est finie (resp. $f(T)$ est dénombrable).*

Ceci revient à dire qu'il existe une Σ-partition finie (resp. dénombrable) $(T_j)_{j\in J}$ de T, telle que f soit constante sur chaque T_j,

$$f = \sum_{j\in J} a_j \chi T_j, \text{ avec } T_j = \{x \in T / f(x) = a_j, \ a_j \in X\}.$$

• *On dit que f est Bochner Σ-mesurable si f est Σ-mesurable et $f(T)$ est un sous ensemble séparable de X.*

Remarque 1.2.2. *Si X est un espace métrique séparable, alors*

$$f \text{ Bochner } \Sigma\text{-mesurable} \Longleftrightarrow f \text{ est } \Sigma\text{-mesurable.}$$

Définition 1.2.25. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, E un espace de Banach, E' son dual topologique.*
Une application $f : X \to E$ est dite faiblement mesurable si pour tout $x' \in E'$, l'application $x \mapsto \langle x', f(x)\rangle_{E',E}$ est mesurable de X dans $\mathbb{R}$.

Lemme 1.2.5. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique et $f : T \to X$. Les caractérisations suivantes sont équivalentes*
a) *f est Bochner Σ-mesurable ;*
b) *il existe une suite d'applications $(f_n)_n$ Σ-étagées définies sur T vers X convergent simplement vers f, (i.e. $\forall t \in T, \ \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(t) = f(t)$) ;*
c) *il existe une suite d'applications $(f_n)_n$ dénombrablement Σ-étagées convergeant uniformément vers f (i.e. $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{t\in T} \| f_n(t) - f(t) \| = 0$).*

Corollaire 1.2.6. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique, $f : T \to X$ et soit $(f_n)_n$ une suite d'applications Σ-mesurables définies sur T à valeurs dans X telles que, pour chaque $t \in T$, $\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(t) = f(t)$ alors f est Σ-mesurable.*

Définition 1.2.26. *Soit (T, Σ) un espace mesurable. Alors l'application $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ est une mesure sur T si*
1) *$\mu(\emptyset) = 0$.*
2) *μ est σ-additive, c'est à dire que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Σ, disjoints deux à deux (i.e. $A_n \cap A_m = \emptyset$, si $n \neq m$), on a*

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

• *Le triplet (T, Σ, μ) est appelé espace mesuré.*

Définition 1.2.27. *Soient (T, Σ, μ) un espace mesuré.*

- *On dit que μ est finie (ou que (T, Σ, μ) est fini) si $\mu(T) < +\infty$.*
- *On dit que μ est σ-finie (ou que (T, Σ, μ) est σ-fini) si*

$$\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma,\ \mu(A_n) < +\infty,\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Définition 1.2.28. *Soient (T, Σ, μ) un espace mesuré et $A \in \Sigma$.*

- *On dit que A est μ-négligeable si*

$$\exists B \in \Sigma : A \subset B \text{ et } \mu(B) = 0.$$

- *On dit que μ est une mesure complète (ou que (T, Σ, μ) est complet) si tout les ensembles μ-négligeables sont mesurables i.e,*

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(T),\ \big(A \subset B,\ B \in \Sigma,\ \mu(B) = 0\big) \Longrightarrow A \in \Sigma.$$

Définition 1.2.29. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, E un espace de Banach, E' son dual topologique.*
Une application $f : X \to E$ est dite faiblement mesurable si pour tout $x' \in E'$, l'application $x \mapsto \langle x', f(x)\rangle_{E',E}$ est mesurable de X dans $\mathbb{R}$.

Le Théorème de mesurabilité de Pettis, donne une relation entre fortement mesurable et faiblement mesurable.

Théorème 1.2.3. *Une application $f : X \to E$ est fortement μ-mesurable si et seulement si,*
(i) f est faiblement mesurable,
(ii) f est à valeurs μ-essentiellement séparables i.e., $\exists A \in \mathcal{N}(\mu)$ tel que $f(X \setminus A)$ est un sous ensemble séparable de E.
($\mathcal{N}(\mu)$, la collection des ensembles μ-négligeables).

Proposition 1.2.7. *Soient (T_1, Σ_1), (T_2, Σ_2), (T_3, Σ_3) trois espaces mesurables. Soient $g_1, g_2, ..., g_n$ des fonctions (Σ_1, Σ_2)-mesurables définies de T_1 vers T_2, h une fonction $(\Sigma_2, \Sigma_3)-$mesurable définie de T_2 vers T_3, alors la fonction $f : T_1 \to T_2$, définie par*

$$f(t) = h(g_1(t), ..., g_n(t))$$

est $(\Sigma_1, \Sigma_3)-$mesurable.

1.2.6 Ensemble convexe

Définition 1.2.30. *Soit E un espace vectoriel, et soit $A \subset E$. On dit que A est convexe si seulement si*

$$\forall a, b \in A,\ \lambda \in [0,1] :\ \lambda a + (1-\lambda) b \in A.$$

Autrement dit, pour $a, b \in A$ le segment de droite

$$[a, b] = \big\{\lambda a + (1-\lambda) / \ \lambda \in [0,1]\big\} \subset A.$$

Définition 1.2.31. *On appelle simplexe de $\mathbb{R}^n$ l'ensemble Δ_n défini par*

$$\Delta_n = \Big\{(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / \ \lambda_i \geq 0 \ et \ \sum_1^n \lambda_i = 1\Big\}.$$

Définition 1.2.32. *Soit E un espace vectoriel et soient $x_1, x_2, ..., x_n \in E$. On appelle combinaison convexe des éléments $x_1, x_2, ..., x_n$ tout élément $x = \sum_1^n \lambda_i x_i$ tel que $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \Delta_n$.*

Proposition 1.2.8. *Soit E un espace vectoriel et soit $A \subset E$. Alors A est convexe si et seulement si il contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments.*

1.2.7 Enveloppe convexe

Définition 1.2.33. *Soit A un sous-ensemble d'un espace vectoriel E. On appelle enveloppe convexe de A, qu'on note $co(A)$, l'intersection de tous les sous-ensembles convexes de E contenant A. C'est donc le plus petit convexe de E contenant A.*
• *Si E est un espace vectoriel topologique, on appelle enveloppe convexe fermée de A, que l'on note $\overline{co}(A)$, l'intersection de tous les sous-ensembles convexes fermés de E contenant A, c'est en fait le plus petit convexe fermé de E contenant A.*

Théorème 1.2.4. *Soit E un espace vectoriel et $A \subset E$. Alors*

$$co(A) = \Big\{\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j :\ n \in \{0, 1, ...\},\ (\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in \Delta_n,\ x_1, ..., x_{n+1} \in A\Big\}.$$

Théorème 1.2.5. ***(Théorème de Carathéodory).***
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \subset \mathbb{R}^n$. Alors

$$co(A) = \Big\{\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j :\ (\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in \Delta_{n+1},\ x_1, ..., x_{n+1} \in A\Big\}.$$

Théorème 1.2.6. *Soient E un espace vectoriel, A et B deux sous-ensembles de X. Alors*
i) $co(\alpha.A) = \alpha.co(A), \qquad co(A+B) = co(A) + co(B)$.
Si E est un espace vectoriel topologique, alors
ii) *Si A est un sous ensemble convexe de E, $\overline{A}$ l'est aussi.*
iii) $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}$.
iv) $\overline{co}(\alpha.A) = \alpha.\overline{co}(A)$.
v) *Si $\overline{co}(A)$ est compact,* $\overline{co}(A+B) = \overline{co}(A) + \overline{co}(B)$.

1.3 La topologie de la convergence uniforme

Soit X un ensemble, $(Y, \| \,.\, \|)$ un espace vectoriel normé.

Définition 1.3.1. *Soient X un espace métrique et E un espace de Banach.*
Soient $\big(f_n : X \to E\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications et $f : X \to E$.
On dite que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur X si et seulement si, pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ dans E.

Définition 1.3.2. *On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f_n : X \to Y$, converge uniformément vers f si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in X : \| f_n(x) - f(x) \| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{x\in X} \| f_n - f \| = 0.$$

Définition 1.3.3. *La topologie sur $\boldsymbol{C}(X)$ muni de la norme $\| \,.\, \|_\infty$ telle que*

$$\| f \|_\infty = \sup_{x\in X} \| f(x) \|$$

est appelée la topologie de la convergence uniforme.
• *La topologie de la convergence uniforme est plus fine que la topologie de la convergence simple.*

Définition 1.3.4. ***(Espace localement compact)****.*
Un espace topologique est localement compact si tout point de l'espace admet un voisinage compact.

Définition 1.3.5. ***(Topologie de Mackey)****.* [*8*]
Soit E un espace de Banach, E' son dual topologique. On note par $\mathcal{T}^w_{co}(E)$ la topologie de la convergence uniforme sur les sous ensembles faiblement compacts de E.
Restreinte à E', cette topologie est appelée topologie de Mackey et notée $\mathcal{T}(E', E)$.

1.3.1 La topologie de la convergence compacte

Définition 1.3.6. *Soit* (X, Θ) *un espace topologique,* (Y, d_Y) *un espace métrique. Soit* (f_n) *une suite d'applications de* X *dans* Y*.*
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge de manière compact vers* $f : X \to Y$ *si pour tout compacte* $K \subset X$, $(f_n)\mid_K \stackrel{c.u}{\longrightarrow} (f)\mid_K$ *i.e.*

$$\forall K \text{ compact } \subset X : \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{x\in K} d_Y\big(f_n(x), f(x)\big) = 0.$$

1.4 Multi-application et sélections

Les résultats suivants sont pris des références [1, 2, 3, 8, 10]

Définition 1.4.1. *Soient* X, Y *deux ensembles non vides. Une multi-application* F *définie sur* X *à valeurs dans* Y *est une application qui associe à chaque élément* $x \in X$ *un sous-ensemble* $F(x)$ *de* Y*. On note* $F : X \rightrightarrows Y$*.*

Le domaine, le graphe et l'image (ou le rang) de la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ sont donnés par

- $dom(F) = \big\{x \in X : F(x) \neq \emptyset\big\}$.
- $gph(F) = \big\{(x, y) \in X \times Y : x \in dom(F),\ y \in F(x)\big\}$.
- $\mathcal{R}(F) = Im(F) = \bigcup\limits_{x\in dom(F)} F(x)$.

Définition 1.4.2. *Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application. On appelle sélection de* F *toute application* $f : D(f) \longrightarrow Y$ *vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \forall x \in dom(F).$$

Définition 1.4.3. *Soient* A, B *deux sous ensembles d'un espace métrique* (X, d)*, l'écart entre* A *et* B *est définie par*

$$e(A, B) = \sup_{a\in A} d(a, B),$$

et la distance de Hausdorff entre A *et* B *est définie par*

$$\mathcal{H}(A, B) = \max\big(e(A, B), e(B, A)\big).$$

Notons que $\mathcal{P}_F(X)$ *(les sous ensembles fermé de* X*) muni de la distance de Hausdorff* $\mathcal{H}$ *est un espace métrique.*

1.4.1 Mesurabilité des multi-applications

Définition 1.4.4. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique et $\Gamma : T \rightrightarrows X$. On dit que Γ est $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$-mesurable si pour tout ouvert V de X*

$$\Gamma^{-1}(V) = \big\{t \in T; \Gamma(t) \cap V \neq \emptyset\big\} \in \Sigma.$$

Lemme 1.4.1. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable et $\Gamma : T \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides fermées.*
Considérons les propriétés suivantes ;

1. $\Gamma^{-1}(B) \in \Sigma$, *pour tout Borélien B de X,*
2. $\Gamma^{-1}(C) \in \Sigma$, *pour tout fermé C de X,*
3. $\Gamma^{-1}(V) \in \Sigma$, *pour tout ouvert V de X,*
4. *il existe une suite $(\sigma_n)_n$ de sélections mesurables de Γ telle que*

$$\forall t \in T,\ \Gamma(t) = \overline{\{\sigma_n(t)\}}_{n\in\mathbb{N}}.$$

5. $\forall x \in X$, *la fonction distance $d(x, \Gamma(.))$ est mesurable.*
6. *Le graphe de Γ appartient à $\Sigma \bigotimes \mathcal{B}(X)$.*

Alors $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5) \Rightarrow (6)$.
Si Γ est à valeurs non vides complètes alors $(3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$.
Si Γ est à valeurs non vides compactes alors $(3) \Rightarrow (1)$.
Si X est un espace de Banach séparable et Γ est à valeurs convexes compactes, alors la mesurabilité de Γ est équivalente à la mesurabilité de la fonction d'appui $\delta^*(x', \Gamma(.))$, pour tout $x' \in X'$.

Lemme 1.4.2. *Soit (T, Σ, ν) un espace mesuré, avec $\nu \geq 0$, σ-finie et Σ ν-complète. Soit X un espace métrique complet et $\Gamma : T \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Alors $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5) \Leftrightarrow (6)$.*

Définition 1.4.5. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : X \to Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \forall x \in X.$$

Théorème 1.4.1. ***(Théorème d'existence de sélections mesurables de Castaing)*** *Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable, $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application Σ-mesurable à valeurs fermées. Alors F admet au moins une sélection mesurable.*

Définition 1.4.6. *Soient* (T, Σ) *un espace mesurable,* X *et* Y *deux espaces métriques. Soit* $\varphi : T \times Y \to Y$*. On dit que* φ *est une application de Carethéodory si*

$$\begin{aligned} \varphi_x :& T \longrightarrow Y \\ & t \longmapsto \varphi_x(t) = \varphi(t, x) \end{aligned}$$

est Σ*-mesurable pour chaque* $x \in X$*, fixé et l'application*

$$\begin{aligned} \varphi_t :& X \longrightarrow Y \\ & x \longmapsto \varphi_t(x) = \varphi(t, x) \end{aligned}$$

est continue sur X *pour chaque* $t \in T$*, fixé.*

Définition 1.4.7. ***(Tribu produit)****.*
Soient (Ω_1, τ_1)*,* (Ω_2, τ_2) *deux espaces mesurables.*
La tribu produit, notée $\tau_1 \times \tau_2$*, permet de donner une structure d'espace mesurable à l'ensemble produit* $\Omega_1 \times \Omega_2$*, c'est la tribu engendrée par les pavées mesurables* $R = R_1 \times R_2$ *où* $R_1 \in \tau_1$*,* $R_2 \in \tau_2$*.*
Où, de manière équivalente, la plus petite tribu contenant les pavés mesurables.

Lemme 1.4.3. *Soient* (T, Σ) *un espace mesurable,* X*,*Y *deux espaces métriques séparables complets et soit* $\varphi : T \times X \to Y$ *une application de Carathéodory. Alors* φ *est* $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$*-mesurable.*

Théorème 1.4.2. *Soient* (T, Σ) *un espace mesurable,* E *un espace de Banach séparable. Soit* $F : T \times E \rightrightarrows E$ *une multi-application mesurable et soit* $u : T \to E$ *une application* Σ*-mesurable. Alors la multi-application* $F(., u(.))$ *est* Σ*-mesurable.*

Démonstration. Posons $H(.) = F(., u(.))$, comme u est une application mesurable, alors $\dot{u}$ est aussi mesurable donc d'après la Proposition 1.2.7, la fonction $f : T \to T \times E$ définie par $f(t) = (t, u(t))$ est mesurable.
Soit V un ouvert de E. Alors,

$$\begin{aligned} H^{-1}(V) &= \{t \in T : F(t, u(t)) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in T : F(f(t)) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in T : f(t) \in F^{-1}(V)\} \\ &= f^{-1}(F^{-1}(V)). \end{aligned}$$

Comme F est mesurable on a $F^{-1}(V) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(E)$ et gâce à la mesurabilité de f, on obtient $f^{-1}(F^{-1}(V)) \in \Sigma$, c'est à dire $H^{-1}(V) \in \Sigma$.
Par conséquent $F(., u(.))$ est Σ-mesurable. ■

Théorème 1.4.3. ***(Théorème de James)***
Soient E un espace de Banach séparable, K un sous ensemble convexe fermé de E. Alors K est faiblement compact si et seulement si

$$\exists k \in K : \delta^*(x', K) = \langle x', k \rangle,\ \forall x' \in E'.$$

Lemme 1.4.4. *Soient E un espace de Banach séparable, E' son dual topologique muni de la topologie de Mackey. Soit f une fonction convexe sur E', finie et continue au point $x'_0 \in E'$. Soit D un sous ensemble dense dans E'. Alors*

$$\inf\{f(y') : y' \in E'\} = \inf\{f(x') : x' \in D\}.$$

Donc,

$$\sup\{f(y') : y' \in E'\} = \sup\{f(x') : x' \in D\}.$$

Définition 1.4.8. *Un espace localement convexe est un espace vectoriel topologique dont la topologie peut être définie à l'aide d'une famille de semi-normes.*
C'est une généralisation de la notion d'espace normé.

Proposition 1.4.5. *Soit E un espace localement convexe, (T, Σ, μ) un espace mesuré, $\Gamma : T \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs fermées convexes, faiblement localement compactes. Soit $\sigma : T \to E$ une fonction à valeurs fermées convexes.*
Si $\forall x' \in E', \delta^*(x', \sigma(t)) \leq \delta^*(x', \Gamma(t)),\ \mu.p.p,$ alors $\sigma(t) \subset \Gamma(t),\ p.p.$

Corollaire 1.4.6. *Soit E un espace localement convexe muni de la topologie faible $\sigma(E, E')$, E' son dual topologique muni de la topologie de Mackey $\mathcal{T}(E, E')$, C un sous ensemble non vide fermé convexe. Alors les propriétés suivantes sons équivalents :*
a) il existe $y'_0 \in E'$ tel que $\delta^*(., C)$ est finie et continue en y'_0.
b) C est localement compact.
c) il existe $y'_0 \in E'$ tel que pour tout $b \in \mathbb{R}$; $\{y \in C : \langle y'_0, y \rangle \geq b\}$ est compact.

Définition 1.4.9. *Soit (T, Σ) un espace mesurable et E un espace de Banach séparable. Soit $F : T \rightrightarrows E$ est une multi-application. On dit que F est scalairement mesurable si pour tout $x' \in E'$, l'application $t \longmapsto \delta^*(x', F(t))$ est mesurable.*

Proposition 1.4.7. *Soit (T, Σ) un espace mesurable et E un espace de Banach séparable. Si $F : T \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides convexe faiblement compactes, alors $F(.)$ est mesurable si et seulement si elle est scalairement mesurable.*

Lemme 1.4.8. ***(Lemme de Grothendieck)***
Soit E un espace de Banach et soit H un sous-ensemble de E vérifiant : pour tout nombre positif ε, il existe un ensemble K_ε faiblement compact dans E, tel que $H \subset K_\varepsilon + \varepsilon B_E$. Alors H est relativement faiblement compact.

1.5 Continuité des multi-applications

Les résultats suivants sont pris des références [1, 3, 8, 10]

Définition 1.5.1. *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. F est dite semi-continue supérieurement au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x_0) \subset V$, il existe un ouvert U de x_0 dans X tel que $x_0 \in U$ et $F(x) \subset V$, $\forall x \in U$. On dit que F est semi-continue supérieurement sur X si elle est semi-continue supérieurement en tout point $x \in X$.*

Lemme 1.5.1. *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs non vides fermées. Alors le graphe de F est fermé dans $X \times Y$.*

Théorème 1.5.1. *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs compactes. Alors F est semi-continue supérieurement sur X si et seulement si pour chaque $x \in X$ et chaque suite $(x_n)_n$ de X telle que $x_n \longrightarrow x$, et $(y_n)_n$ de Y avec $y_n \in F(x_n)$, il existe une sous suite (y_m) de (y_n) telle que*

$$\lim_{m\to\infty} y_m \in F(x).$$

Définition 1.5.2. *Soient (X, d), (Y, d') deux espaces métriques. Soit $\mathcal{F}(X, Y)$ l'ensemble de toutes les applications $f : X \to Y$. Une partie H de $\mathcal{F}(X, Y)$ est dite équicontinue au point $x \in X$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x' \in X,\ \forall f \in H :\ d(x, x') \leq \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x')) \leqslant \varepsilon.$$

- *H est dite équicontinue sur X si elle est équicontinue en tout point $x \in X$,*

Définition 1.5.3. *Soient Y un espace métrique et $T > 0$, $F : [0,T] \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est absolument continue si pour tout $y \in Y$ et tout $t, t' \in [0,T]$ on a*

$$|d(y, F(t)) - d(y, F(t'))| \leq \int_{t'}^{t} |a(t) - a(t')|$$

où $a : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction absolument continue satisfaisant $\dot{a} \neq 0$ p.p sur $[0,T]$. D'après la distance précédente nous avons pour $t \geq t'$

$$|d(y, F(t)) - d(y, F(t'))| \leq \int_{t'}^{t} |\dot{a}(s)| ds.$$

Théorème 1.5.2. ***(Théorème de fermeture)***

Soient E un espace de Banach séparable, X un espace topologique et Φ une multi-application définie sur $[0,T] \times X$ à valeurs non vides convexes compactes dans E et telle que pour tout $t \in [0,T]$ fixé, $\Phi(t,.)$ est semi-continue supérieurement.

Soient $(x_n(.)), x(.)$ des applications définies sur $[0,T]$ à valeurs dans X et $(y_n(.)), y(.)$ des applications intégrables définies sur $[0,T]$ à valeurs dans E.

Supposons que :

1. $\lim_{n \to \infty} x_n(t) = x(t)$, *p.p sur* $[0,T]$.
2. *Pour tout* $x' \in E'$, $(\langle x', y_n(.)\rangle)$ *converge* $\sigma(\boldsymbol{L}^1_E([0,T]),\ \boldsymbol{L}^\infty_{E'}([0,T]))$ *vers* $(\langle x', y(.)\rangle)$.
3. $y_n(t) \in \Phi(t, x_n(t))$, *p.p sur* $[0,T]$.

   Alors, $y(t) \in \Phi(t, x(t))$, *p.p sur* $[0,T]$.

1.6 Quelques résultats de convergence

Les résultats suivants sont pris des références [6, 13]

Théorème 1.6.1. ***(Théorème de convergence dominée de Lebesgue)***

Soient (T, Σ, μ) un espace mesuré, E un espace de Banach, soient $1 \leq p < +\infty$ et (f_n) une suite de fonctions mesurables définies sur T à valeurs dans E, si la suite (f_n) vérifie

(i) *$f_n \longrightarrow f$ μ.p.p sur T,*

(ii) *il existe une fonction positive $g \in \boldsymbol{L}^p_{\mathbb{R}}(T)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$| f_n(t) | \leq g(t) \qquad \mu.p.p.$$

Alors, $f_n \longrightarrow f$ dans $\boldsymbol{L}^p_E(T)$.

En particulier, dans le cas $p = 1$,

$$\int_T f_n d\mu \longrightarrow \int_T f d\mu.$$

Lemme 1.6.1. ***(Lemme de Fatou)***
Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré, pour tout suite $(f_n)_n$ de fonctions mesurables sur T à valeurs dans $[0, +\infty]$. Alors la limite supérieure (resp. inférieure) de la suite (f_n) est mesurable et l'on a :

$$\int_T \lim_{n\to\infty} \sup f_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \sup \int_T f_n d\mu,$$

(resp.

$$\int_T \lim_{n\to\infty} \inf f_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_T f_n d\mu.)$$

L'égalité n'est pas en générale vérifiée.

Théorème 1.6.2. *Soit φ une fonction à valeurs réelles, définie sur $V_s \times (E \setminus A)$, où V_s est un voisinage d'un point $s \in \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^k$ et $A \subset E$ un sous ensemble μ-négligeable.*
Si pour chaque $t \in V_s$, la fonction $x \longmapsto \varphi(t, x)$ est μ-intégrable sur E et si de plus sur $V_s \times (E \setminus A)$, la fonction φ admet une dérivée partielle par rapport à t vérifiant l'inégalité

$$\mid \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) \mid \leq g(x),$$

où g est μ-intégrable et indépendante de t, alors la fonction $t \longmapsto \int \varphi(t, x) d\mu(x)$, est dérivable au point s et l'on a

$$\frac{d}{dt} \int \varphi(s, x) d\mu = \int \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, x) d\mu.$$

1.7 Quelques résultats de compacité

Les résultats suivants sont pris des références [1, 10]

Théorème 1.7.1. ***(Théorème d'Ascoli-Arzelà)***
Soient J un espace métrique compact, Y un espace métrique complet, et H un sous ensemble de $\boldsymbol{C}(J, Y)$ (l'espace des applications continues définies sur J à valeurs dans Y), muni de la topologie de la convergence uniforme.
Alors H est relativement compact si et seulement si H est équicontinu et $H(x) = \{f(x) : f \in H\}$ est relativement compact.

Théorème 1.7.2. ***(Corollaire du théorème d'Ascoli-Arzelà)***
Soient J un ensemble compact de $\mathbb{R}$, E un espace de dimension finie et soit (f_n) une suite de fonctions absolument continues définies sur J à valeurs dans E satisfaisant les conditions suivantes :

1. $\forall t \in J$, $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ *est un sous ensemble relativement compact dans* E.
2. *Il existe une fonction à valeurs réelles positives* $h \in \boldsymbol{L}^1_{\mathbb{R}}(J)$ *tel que* $\| \dot{f}(t) \| \leq h(t)$, *p.p sur* J.

   Alors, il existe une sous suite de $(f_n)_n$ *(qu'est on note aussi* (f_n)*) qui converge vers une fonction absolument continue* $f : J \to E$ *au sens suivant :*

   (a) $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* f.

   (b) $(\dot{f}_n)_n$ *converge faiblement vers* $\dot{f}$ *dans* $\boldsymbol{L}^1_E(J)$, *c'est à dire* $(\dot{f}_n)$ *converge vers* $\dot{f}$ $\sigma(\boldsymbol{L}^1_E, \boldsymbol{L}^\infty_E)$.

Définition 1.7.1. *Soit* (e'_n) *une suite d'élément du dual* E' *d'un espace topologique* E. *On dit que* (e'_n) *sépare les points de* E *si pour tout* $x, y \in E$, $x \neq y$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\langle e'_n, x\rangle \neq \langle e'_n, y\rangle.$$

Théorème 1.7.3. *Soit* E *un espace de Banach séparable. Alors,* $B_{E'}$ *est métrisable pour la topologie* $\sigma(E, E')$.
Réciproquement, si $B_{E'}$ *est métrisable pour* $\sigma(E, E')$ *alors,* E *est séparable.*

Théorème 1.7.4. ***(Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki)***
Soit E *un espace de Banach. Alors la boule unité fermée de* E *est compacte pour la topologie* $\sigma(E', E)$.

Théorème 1.7.5. ***(Théorème de Banach-Dieudonné)***
Soit E *un espace de Banach séparable,* $\overline{B}_{E'}$ *la boule unité fermée de* E'. *Alors sur* $\overline{B}_{E'}$ *la topologie de la convergence faible coincide avec la topologie de la convergence compacte.* $(\overline{B}_{E'}, \sigma(E', E))$ *est métrisable.*

Proposition 1.7.1. *Soit* K *un sous ensemble borné convexe de* E, *alors* K *est compact si et seulement si la fonction* $x' \longmapsto \delta^*(x', K)$ *est continue sur* $\overline{B}_{E'}$ *muni de la topologie de la convergence compacte.*

Théorème 1.7.6. ***(Théorème d'Eberlein-Ŝmulian)***
Soit S *un sous ensemble d'un espace de Banach* E. *Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. S *est faiblement (relativement) séquentiellement compact.*
2. S *est faiblement (relativement) compact.*

Théorème 1.7.7. ***(Théorème Ŝmulian)***
Soit S un sous ensemble d'un espace de Banach E, si S est relativement faiblement compact, alors pour chaque $x \in \overline{S}^w$ (fermeture faible de S) il existe une suite (x_n) d'éléments de S convergeant faiblement vers x.

Théorème 1.7.8. ***(Théorème de Hahn-Banach)***
Soit $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant :

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\forall x \in E$ *et* $\forall \lambda > 0$,
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in E$.

Soit d'autre part $G \subset E$ un sous-espace vectoriel et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que

$$g(x) \leq p(x),\ \forall x \in G.$$

Alors, il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g, i.e $g(x) = f(x)$, $\forall x \in G$ et telle que

$$f(x) \leq p(x),\ \forall x \in E.$$

On donne maintenant une conséquence de la forme analytique du Théorème de Hahn-Banach.

Théorème 1.7.9. *Soit E un espace vectoriel normé, soit $x_0 \in E$ telle que $x_0 \neq 0$, alors il existe $f \in E'$, telle que $\| f \| = 1$ et $f(x_0) = \| x_0 \|$.*

Théorème 1.7.10. ***(Théorème du graphe fermé)***
Soient E, F deux espaces de Banach. Soit T un opérateur linéaire de E vers F. On suppose que le graphe de T, $gph(T)$ est fermé dans $E \times F$, alors T est continu.

Théorème 1.7.11. ***(Théorème de Mazur)***
Soit E un espace de Banach et A un sous ensemble compact de E, alors $\overline{co}(A)$ est compact.

Théorème 1.7.12. ***(Théorème de Banach-Mazur)***
Soit (x_n) une suite d'éléments de E convergeant faiblement vers x. Alors, il existe une suite (z_n) (où z_n est une combinaison convexe des éléments $x_n, x_{n+1}, ...$) convergent fortement vers x.

1.8 Théorème du point fixe de Kakutani-ky Fan

Les Théorème suivantes sont pris de la référence [10]

Théorème 1.8.1. *Soient X un espace topologique séparé localement convexe, S un ensemble non vide convexe compact de X et $F : S \rightrightarrows S$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs non vides convexes fermées, alors F admet un point fixe dans S, c'est à dire, il existe $x \in S$ tel que $x \in F(x)$.*

Comme corollaire du Théorème précédent, on obtient une version faible du Théorème du point fixe.

Théorème 1.8.2. ***(Corollaire du Théorème de Kakutani-ky Fan)***
Soit E un espace de Banach, S un sous ensemble non vide convexe faiblement compact de E et $F : S \rightrightarrows S$ une multi-application faiblement-faiblement semi-continue supérieurement à valeurs non vides convexes faiblement compactes, alors F admet un point fixe dans S.

Ceci est due au fait que $(E, \sigma(E, E'))$ est un espace topologique séparé localement convexe.

Chapitre 2

Comparaison de l'intégration au sens de Pettis avec l'intégration au sens de Bochner

Ce chapitre est consacrés à l'étude de l'intégration au sens de Pettis avec la Bochner. On donne dans une première partie quelques définitions et propriétés de l'intégrale au sens de Bochner qui sont médées à comparer à ceux de l'intégrale au sens de Pettis. Puis on présente quelques résultats sur l'intégrabilité au sens de Pettis.
Dans la deuxième partie, on donne une comparaison entre l'intégrabilité au sens de Pettis et au sens de Bochner.
En fin, on termine par donner un exemple d'une fonction Pettis intégrables mais non Bochner intégrables.

2.1 Intégrale au sens de Bochner

Soit E un espace de Banach.

Définition 2.1.1. *(fonction simple)*
Soit (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré positif. Une fonction* $f : (\Omega, \Sigma, \mu) \to (E, \mathcal{B}(E))$ *est dite* ***simple*** *si elle peut s'écrire sous la forme :*

$$f := \sum_{i=0}^{n} x_i \mathbb{1}_{A_i}, \tag{2.1}$$

où $A_0, ..., A_n \in \Sigma$, $x_0, ..., x_n \in E$, *avec* $\mu(A_i) < +\infty$ *pour tout* $i = 0, ..., n$ *et les* A_i *deux à deux disjoints.*

Remarque 2.1.1. *a) Notons que* f *est constante sur chaque* A_i $(\forall \omega \in A_i, f(\omega) = x_i)$ *et nulle en dehors de* $\bigcup\limits_{0 \le i \le n} Ai$ $(\forall \omega \in \Sigma \setminus \bigcup\limits_{0 \le i \le n} A_i, f(\omega) = 0)$
b) La décomposition (2.1) *est en général unique.*

Définition 2.1.2. *(intégrale au sens de Bochner d'une fonction simple)*
Soit $f : (\Omega, \Sigma, \mu) \to (E, \mathcal{B}(E))$. *Si* f *est simple, on définit son intégral de Bochner sur* Ω, *relativement à* μ, *par*

$$\int_{\Omega} f d\mu := \sum_{i=0}^{n} x_i \mu(A_i), \tag{2.2}$$

où les x_i *et les* A_i *sont ceux donnés par* (2.1).

Remarque 2.1.2. *a) On voit immédiatement que cette définition pose un problème de cohérence lié à la non unicité de la décomposition* (2.1). *En effet,*
Soit $f \neq 0$, *telle que* $f = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum\limits_{j=0}^{m} y_j \mathbb{1}_{B_j}$, *et les* B_j *sont deux à deux disjoints.*
Posons $A_{n+1} := \Sigma \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{n} A_i, B_{m+1} := \Sigma \setminus \bigcup\limits_{j=0}^{m} B_j$ *et montrant que* $A_i \cap B_{m+1} = \phi$. *En effet, si* $\omega \in A_i \cap B_{m+1}$, *on aura* $\omega \in A_i$ *et donc* $f(\omega) = x_i \neq 0$ *et* $\omega \in B_{m+1}$ *et donc* $f(\omega) = 0$. *Ce qui est contradictoire.*
Soit i *tel que* $x_i \neq 0$. *Remarquons que* $\bigcup\limits_{j=0}^{m+1} B_j = \Sigma$.
On peut alors écrire

$$A_i = A_i \bigcap \big(\bigcup_{j=0}^{m+1} B_j \big) = \bigcup_{j=0}^{m+1} \big(A_i \bigcap B_j \big) = \bigcup_{j=0}^{m} \big(A_i \bigcap B_j \big).$$

Ce qui donne $\mu(A_i) = \sum\limits_{j=0}^{m} \mu(A_i \cap B_j)$.
En utilisant les mêmes arguments, si $y_j \neq 0, B_j = \bigcup\limits_{i=0}^{n} \big(A_i \cap B_j\big)$, *ce qui donne* $\mu(B_j) = \sum\limits_{i=0}^{n} \mu(A_i \cap B_j)$.
On a aussi $A_i \cap B_j \neq \phi \Longrightarrow x_i = y_j$. *En effet, si* $\omega \in A_i \cap B_j$, $f(\omega) = x_i$ *et* $f(\omega) = y_j$, *donc* $x_i = y_j$.

Nous pouvons maintenant écrire,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} x_i\mu(A_i) &= \sum_{i=0,x_i\neq 0}^{n} x_i\mu(A_i) \\
&= \sum_{i=0,x_i\neq 0}^{n} x_i \sum_{j=0}^{m} \mu(A_i\cap B_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n} x_i \sum_{j=0}^{m} \mu(A_i\cap B_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} y_j\mu(A_i\cap B_j) \\
&= \sum_{j=0,y_j\neq 0}^{m} y_j \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i\cap B_j) \\
&= \sum_{j=0,y_j\neq 0}^{m} y_j\mu(B_j) \\
&= \sum_{j=0}^{m} y_j\mu(B_j).
\end{aligned}$$

b)Remarquons que l'intégrale de Bochner des fonctions simples est linéaire i.e

$$\int_\Omega (\alpha f+\beta g)d\mu = \alpha\int_\Omega f d\mu + \beta\int_\Omega g d\mu, \tag{2.3}$$

pour tous réels α et β et toutes fonctions f et g.
De plus pour toute fonction simple f, on a

$$\| \int_\Omega f d\mu \| = \| \sum_{i=0}^{n} x_i\mu(A_i) \| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \| x_i \| \mu(A_i) = \int_\Omega \| f(\omega) \| d\mu(\omega). \tag{2.4}$$

Cette dernière intégrale est une intégrale au sens classique.

Définition 2.1.3. *(Intégrale au sens de Bochner)*
*Soit $f : (\Omega,\Sigma,\mu) \to (E,\mathcal{B}(E))$ une application fortement mesurable, on dit que f est **Bochner intégrable** s'il existe une suite de fonction simples f_n telle que*

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu.p.p} f \tag{2.5}$$

et

$$\int_\Omega \| f_n(\omega) - f(\omega) \| d\mu(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{2.6}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)>0, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq N(\varepsilon) \Longrightarrow \int_\Omega \| f_n - f \| d\mu < \varepsilon.$$

On pose alors

$$\int_{\Omega}^{Bochner} f d\mu = \int_{\Omega} f d\mu := \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu. \tag{2.7}$$

Dans cette Définition, l'intégrale utilisée dans (2.6) *est une intégrale au sens de Lebesgue. Nous n'utiliserons la notation lourde* $\int_{\Omega}^{Bochner}$ *que lorsqu'il s'agira de comparer l'intégrale au sens de Bochner avec l'intégrale au sens de Pettis.*

Remarque 2.1.3. *a) L'espace de Banach* E *étant complet. Alors, l'existence de* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$ *est due au fait que la suite* $(\int_{\Omega} f_n d\mu)_{n\geq 1}$ *est de Cauchy. En effet, soit* $\varepsilon > 0$, $\aleph(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *Par les relations* (2.3), (2.4) *et* (2.6), *nous avons pour* $n, m \geq \aleph(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
\| \int_{\Omega} f_n d\mu - \int_{\Omega} f_m d\mu \| &\overset{(2.3)}{=} \| \int_{\Omega} (f_n - f_m) d\mu \| \\
&\overset{(2.4)}{\leq} \int_{\Omega} \| f_n - f_m \| d\mu \\
&\overset{(\mathrm{I.T})}{\leq} \int_{\Omega} (\| f_n - f \| + \| f - f_m \|) d\mu \\
&\overset{(2.3)}{=} \int_{\Omega} \| f_n - f \| d\mu + \int_{\Omega} \| f - f_m \| d\mu \\
&\overset{(2.6)}{\leq} 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

b)La limite $\int_{\Omega} f_n d\mu$ *ne dépend pas du choix de la suite approximante* $(f_n)_n$. *En effet, Soit* $(g_n)_{n\geq 1}$ *une autre suite de fonctions simples telles que*
$g_n \xrightarrow{\mu\text{-}p.p} f$ *et* $\int_{\Omega} \| g_n - f \| \longrightarrow 0$.
D'après la remarque précédente $(\int_{\Omega} g_n d\mu)_{n\geq 1}$ *est une suite de Cauchy dans* E.
On pose alors,

$$f := \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu, \quad g := \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} g_n d\mu,$$

et définissons la suite $(h_n)_{n\geq 1}$ *des fonctions simples par* $h_{2k} = f_k$, $h_{2k+1} = g_{k+1}$.
Comme la suite $(h_n)_{n\geq 1}$ *vérifie la condition* (2.6), *la suite des intégrales* $(\int_{\Omega} h_n d\mu)_{n\geq 0}$ *est de Cauchy dans* E *donc a une limite* $h \in E$. *De plus,* $(\int_{\Omega} h_n d\mu)_{n\geq 1}$ *admet une sous suite convergeant vers* $\int f$ *et une autre convergeant vers* $\int g$ *donc* $\int f = \int g = h$. *D'où l'unicité du choix de la suite* $(f_n)_n$.

On donne maintenant une Condition nécessaire et suffisante de la Bochner intégrabilité.

Théorème 2.1.1. *Soit* $f : (\Omega, \Sigma, \mu) \to (E, \mathcal{B}(E))$ *une application fortement mesurable. Si* f *est Bochner intégrable. Alors* $\int_{\Omega} \| f \| < +\infty$.

Démonstration. D'après la Définition 2.1.3, f Bochner intégrable implique l'existence d'une suite (f_n) de fonctions simples telles que

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-p.p}} f,$$

et

$$\int_\Omega \| f_n - f \| \, d\mu \longrightarrow 0,$$

c'est à dire, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0, \forall n \geq n_0 : \int_\Omega \| f_n - f \| \, d\mu < \varepsilon$.
Ceci implique en particulier que pour n_0 assez grand

$$\int_\Omega \| f_{n_0} - f \| \, d\mu < +\infty,$$

et puisque f_{n_0} est une fonction simple, on a d'après (2.2)

$$\int_\Omega \| f_{n_0} \| \, d\mu = \sum_{i \in I_0} \| x_{n_0,i} \| \, \mu(A_{n_0,i}),$$

pour un certain ensemble fini d'indices I_0, avec les $A_{n_0,i} \in \Sigma$ de μ-mesure finie, donc $\int_\Omega \| f_{n_0} \| \, d\mu < +\infty$.
Finalement

$$\int_\Omega \| f \| \, d\mu \leq \int_\Omega \| f - f_{n_0} \| \, d\mu + \int_\Omega \| f_{n_0} \| \, d\mu < +\infty.$$

■

Corollaire 2.1.1.
i) Si $f : \Omega \to E$ est Bochner intégrable, alors

$$\| \int_\Omega f d\mu \| \leq \int_\Omega \| f \| \, d\mu < +\infty. \tag{2.8}$$

ii) Si E est séparable et $\int_\Omega \| f \| \, d\mu < +\infty$, alors f est Bochner intégrable et vérifie (2.8).

Démonstration.
i) Puisque f et Bochner intégrable, d'après le Théorème 2.1.1, $\int_\Omega \| f \| \, d\mu < +\infty$ et nous avons au moins une suite (f_n) de fonctions simples convergent μ-p.p vers f.
Nous pouvons définir alors une suite (g_n) de fonctions simples, $g_n : \Omega \to E$, par

$$g_n(\omega) := \begin{cases} f_n(\omega) & si \ \| f_n(\omega) \| < 2 \, \| f(\omega) \|; \\ 0 & si \ \| f_n(\omega) \| \geq 2 \, \| f(\omega) \| \, . \end{cases}$$

Donc,

a)

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n d\mu.$$

b) $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu-p.p} f$.

c) $\| g_n(\omega) \| \leq 2 \| f(\omega) \| \quad \forall \omega \in \Omega$.

Comme (g_n) est une suite de fonctions simples, on a par (2.4),

$$\| \int_\Omega g_n d\mu \| \leq \int_\Omega \| g_n \| d\mu \tag{2.9}$$

et par a)

$$\| \int_\Omega f d\mu \| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \| \int_\Omega g_n d\mu \|, \tag{2.10}$$

et d'après le Théorème de convergence dominée de Lebesgue 1.6.1 et par b), c) on a

$$\int_\Omega \| g_n \| d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega \| f \| d\mu.$$

En passe à la limite dans (2.9), on obtient

$$\| \int_\Omega f d\mu \| = \lim_{n\to\infty} \| \int_\Omega g_n d\mu \| \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \| g_n \| d\mu = \int_\Omega \| f \| d\mu$$

c'est à dire

$$\| \int_\Omega f d\mu \| \leq \int_\Omega \| f \| d\mu < +\infty.$$

■

Corollaire 2.1.2. *Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach, tel que E_2 est séparable. Soit $T : E_1 \to E_2$ un opérateur linéaire continu et $f : (\Omega, \Sigma, \mu) \to (E_1, \mathcal{B}(E_1))$ une application Bochner intégrable. Alors*

$$T(f) = T \circ f : (\Omega, \Sigma, \mu) \to (E_2, \mathcal{B}(E_2))$$

est Bochner intégrable et

$$\int_\Omega T(f) d\mu = T\big(\int_\Omega f d\mu\big). \tag{2.11}$$

Démonstration. f étant Bochner intégrable et $(\Sigma, \mathcal{B}(E_1))$-mesurable et T est borélienne parce que continue, donc $(\mathcal{B}(E_1), \mathcal{B}(E_2))$-mesurable Ainsi Tof est $(\Sigma, \mathcal{B}(E_2))$-mesurable.

La Bochner intégrabilité de $T(f)$ découle facilement de celle de f, de la continuité de T et du Corollaire 2.1.1 en écrivant :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \parallel T(f) \parallel d\mu \leq & \int_\Omega \parallel T \parallel\parallel f \parallel d\mu \\ = & \parallel T \parallel \int_\Omega \parallel f \parallel d\mu < +\infty\end{aligned}$$

La finitude de cette dernière intégrale provient de la première partie du Corollaire 2.1.1 appliquée à f et l'espace $\mathcal{B}(E_1)$ et par la deuxième partie du Corollaire 2.1.1 appliquée à $T(f)$ et l'espace $\mathcal{B}(E_2)$, la finitude de $\int_\Omega \parallel T(f) \parallel d\mu$ implique la Bochner intégrabilité de $T(f)$, Vérifions maintenant (2.11). Par la Bochner intégrabilité de f, nous disposons d'une suite de fonctions simples (f_n), $f_n : \Omega \longrightarrow \mathcal{B}(E_1)$, telle que

$$\int_\Omega \parallel f_n - f \parallel d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et

$$\int_\Omega f_n d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\Omega f d\mu$$

par la continuité de f, on déduit

$$T(\int_\Omega f_n d\mu) \xrightarrow[n\to+\infty]{} T(\int_\Omega f d\mu) \tag{2.12}$$

La fonction simple f_n peut s'écrire

$$f_n = \sum_{i\in I_n} f_{n,i}\mathbb{1}_{A_{n,i}}$$

avec I_n fini, les $A_{n,i}$ deux à deux disjoints pour n fixé et $\mu(A_{n,i}) < +\infty$.
Pour tout $\omega \in \Omega$

$$(Tof_n)(\omega) = T(f_n(\omega)) = T(\sum_{i\in I_n} f_{n,i}\mathbb{1}_{A_{n,i}}(\omega)) = \sum_{i\in I_n} \mathbb{1}_{A_{n,i}}T(f_{n,i}),$$

par la linéarité de T (les $f_{n,i}$ sont des vecteurs de $\mathcal{B}(E_1)$, et pour ω fixé les $\mathbb{1}_{A_{n,i}}(\omega)$ sont des scalaires).
Cette égalité vraie pour tout $\omega \in \Omega$ peut se réécrire sous la forme de l'égalité fonctionnelle

$$T(f_n) = \sum_{i\in I_n} f_{n,i}\mathbb{1}_{A_{n,i}},$$

qui montre que $T(f_n)$ est une fonction simple définie de Ω à valeurs dans $\mathcal{B}(E_2)$. En particulier l'intégrale de Bochner $\int_\Omega T(f_n)d\mu$ a bien un sens. Elle peut se calculer comme suit.

$$\int_\Omega T(f_n)d\mu = \sum_{i\in I_n} T(f_{n,i})\mu(A_{n,i}) = T(\sum_{i\in I_n} f_{n,i}\mu(A_{n,i})) = T(\int_\Omega f_n d\mu)$$

La première et la troisième égalité ci-dessus expriment la définition de l'intégrale de Bochner d'une fonction simple, la deuxième égalité vient de la linéarité de T.
Pour établir (2.11), nous allons passer à la limite dans l'égalité

$$\int_\Omega T(f_n)d\mu = T(\int_\Omega f_n d\mu)$$

Par (2.12), le second membre converge vers $T(\int_\Omega f d\mu)$.
Pour justifier la convergence du premier membre vers $\int_\Omega T(f)d\mu$, on écrit les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}
\| \int_\Omega T(f_n)d\mu - \int_\Omega T(f)d\mu \| = &\quad \| \int_\Omega T(f_n - f)d\mu \| \\
\leq &\quad \int_\Omega \| T(f_n - f) \| d\mu \\
\leq &\quad \int_\Omega \| T \| \| f_n - f \| d\mu \\
= &\quad \| T \| \int_\Omega \| f_n - f \| d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

■

2.2 Intégrale au sens de Pettis

Définition 2.2.1. *Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, E un espace de Banach, E' sont dual topologique, $f : \Omega \to E$ une application faiblement mesurable, on dit que f est* ***scalairement μ-intégrable*** *si*

$$\forall x' \in E', \int_\Omega |\langle x', f\rangle| d\mu < +\infty.$$

Pour construire l'intégrale au sens de Pettis de f, on commence par montrer que si f est scalairement intégrable, l'application $x' \longmapsto \int_\Omega |\langle x', f\rangle| d\mu$ est un élément ξ du bidual topologique E'' de E. Si on peut identifier ξ avec un élément ν_f de E, alors on dit que f est **Pettis intégrable** et son intégrale au sens de Pettis est précisément cet élément ν_f de E.

Proposition 2.2.1. *Si f est scalairement intégrable, l'application*

$$\begin{aligned}
\xi : &E' \longrightarrow \mathbb{R} \\
&x' \longmapsto \int_\Omega \langle x', f\rangle d\mu
\end{aligned}$$

est une forme linéaire continue sur E', donc c'est un élément du bidual topologique E''.

Démonstration. a) La linéarité.

Soient $x_1', x_2' \in E'$, α, $\beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\xi(\alpha x_1' + \beta x_2') &= \int_\Omega \big\langle(\alpha x_1' + \beta x_2'), f\big\rangle d\mu \\ &= \int_\Omega \big(\langle \alpha x_1', f\rangle + \langle \beta x_2', f\rangle\big) d\mu \\ &= \alpha \int_\Omega \langle x_1', f\rangle d\mu + \beta \int_\Omega \langle x_2', f\rangle d\mu \\ &= \alpha\xi(x_1') + \beta\xi(x_2').\end{aligned}$$

Dans la première équalité on utilise la linéarité de la forme de dualité et dans la deuxième on utilise la linéarité de l'intégrale au sens de Lebesgue.

b) La continuité.

Considérons l'application Ψ définie par

$$\begin{aligned}\Psi : &E' \longrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \Sigma, \mu) \\ &x' \longmapsto \langle x', f(.)\rangle.\end{aligned}$$

Pour montrer que Ψ est continue, il suffit de montrer que son graphe est fermé, c'est à dire montrer que si, $(x_n')_{n\geq 1}$ est une suite dans E' vérifiant : $x_n' \longrightarrow x'$ et $\Psi(x_n') \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega,\Sigma,\mu)} z$ où $x' \in E'$ et $z \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \Sigma, \mu)$, alors $\Psi(x') = z$.

Puisque $(x_n')_n$ converge dans E' vers x', alors, pour tout $t \in \Omega$

$$\langle x_n', f(t)\rangle \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} \langle x', f(t)\rangle,$$

donc,

$$\Psi(x_n')(t) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} \Psi(x')(t). \tag{2.13}$$

D'autre part, comme $(\Psi(x_n'))$ converge vers z dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \Sigma, \mu)$, on peut extraire une sous-suite$(\Psi(x_{nk}'))$ qui converge vers z μ-p.p sur Ω. On déduit de (2.13) que $z = \Psi(x')$ μ-p.p sur Ω.

Puisque $z \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \Sigma, \mu)$ alors, le graphe de Ψ est fermé. D'aprés le Théorème 1.7.10, Ψ est continue.

Cette continuité implique que

$$\forall x' \in E',\ \| \Psi(x') \|_{\mathbf{L}^1} \leq \| \Psi \| \| x' \|,$$

alors

$$\int_\Omega |\langle x', f\rangle| d\mu \leq \| \Psi \| \| x' \|$$

d'où

$$\forall x' \in E', \left|\xi(x')\right| = \left| \int_\Omega \langle x', f\rangle d\mu \right| \leq \int_\Omega |\langle x', f\rangle| d\mu \leq c \parallel x' \parallel, \text{ tel que } c = \parallel \Psi \parallel$$

ce qui établit la continuité de ξ. ■

Remarque 2.2.1. *Si f est **Bochner intégrable**, l'appartenance de ξ à E'' est immédiate en écrivant pour tout $x' \in E'$*

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \langle x', f\rangle d\mu \right| &\leq \int_\Omega |\langle x', f(t)\rangle| d\mu(t) \\ &\leq \int_\Omega \parallel x' \parallel \parallel f(t) \parallel d\mu(t) \\ &= \parallel x' \parallel \int_\Omega \parallel f(t) \parallel d\mu(t) < +\infty, \end{aligned} \tag{2.14}$$

*et en notant que par la Bochner intégrabilité de f, $\int_\Omega \parallel f \parallel d\mu$ est finie (constante relativement à x'). Comme sous-produit de (2.14), notons au passage que la μ-**Bochner intégrabilité** de f implique son intégrabilité scalaire.*

Définition 2.2.2. *(Intégrale au sens de Pettis)*
Soient $f : \Omega \to E$ une application scalairement intégrable et ξ l'élément de E'' associé à f par

$$\langle \xi,\ x'\rangle_{E'',E'} := \int_\Omega \langle x', f(t)\rangle d\mu(t).$$

*On dit que f est **Pettis intégrable** si $\xi \in J(E)$, image canonique isométrique de E dans son bidual, autrement dit si*

$$\exists \nu_f \in E,\ \forall x' \in E',\ \langle x', \nu_f\rangle_{E',E} = \int_\Omega \langle x', f\rangle_{E',E} d\mu.$$

On définit alors l'intégrale au sens de Pettis de f en posant

$$\int_\Omega^{Pettis} f d\mu = \int_\Omega f d\mu := \nu_f.$$

Remarque 2.2.2. *1. Lorsqu'elle existe, l'intégrale de Pettis $\int_\Omega f d\mu$ est **l'unique** vecteur ν_f de E vérifiant*

$$\forall x' \in E',\ \langle x', \nu_f\rangle = \int_\Omega \langle x', f\rangle d\mu. \tag{2.15}$$

En effet,
si $\langle x', \nu_f\rangle = \langle x', \delta_f\rangle$ pour tout $x' \in E'$, comme les formes linéaires continues sur E séparent les points de E. Alors $\nu_f = \delta_f$. D'où l'unicité.

2. *Par construction de l'intégrale au sens de Pettis commute avec les formes linéaires continues puisque lorsque f est Pettis intégrable,* (2.15) *peut se réécrire*

$$\forall x' \in E', \langle x', \int_\Omega f d\mu \rangle = \int_\Omega \langle x', f \rangle d\mu.$$

Proposition 2.2.2. *L'ensemble des fonctions Pettis intégrables définies de* (Ω, Σ, μ) *à valeurs dans E noté* $P_e(\mu, E)$*est un* ***espace vectoriel****, et l'intégrale de Pettis est un opérateur linéaire de cet espace dans E. De plus pour toute f Pettis-intégrable*

$$\| \int_\Omega^{Pettis} f d\mu \| \leq \int_\Omega \| f \| d\mu < +\infty. \tag{2.16}$$

Démonstration. Montrons (2.16)
Soit $\nu_f := \int_\Omega^{Pettis} f d\mu$, tel que $\nu_f \neq 0$. Par le Théorème 1.7.9, il existe $x' \in E'$ telle que $\langle x', \nu_f \rangle = \| \nu_f \|_E$ *et* $\| x' \|_{E'} = 1$.
Nous avons alors,

$$\begin{aligned} \| \int_\Omega^{Pettis} f d\mu \| &= \langle x', \nu_f \rangle \\ &= \int_\Omega \langle x', f \rangle d\mu \\ &\leq \int_\Omega | \langle x', f \rangle | d\mu \\ &\leq \int_\Omega \| x' \| \| f \| d\mu \\ &= \int_\Omega \| f \| d\mu < +\infty. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.2.1. *Une fonction* $f : [0,1] \to E$ *scalairement intégrable si est seulement si l'ensemble*

$$\{ \langle x', f \rangle : \| x' \| \leq 1 \}$$

est uniformément intégrable.

Remarque 2.2.3. *On note par* $\boldsymbol{P}_E^1([0,1])$*, l'espace de toutes les fonctions Pettis-intégrables définies sur* $[0,1]$ *à valeurs dans E.*
Soit $f \in \boldsymbol{P}_E^1([0,1])$*, on définit la Pettis-norme de f par*

$$\| f \|_{Pe} = \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \int_{[0,1]} |\langle x', f \rangle| d\mu,$$

qui est équivalente à la norme

$$\sup_{E\in\Sigma} \| \int_E f d\mu \| .$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\sup_{E\in\Sigma} \| \int_E f d\mu \| &= \sup_{E\in\Sigma} \big(\sup_{x'\in \overline{B}_{E'}} |\langle x', \int_E f d\mu\rangle| \big) \\
&\leq \sup_{x'\in \overline{B}_{E'}} \big|\langle x', \int_\Omega f d\mu\rangle\big| \\
&= \sup_{x'\in \overline{B}_{E'}} \int_\Omega |\langle x', f\rangle| d\mu \\
&= \| f \|_{Pe} .
\end{aligned}$$

D'autre part,

si on prend $\Pi = \{E_i, ..., E_n\}$ *une partition de* Ω *par des éléments de* Σ *deux à deux disjoints, on obtient,*

$$\begin{aligned}
\big|\langle x', \int_\Omega f d\mu\rangle\big| &= \big|\langle x', \sum_{E_i\in\Pi} \int_{E_i} f d\mu\rangle\big| \\
&\leq \sum_{E_i\in\Pi} |\langle x', \int_{E_i} f d\mu\rangle| \\
&= \sum_{E_i\in\Pi^+} \langle x', \int_{E_i} f d\mu\rangle - \sum_{E_i\in\Pi^-} \langle x', \int_{E_i} f d\mu\rangle \\
&= \big\langle x', \sum_{E_i\in\Pi^+} \int_{E_i} f d\mu\big\rangle - \big\langle x', \sum_{E_i\in\Pi^-} \int_{E_i} f d\mu\big\rangle \\
&\leq 2 \sup_{E\in\Sigma} \big|\langle x', \int_E f d\mu\rangle\big|,
\end{aligned}$$

avec $\Pi^+ = \big\{E_i : \langle x', \int_{E_i} f d\mu\rangle \geqslant 0\big\}$, $\Pi^- = \big\{E_i : \langle x', \int_{E_i} f d\mu\rangle < 0\big\}$.

Nous obtenons alors,

$$\sup_{x'\in \overline{B}_{E'}} \big|\langle x', \int_\Omega f d\mu\rangle\big| \leq 2 \sup_{x'\in \overline{B}_{E'}} \big(\sup_{E\in\Sigma} |\langle x', \int_E f d\mu\rangle| \big)$$

$$\| f \|_{P_e} \leq 2 \sup_{E\in\Sigma} \| \int_E f d\mu \|,$$

par conséquent,

$$\sup_{E\in\Sigma} \| \int_E f d\mu \| \leq \| f \|_{P_e} \leq 2 \sup_{E\in\Sigma} \| \int_E f d\mu \| .$$

$(\boldsymbol{P}^1_E([0,1]), \| \,.\, \|_{Pe})$ *est un espace vectoriel normé.*

Définition 2.2.3. *Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesurable complet, E un espace de Banach séparable.*
On dit qu'une famille H de L^1_E uniformément intégrable si

$$\sup_{f\in H}\int_{\{|f|>a\}}\|f\|d\mu \underset{a\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci équivalent à,
pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists a_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tous $f \in H$ et $a \geq a_0$, $\int_{\{|f|>a\}}|f|d\mu \leq \varepsilon$.
Où, équivalent à

$$\sup_{f\in H}\|f\|_{L^1} < \infty \text{ et } \lim_{\mu(A)\to 0}\sup_{f\in H}\int_A\|f\|d\mu = 0.$$

Définition 2.2.4. *Un sous ensemble $H \subset \boldsymbol{P}^1_E([0,1])$ est Pettis-uniforément intégrable (**P.U.I**), si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tel que $\forall A \in \Sigma$*

$$\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \sup_{f\in H}\| \mathbb{1}_A f \|_{Pe}\leq \varepsilon.$$

Théorème 2.2.2. *Une multi-application $\Gamma : [0,1] \rightrightarrows E$ scalairement intégrable est scalairement Pettis-uniformément intégrable si et seulement si*

$$\left\{\langle x', \Gamma(t)\rangle :\| x' \|\leq 1\right\} = \left\{\langle x', f(t)\rangle : f(t) \in \Gamma(t), \| x' \|\leq 1\right\} \forall t \in [0,1]$$

est uniformément intégrable dans $\boldsymbol{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$, où ce qui est équivalent à l'uniforme dans $\boldsymbol{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$ de l'ensemble :

$$\left\{|\delta^*(x', \Gamma(t))| :\| x' \|\leq 1\right\},\ \forall t \in [0,1]$$

Corollaire 2.2.3. *Si $H \subset \boldsymbol{P}^1_E([0,1])$ est scalairement Pettis-uniformément intégrable alors il est Pettis-uniformément intégrable.*

Démonstration. H est scalairement Pettis-uniformément intégrable donc l'ensemble

$$\left\{\langle x', f\rangle : f \in H, \| x' \|\leq 1\right\}$$

est uniformément intégrable dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$ d'après le Théorème 2.2.2, d'où

$$\lim_{a\to\infty}\sup_{f\in H}\sup_{x'\in\overline{B}_{E'}}\int_{|\langle x', f(t)\rangle|>a}|\langle x', f(t)\rangle|dt = 0. \tag{2.17}$$

Pour chaque $x' \in \overline{B}_{E'}$, et chaque sous-ensemble Lebesgue-mesurable $A \subset [0,1]$, nous avons

$$\int_A|\langle x', f(t)\rangle|dt = \int_{A\cap[|\langle x', f(t)\rangle|\leq a]}|\langle x', f(t)\rangle|dt + \int_{A\cap[|\langle x', f(t)\rangle|>a]}|\langle x', f(t)\rangle|dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit a assez grand de telle sorte à obtenir

$$\forall x' \in \overline{B}_{E'}, \quad \forall f \in H, \int_{A\cap[|\langle x', f(t)\rangle|>a]} |\langle x', f(t)\rangle|dt \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

grâce à la relation (2.17).

Soit $\delta > 0$, assez petit, vérifiant $a\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$, on obtient alors,

$$\int_{A\cap[|\langle x', f(t)\rangle|\leq a]} |\langle x', f(t)\rangle|dt \leq a.\mu(A) \leq a.\delta \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

dès que $\mu(A) \leq \delta$. D'où

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall A \in \Sigma : \mu(A) \leq \delta,$

$$\begin{aligned}\int_A |\langle x', f(t)\rangle|dt &= \int_{A\cap[|\langle x', f(t)\rangle|\leq a]} |\langle x', f(t)\rangle|dt + \int_{A\cap[|\langle x', f(t)\rangle|>a]} |\ \langle x', f(t)\rangle\ |\ dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

Donc, H est Pettis-uniformément intégrable. ■

2.3 Comparaison de l'intégration au sens de Pettis avec l'intégration au sens de Bochner

Théorème 2.3.1. *Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, $f : \Omega \to E$ une fonction fortement mesurable.*

1. *f est **Pettis intégrable** si est seulement si il existe une fonction g bornée, fortement mesurable, et une suite (E_n) d'éléments de Σ deux à deux disjoints, et une suite (x_n) d'élément de E tels que,*

$$f = g + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mathbb{1}_{E_n},$$

*et la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\mu(E_n)$ **simplement convergente**, et on a*

$$\int_E^{Pettis} fd\mu = \int_E^{Pettis} gd\mu + \sum_{n=1}^{\infty} x_n\mu(E \cap E_n).$$

2. *f est **Bochner intégrable** si est seulement si la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\mu(E_n)$ est **absolument convergente**, et on a*

$$\int_E^{Bochner} fd\mu = \int_E^{Bochner} gd\mu + \sum_{n=1}^{\infty} x_n\mu(E \cap E_n).$$

Pour la démonstration de ce Théorème nous avons besoin du Lemme suivant.

Lemme 2.3.1. *Si $f : \Omega \to E$ une fonction fortement mesurable, alors, il existe une fonction $g : \Omega \to E$ bornée, fortement mesurable et une fonction $h : \Omega \to E$ fortement mesurable vérifiant*

$$h(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mathbb{1}_{E_n},$$

pour toute famille (E_n) d'éléments de Σ deux à deux disjoints, et $(x_n) \subset E$, tel que,

$$f = g + h.$$

Démonstration. D'après le Théorème 1.2.3 de mesurabilité de Pettis, on a $f(\Omega)$ est un sous-ensemble séparable de E.
Soit (x_n) une suite dénombrable dense dans $f(\Omega)$. Soit

$$E_n = \big\{w \in \Omega : f(w) \in [x_n + \overline{B}_E] \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} [x_k + \overline{B}_E]\big\}$$

et

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mathbb{1}_{E_n},$$

alors h et fortement mesurable d'après la Définition et $\| f(\omega) - h(\omega) \| \leq 1, \ \forall \omega \in E$.
En effet,

- si $w \in E_n : \mathbb{1}_{E_n}(\omega) = 1$ alors, $h(w) = x_n \Rightarrow f(w) - h(w) \in \overline{B}_E \Longrightarrow \| f(w) - h(w) \| \leq 1$,
- si $w \notin E_n : \mathbb{1}_{E_n}(\omega) = 0$ alors,

$$\begin{aligned}
f(\omega) \notin [x_n + \overline{B}_E] \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} [x_k + \overline{B}_E] &\Longrightarrow f(\omega) \in \bigcup_{k=1}^{n-1} [x_k + \overline{B}_E] \\
&\Longrightarrow \exists k \in \{1, ..., n-1\}, \ f(\omega) \in x_k + \overline{B}_E \text{ et } h(\omega) = x_k \\
&\Longrightarrow f(\omega) - h(\omega) \in \overline{B}_E \\
&\Longrightarrow \| f(w) - h(w) \| \leq 1.
\end{aligned}$$

Alors, si on prend $g = f - h$, on a g fortement mesurable et bornée, c'est à dire, il existe une fonction g fortement mesurable bornée et $f = g + h$. ■

Démonstration. du Théorème 2.3.1
1. Pour démontrer la nécessité, on suppose f Pettis intégrable, alors d'après le Lemme 2.3.1, il existe $g, h : \Omega \to E$, g bornée fortement mesurable, h fortement mesurable, telles

que $h(E_n) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_n \mathbb{1}_{E_n}$, $(E_n)_n \subset \Sigma$ deux à deux disjoints, et $f = g + h$.
Alors,

$$\begin{aligned}
\int_E^{Pettis} f d\mu &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E\cap E_n}^{Pettis} f d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\int_{E\cap E_n}^{Pettis} g d\mu + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E\cap E_n}^{Pettis} x_n \mathbb{1}_{E_n} d\mu \Big) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E\cap E_n}^{Pettis} g d\mu + \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \mu(E \cap E_n) \\
&= \int_E^{Pettis} g d\mu + \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \mu(E \cap E_n).
\end{aligned}$$

Il est clair que la série $\sum x_n \mu(E_n)$ est simplement convergente.

Pour montrer la suffisance, on prend pour simplifier, $\mu(E_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $E \in \Sigma$ alors,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E \cap E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E_n)$$

Alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E \cap E_n)$ est simplement convergente.
En particulier, pour chaque $x' \in E'$, on a,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x', x_n \rangle| \mu(E \cap E_n) < +\infty$$

et puisque $\langle x', h \rangle$ est intégrable, Alors,

$$\begin{aligned}
\langle x', \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E \cap E_n) \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x', x_n \rangle \mu(E \cap E_n) \\
&= \int_{E\cap E_n} \sum_{n=1}^{\infty} \langle x', x_n \rangle \mathbb{1}_{E_n} d\mu \\
&= \int_E \sum_{n=1}^{\infty} \langle x', x_n \mathbb{1}_{E_n} \rangle d\mu \\
&= \int_E \langle x', \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mathbb{1}_{E_n} \rangle d\mu \\
&= \int_E \langle x', h \rangle d\mu.
\end{aligned}$$

Par conséquent, h est Pettis intégrable de plus, f est Pettis intégrable.

2. Soit f Bochner intégrable, donc f est fortement mesurable. D'après le Lemme 2.3.1, il existe une fonction g bornée, fortement mesurable et une fonction $h : \Omega \to E$ fortement

mesurable vérifiant, $h(E_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \mathbb{1}_{E_n}$.
Puisque g est bornée alors g est Bochner intégrable, d'où $\int_E \| g \| d\mu < +\infty$ et $\int_\Omega \| \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \mathbb{1}_{E_n} \| < +\infty$.
Puisque les E_n sont deux à deux disjoints, on a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \| x_n \| \mu(E_n) < \infty$.
D'où $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \| x_n \| \mu(E_n)$ est absolument convergente. De plus

$$\begin{aligned}
\int_E^{Bochner} h d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E\cap E_n} h(E_n) d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E\cap E_n} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mathbb{1}_{E_n} d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E\cap E_n} x_n \mathbb{1}_{E_n} d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E \cap E_n).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_E^{Bochner} f d\mu &= \int_E^{Bochner} (g+h) d\mu \\
&= \int_E^{Bochner} g d\mu + \int_E^{Bochner} h d\mu \\
&= \int_E^{Bochner} g d\mu + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E \cap E_n).
\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.3.2. *Soit $f : \Omega \to E$ une fonction de la forme,*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mathbb{1}_{E_n}.$$

$(E_n) \subset \Sigma$ deux à deux disjoints. Alors,
a) f est ***Pettis intégrable*** *si et seulement si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E_n)$ est* ***simplement convergente****, et on a,*

$$\int_E^{Pettis} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E \cap E_n).$$

b) f est ***Bochner intégrable*** *si et seulement si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E_n)$ est* ***absolument convergente****, et on a,*

$$\int_E^{Bochner} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mathbb{1}_{E_n} \mu(E \cap E_n).$$

Proposition 2.3.3.
a) Si $f : \Omega \to E$ est Bochner intégrable, alors f est Pettis intégrable et

$$\int_E^{Bochner} f d\mu = \int_E^{Pettis} f d\mu. \tag{2.18}$$

b) la réciproque est fausse.

Démonstration.
a) Posons $x_0 := \int_E^{Bochner} f d\mu$.
En appliquant le Corolaire 2.1.2 avec $T = E'$ et $E_2 = \mathbb{R}$ séparable, on obtient,

$$\forall x' \in E', \int_\Omega \langle x', f \rangle d\mu = \langle x', \int_E^{Bochner} f d\mu \rangle = \langle x', \nu_f \rangle.$$

Donc f est Pettis intégrable et $\int_E^{Pettis} f d\mu = \nu_f$.
Donc,

$$\int_E^{Bochner} f d\mu = \int_E^{Pettis} f d\mu.$$

■

Pour le b) et pour montrer que le réciproque est fausse on donne le contre exemple suivant.

2.3.1 Exemple de fonction Pettis intégrable et non Bochner intégrable

On prend $E = l^2(\mathbb{N}^*)$ et un espace de probabilité (Ω, Σ, μ) sur lequel on peut définir une fonction $f = (f_i)_{i \geq 1} : \Omega \to l^2(\mathbb{N}^*)$ vérifiant :

$$f(\Omega) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}^*} \{u_j\}, \quad u_j = (u_{j,i})_{i \geq 1}$$

$$u_{j,i} = j \mathbb{1}_{\{|j|\}}(i)$$

et

$$\mu(f = u_j) = \frac{c}{j^2}$$

où

$$c. \sum_{j \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{j^2} = 1$$

Nous avons f n'est pas Bochner intégrable. *En effet*, il suffit de vérifier que $\int_\Omega \|f\|d\mu = +\infty$. Pour cela, introduisons $g_n := (f_i)_{1\leq i\leq n}$.
Il est clair que $\|g_n\| \leq \|f\|$. En effet,

$$\begin{aligned}
\| g_n \| &= \| (f_i)_{1\leq i\leq n} \| \\
&= \left(f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(f_1^2 + ... + f_n^2 + f_{n+1}^2 + ...\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \| (f_i)_{1\leq i\leq +\infty} \| \\
&= \| f \| .
\end{aligned}$$

On va calculer $\int_\Omega \|g_n\|d\mu$ pour voir qu'elle tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
On a

$$\| g_n \| = \| (f_i)_{1\leq i\leq n} \| = (u_{j,1}^2 + ... + u_{j,n}^2)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} |j| & si \quad n \geq |j|; \\ 0 & si \quad n < |j|. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \|g_n\|d\mu &= \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} \| g_n \| \, \mu(f = u_j) \\
&= \sum_{0<|j|\leq n} |j|\frac{c}{j^2} \\
&= \sum_{j=-n}^{-1} -j\frac{c}{j^2} + \sum_{j=1}^{n} j\frac{c}{j^2} \\
&= \sum_{j=1}^{n} j\frac{c}{j^2} + \sum_{j=1}^{n} j\frac{c}{j^2} \\
&= 2c\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty
\end{aligned}$$

On en déduit que $\int_\Omega \|f\|d\mu = +\infty$ et donc que f n'est pas Bochner intégrable.
Pour la Pettis-intégrabilité, notons $x' = (x_i')_{i\geq 1}$ un élément quelconque du dual $l^2(\mathbb{N}^*)' = l^2(\mathbb{N}^*)$.
En rappelant que pour l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{N}^*)$, la forme de dualité est donnée par $\langle x', h\rangle = \sum\limits_{i\geq 1} h_i x_i'$.
En particulier on a pour $h = f = u_j$ pour tout $j \in \mathbb{Z}^*$,

$$\langle x', u_j\rangle = \sum_{i\geq 1} u_{j,i}x_i' = \sum_{i\geq 1} j\mathbb{1}_{(|j|)}(i)x_i' = jx_{|j|}'.$$

Vérifions d'abord que f est scalairement intégrable.
En effet,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\langle x^{'}, f\rangle| d\mu &= \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} |\langle x^{'}, u_j\rangle| \mu(f = u_j) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} \mid jx^{'}_{|j|} \mid \frac{c}{j^2} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{-1} -j \mid x^{'}_{|j|} \mid \frac{c}{j^2} + \sum_{j=1}^{\infty} j \mid x^{'}_{|j|} \mid \frac{c}{j^2} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} j \mid x^{'}_{|j|} \mid \frac{c}{j^2} + \sum_{j=1}^{\infty} j \mid x^{'}_{|j|} \mid \frac{c}{j^2} \\
&= 2c \sum_{n=1}^{\infty} |x^{'}_j| \frac{1}{j} \\
&\leq 2c \big(\sum_{n=1}^{\infty} x^{'2}_j\big)^{\frac{1}{2}} \big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\big)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(inégalité de Holder)} \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Puisque $(\langle x', u_j\rangle \mu(f = u_j))_{j\in\mathbb{Z}^*}$ est une famille de réelles, on peut sommer par paquets indexés par $\{-j, j\}$, d'où

$$\int_{\Omega} |\langle x', f\rangle| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} (jx'_j - jx'_j) \frac{c}{j^2} = 0.$$

Nous venons ainsi établi que

$$\forall x' \in (l^2)', \int_{\Omega} |\langle x', f\rangle| d\mu = 0.$$

Autrement dit, f est Pettis intégrable et $\int_{\Omega}^{Pettis} f d\mu = 0$.

■

Chapitre 3

Inclusions différentielles du second ordre avec des conditions aux limites en deux points

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude de l'inclusion différentielle du second ordre avec des conditions aux limites en deux points de la forme

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases}\ddot{u}(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)), \text{ p.p. } t \in [0, 1],\\ u(0) = u(1) = 0,\end{cases}$$

où E est un espace de Banach séparable, $F : [0, 1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application semi continue supérieurement à valeurs convexes compactes, Γ une multi-application mesurable scalairement Pettis uniformément intégrable, à valeurs convexes uniformément compactes.

Au début, nous donnons deux Lemmes préliminaires où nous démontrons quelques propriétés d'une fonction de Green, en aura besoin dans la démonstration de nos résultats d'existence de solution.

Cette fonction a été utilisée par plusieurs auteurs pour l'étude des équations et inclusions différentielles du second ordre, nous citons Hartman [9] qui a introduit une telle fonction, pour l'étude du problème avec des conditions aux limites en deux points pour une équation différentielle ordinaire du second ordre.

3.1 Fonction de Green

Lemme 3.1.1. *Soit E un espace de Banach séparable, et soit $G : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$G(t,s) = \begin{cases} s(t-1) & si \quad 0 \le s \le t, \\ t(s-1) & si \quad t \le s \le 1. \end{cases}$$

Alors, on a les résultats suivants

a) $G(.,s)$ est dérivable sur $[0,1]$ pour tout $s \in [0,1]$, sauf sur la diagonale et sa dérivée est donnée par

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} s & si \quad 0 \le s < t, \\ (s-1) & si \quad t < s \le 1. \end{cases}$$

b) $G(.,.)$ et $\dfrac{\partial G}{\partial t}$ (.,.) vérifient

$$\sup_{t,s \in [0,1]} \big| G(t,s) \big| \le 1 \quad , \quad \sup_{t,s \in [0,1]} \Big| \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \Big| \le 1$$

Démonstration.

a) Soit $0 \le t \le 1$. Pour tout $s \in [0,1]$ fixé et pour tout $h > 0$ assez petit, avec $0 \le t < t+h < 1$, nous avons,

$$\frac{G(t+h,s) - G(t,s)}{h} = \begin{cases} \dfrac{sh}{h} & si \quad 0 \le s < t < t+h, \\ \dfrac{h(s-1)}{h} & si \quad t+h < s \le 1. \end{cases}$$

donc

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{G(t+h,s) - G(t,s)}{h} = \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} s & si \quad 0 \le s \le t \\ (s-1) & si \quad t < s \le 1, \end{cases} \tag{3.1}$$

c'est à dire $G(.,s)$ est dérivable à droite sur $[0,1[$

De la même façon on démontre que $G(.,s)$ est dérivable à gauche sur $]0,1]$ et sa dérivée est donnée par la relation (3.1).

c) D'après la définition de G et $\dfrac{\partial G}{\partial t}$, on a

- pour $0 \le s \le t \le 1$

$$\big|G(t,s)\big| = \big|s(t-1)\big| = s(1-t) \le 1,$$
$$\big|\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\big| = |s| = s \le 1.$$

- pour $0 \le t < s \le 1$

$$\big|G(t,s)\big| = \big|t(s-1)\big| = t(1-s) \le 1,$$
$$\big|\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\big| = \big|s-1\big| = 1-s \le 1. \text{ Donc,}$$

$$\sup_{t,s\in[0,1]} \big|G(t,s)\big| \le 1 \quad , \quad \sup_{t,s\in[0,1]} \big|\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\big| \le 1.$$

■

Lemme 3.1.2. *Soit E un espace de Banach séparable et soit $G : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie dans le Lemme* 3.1.1.
Soient $f \in \boldsymbol{P}^1_E([0,1])$ et $u_f : [0,1] \to E$ la fonction définie par

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \ \forall t \in [0,1].$$

Alors, nous avons les propriétés suivantes
a) la fonction $t \longmapsto u_f(t)$ est une fonction continue sur $[0,1]$ dans E, i.e., $u_f \in \boldsymbol{C}_E([0,1])$.
b) $u_f(0) = u_f(1) = 0$.
c) La fonction u_f est scalairement dérivable i.e. pour tout $x' \in E'$, la fonction scalaire $\langle x', u_f\rangle$ est dérivable, et sa dérivée $\dot{u}_f$ satisfait

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \big\langle x', \frac{u_f(t+h)-u_f(t)}{h}\big\rangle = \big\langle x', \dot{u}_f(t)\big\rangle = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\langle x', f(s)\rangle ds = \big\langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t} f(s)ds\big\rangle$$

par conséquent, pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $x' \in E'$,
$\dot{u}_f(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t} f(s)ds, \ \forall t \in [0,1]$ est une fonction continue de $[0,1]$ dans E.
d) la fonction $\dot{u}_f$ est scalairement dérivable, c'est à dire, pour tout $x' \in E'$ la fonction scalaire $\langle x', \dot{u}_f(.)\rangle$ est p.p. dérivable avec $\frac{d}{dt}\langle x', \dot{u}_f(t)\rangle = \langle x', \ddot{u}_f(t)\rangle$, et sa dérivée faible notée $\ddot{u}_f$ est égale à f presque partout, $\ddot{u}_f = f$ p.p.

Pour la démonstration de notre Lemme nous avons besoin du résultat suivant

Lemme 3.1.3. *(Grothendieck* 1964 [*8*]*)*
Soit (g_n) une suite de fonction bornées dans $\boldsymbol{L}^\infty_{\mathbb{R}}([0,T])$, telle que $g_n(t) \longrightarrow 0$ ponctuellement, alors pour toute partie H uniformément intégrable dans $\boldsymbol{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$ la suite

$$\big(\langle g_n, h\rangle\big) = \Big(\int_0^T g_n(t)h(t)dt\Big)$$

converge uniformément vers 0*, pour tout $h \in H$.*

Démonstration (du Lemme 3.1.2)

a) Soit $f \in \mathbf{P}^1_E([0,1])$.

Remarquons d'abord que les fonctions

$$s \mapsto G(t,s)f(s) \quad \text{et} \quad h \mapsto \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s),$$

sont Pettis-intégrable, $\forall t \in [0,1]$.

En effet, puisque f est Pettis-intégrable, d'après le Théorème 2.2.1, l'ensemble $\big\{\langle x', f(.)\rangle, \parallel x' \parallel \leq 1\big\}$ est uniformément intégrable, et comme

$$\sup_{t,s\in[0,1]} \big|G(t,s)\big| \leq 1 \quad \text{et} \quad \sup_{t,s\in[0,1]} \big|\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\big| \leq 1,$$

on conclut que les ensembles

$$\big\{\langle x', G(t,.)f(.)\rangle, \parallel x' \parallel \leq 1\big\} \quad \text{et} \quad \big\{\langle x', \frac{\partial G}{\partial t}(t,.)f(.)\rangle, \parallel x' \parallel \leq 1\big\}$$

sont uniformément intégrable.

Pour tout $x' \in E'$ la fonction

$$(t,s) \longmapsto G(t,s)\langle x', f(s)\rangle \tag{3.2}$$

est une fonction de Garathéodory sur $[0,1]\times[0,1]$, c'est à dire mesurable par rapport à s et continue par rapport à t avec

$$\big|G(t,s)\langle x', f(s)\rangle\big| \leq \big|\langle x', f(s)\rangle\big|$$

et

$$\langle x', u_f(t)\rangle = \langle x', \int_0^1 G(t,s)f(s)ds\rangle = \int_0^1 G(t,s)\langle x', f(s)\rangle ds.$$

Par le Théorème de Lebesgue, on déduit que la fonction $t \longmapsto \langle x', u_f(t)\rangle$ est continue sur $[0,1], \forall x' \in E'$.

Donc, u_f est une fonction continue sur $[0,1]$ dans l'espace faible E_σ, i.e., $u_f \in \mathbf{C}_{E_\sigma}([0,1])$.

D'autre part, montrons que $u_f \in \mathbf{C}_E([0,1])$.

Puisque $f \in \mathbf{P}^1_E([0,1])$, d'après le Théorème 2.2.1, l'ensemble

$$h_{x'}(.) := \big\{|\langle x', f(s)\rangle|; \parallel x' \parallel \leq 1\big\}$$

est uniformément intégrable dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$.

Soit $(t_n)_n$ une suite de points de $[0,1]$ convergent vers $t \in [0,1]$.

Nous avons

$$
\begin{aligned}
\| u_f(t_n) - u_f(t) \| &= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \left| \langle x', u_f(t_n) - u_f(t) \rangle \right| \\
&= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \left| \langle x', \int_0^1 (G(t_n,s)f(s) - G(t,s)f(s))ds \rangle \right| \\
&\leq \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \int_0^1 |G(t_n,s) - G(t,s)| |\langle x', f(s) \rangle| ds \\
&= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \int_0^1 |G(t_n,s) - G(t,s)| h_{x'}(s) ds.
\end{aligned}
$$

Comme la suite $v_n(.) = |G(t_n,.) - G(t,.)|$ est uniformément bornée et converge ponctuellement vers 0 (grâce à la continuité de $G(t,.)$), et comme l'ensemble

$$H := \{h_{x'}(.) := |\langle x', f(.) \rangle|; \| x' \| \leq 1\}$$

est uniformément intégrable dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$.

D'aprés le Lemme 3.1.3, on conclut que $(v_n(.))$ converge uniformément vers 0 sur H dans le dualité $\langle \mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}}, \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}} \rangle$, c'est à dire

$$\langle v_n(.), h_{x'}(.) \rangle = \int_0^1 v_n(s) h_{x'}(s) ds$$

converge uniformément vers 0, pour tout $h_{x'} \in H$.

Par conséquent

$$\| u_f(t_n) - u_f(t) \| = \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \int_0^1 |G(t_n,s) - G(t,s)| h_{x'}(s) ds$$

tend vers 0, d'où la continuité de u_f, i.e., $u_f \in \mathbf{C}_E([0,1])$.

b) On a $u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds$, d'après la Définition de la fonction G, $G(0,s) = G(1,s) = 0, \forall s \in [0,1]$, d'où $u_f(0) = u_f(1) = 0$.

c) On doit démontrer que u_f est scalairement dérivable, i.e., pour tout $x' \in E'$, la fonction scalaire $\langle x', u_f \rangle$ est dérivable.

Nous avons

$$
\begin{aligned}
\lim_{h \longrightarrow 0} \langle x', \frac{u_f(t+h) - u_f(t)}{h} \rangle &= \lim_{h \longrightarrow 0} \langle x', \int_0^1 \frac{G(t+h,s) - G(t,s)}{h} f(s) ds \rangle \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \int_0^1 \frac{G(t+h,s) - G(t,s)}{h} \langle x', f(s) \rangle ds \\
&= \int_0^1 \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{G(t+h,s) - G(t,s)}{h} \langle x', f(s) \rangle ds \\
&= \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \langle x', f(s) \rangle ds \\
&= \langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f(s) ds \rangle
\end{aligned}
$$

donc,
$$\langle x', \dot{u}_f(t)\rangle = \langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds\rangle, \forall t \in [0,1].$$
Comme E est séparable on déduit que
$$\dot{u}_f(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds,\ \forall t \in [0,1].$$
Maintenant, nous démontrons la continuité de $\dot{u}_f$.

En utilisant les mêmes arguments de la démonstration de la continuité de u_f et en prenant en compte le fait que $\sup\limits_{t,s\in[0,1]} |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)| \leq 1$.

d) On veut démontrer que $\dot{u}_f$ est scalairement dérivable, i.e., pour tout $x' \in E'$, la fonction scalaire $\langle x', \dot{u}_f(.)\rangle$ est dérivable .

On a
$$\begin{aligned}\dot{u}_f(t) &= \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds,\ \forall t \in [0,1]\\ &= \int_0^t sf(s)ds + \int_t^1 (s-1)f(s)ds,\ \forall t \in [0,1].\end{aligned}$$
Pour tout $x' \in E'$, nous avons,
$$\begin{aligned}\big\langle x', \ddot{u}_f(t)\big\rangle &= \frac{\partial}{\partial t}\big\langle x', \dot{u}_f(t)\big\rangle\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\big\langle x', \int_0^t sf(s)ds - \int_t^1 (s-1)f(s)ds\big\rangle\\ &= \big\langle x', \frac{\partial}{\partial t}\big(\int_0^t sf(s)ds - \int_t^1 (s-1)f(s)\big)ds\big\rangle\\ &= \big\langle x', [sf(s)]_0^t + [(s-1)f(s)]_t^1\big\rangle\\ &= \big\langle x', tf(t) - (t-1)f(t)\big\rangle\\ &= \big\langle x', f(t)\big\rangle,\ \text{p.p. } t \in [0,1].\end{aligned}$$
Soit (e'_n) une suite d'éléments de E' qui sépare les points de E. Alors nous avons
$$\big\langle e'_n, \ddot{u}_f(t)\big\rangle = \big\langle e'_n, f(t)\big\rangle,$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour p.p. $t \in [0,1]$.

On conclut donc $\ddot{u}_f = f$ p.p sur $[0,1]$.

3.2 Propriétés topologiques de l'ensemble des solutions de l'inclusion $\ddot{u}(t) \in \Gamma(t)$

Dans cette section on étudie les propriétés topologiques de l'ensemble des solutions de l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_\Gamma) \begin{cases} \ddot{u}(t) \in \Gamma(t), \text{ p.p. } t \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $\Gamma : [0,1] \rightrightarrows E$ est une multi-application mesurable scalairement Pettis uniformément intégrable, à valeurs convexes compactes.

Théorème 3.2.1. [8] *Soit E un espace de Banach séparable et soit $\Gamma : [0,1] \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable scalairement Pettis-uniformément intégrable à valeurs non vides convexes compactes. Alors*

$$\boldsymbol{S}_\Gamma^{Pe} = \big\{ f \in \boldsymbol{P}_E^1([0,1]) / \ f(t) \in \Gamma(t), \ \forall t \in [0,1] \big\},$$

l'ensemble de toutes les sélections Pettis-intégrables de Γ est non vide, convexe, séquentiellement-compact pour la topologie de la convergence ponctuelle sur $\boldsymbol{L}_\mathbb{R}^\infty \bigotimes E'$.
De plus, l'intégrale multivoque,

$$I = \int_0^1 \Gamma(t)dt = \Big\{ \int_0^1 f(t)dt, \ f \in \boldsymbol{S}_\Gamma^{Pe} \Big\}$$

est convexe compact pour la norme de E.

Théorème 3.2.2. *Soit E un espace de Banach séparable et soit $\Gamma : [0,1] \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable scalairement Pettis-uniformément intégrable à valeurs convexes compactes. Alors l'ensemble X_Γ des solutions dans $\boldsymbol{W}_{P,E}^{2,1}([0,1])$ de l'inclusion différentielle*

$$(\mathcal{P}_\Gamma) \begin{cases} \ddot{u}(t) \in \Gamma(t), \ p.p. \ t \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

est non vide, convexe compact dans l'espace de Banach $\boldsymbol{C}_E^1([0,1])$ muni de la norme $\| \ . \ \|_{\boldsymbol{c}^1}$.

Démonstration.
On reprend les idées des preuves dans [3, 4].

Soit $\mathbf{S}_{\Gamma}^{Pe} = \big\{f \in \mathbf{P}_{E}^{1}([0,1]) : f(t) \in \Gamma(t),\ \forall t \in [0,1]\big\}$, l'ensemble des sélections Pettis-intégrables de Γ.

On a $\mathbf{S}_{\Gamma}^{Pe}$ est non vide et séquentiellement compact pour la topologie de la convergence ponctuelle sur $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^{\infty} \bigotimes E'$.

D'après le Lemme 3.1.2, l'ensemble $\mathbf{X}_{\Gamma}$ des solutions dans $\mathbf{W}_{P,E}^{2,1}([0,1])$ de $(\mathcal{P}_{\Gamma})$ est non vide et est donné par,

$$\mathbf{X}_{\Gamma} = \Big\{u_f : [0,1] \longrightarrow E,\ u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds,\ \forall t \in [0,1];\ f \in \mathbf{S}_{\Gamma}^{Pe}\Big\},$$

$\mathbf{X}_{\Gamma}$ est convexe. En effet, soient $u_{f_1}, u_{f_2} \in \mathbf{X}_{\Gamma}$ et $\lambda \in]0,1[$, alors,

$$u_{f_1} = \int_0^1 G(t,s)f_1(s)ds,\ \forall t \in [0,1]$$

et

$$u_{f_2} = \int_0^1 G(t,s)f_2(s)ds,\ \forall t \in [0,1]$$

avec $f_1, f_2 \in \mathbf{S}_{\Gamma}^{Pe}$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}(\lambda u_{f_1} + (1-\lambda)u_{f_2})(t) &= \lambda u_{f_1}(t) + (1-\lambda)u_{f_2}(t)\\ &= \lambda \int_0^1 G(t,s)f_1(s)ds + (1-\lambda)\int_0^1 G(t,s)f_2(s)ds\\ &= \int_0^1 G(t,s)(\lambda f_1(s) + (1-\lambda)f_2(s))ds\\ &= \int_0^1 G(t,s)(\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2)(s)ds,\end{aligned}$$

comme $f_1, f_2 \in \mathbf{S}_{\Gamma}^{Pe}$ et $\mathbf{S}_{\Gamma}^{Pe}$ est convexe on obtient, $\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2 \in \mathbf{S}_{\Gamma}^{Pe}$.

On conclut alors que, $\lambda u_{f_1} + (1-\lambda)u_{f_2} \in \mathbf{X}_{\Gamma}$, d'où la convexité de $\mathbf{X}_{\Gamma}$. Montrons maintenant que $\mathbf{X}_{\Gamma}$ est compact.

En effet, si (t_n) est une suite de points de $[0,1]$ convergeant vers $t \in [0,1]$, on aura,

$$\begin{aligned}\| u_f(t_n) - u_f(t) \| &= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \big|\langle x', u_f(t_n) - u_f(t)\rangle\big|\\ &= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \big|\langle x', \int_0^1 G(t_n,s)f(s) - G(t,s)f(s))ds\rangle\big|\\ &= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \big|\int_0^1 (G(t_n,s) - G(t,s))\langle x', f(s)\rangle ds\big|\\ &\leq \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \int_0^1 |G(t_n,s) - G(t,s)||\delta^*(x', \Gamma(s))|ds,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\| \dot{u}_f(t_n) - \dot{u}_f(t) \| &= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \big| \langle x', \dot{u}_f(t_n) - \dot{u}_f(t) \rangle \big| \\
&= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \big| \langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t_n, s) f(s) - \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) f(s)) ds \rangle \big| \\
&= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \big| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t_n, s) - \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) \langle x', f(s)) \rangle ds \big| \\
&\leq \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \int_0^1 \big| \frac{\partial G}{\partial t}(t_n, s) - \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) \big| | \delta^*(x', \Gamma(s)) | ds,
\end{aligned}$$

pour tout $f \in \mathbf{S}_E^{Pe}$.

Comme Γ est scalairement Pettis-uniformément intégrable, par le Théorème 2.2.2, l'ensemble

$$\big\{ |\delta^*(x', \Gamma(.))| ; \| x' \| \leq 1 \big\}$$

est uniformément intégrable dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$, et d'après le Lemme 3.1.1, les suites $(v_n(.)) := \big(|G(t_n, .) - G(t, .)| \big)$ et $(\omega_n(.)) := \big(|\frac{\partial G}{\partial t}(t_n, .) - \frac{\partial G}{\partial t}(t, .)| \big)$ sont uniformément bornées et convergent ponctuellement vers 0.

En appliquant le Lemme 3.1.3, on obtient

$$\sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \int_0^1 \mid G(t_n, s) - G(t, s) \mid\mid \delta^*(x', \Gamma(s)) \mid ds$$

et

$$\sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \int_0^1 \mid \frac{\partial G}{\partial t}(t_n, s) - \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) \mid\mid \delta^*(x', \Gamma(s)) \mid ds$$

convergent vers 0.

Par conséquent $\mathbf{X}_\Gamma$ et $\{\dot{u}_f : u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$ sont équicontinus dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$.

D'autre part, pour chaque $t \in [0,1]$,

$$\mathbf{X}_\Gamma(t) = \{u_f(t) : u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$$

et

$$\{\dot{u}_f : u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$$

sont relativement compacts dans E puisque

$$\mathbf{X}_\Gamma(t) \subset \big\{ \int_0^1 G(t, s) \Gamma(s) ds \big\}$$

et

$$\big\{ \dot{u}_f(t) : u_f \in \mathbf{X}_\Gamma \big\} \subset \big\{ \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) \Gamma(s) ds \big\}$$

et $\left\{ \int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds \right\}$, $\left\{ \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Gamma(s)ds \right\}$ sont compacts dans E.
En effet, d'après les propriétés des fonctions G et $\frac{\partial G}{\partial t}$, on voit bien que les multi-applications $G(t,.)\Gamma(.)$ et $\frac{\partial G}{\partial t}(t,.)\Gamma(.)$ vérifient les mêmes hypothèses qu'on a supposé sur la multi-application $\Gamma(.)$.
On déduit que $\left\{ \int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds \right\}$ et $\left\{ \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Gamma(s)ds \right\}$ sont compacts dans E.
Alors d'après le Théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.7.1), $\mathbf{X}_\Gamma$ est relativement $\| \,.\, \|_{\mathbf{c}^1}$-compact dans $\mathbf{C}_E([0,1])$.
Démontrons maintenant que $\mathbf{X}_\Gamma$ est fermé dans $\mathbf{C}_E([0,1])$.
Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$. D'après le Théorème 3.2.1, $\mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$ est séquentiellement compact pour la topologie de la convergence ponctuelle sur $\mathbf{L}_\mathbb{R}^\infty \bigotimes E'$, et par le Théorème 1.7.2, la suite (u_{f_n}) est relativement compacte dans $\mathbf{C}_E([0,1])$, on peut alors extraire de (f_n) une suite qu'on note aussi (f_n) qui converge $\sigma(\mathbf{P}_E^1, \mathbf{L}_\mathbb{R}^\infty \bigotimes E')$ vers une fonction $f \in \mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$, et telle que (u_{f_n}) converge uniformément vers une fonction continue $\xi \in \mathbf{C}_E^1([0,1])$.
La convergence faible de (f_n) vers f nous permet d'écrire pour chaque $y' \in \mathbf{L}_\mathbb{R}^\infty \bigotimes E'$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \langle y', f_n \rangle = \langle y', f \rangle$$

i.e.

$$\begin{aligned}\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^1 \langle y', f_n(s) \rangle ds &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \langle y', \int_0^1 f_n(s)ds \rangle \\ &= \langle y', \int_0^1 f(s)ds \rangle.\end{aligned}$$

En particulier, pour $y' = G(t,.)x' \in \mathbf{L}_\mathbb{R}^\infty \bigotimes E'$, avec $x' \in E'$ et pour tout $t \in [0,1]$, nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{n \longrightarrow \infty} \langle x', \int_0^1 G(t,s)f_n(s)ds \rangle &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^1 \langle G(t,s)x', f_n(s) \rangle ds \\ &= \int_0^1 \langle G(t,s)x', f(s) \rangle ds \\ &= \langle x', \int_0^1 G(t,s)f(s)ds \rangle\end{aligned}$$

et pour $y' = \frac{\partial G}{\partial t}(t,.)x' \in \mathbf{L}_\mathbb{R}^\infty \bigotimes E'$, avec $x' \in E'$ et pour tout $t \in [0,1]$, nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{n \longrightarrow \infty} \langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f_n(s)ds \rangle &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^1 \langle \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)x', f_n(s) \rangle ds \\ &= \int_0^1 \langle \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)x', f(s) \rangle ds \\ &= \langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds \rangle\end{aligned}$$

Comme $\{\int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds\}$ et $\{\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Gamma(s)ds\}$ sont compacts, alors

$$\big(u_{f_n}(.)\big) = \Big(\int_0^1 G(.,s)f_n(s)ds\Big) \quad \text{et} \quad \big(\dot{u}_{f_n}(.)\big) = \Big(\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(.,s)f_n(s)ds\Big)$$

convergent simplement vers $u_f(.) = \int_0^1 G(.,s)f(s)ds$, $\dot{u}_f(.) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(.,s)f(s)ds$ respectivement pour E muni de la topologie forte.
D'autre parts, (u_{f_n}) converge uniformément vers $\xi \in \mathbf{C}^1_E([0,1])$, alors que $\xi = u_f$, et donc $\mathbf{X}_\Gamma$ est fermé dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$ et puisque il est relativement compact, on conclut que $\mathbf{X}_\Gamma$ est compact dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$.

■

3.3 Résultat d'existence dans $\mathbf{W}^{2,1}_{P,E}([0,1])$ pour une inclusion différentielle du second ordre

Dans cette section on démontre notre résultat principal dans ce chapitre, *i.e.*, l'existence de solution dans $\mathbf{W}^{2,1}_{P,E}([0,1])$ pour l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t,u(t),\dot{u}(t)) & \text{p.p. } t \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Ce Théorème d'existence est le résultat obtenu par Azzam-Castaing-Thibault dans [3], au cas des conditions au limites en trois points.

Théorème 3.3.1. *Soit E un espace de Banach séparable. Soit $F : [0,1]\times E\times E \rightrightarrows E$ une multi-application Lebesgue mesurable sur $[0,1]$ et semi continue supérieurement sur $E\times E$, à valeurs convexes compactes.*
Soit $\Gamma : [0,1] \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable scalairement Pettis uniformément intégrable, à valeurs convexes compactes, telle que $F(t,x,y)\subset\Gamma(t)$, pour tout $(t,x,y)\in[0,1]\times E\times E$. Alors l'ensemble des solutions dans $\boldsymbol{W}^{2,1}_{P,E}([0,1])$ de notre inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t,u(t),\dot{u}(t)) & p.p.\ .t \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

est non vide et compact dans $\boldsymbol{C}_E([0,1])$.

Démonstration.

On prend les idées des preuves dans [3, 4].

Étape1 :

On sait que $\ddot{u}(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)) \subset \Gamma(t)$ alors, $\ddot{u}(t) \subset \Gamma(t)$.

D'après le Lemme 3.1.2, $\exists f \in \mathbf{S}^{Pe}_{\Gamma}$, telle que

$$u(t) := u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \ \forall t \in [0,1]$$

et

$$f(t) \in F(t, u_f(t), \dot{u}_f(t)), \text{ p.p. } t \in [0,1].$$

Montrons que pour chaque applications Lebesgue mesurables, $v, w : [0,1] \to E$, il existe une sélection Pettis-intégrable $s \in \mathbf{S}^{Pe}_{\Gamma}$ telle que

$$s(t) \in F(t, v(t), w(t)), \text{ p.p. } t \in [0,1].$$

En effet, v et w sont Lebesgue-mesurables, il existe deux suites de fonction étagées dans E, (v_n), (w_n) qui convergent ponctuellement vers v et w respectivement, pour E muni de la topologie de la convergence forte.

Comme les multi-applications $F(., v_n(.), w_n(.))$ sont Lebesgue-mesurables, à valeurs fermées, d'après le Théorème d'existence de sélection mesurable (Théorème 1.4.1), il existe une suite de sélections Lebesgue-mesurables de $F(., v_n(.), w_n(.))$ qu'on note (s_n),

$$s_n(t) \in F(t, v_n(t), w_n(t)) \subset \Gamma(t), \ \forall t \in [0,1]$$

et donc $s_n \in \mathbf{S}^{Pe}_{\Gamma}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

D'après le Théorème 3.2.1, $\mathbf{S}^{Pe}_{\Gamma}$ est séquentiellement $\sigma(\mathbf{P}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}} \bigotimes E')$-compact, donc par le Théorème de Ŝmulian (Théorème 1.7.7), on peut extraire de (s_n) une suite $(s_{\varphi(n)})$ qui converge $\sigma(\mathbf{P}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}} \bigotimes E')$ vers une fonction $s \in \mathbf{S}^{Pe}_{\Gamma}$.

On doit montrer que $s(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t))$, p.p. $t \in [0,1]$.

Soit $(e^*_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dense pour la topologie de Mackey $\tau(E', E)$ (Définition 1.3.5) , on applique le Théorème de Banach-Mazur (Théorème 1.7.12) à la suite $(\langle e^*_k, s_{\varphi(n)}(.)\rangle)_n, \ k \in \mathbb{N}$.

On conclut l'existence de la suite (z_n), $z_n \in co\{\langle e^*_k, s_{\varphi(n)}(.)\rangle \ : \ m \geq n\}$ telle que (z_n) converge fortement vers $\langle e^*_k, s(.)\rangle$.

Soit $A \subset [0,1]$ un ensemble Lebesgue-mesurable, comme $F(., v(.), w(.))$ est mesurable, en utilisant le Lemme de Fatou (Lemme 1.6.1) et la semi continué supérieure de $F(t,.,.)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\int_A \langle e_k^*, s(t)\rangle dt &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_A \langle e_k^*, z_n(t)\rangle dt \\
&\leq \limsup_{n\longrightarrow\infty} \int_A \delta^*(e_k^*, F(t, v_n(t), w_n(t)))dt \\
&\leq \int_A \limsup_{n\longrightarrow\infty} \delta^*(e_k^*, F(t, v_n(t), w_n(t)))dt \\
&= \int_A \delta^*(e_k^*, F(t, v(t), w(t)))dt.
\end{aligned}$$

Alors $\langle e_k^*, s(t)\rangle \leq \delta^*(e_k^*, F(t, v(t), w(t))),$ p.p. $t \in [0,1],\ \forall k \in \mathbb{N}.$

D'autre part, grâce au Lemme 1.4.4, on a

$$\sup_{x'\in E'} \langle x', s(t)\rangle = \sup_{k\in\mathbb{N}} \langle e_k^*, s(t)\rangle,$$

et par le Corolaire 1.4.6, $\exists x' \in E'$ tel que $\delta^*(., F(t, v(t), w(t)))$ est finie et continue en x', donc d'après le Lemme 1.4.4,

$$\sup_{x'\in E'} \delta^*\big(x', F(t, v(t), w(t))\big) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \delta^*\big(e_k^*, F(t, v(t), w(t))\big),$$

d'où

$$\sup_{x'\in E'} \big[\langle x', s(t)\rangle - \delta^*(x', F(t, v(t), w(t)))\big] = \sup_{k\in\mathbb{N}} \big[\langle e_k^*, s(t)\rangle - \delta^*(e_k^*, F(t, v(t), w(t)))\big].$$

Et puisque F est à valeurs convexes fermées, on utilise la relation (1.2), pour obtenir

$$\begin{aligned}
d(s(t), F(t, v(t), w(t))) &= \sup_{x'\in \overline{B}_{E'}} \big[\langle x', s(t)\rangle - \delta^*(x', F(t, v(t), w(t)))\big] \\
&\leq \sup_{x'\in E'} \big[\langle x', s(t)\rangle - \delta^*(x', F(t, v(t), w(t)))\big] \\
&= \sup_{k\in\mathbb{N}} \big[\langle e_k^*, s(t)\rangle - \delta^*(e_k^*, F(t, v(t), w(t)))\big],\ \text{p.p. } t \in [0,1] \\
&= 0
\end{aligned}$$

par conséquent $s(t) \in F(t, v(t), w(t)),$ p.p. $t \in [0,1].$

Étape 2 :

D'après le Théorème 3.2.2, on a,

$$\mathbf{X}_\Gamma = \big\{u_f : [0,1] \to E, u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \forall t \in [0,1], f \in \mathbf{S}_\Gamma^{Pe}\big\}.$$

Considérons la multi-application $\Psi : \mathbf{X}_\Gamma \rightrightarrows \mathbf{X}_\Gamma$ définie par

$$\Psi(u) = \big\{v \in \mathbf{X}_\Gamma : \ddot{v}(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)),\ \text{p.p. } t \in [0,1]\big\}.$$

On doit lui appliquer le Théorème du point fixe de Kakutrani-Ky Fan (Théorème 1.8.1) pour obtenir l'existence de solution de notre inclusion différentielle. C'est à dire, montrons que Ψ est à valeurs non vides, convexes, compactes et semi-continue supérieurement.
pour tout $u \in \mathbf{X}_\Gamma$, $\Psi(u)$ est non vide, en effet, d'après **l'étape 1**, pour chaque application $u \in \mathbf{C}_E([0,1])$, il existe une sélection Pettis intégrable $g \in \mathbf{S}^{pe}_\Gamma$ telle que $g(t) \in F(t,u(t),\dot{u}(t))$, p.p. $t \in [0,1]$, alors, l'application v telle que $v(t) = \int_0^1 G(t,s)g(s)ds$ appartient à $\Psi(u)$.
D'autre part, $\Psi(u)$ est convexe, en effet,
soit $u \in \mathbf{X}_\Gamma$, soient $v_1, v_2 \in \Psi(u), \lambda \in [0,1]$, on doit montrer que $\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2 \in \Psi(u)$.
On a $v_1 \in \Psi(u)$ donc $v_1 \in \mathbf{X}_\Gamma$ et $\ddot{v}_1(t) \in F(t,u(t),\dot{u}(t)),$ p.p. $t \in [0,1]$,
et $v_2 \in \Psi(u)$ donc $v_2 \in \mathbf{X}_\Gamma$ et $\ddot{v}_2(t) \in F(t,u(t),\dot{u}(t)),$ p.p. $t \in [0,1]$.
Comme $F(t,u(t),\dot{u}(t))$ et $\mathbf{X}_\Gamma$ sont convexes on aura,

$$\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2 \in \mathbf{X}_\Gamma \text{ p.p. } t \in [0,1]$$

et

$$\lambda \ddot{v}_1(t) + (1-\lambda)\ddot{v}_2(t) \in F(t,u(t),\dot{u}(t)) \text{ p.p. } t \in [0,1],$$

donc

$$\big(\lambda v_1(t) + (1-\lambda)v_2(t)\big)^{\ddot{}} \in F(t,u(t),\dot{u}(t))) \text{ p.p.} t \in [0,1],$$

c'est à dire

$$\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2 \in \Psi(u).$$

D'où la convexité de $\Psi(u)$.
On montre maintenant que pour tout $u \in \mathbf{X}_\Gamma, \Psi(u)$ est compact.
En effet, soit (v_n) une suite de $\Psi(u)$ alors, $v_n \in \mathbf{X}_\Gamma$ c'est à dire

$$v_n(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{v}(s)ds, \quad \forall t \in [0,1],$$

et $\ddot{v}(s) \in F(s,u(s),\dot{u}(s)) \subset \Gamma(s)$ donc, $\ddot{v} \in \mathbf{S}^{Pe}_\Gamma$ et $\mathbf{S}^{Pe}_\Gamma$ est séquentiellement $\sigma(\mathbf{P}^1_E, \mathbf{L}^\infty_\mathbb{R} \bigotimes E')$-compact, donc d'après le Théorème d'Eberlien-Ŝmulian (Théorème 1.7.6), on peut extraire de $(\ddot{v}_n)$ une sous suite qu'on note aussi $(\ddot{v}_n)$, qui converge $\sigma(\mathbf{P}^1_E, \mathbf{L}^\infty_\mathbb{R} \bigotimes E')$ vers $f \in \mathbf{S}^{Pe}_E$.
La suite (v_n) est relativement compacte, donc on peut lui extraire une sous suite notée aussi (v_n) convergeant uniformément vers v, et d'après le Lemme 3.1.2, $\ddot{v} = f$, p.p. sur $[0,1]$.
Nous avons,

$$\ddot{v}_n(t) \in F(t,u(t),\dot{u}(t)), \text{ p.p. } t \in [0,1],$$

et $(\ddot{v}_n)$ converge $\sigma(\mathbf{P}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}} \bigotimes E')$ vers $\ddot{v}$,
$F(t,.,.)$ est semi continue supérieurement, alors d'après le Théorème 1.5.1

$$\ddot{v}(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)),\ \text{p.p. } t \in [0,1],$$

c'est à dire $v \in \Psi(u)$ et par conséquent $\Psi(u)$ est compact pour tout $u \in \mathbf{X}_\Gamma$.
Montrons maintenant la semi continuité supérieure de Ψ, ceci revient à montrer que son graphe

$$gph(\Psi) = \big\{(u,v) \in \mathbf{X}_\Gamma \times \mathbf{X}_\Gamma : v \in \Psi(u)\big\}$$

est fermé dans $\mathbf{X}_\Gamma \times \mathbf{X}_\Gamma$.
Soit $(u_n, v_n)_n$ une suite d'éléments du graphe de Ψ, convergent vers (u,v) dans $\mathbf{X}_\Gamma \times \mathbf{X}_\Gamma$.
D'après le Lemme 3.1.2, (u_n, v_n) converge uniformément vers (u,v) et $(\dot{u}_n, \dot{v}_n)$ converge ponctuellement vers $(\dot{u}, \dot{v})$, pour E muni de la topologie de la convergence forte et $(\ddot{u}_n, \ddot{v}_n)$ converge $\sigma(\mathbf{P}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}} \bigotimes E')$ vers $(\ddot{u}, \ddot{v})$.
Comme

$$\ddot{v}_n(t) \in F(t, u_n(t), \dot{u}_n(t)),\ \text{p.p. } t \in [0,1],$$

en utilisant le Théorème de fermeture (Théorème 1.5.2), on obtient

$$v(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)),\ \text{p.p. } t \in [0,1],$$

et donc (u,v) appartient au graphe de Ψ. Par conséquent, par le Théorème 1.7.10, Ψ est semi continue supérieurement.
En lui appliquant le Théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan (Théorème 1.8.1), nous obtenons l'existence d'un élément $u \in \mathbf{X}_\Gamma$, tel que $u \in \Psi(u)$
i.e.,

$$\ddot{u}(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)), \quad \text{p.p. } t \in [0,1],$$

avec $u(0) = u(1) = 0$.
Ce qui achève la démonstration de notre Théorème. ■

Conclusion

Cette étude est consacrée à une application de la Pettis intégration aux inclusions différentielles du second ordre avec des conditions aux limites en deux points.

La démarche a été établie par une étude sur les applications intégrables au sens de Pettis avec une comparaison entre la Pettis intégrabilité et la Bochner.

En fin, on a traité un Théorème d'existence de solution dans $\mathbf{W}^{2,1}_{P,E}([0,1])$ pour une inclusion différentielle de second ordre avec des conditions aux limites en deux points.

On peut dire que cette étude nous a permis de se familiariser de plus en plus avec cet outil.

Bibliographie

[1] J.P. Aubin et A. Cellina, **Differential Inclusions, Set valued maps and viability theory**, *Springer-Verlag, Berlin* (1984). MR91d :49001.

[2] J.P. Aubin, H. FranKowska, **Set -Valued Analysis**, *Birkhäuser Boston*, (1990).

[3] D. Azzam-Laouir, **Contribution à l'étude de problémes d'évolution du second ordre**, *Thèse de Doctorat d'état, Université de Constantine* (2003).

[4] D. Azzam-Laouir, C. Casttaing and L. Thibault, **Three bonndary value problems for second order differential inclusion in Banach space**, *Control Cybernet*, Vol 31 (2002) No. 3 pp. 959. 693.

[5] I. Boutana, **Application de la Pettis integration à la résolution de quelques problème d'évolution**, *Mémoire de magister, Université de Jijel*, (2008).

[6] H. Bresis, **Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications**, *Masson, Paris, Milan, Barcelone*, (1993).

[7] C. Castaing, **Weak compacteness and convergences in Bochner and Pettis intégration**, *Vietnan journal of Mathematics,* Volume 24, Number 3, (1996).

[8] C. Castaing, M. Valadier, **Convex analysis and measurable multi-functions**, **Lectures notes in math**, 580 Springer-Verlag, Berlin (1977).

[9] P. Hartman, **Ordinary differential equations**, *Jhon Wiley and Sons Inc*, Newyorle (1964).

[10] M. Kisielewicz, **Differential inclusion and optional controle**, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, Boston, London (1991).

[11] K. Musial, **Topics in the theory of Pettis integration**, *Rendiconti dell'istitudi Mathematica dell'Università di Trieste*, School on Measure Theory and Real Analysis. Grado (Italy), October (1992) 14-25.

[12] B.Pettis, **On integration in vector spaces,** *Transaction of the American Mathematical Society*, (1938) 44(2), 277-304.

[13] L. Schwartz, **Analyse-Topologie générale et analyse Fonctionnelle**, *Herman,* Paris (1970).