République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....

№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Problème d'inclusion d'évolution gouverné par le processus de la rafle avec des ensembles prox-réguliers

Présenté par :

–*Aiche Sarah* – *Moures Imane*

Devant le jury :

Président	: Izza Sabrina	M.C.B Université M.S.B.Y.- Jijel
Encadreur	: Fatiha Selamnia	M.C.B Université M.S.B.Y.- Jijel
Examinateur	: Aliouane Fatine	M.C.A Université M.S.B.Y.- Jijel

Promotion **2018/2019**

Table des matières

Introduction Générale

L'objectif entrepris à travers ce mémoire est l'étude de l'existence de solutions pour un problème d'évolution du premier ordre.

Les processus de la rafle («*sweeping process*» en anglais) jouent un rôle important en dynamique.

Un processus de la rafle se compose de deux substances, l'une qui balaie et l'autre qui est balayée. Comme exemple, on considère un grand anneau qui contient une petite boule à l'intérieur, et supposons que l'anneau va commencer à se déplacer au temps $t = 0$.

En fonction du mouvement de l'anneau, la boule reste juste où elle est (dans le cas où elle n'est pas touchée par l'anneau), sinon, elle est balayée vers l'intérieur de l'anneau. Dans ce dernier cas, la vitesse de la boule doit être orientée vers l'intérieur de l'anneau afin de ne pas le quitter.

En terme plus mathématiques, on obtient la formulation suivante

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N(K(t), u(t)) \qquad \text{p.p. sur } [0, T], \\ u(t) \in K(t) \ \text{ pour tout } \ t \in [0, T], \ \text{et } u(0) = u_0 \in K(0), \end{cases} \tag{0.0.1}$$

où $u(t)$ est la position de la boule au temps t, tandis que $K(t)$ est l'ensemble comprenant l'anneau au temps t. L'expression $N(K(t), u(t))$ désigne le cône normal extérieur à l'ensemble $K(t)$ à la position $u(t)$, donc (0.0.1) dit seulement que la vitesse $\dot{u}(t)$ de la boule doit être dirigée vers l'intérieur de l'anneau pour presque tout temps $t \in [0, T]$.

La limitation de «*presque partout*» est due au fait que, généralement nous ne trouvons pas de solution lisse $t \mapsto u(t)$ de (0.0.1), mais seulement des solutions qui sont différentiables partout en dehors d'un sous ensemble de $[0, T]$ de mesure nulle.

La condition initiale $u(0) \in K(0)$ indique que la boule dans le temps initial $t = 0$ est contenue dans l'anneau.

Le problème (0.0.1) a été introduit et étudié de manière approfondie par Moreau (voir [22, 23]) dans le cas où $K(t)$ est une multi-application à valeurs convexes fermées dans un espace de Hilbert varie d'une manière absolument continue. Dans ce contexte, $N(K(t), u(t))$ est le cône normal de $K(t)$ au point $u(t)$ au sens de l'analyse convexe. L'existence de solutions pour les processus de la rafle a été étudiée par de nombreux auteurs depuis le travail novateur de J.J. Moreau dans les années 70 (voir [22]).

Dans [27, 28], Valadier démontre pour la première fois l'existence de solutions de (0.0.1) sans l'hypothèse de convexité sur les valeurs de K pour quelques cas particuliers en dimension finie.

L'objectif de ce mémoire est de représenter un théorème d'existence de solution pour une inclusion différentielle.

Notre mémoire est constituée de trois chapitres, on commence par un chapitre préliminaire qui rappelle quelques résultats fondamentaux utiles pour la suite.

Le deuxième chapitre intitulé "Géométrie des espaces de Banach", son objectif est de donner des notions de bases sur les multi-applications J_s, le cône et les ensembles prox-réguliers.

Dans le troisième chapitre, nous présentons l'étude, dans un espace de Banach E, du processus de la rafle du premier ordre dépendant du temps et de l'état de la forme

$$(P) \begin{cases} u(0) = u_0; \\ u(t) \in K(t, u(t)), \forall t \in I \\ ; -\dot{u}(t) \in N_{K(t,u(t))}(u(t)), p.p.\ t \in I \end{cases}$$

où $N_{K(t,u(t))}(u(t))$ désigne le cône normale proximale à $K(t, u(t))$ au point $u(t)$, avec $K : I \times E \rightrightarrows E$ une multi-application a valeurs non vides et $u_0 \in K(0, u_0)$.

1

Préliminaires et résultats de base

Sommaire

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions et résultats de base qui nous seront utiles pour la démonstration de nos résultats d'existence de solutions, nous présentons des définitions et concepts fondamentaux ainsi que quelques résultats d'analyse fonctionnelle et notions de mesurabilité, l'analyse convexe, la topologie faible et faible* et nous terminons par les multiapplications.
Pour plus de détails sur ce chapitre se référer à [6, 13, 15, 18, 19, 26].

1.1 Notations générales

Dans notre mémoire nous utilisons les notations suivantes
Soient E un espace de Banach, E' son dual topologique, $\langle . , . \rangle$ leur produit de dualité et $\| \cdot \|$ la norme de E.
On note par

— $\sigma(E, E')$ la topologie faible sur E.

— $\sigma(E', E)$ la topologie faible* sur E'.

— $\overline{\mathbf{B}}_E(0, r)$ la boule fermée de E de centre 0 et de rayon r, $\overline{\mathbf{B}}(E)$ la boule unité fermée de E et $\mathbf{S}(E)$ la sphère unité de E.

— Si A est un sous-ensemble de E alors $\overline{A}$ est la fermeture de A.

Soit $T > 0$ et $I = [0, T]$. On note par

— $\mathbf{C}(I, E)$ l'espace de Banach des applications continues $u : I \to E$, muni de la norme sup, i.e., $\|u(\cdot)\|_{\mathbf{C}} = \sup\limits_{t \in I} \|u(t)\|$, et $\mathbf{C}^1(I, E)$ l'espace de Banach des applications continues $u : I \to E$ ayant une dérivée continue, muni de la norme

$$\|u(\cdot)\|_{\mathbf{C}^1} = \max\{\max_{t \in I} \|u(t)\|, \max_{t \in I} \|\dot{u}(t)\|\}.$$

— $p.p$ presque partout.

— $\mathbf{L}^p(I, E)$ $\big(p \in [1, +\infty[\big)$ l'espace quotient de Banach des applications $u : I \to E$ mesurables et telles que $\displaystyle\int_I \|u(t)\|^p dt < +\infty$, muni de la norme

$$\|u(\cdot)\|_p = \left(\int_I \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

— $\mathbf{L}^\infty(I, E)$ l'espace quotient de Banach des applications $u : I \to E$ essentiellement bornées, muni de la norme

$$\|u(\cdot)\|_\infty = \inf\big\{c \geq 0 : \ \|u(t)\| \leq c, \ p.p. \text{ sur } I\big\}.$$

— $l^p(\mathbb{Z})$, $1 \leq p \leq \infty$ désigne l'espace de Lebesgue défini par

$$l^p(\mathbb{Z}) = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{Z} / \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}, \text{ si } 1 \leq p < \infty$$

$$l^\infty(\mathbb{Z}) = \left\{ (\alpha_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{Z} / \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| < \infty \right\}.$$

— $D(f)$ domaine (effectif) de la fonction f.

— $dom(F)$ domaine (effectif) de multi-application F.

— $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble de voisinage de x.

— $P(X)$ l'ensemble de partie de X.

— Pour $A \subset E$, $\delta(., A)$ la fonction indicatrice de A, définie sur E par

$$\delta(x, A) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in A; \\ +\infty, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

— La fonction polaire associée à $\delta(., A)$, appelée aussi fonction d'appui de A, est la fonction notée $\delta^*(., A)$ et définie sur E' par

$$\delta^*(x', A) = \sup_{x\in A} \langle x', x \rangle, \quad \forall x' \in E'.$$

— $\mathbb{1}_A$ la fonction caractéristique de A, définie par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A; \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

1.2 Quelques résultats d'analyse fonctionnelle

Définition 1.1. *On appelle espace topologique un couple $(X, \mathcal{T})$ où X est un ensemble et $\mathcal{T}$ est une famille de parties de X (appelées ouverts), vérifiant les propriétés suivantes*

- *$\emptyset, X$ sont des ouverts.*
- *Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert. C'est à dire*

$$\forall (\mathcal{T}_i)_{i=1..n} \in \mathcal{T}, \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i \in \mathcal{T}.$$

- *Toute unions (quelconque) d'ouverts est un ouvert. C'est à dire*

$$\forall (\mathcal{T}_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}, \bigcup_{i\in I} \mathcal{T}_i \in \mathcal{T}.$$

Définition 1.2. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique, on appelle complémentaire de* A *dans* X *et on note* A^c *lorsque il n'y a pas d'ambiguïté l'ensemble* $\{x \in X, x \notin A\}$.

Définition 1.3. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $x \in X$. *On dit qu'une partie* V *de* X *est un voisinage de* x *s'il existe un ouvert* U *de* X *tel que* $x \in U \subset V$. *Plus généralement, soit* A *une partie de* X, *on appelle voisinage de* A *toute partie* V *de* X *telle qu'il existe un ouvert* U *de* X *vérifiant* $A \subset U \subset V$.

Exemple 1.4. *soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique*

1. *L'ensemble* $\mathcal{T}_d = P(X)$ *formé par l'ensemble des parties de* X *définit une topologie appelé la topologie discrète. Un espace muni de la topologie discrète est appelé un espace discret.*
2. *L'ensemble* $\mathcal{T}_g = \{\emptyset, X\}$ *définie une topologie appelée la topologie grossière.*
3. *Dans* $\mathbb{R}$ *L'ensemble des parties constituées d'unions d'intervalles ouverts et de l'ensemble vide définit la topologie usuelle de* $\mathbb{R}$.

Définition 1.5. *Soit* A *un sous-ensemble d'un espace topologique* $(X, \mathcal{T})$. *On dit que* A *est un fermé ou partie fermée de* X *lorsque le complémentaire de* A *dans* X *est ouvert. Autrement dit, si l'on a* $X \backslash A \in \mathcal{T}$.

Définition 1.6. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. *On dit que* $\mathcal{B}$ *est une base d'ouverts de* X *ou base de la topologie* $\mathcal{T}$ *si tout ouvert non vide de* X *est union d'ouverts appartenant à* $\mathcal{B}$.

Définition 1.7. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $x \in X$. *On appelle système fondamentale de voisinage de* x *ou base de voisinage de* x, *toute famille* $\mathcal{B}(x)$ *de voisinage de* x *telle que pour tout voisinages* V *de* X, *il existe* $W \in \mathcal{B}(x)$ *tel que* $W \subset V$. *Notez que si* $\mathcal{B}$ *est une base de voisinages de* x, *alors on a :*

$$\mathcal{V}(x) = \big\{V \subset X, \text{ il existe } W \in \mathcal{B}(x) \text{ avec } W \subset V\big\}.$$

Définition 1.8. *Soient* X *un espace topologique,* $x \in X$ *et* $A \subset X$.

1. *On dit que* x *est intérieur à* A *lorsque* A *est un voisinage de* x. *L'ensemble des points intérieurs à* A *et ce note* $\mathring{A}$.

2. *On dit que x est adhérent à A lorsque tout voisinage de x rencontre A. L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et se note $\overline{A}$.*
3. *On dit que x est un point frontière de A, s'il est à la fois adhérent à A et à $X \backslash A$. L'ensemble des points frontière de A s'appelle la frontière de A et se note $Fr(A)$. Autrement dit, on a $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}$.*
4. *On dit que x un point d'accumulation de A si tout voisinage de x dans X contient un point de A distinct de x lui même (x n'est pas un forcément dans A).*
5. *On dit qu'un point $a \in A$ est un point isolé dans A s'il existe un voisinage de a dans X tel que $V \cap A = \{a\}$.*

Définition 1.9. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit que X est séparé, si quelque soit deux éléments distincts $x, y \in X$, il existe V_x voisinage de x et V_y voisinage de y tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$*

Définition 1.10. *On dit que X est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. C'est à dire, si on peut énumérer ses points en une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ce qui implique notamment que $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$) c'est le cas de $\mathbb{N}$ lui-même ou de $\mathbb{N}^*$, de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Q}$, ou encore des entiers paires, ou de tout suite strictement croissante d'entiers.*

Définition 1.11. *Soit $(X, \mathcal{T})$un espace topologique et $A \subset X$.*

- *On dit que A est dense dans X ou partout dense si $\overline{A} = X$.*
- *On dit que X est séparable s'il existe une partie dénombrable A de X dense dans X.*

Définition 1.12. *Soient $(X, \mathcal{T}_1), (Y, \mathcal{T}_2)$ deux espace topologiques si $f : X \longrightarrow Y$*

- *On dit que f est continue au point $x_0 \in X$ si et seulement si*

  $$\forall\, W \in \mathcal{V}(f(x_0)), \exists\, V \in \mathcal{V}(x_0) \;/\; f(V) \subset W \Leftrightarrow \forall\, W \in \mathcal{V}(f(x_0)), f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(x_0).$$

- *On dit que f est séquentiellement continue au point $x_0 \in X$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de points de X convergeant vers x_0, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x_0)$. Dans un espace métrique la continuité est équivalent à la continuité séquentielle.*
- *On dit que f est continue sur X si elle est continue en chaque point de X.*

Définition 1.13. *Une distance sur un ensemble* X *est une application* d *définie sur* $X \times X$ *à valeurs dans* $[0, +\infty[$ *vérifiant, pour tout* x, y *et* z *dans* X

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Définition 1.14. *Un espace métrique est un ensemble muni d'une distance.*

Exemple 1.15. *Sur* $\mathbb{R}$ *la distance usuelle est définie par* $d(x, y) = |x - y|$.

Définition 1.16. *Soit* (X, d) *un espace métrique. On dit qu'une suite* (x_n) *d'éléments de* X *est une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ il existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tous } m, n \geq n_0 \text{ on a } d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Définition 1.17. *Soient* (X, d) *et* (Y, d') *des espaces métriques, et soit* $f : X \longrightarrow Y$ *une application,* f *est dite Lipschitzienne de constante (où : de rapport)* $\lambda \geq 0$ *si*

$$\forall x \in X, \forall y \in X : d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

Définition 1.18. *Un espace métrique* (X, d) *sera dit complet si toute suite de Cauchy d'éléments de* X *est convergente dans* (X, d).

Définition 1.19. *Soit* X *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. Une norme sur* X *est une application* $\| \cdot \| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *qui vérifie pour tous* x *et* y *dans* X *et* λ *dans* $\mathbb{K}$ *:*

1. $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ *(l'inégalité triangulaire).*

Exemple 1.20.

1. *L'application* $x \to |x|$ *est un norme sur* $\mathbb{R}$
2. *L'application* $z \to |z|$ *est une norme sur* $\mathbb{C}$
3. *Dans* $\mathbb{R}^n$*, on définit les trois normes suivantes*
   si $x = (x_1, x_2, ...x_n)$ *est dans* $\mathbb{R}^n$

$$\| x \|_1 = |x_1| + ... + |x_n|$$

$$\| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\| x \|_\infty = \max(|x_1|, ...|x_n|)$$

Définition 1.21. *Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un espace vectoriel normé.*

Définition 1.22. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel X muni d'un produit scalaire $\langle u, v \rangle$ et qui est complet pour la norme $\langle u, v \rangle^{\frac{1}{2}}$.*

Définition 1.23. *Un espace vectoriel normé $(X, \| \, . \, \|)$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{C}$ qui est complet pour la distance associé a sa norme est appelé un espace de Banach.*

Exemple 1.24. *L'espace vectoriel normé $X = \big([0,1], \mathbb{R}\big)$ de la norme $\| \, . \, \|_1$ n'est pas complet, ce n'est pas un espace de Banach.*

Définition 1.25. *Soit E un espace de Banach. une fonction $f : [a, b] \longrightarrow E$ est dite absolument continue si $\forall \ \varepsilon > 0, \exists \ \delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de l'intervalle $[a, b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifient*

$$\sum_{k \geq 0} (b_k - a_k) < \delta,$$

on a

$$\sum_{k \geq 0} \| f(b_k) - f(a_k) \| < \varepsilon$$

Proposition 1.26. *Soient E un espace de Banach et $f \in \boldsymbol{L}^1(I, E)$. Alors f est absolument continue si il existe une fonction $g \in \boldsymbol{L}^1(I, E)$ tell que*

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s) ds, \forall \ t \in I.$$

Définition 1.27. *Soient E un espace de Banach. Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow E$ est absolument continue si est seulement si*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(t) dt.$$

Remarque 1.28.

- *Toute fonction absolument continue est continue.*
- *Toute fonction Lipschitzienne est absolument continue.*
- *Toute fonction absolument continue est uniformément continue.*

Définition 1.29. *(**Équicontinue**) soient (X, d) et (Y, d') deux espace métrique. Soit $\mathcal{F}(X, Y)$ l'ensemble de toutes les applications $f : X \to Y$. Une partie A de $\mathcal{F}(X, Y)$ est dite équicontinue en $x \in X$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in X, \forall f \in A, \text{ telque } d(x, y) \leq \eta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

A est dite équicontinue sur X si elle est équicontinue pour tout $x \in X$.

1.2.1 Ensembles convexes

Définition 1.30. *Soit X un espace vectoriel et soient $x, y \in X$.*

- *On appelle segment fermé d'extrémités x, y (ou tout simplement segment) que l'on note $[x, y]$, l'ensemble*

$$\{\lambda x + (1 - \lambda) y \text{ tel que } 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

- *On appelle segment ouvert que l'on note $]x, y[$ l'ensemble*

$$\{\lambda x + (1 - \lambda) y \text{ tel que } 0 < \lambda < 1\}$$

Proposition 1.31. *Soit X un espace vectoriel et soit $A \subset X$ alors A est convexe si et seulement si toute combinaison convexe des vecteurs de A est un vecteur de A.*

Proposition 1.32. *Soit X un espace vectoriel.*

1) Les parties convexes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ sont des intervalles.

2) Tout sous espace vectoriel de X est convexe.

3) Soit A une partie convexe de X, $\overline{A}$ et $\mathring{A}$ sont des parties convexes de X.

4) Une intersection des parties convexes de X est convexe.

1.2.2 Fonctions convexes

Définition 1.33. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que I un intervalle de $\mathbb{R}$.*

- *On dit que f est convexe si : $\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1]$*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

- *On dit que f est strictement convexe si : $\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1]$*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

- *On dit que f est concave si $-f$ est convexe.*

Définition 1.34. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*

- *On appelle graphe de f qu'on note par $gpf(f)$ l'ensemble défini par*

$$grh(f) = \{(x,r) \in I \times \mathbb{R} / f(x) = r\}.$$

- *On appelle épigraphe de f qu'on note par $epi(f)$ l'ensemble défini par*

$$epi(f) = \{(x,r) \in I \times \mathbb{R} / f(x) \leq r\}.$$

Définition 1.35. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $f : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$. On appelle domaine effectif de f qu'on note par $D(f)$ l'ensemble défini par*

$$D(f) = \{x \in X / f(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.36. *Soit X un espace vectoriel $f : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$. On dit que f est convexe si est seulement si $epi(f)$ est convexe.*

1.3 Quelques notions de mesurabilité

Définition 1.37. *Soit X un ensemble quelconque non vide, Σ une famille de parties de X. Alors Σ est dite une tribu sur X si*

1. *$X, \emptyset \in \Sigma$*
2. *$A \in \Sigma \Rightarrow X \backslash A \in \Sigma$*
3. *$A_n \in \Sigma, \forall n \in N \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \Sigma$*

— *Le couple (X, Σ) appelé espace mesurable et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables.*

— *Dans le cas ou X un espace topologique, la plus petite tribu contenant la topologie de X, autrement dit, la tribu engendrée par la topologie de X est appelés tribu borélienne sur X et est notée $\mathcal{B}(X)$.*

Définition 1.38. *Soient $(X_1, \Sigma_1), (X_2, \Sigma_2)$ deux espaces mesurables et f une application définie sur X_1 à valeurs dans X_2. On dit que f est (Σ_1, Σ_2)-mesurable si pour tout $A \in \Sigma_2, f^{-1}(D) \in \Sigma_1$*
Si X est un espace topologique, une fonction $(\Sigma, \mathcal{B}(x))$-mesurable est dite fonction Borélienne.

Définition 1.39. *Soient (X, Σ) un espace mesurable et Y un espace métrique. Alors une application $f : X \longrightarrow Y$, est dite fortement mesurable ou Bochner mesurable si f est $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$-mesurable et $f(X)$ est séparable.*

Définition 1.40. *Soient (X, Σ) un espace mesurable et Y un espace métrique. On dit que l'application $f : X \longrightarrow Y$ est Σ-étagée (reps. dénombrablement Σ-étagée) si f est $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$-mesurable et $f(X)$ fini (reps.dénombrable).*

Lemme 1.41. *Soient (X, Σ) un espace mesurable et Y un espace métrique*
$f : X \longrightarrow Y$, alors les assertions suivants sont équivalent

1. *f est Bochner mesurable.*
2. *Il existe une suite de fonctions Σ-étagées définies sur X à valeurs dans Y convergeant simplement vers f.*
3. *Il existe une suite de fonctions dénombrablement Σ étagées définies sur X à valeurs dans y, convergeant uniformément sur X vers f.*

Définition 1.42. *Soit (X, Σ) un ensemble. Alors la fonction $\mu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une mesure sur X si*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$.*
2. *$\mu(\bigcup\limits_n A_n) = \sum\limits_n \mu(A_n)$ pour toute suite dénombrable d'élément de Σ deux à deux disjoints*
   — *(X, Σ, μ) est appelé espace mesuré.*
   — *Si $\mu(A) \geq 0$ pour tout $A \in \Sigma$. On dit que μ est une mesure positive et on dit que l'espace (X, Σ, μ) est positif.*

— *Si $\mu(A) < +\infty$ pour tout $A \in \Sigma$, On dit que μ est une mesure finie, ou que l'espace (X, Σ, μ) est finie.*
— *Si X un espace topologique, la mesure $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est appelée mesure Borélienne.*

Définition 1.43. *Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré, Y un ensemble et $f, g : X \longrightarrow Y$. On dit que $f = g$ μ-presque partout (et on note $\mu - p.p$), si l'ensemble $\{x \in X / f(x) \neq g(x)\}$ est négligeable. C'est à dire*

$$\exists A \in \Sigma, \mu(A) = 0 \wedge f(x) = g(x), \forall x \in \Sigma/A.$$

Définition 1.44. *Soient (X, Σ) un espace mesurable, E un espace de Banach et $f : X \longrightarrow E$. On dit que f est une fonction simple si elle est de la forme*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{E_i}(x) y_i$$

où les $E_i = f^{-1}(yi), i \in \{1, ..., n\}$, sont des éléments deux à deux disjoints de Σ et les $y_i, i \in \{1, ..., n\}$, sont des éléments distincts de E. Cette formule est appelée la représentation canonique de$f$.

Proposition 1.45. *Soient (X, Σ) un espace mesurable et $\{f_n\}_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $\{f_n\}_{n \geq 1}$ est une suite de foncions simples telles que $f_n \longrightarrow f$ $\mu - p.p$, et pour μ-presque tout $x \in E$, $\| f_n(x) \| \leq \| f(x) \|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

1.4 Quelques résultats de compacité

Définition 1.46. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $A \subset X$ et $(A_i)_{i \in J} \subset X$. On dit que $(A_i)_{i \in J}$ est un recouvrement de A si $A \subset \bigcup\limits_{i \in J} A_i$.*

- *Si $A = X$, $(A_i)_{i \in J}$ est un recouvrement de X si $X \subset \bigcup\limits_{i \in J} A_i$.*
- *Si pour tout $i \in j$, A_i est ouvert, on dit que $(A_i)_{i \in j}$ est un recouvrement ouvert de X.*

Définition 1.47. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit que X est compact s'il est séparé et de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous recouvrement fini.*

Définition 1.48. *soit* $(X, \mathcal{T}_1), (Y, \mathcal{T}_2)$ *deux espaces topologiques, et* $f : X \longrightarrow Y$ *une application continue. Si* $A \subset X$ *est un compact de* X*, alors* $f(A)$ *est un compact de* Y*.*

Théorème 1.49. *Soit* (X, d) *un espace métrique. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes,*

1. *X est compact.*
2. *Toute suite infinie de X admet au moins une valeur d'adhérence.*
3. *De toute suite infinie de X on peut extraire une sous suite convergente .*
4. *Tout sous ensembles infini de X admet au moins un point d'accumulation.*

Définition 1.50. *Soit* (X, d) *un espace métrique, et soit* A *un sous ensemble de* X*. On dit que* A *est relativement compact si* $\overline{A}$ *est compact.*

Remarque 1.51. *Tous sous ensemble d'un compact est relativement compact.*

Théorème 1.52. *Soient* $(X, d), (Y, d')$ *deux espaces métriques et* f *une application définie sur* X *à valeurs dans* Y*. Si* X *est compact et* f *est continue alors* f *est uniformément continue .*

Définition 1.53. *Soient* E *un espace de Banach et* A *un sous ensemble de* E*. On dit que* A *est boule compact si pour toute boule fermée* $\overline{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{B}}(x, r)$ *de* E*, l'ensemble* $\overline{\boldsymbol{B}} \cap A$ *est compact.*
Évident que tout boule-compact A *est fermé.*

Théorème 1.54. ***(théorème d'Ascoli-Arzelà)****. Soit* X *un espace métrique compact et* Y *un espace métrique complet et* K *un sous ensemble de* $C(X, Y)$*, alors* K *est relativement compact dans* $C(X, Y)$ *si et seulement si les deux conditions ci-dessous sont satisfaites.*

1. *K est équicontinue .*
2. *$K(x) = \{f(x) : f \in K\}$ est relativement compact dans Y.*

1.5 Topologies faible et faible*

Soient X un ensemble, $(Y_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour chaque $i \in I$, soit $\varphi_i : X \longrightarrow Y_i$ on veut munir X par topologie $\mathcal{T}$ la moins fine (avec un minimum d'ouverts) qui rend continues toutes les applications $(\varphi_i)_{i \in I}$.

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des partie de X de la forme

$$\bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in F_j}\varphi_i^{-1}(U_i),$$

où Y_i est un ouvert quelconque de Y_i, F_j est un sous ensemble de J fini quelconque d'indices. Alors, $\mathcal{T}$ définit une topologie sur X. De plus, $\mathcal{T}$ est la topologie la moins fine qui rend continues toutes les applications $\varphi_i(i \in I)$.

1.5.1 Topologie faible

Définition 1.55. *Soient E un espace de Banach et E' son dual topologique, c'est à dire, l'espace des formes linéaires continues sur E muni de la norme*

$$\| f \|_{E'} = \sup_{x\in\overline{\boldsymbol{B}}} |\langle f, x\rangle|$$

Définition 1.56. *soit $f \in E'$, et considérons la fonction*

$$\varphi_f : E \to \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \varphi_f(x) = f(x) = \langle f, x\rangle$$

Lorsque f décrit E' nous obtenons une suite d'applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$ définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle la topologie faible sur E la topologie la moins fine rendant les applications $(\varphi_f)_i$ continues et on la note $\sigma(E, E')$.

Proposition 1.57. *Soit $x_0 \in E$, alors si on considère tous les ensemble de la forme*

$$V = \{x \in E, |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon, \forall i \in I\}$$

où Iest fini, $f_i \in E'$et $\varepsilon > 0$. Ces ensembles constituent une base de voisinage de x_0 pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Remarque 1.58.

1. *E étant espace de Banach, E est muni d'une norme et alors on définit la topologie sera dite topologie forte.*
2. *Les ouverts (reps.fermés)faible (pour $\sigma(E, E')$) sont aussi des ouverts (reps.fermé) pour la topologie forte.*

Proposition 1.59. *Soit $(x_n)_n$ une suite de E.*

1. *La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers x pour $\sigma(E,E')$ si et seulement si $(\langle f, x_n\rangle)_{n\geq 1}$ converge vers $\langle f, x\rangle$ pour tout $f \in E'$.*
2. *Si $(x_n)_{n\geq 1}$ converge fortement vers x, alors $(x_n)_n$ converge faiblement vers x.*
3. *Si $(x_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement vers x alors $\| x_n \|$ est borné et nous avons*
$$\| x \| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \| x_n \|$$
4. *Si $(x_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement vers x et $(f_n)_{n\geq 1}$ converge fortement vers f dans E', alors $(\langle f_n, x_n\rangle)_{n\geq 1}$ converge vers $\langle f, x\rangle$.*

Proposition 1.60. *Lorsque E est de dimension finie, la topologie forte de E et la topologie faible $\sigma(E,E')$ coïncident.*

Proposition 1.61. *La topologie faible $\sigma(E,E')$ est séparée*

1.5.2 Topologie faible*

Soit E un espace de Banach, E' son dual et E'' son bidual (le dual de E')muni de la norme

$$\| \xi \|_{E''} = \sup_{f\in\overline{\mathbf{B}}(E')} |\langle \xi, f\rangle|.$$

Alors on a une injection canonique $J : E \longrightarrow E''$ définie de la façon suivante, pour tout $x \in E$ fixé, l'application

$$\begin{aligned} \xi : E' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \xi_x(f) = \langle \xi_x, f\rangle = \langle f, x\rangle, \end{aligned}$$

est linéaire continue sur E', c'est à dire, ξ_x est élément de E''et

$$\begin{aligned} J : E &\longrightarrow E'' \\ x &\longmapsto J(x) = \xi_x, \end{aligned}$$

est linéaire continue, de plus c'est une isométrie(on dit que $\| J(x) \| = \xi_x = \| x \|$), et on a

$$\langle J(x), f\rangle = \langle \xi_x, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E} \forall \in E, \forall f \in E'.$$

Sur l'espace E' sont définie déjà deux topologies

1. La topologie forte associée à la forme de $E'(\| f \|_{E'}= \sup\limits_{f\in\overline{\mathbf{B}}_{E'}(0.1)} |\langle f,x\rangle|)$.
2. La topologie faible $\sigma(E',E'')$.

On définit une topologie sur E' qui est la topologie faible* que l'on note $\sigma(E',E)$.

Définition 1.62. *La topologie faible sur E' est la topologie la moins fine sur E' qui rend continues toutes les applications $(\xi_n)_{x\in E}$. On la note $\sigma(E'',E)$.*

Théorème 1.63. ***(Théorème de séparation)*** *Soient A et B deux sous ensembles convexes disjoints d'un espace vectoriel topologique X.*
Si A est ouvert alors il existe $f \in X'$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) < \lambda < f(y),$$

$\forall x \in A$ *et* $\forall y \in B$.

Proposition 1.64. *La topologie faible* $\sigma(E',E)$ *est séparée.*

Démonstration. Soient f_1, f_2 dans E' avec $f_1 \neq f_2$, il existe donc $x \in E$ tel que $\langle f_1,x\rangle \neq \langle f_2,x\rangle$, supposons pour fixer les idées, que $\langle f_1,x\rangle < \langle f_2,x\rangle$, on introduit α tel que : $\langle f_1,x\rangle < \alpha < \langle f_2,x\rangle$ On pose :

$$O_1 = \{f \in E', \langle f_1,x\rangle < \alpha\} = \varphi_x^{-1}(]-\infty,\alpha[)$$
$$O_2 = \{f \in E', \langle f_2,x\rangle > \alpha\} = \varphi_x^{-1}(]\alpha,+\infty[)$$

O_1 et O_2 sont des ouverts pour $\sigma(E',E)$ qui vérifient $f_1 \in O_1, f_2 \in O_2$ et $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ ■

Proposition 1.65. *Soit $(f_n)_n$une suite de points de E'*

1. *La suite $(f_n)_n$ converge vers f pour $\sigma(E',E)$ (ou faiblement*) si est seulement si $(\langle f_n,x\rangle)_n$ converge vers $\langle f,x\rangle$ pour tout $x \in E$.*
2. *Si $(f_n)_n$ converge fortement vers f, alors $(f_n)_n$ converge faiblement* vers f.*
3. *$(f_n)_n$ converge vers f pour $\sigma(E',E)$, alors $(\|f_n\|_{E'})$ est bornée et nous avons*
$$\| f \|_{E'} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \| f_n \|.$$
4. *$(f_n)_n$ converge vers f pour $\sigma(E',E)$ et $(x_n)_n$ converge fortement vers x dans E alors $(\langle f_n,x_n\rangle)_n$ converge vers $\langle f,x\rangle$.*

Proposition 1.66. *Si E est de dimension finie, les topologies forte, faible $\sigma(E', E'')$ et faible* $\sigma(E', E)$ coïcoïncident sur E'*

Théorème 1.67. *(**Banach-Aloaglu-Bourbaki**)*

Soit E est un espace de Banach. Alors la boule unité de E' est compacte pour la topologie faible $\sigma(E', E)$.*

Théorème 1.68. *(**Aloagu**)*

Soit E un espace de Banach séparable et soit $B \subset E'$, si B est borné pour la topologie $\sigma(E', E)$, alors B est compact pour cette topologie.

Définition 1.69. *Un espace de Banach E est dit réflexif si l'application canonique*

$$J : E \longrightarrow E''$$
$$x \longmapsto J(x)$$

est bijective.

Exemple 1.70.

1. *Tout espace de dimension finie est réflexif.*
2. *Pour tout $p \in]1, +\infty[$, $\boldsymbol{L}^P$ est réflexif.*

Théorème 1.71. *Soit E un espace de Banach alors E est réflexif si et seulement si $\overline{\boldsymbol{B}}_E(0,1)$ est $\delta(E, E')$ compact (faiblement compacte).*

Définition 1.72. *Soit E un espace de Banach E est réflexif si et seulement si E' est réflexif.*

Corollaire 1.73. *Soit E un espace de Banach réflexif. Alors E est séparable si et seulement si E' est séparable .*

1.6 Distance de Hausdorff

Définition 1.74. *Soient A, B deux sous ensembles d'un espace métrique (X, d).*

- *On a $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$.*

- *On appelle écart entre A et B et on le note $e(A,B)$ la quantité définie par*

$$e(A,B) = \sup_{x\in A} d(x,B) = \sup_{x\in A} \big(\inf_{x\in B} d(x,y)\big).$$

- *On appelle distance de Hausdorff entre A et B et on la note $\mathcal{H}(A,B)$ la quantité définie par*

$$\mathcal{H}(A,B) = \max\{e(A,B), e(B,A)\}.$$

Remarquons que $\mathcal{H}(A,B) = \mathcal{H}(B,A)$.

Proposition 1.75. *Soient A, B, C trois sous ensembles d'un espace métrique (X,d).*

1. $e(A,\emptyset) = \infty$ *si* $A \neq \emptyset$.
2. $e(\emptyset, B) = 0$.
3. $e(A,B) = 0 \Longleftrightarrow A \subset \overline{B}$.
4. $e(A,C) \leq e(A,B) + e(B,C)$.
5. $\mathcal{H}(A,B) = 0 \Longleftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.
6. $\mathcal{H}(A,C) \leq \mathcal{H}(A,B) + \mathcal{H}(C,B)$.
7. $|d(x,A) - d(x,B)| \leq \mathcal{H}(A,B), \forall x \in X$.

1.7 Multi-applications et sélections

Définition 1.76. *Soient X, Y deux ensembles non vides. On appelle multi-application (ou fonction multivoque) F définie sur X à valeur dans Y toute application qui à chaque élément $x \in X$ associé un sous ensemble $F(x)$ de Y, et on note $F : X \rightrightarrows Y$ ou $F : Y \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$*

- *On appelle domaine (effectif) de la multiplication F qu'on note $dom(F)$, le sous ensemble de Y défini par*

$$dom(F) = \{x \in X, F(x) \neq \emptyset\}.$$

- *On appelle graphe de F, qu'on note $gph(F)$ le sous ensemble de $X \times Y$ défini par*

$$gph(F) = \{(x,y) \in X \times Y, y \in F(x)\}.$$

- *On appelle image de F, qu'on note $Im(F)$, le sous ensemble de Y défini par*

$$Im(F) = \{y \in Y, \exists\, x \in X, y \in F(x)\}.$$

- *Si $A \subset X$, on appelle image da A par F qu'on note $F(A)$ le sous ensemble de Y défini par $F(A) = \bigcup_{x\in A} F(x)$, et on peut écrire*

$$F(A) = \{y \in Y, \exists\, x \in A, y \in F(x)\}.$$

- *On définit la multi-application $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ définit par*

$$x \in F^{-1}(y) \Longleftrightarrow y \in F(x).$$

- *Pour tout $V \subset X$, on appelle image réciproque large de F, le sous ensemble défini par*

$$F^{-1}(V) = \{x \in X, F(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

- *Pour tout $V \subset X$, on appelle image réciproque étroite de F, le sous ensemble défini par*

$$F_{+}^{-1}(V) = \{x \in X; F(x) \subset V\}.$$

Définition 1.77. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : D(f) \longrightarrow Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \forall x \in dom(F).$$

1.7.1 Continuité des multi-applications

Définition 1.78. *Soient X et Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est semi-continue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert U de X contenant $F(x_0)$ $(F(x_0) \subset U)$, il existe un voisinage Ω de x_0 tel que $F(\Omega) \subset U$, c'est à dire $F(z) \subset U, \forall z \in \Omega$.*
On dit que F est semi-continue supérieurement sur X si elle est semi-continue supérieurement en tout point $x_0 \in X$.

Définition 1.79. *$F : X \rightrightarrows Y$ est semi-continue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert U de X vérifiant $F(x_0) \cap U \neq 0$, il existe un voisinage Ω de x_0*

tel que $F(x_0) \cap U \neq 0, \forall z \in \Omega$ *(i.e.,* $F^{-1}(U)$ *est un voisinage de* x_0*). On dit que* F *est semi-continue inférieurement sur* X *si elle est semi-continue inférieurement en tout point* $x \in X$*.*

Définition 1.80. $F : X \rightrightarrows Y$ *est continue au point* $x_0 \in X$*si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i. au point* x_0 *et* F *continue si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i.*

Proposition 1.81. *Soient* X, Y *deux espace topologiques. Considérons la multi-application* $F : X \rightrightarrows Y$*, alors*

1. F *est semi-continue supérieurement si seulement si* $F^{-1}(U)$ *est un fermé de* X *pour tout* U *fermé de* Y*.*
2. F *est semi continue inférieurement si et seulement si* $F^{-1}(U)$ *est un ouvert de* X *pour tout* U *ouvert de* Y*.*

Définition 1.82. *Soient* X, Y *deux espace métrique et soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application. Alors* F *est* $\mathcal{H}$*-continue (continue par rapport à la distance de Hausdorff) si est seulement si pour tout suite* $(x_n)_n \subset X$ *convergeant vers* x_0 *nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(F(x_n), F(x_0) = 0.$$

Définition 1.83. *Soient* X, Y *deux espaces métriques et* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application. On dit que* F *est continue (res. Lipschitzienne de rapport* $k > 0$*), si pour tout* $x \in X$ *on a,*

$$\lim_{x'\to x} \mathcal{H}(F(x), F(x')) = 0$$

(res. pour tout $x, x' \in X$ *on a*

$$\mathcal{H}(F(x), F(x')) \leq k d_X(x, x'))$$

où $\mathcal{H}$ *est la distance de Hausdorff et* d_x *la distance sur* X*.*

Définition 1.84. *Soient* Y *un espace métrique et* $T > 0$*,* $F : [0, T] \rightrightarrows Y$ *une multi-application. On dit que* F *est absolument continue si pour tout* $y \in Y$ *et tout* $t, t' \in [0, T]$ *on a*

$$|d(y, F(t)) - d(y, F(t'))| \leq |a(t) - a(t')|$$

où $a : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction absolument continue satisfaisant $\dot{a} \neq 0$ p.p sur $[0,T]$. D'après la relation précédente nous avons pour $t \geq t'$

$$|d(y,F(t)) - d(y,F(t'))| \leq \int_{t'}^{t} |\dot{a}(s)|ds.$$

Remarque 1.85. *Une multi-application lipschitzienne est absolument continue (dans le cadre de la définition précédente).*

1.7.2 Mesurabilité des multi-applications

Définition 1.86. *Soit (X,Σ) un espace mesurable et Y un espace métrique et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.*

1. *On dit que F est Σ-mesurable ou simplement mesurable si pour tout ouvert V de Y*
$$F^{-1}(V) = \{t \in X : F(t) \cap V \neq 0\} \in \Sigma.$$
2. *On dit que F est fortement mesurable, si pour tout fermé W de Y*
$$F^{-1}(W) = \{x \in X : F(x) \cap W \neq 0\} \in \Sigma.$$

Proposition 1.87. *Si $F : X \rightrightarrows Y$ est une m.a fortement mesurable, alors F est mesurable.*

Proposition 1.88. *Soient (X,Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors,les assertion suivantes sont équivalentes.*

(i) F est Σ-mesurable.

(ii) Pour chaque $y \in Y$, la fonction $d_y : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $d_y = d(y,F(x))$ est Σ-mesurable.

Proposition 1.89. *Si $F : X \rightrightarrows Y$ est mesurable ou fortement mesurable, alors dom(F) est mesurable.*

Définition 1.90. *Soient X,Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est une multi-application de Carathéodory si $F(.,y)$ est Σ-mesurable pour tout $y \in Y$ fixé et $F(x,.)$ est continue pour tout $x \in X$ fixé.*

Théorème 1.91. ***(Théorème d'existence de sélections mesurables**) Soient* (X, Σ) *un espace mesurable,* Y *un espace métrique complet séparable et* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application mesurable a valeurs fermées. Alors* F *admet au moins une sélection mesurable. .*

Théorème 1.92. *Soient* (X, Σ) *un espace mesurable et* E *un espace de Banach séparable. Soient* $F : E \rightrightarrows E$ *une multi-application mesurable et* $u : X \longrightarrow E$ *une application mesurable. Alors la multi-application* $F(., u(.))$ *est mesurable.*

2

Géométrie des espaces de Banach

Sommaire

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons des définitions et propriétés des espaces uniformément et strictement convexes, uniformément lisses et les multi-applications J_s. Enfin nous donnons des notions sur le cône normal proximal et les ensembles prox-réguliers et quelques exemples.
Pour plus de détails sur ce chapitre se référer à [9, 8, 14, 10].

2.2 Espaces uniformément convexes

Définition 2.1. *Un espace de Banach E est dit uniformément convexe si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{tel que si } x, y \in \boldsymbol{S}(E) \text{ et } \parallel x - y \parallel \geq \varepsilon \ \text{alors} \ \parallel \frac{x+y}{2} \parallel \leq 1 - \delta.$$

Définition 2.2. ***(Module de convexité)***
On définit la fonction module de convexité d'un espace normé $(X, \parallel . \parallel)$ par

$$\delta_{\|.\|} :]0, 2] \to [0, 1]$$

avec

$$\delta_{\|.\|}(\varepsilon) = \inf\{1 - \parallel \frac{x+y}{2} \parallel, \parallel x \parallel = \parallel y \parallel = 1. \parallel x - y \parallel \geq \varepsilon\}.$$

Théorème 2.3. *Un espace de Banach $(E, \parallel . \parallel)$ est uniformément convexe si et seulement si*

$$\delta_{\|.\|}(\varepsilon) > 0 \ \text{pour} \ \text{tout } \varepsilon \in]0, 2].$$

Définition 2.4. *Soit $p \geq 1$ un nombre réel. E un espace de Banach on dit que E est p-uniformément convexe si il existe une constante $\lambda > 0$ telle que*

$$\delta_{\|\|.\|}(\varepsilon) \geq \lambda \varepsilon^p \ \forall \varepsilon \in [0, 2[.$$

Remarque 2.5. *Tout espace p-uniformément convexe $(p > 1)$ est uniformément convexe.*

Proposition 2.6. *E un espace de Banach uniformément convexe et $1 < p < +\infty$.*
En prend $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_p(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\text{si} \parallel x \parallel, \parallel y \parallel \leq 1 \text{ et } \parallel x - y \parallel \geq \varepsilon \text{ alors } \parallel \frac{x+y}{2} \parallel^p \leq (1 - \delta_p(\varepsilon)) \left(\frac{\parallel x \parallel^p + \parallel y \parallel^p}{2} \right).$$

Corollaire 2.7. *Soit E un espace de Banach uniformément convexe alors il est réflexif, $E'' = E$.*

Exemple 2.8. *les espaces $\boldsymbol{L}^p(I, X)$, $1 < p < \infty$ sont uniformément convexe.*

Exemple 2.9. *Soit $(H, \langle . \rangle)$ un espace pré-hilbertien, alors H est uniformément convexe.*

Démonstration. D'après l'identité du parallélogramme pour tout $x, y \in H$ on a

$$\| x + y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2) - \| x - y \|^2$$

soit $\varepsilon > 0$ et $x, y \in H$ tels que

$$\| x \| \leq 1, \| y \| \leq 1 \; et \; \| x - y \| \geq \varepsilon$$

alors on a

$$\| x + y \|^2 \leq 4 - \varepsilon^2 \;\; d'ou \;\; \| \frac{x+y}{2} \| \leq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$$

et

$$1 - \frac{\varepsilon^2}{4} < (1 - \frac{\varepsilon^2}{8})^2$$

$$1 - \frac{\varepsilon^2}{4} = (1 - \frac{\varepsilon^2}{8})^2 - \frac{\varepsilon^4}{64}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} < (1 - \frac{\varepsilon^2}{8})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} < 1 - \frac{\varepsilon^2}{8}$$

d'ou

$$\frac{\varepsilon^2}{8} \leq 1 - \| \frac{x+y}{2} \|$$

donc

$$\delta = \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

■

Exemple 2.10. *On prend $E = \mathbb{R}^2$. La norme*

$$\| x \|_2 = (| x_1 |^2 + | x_2 |^2)^{\frac{1}{2}}$$

est uniformément convexe tandis que la norme $\| x \|_1 = | x_1 | + | x_2 |$ n'est pas uniformément convexe.

2.3 Espaces strictement convexes

Définition 2.11. *L'espace de Banach E est dit strictement convexe si*

$$\forall x, y \in \boldsymbol{S}(E) \ \ avec \ \ x \neq y \Rightarrow \| (1-\lambda)x + \lambda.y \| < 1 \ \ pour \ \ \lambda \in]0,1]$$

c-à-d la sphère unité ne contient pas de segment droite.

Exemple 2.12. *L'espace $l^1(\mathbb{Z})$ n'est pas strictement convexe.*

Démonstration. Prenons $\varepsilon = 1, \overline{x} = (1,0,0,0,....)$ et $\overline{y} = (0,-1,0,0,....)$ il est clair que

$$\overline{x}, \overline{y} \in l^1(\mathbb{Z}) \ \ et \ \ \| \overline{x} \|_{l^1} = 1 = \| \overline{y} \|_{l^1}, \| \overline{x} - \overline{y} \|_{l^1} = 2 > \varepsilon \ \ par\ contre \ \ \| \frac{1}{2}(\overline{x} + \overline{y}) \|_{l^1} = 1$$

ceci montre que $l^1(\mathbb{Z})$ n'est pas strictement convexe. ■

Exemple 2.13. *L'espace $l^\infty(\mathbb{Z})$ n'est pas strictement convexe.*

Démonstration. Considérons $\overline{u} = (1,1,0,0,0....)$ et $\overline{v} = (-1,1,0,0,0....)$ il est claire que $\overline{u}, \overline{v} \in l^\infty(\mathbb{Z})$.
Prenons $\varepsilon = 1$ donc $\| \overline{u} \|_\infty = 1 = \| \overline{v} \|_\infty$ et $\| \overline{u} - \overline{v} \|_\infty = 2 > \varepsilon$, par contre $\| \frac{\overline{u}+\overline{v}}{2} \| = 1$ et donc $l^\infty(\mathbb{Z})$ n'est pas strictement convexe. ■

Proposition 2.14. *Soit $(X, \| \ . \ \|)$ un espace normé, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$(X, \| \ . \ \|)$ est strictement convexe.*
2. *Pour tout $x, y \in \delta_X$ tels que $x \neq y$ on a*
$$\| \frac{x+y}{2} \| < 1.$$
3. *Pour tout $x, y \in X$ tels que x, y soit libre, on a*
$$\| x + y \| < \| x \| + \| y \| .$$
4. *Pour tout $p \in]1, +\infty[$ et pour tout $x, y \in X$ tels que $x \neq y$ on a*
$$\| \frac{x+y}{2} \|^p < \frac{\| x \|^p + \| y \|^p}{2}.$$

5. *Pour tout* $x, y \in X$ *vérifiant*

$$\| x+y \| = \| x \| + \| y \| \quad \textit{il existe} \;\; a \geq 0 \;\; \textit{et} \;\; b \geq 0 \;\; \textit{tels que} \;\; (a,b) \neq (0,0) \;\; \textit{et} \;\; ax = by.$$

6. *Pour tout* $x, y \in X$ *vérifiant*

$$2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2 - \| x + y \|^2 = 0 \;\; \textit{on a} \;\; x = y.$$

Proposition 2.15. *Soit* $(X. \| \, . \, \|)$ *un espace normé de dimension finie. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i- *L'espace* $(X, \| \, . \, \|)$*est uniformément convexe.*

ii- *L'espace* $(X, \| \, . \, \|)$ *est strictement convexe.*

2.4 Espaces uniformément lisses

Définition 2.16. *On dit que la norme d'un espace de Banach* E *est Fréchet différentiable en* $x_0 \in \boldsymbol{S}(E)$ *si*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\| x_0 + \lambda y \| - \| x_0 \|}{\lambda}$$

existe uniformément pour $y \in \boldsymbol{S}(E)$.

Corollaire 2.17. *Si* E' *a une norme Fréchet différentiable alors* E *est réflexif.*

Définition 2.18. *Soit* E *un espace de Banach* $f : E \to \mathbb{R}$ *et soit* $x_0 \in D(f)$. *On dit que* f *est différentiable au sens de Gâteaux au point* x_0 *s'il existe* $x' \in E'$, *si*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \langle x', v \rangle \;\; \forall x \in E$$

Dans ce cas x' *est définie d'une façon unique et est appelé la différentielle de* f *au sens de Gâteaux au point* x_0. *On le note souvent par* $x' = \nabla f(x_0)$ *(appelée aussi gradient de* f *au point* x_0*).*

Définition 2.19. *Un espace de Banach* E *est dit lisse si pour tout* $x \in E \setminus \{0\}$ *il existe une fonction unique* $x' \in E'$ *tel que*

$$\langle x, x' \rangle = \| x \| \quad \textit{et} \quad \| x' \| = 1.$$

Définition 2.20. *Un espace de Banach E est dit lisse en $x_0 \in \boldsymbol{S}(E)$ quand il existe un unique $f \in \boldsymbol{S}(E')$ tel que $f(x_0) = 1$.*
Si E est lisse a chaque point de $\boldsymbol{S}(E)$ alors on dit que E est lisse.

Exemple 2.21. $\boldsymbol{L}^p(I,E)(p>1)$ *est lisse, mais* $\boldsymbol{L}^1(I,E)$ *et* $\boldsymbol{L}^\infty(I,E)$ *ne sont pas lisse*

Théorème 2.22. *Soit $(E, \| \, . \, \|)$ un espace de Banach et $x_0 \in E$ les assertion suivantes sont équivalentes*

1. *E est lisse au point x_0.*
2. *La norme de E est Gâteaux différentiable au point x_0 .*

Démonstration. $\| \, . \, \|$ est Gâteaux differentiable au point x_0

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \exists x' \in E' \ \lim_{t \to 0} \frac{\| x_0 + t x_0 \| - \| x_0 \|}{t} - \langle x', x_0 \rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \lim_{t \to 0} \frac{(t+1) \| x_0 \| - \| x_0 \|}{t} - \langle x', x_0 \rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \lim_{t \to 0} \frac{t \| x_0 \|}{t} - \langle x', x_0 \rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \| x_0 \| = \langle x', x_0 \rangle
\end{aligned}$$

alors

$$\exists x' \in E' < x', x_0 >= \| x_0 \|$$

donc E est lisse au point x_0. ■

Définition 2.23. ***(Module de lissicité)***
On définit la fonction module de lissicité d'un espace normé $(X, \| \, . \, \|)$ par

$$P_{\|\cdot\|} : [0, \infty[\to [0, \infty[$$

tel que

$$P_{\|\cdot\|}(\tau) = \sup \Big\{ \frac{\| x + \tau y \| + \| x - \tau y \|}{2} - 1, \| x \| = \| y \| = 1 \Big\}.$$

Théorème 2.24. *Un espace de Banach $(E, \| \, . \, \|)$ est uniformément lisse si et seulement si $\lim\limits_{\tau \to \infty} \frac{P_{\|.\|}(\tau)}{\tau} = 0$.*

Définition 2.25. *Un espace de Banach E est dit uniformément lisse si et seulement si $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0$ tel que si*

$$\forall x \in \boldsymbol{S}(E), \ \ et \ \ \| y \| < \delta \ \ alors \ \ \| x + y \| + \| x - y \| < 2 + \varepsilon \| y \| .$$

Définition 2.26. *E un espace de Banach est dit uniformément lisse si sa norme est uniformément Fréchet différentiable loin de 0 c'est à dire pour $\forall x_0, h \in E$ vecteurs, la limite*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\| x_0 + th \| - \| x_0 \|}{t}$$

existe uniformément avec $h,\ x_0 \in \boldsymbol{S}(0,1)$.

Proposition 2.27. *Tout espace de Banach E uniformément lisse est réflexif.*

Exemple 2.28. *Pour $1 < p < \infty$ $\boldsymbol{L}^p(I, E)$ est uniformément lisse.*

Proposition 2.29.

1. *Si E' est strictement convexe alors E est lisse.*
2. *Si E' est lisse alors E est strictement convexe.*

Corollaire 2.30.

- *Un espace de Banach réflexif E est strictement convexe si et seulement si E' est lisse.*
- *Un espace de Banach réflexif E est lisse si et seulement si E' est strictement convexe.*

Théorème 2.31. *Tout espace de Banach $(E, \| \,.\, \|)$ uniformément lisse est lisse.*

Démonstration. Supposons que E n'est pas lisse, donc il existe $x_0 \in E \setminus \{0\}$ et $x'_1,\ x'_2 \in E'$ tel que

$$x'_1 \neq x'_2,\ \| x'_1 \| = \| x'_2 \| = 1 \ \ et \ \ \langle x'_1, x_0 \rangle = \| x_0 \| = \langle x'_2, x_0 \rangle$$

quitte a remplacer x_0 par $\frac{x_0}{\|x_0\|}$. On peut supposer que $\| x_0 \| = 1$. Soit

$$\langle y, x'_1 - x'_2 \rangle > 0, \forall y \in \mathbf{S}(E)$$

donc, il existe $y_0 \in \mathbf{S}(E)(\| y_0 \| = 1)$ telle que $\langle y_0, x'_1 - x'_2 \rangle > 0$ pour tout $\tau > 0$ on a

$$\begin{aligned} 0 < \tau \langle y_0, x'_1 - x'_2 \rangle &= \tau(\langle y_0, x'_1 \rangle - \langle y_0, x'_2 \rangle) \\ &= \frac{\langle x_0 + \tau y_0 . x'_1 \rangle + \langle x_0 - T y_0 . x'_2 \rangle}{2} - 1 \\ &\leq \frac{\| x_0 + \tau y_0 \| + \| x_0 - \tau y_0 \|}{2} - 1 \\ &\leq P_{\|.\|}(\tau) \end{aligned}$$

alors, $0 < \langle y_0, x'_1 - x'_2 \rangle \leq \frac{P_{\|.\|}(\tau)}{\tau}$ pour tout $\tau > 0$ et donc E n'est pas uniformément lisse. ■

Théorème 2.32. *Soit $(E, \| \,.\, \|)$ un espace de Banach, alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *La norme de E est uniformément Fréchet différentiable.*
2. *E est uniformément lisse.*
3. *E' est uniformément convexe.*

2.5 Les multi-applications J_s

Définition 2.33. *Soit E un espace de Banach, pour $s \in [1, +\infty[$ on définit la multi-application*

$$J_s : E \rightrightarrows E'$$

par

$$J_s(E) = \{x' \in E', \langle x', x \rangle = \| x \| \,.\, \| x' \| \text{ et } \| x' \| = \| x \|^{s-1}\}$$

Proposition 2.34. *Soit E un espace de Banach uniformément lisse et $s \in [2, +\infty[$ un exposant, alors J_s est localement uniformément continue i.e*
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in E$ vérifiant

$$\begin{cases} \| x \| \leq 1 \\ \| y \| \leq 1 \qquad \Longrightarrow \| J_s(x) - J_s(y) \| \leq \varepsilon \\ \| x - y \| \leq \delta \end{cases}$$

Théorème 2.35.

1. *Si H un espace de Hilbert alors $J_2(x) = \{x\}$ pour tout $x \in H$.*
2. *Pour tout $x \in E$, $J_2(x)$ est un convexe.*
3. *$J_2(\alpha x) = \alpha J_2(x)$, $\forall x \in E$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$.*

Démonstration.

1. On a

$$\begin{aligned} x' \in J_2(x) &\Longleftrightarrow \| x' \| = \| x \|^{2-1} \ et \ \langle x', x \rangle = \| x \| \| x' \| \\ &\Longleftrightarrow \| x' \| = \| x \| \ et \ \langle x', x \rangle = \| x \| \| x' \| = \| x \|^2 \\ &\Longleftrightarrow x' = x. \end{aligned}$$

   Alors $J_2(x) = \{x\}$

2. Soient $x', \ y' \in J_2(x), \lambda \in [0,1]$ on a

$$x' \in J_2(x) \Longleftrightarrow \| x' \| = \| x \|^{2-1} \ \ et \ \ \langle x', x \rangle = \| x \| \| x' \| = \| x \|^2$$

$$y' \in J_2(x) \Longleftrightarrow \| y' \| = \| x \|^{2-1} \ \ et \ \ \langle y', x \rangle = \| x \| \| y' \| = \| x \|^2$$

   d'autre part on a

   $\langle \lambda x' + (1-\lambda) y', x \rangle \leq \| \lambda x' + (1-\lambda) y' \| \| x \|$

   de plus

$$\begin{aligned} \langle \lambda . x' + (1-\lambda) y', x \rangle &= \lambda \langle x', x \rangle + (1-\lambda) \langle y', x \rangle \\ &= \lambda \| x \|^2 + (1-\lambda) \| x \|^2 \\ &= \| x \|^2 \end{aligned}$$

   donc

$$\| x \|^2 \leq \| \lambda . x' + (1-\lambda) y' \| \| x \|$$

$$\begin{aligned} \| x \| &\leq \| \lambda x' + (1-\lambda) y' \| \\ &\leq \| \lambda . x' \| + \| (1-\lambda) y' \| \\ &= \lambda \| x' \| + (1-\lambda) \| y' \| \\ &= \lambda \| x \| + (1-\lambda) \| x \| \\ &= \| x \| \end{aligned}$$

   alors

   $\langle \lambda x' + (1-\lambda) y', x \rangle = \| x \|^2 = \| \lambda x' + (1-\lambda) y' \| \| x \| \ \ et \ \lambda x' + (1-\lambda) y' \in J_2(x) \forall x \in E$

3. a) Si $\alpha = 0$ on a

$$\begin{aligned} x' \in J_2(0) &\Longleftrightarrow \| x' \| = \| 0 \|^{2-1} \ et \ \langle x', 0 \rangle = \| 0 \| \| x' \| = \| 0 \|^2 = 0 \| x \|^2 \\ &\Longleftrightarrow x' = 0 = 0 J_2(x) \end{aligned}$$

b) Si $\alpha > 0$ on a

$$\begin{aligned} x' \in J_2(\alpha x) &\Longleftrightarrow \| x' \| = \| \alpha x \|^{2-1} \ \ et \ \langle x', \alpha x \rangle = \| \alpha x \| \| x' \| = \| \alpha x \|^2 = \alpha^2 \| x \|^2 \\ &\Longleftrightarrow \| x' \| = \alpha \| x \| \ et \ \langle x', \alpha x \rangle = \alpha^2 \| x \|^2 \\ &\Longleftrightarrow \left\langle \frac{x'}{\alpha}, x \right\rangle = \| x \|^2 \ et \ \| \frac{x'}{\alpha} \| = \| x \| \\ &\Longleftrightarrow \left\langle \frac{x'}{\alpha}, x \right\rangle = \| \frac{x'}{\alpha} \| \| x \| \ et \ \| \frac{x'}{\alpha} \| = \| x \| \\ &\Longleftrightarrow \frac{x'}{\alpha} \in J_2(x) \\ &\Longleftrightarrow x' \in \alpha J_2(x). \end{aligned}$$

D'où pour tout $\alpha \geq 0$ $J_2(\alpha x) = \alpha J_2(x)$ ∎

Remarque 2.36. *Si $(E, \| \ . \ \|)$ est un espace de Banach uniformément convexe et uniformément lisse alors J_s est univoque.*
En effet. nous avons d'après la théorème (2.32) *et le corollaire* (2.7)*, E' est strictement convexe.*
Soit $x \in E$ et soient $x', y' \in E'$ tels que $x', y' \in J_s(x)$ et supposons $x' \neq y'$.
On a E' est strictement convexe, donc pour tout $\alpha \in [0, 1]$

$$\| \alpha x' + (1 - \alpha) y' \| < \alpha \| x' \| + (1 - \alpha) \| y' \| = \| x \|^{s-1}$$

D'autre part, J_s est à valeurs convexes donc

$$\alpha x' + (1 - \alpha) y' \in J_s(x) \ \ i.e. \ \ \| x \|^{s-1} = \| \alpha x' + (1 - \alpha) y' \| < \| x \|^{s-1} .$$

Contradiction, d'où $x' = y'$ alors J_s est univoque.

2.6 Espace I-lisse faiblement compact

Définition 2.37. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach, séparable réflexif uniformément lisse, on dit que E est I-lisse faiblement compact pour un exposant $s \in]1, \infty]$ si pour toute suite bornée $(x_n)_{n \geq 0}$ de $\boldsymbol{L}^{\infty}(I, E)$ on peut extraire une sous suite $(y_n)_{n \geq 0}$ qui converge faiblement vers un point $y \in \boldsymbol{L}^{\infty}(I, E)$ telle que pour tout $z \in$*

$\boldsymbol{L}^{\infty}(I,E)$ *et* $\phi \in \boldsymbol{L}^{1}(I,\mathbb{R})$ *on a*

$$\lim_{n\to\infty}\int_I < J_s(z(t)+y_n(t)) - J_s(y_n(t)), y_n(t) > \phi(t)dt =$$
$$\int_I < J_s(z(t)+y(t)) - J_s(y(t), y(t)) > \phi(t)dt \tag{2.6.1}$$

Proposition 2.38. *Tout espace de Hilbert séparable H est I-lisse faiblement compact pour $s=2$.*

Démonstration. En sait que pour un espace de Hilbert, J_2 est donné par $J_2(x) = \{x\}$. Donc (2.6.1) correspond à

$$\lim_{n\to\infty}\int_I \langle z(t), y_n(t)\rangle \phi(t)dt = \int_I \langle z(t), y(t)\rangle\, \phi(t)dt. \tag{2.6.2}$$

Sachant que $\mathbf{L}^{\infty}(I,H) = (\mathbf{L}^{1}(I,H))'$ et comme $(y_n)_n$ est bornée dans $\mathbf{L}^{\infty}(I,H)$, on peut extraire une sous suite qui converge faiblement vers $y \in \mathbf{L}^{\infty}(I,H)$, pour tout $z \in \mathbf{L}^{\infty}(I,H)$ et tout $\phi \in \mathbf{L}^{1}(I,H)$, on a $z(.)\phi(.) \in \mathbf{L}^{1}(I,H)$, on conclut que

$$\lim_{n\to\infty}\int_I \langle z(t)\phi(t), y_n(t)\rangle\, dt = \int_I \langle z(t)\phi(t), y(t)\rangle\, dt \tag{2.6.3}$$

D'où la relation (2.6.2). ■

2.7 Cône normal proximal

Définition 2.39. *Soient X un espace vectoriel, et K un sous ensemble de X. On dit que K est un cône si*

$$\forall x \in K, \forall \lambda \geq 0, \lambda x \in K.$$

De plus, si K est convexe on dit que K est un cône convexe.

Définition 2.40. ***(Conjugué et biconjugué)***

Soit X un espace vectoriel normé, X' son dual topologique et K un cône de X.

1. *On appelle conjugué de K qu'on note K°, le sous ensemble de X' définie par*

$$K^{\circ} = \{x' \in X' / \langle x', x\rangle \leq 0, \forall x \in K\}$$

2. *On appelle biconjugué de K qu'on note $K^{\circ\circ}$, le sous ensemble de X définie par*

$$K^{\circ\circ} = \{x \in X / \langle x', x\rangle \leq 0, \forall x' \in K^{\circ}\}.$$

Définition 2.41. *Soit X un espace vectoriel normé, K un sous ensemble de X et soit $x \in K$. On appelle le cône normale à A au point x l'ensemble noté $N_K(x)$ défini par*

$$N_K(x) = \{x' \in X', \langle x', y - x\rangle \leq 0, \forall y \in K\}$$

Définition 2.42. *Soit E un espace de Banach, K un sous ensemble non vide de E et $u \notin K$. On définit $P_K(u)$ la projection de u sur K (qui peut être vide) comme l'ensemble de tous les $y \in K$ dont la distance à u est minimal, c'est à dire,*

$$P_K(u) = \{y \in K, \| u - y \|= d(u, K)\}.$$

Définition 2.43. *Soit E un espace de Banach, K un sous-ensemble fermé de E et soit $x \in K$. On appelle vecteur primal normal proximal à K au point x tout vecteur p s'écrivant $\alpha(u - x)$, ou $\alpha > 0$ et $u \notin K$ vérifiant $x \in P_K(u)$.*
L'ensemble de tous les vecteurs primaux normaux proximaux à K au point x sera noté $PN^p_K(x)$. C'est à dire

$$PN^p_K(x) = \{\xi \in E : \exists\alpha > 0 \;\; t.q, \;\; x \in P_K(x + \alpha\xi)\}.$$

Remarque 2.44. *Soit E un espace de Banach, K un sous-ensemble fermé de E. Lorsque $x \notin K$, le cône normale proximale à K, N^P_K est indéfini. Par contre lorsqu'on a $x \in K$ avec $x \notin P_K(u)$ pour tout $u \notin K$ i.e., qu'il n'existe pas de point u extérieur à K tel que $x \in P_K(u)$ ce qui est le cas quant $x \in int(K)$, on pose $N^p_K(x) = \{0\}$.*

Dans notre travail, nous n'utilisons que la notion du cône normale proximale, c'est pour quoi le cône $PN_K(x)$ sera simplement noté $N_K(x)$, i.e.,

$$N_K(x) = \{v \in E; \exists\alpha > 0 \;\; t.q \;\; x \in P_K(x + \alpha v)\}.$$

Lemme 2.45. *Soient E un espace de Banach, K un sous-ensemble fermé de E et $s > 0$. Alors pour $x \in E$ et $v \in E$ tel que $x \in P_K(x + sv)$ nous avons $x \in P_K(x + \lambda sv)$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$.*

Démonstration. Soient $u \in E$ et $z \in P_K(u)$, alors nous avons

$$z \in P_K(u + t(z - u)), \forall t \in [0, 1]$$

En effet, pour tout $t \in [0,1]$, posons $u_t = u + t(z-u)$.

Nous avons

$$\begin{aligned} \| u_t - z \| &= \| u + t(z-u) - z \| \\ &= (1-t) \| u - z \| \\ &= (1-t) d(u,K). \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $y \in K$

$$\begin{aligned} \| u_t - y \| &= \| u + t(z-u) - y \| \\ &\geq \| u - y \| - t \| u - z \| \\ &\geq d(u,K) - t \| u - z \| \\ &= (1-t) d(u,K) \\ &= \| u_t - z \| . \end{aligned}$$

Par conséquence $z \in P_K(u_t)$.

Maintenant, soient $x \in E$ et $v \in E$ tel que $x \in P_K(x+sv)$, par ce qui précède si nous prenant $t = 1 - \lambda$ on trouve que

$$x \in P_K(x + sv + (1-\lambda)(x - x - sv)) = P_K(x + \lambda sv)$$

Ce qui finit la preuve. ■

Définition 2.46. ***(Cône tangent de Clarke)***

Soit E un espace de Banach, K un sous-ensemble fermé de E, on note par $T_K(x)$ le cône tangente de Clarke que est défini comme suit, un vecteur $v \in T_K(x)$ si pour tout suite $(x_n)_n$ dans K convergeant vers x et pour tout suite de nombres positifs $(t_n)_n$ convergeant vers 0^+, il existe une suite $(v_n)_n \subset E$ qui converge vers v telle que $x_n + t_n v_n \in K$ pour tout n.

Définition 2.47. ***(Cône normale de Clarke)***

Soit E un espace de Banach, K un sous-ensemble fermé de E, comme le Cône tangent de Clarke, le Cône normal de Clarke $N_K^{Cl}(x)$ de K au point $x \in K$ est défini par

$$N_K^{Cl}(x) = \{\xi \in E' : \langle \xi, v \rangle \leq 0; \forall v \in T_K(x)\},$$

c'est à dire $N_K^{Cl}(x)$ est le cône dual (polaire) de $T_K(x)$.

Définition 2.48. *(Cône normale limite)*
Soit E un espace de Banach, K un sous-ensemble fermé de E, on définit le cône normale limite par

$$N_K^L(x) = \{\xi \in E' : \xi_n \rightharpoonup \xi, \xi_n \in N_K^P(x_n), x_n \xrightarrow{K} x\}$$

Ici, $\xi_n \rightharpoonup \xi$ signifie que la suite (ξ_n) converge faiblement vers ξ, et $x_n \xrightarrow{K} x$ signifie que $x_n \to x$ avec $x_n \in K$ pour tout n.

2.8 Ensembles prox-réguliers et quelques exemples

Définition 2.49. *soit E un espace de Banach, K un sous-ensemble fermé de E. On dit que k est r-prox régulier (ou uniformément prox-régulier de constante r) s'il existe $r > 0$, fixé et pour tout $x \in K$ et tout $\xi \in N_K^L(x)$ tel que*

$$\| \xi \| < 1, \quad ona \;\; x = P_K(x + r\xi).$$

Définition 2.50. *Soit E un espace de Banach, K un ensemble fermé de E. Pour $r > 0$, l'ensemble K est dit r-prox-régulier si*

$$pour\ tout \;\; x \in K \;\; et \;\; \xi \in N_K^p(x) \setminus \{0\} : B(x + r\frac{\xi}{\| \xi \|}, r) \cap K = \emptyset.$$

Où $N_K^p(x)$ est le cône proximale normale à K en x.

Remarque 2.51. *Dans un espace de Hilbert H, pour $r = +\infty$, l'uniforme r-prox-régularité de K est équivalente à sa convexité.*

Exemple 2.52. *K est uniformément prox-régulier de constante r si tout point à distance de K inférieure à r a une projection unique sur K.*

Démonstration. K est uniformément r-prox-régulier si et seulement si,

$$\forall x, y \in K, \forall t \in [0,1] \;\; avec \;\; tx+(1-t)y \in U_K(r), d_K(tx+(1-t)y) \leq \frac{1}{2r}(1-t) \| x-y \|^2$$

t.q

$$U_K(r) = \{z \in H, d_K(z) < r\}$$

Si $0 < r \leq +\infty$, on a

$$d_K(tx + (1-t)y) \leq 0 \Leftrightarrow d_K(tx + (1-t)y) = 0.$$

C'est à dire K convexe. ∎

Proposition 2.53. *Si K est un ensemble r-prox-régulier l'opérateur multivalué $N_K^p(.)$ est hypomonotone,*

pour tout $x, y \in K, u \in N_K^p(x)$ et $v \in N_K^p(y)$

$$\langle x - y, u - v \rangle \geq -\frac{\| u \| + \| v \|}{2r} \| x - y \|^2$$

Exemple 2.54. *Un ensemble fermé K est convexe si et seulement si il est ∞-prox-régulier.*

Exemple 2.55.

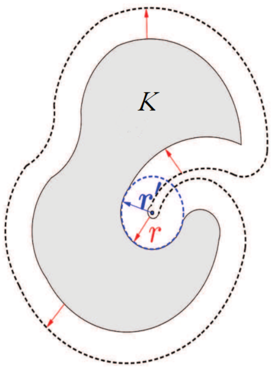

Figure 1 : K est r-prox régulier

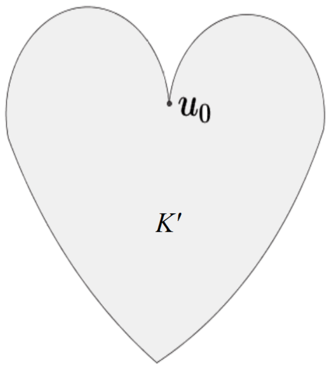

Figure 2 : K' n'est pas r-prox régulier au point u_0

3

Existence de solutions pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un processus de la rafle dépendant du temps et de l'état dans un espace de Banach

Sommaire

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude du processus de la rafle non perturbée du premier ordre dépendant du temps et de l'état dans un espace de Banach séparable.
Notre résultat est une extension du Théorème 6.5 dans [10], au cas où l'ensemble dans le cône dépend aussi de l'état.
Dans [17], les auteurs ont traité le même problème mais dans un espace de Hilbert, avec une perturbation globalement s.c.s.
L'inclusion différentielle est de la forme

$$(P)\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{K(t,u(t))}(u(t)),\ p.p.\ t \in [0,T]; \\ u(t) \in K(t,u(t)),\ \forall t \in [0,T]; \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où $K : [0,T] \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application à valeurs non vides fermées et r-prox régulières.
On essayé de généraliser des théorèmes d'existence pour les processus de la rafle dépendant de l'état qui existent dans la littérature mais dans un espaces de Hilbert, au cas des espaces de Banach. Les arguments utilisés exigent des propriétés géométriques et topologiques de l'espace, qui se résument dans notre étude en la réflexivité, séparabilité, uniforme lissicité et I-lisse faiblement. L'étude n'a pas pu généralisée à n'importe quel espace de Banach, mais au moins à des espaces importants dans l'analyse fonctionnelle tels les espaces $\mathbf{L}^p, l^p$. Ce chapitre a été prise de [7] et [25].

3.2 Quelques préliminaires

Les résultats suivants ont été pris des références [10, 13, 17, 25].

Proposition 3.1. *Soient E un espace de Banach, $r \in [0,+\infty[$, K sous ensemble de E r-prox-régulier.*

- *Pour tout $x \in E$, $d(x,K) < r$ la projection de x sur K est bien définie et continue. C'est a dire $P_K(x)$ est à valeur unique $(P_K(x)) \neq \emptyset)$.*
- *pour tout $r' \in (0,r)$, $d(x,K) < r'$ l'opérateur de projection est lipschitzien sur l'ensemble des points x de E avec une constante de lipschitzité $\frac{r}{r-r'}$*

- *Si* $u = P_K(x)$ *alors,* $u = P_K\left(u + r\frac{x-u}{\|x-u\|}\right)$

Théorème 3.2. *Soit* Y *un espace suslaine localement convexe,* (X, Σ, μ) *un espace mesuré fini avec* $\mu \geq 0$ *et* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application* Σ*-mesurable et scalairement intégrable à valeurs non vides convexes compactes, soit* $g : X \longmapsto Y$ *une application mesurable. Alors*

$$\int_X \delta^*(y', (gF)(t))d\mu = \delta^*(y', \int_X gF)d\mu. \; \forall y' \in Y.$$

Proposition 3.3. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach réflexif séparable uniformément lisse. Soient* K_n *et* $K : I \rightrightarrows E$ *des multi-applications à valeurs non vides fermées, satisfaisant*

$$\sup_{t\in I} \mathcal{H}(K_n(t), K(t)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3.2.1}$$

Supposons que pour un exposant $s \in [2, \infty[$ *et une suite bornée* $(v_n)_{n\geq 0}$ *de* $L^\infty(I, E)$*, on peut extraire une sous-suite* $(v_{k(n)})_{n\geq 0}$ *qui converge faiblement* vers* $v \in L^\infty(I, E)$ *et telle que pour tous* $z \in L^\infty(I, E)$ *et* $\phi \in L^1(I, \mathbb{R})$*,*

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} &\int_I \langle J_s(z(t) + v_{k(n)}(t)) - J_s(v_{k(n)}(t)), v_{k(n)}(t)\rangle \phi(t)dt \\ &\leq \int_I \langle J_s(z(t) + v(t)) - J_s(v(t)), v(t)\rangle \phi(t)dt.\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Alors, la projection $P_{K(\cdot)}$ *est faiblement continue dans* $L^\infty(I, E)$ *(relativement aux directions données par la suite* $(v_n)_n$*) dans le sens suivant : pour tout* $r > 0$ *et toute suite bornée* $(u_n)_n$ *de* $L^\infty(I, E)$ *satisfaisant*

$$\begin{cases} u_n \to u \text{ dans } L^\infty(I, E) \\ u_n(t) \in P_{K_n(t)}(u_n(t) + rv_n(t)) \quad p.p. \; t \in I, \end{cases}$$

on a pour presque tout $t \in I$

$$u(t) \in P_{K(t)}\big(u(t) + rv(t)\big).$$

3.3 Résultat d'existence

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et prouver notre résultat d'existence de solutions pour le problème considéré.

Théorème 3.4. *([25]) Soit $I = [0, T](T > 0)$, et soit E un espace de Banach Réflexif séparable uniformément lisse et I-lisse faiblement compact pour un exposant $s \in [2, +\infty[$*
Soit $r > 0$ et soit $K : I \times E$ une multi-application à valeurs non vides fermées et r-prox-régulières.
Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites.

(i) Il existe deux constantes réelles $k_1 > 0, 0 \leq k_2 < 1$ telles que pour tout $s, t \in I$ et $u, v, x \in E$

$$|d(x, K(t, u)) - d(x, K(s, v))| \leq k_1|t - s| + k_2\|u - v\| \tag{3.3.1}$$

(ii) Pour tout borné $A \subset E$ l'ensemble $K(I \times A)$ est relativement boule compact, i.e l'intersection de $K(I \times A)$ avec toute boule fermée est relativement compact. Alors pour tout $u_0 \in K(0, u_0)$ l'inclusion différentielle

$$(P) \begin{cases} u(0) = u_0; \\ u(t) \in K(t, u(t)), \forall t \in I \\ -\dot{u}(t) \in N_{K(t,u(t))}(u(t)), p.p.t \in I \end{cases}$$

admet une solution lipschitzienne $u : I \longrightarrow E$. De plus, on a pour presque tout $t \in I$

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \tfrac{k_1}{1-k_2}$$

Démonstration. La preuve se base sur la construction de suites d'applications approximantes dont la limite sera la solution du problème considéré.

Étape 1. Construction de suites approximantes.

Soient $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{T}{n_0}\left(\frac{k_1}{1 - k_2}\right) \leq \frac{r}{2} < r. \tag{3.3.2}$$

Pour tout $n \geq n_0$, considérons une partitions de l'intervalle $I = [0, T]$ définie par $t_k^n = k\frac{T}{n}$, $k = 0..n$ avec $h = \frac{T}{n}$.
Soit $t_0^n = 0$, $I_k^n =]t_k^n, t_{k+1}^n]$ pour $0 \leq k \leq n - 1$.
On définie les approximations des applications sur chaque intervalle I_0^n comme suit

$$\begin{cases} u_0^n = u_0 \in K(0, u_0), \\ u_1^n = P_{K(t_1^n, u_0^n)}(u_0^n), \\ u_n(t) = \frac{t_1^n - t}{h} u_0^n + \frac{t - t_0^n}{h} u_0^n, \\ u_k^n = u_n(t_k^n) \end{cases}$$
$$\| u_1^n - u_0^n \| \leq h \left(\frac{k_1}{1-k_2} \right).$$

Montrons que cette projection est bien définie, on a par (3.3.1)

$$\begin{aligned} d(u_o^n, K(t_1^n, u_0^n)) &= |d(u_0, K(t_1^n, u_0^n)) - d(u_0, K(t_0^n, u_0^n))| \\ &\leq k_1 |t_1^n - t_0^n| + k_2 \| u_0^n - u_0^n \| \\ &\leq k_1 |t_1^n - t_0^n| \\ &\leq k_1 h \\ &\leq \frac{r}{2} < r. \end{aligned}$$

D'après la proposition (3.1) on a :

$P_{K(t_1^n, u_0^n)}(u_0^n)$ est bien définie, alors le point $u_1^n \in K(t_1^n, u_0^n)$ est définit par

$$u_1^n = P_{K(t_1^n, u_0^n)}(u_0^n).$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \| u_1^n - u_0^n \| &= \| P_{K(t_1^n, u_0^n)} - u_0^n \| \\ &= d(u_0^n, K(t_1^n, u_0^n)) \\ &= |d(u_0^n, K(t_1^n, u_0^n)) - d(u_0, K(t_0^n, u_0^n))| \\ &\leq k_1 |t_1^n - t_0^n| \\ &\leq k_1 h \\ &\leq \frac{k_1 h}{1 - k_2} \\ &\leq \frac{r}{2} < r. \end{aligned}$$

car $0 \leq k_2 < 1$. Clairement, les conditions de récurrence sont satisfaites à l'étape $k = 1$. Pour $k = 1, .., n-1$ on définie les approximations des applications sur chaque intervalle I_k^n par

$$\begin{cases} u_k^n \in K(t_k^n, u_{k-1}^n), \\ u_k^n = P_{K(t_k^n, u_{k-1}^n)}(u_{k-1}^n), \\ u_n(t) = \frac{t_{k+1}^n - t}{h} u_k^n + \frac{t - t_n^k}{h} u_{k+1}^n, \\ u_k^n = u_n(t), \end{cases}$$

$$\| u_k^n - u_{k-1}^n \| \leq \frac{k_1 |t_k^n - t_{k-1}^n|}{1 - k_2}. \tag{3.3.3}$$

On suppose que, pour $k \in 1, ..., n$, la suite u_k^n est bien définie, et montrons pour $k+1$ on a $0 \leq k \leq n-1$

$$u_{k+1}^n = P_{K(t_{k+1}^n, u_k^n)}(u_k^n), \tag{3.3.4}$$

$$\| u_{k+1}^n - u_k^n \| \leq \frac{k_1 |t_{k+1}^n - t_k^n|}{1 - k_2}. \tag{3.3.5}$$

nous avons alors par (3.3.2) et (3.3.1)

$$\begin{aligned} d(u_k^n, K(t_{k+1}^n, u_k^n)) &= |d(u_k^n, K(t_{k+1}^n, u_k^n)) - d(u_k^n, K(t_k^n, u_{k-1}^n))| \\ &\leq k_1 |t_{k-1}^n - t_k^n| + k_2 \| u_k^n - u_{k-1}^n \| \\ &\leq k_1 h + \frac{k_2 k_1 |t_k^n - t_{k-1}^n|}{1 - k_2} \\ &= k_1 h + \frac{k_2 k_1 h}{1 - k_2} \\ &= \frac{h k_1}{1 - k_2} \\ &\leq \frac{r}{2} < r. \end{aligned}$$

Donc d'après la proposition (3.1) on a $P_{K(t_{k+1}^n, u_k^n)}(u_k^n)$ est bien définie alors le point $u_{k+1}^n \in K(t_{k+1}^n, u_k^n)$ est définit par

$$u_{k+1}^n = P_{K(t_{k+1}^n, u_k^n)}(u_k^n)$$

De plus, nous avons par (3.3.2)

$$\begin{aligned} \| u_{k+1}^n - u_k^n \| &= \| P_{K(t_{k+1}^n, u_k^n)}(u_k^n) - u_k^n \| \\ &= |d(u_k, K(t_{k+1}, u_k^n)) - d(u_k^n, K(t_k^n, u_k^n))| \\ &\leq k_1 |t_{k+1}^n - t_k^n| + \frac{k_1 k_2 |t_k^n - t_{k-1}|}{1 - k_2} \\ &= k_1 h + \frac{k_2 k_1 h}{1 - k_2} \\ &= \frac{h k_1}{1 - k_2} \end{aligned}$$

D'où la suite finie $\{u_k^n : k = 0, ..., n\}$ est bien définie satisfaisant (3.3.4)et (3.3.5).

Observation que la relation(3.3.4) et la proposition (3.1) donnent

$$u_{k+1}^n = P_{K(t_{k+1}^n, u_k^n)} \left(u_{k+1}^n + r \frac{u_k^n - u_{k+1}^n}{\| u_k^n - u_{k+1}^n \|} \right) \tag{3.3.6}$$

Étape 2. Trouvons la limite de la suite.

On a pour tout $t \in]t_k^n, t_{k+1}^n]$ avec $k = 0, ..., n-1$

$$u_n(t) = \frac{t_{k+1}^n - t}{h} u_k^n + \frac{t - t_k^n}{h} u_{k+1}^n$$

et pour tout $t \in I_{k-1}^n =]t_{k-1}^n, t_k^n]$

$$u_n(t) = \frac{t_k^n - t}{h} u_{k-1}^n + \frac{t - t_{k-1}^n}{h} u_k^n$$

On a :

$$\begin{aligned} u_n(t_k^n) &= \frac{t_k^n - t_{k-1}^n}{h} u_k^n \\ &= u_k^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \overset{>}{\to} t_k^n} u_n(t) &= \frac{t_{k+1}^n - t_k^n}{h} u_k^n \\ &= u_k^n \end{aligned}$$

Par conséquence la suite (u_n) est continue.

Pour tout $t \in I_k^n$ avec $k = 0, ..., n-1$

$$u_n(t) = \frac{t_{k+1}^n - t}{t_{k+1}^n - t_k^n} u_k^n + \frac{t - t_k^n}{t_{k+1}^n - t_k^n} u_{k+1}^n$$

Donc,

$$\dot{u}_n(t) = \frac{1}{h}(u_{k+1}^n - u_k^n)$$

pour presque tout $t \in I_k^n$, nous posons

$$\Delta_n(t) = \dot{u}(t) = \frac{1}{h}(u_{k+1}^n - u_k^n)$$

En premier lieu, vérifions que $\Delta_n(t)$ est un vecteur borné.

En effet, en utilisons la relation (3.3.5) nous avons pour presque tout $t \in I_k^n$

$$\begin{aligned} \| \Delta_n(t) \| &\leq \frac{1}{h} \| u_{k+1}^n - u_k^n \| \\ &\leq \frac{k_1}{1 - k_2} = M. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \| \Delta_n(t) \| \leq M \ p.p \ t \in I_k^n \tag{3.3.7}$$

Considérons le vecteur $v = u_k^n$ et posons pour chaque $t \in I_k^n$, $K_n(t) = K(t_{k+1}^n, u_k^n)$ comme K est à valeurs r-prox-régulières, les relations (3.3.6) (3.3.4) donnent,

$$u_{k+1}^n = P_{K_n(t)}\left(P_{K_n(t)}(v) - r\frac{P_{K_n(t)}(v) - v}{\| P_{K_n(t)}(v) - v \|}\right) \tag{3.3.8}$$

observant que par la relation (3.3.7) , nous avons

$$\frac{\| P_{K_n(t)}(v) - v \|}{hM} \leq 1$$

alors, en appliquant le lemme (2.45) à la relation (3.3.8) avec

$$\lambda = \frac{1}{hM} \| P_{K_n(t)}(v) - v \|$$

On obtient pour presque tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
u_{k+1}^n &= P_{K_n(t)}\left(P_{K_n(t)}(v) - r\lambda\frac{P_{K_n(t)}(v) - v}{\| P_{K_n(t)}(v) - v} \|\right) \\
&= P_{K_n(t)}\left(P_{K_n(t)}(v) - r\frac{\| P_{K_n(t)}(v) - v \|}{h_n M}\frac{P_{K_n(t)}(v) - v}{\| P_{K_n(t)}(v) - v \|}\right) \\
&= P_{K_n(t)}\left(P_{K_n(t)}(v) - r\frac{P_{K_n(t)}(v) - v}{hM}\right) \\
&= P_{K_n(t)}\left(P_{K_n(t)}(v) - r\frac{\Delta_n(t)}{M}\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$u_{k+1}^n \in P_{K_n(t)}\left(u_{k+1}^n - \frac{r}{M}\Delta_n(t)\right) \text{ p.p sur } I_k^n. \tag{3.3.9}$$

Étape 3. Montrons que la limite de la solution u_n est une solution du problème considéré

Existence de la limite, tout d'abord on montre la convergence de la suite $(u_n(.)) \subset C(I, E)$. On a pour presque tout $t \in I$

$$\| \dot{u}_n(t) \| \leq \frac{k}{1 - k_2} = M. \tag{3.3.10}$$

alors $(\dot{u}_n(.))$ est uniformément borné par M, donc $(u_n(.))$ est une suite bornée de $C(I,E)$ puisque pour tout $t \in I$.

$$\begin{aligned}
\| u_n(t) \| &= \| u_0 + \int_0^t \dot{u}_n(\tau)d\tau \| \\
&\leq \| u_0 \| + \int_0^t \| \dot{u}_n(\tau) \| d\tau \\
&\leq \| u_0 \| + \int_0^t M d\tau \\
&\leq \| u_0 \| + tM \\
&\leq \| u_0 \| + TM = L, \ tq \ t \in [0,T]
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

alors $(u_n(.))_n$ est bornée dans $C(I,E)$.
Maintenant, nous allons montrer que $(u_n(.))$ est equicontinue,
pour tout $t, s \in I (t > s)$

$$\begin{aligned}
\| u_n(t) - u_n(s) \| &= \| u_0 + \int_0^t \dot{u}_(\tau)d\tau - u_0 - \int_0^s \dot{u}_n(\tau)d\tau \| \\
&\leq \int_s^t \| u_n(\tau) \| d\tau \\
&\leq L|t-s|
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

alors $(u_n(.))_n$ est equicontinue.
Prouvons que pour chaque $t \in I$ fixé, la suite $(u_n(t))_{n\geq 0}$ est relativement compact. Considèrent les fonctions,

$$\theta_n, \delta_n : I \longrightarrow I \ \ definies\, par \ \ \theta_n(t) = t^n_{k+1}, \ \delta_n(t) = t^n_k \ \ si \ t \in I^n_k$$

et $\theta_n(0) = \delta_n(0) = 0$, et observons que :

$$\lim_{n\to\infty} |\delta_n(t) - t| = \lim_{n\to\infty} (t - t^n_k) \leq \lim_{n\to\infty} (t^n_{k+1} - t^n_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{T}{n} = 0$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n(t) = t$ et,

$$\lim_{n\to\infty} |\theta_n(t) - t| = \lim_{n\to\infty} (t^n_{k+1} - t) \leq \lim_{n\to\infty} (t^n_{k+1} - t^n_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{T}{n} = 0,$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n(t) = t$. Alors la définition de u_n et la relation (3.3.4) montrent que

$$u_n(\theta_n(t)) \in K(\theta_n(t), u_n(\delta_n(t))) \ \forall t \in I. \tag{3.3.13}$$

Cette dernière relation avec (3.3.11) implique que

$$(u_n(\theta_n(t))) \subset K(I \times L\overline{\mathbf{B}}_E) \cap L\overline{\mathbf{B}}_E$$

alors, l'hypothèse(ii) assure que la suite $(u_n(\theta_n(t)))$ est relativement compact. Mais comme pour chaque $t \in I$

$$\| u_n(\theta_n(t) - u_n(t) \| \leq L|\theta_n(t) - t| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{3.3.14}$$

alors la suite $(u_n(t))_{n\geq 0}$ est relativement compact.
Par la théorème d'Ascoli-Arzelà en obtient que $(u_n)_n$ est relativement compact. Par extraction d'une sous-suite on conclut que $(u_n)_n$ converge uniformément vers $u \in C(I, E)$.
Montrons la convergence de suite $(\dot{u}_n(t))$:
nous avons pour tout $t \in I$, grâce a la relation (3.3.12) et la convergence uniforme de $(u_n)_n$ vers u

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \| u_n(\delta_n(t)) - u(t) \| &\leq \lim_{n\to\infty} (\| u_n(\delta_n(t)) - u_n(t) \| + \| u_n(t) - u(t) \|) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (L|t - \delta_n(t)| + \| u_n(t) - u(t) \|) = 0\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \| u_n(\delta_n(t)) - u(t) \| = 0 \tag{3.3.15}$$

de la même manière la convergence de la suite $(u_n(\theta_n(.)))_n$ vers $u(.)$ est aussi obtenue

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \| u_n(\theta_n(t)) - u(t) \| &\leq \lim_{n\to\infty} (\| u_n(\theta_n(t)) - u_n(t) \| + \| u_n(t) - u(t) \|) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (L|\theta_n(t) - t| + \| u_n(t) - u(t) \|) = 0\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \| u_n(\theta_n(t)) - u(t) \| = 0 \tag{3.3.16}$$

D'autre part, on voit par la relation (3.3.10) que $(\dot{u}_n(.))_n$ est borné, dans $\mathbf{L}^\infty(I, E)$, par extraction d'une sous suite, on suppose que $(\dot{u}_n(.))_n$ converge faiblement* dans $\mathbf{L}^\infty(I, E)$ vers une application $w(.)$ et que $w(.) = \dot{u}(.)$.
En effet pour tout $y \in \mathbf{L}^1(I, E')$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \dot{u}_n(.), y(.) \rangle = \langle w(.), y(.) \rangle$$

i.e.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \langle \dot{u}_n(s), y(s)\rangle\, ds = \int_0^t \langle w(s), y(s)\rangle\, ds$$

en particulier pour $y(.) = \mathbb{1}_{[0,1]}e_j$ avec $t \in I$, $\mathbb{1}_{[0,1]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,T]$ et (e_j) une suite de l'espace E' qui séparé les points de E qui existe car E est séparable, alors par le théorème (3.2)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \left\langle \dot{u}_n(s), \mathbb{1}_{[0,t]}(s)e_j\right\rangle ds = \int_0^t \left\langle w(s), \mathbb{1}_{[0,t]}(s)e_j\right\rangle ds, \quad \forall s \in [0,t].$$

On a $\mathbb{1}_{[0,t]}(s) = 1$, alors

$$\left\langle \lim_{n\to\infty}\int_0^t \dot{u}_n(s)ds, e_j\right\rangle = \left\langle \int_0^t w(s)ds, e_j\right\rangle \forall j$$

ceci assure que,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \dot{u}_n(s)ds = \int_0^t w(s)ds$$

puisque $(u_n(.))$ est une suite d'applications absolument continues on a l'égalité suivante

$$\lim_{n\to\infty}(u_n(t) - u_n(0)) = \lim_{n\to\infty}\int_0^t \dot{u}_n(s)ds = \int_0^t w(s)ds$$

alors,

$$u(t) = u(0) + \int_0^t w(s)ds$$

donc $(u(.))$ est absolument continue et $w(.) = \dot{u}(.)$. p.p.

observons de plus que pour tout $t \in I$ on a par (3.3.1)

$$\begin{aligned} H(K_n(t), K(t,u(t))) &= H(K(\theta_n(t), u_n(\delta_n(t))), K(t,u(t))) \\ &\le k_1|\theta_n(t) - t| + k_2 \parallel u_n(\delta_n(t)) - u(t) \parallel \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

de plus pour chaque $t \in I$, on utilisant (3.3.15) (3.3.16) (3.3.1)

$$\begin{aligned} d(u(t), K(t,u(t))) &= |d(u(t), K(t,u(t))) - d(u_n(\theta_n(t)), K(\theta_n(t) - u_n(\delta_n(t))))| \\ &\le \parallel u_n(\theta_n(t)) - u(t) \parallel + k_1|\theta_n(t) - t| + k_2 \parallel u_n(\delta_n(t)) - u(t) \parallel \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ &\le 0 \end{aligned}$$

donc

$$d(u(t), K(t,u(t))) = 0$$

par conséquent $u(t) \in K(t, u(t))$ pour tout $t \in I$ puisque $K(t, u(t))$ est un ensemble fermé.

Montrons maintenant que pour presque tout $t \in I$

$$u(t) \in P_{K(t,u(t))}(u(t) - \frac{r}{M}(\dot{u}(t)))$$

on pose $r' = \frac{r}{M}$, On a $\Delta_n = \dot{u}(t)$ et par les arguments cités ci dessus on sait que $(\Delta_n(.))_n$ converge faiblement* dans $\mathbf{L}^\infty(I, E)$ vers $\dot{u}(.) = \Delta(.)$ puisque E satisfait la propriété "I-lisse faiblement compact", donc on peut appliquer la relation (3.3.8) à la suite $(r'\Delta_n(.))_n$ pour obtenir pour tout $y \in \mathbf{L}^\infty(I, E)$ et tout $\phi \in \mathbf{L}^1(I, E)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \langle J_s(y(t) - r'\Delta_n(t)) - J_s(-r'\Delta_n(t)), \Delta_n(t)\rangle \phi(t)dt$$
$$= \int_I \langle J_s(y(t) - r'\Delta(t)) - J_s(-r'\Delta(t)), \Delta(t)\rangle \phi(t)dt.$$

par (3.3.9) on sait que pour presque tout $t \in I$

$$u_n(\theta_n(t)) \in P_{K_n(t)}\left(u_n(\theta_n(t)) - r'\Delta_n(t)\right)$$

et puisque la suite $(u_n(\theta_n(.)))_n$ converge fortement dans $\mathbf{L}^\infty(I, E)$ vers $u(.)$ par la relation (3.3.16) on conclut par la Proposition (3.3) que pour presque tout $t \in I$,

$$u(t) \in P_{K(t,u(t))}\left(u(t) - r'\Delta(t)\right)$$

d'où $-\Delta(t) \in N_{K(t,u(t))}(u(t))$ (voir la définition (2.43) du cône proximale normale), ou de manière équivalent

$$-\dot{u}(t) \in N_{K(t,u(t))}(u(t)) \;\; p.p \; t \in I$$

avec $u(0) = 0$, d'où notre problème (P) admet au moins une solution lipschitzienne $u(.)$

de plus par (3.3.10) on obtient

$$\| \dot{u}(t) \| \leq \frac{k_1}{1 - k_2} \;\; p.p \; t \in I$$

ceci finit notre preuve. ■

Conclusion Générale

Le travail présenté dans ce mémoire est l'étude d'existence de solution pour l'inclusion d'évolution gouvernée par le processus de la rafle dépendant du temps et l'état avec des ensembles prox-réguliers du premier ordre dans un espace de Banach.

Bibliographie

[1] S. Adly and B. K. Le, Unbounded state-dependent sweeping process with perturbations in uniformly convex and q-uniformly smooth Banach spaces. Numerical Algebra. August 12, 2017

[2] F. Ancona, G. Colombo, Existence of solutions for a class of non convex differential inclusions, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 83 (1990), 71-76.

[3] J. P. Aubin and A. Cellina, Differential inclusions Set-Valued maps and Viability theory. Springer-Verlag, Berlin 1984.

[4] J. P. Aubin and H. Frankowska, Set-Valued Analysis. Birkhäser, Boston Basel, Berlin 1990.

[5] D.Azzam-Laouir, Policopié cours d'analyse multivoque, Laboratoire de Mathématique Pure et Appliquées, Université de Jijel(2009).

[6] D. Azzam-Laouir, Contribution à l'étude de problèmes d'évolution du second ordre, thèse de doctorat d'état, Constantine, Juin 2003.

[7] D. Azzam-Laouir and F.Slamnia, On state-dependent sweeping process in Banach spaces, Evolution Equation and Control Theory 7 (2),(2018), 183-196.

[8] F. Bernard, L. Thibault and N. Zlateva, Characterization of Prox-Regular Sets in Uniformly Convex Banach Space. J. Convex Anal. 13 (2006), 525–560.

[9] F. Bernard, L. Thibault and N. Zlateva, Prox-regular sets and epigraphs in uniformly convex Banach spaces : various regularities and other porperties. Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), 2211-2247.

[10] F. Bernicot, J. Venel, Existence of sweeping process in Banach space under directional prox-regularity. J. Convex Anal. 17 (2010), 451–484.

[11] N. Bourbaki, Topologie generale, Masson, 1990.

[12] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications. Masson, 1983.

[13] C. Castaing and M. Valadier, Convex analysis and measurable multifunctions, LNM 580, Springer Verlag, Berlin 1977.

[14] C. Chidume, Geometric Properties of Banach Spaces and Nonlinear Iterations, Springer-Verlag, (1965).

[15] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, *Springer Verlag* 1985.

[16] J. Diestel, Geometry of Banach spaces, selected topics, Springer-Verlag, New-York, (1975).

[17] T. Haddad, J. Noel and L. Thibault, Perturbed Sweeping process with a sub-smooth set depending on the state. Linear and Nonlinear Analysis, Volume 2, Number 1 (2016), 155-274.

[18] N. H. Hassan. Topologie générale et espaces normées, Dunod, (2011).

[19] M. Kisieliwicz, Differential inclusion and optimal control, *PWN-Polish Scientific Publishers, Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, Boston, London* (1991).

[20] M. Kunze and M.D.P Monteiro Marques, On parabolic quasi-variational inequalities and state-dependent sweeping processes. Topol. Methods Nonlinear Anal. 12 (1998) 179-191.

[21] J. J. Moreau, Evolution problem associated with a moving convex set in Hilbert space, J. Differential Equations, 26, no. 3 (1977), 347-374.

[22] J.J. Moreau, Rafle par un convexe variable I. Sém. Anal. Convexe Montpellier (1971), Exposé 15.

[23] J.J. Moreau, Rafle par un convexe variable II. Sém. Anal. Convexe Montpellier (1972), Exposé 3.

[24] J. J. Moreau, Sur l'évolution d'un système élasto-viscoplastique, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 273 (1971), 118-121.

[25] F. Selamnia, Contribution à l'étude de quelques problèmes d'évolution gouvernés par des opérateurs maximaux monotones, thèse de doctorat d'état, Jijel (2018).

[26] J. V. Tiel, Convex analysis. An introductory text, *Wiley, New York* 1984.

[27] M. Valadier, Entrainement unilatéral, lignes de descente, fonction lipschitziennes non pathologiques, C.R.A.S Paris, 308(I) (1989), 1241–1244.

[28] M. Valadier, Lignes de descente de fonctions lipschitziennes non pathologiques, Sém. d'Anal. Convexe, Montpellier, exposé N° 9 1988.