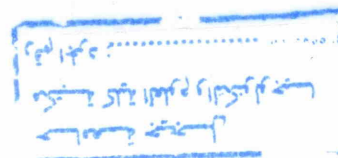


*République Algérienne Démocratique et Populaire*  
*Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*



N1697



*Université de Jijel*  
*Faculté des Sciences et de la Technologie*  
*Département d'Electronique*



*Projet de fin d'études pour l'obtention du*  
*Diplôme de Master II en Electronique*

*Option : Electronique et Analyse des Systèmes*

*Thème :*

*Modélisation et commande des systèmes*  
*complexes en réseau multiple*

*Présenté par :*

*Mr. BOUCHEMA Hamza*

*Encadré par :*

*Dr. BOUKABOU Abdelkrim*

*Promotion : Juin 2014*

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَمَا أُوتِيتُمْ مِنَ الْعِلْمِ إِلَّا قَلِيلًا (85)

سورة الإسراء

وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا (114)

سورة طه

## *Remerciements*

*Je voudrais remercier tout d'abord, Dieu, pour être mon meilleur confident et pour me permettre de réaliser mes rêves.*

*La rédaction de ce mémoire est l'occasion pour moi de faire un bilan des deux années passées depuis l'obtention de la licence. Ces années ont été riches de rencontres et je mesure aujourd'hui la chance que j'ai eu d'étudier avec des personnes qui m'ont beaucoup appris tout en partageant avec eux de très bons moments.*

*Je tiens vivement à remercier mon encadreur **Mr. BOUKABOU Abdelkrim**, qui a supervisé ce travail de recherche. Son soutien, sa disponibilité, ainsi que ses conseils judicieux.*

*Je remercie l'ensemble des membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'accepter de lire et de juger ce mémoire.*

*Je remercie évidemment les enseignements avec qui j'ai eu plaisir à étudier durant ces dernières années: C. BOUBAKIR, A. SOUKKOU, K. KEMIH, A. KACHA, A. MELLIT, S. DIB, H. MRDJANA, Z. SANTOUH, M. GRIMES, T. BENKDIDEH, N. TALBI, etc.*

*Mes remerciements sont adressés également au chef du département d'électronique Mr. R. REMMOUCHE.*

*Je ne saurais terminer sans remercier l'ensemble des collègues et amis qui m'ont aidé et supporté durant ces dernières années. Un grand merci à vous tous.*

*À mes proches d'ici et d'ailleurs*

# Dédicaces

*Je dédie ce travail à mes chers parents pour leurs encouragements et leur soutien moral et matériel durant toutes mes années d'études que Dieu le tout puissant me les gardes.*

*Mon cher père et ma chère mère*

*A ma chère grande mère et mon cher grand père*

*A mon cher frère Naim*

*Et toute ma famille,*

*A mes chères amies,  
A tous mes collègues,*

*Famza*

# Table des matières

---

Remerciement :.....	i
Dédicace :.....	ii
Table des matières :.....	iii
Liste des figures :.....	Vi
Introduction Générale :.....	1

## *Chapitre I : Les réseaux complexes du réel à la modélisation*

---

I.1 : Introduction.....	3
I.2 : Définitions.....	3
I.3 : Problématique : modélisation d'un réseau complexe .....	5
I.4 : La théorie des graphes.....	5
I.4.1 Définition et concepts de base .....	5
I.4.1.1 concepts orientés .....	6
I.4.1.2 concepts non orientés.....	7
I.4.1.3 Principales définitions.....	8
I.4.2 Représentation d'un graphe .....	9
I.4.2.1 Matrice d'adjacence.....	9
I.4.2.2 Matrice d'incidence sommets-arcs .....	10
I.4.2.3 Listes d'adjacence .....	10
I.4.3 Coloration des sommets d'un graphe.....	12
I.4.4 connexité dans les graphes .....	12
I.5 Conclusion .....	14

## **Chapitre II : Modélisation des réseaux complexes par la théorie des graphes**

---

II.1 Introduction .....	15
II.2 Propriété d'un graphe .....	15
II.3 Structure & dynamique des graphes .....	18
II.3.1 Diamètre .....	19
II.3.2 Distribution des degrés.....	19
II.3.3 Densité locale .....	20
II.4 Modélisations existantes .....	20
II.4.1 L'expérience de <i>Milgram</i> .....	20
II.4.2 Les graphes aléatoires .....	22
II.4.2.1 Le modèle d'Erdős et Rényi.....	22
II.4.2.2 Les graphes aléatoires généralisés.....	25
II.4.3 Modèle d'Albert et Barabasi "scale-free" .....	26
II.4.4 Modèle petit monde ( Small world ) de Watts & Strogatz .....	29
II.4.4.1 Coefficient de regroupement.....	31
II.4.4.2 Distribution des degrés.....	32
II. 5 Conclusion .....	33

## **Chapitre III : le contrôle des réseaux complexes**

---

III.1 Introduction .....	34
III.2 Les conditions de stabilité pour une synchronisation complète :.....	34
III.2.1 Les conditions de la Stabilité globales .....	38
III.2.2 Les conditions de la Stabilité locales .....	40
III.3 Contrôle virtuel de Réseaux Dynamiques Complexes Épinglés .....	41
III.4 le principe du contrôle prédictif .....	43
III.4.1 Contrôle prédictif des systèmes discrets .....	44
III.4.1.1 Application 1 .....	45
III.4.2 Contrôle prédictif des systèmes continus .....	50

III.4.3 Application 2 .....	51
III.5 Conclusion .....	55
Conclusion générale.....	56
Bibliographie .....	57

## Liste des figures

---

Figure I.1 : Réseau social d'un site Web en communauté .....	4
Figure I.2 : Ponts de Königsberg .....	6
Figure I.3 : graphe orienté et non orienté .....	7
Figure I.4 : Graphes complets avec 3, 4, 5 et 6 sommets .....	9
Figure I.5 : clique d'un graphe.....	9
Figure I.6 : Matrice d'adjacence d'un graphe .....	10
Figure I.7 : Matrice d'incidence d'un graphe .....	10
Figure I.8 : liste d'ajacence d'un graphe .....	11
Figure I.9 : Coloration d'un graphe en 3 couleurs.....	12
Figure I.10 : Graphe possédant 2 composantes connexes .....	13
Figure II.1 : Exemple de coefficients de regroupement .....	15
Figure II.2 : Exemple du degré de ccorrélacion d'un sommet $i$ .....	16
Figure II.3 : Courbes de distribution des degrés d'un graphe. ....	17
Figure II.4 : Distribution des degrés de réseaux réels .....	18
Figure II.5 : Exemple de biais du coefficient de regroupement .....	20
Figure II.6 : Les six degrés de séparation de Milgram.....	22
Figure II.7 : Exemple de graphe aléatoire $G_{n,p}$ avec sa composante géante au centre. ....	23
Figure II.8 : Phase de transition de formation de la composante géante d'un graphe aléatoire $G_{n,p}$ .....	24
Figure II.9 : Comparaison du coefficient de regroupement entre réseaux réels et graphes aléatoires.....	25
Figure II.10 : Graphe aléatoire généralisé de Molloy & Reed suivant une loi de puissance.....	26
Figure II.11 : Graphe construit suivant le modèle d'attachement préférenciel d'Albert et Barabasi .....	27



Figure II.12 : Modèle small-world de Watts & Strogatz .....	29
Figure II.13 : réseau petit monde avec 150 nœuds et $p=0.05$ .....	30
Figure II.14 : Variante du modèle Small-World de Watts et Strogatz.....	31
Figure II.15 : coefficient de regroupement $C$ et longueur moyenne nœud à nœud $L$ en fonction de $p$ du model small-world Watts et Strogatz.....	32
Figure III.1 : schéma représentatif du contrôle prédictif .....	44
Figure III.2 : Évolution du système donné par l'équation III.41 .....	46
Figure III.3 : résultat du contrôle de l'exemple1 .....	47
Figure III.4 : Système chaotique sous contrôle. ....	48
Figure III.5 : représentation du système donné par l'équation (III.50).. ....	49
Figure III.6 : stabilisation du système (III.51) sur son point fixe.....	50
Figure III.7 : représentation du système donné par l'équation (III.61). ....	52
Figure III.8 : évolution du système donné par l'équation (III.61).....	52
Figure III.9 : évolution du réseau dynamique de chen avec 50 noeuds .....	53
Figure III.10 : stabilisation du système (III.61).....	54
Figure III.11 : Différentes valeur de contrôle.....	55



## *Introduction générale*

---

Le thème de la modélisation des réseaux complexes appartient au thème plus général de la modélisation des systèmes complexes. L'analyse de ces systèmes reste difficile, l'intérêt porté par les chercheurs aux réseaux complexes ayant seulement 50 ans, avec une reprise récente ces 15 dernières années grâce à l'essor du web et des communautés virtuelles. Le problème de la généralisation théorique des réseaux étant connu, aussi, est-il possible de donner une définition mathématique permettant d'unifier le concept de réseau ?

Habituellement, pour représenter un réseau, on utilise la théorie des graphes. Cependant, les réseaux sont des structures évolutives et des systèmes dynamiques. Ainsi, la théorie des graphes semble ne pas être assez complète pour représenter toutes les propriétés d'un tel système, dit complexe, dans lequel la dynamique joue un rôle prépondérant. En effet, un bon nombre de modèles de réseaux basés sur la théorie des graphes, existe déjà. La question de la correspondance « réseaux réel-réseaux modélisés » reste cependant sans réponse satisfaisante. La plupart des modèles présentés possèdent une ou plusieurs caractéristiques appartenant aux réseaux réels. Cependant, même si les derniers modèles en date paraissent pertinents, en particulier pour les réseaux informatiques, il est évident qu'une grande part d'incertitude existe quant à une modélisation efficace et une compréhension globale de ces réseaux [13].

La théorie du contrôle automatique traite le comportement de systèmes dynamiques qui sont un champ interdisciplinaire de science. Plusieurs stratégies de contrôle sont proposées pour les systèmes du contrôle spécifiques différents, tel que contrôle adaptatif, contrôle hiérarchique, contrôle intelligent, contrôle optimal, contrôle robuste et le contrôle stochastique. Avec le développement rapide dans la théorie du réseau, la technologie de l'ordinateur, et la technologie de la communication, la recherche sur la théorie du contrôle est étendue récemment plus loin d'un système seul dynamique aux systèmes multiples interconnectés [35].

Ces dernières années, il y a aussi eu l'intérêt croissant dans l'étude de réseaux dynamiques complexes, lequel est talonné partiellement par la découverte des propriétés des deux modèle « petit monde et invariance d'échèle » de beaucoup de réseaux complexes

naturels et artificiels. En 1998, un modèle du réseau petit monde a été proposé par Watts et Strogatz [1], lequel a les propriétés d'une petite longueur de chemin moyenne et un grand coefficient de regroupement. La distribution de la connectivité d'un réseau petit monde atteint un maximum à une valeur moyenne et tombe en décadence exponentiellement. Dans l'année suivante, un modèle du réseau échelle-libre "invariance d'échèle" a été proposé par Barabási et Albert [2].

L'objet de ce mémoire de master est l'étude et le contrôle d'un réseau complexe dynamique par l'utilisation d'une des méthodes existantes de contrôle. Il comporte trois chapitres :

Le premier chapitre de ce mémoire permettra au lecteur de prendre connaissance des notions de base nécessaires sur les réseaux complexes, les différents types de ces réseaux et le passage du réel à la modélisation des réseaux complexes.

Le deuxième chapitre présentera plusieurs notions de base de la théorie des graphes, la méthode utilisée pour la modélisation mathématique des réseaux complexes, il discute ainsi les trois modélisations existantes de cette théorie.

Le troisième chapitre sera consacré aux conditions de stabilité des réseaux complexes dynamiques et le contrôle prédictif de ces réseaux.

Enfin, on terminera par une conclusion générale, qui résume nos résultats ainsi que des perspectives pour d'autres travaux à venir.

# *Chapitre I*

---

*Les réseaux complexes du réel à la modélisation*

## **I.1 Introduction :**

Ce chapitre correspond à l'état de l'art de la modélisation mathématique des réseaux. Outre la réflexion sur la notion de réseau complexe, on énoncera des rappels sur la théorie des graphes, théorie utilisée habituellement dans les modèles étudiés dont les fondements sont nécessaires pour comprendre les définitions des dits modèles. Nous passerons en revue les différentes modélisations qui ont été faites en faisant une analyse sur l'utilisation de ces modèles pour représenter les réseaux du réel, pour finir sur la nécessité d'une théorie unificatrice plus générale que la théorie des graphes.

## **I.2 Définitions :**

La définition de réseau varie selon le domaine ou le contexte dans lequel on se place, dans un domaine comme la photonique, un réseau est une pièce d'optique destinée à fournir des spectres et dont le principe repose sur l'interférence d'un grand nombre d'ondes diffractées. Concernant l'informatique, une définition simple d'un réseau est qu'il est un ensemble de moyens matériels et logiciels mis en œuvre pour assurer les communications entre ordinateurs, stations de travail et terminaux informatiques. D'une manière plus générale, on définit un réseau comme un ensemble de lignes entrecroisées.

Les réseaux complexes sont en fait une sous-classe des systèmes complexes. Un système complexe est généralement considéré comme un ensemble d'éléments en interactions mutuelles, où le comportement global du système ne peut être déduit de la somme de ses parties et de leurs propriétés [1]. Un réseau complexe est donc un réseau d'interactions entre entités dont le comportement global n'est pas déductible des comportements individuels 'entités', d'où l'émergence de nouvelles propriétés [2].

Les réseaux complexes sont présents dans de nombreux domaines aussi divers les uns que les autres : biologie, sociologie, psychologie, informatique, etc. Ils recouvrent ainsi des réseaux aussi divers que le réseau Internet, les réseaux d'humains, ou encore les réseaux de protéines. Les réseaux peuvent être regroupés en quatre catégories [2] :

- les réseaux sociaux.
- les réseaux d'informations.
- les réseaux technologiques.
- les réseaux biologiques.

Un réseau social est un ensemble de personnes ou de groupes de personnes possédant des schémas de contacts ou d'interactions entre eux [3] (Fig. I.1). C'est à partir de ce type de réseaux que la modélisation du monde réel a été introduite de façon empirique grâce à l'expérience de Milgram [4]. La plupart des études concernant ces réseaux souffrent de problèmes d'imprécisions, de subjectivité, et d'échantillons de petite taille [5].

Un réseau d'informations peut être rapporté à l'exemple classique d'un réseau de citations entre papiers scientifiques. La structure des informations étant stockées dans les nœuds, c'est pour cela que l'on utilise le terme réseau d'informations. Le World Wide Web avec ses pages web (contenant des informations) et ses hyper-liens est également un réseau d'informations (à ne pas confondre avec le réseau Internet qui est le réseau physique reliant les ordinateurs du monde entier entre eux).

Un réseau technologique est un réseau créé par l'homme principalement pour la distribution d'un service ou d'énergie. Les réseaux électriques, aériens, d'ordinateurs, en font partie.

Un réseau biologique est un réseau d'éléments touchant au vivant. Un exemple de réseau biologique peut être un réseau d'interactions entre protéines.

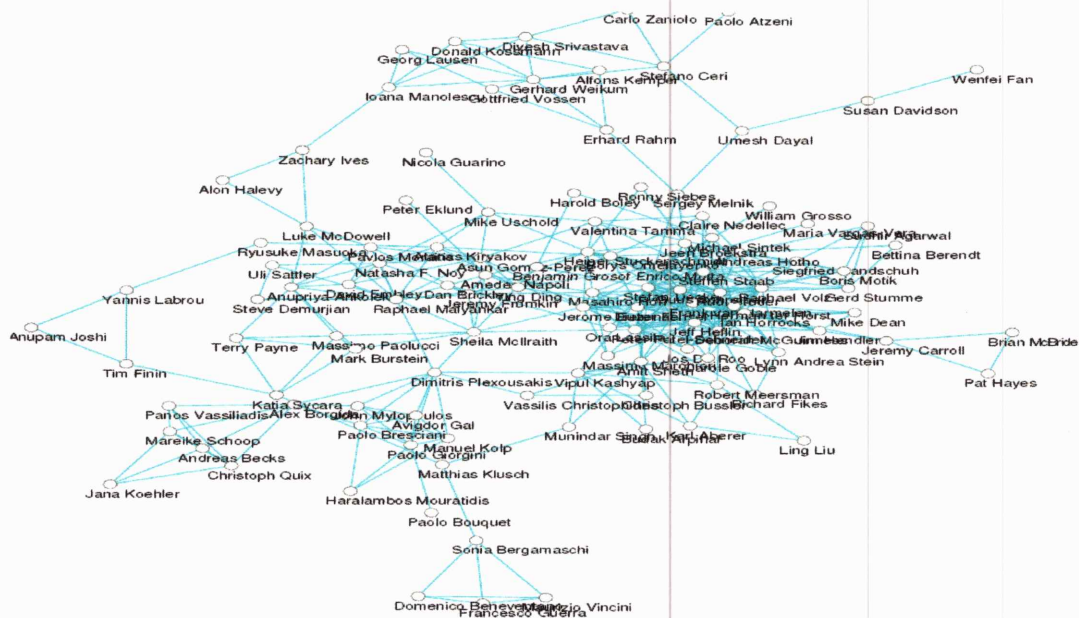


Fig. I.1 Réseau social d'un site Web en communauté

### **I.3 Problématique : modélisation d'un réseau complexe :**

Dans les réseaux réels, alors que les interactions locales sont généralement bien connues (la communication entre deux routeurs, la réaction entre deux protéines), le résultat global de l'ensemble des interactions est encore mal compris (propriété d'émergence) [6].

La compréhension de ces propriétés globales touche à des problématiques essentielles: la dynamique des interactions dans un réseau social ou un réseau informatique est par exemple liée à la problématique de la propagation des virus (informatiques ou biologiques), celle d'un réseau de distribution d'électricité, au problème de la robustesse d'un grand réseau. L'augmentation récente des capacités de traitement et de collecte d'un grand nombre de données statistiques sur ces réseaux a permis l'essor des études de ces objets. En particulier, on a observé expérimentalement que ces réseaux, a priori éloignés, partageaient des propriétés macroscopiques communes [7].

Le problème majeur réside dans la modélisation de tels réseaux. Or, pour pouvoir créer des modèles cohérents et reflétant au maximum les propriétés des réseaux réels, il faut être en mesure de les caractériser. C'est seulement en réussissant à caractériser tel ou tel réseau que l'on pourra reproduire leur comportement lors des simulations. Ces simulations donnent certains résultats mais qui ne sont pas toujours très pertinents ou ne prennent pas en compte tous les facteurs d'interactions nécessaires [8]. La caractérisation de l'anatomie d'un réseau fait référence à des définitions incomplètes, d'où le besoin de rechercher une (ou plusieurs) définition générale permettant la reconnaissance et/ou la construction d'un réseau complexe.

### **I.4 La théorie des graphes :**

Pour représenter les réseaux, la théorie des graphes paraît l'outil adéquat. C'est principalement cet outil qui a été utilisé dans les différentes études qui ont porté sur la modélisation de réseaux complexes. Dans cette partie, la théorie des graphes sera présentée, puis on étudiera les caractéristiques des propriétés structurelles d'un graphe pour arriver au problème de la dynamique, ainsi que les limites des études auxquelles on se confronte à l'heure actuelle.

#### **I.4.1 Définition et concepts de base :**

La théorie des graphes est née en 1736 quand Euler démontra qu'il était impossible de traverser chacun des sept ponts de la ville russe de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) une



fois exactement et de revenir au point de départ. Sur la figure I.2, les nœuds représentent les rives.

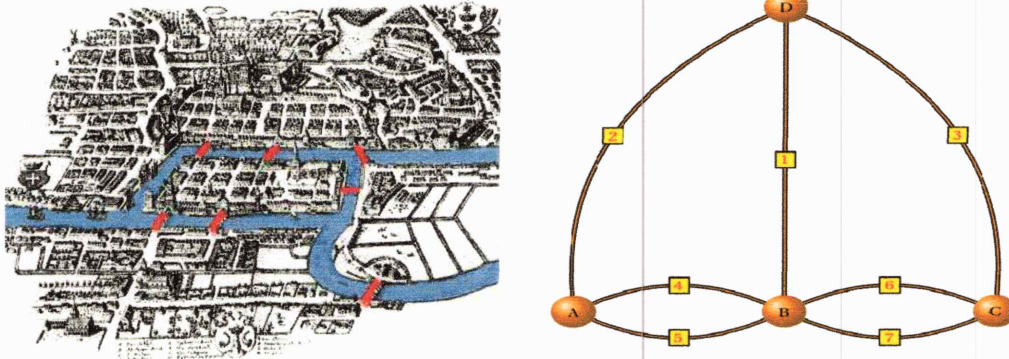


Fig. I.2 Ponts de Königsberg.

La théorie des graphes constitue un domaine des mathématiques qui, historiquement, s'est aussi développée au sein de disciplines diverses telles que la chimie (modélisation de structures), la biologie (génomique), les sciences sociales (modélisation des relations) ou en vue d'applications industrielles (problème du voyageur de commerce). Elle constitue l'un des instruments les plus courants et les plus efficaces pour résoudre des problèmes discrets posés en Recherche Opérationnelle (RO). De manière générale, un graphe permet de représenter simplement la structure, les connexions, les cheminements possibles d'un ensemble complexe comprenant un grand nombre de situations, en exprimant les relations, les dépendances entre ses éléments (e.g. réseau de communication, réseaux ferroviaire ou routier, arbre généalogique, diagramme de succession de tâches en gestion de projet, etc.). En plus de son existence purement mathématique, le graphe est aussi une structure de données puissante pour l'informatique [9].

#### I.4.1.1 Concepts orientés :

Dans beaucoup d'applications, les relations entre éléments d'un ensemble sont orientées, un élément  $x$  peut être en relation avec un autre sans que ce soit nécessairement en relation avec  $x$ . On parle alors de graphe orienté (en Anglais *directed graph* ou plus simplement *digraph*).

Un graphe  $G = (X, U)$  est déterminé par :

- un ensemble  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  dont les éléments sont appelés sommets ou nœuds (ce dernier terme est plutôt utilisé dans le contexte des réseaux).

- un ensemble  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  du produit cartésien  $x \times x$  dont les éléments sont appelés arcs.

Pour un arc  $u = (x_i, x_j)$ ,  $x_i$  est l'extrémité initiale,  $x_j$  l'extrémité finale (ou bien origine et destination). L'arc  $u$  part de  $x_i$  et arrive à  $x_j$ . Un arc  $(x_i, x_i)$  est appelé une boucle. Un  $p$ -graphe est un graphe dans lequel il n'existe jamais plus de  $p$  arcs de la forme  $(i, j)$  entre deux sommets quelconques. On appellera communément « graphe » un 1-graphe.

La densité d'un graphe est donnée par le quotient  $m/n^2$ , rapport du nombre effectif d'arcs sur le nombre maximal théorique.

#### I.4.1.2 Concepts non orientés :

Lors de l'étude de certaines propriétés, il arrive que l'orientation des arcs ne joue aucun rôle. On s'intéresse simplement à l'existence d'arc(s) entre deux sommets (sans en préciser l'ordre). Un arc sans orientation est appelé arête.  $U$  est constitué non pas de couples, mais de paires de sommets non ordonnés. Pour une arête  $(x_i, x_j)$ , on dit que  $u$  est incidente aux sommets  $x_i$  et  $x_j$ .

##### Remarque :

Dans le cas non-orienté, au lieu de noter  $G = (X; U)$  et  $u = (x_i, x_j)$ , on préfère souvent  $G = (X, E)$  et  $e = [x_i, x_j]$ .

Un multi-graphe  $G = (X, E)$  est un graphe pour lequel il peut exister plusieurs arêtes entre deux sommets.

Un graphe  $G = (X, E)$  est simple :

1. s'il n'est pas un multi-graphe.
2. s'il n'existe pas de boucles.

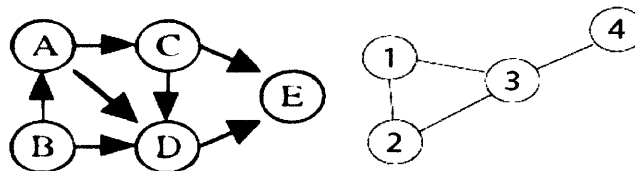


Fig. I.3. Graphe orienté et non-orienté.

### I.4.1.3 Principales définitions :

- Adjacence :
  - Deux sommets sont adjacents (ou voisins) s'ils sont joints par un arc.
  - Deux arcs sont adjacents s'ils ont au moins une extrémité commune.
- Degrés :
  - Le demi-degré extérieur  $d_{e x_i}$ ,  $d^+(x_i)$ , est le nombre d'arcs ayant  $x_i$  comme extrémité initiale,  $d^+(x_i) = |\omega^+(x_i)|$ .
  - Le demi-degré intérieur  $d_{i x_i}$ ,  $d^-(x_i)$ , est le nombre d'arcs ayant  $x_i$  comme extrémité finale,  $d^-(x_i) = |\omega^-(x_i)|$ .
  - Le degré de  $x_i$  est  $d(x_i) = d^+(x_i) + d^-(x_i)$ . Le degré d'un sommet d'un graphe non-orienté est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes.

- Graphe complémentaire :

$$G = (X, U) \text{ et } \bar{G} = (X, \bar{U}). (x_i, x_j) \in U \Rightarrow (x_i, x_j) \notin \bar{U} \text{ et } (x_i, x_j) \notin U \Rightarrow (x_i, x_j) \in \bar{U}$$

$\bar{G}$  est le graphe complémentaire de  $G$ .

- Graphe partiel :

$$G = (X, U) \text{ et } U_p \subset U. G_p = (X, U_p) \text{ est un graphe partiel de } G.$$

- Sous-graphe :

$G = (X, U)$  et  $X_s \subset X$ .  $G_s = (X_s, V)$  est un sous-graphe de  $G$ , où  $V$  est la restriction de la fonction caractéristique de  $U$  à  $X_s$ .

$$V = \{(x, y) / (x, y) \in U \cap X_s \times X_s\}, \forall x_i \in X_s, \Gamma_s(x_i) = \Gamma(x_i) \cap X_s.$$

- Graphe réflexif :  $\forall x_i \in X, (x_i, x_i) \in U$
- Graphe irréflexif :  $\forall x_i \in X, (x_i, x_i) \notin U$
- Graphe symétrique :  $\forall x_i, x_j \in X, (x_i, x_j) \in U \Rightarrow (x_j, x_i) \in U$
- Graphe asymétrique :  $\forall x_i, x_j \in X, (x_i, x_j) \in U \Rightarrow (x_j, x_i) \notin U$  (si  $G$  est asymétrique,  $G$  est irréflexif).
- Graphe antisymétrique :  $\forall x_i, x_j \in X, (x_i, x_j) \in U \text{ et } (x_j, x_i) \in U \Rightarrow x_i = x_j$   
(Si  $G$  est asymétrique,  $G$  est aussi antisymétrique).
- Graphe transitif :  $\forall x_i, x_j \in X, (x_i, x_j) \in U, (x_j, x_k) \in U \Rightarrow (x_i, x_k) \in U$
- Graphe complet :  $\forall x_i, x_j \in X, (x_i, x_j) \in U \Rightarrow (x_j, x_i) \in U$
- Clique : ensemble des sommets d'un sous-graphe complet. Soit  $C \subset X$  une clique de

G non orienté :  $\forall x_i, x_j \in C, (x_i, x_j) \in U$  (2 sommets distincts de G sont toujours adjacents).

Notons qu'un graphe complet et antisymétrique s'appelle un « tournoi », car il symbolise le résultat d'un tournoi où chaque joueur est opposé une fois à chacun des autres joueurs.

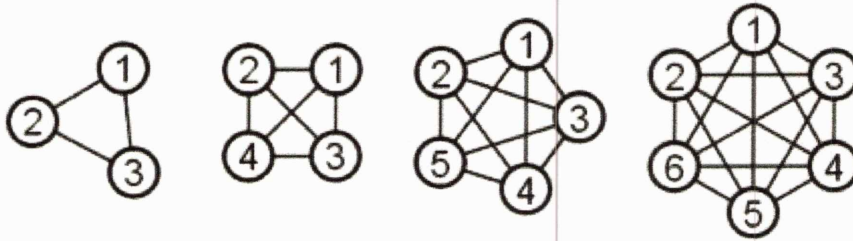


Fig. I.4. Graphes complets avec 3, 4, 5 et 6 sommets.

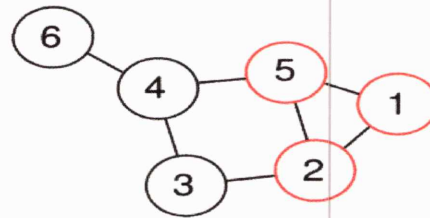


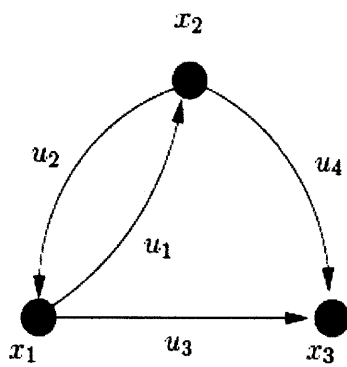
Fig. I.5. Clique (en rouge) d'un graphe.

## I.4.2 Représentation d'un graphe :

Un certain nombre de représentations existent pour décrire un graphe. En particulier, elles ne sont pas équivalentes du point de vue de l'efficacité des algorithmes. On distingue principalement la représentation par matrice d'adjacence, par matrice d'incidence sommets-arcs (ou sommets-arêtes dans le cas non orienté) et par listes d'adjacence [10].

### I.4.2.1 Matrice d'adjacence :

Considérons un graphe, la matrice d'adjacence (Fig. I.6) fait correspondre les sommets origine des arcs (placés en ligne dans la matrice) aux sommets destination (placés en colonne). Dans le formalisme matrice booléenne, l'existence d'un arc  $(x_i, x_j)$  se traduit par la présence d'un 1 à l'intersection de la ligne  $x_i$  et de la colonne  $x_j$ , l'absence d'arc par la présence d'un 0 (dans un formalisme dit matrice aux arcs les éléments représentent le nom de l'arc).

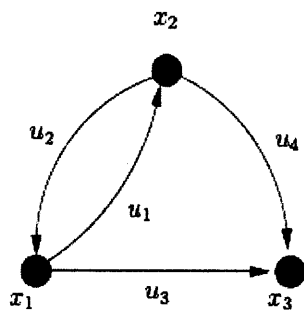


	$x_1$	$x_2$	$x_3$	destination
$x_1$	0	1	1	
$x_2$	1	0	1	
$x_3$	0	0	0	
Origine				

Fig. I.6. Matrice d'adjacence d'un graphe.

### I.4.2.2 Matrice d'incidence sommets-arcs :

Si  $U = (i, j) \in U$ , on trouve dans la colonne U :  $a_{iu} = 1$  ;  $a_{ju} = -1$  ; tous les autres termes sont nuls (Fig. I.7).



	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	Arcs
$x_1$	1	-1	1	0	
$x_2$	-1	1	0	1	
$x_3$	0	0	-1	-1	
sommets					

Fig. I.7. Matrice d'incidence d'un graphe.

### I.4.2.3 Listes d'adjacence :

Pour un graphe, l'avantage de la représentation par listes d'adjacence par rapport à celle par matrice d'adjacence, est le gain obtenu en place mémoire ; ce type de représentation est donc mieux adapté pour une implémentation [11]. Le but est de représenter chaque arc par son extrémité finale, son extrémité initiale étant définie implicitement. Tous les arcs émanant d'un même sommet sont liés entre eux dans une liste. A chaque arc sont donc associés le nœud destination et le pointeur au prochain sommet dans la liste (Fig. I.8). On crée deux

tableaux LP(tête de listes) de dimension  $(n + 1)$  et LS (liste de successeurs) de dimension  $m$  (cas orienté) ou  $2m$  (cas non orienté). Pour tout  $i$ , la liste des successeurs de  $i$  est dans le tableau LS à partir de la case numéro LP( $i$ ).

1. On construit LS.
2. On construit LP qui donne pour tout sommet l'indice dans LS où commencent ses successeurs.
3. Pour un sommet  $i \rightarrow 1^{er}$  suivant : LS(LP( $i$ )),  $2^{ème}$  suivant : LS(LP( $i$ ) + 1).

L'ensemble des informations relatives au sommet  $i$  est contenue entre les cases LP( $i$ ) et LP( $i + 1$ ) - 1 du tableau LS.

4. Si un sommet  $i$  n'a pas de successeur, on pose LP( $i$ ) = LP( $i + 1$ ) (liste vide coincée entre les successeurs de  $i - 1$  et ceux de  $i + 1$ ). Pour éviter des tests pour le cas particulier  $i = n$  (le sommet  $i + 1$  n'existant pas), on « ferme » par convention la dernière liste en posant LP( $n + 1$ ) =  $m + 1$ .

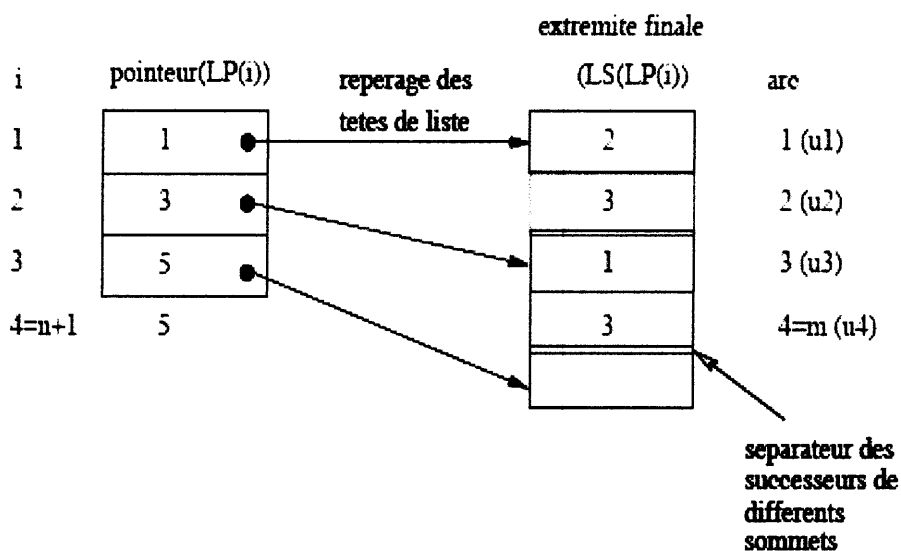
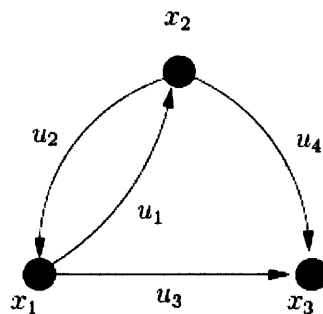


Fig. I.8. Liste d'adjacence d'un graphe.

### I.4.3 Coloration des sommets d'un graphe :

#### Définition 1 :

Soit  $G = (X, U)$  un graphe non orienté. Un sous-ensemble  $S \subset X$  est un ensemble stable (ou plus simplement un stable) s'il ne comprend que des sommets non adjacents deux à deux :

$$\forall i, j \in S \Rightarrow (i, j) \notin U \quad [12].$$

Comme tout sous-ensemble d'un ensemble stable est un ensemble stable, il est naturel de chercher le cardinal maximum d'un ensemble stable (un stable maximal). Ce nombre, noté  $\alpha(G)$ , est le nombre de stabilité.

#### Définition 2 :

La coloration des sommets d'un graphe consiste en une affectation de couleurs à tous les sommets du graphe de telle sorte que deux sommets adjacents ne soient pas porteurs de la même couleur (Fig. I.9).

Le plus petit  $k$  pour lequel  $G$  est  $k$ -colorable est le nombre chromatique de  $G$  noté  $\gamma(G)$  ; le nombre chromatique est donc défini comme le nombre minimum de couleurs distinctes nécessaires à la coloration des sommets de  $G$ . Une  $k$ -coloration des sommets est une partition  $(S_1, S_2, \dots, S_k)$  de l'ensemble des sommets en  $k$  ensembles stables.

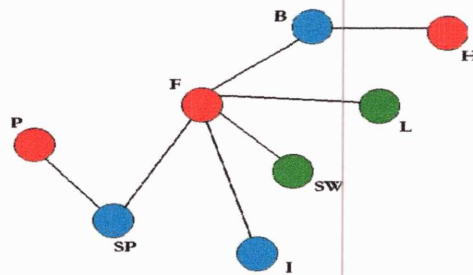


Fig. I.9 Coloration d'un graphe en 3 couleurs

### I.4.4 Connexité dans les graphes :

#### Chaîne – Cycle :

Une chaîne est une séquence d'arcs telle que chaque arc ait une extrémité commune avec le suivant. Un cycle est une chaîne qui contient au moins une arête, telle que toutes les arêtes de la séquence soient différentes et dont les extrémités coïncident.

### Chemin – Circuit :

Ce sont les mêmes définitions que les précédentes mais en considérant des concepts orientés. Le sous-ensemble de sommets atteignables à partir d'un sommet donné, grâce à des chemins, est appelé *fermeture transitive* de ce sommet. Le terme de parcours regroupe les chemins, les chaînes, les circuits et les cycles. Un parcours est :

- élémentaire : si tous les sommets qui le composent sont tous distincts.
- simple : si tous les arcs qui le composent sont tous distincts.
- hamiltonien : passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe.
- eulérien : passe une fois et une seule par chaque arc du graphe.
- préhamiltonien : passe au moins une fois par chaque sommet du graphe.
- prééulérien ou chinois : passe au moins une fois par chaque arc du graphe.

### Connexité :

Un graphe  $G = (X, U)$  est connexe si  $\forall i, j \in X$ , il existe une chaîne entre  $i$  et  $j$ . On appelle composante connexe le sous-ensemble de sommets tels qu'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques (Fig. I.10). Un graphe est connexe s'il comporte une composante connexe maximale et une seule. Chaque composante connexe est un graphe connexe.

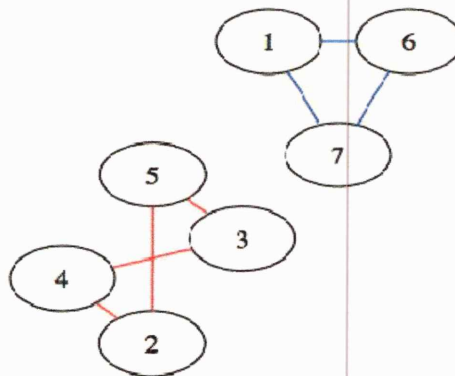


Fig. I.10. Graphe possédant 2 composantes connexes.

### Forte connexité :

Un graphe  $G = (X, U)$  est fortement connexe si  $\forall i, j \in X$ , il existe un chemin entre  $i$  et  $j$ . Une composante fortement connexe (cfc) est un sous-ensemble de sommets tel qu'il existe un chemin entre deux sommets quelconques. Une cfc maximale (cfc<sub>m</sub>) est un ensemble



maximal de cfc. Les différentes cfc définissent une partition de X. Un graphe est fortement connexe s'il comporte une seule cfc.

### **I.5 Conclusion :**

Au cours de ce chapitre, on a vu une définition des réseaux complexes ainsi la définition et les concepts de base de la théorie de graphe utilisé dans la modélisation de ces réseaux. On va voir les modélisations existantes en détail dans le chapitre suivant.

## *Chapitre II*

---

*La modélisation des réseaux complexes  
par la théorie des graphes*

## II.1 Introduction :

La notion de 'graphe' a été utilisée actuellement dans la théorie des graphes. Elle a été introduite en premier au dix-huitième siècle par le mathématicien suisse *Leonhard Euler*, qui a essayé de résoudre le problème du pont de Königsberg. Il est dit qu'approximativement 100 années plus tard, le mathématicien anglais *James J. Sylvester* inventa le mot "graphe" comme nous le savons actuellement.

Ce chapitre présente plusieurs notions de base de la théorie des graphes pour faciliter notre discussion, ainsi les trois modélisations existantes des réseaux complexes.

## II.2 Propriétés d'un graphe :

Dans les différentes études concernant les réseaux complexes et la théorie des graphes, d'autres propriétés du graphe sont étudiées car les définitions précédentes, même si elles donnent une idée du type du graphe, elles ne sont pas suffisantes pour caractériser un réseau. Ci-dessous sont données les définitions de coefficient de regroupement, degré de corrélation et d'augmentation d'un graphe.

**Définition 1 :** (Coefficient de regroupement) [13] Le coefficient de regroupement  $C$  également appelé "*clustering coefficient*" est la probabilité que deux voisins d'un sommet donné soient voisins entre eux. Cela correspond à la densité locale d'un sommet. Soit  $d_i$  le degré d'un sommet  $i$ .

$$c(i) = 2 \times \frac{\text{nombre de liens entre les voisins de } i}{d_i (d_i - 1)} \quad (\text{II.1})$$

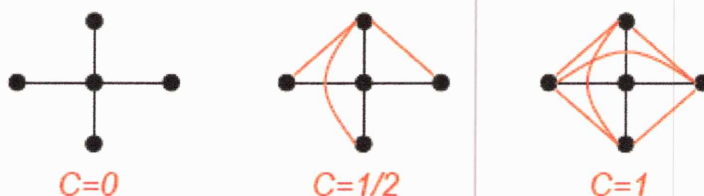


Fig. II.1 Exemples de coefficients de regroupement

Le degré de corrélation se calcule grâce à la moyenne des degrés des voisins d'un nœud. Pour faire simple, cela répond à la question : est-ce que dans un réseau, les sommets ayant un degré élevé sont de préférence connectés à d'autres sommets avec un degré élevé, ou sont plutôt connectés à des sommets ayant un faible degré ? La définition 2 permet de formaliser cette propriété.

**Définition 2** :(degré de corrélation) [14] degré moyen des voisins d'un sommet  $i$  (avec arêtes pondérées) :

$$k_{nn,i} = \frac{1}{k_i} \sum_j a_{ij} k_j \tag{II.2}$$

Degré de corrélation d'un graphe :

$$k_{nn}(k) = \frac{\sum_i \delta(k_i - k) k_{nn,i}}{\sum_i \delta(k_i - k)} \tag{II.3}$$

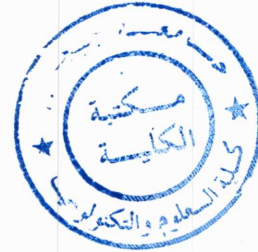
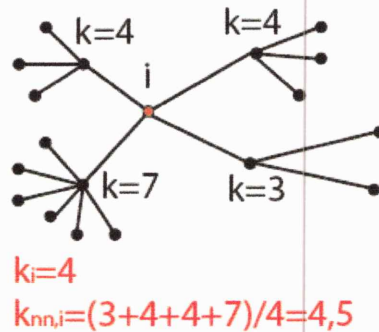


Fig. II.2 Exemple du degré de corrélation d'un sommet  $i$

On peut remarquer deux cas distincts quant au comportement assortatif (degré de corrélation) de  $k_{nn}(k)$ . Dans le cas où  $k_{nn}(k)$  est croissant, on observe que les nœuds fortement connectés sont reliés aux nœuds fortement connectés. Cette caractéristique s'observe, par exemple, dans les réseaux sociaux (popularité). En revanche, dans le cas où  $k_{nn}(k)$  est décroissant, on observe que les nœuds fortement connectés sont reliés aux nœuds faiblement connectés, ce qui engendre une structure hiérarchique. Internet est un réseau qui possède cette caractéristique.

**Définition 3 :**(Graphe augmenté) [15] Un graphe augmenté  $G = (V, E, E')$  est un graphe obtenu à partir d'un graphe  $H = (V, E)$ , en ajoutant un ensemble d'arêtes supplémentaires  $E'$  sur  $V$ . La distance sous-jacente de  $u$  à  $v$  dans  $G$  est la distance de  $u$  à  $v$  dans  $H$ .

D'autres propriétés moins connues et à priori non exploitées existent comme l'excentricité d'un sommet qui est la distance maximum de ce sommet aux autres sommets, et le rayon qui est la plus petite des excentricités. Dans le cas orienté, il faut distinguer excentricités entrantes et sortantes et, de ce fait, rayons entrants et sortants (le diamètre n'est pas sujet à ces différences).

La centralité de degré (la plus simple) considère le degré (pour un graphe non orienté, le demi-degré intérieur ou extérieur pour un graphe orienté) d'un nœud : c'est-à-dire le nombre de connexions directes irriguant ce nœud. Un nœud est d'autant plus central qu'il est directement lié à un grand nombre de nœuds. La centralité de degré mesure (localement) la capacité d'un nœud à communiquer, indépendamment de la centralité des nœuds auxquels il est directement lié. Or, intuitivement, un nœud lié à  $n$  nœuds périphériques n'est pas aussi central que celui qui est lié à  $n$  nœuds, eux-mêmes centraux. Un nœud à la périphérie dépend des intermédiaires (plus centraux) pour sa communication avec les autres. Il ne contrôle pas sa communication [16].

Pour finir, on analyse souvent la distribution des degrés des sommets d'un graphe (Fig. II.3). Deux distributions de degrés sont connues :

- une distribution homogène des degrés des nœuds (selon une loi de Poisson).
- une distribution hétérogène des degrés des nœuds (selon une loi de Puissance).

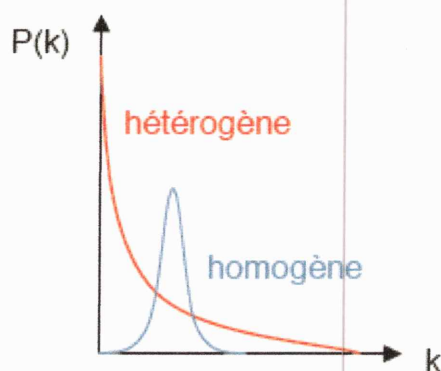


Fig. II.3. Courbes de distribution des degrés d'un graphe.

Les graphes dont la distribution des degrés suit une loi de puissance ( $p_k \propto k^{-\alpha}$ ) se retrouvent être la modélisation de la plupart des réseaux réels [17] comme le *World Wide Web*, *Internet*, les réseaux *biologiques* ou encore *téléphoniques*. La figure II.4 donne la distribution des degrés d'un réseau d'acteurs, du World Wide Web, et d'un réseau électrique.

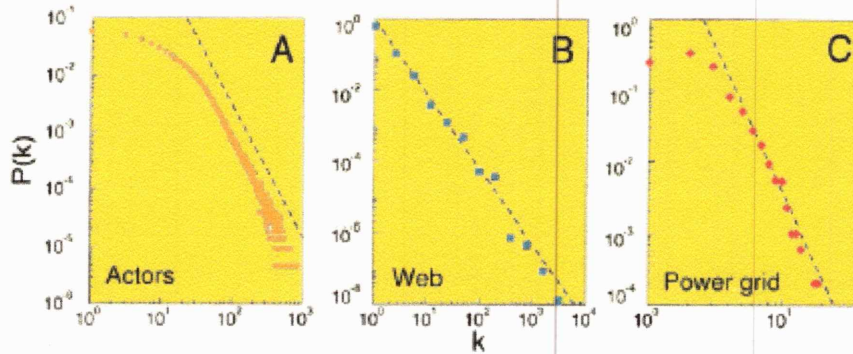


Fig. II.4. Distribution des degrés de réseaux réels.

### II.3 Structure & dynamique des graphes :

L'étude conjointe des propriétés macroscopiques de différents types de réseaux contient plusieurs problématiques. Pour donner un sens à une propriété observée sur plusieurs ensembles de données statistiques, il faut s'assurer de sa pertinence. En particulier, il faut garantir que la méthode de collecte des données n'est pas biaisée et que la propriété est spécifique, c'est-à-dire qu'on ne l'observe pas sur tout ensemble de données arbitraire, ou aléatoire uniforme. Une fois qu'une propriété pertinente est isolée se pose la question de son apparition dans le réseau : est-ce dû à un processus dynamique de construction du réseau ? Comment peut-on la reproduire ? Révèle-t-elle un principe général sous-jacent ? Les réponses à ces questions peuvent avoir des applications intéressantes si la propriété présente un avantage pratique (on peut par exemple penser aux mécanismes de diffusion de rumeurs dans un réseau social pour une entreprise).

La structure d'un réseau peut être analysée en utilisant les définitions et propriétés liées aux graphes. La plupart des études sur les réseaux complexes se servent de propriétés globales du réseau pour en déterminer la nature. Le problème est que la dynamique du réseau a son rôle à jouer également. En effet, nous verrons, par la suite, que la structure d'un réseau ne suffit pas pour le caractériser de façon certaine. Le côté dynamique d'un réseau est souvent mis de côté, hors, c'est en couplant structure et dynamique que l'on pourra caractériser de

manière précise un réseau. Certains articles traitent de la partie dynamique par l'étude d'algorithmes de routage, de navigabilité ou de construction de réseau.

Voici les trois principales propriétés qui ont été observées expérimentalement [18] :

- le diamètre.
- la distribution des degrés.
- la densité locale (ou coefficient de regroupement).

### **II.3.1 Diamètre :**

Le diamètre d'un réseau est le plus long des plus courts chemins entre deux entités, ou nœuds, du réseau, via ses connexions. Dans l'étude des grands réseaux d'interactions, il est souvent fait référence à un petit diamètre pour décrire l'observation d'une petite distance moyenne, le diamètre étant généralement trop coûteux à obtenir (puisque'il s'agit du pire des cas). Dans de nombreux réseaux d'interactions, la distance moyenne observée est, de façon surprenante, de l'ordre du logarithme du nombre total de nœuds, alors que le nombre de connexions, ou liens, reste très inférieur au carré du nombre de nœuds. Si les chemins sont très courts par rapport à la densité de liens des réseaux, la pertinence de cette propriété peut toutefois être remise en cause lorsque l'on remarque qu'un réseau aléatoire uniforme, où chaque paire de nœuds est reliée indépendamment avec une probabilité fixée, présente également un diamètre logarithmique en son nombre de nœuds lorsque le nombre d'arêtes est très faible (de l'ordre de  $n \log(n)$  pour  $n$  nœuds) [13].

### **II.3.2 Distribution des degrés :**

Le modèle usuel utilisé au départ pour ce domaine d'étude était un réseau aléatoire uniforme, sur lequel on observe un effet de seuil pour la transmission d'un virus, c'est-à-dire qu'en dessous d'une fraction d'individus infectés, le virus cesse de se répandre. Mais une étude similaire menée sur un modèle présentant une distribution de degrés en loi de puissance a donné des résultats différents, en particulier l'effet de seuil disparaît. Une telle observation a donc remis en cause les mécanismes mis en place pour freiner la propagation des virus et les modèles utilisés jusqu'alors. Des modèles suivant une loi de puissance sont dorénavant utilisés, car c'est cette distribution qui est retrouvée la plupart du temps dans tous les réseaux réels [19].

Toutefois la pertinence de la loi de puissance comme propriété caractéristique a été mise en doute, en mettant en évidence un risque de biais lié à la méthode de collecte des données. En parcourant un réseau aléatoire uniforme selon un processus similaire à celui utilisé pour les parcours expérimentaux du réseau des routeurs Internet (le parcours par trace-route à partir d'un faible nombre de sources), on obtient des données statistiques présentant une distribution des degrés suivant une loi de puissance. Il est pourtant connu que le réseau aléatoire uniforme présente une distribution des degrés suivant une loi de Poisson [20]. Cette étude souligne le risque de baser la construction de modèles sur une propriété qui pourrait n'être qu'un biais de la mesure expérimentale.

### II.3.3 Densité locale :

On parle de forte densité locale d'un réseau lorsque les voisins d'un même nœud sont très reliés entre eux. Toutefois, cette propriété semble encore mal définie par le coefficient de regroupement. Il est en effet possible de construire des réseaux ayant un fort coefficient de regroupement alors que, les nœuds n'ont pas de voisins reliés entre eux. Sur la figure II.5, le coefficient de regroupement vaut environ  $1/2$  alors que  $n/2$  nœuds sont disposés en chaîne et n'ont aucun de leurs voisins reliés entre eux.

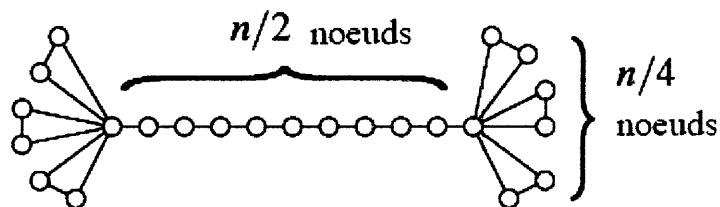


Fig. II.5 Exemple de biais du coefficient de regroupement.

## II.4 Modélisations existantes : graphes aléatoires, invariance d'échelle et petits-mondes :

### II.4.1 L'expérience de Milgram :

*Stanley Milgram* était un psychologue américain dont les recherches ont été menées sur de nombreux fronts. Milgram reprend une idée développée par *Frigyes Karinthy*, écrivain



hongrois, qui est l'inventeur du concept des six degrés de séparation, dans sa nouvelle « Chaînes » de 1929. Cette théorie dit que chacun d'entre nous sur la planète peut être connecté à une autre personne en suivant une chaîne de connaissances ne contenant pas plus de six intermédiaires [4].

Dans sa première expérience décrite dans un article appelé « Results of Communication Project », Milgram envoie soixante lettres à différents volontaires à Omaha dans le Nebraska, à qui il fut demandé de faire suivre les lettres à un agent de change vivant dans le Massachusetts. Les participants ne pouvaient faire transiter les lettres que de main à main à des personnes qu'ils jugeaient le plus susceptible de connaître la personne cible (directement ou par le biais de connaissances). Avec cinquante personnes relevant le challenge, seules trois lettres arrivèrent à destination. L'article de Milgram [4] de 1967 explique que l'une des lettres a atteint sa cible en quatre jours seulement, mais l'auteur n'a pas mentionné que seul 6% des lettres ont réussi à atteindre leur but.

Dans deux expériences ultérieures, la réussite de construction de chaîne était si faible que les résultats n'ont jamais été publiés. Pour expliquer cela, des chercheurs ont montré que nombre de facteurs secondaires peuvent affecter les résultats de ces expériences. Des études qui ont essayé de connecter des personnes de différentes couleurs ou origines ont montré de significative asymétrie. Evidemment, l'article révélant que le taux de réussite d'une telle expérience était de 13% pour des personnes cibles noires et de 33% pour des personnes cible blanches (en dépit du fait que les participants n'aient pas su la couleur de la personne cible) fut coécrit par Milgram lui-même.

Malgré ces complications, une variété de nouvelles découvertes a émergé des recherches de Milgram. Après de nombreux affinements du mécanisme de l'expérience (la valeur perçue de la lettre qui influençait le comportement des participants dans leur motivation à la transmettre ou pas), Milgram fut capable de pousser le taux de réussite à 35%, et plus tard, d'autres chercheurs poussèrent même le résultat à 97%. S'il y avait peu de certitudes pour que le monde entier soit un small-world, il y avait en revanche beaucoup de chance que le monde entier soit composé de plusieurs small-worlds. Pour toutes les chaînes qui ont réussi à faire transiter la lettre jusqu'à la cible, le nombre six émergea, étant la moyenne du nombre de personnes intermédiaires nécessaires. Ainsi, l'expression des « six degrés de séparation » était née (Fig. II.6). De plus, Milgram identifia un effet « entonnoir » car le plus grand nombre de transits était souvent fait par un faible nombre de personnes,

ayant une connectivité supérieure à la moyenne : même dans l'expérience avec 6% de réussite, Milgram avait noté que deux sur trois des chaînes avait été complétées par les mêmes personnes.

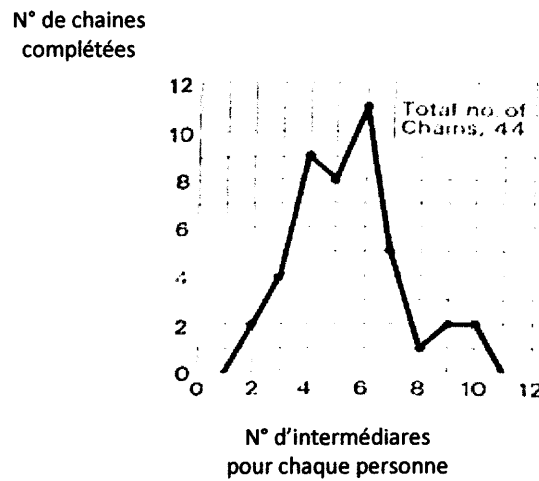


Fig. II.6 Les six degrés de séparation de Milgram.

## II.4.2 Les graphes aléatoires :

### II.4.2.1 Le modèle d'Erdos et Rényi :

La définition d'un des tous premiers modèles théoriques de réseau a été établie en 1959 par Paul Erdos et Alfred Rényi [21]. Ce modèle minimaliste consiste en un ensemble de  $n$  nœuds reliés par des arêtes qui sont placées de manière aléatoire uniforme entre des paires de nœuds. Erdos et Rényi ont donné plusieurs versions de leur modèle. Le plus communément étudié est celui dénommé  $G_{n,p}$  où chaque arête entre deux nœuds est indépendamment présente avec une probabilité  $p$  et absente avec une probabilité  $1-p$ . Souvent, la caractéristique d'un graphe  $G_{n,p}$  n'est pas exprimée en fonction de  $p$  mais plutôt en fonction du degré moyen  $z$  des nœuds. Le nombre moyen d'arêtes est  $\frac{1}{2} n(n-1)p$  et le nombre moyen de connexion correspond à 2 fois ce résultat puisque que chaque arête a deux extrémités. On peut donc en déduire le degré moyen des nœuds :

$$z = \frac{n(n-1)p}{n} = (n-1)p \approx np \tag{II.3}$$

L'approximation  $np$  est d'autant plus précise que  $n$  est grand. Ainsi, une fois que l'on connaît  $n$ , chaque propriété exprimable en fonction de  $p$  peut l'être également en fonction de

z. Le modèle d'Erdos et Rényi possède plusieurs propriétés intéressantes. Par exemple, une caractéristique intéressante démontrée dans les papiers originaux de l'époque est qu'une phase de transition apparaît en fonction de z, ce qui provoque la formation d'une composante géante (Fig. II.7) [22].

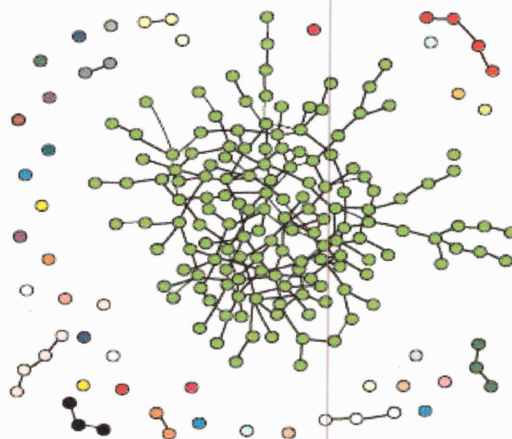


Fig. II.7 Exemple de graphe aléatoire  $G_{n,p}$  avec sa composante géante au centre.

Une composante est un sous-ensemble de nœuds du graphe qui s'avère être un sous graphe connexe (c'est-à-dire que tous les nœuds sont connectés entre eux par au moins un chemin). Pour des petites valeurs de z, quand il y a peu de nœuds dans le graphe, on constate que la plupart des nœuds ne sont pas connectés entre eux, et que les composantes sont petites, avec une taille moyenne qui reste constante au fur et à mesure que le graphe augmente en taille. Cependant, il y a une valeur critique de z à partir de laquelle la plus grosse des composantes du graphe contient une fraction finie S du nombre total de nœuds, sa taille ns augmentant linéairement avec la taille du graphe entier. Cette composante est la composante géante. En général, en plus de celle-ci, il y a d'autres composantes, mais elles restent petites, ayant une taille moyenne qui reste constante au fur et à mesure que le graphe s'agrandit. La phase de transition à laquelle la composante géante se forme se déclenche à  $z = 1$  [23] (Fig. II.8).

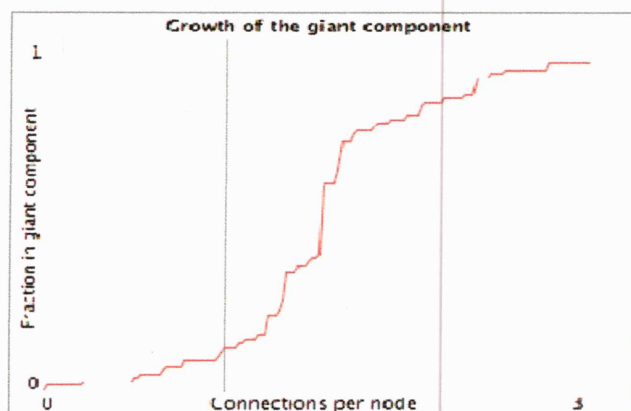


Fig. II.8 Phase de transition de formation de la composante géante dans un graphe aléatoire  $G_{n,p}$ .

La formation d'une composante géante dans un graphe aléatoire fait penser au comportement de nombreux réseaux réels. Par exemple, un réseau social où les gens ont connectés, est très dense et possède probablement une composante géante. Pourtant, les graphes aléatoires diffèrent des réseaux réels sur de nombreux points. Deux différences notables ont été remarquées par Strogatz [7] et par Albert et Barabasi [24].

Premièrement, les réseaux réels montrent de forts coefficients de regroupement (clustering) [13] alors que ce n'est pas le cas pour le modèle d'Erdos et Rényi. En effet, dans ce modèle, les probabilités qu'une paire de nœuds soit connectées par une arête sont indépendantes, il y a donc pas de différence au niveau probabilité de connexion entre deux nœuds ayant un voisinage commun et deux nœuds n'en ayant pas. Cela signifie que le coefficient de regroupement pour un graphe aléatoire est tout simplement égal à  $C = p$  ou de manière équivalente  $C = z/n$ . La comparaison de coefficients de regroupement entre graphes aléatoires et réseaux réels se trouve sur la figure II.9.

Comme on peut le constater, la correspondance du coefficient de regroupement entre réseaux réels et graphes aléatoires n'est pas bonne. Les graphes aléatoires ne reproduisent donc pas cette propriété importante des réseaux réels. La seconde chose qui diffère entre les réseaux réels et les graphes aléatoires est la distribution de leur degré [24]. La probabilité  $p_k$  qu'un nœud dans un graphe aléatoire possède un degré égal à  $k$  est donnée par la distribution binomiale suivante :

$$p_k = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \quad (\text{II.4})$$

Quand  $n \gg kz$ , on obtient :

$$p_k = \frac{z^k e^{-z}}{k!} \quad (\text{II.5})$$

qui s'avère être la distribution de Poisson (homogène). Quand on regarde la distribution de réseaux réels (Fig. II.3), on peut aisément remarquer qu'elle ne correspond pas du tout à une distribution de Poisson (Fig. II.2) mais bien à une distribution suivant une loi de puissance.

[24] On peut donc en conclure que le graphe aléatoire d'Erdős et Rényi n'est pas un modèle permettant de représenter les réseaux réels.

network	n	z	clustering coefficient C'	
			measured	random graph
Internet (autonomous systems)	6 374	3.8	0.24	0.00060
World-Wide Web (sites)	153 127	35.2	0.11	0.00023
power grid	4 941	2.7	0.080	0.00054
biology collaborations	1 520 251	15.5	0.081	0.000010
mathematics collaborations	253 339	3.9	0.15	0.000015
film actor collaborations	449 913	113.4	0.20	0.00025
company directors	7 673	14.4	0.59	0.0019
word co-occurrence	460 902	70.1	0.44	0.00015
neural network	282	14.0	0.28	0.049
metabolic network	315	28.3	0.59	0.090
food web	134	8.7	0.22	0.065

Fig. II.9 Comparaison du coefficient de regroupement entre réseaux réels et graphes aléatoires.

### II.4.2.2 Les graphes aléatoires généralisés :

Il existe une classe de graphes proches des graphes aléatoires d'Erdos et Rényi à la seule différence que le degré de distribution des nœuds ne suit pas forcément une loi de Poisson. On peut, en théorie, lui faire suivre n'importe quelle loi de distribution. Abordée en premier lieu par Bender et Canfield en 1978 [25], la généralisation de ces graphes a été formalisée en 1995 par Molloy et Reed [26].

La méthode de construction de base est de se tenir à une séquence de degré spécifique, c'est-à-dire à un ensemble  $\{k_i\}$  de degrés des nœuds  $i = 1, \dots, n$ . En fait, cet ensemble sera choisi de manière à ce que la fraction de nœuds ayant comme degré  $k$  tende vers la distribution de degrés désirée  $p_k$  au fur et à mesure que  $n$  augmente. Une fois que chaque nœud possède sa séquence de degré, la méthode pour générer le graphe est la suivante : on donne à

chaque nœud  $i$  un nombre  $k_i$  de "points de connexion" (un point de connexion correspond à l'extrémité d'une arête), et on choisit des paires de ces points de connexion de manière aléatoire uniforme pour joindre les arêtes. Quand tous les points de connexion ont été utilisés, le graphe résultant est un membre choisi de façon aléatoire parmi l'ensemble des graphes possédant la séquence du degré désiré.

Plus récemment, une classe générale de graphes encore plus large intitulée « modèles de graphes aléatoires non-homogènes » a été formalisée par SÖderberg en 2002 [27]. Ces graphes sont construits en imposant un type de structure aux nœuds. Les modèles de cette classe ne sont pas restreints au seul choix de la distribution du degré, cependant, une infinité de modèles existe pour chaque type de distribution. Ces modèles peuvent, dans certains cas, correspondre à certains types de réseaux dynamiques, même si leur défaut majeur est le côté artificiel de leur génération.

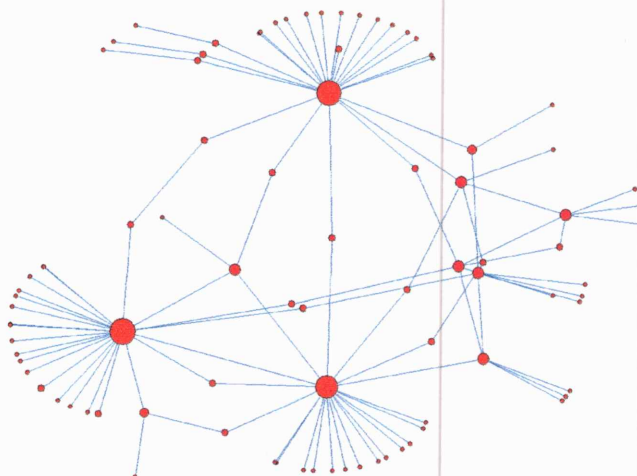


Fig. II.10 Graphe aléatoire généralisé de Molloy & Reed suivant une loi de puissance.

### II.4.3 Modèle d'Albert et Barabasi « scale free » :

La première personne à introduire les réseaux à invariant d'échelle (scale-free networks) fût Price en 1965. Il mena une étude à propos des citations d'articles scientifiques, en étudiant les degrés entrants (nombres de fois qu'un papier a été cité) et sortants (nombre de papiers cités par un autre papier), il découvrit une distribution suivant une loi de puissance, ce qui fût l'objet d'un article [28]. En fait, cela correspondait au fait que plus le degré d'un élément est élevé, plus ce degré augmente. Price appela cette propriété *avantage cumulatif*.

Cette appellation est maintenant connue sous le terme attachement préférentiel, introduit par Albert et Barabasi en 1999 [24]. L'idée de Price était que le nombre de citations reçues par un papier était proportionnel au nombre de citations qui le désignaient auparavant. On peut noter le même comportement pour d'autres réseaux comme par exemple le World Wide Web.

Le modèle d'Albert et Barabasi (Fig. II.11) est le même que celui de Price à la différence près que les arêtes d'Albert et Barabasi sont non orientées. Dans un réseau de citations par exemple, le fait que les arêtes soient non orientées fait perdre une information cruciale au réseau. Mais d'un autre côté, cette caractéristique permet d'éviter le problème de Price de savoir comment un papier reçoit sa première citation (ou un site Web son premier lien). Chaque nœud dans le graphe apparaît avec un degré initial  $m$ , donc avec une probabilité non nulle de recevoir de nouveaux liens. La probabilité qu'un nouveau nœud « s'attache » à un nœud de degré  $k$  est :

$$\frac{k p_k}{\sum_k k p_k} = \frac{k p_k}{2 m} \quad (\text{II.6})$$

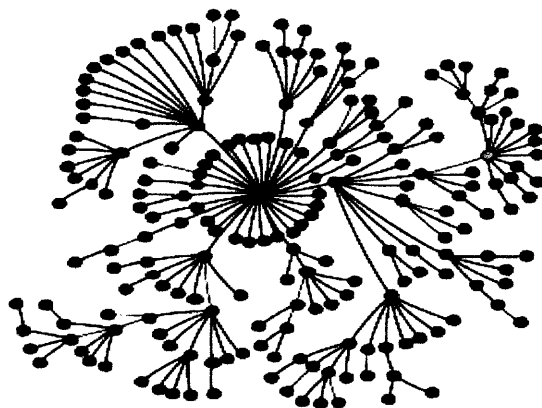


Fig. II.11 Graphe construit suivant le modèle d'attachement Préférentiel d'Albert et Barabasi.

La somme du dénominateur est égale au degré moyen du réseau, qui est  $2m$ , puisqu'il y a  $m$  arêtes ajoutées pour chaque nœud ajouté, et comme celles-ci sont non orientées, chacune d'elle possède deux extrémités incrémentant les degrés des nœuds connectés. A partir de là, le nombre moyen de nœuds de degré  $k$  qui gagne une connexion d'arête quand un nouveau nœud ayant  $m$  arêtes est ajouté est :  $m \times k p_k / 2m = \frac{1}{2} k p_k$  (indépendamment de  $m$ ). Le nombre  $n p_k$  de nœuds de degré  $k$  décroît ainsi suivant ce même résultat, alors que les nœuds

qui gagnent de nouvelles arêtes deviennent des nœuds de degré  $k + 1$ . Le nombre de nœuds de degré  $k$  augmente également à cause de l'afflux des nœuds qui étaient précédemment de degré

$k - 1$  et qui venaient juste d'acquérir une nouvelle arête (sauf les nœuds de degré  $m$ , qui ont un afflux d'exactly 1). Soit  $p_{k,n}$  la valeur de  $p_k$  avec un graphe à  $n$  nœuds alors le comportement du réseau en fonction de  $np_k$  par nœud ajouté est :

- pour  $k > m$  :

$$(n + 1)p_{k,n+1} - np_{k,n} = \frac{1}{2}(k - 1) p_{k-1,n} - \frac{1}{2}kp_{k,n} \tag{II.7}$$

- pour  $k = m$  :

$$(n + 1)p_{m,n+1} - np_{m,n} = 1 - \frac{1}{2}mp_{m,n} \tag{II.8}$$

- pour  $k < m$  : aucun nœud n'est ajouté

Si l'on regarde les solutions de  $p_{k,n+1} = p_{k,n} = p_k$ , on obtient les équations suivantes :

$$p_k = \begin{cases} \frac{1}{2}k - 1 p_{k-1} - \frac{1}{2}k p_k & \text{pour } k > m \\ 1 - \frac{1}{2}mp_m & \text{pour } k = m \end{cases} \tag{II.9}$$

Ainsi, voici ce qu'obtiennent Albert et Barabasi :

$p_m = 2/(m + 2)$  et  $p_k = p_{k-1}/(k + 2)$ , soit :

$$p_k = \frac{(k - 1)(k - 2) \dots m}{(k + 2)(k + 1) \dots (m + 3)} \tag{II.10}$$

$$p_m = \frac{2m(m + 1)}{(k + 2)(k + 1)k} \tag{II.11}$$

Aux limites d'un grand  $k$ , cela donne une distribution suivant une loi de puissance  $p_k \sim k^{-3}$ , avec un exposant  $\alpha = 3$ .



Un élément crucial de ce modèle est l'hypothèse que l'attachement préférentiel est linéaire. A priori, on peut le remarquer de manière empirique, mais aucune preuve formelle n'a été élaborée. Un grand nombre d'études concernant le modèle d'Albert et Barabasi ont été menées, ce qui aurait été impossible trente ans plus tôt. Ce modèle a attiré beaucoup d'attention dans la littérature. En plus des études analytiques proposées, un bon nombre d'auteurs ont suggéré des modifications ou des extensions du modèle, qui altèrent son comportement ou qui le rendent un peu plus réaliste vis à vis des réseaux réels, car même si ce modèle paraît pertinent, nous obtenons un modèle de réseau sous forme d'arbre, alors que les réseaux du réel n'arborent presque jamais cette forme.

#### II.4.4 modèle petit monde (Small world) de Watts & Strogatz :

Watts et Strogatz ont proposé un modèle en 1998 [13] qui peut être décrit comme suit : c'est un graphe régulier dans lequel les arêtes originales ont été remplacées comme des arêtes aléatoires suivant une probabilité  $0 \leq \phi \leq 1$ . Ils découvrirent que le fait de rediriger quelques arêtes transforme le réseau (graphe régulier), à partir d'un certain seuil [29], en Small world (Fig. II.12), ayant des chemins courts entre deux nœuds (comme pour la composante géante des graphes aléatoires).

Bien que le réseau soit bien plus regroupé qu'un réseau aléatoire, c'est-à-dire que si A est relié à B et B est relié à C, il y a une bien plus grande probabilité que A soit également relié à C (une propriété appelée par les sociologues transitivity). Watts et Strogatz ont conjecturé que ces deux propriétés (courts chemins et fort regroupement) étaient observées dans de nombreux réseaux naturels et technologiques. Leur intuition était que des chemins courts pourraient fournir des canaux de communication rapides entre deux parties éloignées dans le système, facilitant ainsi les processus dynamiques (comme la synchronisation ou le calcul) qui requiert une coordination globale ainsi que des flux d'informations.

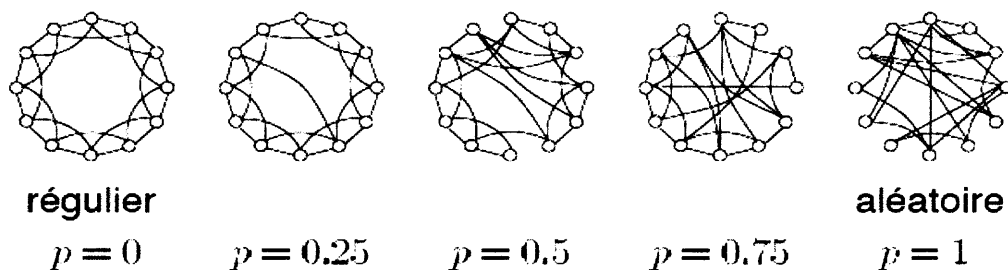
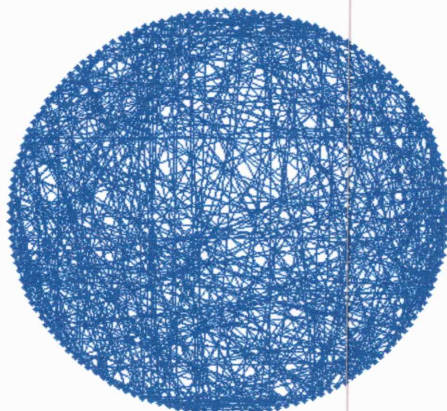


Fig.II.12 Model Small-World de Watts & Strogatz

**Exemple:**Fig. II.13 Réseau petit monde avec 150 nœuds et  $p = 0.05$ .

De nombreux exemples de réseaux Small-world ont été étudiés, dans des domaines allant de la biologie aux études de commerce. D'un point de vue théorique, les réseaux small-world sont utilisés de façon différente selon qu'il s'agit de problèmes différents et de scientifiques venant de disciplines différentes. En informatique, les chercheurs se sont posés des questions à propos des algorithmes et de la complexité de ces small-world. Les épidémiologistes se sont demandés comment le regroupement local de nœuds et les contacts globaux influencent la diffusion de maladie infectieuse. Les neurobiologistes se sont interrogés sur l'évolution significative d'une architecture neuronale small-world. Néanmoins, le modèle original proposé par Watts et Strogatz pose quelques problèmes. Le fait que seulement une seule des extrémités d'une arête soit redirigée, qu'aucun nœud ne puisse être connecté à lui-même, et qu'une arête ne soit jamais ajoutée entre des paires de nœuds où il en existe déjà une, rend difficile l'énumération ou le calcul de moyenne sur l'ensemble du graphe.

Il existe une variante intéressante de ce modèle proposé par Newman, Moore, et Watts [30]. Sous cette variante, le modèle est créé à partir d'un anneau de  $n$  nœuds, chacun connecté par des arêtes à ses voisins jusqu'à une distance de  $k$  (ce type de graphe est également appelé graphe régulier de degré  $k$ ). Au lieu de les rediriger, des arêtes servant de « raccourcis » sont ensuite ajoutées entre des paires de nœuds choisis de manière aléatoire suivant une probabilité  $\phi$  pour chaque arête, ce qui donne  $nk\phi$  raccourcis dans le graphe (Fig. II.14).

La question est : en moyenne, combien d'étapes sont nécessaires pour aller d'un nœud à l'autre en passant par le chemin le plus court ? Si on note  $L$  l'écart moyen entre deux nœuds, on observe que  $L$  diminue considérablement quand  $\phi$  est proche de 0, confirmant ainsi qu'un

petit nombre de raccourcis rétrécit énormément le « monde ». Un des résultats les plus frappants est la formule suivante dérivée par Newman, Moore, et Watts [30] :

$$l = \frac{n}{k} f(nk\phi) \quad (\text{II.12})$$

Avec :

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2x}} \tanh^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x}} \quad (\text{II.13})$$

Cette solution est asymptotiquement exacte aux limites  $n \rightarrow \infty$  (système de grande taille),  $nk\phi \rightarrow \infty$  ou  $nk\phi \rightarrow 0$  (grand nombre ou petit nombre de raccourcis).

Cette version du modèle possède une propriété intéressante : aucun nœud n'est déconnecté du reste du réseau, ainsi, la distance moyenne nœud à nœud reste toujours finie (graphe connexe). Ces deux modèles, l'original et sa variante, ont été longuement étudiés dans la littérature physique et mathématique.

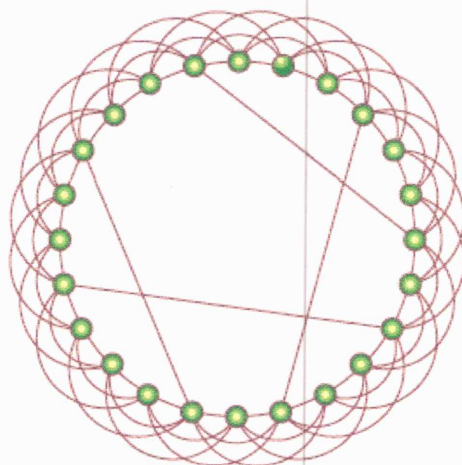


Fig. II.14 Variante du modèle Small-World de Watts et Strogatz.

#### II.4.4.1 Coefficient de regroupement :

Pour les deux modèles présentés, le coefficient de regroupement peut être calculé [31] pour la version originale :

$$c = \frac{3(k-1)}{2(k-1)} (1-p)^3 \quad (\text{II.14})$$

Ainsi que pour sa variante :

$$c = \frac{3(k-1)}{2(k-1) + 4kp(p+2)} \quad (\text{II.15})$$

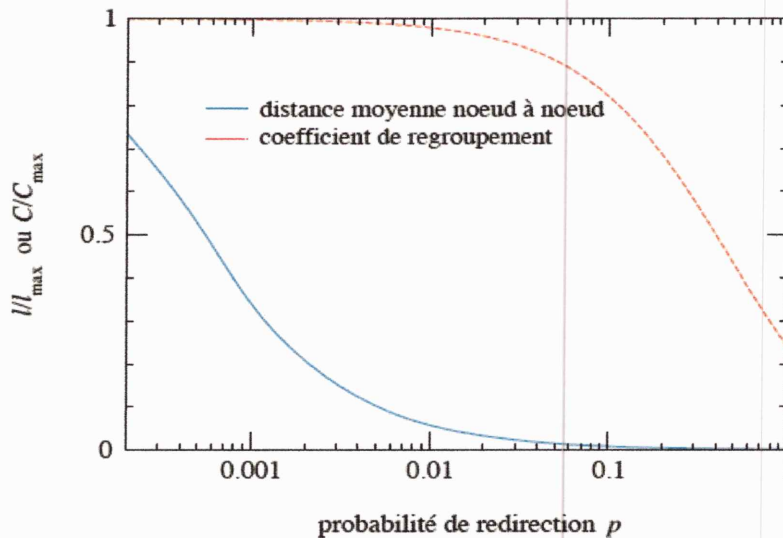


Fig. II.15 Coefficient de regroupement  $C$  et longueur moyenne nœud à nœud  $L$  en fonction de  $p$  du modèle Small World Watts et Strogatz.

#### II.4.4.2 Distribution des degrés :

La distribution des degrés du modèle small-world ne correspond pas à la plupart des réseaux réels [32]. Pour la version où on ne redirige pas les arêtes, chaque nœud possède un degré d'au moins  $2k$ , (idem pour les arêtes du graphe régulier sous-jacent), ainsi qu'une distribution binomiale du nombre de raccourcis.

Pour la version avec les arêtes redirigées, la distribution des degrés devient plus compliquée et s'approche plus de  $k$  que de  $2k$ .

En cherchant à reproduire à la fois le petit diamètre présent dans les graphes aléatoires uniformes et le fort coefficient de regroupement présent dans les grilles régulières, Watts et Strogatz ont eu l'idée d'introduire une part d'aléatoire sur un réseau régulier et ils ont obtenu les deux propriétés simultanées pour un assez grand intervalle de valeurs du paramètre  $p$ . Toutefois, ce modèle ne présente pas la propriété dynamique de navigabilité. Précisément, Kleinberg [33] a montré que tout algorithme de routage décentralisé calcule, entre deux nœuds de ce graphe, un chemin de longueur au moins polynomiale en  $n$ . Cela signifie que, même lorsque le paramètre  $p$  donne naissance à des chemins poly logarithmiques en  $n$  entre

toute paire de nœuds, il n'existe pas d'algorithme qui puisse les découvrir en n'ayant qu'une vue locale du graphe, ce qui rend les travaux d'analyse sur ces modèles très délicats.

### **II.5 Conclusion :**

La modélisation mathématique est une phase importante lors de l'étude des systèmes, tout au long de ce chapitre, un bon nombre de modèles de réseaux complexes, basés sur la théorie des graphes, a été présenté, de manière plutôt chronologique. La question de la correspondance réseaux réels - réseaux modélisés reste cependant sans réponse satisfaisante.

## *Chapitre III*

---

### *Le contrôle des réseaux complexes*

### III.1 Introduction :

Un des buts principaux pour l'étude de topologie du réseau complexe et la modélisation est de comprendre l'influence de structure du réseau sur sa fonction, et par conséquent pour trouver les chemins efficaces d'améliorer la performance du réseau. Dans la pratique, le contrôle direct de chaque nœud dans un réseau dynamique avec un nombre énorme de nœuds peut être impossible mais peut être aussi inutile.

Ce chapitre discute les conditions de stabilité des réseaux dynamiques complexes pour une synchronisation complète, et enfin nous étudions un réseau complexe dynamique et le stabilisé on utilisant le contrôle prédictif.

### III.2 Les conditions de stabilité pour une synchronisation complète des réseaux dynamiques complexes :

Considérant le réseau complexe qui consiste en N nœud linéairement identiques de système dynamique n-dimensionnel décrits par :

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t), t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma(x_j(t) - x_i(t)), \quad i=1, \dots, N \quad (\text{III.1})$$

Où,  $\Gamma$  est la matrice des variables associées

#### Définition 1 :

La fonction  $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  augmente si  $(x - y)^T (\phi(x, t) - \phi(y, t)) > 0$  pour tous  $x, y, t$ .

#### Définition 2 :

La fonction  $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est uniformément croissante s'il existe  $c > 0$  pour tous  $x, y, t$ .

$$(x - y)^T (\Phi(x, t) - \Phi(y, t)) \geq c \|x - y\|^2$$

#### Définition 3 :

Donnant une matrice carrée  $V$ , La fonction  $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est  $V$ -uniformément croissante si  $V\phi$  est uniformément croissante.

**Définition 4 :**

La fonction  $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est  $V$ -uniformément croissante si  $-\phi$  est  $V$ -uniformément croissante.

**Définition 5 :**

La fonction  $f(x, t)$  est continue à  $x$  avec la constante  $l_c^f$  si  $\|f(x, t) - f(y, t)\| \leq l_c^f \|x - y\|$  pour tous  $x, y, t$ .

**Définition 6 :**

Si  $f(x, y)$  est  $V$ -uniformément croissante pour une matrice  $V$  symétrique et positive, alors  $\dot{x} = f(x, t) + n(t)$  est asymptotiquement stable pour tout  $n(t)$ , dans le sens où  $\|x - y\| \rightarrow 0$  comme  $t \rightarrow \infty$  où  $\dot{x} = f(x, t)$ ,  $x(t_0) = x_0$  et  $\dot{y} = f(y, t)$ ,  $y(t_0) = y_0$ .  
Par conséquent,  $\dot{e} = f(x, t) - f(y, t)$ ,  $e(t_0) = x_0 - y_0$  est asymptotiquement stable.

**Définition 7 :**

Supposant que  $f(x, t)$  est continue à  $x$  avec la constante  $l_c^f > 0$  et  $V$ -symétrique et positive. si  $\alpha > l_c^f / \lambda_{\min}(V) > 0$  où  $\lambda_{\min}$  est la plus petite valeur de  $V$ , alors  $\dot{x} = f(x, t) - \alpha V$  est asymptotiquement stable.

**Définition 8 :**

Une matrice  $A$  est réductible si il existe s'il existe une matrice de la permutation  $p$  comme  $PAP^T$  est de la forme  $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ , où  $B$  et  $D$  sont des matrices carrés. La matrice  $A$  est irréductible si ce n'est pas réductible.

**Définition 9 :**

- $M_1$  est la classe des matrices tel que leur ligne  $i$  consistent en zéros exception d'une entrée  $\alpha_i$  et une entrée  $-\alpha_i$  pour quelques  $\alpha_i \neq 0$ .
- L'ensemble  $W$  consiste en toutes les matrices avec zéro sommes de la ligne, lesquels ont seulement des éléments négatifs. L'ensemble  $W_i$  consiste en toutes les matrices irréductibles dans  $W$ .

**Définition 10 :**

Si  $A$  est une matrice symétrique dans  $W$ , alors  $A$  est positive semi définie et a une valeur nulle associée avec le vecteur  $(1, 1, \dots, 1)$ . En outre,  $A$  peut être décomposé comme  $A = M^T M$ , où  $M$  est une matrice dans  $M_1$ . En outre, si  $A$  est irréductible, alors la valeur zéros a 1 multiplicité.



**Définition 11 :**

Le produit “Kronecker” entre les deux matrices A et B est définie par :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & a_{nm}B \end{pmatrix}$$

Où, si A est une matrice (n × m) et B est une matrice (p × q), alors A ⊗ B est une matrice n p × m q.

**Définition 12 :**

Le vecteur A ⊗ f(x<sub>i</sub>, t) est définie par :

$$A \otimes f(x_i, t) = \begin{pmatrix} a_{11}f(x_1, t) + a_{12}f(x_2, t) + \cdots + a_{1m}f(x_m, t) \\ a_{n1}f(x_1, t) + a_{n2}f(x_2, t) + \cdots + a_{nm}f(x_m, t) \end{pmatrix}$$

Où A est une matrice (n × m) et f est une fonction (p × 1), alors A ⊗ f(x<sub>i</sub>, t) est un vecteur (n<sub>p</sub> × 1).

Supposant qu'un réseau complexe consiste linéairement en N nœuds identique, avec chaque nœud qui est un n-système dynamique dimensionnel. Dans un réseau, laissant  $a_{ij} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$ , la matrice de l'accouplement  $A = (a_{ij}) \in R^{N \times N}$  représente la configuration de l'accouplement du réseau, lequel est supposé dans cette section comme un réseau aléatoire ‘Erdos-Rényi’ ou un réseau ‘scale-free’, Alors, la matrice de l'accouplement A est symétrique et la matrice -A est dans w (Définition 9).

Supposant le réseau est relié dans le sens de n'avoir pas de groupes isolés. Alors, la matrice symétrique M est irréductible. De la définition 10, nous savons que le zéro est une valeur propre de -A avec la multiplicité 1, et autres valeurs propres de -A sont strictement positif.

Supposant que nous voulons se stabiliser le réseau (III.1) à un état homogène stationnaire :

$$f(\bar{x}(t), t) = 0 \tag{III.2}$$

Pour accomplir le but (III.2), nous appliquons la stratégie de contrôle sur une petite fraction δ (0 < δ ≤ 1) des nœuds dans le réseau (III.1). Supposant que les nœuds

$i_1, i_2, \dots, i_l$  sont sélectionnés, où  $l = [\delta N]$  supporte le plus grand nombre entier plus petit que le nombre réel  $\delta N$ . Ce réseau contrôlé peut être décrit comme :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i_k} &= f(x_i, k) + \sum_{j=1, j \neq i_k}^N c_{i_k j} a_{i_k j} \Gamma(x_j - x_{i_k}) + u_{i_k}, \quad k=1, 2, \dots, l \\ \dot{x}_{i_k} &= f(x_i, k) + \sum_{j=1, j \neq i_k}^N c_{i_k j} a_{i_k j} \Gamma(x_j - x_{i_k}) + u_{i_k}, \quad k=l+1, l+2, \dots, N \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Pour la simplicité, nous utilisons la loi de contrôle suivante [35]:

$$u_{i_k} = -c_{i_k i_k} d_{i_k} \Gamma(x_{i_k} - \bar{x}), \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (\text{III.4})$$

où la force de l'accouplement  $x_{i_k i_k}$  satisfait  $c_{i_k i_k} a_{i_k i_k} + \sum_{j=1, j \neq i_k}^N c_{i_k j} a_{i_k j} = 0$  et le gain du retour d'état  $d_{i_k} > 0$ .

Sans perte de généralité, nous réarrangeons l'ordre de nœuds dans le réseau tel que les nœuds épinglés (*pinned nodes*)  $i_k, k = 1, 2, \dots, l$  sont les premiers nœuds ( $l$ ) dans le réseau réarrangé.

Nous définissons les deux matrices suivantes:

$$\begin{aligned} D &= \text{diag}(d_1, d_2, \dots, 0, \dots, 0) \in R^{N \times N} \\ D' &= \text{diag}(c_{11} d_1, c_{22} d_2, \dots, c_{ll} d_l, 0, \dots, 0) \in R^{N \times N} \end{aligned}$$

Substituant (III.4) dans (III.3) nous pouvons réarranger le réseau contrôlé (III.3) et l'écrit en utilisant le produit (définition 12) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) - [(G + D') \otimes \Gamma] x + (D' \otimes \Gamma) \bar{X} \\ &= I_N \otimes f(x_i) - [(G + D') \otimes \Gamma] x + (D' \otimes \Gamma) \bar{X} \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

Où  $\bar{X} = [\bar{x}^T, \dots, \bar{x}^T]^T$ , et les éléments  $g_{ij}$  de la matrice irréductible symétrique  $G$ ,

$G = (g_{ij}) \in R^{N \times N}$  sont définis comme :

$$g_{ij} = -c_{ij} a_{ij} \quad (\text{III.6})$$

C'est facile de voir que  $G$  est semi-défini positif, et  $G + D'$  est définie positif avec la valeur propre minimale  $\lambda_{\min}(G + D') > 0$ .

### III.2.1 Les conditions de la Stabilité globale :

#### Théorème 1:

Supposant que  $\Gamma$  est positif symétrique semi-défini. Laissez  $T$  être une matrice tel que  $f(x) + Tx$  diminue  $V$ - uniformément pour quelque matrice  $V$ -symétrique définie positif. Le réseau contrôlé (III.5) est globalement stable au sujet de l'état homogène  $\bar{x}$  s'il existe une matrice diagonale définie positive  $U$  tel que la matrice :

$$(U \otimes V [(G + D') \otimes \Gamma + I \otimes T]) \quad (III.7)$$

est définie positive.

Nous déterminons la construction de la fonction de *Lyapunov*  $(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T (U \otimes V) \tilde{x}$ , laquelle est radialement sans bornes en ce qui concerne  $\bar{x}$ , où  $\tilde{x} = x - \bar{x}$ . La dérivé de  $g(\tilde{x})$  le long des trajectoires du réseau contrôlé (III.5) est :

$$\begin{aligned} \dot{g}(\tilde{x}) &= \tilde{x}^T (U \otimes V) \dot{\tilde{x}} \\ &= \tilde{x}^T (U \otimes V) [f(x) - f(\bar{x}) + (I \otimes T) \tilde{x} \\ &\quad - [(C + D') \otimes \Gamma + I \otimes T] \tilde{x}]. \end{aligned} \quad (III.8)$$

D'où,  $\tilde{x}^T (U \otimes V) [f(x) - f(\bar{x}) + (I \otimes T) \tilde{x}]$  dans (III.8) est non positive à cause de la propriété  $v$ -uniformément décroissante de  $f(x) + Tx$ . De (III.7),  $\tilde{x}^T (U \otimes V) [(C + D') \otimes \Gamma + I \otimes T] \tilde{x}$  est positive. Par conséquent, ce théorème est prouvé par la méthode directe de *Lyapunov*.

#### Théorème 2 :

Supposant que  $f(x)$  est lipschitz continue dans  $x$  avec la constante  $l_c^f > 0$ . si  $\Gamma$  est symétrique et définie positive, alors le réseau dynamique contrôlé (III.5) est globalement stable au sujet de l'état homogène  $\bar{x}$ , pourvu qu'il existe une constante  $\alpha = l_c^f / (\lambda_{min}(\Gamma)) > 0$  tel que ,

$$\lambda_{min}(G + D') > \alpha \quad (III.9)$$

Où,  $\lambda_{min}(\Gamma)$  et  $\lambda_{min}(G + D)$  sont la valeur propre minimale de la matrice  $\Gamma$  et  $G+D$ , respectivement.

**Démonstration :** A partir de la définition (7), il existe une constante  $\alpha = (l_c^f)/(\lambda_{min}(\Gamma))$  tel que pour n'importe  $\varepsilon > 0$  assez petit. Les trajectoires de  $\dot{x} = f(x) - (\alpha + \varepsilon)\Gamma x$  sont uniformément décroissantes. Dénotant  $\lambda_{min}(G + D') = \alpha + \delta > \alpha + \varepsilon$  avec  $\alpha > 0$ .

Nous pouvons sélectionner  $U = I, V = I$ , et  $T = -(\alpha + \varepsilon)\Gamma$ , afin que la matrice :

$$(U \otimes V) = [(G + D') \otimes \Gamma + I \otimes T] = [G + D' - (\alpha + \varepsilon)I] \otimes \Gamma \quad (III.10)$$

Est définie positive, Par conséquent, à partir de théorème 1, le réseau dynamique contrôlé (III.5) est globalement stable au sujet de l'état homogène  $\bar{x}$ .

Le théorème 2 donne une condition suffisante pour l'existence de la matrice de la force de l'accouplement  $C_{couple} = (c_{ij})^{N \times N}$ . Ceci permet de stabiliser le réseau dynamique (III.5). En faisant des simplifications supplémentaires, nous avons le corollaire suivant :

**Corollaire 1 :**

Supposant que  $c_{ij} = c$  et  $d_i = cd$ . le réseau dynamique contrôlé (III.5) est globalement stable au sujet de l'état homogène  $\bar{x}$  si :

$$c > \frac{l_c^f}{\lambda_{min}(-A + diag(d, \dots, d, 0, \dots, 0))\lambda_{min}(\Gamma)} \quad (III.11)$$

**Remarque 1 :**

Si nous supposons que  $\Gamma$  est une matrice constante 0-1, alors nous pouvons vérifier utilisant le théorème (Gershgorin) avec  $\Gamma = diag(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)_{n \times n}$ . D'où, la condition (III.11) dans le Corollaire (1) peut être simplifié comme suit :

$$c > \frac{l_c^f}{\lambda_{min}(-A + diag(d, \dots, d, 0, \dots, 0))} \quad (III.12)$$

Si l'oscillateur  $\dot{x}_i = f(x_i)$  est chaotique, alors la constante  $l_c^f$  de la fonction  $f$  signifie aussi que pour deux valeurs initiales différentes  $x_i^1$  et  $x_i^2$ , les trajectoires correspondantes devraient satisfaire  $\|f(x_i^1) - f(x_i^2)\| < l_c^f \|x_i^1 - x_i^2\|$  pour tout  $t$ .

Un autre concept plus précis pour un système chaotique est l'interprète de *Lyapunov* (LI). Cependant, le rapport entre les interprètes *Lyapunov* du réseau associé (III.1).

### III.2.2 Les conditions de la Stabilité locale :

#### Théorème 3 :

Considérant le réseau contrôlé (III.3), Supposant qu'il existe une constante  $\rho > 0$  tel que  $[Df(\bar{x}) - \rho]$  est une matrice de Hurwitz,  $c_{ij} = c$ ,  $d_i = cd$ ,  $\Gamma = I_n$ .

Soit  $\lambda_1 = \lambda_{\min}(-A + \text{diag}(d, \dots, d, 0, \dots, 0))$  si  $c\lambda_1 \geq \rho$ , alors l'état stationnaire homogène  $\bar{x}$  du réseau contrôlé (III.3) est localement exponentiellement stable.

**Démonstration :** Etant donné que  $c_{ij} = c$ ,  $d_i = cd$ ,  $\Gamma = I_n$ , nous pouvons simplifier le réseau contrôlé (III.5) comme :

$$\dot{x}_i = f(x_i) + c \sum_{j=1}^N a_{ij}x_j - cd(x_i - \bar{x}), \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (\text{III.14})$$

$$\dot{x}_i = f(x_i) + c \sum_{j=1}^N a_{ij}x_j, \quad i = l + 1, l + 2, \dots, N$$

Après la linéarisation du réseau contrôlé (III.14)- sur l'état stationnaire homogène  $\bar{x}$  nous obtenons :

$$\dot{\eta} = \eta[Df(\bar{x})] - cB\eta \quad (\text{III.15})$$

où  $D(f(\bar{x})) \in R^{N \times N}$  est le Jacobienne de  $f$  à  $\bar{x}$ ,  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)^T \in R^{Nn}$ , avec  $\eta_i(t) = x_i(t) - \bar{x}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  ET  $B = -A + \text{diag}(d, \dots, d, 0, \dots, 0)$ .

Évidemment, B est symétrique et défini positif, donc toutes les valeurs propres sont positives, dénotées comme suit:

$$0 < \lambda_{\min}(-A + \text{diag}(d, \dots, d, 0, \dots, 0)) = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N \quad (\text{III.16})$$

D'autre part, le vecteur propre  $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N] \in R^{N \times N}$  satisfait formule suivante :

$$B\phi_k = \lambda_k\phi_k, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

De la même façon, l'équation (III.15) peut être développée dans la base  $\phi$  au système linéaire suivant :

$$\dot{v}_k^T = [Df(\bar{x}) - c\lambda_k]v_k^T, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (III. 17)$$

Où  $\eta = \phi v$  et  $v_k$  et la  $k^{\text{ème}}$  ligne de  $v$  lequel est équivalent à la condition (III.13).

**Théorème 4 :**

Supposant que le nœud  $\dot{x}_i = f(x_i)$  est chaotique pour tout  $i = 1, 2, \dots, N$ , avec un maximum  $Lh_{max} > 0$ . Si  $c_{ij} = c$ ,  $d_i = cd$ ,  $\Gamma = I_n$ , alors le réseau contrôlé (III.3) est localement et asymptotiquement stable au sujet de l'état homogène  $\bar{x}$ , avec :

$$c > \frac{h_{max}}{\lambda_{min}(-A + diag(d, \dots, d, 0, \dots, 0))} \quad (III. 18)$$

**Démonstration :** On rappelant le concept de *TLI* pour (III.15), dénoté par  $\mu_i(\lambda_k)$ , pour chaque  $\lambda_k, k = 1, 2, \dots, N$ , défini par :

$$\mu_i(\lambda_k) = h_i - c\lambda_k, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (III. 19)$$

La *TLI* caractérise le comportement des vecteurs infinitésimaux, et détermine la stabilité des états contrôlés. D'où la stabilité locale du réseau contrôlé (III.14) au sujet de l'état homogène  $\bar{x}$  est converti à la *TLI* négative de (III.17). Dû que  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ , alors la condition suivante doit être satisfaite:

$$\mu_{max}(\lambda_1) = h_{max} - c\lambda_1 < 0 \quad (III. 20)$$

qui est équivalente à la condition (III.18).

**III.3 Contrôle virtuel des réseaux complexes dynamiques :**

Soit  $c_{ij} = c$  la force de l'accouplement et  $d_i = cd$  le gain du retour d'état. A partir du Corollaire (III.1) on a :

$$\dot{x}_i = f(x_i) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j - cd \Gamma (x_i - \bar{x}), \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (III.21)$$

$$\dot{x}_i = f(x_i) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j, \quad i = l + 1, l + 2, \dots, N$$

À partir des conditions de stabilité (III.11) et (III.12), le réseau dynamique (III.21) est globalement stable au sujet de l'état homogène stationnaire si et seulement si,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma = I_m \\ c > \frac{C}{\lambda_{\min}(-A + \text{diag}(d, \dots, d, 0, \dots, 0))} \end{array} \right. \quad (\text{III.22})$$

où  $C=l_c^f$  dans (III.2) et (III.12).

À cause de la nature de l'erreur de retour d'état locale de chaque nœud, il est garanti que, comme la limite du gain du contrôle du retour d'état  $d \rightarrow \infty$ , les états des nœuds contrôlés peuvent être épinglés à l'état de la cible homogène  $\bar{x}$ . D'où, l'épinglant stabilité du contrôle du réseau (III.21) est converti au réseau contrôlé suivant:

$$x_i = \bar{x}, \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (\text{III.23})$$

$$\dot{x}_i = f(x_i) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma \bar{x}, \quad i = l+1, l+2, \dots, N$$

avec

$$a_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} = - \left( \sum_{j=l+1, j \neq i}^N a_{ij} + \sum_{j=1}^l a_{ij} \right), \quad i = l+1, l+2, \dots, N \quad (\text{III.24})$$

Le réseau (III.23) peut être réécrit avec le contrôle virtuel avec la forme suivante :

$$x_i = \bar{x}, \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (\text{III.25})$$

$$\dot{x}_i = f(x_i) + c \sum_{j=l+1}^N \tilde{b}_{ij} \Gamma x_j + \tilde{u}_i \quad i = l+1, l+2, \dots, N$$

Où  $\tilde{u}_i$  sont les lois du contrôle virtuelles sont prises comme :

$$\tilde{u}_i = -c \tilde{d}_i (x_i - \bar{x}), \quad i = l+1, l+2, \dots, N \quad (\text{III.26})$$

avec les gains du retour d'état du contrôle virtuels  $\tilde{d}_i = \sum_{j=1}^l a_{ij}$ .

Soit  $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij}) \in R^{(N-1) \times (N-1)}$  tel que :

$$\tilde{b}_{ij} = a_{ij}, \quad j \neq i, j = l+1, \dots, N, \quad i = l+1, l+2, \dots, N. \quad (\text{III.27})$$

$$\tilde{b}_{ij} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$$

La matrice  $-\tilde{B}$  est dans  $w$ .

Supposant que les nœuds  $i_1, i_2, \dots, i_l$  sont sélectionnés pour être sous contrôle, et  $\tilde{A} \in R^{(N-1)(N-1)}$  est la matrice mineure de  $A$ , obtenu en enlevant les  $i_1, i_2, \dots, i_l$  paire ligne-colonne de  $A$ , nous avons :

$$\tilde{A} = \tilde{B} + \text{diag}(\tilde{d}_{l+1}, \tilde{d}_{l+2}, \dots, \tilde{d}_N) \quad (III.28)$$

**Corollaire 2 :**

Si  $\tilde{A}$  est irréductible, alors le réseau dynamique (III.25) avec le contrôle (III.26) est globalement (ou localement asymptotiquement) stable au sujet d'état homogène  $\bar{x}$ . A condition que  $\Gamma = I_m$  et que

$$c > \frac{C}{\lambda_{\min}(-\tilde{A})} \quad (III.29)$$

**Remarque 2 :**

Nous avons l'ordre suivant des conditions stables (III.22), (III.29), (III.30) :

$$\begin{aligned} 0 = \lambda_{\min}(-A) &< \lambda_{\min}(-A + \text{diag}(d, \dots, d, 0, \dots, 0)) \\ &< \lim_{d \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(-A + \text{diag}(d, \dots, d, 0, \dots, 0)) \\ &= \lambda_{\min}(-\tilde{A}) \\ &\leq \max\{\lambda_{\min}(-\tilde{A}_j), \quad j = 1, 2, \dots, m\} \end{aligned} \quad (III.31)$$

Avec la définition (III.6), il est vérifié que la condition de stabilité (III.29) est utilisée pour synchroniser le réseau suivant:

$$\dot{x}_i = f(x_i) + c \sum_{j=l+1}^N a_{ij} \Gamma x_j, \quad i = l+1, l+2, \dots, N \quad (III.32)$$

**III.4. Le principe du contrôle prédictif :**

Pour bien comprendre le principe de base du contrôle prédictif, la méthode utilisé pour contrôler un réseau dynamique à la fin de ce chapitre, il faut déclarer le principe de cette méthode pour les deux systèmes: discrets et continus :



### III.4.1 contrôle prédictif des systèmes discrets :

Soit le système dynamique non linéaire discret de dimension  $N$  suivant :

$$x(i+1) = f(x(i), u(i)) \quad (\text{III.33})$$

où  $x \in R^N$  représente le vecteur d'état du système et  $u$  le vecteur de contrôle. On assume que  $f$  est différentiable.

Pour la méthode OGY, la loi de contrôle  $u(i)$  est déterminée à partir de l'influence du paramètre de contrôle sur l'état actuel  $x(i)$  du système chaotique, puis ce contrôle sera injecté comme une perturbation dans le paramètre de contrôle du système accessible de l'extérieur.

Dans la méthode de Pyragas, l'idée essentielle est que le contrôle  $u(i)$  est déterminé par la différence entre l'état retardé à  $T$ -pas  $x(i-T)$  et l'état actuel  $x(i)$  puis ajoutée comme paramètre de contrôle au système.

Dans la méthode de contrôle prédictif, le contrôle  $u(i)$  sera déterminé par la différence entre l'état actuel  $x(i)$  et l'état prédit incontrôlé  $x_p$ .

Le schéma représentatif de la méthode est donné par la figure (III.1).

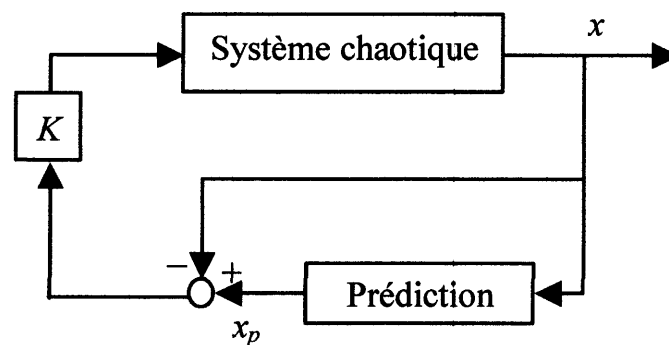


Fig. III.1 schéma représentatif du contrôle prédictif.

Le but est de stabiliser une orbite périodique instable du système chaotique.

Ainsi, le contrôle  $u$  est défini par :

$$u(i) = K(x_p - x(i)) \quad (\text{III.34})$$

où  $K$  représente le gain du contrôle.

Soit  $\bar{x}$  l'orbite périodique instable à stabiliser, elle satisfait :

$$\bar{x} = f(\bar{x}, 0) \quad (\text{III.35})$$

En utilisant  $f(x(i), 0)$  comme une prédiction de l'orbite périodique à stabiliser. L'état prédit  $x_p$  sera donnée par :

$$x_p = f(x(i), 0) \quad (\text{III.36})$$

L'équation (III.34) devient alors :

$$u(i) = K(f(x(i), 0) - x(i)), \quad (\text{III.37})$$

Cette loi de contrôle n'est valide que lorsque l'état du système est au voisinage de l'orbite périodique instable à stabiliser. La zone de contrôle est déterminée par la relation suivante :

$$|x(i) - x(i-1)| < \varepsilon \quad (\text{III.38})$$

avec  $\varepsilon$  nombre positif petit, ( $\varepsilon = 0.01$ ).

Finalement, le contrôle est défini comme suit :

$$u(i) = \begin{cases} K(f(x(i), 0) - x(i)) & \text{si } |x(i) - x(i-1)| < \varepsilon \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

et le système chaotique contrôlé sera donné par :

$$x(i+1) = f(x(i), K(f(x(i), 0) - x(i))) \quad (\text{III.40})$$

Ainsi, on a déterminé la correction à appliquer au système chaotique pour ramener la trajectoire sur le point fixe ou l'orbite périodique instable désirée.

### III.4.1.1 Applications 1 :

Exemple 1 :

On considère l'exemple du système discret non linéaire à comportement chaotique à une dimension suivant:

$$x(i+1) = ax(i)(1 - x^2(i)) \quad (\text{III.41})$$

Pour  $a=3$ , le système admet un comportement chaotique. L'évolution du système est représentée par la figure (III.2).

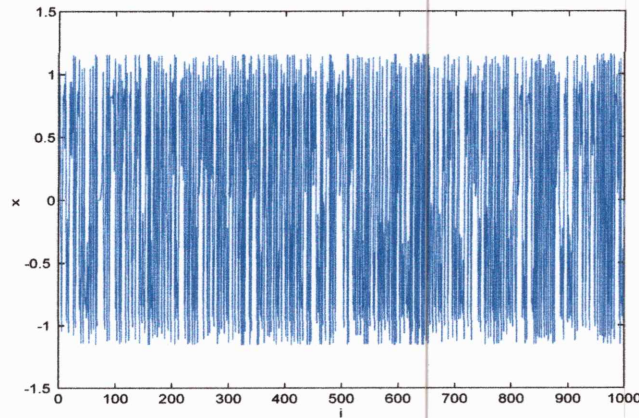


Figure III.2. Évolution du système donné par l'équation III.41

Le système admet trois points fixes  $x_{f1}, x_{f2}$ , et  $x_{f3}$  :

$$x_{f1} = 0, x_{f2} = -x_{f3} = \sqrt{\frac{a-1}{a}} \quad (III.42)$$

Pour déterminer la correction à apporter à l'état actuel  $x(i)$  du système chaotique, on calcule la loi de contrôle, qui est définie à partir de l'équation (III.39), on obtient :

$$\begin{aligned} x(i+1) &= ax(i)(1-x^2(i)) + u(i) \\ &= ax(i)(1-x^2(i)) + K(x(i+1) - x(i)) \end{aligned} \quad (III.43)$$

Le système sous contrôle prédictif sera donné par :

$$x(i+1) = ax(i)(1-x^2(i)) + K(ax(i)(1-x^2(i)) - x(i)) \quad (III.44)$$

La linéarisation autour des points fixes est donnée par :

$$\delta x(i+1) = \frac{\partial x(i+1)}{\partial x(i)} \delta x(i) \quad (III.45)$$

avec

$$\delta x(i+1) = x(i) - x_f \quad (III.46)$$

On obtient :

$$\delta x(i+1) = (-3a(1+K)x_f^2 + aK + a - K)\delta x(i) \quad (III.47)$$

Le système se stabilise autour des points fixes par le contrôle prédictif à retour d'état si  $K$  satisfait l'égalité suivante :

$$|-3a(1+K)x_f^2 + aK + a - K| < 1, \quad (\text{III.48})$$

Afin de stabiliser le système sur le point fixe d'origine  $x_{f1} = 0$ , la condition sur  $K$  devient :

$$|2K + 3| < 1 \Rightarrow -2 < K < -1 \quad (\text{III.49})$$

Dans ce cas, on choisit  $K = -1.5$ .

A partir d'une condition initiale  $x_0 = 0.4$ , on trouve que le test (III.38) est vérifié à l'itération  $i = 69$ , ainsi le contrôle se déclenche et prend une valeur non nulle instantanée  $u(69) = -5.6610^{-4}$  puis revient à zéro. Cette petite perturbation permet de stabiliser la trajectoire du système sur le point fixe instable  $x_{f1}$ . Le résultat du contrôle est représenté par la figure (III.3).

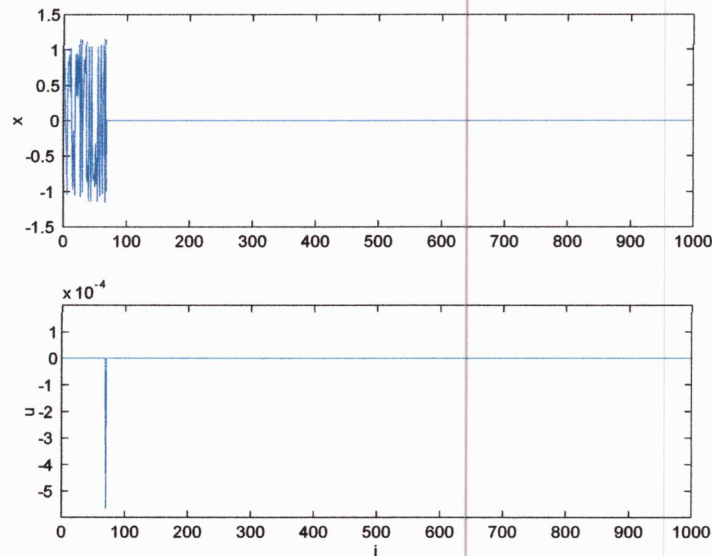


FIG.III.3 résultat du contrôle de l'exemple1

Il faut noter que le choix de la valeur du gain se fait d'une façon arbitraire. Néanmoins, on peut utiliser des méthodes d'optimisation classique pour déterminer la meilleure valeur qui assure un bon contrôle et une consommation d'énergie minimale.

Dans le deuxième cas, et afin de stabiliser le système sur l'un des deux points fixes instables symétriques  $x_{f2}$  ou  $x_{f3}$ , la condition sur le gain  $K$  devient comme suit :

$$|-2a(1+K) + 2K + 3| < 1$$

Le choix de la valeur du gain se fait dans l'intervalle  $-1 < K < -0.5$ .

Ainsi, une fois le test (III.38) est vérifié et pour une valeur de  $K = -0.9$ , le contrôle prend

une valeur non nulle à  $i = 69$ , mais la stabilisation échoue parce que l'état  $x(69)$  n'est pas au voisinage du point fixe  $x_{f2}$  ou  $x_{f3}$  mais au voisinage de  $x_{f1}$  qui ne se stabilise pas pour la valeur de  $K$  choisi.

Lorsque  $i = 269$ , l'état  $x(269)$  est au voisinage du point fixe  $x_{f2}$ , dans ce cas, le contrôle stabilise  $x_{f2}$ . Pour  $K = -0.85$ , le contrôle prédictif stabilise le point fixe  $x_{f3}$ .

Les résultats de simulations sont représentés sur les figures suivantes.

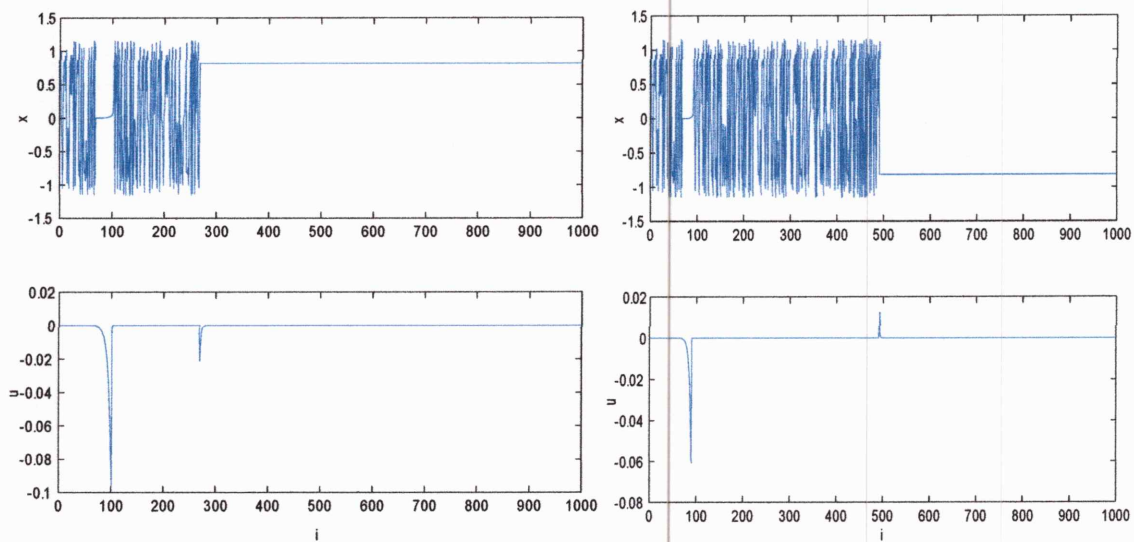


Figure III.4 : Système chaotique sous contrôle. (a) Stabilisation sur  $x_{f1}$ . (b) Stabilisation sur  $x_{f2}$ .

### Exemple 2 :

Dans cet exemple, on applique le contrôle prédictif à un oscillateur chaotique qui est un système dynamique non linéaire à comportement chaotique du deuxième ordre décrit par les équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \Omega(i+1) \\ \Phi(i+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega(i) + \rho \tan^{-1}(\Omega(i)) + u_1(i) \\ \alpha\Phi(i) - \rho\gamma \cos(\Omega(i)) + \rho \tan^{-1}(\Omega(i)) + u_2(i) \end{pmatrix} \quad (\text{III.50})$$

avec  $\rho, \alpha$  et  $\gamma$  sont les paramètres du système. Pour des valeurs de  $\rho = 7.1, \alpha = 0.8$  et  $\gamma = 0.225$ , l'oscillateur admet un comportement chaotique.

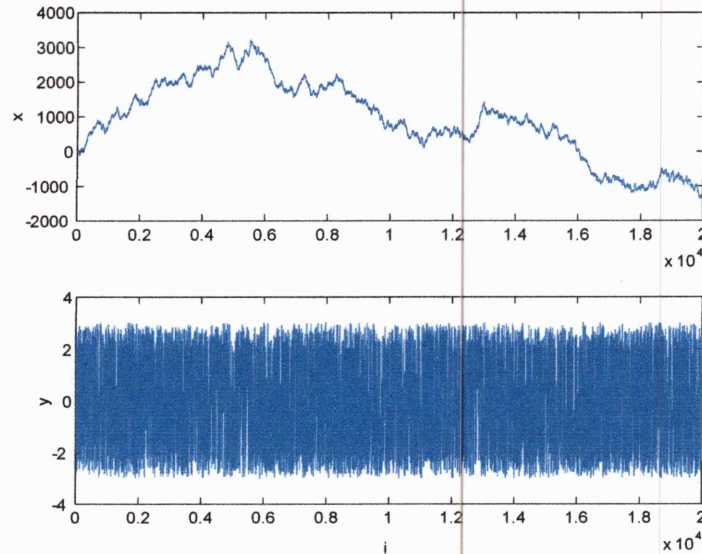


Fig. III.5 représentation du système donné par l'équation III.50.

Dans le cas du système non contrôlé, les points fixes du système sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} \Omega_f \\ \Phi_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7243 \\ 1.2219 \end{pmatrix}$$

La loi de contrôle est définie par:

$$u(i) = \begin{pmatrix} u_1(i) \\ u_2(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1(\rho \tan^{-1}(\Omega(i))) \\ k_2(\alpha - 1)(\Omega(i) - \rho \gamma \cos(\Omega(i)) + \rho \tan^{-1}(\Omega(i))) \end{pmatrix} \tag{III.51}$$

et le système chaotique contrôlé sera géré par la formule suivante :

$$\begin{pmatrix} \Omega(i+1) \\ \Phi(i+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega(i) + \rho \gamma (k_1 + 1) \rho \tan^{-1}(\Omega(i)) \\ (\alpha + k_2(\alpha - 1))\Phi(i) - \rho \gamma (k_1 + 1) \cos(\Omega(i)) + \rho \tan^{-1}(\Omega(i)) \end{pmatrix} \tag{III.52}$$

Pour simplifier la tâche, on prend  $k_1 = k_2 = k$ .

Une fois le système linéarisé autour du point fixe et afin de le stabiliser, le gain  $k$  doit satisfaire la condition suivante :

$$|\alpha + k(\alpha - 1)| < 1$$

D'où :

$$-1 < k < 0$$

Pour un vecteur gain  $K = [-0.1 \ -0.1]$ , une condition initiale  $(\Omega_0, \Phi_0) = (0, 0)$  et pour  $\varepsilon = 0.01$ , la figure (III.6) représente la trajectoire de l'état  $\Omega(i)$  sous contrôle prédictif.

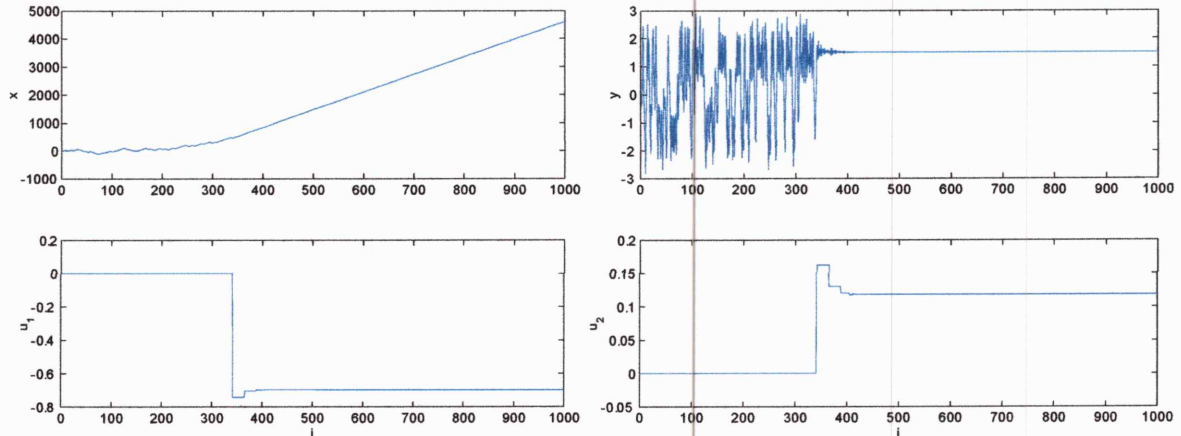


Figure III.6 :Stabilisation du système (III.51) sur son point fixe  $(\Omega_f, \Phi_f)$ .

A l'itération  $i = 341$ , les états  $(\Omega(i), \Phi(i))$  se trouvent aux voisinages du point fixe  $(\Omega_f, \Phi_f)$ . A cet instant, le contrôle déclenche, mais ne stabilise totalement le système que lorsque  $i = 410$ . Le vecteur de contrôle  $u(i)$  change de valeur puis se stabilise sur une valeur non nulle qui maintienne  $(\Omega(i), \Phi(i))$  sous contrôle toute au long de leurs évolution.

### III.4.2 Contrôle prédictif des systèmes continus :

Dans ce qui suit, nous développons la méthode de contrôle prédictif pour le contrôle des systèmes dynamiques non linéaires chaotiques continus d'ordre élevé.

Il est à noter que la motivation de proposer une extension du contrôle prédictif pour le contrôle des systèmes chaotiques continus d'ordre élevé qui s'avère une déduction de la méthode de Ushio et Yamamoto n'été utile que parce qu'elle n'a pas été proposée auparavant. Afin de tester l'efficacité de la méthode proposée, nous l'avons appliquée à plusieurs systèmes chaotiques continus.

Soit le système dynamique non linéaire continu de dimension  $N$ , défini par l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{III.53}$$

$x(t)$  représente l'état actuel du système et  $u(t)$  le contrôle.

Le principe de la méthode est le même que celui des systèmes discrets. Le contrôle est donné

par la relation :

$$u(t) = K(x_p - x(t)) \quad (\text{III.54})$$

$x_p(t)$  représente l'état prédit.

et le système chaotique contrôlé est ainsi donné par :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + K(x_p - x(t)) \quad (\text{III.55})$$

En utilisant une prédiction d'un pas en avant, on obtient :

$$u(t) = K(\dot{x}(t) - x(t)) \quad (\text{III.56})$$

Le système chaotique contrôlé devient

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + K(\dot{x}(t) - x(t)) \quad (\text{III.57})$$

Soit  $\bar{x}$  l'orbite périodique instable à stabiliser, elle satisfait :

$$\bar{x} = f(\bar{x}, 0)$$

Le système contrôlé est linéarisé autour de  $\bar{x}$  :

$$\begin{aligned} \delta\dot{x}(t) &= A\delta x(t) + K(\delta\dot{x}(t) - \delta x(t)) = A\delta x(t) + K(A\delta x(t) - \delta x(t)) \\ &= (A + K(A - I))\delta x(t) \end{aligned} \quad (\text{III.58})$$

Suivant le même principe que pour les systèmes chaotiques discrets; le voisinage du point fixe est déterminée par la relation suivante:

$$r(t) = |x(t) - x(t-1)| \quad (\text{III.59})$$

Le système contrôlé sera décrit par :

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f(x(t)) + u(t) & \text{si } r(t) < \varepsilon \\ f(x(t)) & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{III.60})$$

Avec  $\varepsilon$  un petit nombre positif.

### III.4.3 Application 2 :

Contrôle prédictif d'un réseau complexe dynamique :

Considérant le réseau dynamique échelle-libre des oscillateurs chaotique du *Chen*.

L'oscillateur de *Chen* est décrit par :



$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(y - \dot{x}) \\ (p_3 - p_2)\dot{x} - \dot{x}\dot{z} + p_2\dot{z} \\ \dot{x}\dot{y} - p_2\dot{z} \end{pmatrix} \quad (III.61)$$

L'évolution de ce système est représenté dans la figure (III.7) et la figure (III.8), où  $p_1 = 35, p_2 = 3, p_3 = 28$  et les conditions initiales sont :  $(x(0), y(0), z(0)) = (-3, 2, 20)$

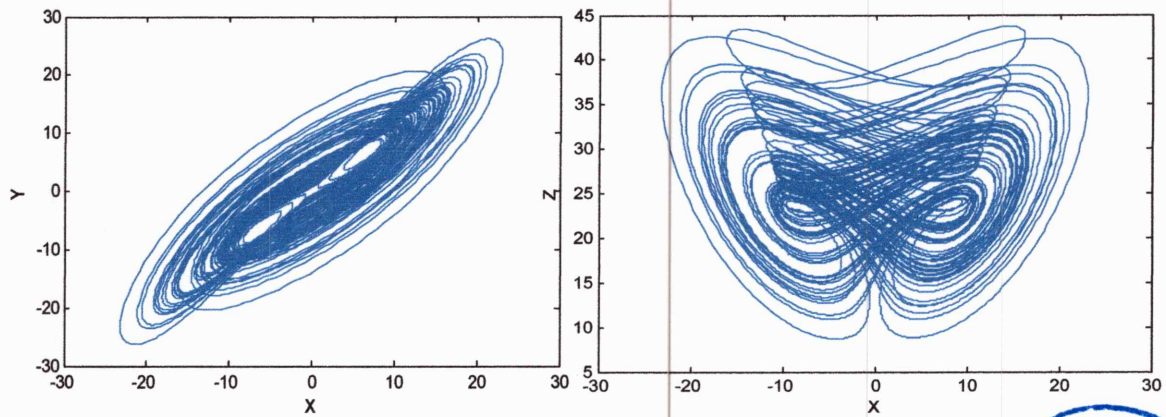


Fig.III.7 représentation du système donné par l'équation III.6

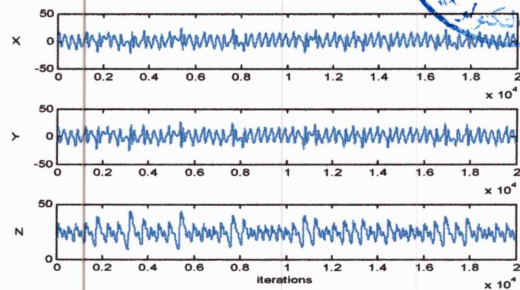
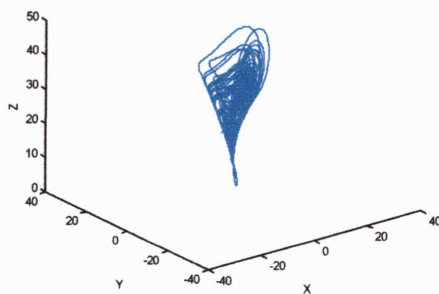
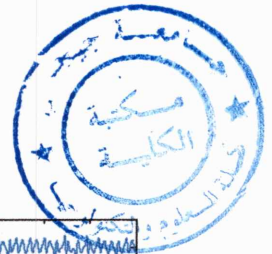


Fig. III.8 Evolution du système donné par l'équation III.61.

Le réseau dynamique non contrôlé est représenté dans la figure (III.9), ce réseau est composé de 50 nœuds.

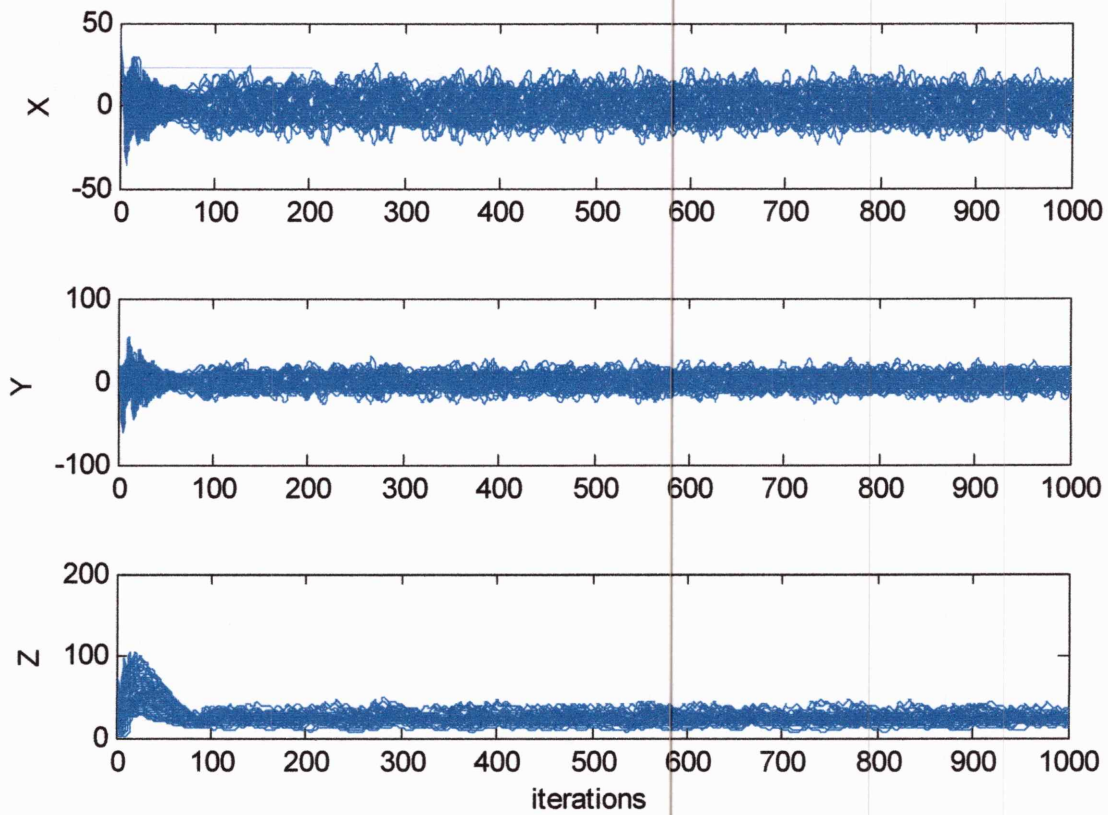


Fig. III.9 évolution du réseau dynamique échelle-libre des oscillateurs chaotique du *Chen* avec 50 nœuds.

Nous appliquons le contrôle prédictif sur ce système, (sur la variable  $y$ ), l'équation III.61 devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(\dot{y} - \dot{x}) \\ ((p_3 - p_2)\dot{x} - \dot{x}\dot{z} + p_2\dot{z}) + u \\ \dot{x}\dot{y} - p_2\dot{z} \end{pmatrix} \quad (\text{III.62})$$

$$\text{Où,} \quad u = k(y_p - y(i)) \quad (\text{III.63})$$

$K$  est le gain,  $y_p$  est l'état non contrôlé et  $y(i)$  est l'état actuel.

Les résultats sont représenté sur la figure (III.10).

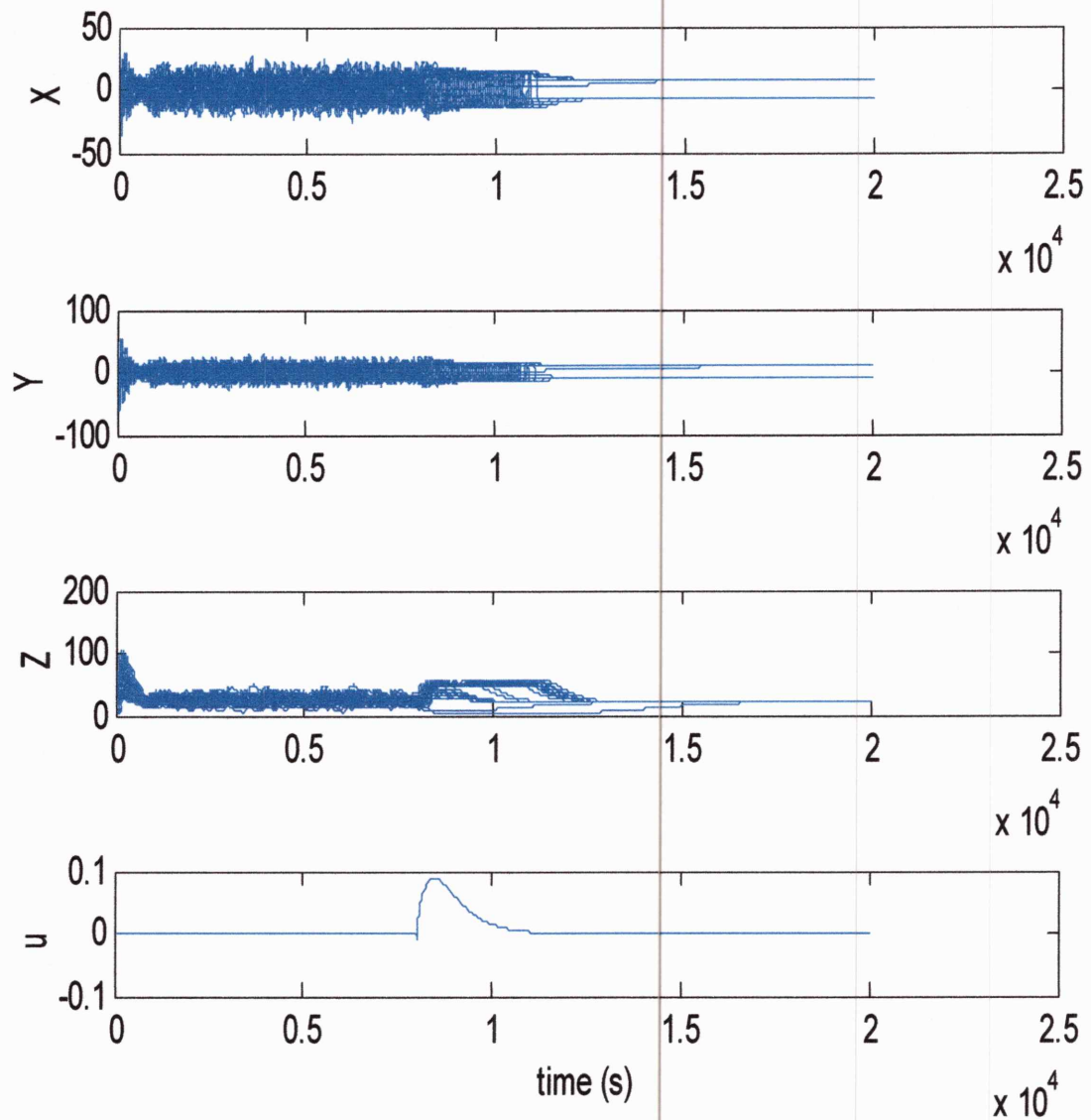


Fig.III.10 stabilisation du système III.61 avec  $k=-0.98$ .

Ces résultats sont obtenus avec un gain  $k=-0.98$ , Le contrôle  $u$  est calculé pour chaque nœud , c à d, il varie 50 fois lors de la simulation . Le contrôle affiché sur la figure est pour la dernière itération de la boucle principale  $u(50)=0.1$ .

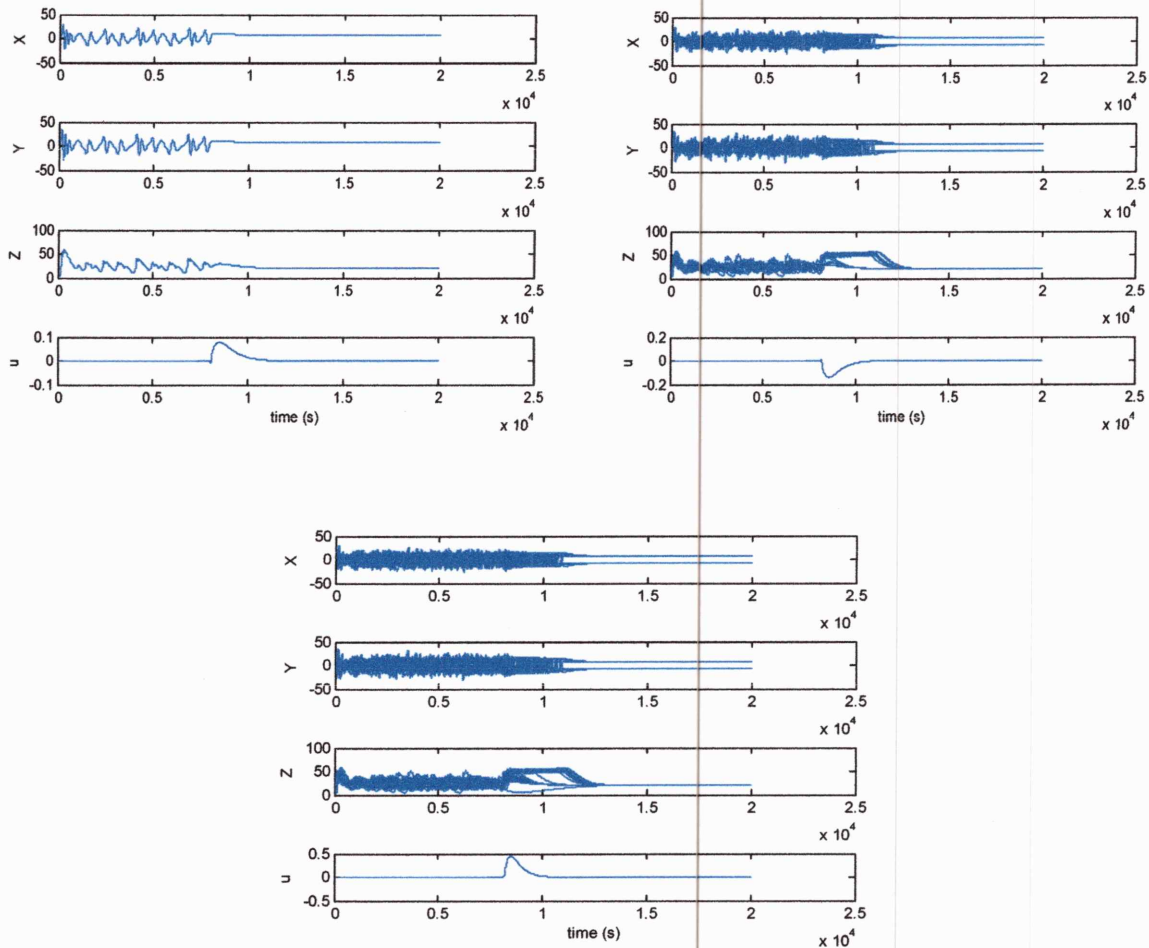


FIG. III.11 Différentes valeurs de contrôle.

Cette figure représente trois différentes valeurs de  $u$  pour  $i=1, 13, 30$  respectivement.

### III.5 Conclusion :

En conclusion à ce chapitre, nous avons présenté une méthode récente pour le contrôle des réseaux complexes. La méthode est basée sur un principe de commande par retour d'état. L'étude emmenée a montré que la synthèse d'une commande par retour d'état ne nécessite pas la connaissance de l'état complet du système. Les résultats obtenus montrent l'efficacité de la méthode proposée, et des recherches dans le domaine apportent régulièrement des résultats de plus en plus performants.



## *Conclusion générale*

---

L'étude des réseaux complexes est une activité en plein essor. Dans ce mémoire, nous avons donné un aperçu des progrès réalisés récemment. Notons que de nouvelles directions se développent, par exemple vers l'étude des réseaux pondérés, des réseaux dynamiques. Au-delà de la compréhension de l'émergence de la topologie des réseaux et de la dynamique de processus se déroulant sur ces réseaux, l'interaction réciproque entre topologie du réseau et dynamique des processus reste également un sujet largement ouvert.

L'objectif de ce travail est l'étude, la modélisation et le contrôle des réseaux complexes. Ainsi, Tout au long de ce mémoire nous avons abordé les méthodes de modélisation et de contrôle des réseaux complexes dynamique.

De ce fait, et de façon à améliorer les performances dynamiques, nous avons utilisé une méthode de contrôle prédictif. La méthode est basée sur un principe de commande par retour d'état. L'étude emmenée a montré que la synthèse d'une commande par retour d'état ne nécessite pas la connaissance de l'état complet du système. Les résultats obtenus montrent l'efficacité de la méthode proposée.

A l'issue de ce travail, ce mémoire ouvre de nouvelles perspectives de recherche parmi lesquelles nous citons: La modélisation des réseaux réels par de nouvelles techniques ; L'application des méthodes de contrôle intelligent (réseau de neurones, logique floue) pour le contrôle des réseaux complexes.

## *Bibliographie*

- [1] S. Ben Amor, "Percolation, prétopologie et multialéatoires, contributions à la modélisation des systèmes complexes : exemple du contrôle aérien", PhD thesis, EPHE, Paris, 2008.
- [2] M. E. J. Newman, "The structure and function of complex networks", 2003.
- [3] Alain Degenne, Michel Forse, "Les réseaux sociaux", Armand Colin, Paris, 1994.
- [4] Stanley Milgram, "The small world problem", *Psychology Today*, 1, 1967.
- [5] Mark Newman, Albert-Laszlo Barabasi, Duncan J. Watts, "The Structure and Dynamics of Networks", Princeton University Press, 2006.
- [6] Annick Lesne, Michel Lagues, "Invariance d'échelle Des changements d'états à la turbulence, Chapitre 3 : L'universalité comme conséquence de l'invariance d'échelle", In Belin, editor, Paris, pp. 058-105, 2003.
- [7] Steven H. Strogatz, "Exploring complex networks", *NATURE*, Vol.410, pp. 268-276, 2001.
- [8] Albert R. Barabási, "AL Statistical mechanics of complex networks", *Rev Mod Phys*, pp. 47-97, (2002)
- [9] Pierre Lopez, "Graph theory", 2005.
- [10] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, "Graph Theory with Applications", Waterloo, Canada, 1976.
- [11] Kurt Mehlhorn, Stefan Naher, "Leda : A library of efficient data types and algorithms", *GI Jahrestagung*, vol.1, pp. 35-39, 1989.
- [12] Tommy R. Jensen et Bjarne Toft, "Graph coloring problems", Wiley-Interscience, 1995.
- [13] Duncan J. Watts, Steven H. Strogatz, "Collective dynamics of 'small-world' networks", *NATURE*, Vol. 393, pp. 440-442, 1998.
- [14] Alain Degenne, "Entre outillage et théorie, les réseaux sociaux", *Réseaux Sociaux de l'internet*, 2004.
- [15] Jon M. Kleinberg, "Small-world phenomena and the dynamics of information", 2001.
- [16] Phillip Bonacich, "Power and centrality : a family of measures", *American Journal of Sociology*, vol. 92, pp. 1170-1182, 1987.
- [17] Duncan J. Watts, Kevin Bacon, "the small-world, and why it all matters", *SANTA FE INSTITUTE BULLETIN FALL*, 1999.

- [18] Emmanuelle Lebhar, “Algorithmes de routage et modèles aléatoires pour les graphes petits mondes”, PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2005.
- [19] Barabási AL, Albert R, “Emergence of scaling in random networks”, *Science* 286:509–512, 1999.
- [20] Bela Bollobas, “Random graphs”, Academic Press, 1985.
- [21] Paul Erdos, Alfred Renyi, “On random graphs”, *Publicationes Mathematicae*, vol.6, pp.290-297, 1959.
- [22] Bela Bollobas, Oliver Riordan, “Slow emergence of the giant component in the growing m-out graph”, 2004.
- [23] Colin Cooper, Alan Frieze, “The cover time of the giant component of a random Graph”, 2006.
- [24] Albert-Laszlo Barabasi et Reka Albert, “Emergence of scaling in random networks”, *science*, Vol. 286, pp. 509-512, 1999.
- [25] Edward A. Bender, E. Rodney Caneld, “The asymptotic number of labeled graphs with given degree sequences”, *Comb, Theory*, vol. 3, pp. 296-307, 1978.
- [26] Michael Molloy and Bruce Reed. “A critical point for random graphs with a given degree sequence”, *Random Structures and Algorithms*, vol. 6, pp. 161-180, 1995.
- [27] Bo Soderberg, “A general formalism for inhomogeneous random graphs”, *Phys*, 2002.
- [28] Solla Price, Derek.J, “Networks of scientific papers”. *Science*, vol. 149, pp. 510-515, 1965.
- [29] Rick Durrett et Paul Jung, “Two phase transitions for the contact process on small worlds”, 2006.
- [30] M. E. J. Newman, C. Moore, et D. J. Watts, “Mean-field solution of the small-world network model”, *Physical Review Letters*, Vol. 84, No. 14. Pp. 3201-3204, 2000.
- [31] Dorogovtsev SN, Mendes JFF, “Structure of growing networks with preferential linking”, *Phys Rev Lett* 85:4633–4636, 2000.
- [32] E. Almaas, R.V. Kulkarni, et D. Stroud, “Characterizing the structure of small-world Networks”, *Phys. Rev. Letters*, vol.88, no. 9, 2002.
- [33] Jon M. Kleinberg. Navigation in a small world. *NATURE*, Vol. 406-845, 2000.
- [34] C.W. Wu, “Synchronization in coupled chaotic circuits and systems”, World Scientific, Singapore, 2002.
- [35] Li X, Wang X, Chen G, “Pinning a complex dynamical network to its equilibrium”, *IEEE Trans Circuits Syst I, Fundam Theory Appl*, pp. 2074–2087, 2004.



## ملخص:

دراسة الشبكات المعقدة هو مجال حديث جدا، في هذا العمل حاولنا إعطاء فكرة عن هذه الشبكات، طريقة نمذجتها، ظروف استقرارها والتحكم فيها.  
الكلمات المفتاحية : الشبكة المعقدة، نظرية الرسم البياني، التحكم التنبؤي.

## Résumé :

L'étude des réseaux complexes est un domaine très récent, dans ce travail nous avons essayé de donner une idée sur ces réseaux, sa modélisation, ses conditions de stabilité et son contrôle.

Mots clés : réseau complexe, la théorie des graphes, le contrôle prédictif.

## Abstract:

The study of complex networks is a very recent domain, in this work we tried to give an idea about these networks, the modeling, the conditions of stability and control.

Keywords: complex network, graph theory, predictive control.