République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....
№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Mathématiques Fondamentales et Discrètes.

Thème

Propriétés différentielles des formes modulaires

Présenté par :

- Amira AHMIA .
- Yousra GHEMIT .

Devant le jury :

Président	: A. BOUCHAIR	Maître de conférences A	Université de Jijel
Encadreur	: M. KEMIHA	Maître assistante A	Université de Jijel
Examinateur	: M. CHELGHAM	Maître de conférences B	Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

Table des matières

Introduction

La théorie des formes modulaires est une théorie riche et importante vu ses différents liens de près ou de loin avec les différents domaines de mathématiques tels que : théorie des nombres, théorie des formes quadratiques, théorie de Lie, géométrie algébrique,..., voire même la physique mathématique. Elle a été grandement popularisée par les travaux de Wiles en 1999 démontrant le dernier théorème de Fermat.

Les formes modulaires sont des fonctions holomorphes définies sur le demi plan de Poincaré vérifiant certaines équations fonctionnelles, liées à l'action du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{H}$. Ces fonctions ont des propriétés arithmétiques venant surtout de la théorie des opérateurs de Hecke qui les relient avec des questions centrales de la théorie des nombres. Mais elles ont aussi des propriétés moins bien connues et indépendantes de la théorie de Hecke qui proviennent de l'interaction entre la notion de modularité et celle de la différentiation.

Dans ce mémoire nous allons étudier ces propriétés. Pour cela nous l'avons partagé en quatre chapitres. Dans le premier chapitre nous rappelons des notions de base d'algèbre, d'analyse complexe et de l'arithmétique liées aux formes modulaires.

Dans le deuxièmes chapitre nous introduisons l'espace des formes modulaires avec propriétés et exemples et lien avec les réseaux.

Dans le troisième chapitre nous déffinissons l'espace des formes quasi-modulaires formes modulaires presque holomorphes et les différents opérateurs différentiels définis sur ces espaces. Ainsi que, les crochets de Rankin-Cohen.

Nous terminons par le dernier chapitre où on trouve quelques identités et équations différentielles vérifiées par quelques formes modulaires déjà présentés dans les chapitres précédents.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et quelques théorèmes de base que l'on utilise dans les chapitres suivants.

1.1 Notions d'Algèbre

1.1.1 Espaces vectoriels

Soit K un corps et soit E un espace vectoriel sur K.

Définition 1.1. *Soit F une partie de E. On dit que F est un sous espace vectoriel de E si*

1. $F \neq \emptyset$.
2. $\forall \lambda \in K, \forall x \in F, \lambda \cdot x \in F$.
3. $\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$.

Définition 1.2. *Si F et G sont deux sous espaces vectoriels de E, le sous espace vectoriel $F + G$ défini par*
$F + G = \{z \in E / \exists x \in F, \exists y \in G / z = x + y\}$ est appelé somme des sous-espaces vectoriels F et G .
En général, si $F_1, F_2, ..., F_n$ sont des sous espaces vectoriels de E, la somme des $F_1, F_2, ..., F_n$ est définie par $\sum\limits_{i=1}^{i=n} F_i = \{x \in E / \exists (x_1, ..., x_n) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_n : x = x_1 + x_2 + ... + x_n\}$.

Définition 1.3. *La somme de n sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, ..., F_n$ de E est dite somme* *directe si chaque élément de* $\sum_{i=1}^{i=n} F_i$ *s'écrit d'une manière unique comme somme d'éléments de* $F_1, F_2, ..., F_n$*, elle est notée* $F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_n$.

Théorème 1.4 (Caractérisation de la somme directe)**.**
Soit $(F_1, F_2, ..., F_n)$ *une famille de sous-espaces vectoriels de* E*. Pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$ *on considère une base* B_i *de* F_i*. Les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *La somme* $F_1 + F_2 + ... + F_n$ *est directe.*
2. $\forall (x_1, ..., x_n) \in F_1 \times ... \times F_n,\ x_1 + x_2 + ... + x_n = 0_E \Longrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = 0_E$.
3. *La concaténation des bases* $B_1, ..., B_n$ *est une base de* $F_1 + ... + F_n$.
4. $dim(F_1 + ... + F_n) = dimF_1 + ... + dimF_n$.

Définition 1.5. *Soit* K *un corps de caractéristique différente de* 2*, une application* $\Phi : E \times E \to K$ *est appelée forme bilinéaire si on a*

1. $\forall \alpha \in K, \forall (x, x', y) \in E^3 : \Phi(\alpha x + x', y) = \alpha \Phi(x, y) + \Phi(x', y)$*, c-à-d* Φ *est linéaire par rapport à la première variable.*
2. $\forall \beta \in K, \forall (x, y, y') \in E^3 : \Phi(x, \beta y + y') = \beta \Phi(x, y) + \Phi(x, y')$ *c-à-d* Φ *est linéaire par rapport à la deuxième variable.*

Définition 1.6. *Une forme bilinéaire* Φ *est dite antisymétrique si*

$$\Phi(x, y) = -\Phi(y, x), \forall x, y \in E.$$

1.1.2 Bases et dimensions

Définition 1.7. *Soit* $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ *une famille de vecteurs du* K*-espace vectoriel* E*.Une combinaison linéaire des vecteurs* $(v_i)_{i \in I}$ *est un élément* x *de* E *qui s'écrit*

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i,\ \lambda_i = 0 \quad \text{sauf pour un nombre fini.}$$

Définition 1.8. *Une partie* S *du* K*-espace vectoriel* E *est dite partie génératrice ou système générateur de* E *, si tout élément de* E *peut s'écrire comme combinaison linéaire d'éléments de* S.

Définition 1.9. *La famille* $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ *de vecteurs du* K*-espace vectoriel* E *est dite famille libre , ou que les* v_i *sont linéairement indépendants, si pour toute famille de scalaires* $(\lambda_i)_{i \in I}$ *,on a*

$$\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i \in I.$$

Dans le cas contraire , on dit que $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ *est une famille liée.*

Définition 1.10. *Une famille $\mathcal{B} = (v_i)_{i\in I}$ d'éléments du K-espace vectoriel E est une base de E si*

1. *$\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E.*
2. *$\mathcal{B}$ est formée de vecteurs linéairement indépendants.*

Définition 1.11. *L'espace vectoriel E est dit de dimension n, s'il existe une partie génératrice finie de E formée de n vecteurs linéairement indépendants.*

Théorème 1.12. *Soit E un espace vectoriel de dimension n.*
Une famille $\mathcal{B}$ tel que $card(\mathcal{B}) = n$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{B}$ est libre ou génératrice de E.

Définition 1.13. *Soit E un espace vectoriel de dimension n, Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.*
La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice carrée P associée à l'application identité Id_E, $P = M(Id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$.

1.1.3 Actions de groupes

Soit G un groupe multiplicatif d'élément neutre e.

Définition 1.14. *On appelle action du groupe G sur un ensemble E toute application*

$$\begin{aligned} \Psi : G \times E &\to E \\ (a, x) &\mapsto \Psi(a, x), \end{aligned}$$

qu'on note $\Psi(a, x) = a \cdot x$. Vérifiant les deux conditions

1. *$(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x), \forall x \in E, \forall a, b \in G$.*
2. *$e \cdot x = x, \forall x \in E$.*

On dira que G opère sur E, s'il existe une loi d'action de G sur E.

Définition 1.15. *Soit G un groupe opérant sur l'ensemble E et soit $x \in E$. On appelle stabilisateur de x le sous groupe de G, noté G_x, défini par $G_x = \{a \in G / a \cdot x = x\}$.*

Définition 1.16. *On appelle orbite (ou trajectoire) de x le sous ensemble de E noté T_x, défini par $T_x = \{y \in E / \exists a \in G / y = a \cdot x\} = \{a \cdot x / a \in G\}$.*

Proposition 1.17. *Si G opère sur E, la relation $\mathcal{R}$ définie sur E par*

$$x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow \exists a \in G \text{ tel que } y = a \cdot x,$$

est une relation d'équivalence où T_x est la classe d'équivalence de x.

Définition 1.18. *L'action de G sur E est dite transitive si* $\forall x, y \in E : T_x = T_y = E$.

Définition 1.19. *L'action de G sur E est dite fidèle si* $\bigcap\limits_{x \in E} G_x = \{e\}$. *Ce qui est équivalent à :* $a \cdot x = x, \forall x \in E \Longleftrightarrow a = e$.

1.1.4 Algèbre sur un corps

Définition 1.20. *Une algèbre sur un corps commutatif K ou K-algèbre, est une structure algébrique $(A, +, \cdot, \times)$ telle que*

i. $(A, +, \cdot)$ *est un espace vectoriel sur K.*

ii. $(A, +, \times)$ *est un anneau.*

iii. Pour tout $x, y \in A, \lambda \in K : (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y) = \lambda \cdot (x \times y)$.

Définition 1.21. *Une algèbre graduée est une algèbre A pour laquelle il existe un ensemble J d'indices et une famille $(A_j)_{j \in J}$ de sous espaces vectoriels de A tels que*

1. $A = \bigoplus\limits_{j \in J} A_j$.
2. $A_i \times A_j \subset A_{i+j}, \forall i, j \in J$, *c'est à dire :* $\forall x \in A_i, \forall y \in A_j;\ x \times y \in A_{i+j}, \forall i, j \in J$.

Définition 1.22. *Une algèbre A est dite algèbre de Poisson s'il existe une application bilinéaire antisymétrique $\{,\}$ de A^2 dans A qui vérifie*

1. *La loi de Leibniz* $\{ab, c\} = a\{b, c\} + \{a, c\}b$ *pour tous* a, b *et* c *dans* A.
2. *L'identité de Jacobi* $\{a, \{b, c\}\} + \{b, \{c, a\}\} = 0$ *pour tous* a, b *et* c *dans* A.

L'application $\{,\}$ est appelée crochet de Poisson sur A.

Remarque. *La loi de Leibniz est à voir comme la dérivation d'un produit.*

Plus précisément, on donne la définition suivante

Définition 1.23. *Soit A une algèbre et D une application linéaire surA. Cette application est une dérivation si pour tout $(a, b) \in A^2$, on a*

$$D(ab) = D(a)b + aD(b).$$

1.1.5 Extensions de corps

Soit K un corps.

Définition 1.24. *Soit L un corps. On dit que L est une extension de K s'il existe un morphisme d'anneaux $i : K \to L$,(nécessairement injectif).*
Si K est un sous corps de L, alors i est l'injection canonique.

Définition 1.25. *Soient L une extension de K, et M une partie de L. Le plus petit sous corps de L contenant K et M, s'appelle l'extension de K engendrée par M, Ce corps est noté $K(M)$, ou $K(x_1, ..., x_r)$ si $M = \{x_1, ..., x_r\}$.*

Proposition 1.26. *$K(M)$ est l'ensemble des éléments de la forme $\frac{P(x_1,...,x_n)}{Q(x_1,...,x_n)}$ où $x_1, ..., x_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, $n \leq card(M)$, $P, Q \in K[X_1, ..., X_n]$ avec $Q(x_1, ..., x_n) \neq 0$.*

Définition 1.27. *Soit L une extension de K.*
Un élément x de L est dit algébrique sur K s'il existe un polynôme $P \in K[X]$ différent du polynôme nul, tel que $P(x) = 0$. l'extension L est dite algébrique sur K si tout élément de L est algébrique sur K.

Définition 1.28. *Une fonction algébrique est une fonction f qui satisfait une équation du type*

$$a_0(x) + a_1(x)f(x) + a_2(x)(f(x))^2 + ... + a_n(x)(f(x))^n = 0 \ \forall x \in D_f$$

où les coefficients $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ sont des fonctions polynomiales.
Une fonction polynomiale f correspond au cas

$$a_0(x) + f(x) = 0 \ \forall x \in D_f.$$

Une fonction rationnelle f correspond au cas

$$a_0(x) + a_1(x)f(x) = 0 \ \forall x \in D_f.$$

Ces fonctions peuvent être très complexes. Dans les cas les plus simples, elles s'expriment en terme de x au moyen de quatre opérations de l'arithmétique et de l'extraction de racines.

Définition 1.29. *Soit L une extension de K. Soit $\{a_1, ..., a_n\}$ une partie non vide de L. $a_1, ..., a_n$ sont dits algébriquement indépendants sur K Si*
$\forall P \in K[X_1, ..., X_n]$, $P(a_1, ..., a_n) = 0$ alors $P = 0$.

Définition 1.30. *Soit L une extension du corps K.*
Une partie B de L est dite base de transcendance de L sur K si elle vérifie les deux conditions suivantes

1. *Les éléments de B sont algébriquement indépendants sur K.*
2. *Le corps L est une extension algébrique sur $K(B)$.*

Théorème 1.31. *Soit L une extension sur K. Alors il existe une base de transcendance de L sur K.*

Théorème 1.32. *Soit L une extension de K de type fini. Alors toutes les bases de transcendance de L on le même cardinal et est appelé degré de transcendance de L sur K.*

Définition 1.33. *Soit A un anneau intègre.*
On dit qu'un corps K est le corps de fraction de l'anneau A si les deux conditions suivantes sont vérifiées

1. *A est un sous anneau du corps K.*
2. *Pour tout $x \in K$, il existe $a, b \in A$, $b \neq 0$ tels que $x = ab^{-1}$.*

Définition 1.34. *Soit A une algèbre de type fini (engendrée par un nombre fini d'éléments) sur un corps K telle que l'anneau A est intègre. On définit le degré de transcendance de A sur K par le degré de transcendance du corps des fractions de A.*

Théorème 1.35. *Soit L une extension du corps K. Soit A est une partie de L.*
Si les éléments de A sont algébriquement indépendants alors A est contenue dans une base de transcendance de L sur K.

1.2 Notions d'Analyse complexe

1.2.1 Séries entières

On note par $D(0,\rho)$ (respectivement $\overline{D(0,\rho)}$) le disque ouvert (respectivement fermé) dans $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon ρ et par $\mathring{D}(0,\rho)$ son intérieur.

Définition 1.36. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{C}$. La série des fonctions de la forme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ est appelée série entière de centre z_0 et de coefficients a_n.*

Lemme 1.37. *Soit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ est bornée alors la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est normalement convergente sur tout disque fermé $\overline{D(0,\rho)}$ de centre 0 et de rayon $\rho <|z_0|$.*

Définition 1.38. *On appelle rayon de convergence de la série le nombre positif* $R = Sup\{r \in \mathbb{R}^* : (a_n r^n)_n \text{ soit bornée}\}$.

Théorème 1.39. *La série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *est convergente sur tout le disque fermé* $\overline{D(0,r)}$ *pour tout* $r < R$ *et divergente sur* $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,R)}$.

1.2.2 Fonctions holomorphes

Dans tout ce qui va suivre Ω désigne un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 1.40. *Soit* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction complexe. On dit que* f *est holomorphe sur* Ω *si*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe pour tout $z_0 \in \Omega$ *et on note*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0),$$

appelée la dérivée de f *en* z_0.

L'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω *est noté* $\mathbb{H}(\Omega)$.

Proposition 1.41.

- *Si* $f \in \mathbb{H}(\Omega)$ *et* $g \in \mathbb{H}(\Omega)$ *alors* $f + g$ *et* fg *appartiennent aussi à* $\mathbb{H}(\Omega)$.
- *Si* $f \in \mathbb{H}(\Omega)$, *si* $f(\Omega) \subset \Omega'$ *et si* $g \in \mathbb{H}(\Omega')$, *alors* $g \circ f \in \mathbb{H}(\Omega)$ *et pour tout* $z_0 \in \Omega$, $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$.

Exemple 1.42.

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la fonction :* $z \longmapsto z^n$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C}$.
2. *La fonction :* $z \longmapsto \bar{z}$ *n'est holomorphe en aucun point de* $\mathbb{C}$.
3. *La fonction :* $z \longmapsto \frac{1}{z}$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C} - \{0\}$.

Corollaire 1.43. $\mathbb{H}(\Omega)$ *muni de la somme des fonctions et la multiplication par scalaire est un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$.

Proposition 1.44. *Si* f *est holomorphe alors*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \text{ avec } \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

.

Définition 1.45. *Une fonction f est dite analytique sur Ω si pour tout disque ouvert de centre z_0 et de rayon r, $D(z_0, r) \subset \Omega$, il existe $(c_n)_n \in (\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ telle que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \forall z \in D(z_0, r).$$

On note par $A(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω.

Proposition 1.46. *Les zéros d'une fonction analytique non identiquement nulle sont isolés.*

Théorème 1.47. *Si $f \in A(\Omega)$, alors $f \in \mathbb{H}(\Omega)$. De plus $f' \in A(\Omega)$.*

Corollaire 1.48. *Si $f \in A(\Omega)$ alors f a des dérivées de tout ordre et toutes ses dérivées sont dans $A(\Omega)$.*

Proposition 1.49. *Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f \in \mathbb{H}(\Omega)$ et $f' = 0, \forall z \in \Omega$, alors f est constante sur Ω.*

Définition 1.50. *On dit que $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ est biholomorphe si f est holomorphe sur Ω et bijectif et si f^{-1} est holomorphe sur Ω'.*
On dit dans ce cas que Ω et Ω' sont conformément équivalents.

Théorème 1.51. *Soit $f \in \mathbb{H}(\Omega)$, périodique de période $T = 1$, alors il existe une fonction $\widehat{f} : D(0,1) - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in D(0,1)$, $f(z) = \widehat{f}(q) \ / q = e^{2i\pi z}$, $\widehat{f}$ holomorphe sur $D(0,1) - \{0\}$, de plus les conditions suivantes sont équivalentes*

1. $\lim\limits_{\Im m z \longrightarrow +\infty} f(z)$ *existe.*
2. $\widehat{f}$ *se prolonge par holomorphie en $z_0 = 0$.*
3. f *admet un développement en série entière en $z_0 = 0$ de rayon de convergence $R \geq 1$.*

Définition 1.52. *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une application et soit $z_0 \in \Omega$. On dit que z_0 est une singularité isolée de f si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$ et f holomorphe sur $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.*

Théorème 1.53. *Soit $z_0 \in \Omega$ une singularité isolée de f et soit $f(z) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ le développement de f en série de Laurent autour de z_0. Alors l'un des trois cas se présente :*

1. *$a_n = 0$ pour tout $n < 0$ et on dit que z_0 est une singularité artificielle de f.*
2. *Il existe $m \geqslant 1$ tel que $a_n = 0$ pour tout $n < -m$ et on dit que z_0 est un pôle d'ordre m de f.*

3. *L'ensemble* $\{n \in \mathbb{N}/a_{-n} \neq 0\}$ *est infini et on dit que* z_0 *est une singularité essentielle de* f.

Définition 1.54. *On dit que* f *est méromorphe sur* Ω *s'il existe* $A \subset \Omega$ *discrète avec* $f \in \mathbb{H}(\Omega \backslash A)$ *et* A *l'ensemble des pôles de* f.

1.3 Notions d'Arithmétique

1.3.1 Nombres de Bernoulli

Définition 1.55. *Les nombres de Bernoulli* B_k *sont les coefficients dans le développement en série de* $\frac{x}{e^x-1}$ *,on a*

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k \frac{x^k}{k!}.$$

Remarques.

1. *Si* $k \geq 3$ *et* k *est impair, alors* $B_k = 0$.
2. *Les premières valeurs des nombres de Bernoulli sont*
   $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$.

1.3.2 Fonction Zêta de Riemann

Définition 1.56. *La fonction Zêta de Riemann est définie comme suit*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Avec $z \in \mathbb{C}$ *et* $Re(z) > 1$.

1.3.3 Fonction hypergéométrique

Définition 1.57. *La fonction hypergéométrique* ${}_pF_q(.;.;.)$ *est définie par*

$${}_pF_q(a_1, ..., a_p; b_1, ..., b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n ... (a_p)_n}{(b_1)_n ... (b_q)_n} \frac{z^n}{n!},$$

avec le symbole de Pochhammer $(x)_n = x(x+1)...(x+n-1)$, *et par définition* $(x)_0 = 1$. *Parfois cette fonction est appelée "Fonction hypergéométrique généralisée".*

L'appellation " fonction hypergéométrique " fait référence au cas spécial

$$ {}_2F_1(a, b, ; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}. $$

Si $a = 1$ *et* $b = c$,*la fonction hypergéométrique est réduite à la série géométrique* $1 + z + z^2 + ...$

Proposition 1.58. *Les fonctions hypergéométriques sont solutions de l'équation hypergéométrique de Gauss suivante*

$$ z(1 - z)u''(z) + (c - (a + b + 1)z)u'(z) - abu(z) = 0. $$

Chapitre 2

Formes modulaires

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux formes modulaires et leurs propriétés, exemples et lien avec les réseaux.

Définition 2.1. *On appelle demi plan de Poincaré, noté $\mathcal{H}$, l'ouvert connexe et simplement connexe de $\mathbb{C}$ des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive.*

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} / \Im m(z) > 0\}.$$

2.1 Actions homographiques

On considère le groupe $SL_2(\mathbb{R})$ formé des matrices carrés d'ordre 2 à coefficients réels et de déterminant 1.

Définition 2.2. *On appelle transformation homographique, toute application f de la forme*

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \ /a, b, c, d, z \in \mathbb{C}.$$

- *Si $c \neq 0$; f c'est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}$.*
- *Si $c = 0, d \neq 0$; f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et s'appelle transformation affine.*

Exemple 2.3.

- *La transformation $z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$ est appelée transformation de Cayley.*
- *La transformation $z \longmapsto \frac{1}{z}$ est appelée l'inversion.*

Proposition 2.4. *$SL_2(\mathbb{R})$ opère transitivement sur $\mathcal{H}$ par l'action*

$$\begin{aligned} SL_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z &\longmapsto \frac{az+b}{cz+d}, \end{aligned}$$

appelée action homographique.

Démonstration.

1. Soient $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, $z \in \mathcal{H}$, en posant $\gamma \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$, on a

$$\begin{aligned} \Im m(\gamma \cdot z) &= \Im m\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \Im m\left(\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2}\right) \\ &= \Im m\left(\frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2}\right) \\ &= \left(\frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\right)\Im m(z) \\ &= \frac{\Im m(z)}{|cz+d|^2}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

On en déduit que $\Im m(\gamma \cdot z) > 0, \forall z \in \mathcal{H}$ et donc $\gamma \cdot z \in \mathcal{H}$ pour tout $z \in \mathcal{H}$. Ceci donne l'existence de l'application

$$\begin{aligned} SL_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ (\gamma, z) &\longmapsto \gamma \cdot z. \end{aligned}$$

Reste à vérifier les deux conditions citées dans la définition (1.14).

2. Soient $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \gamma' = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ et soit $z \in \mathcal{H}$

On a $(\gamma\gamma') \cdot z = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) \cdot z = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \cdot z$

$$= \frac{(ae+bg)z + af + bh}{(ce+dg)z + cf + dh},$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned} \gamma \cdot (\gamma' \cdot z) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot z\right) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) \\ &= \frac{a\frac{ez+f}{gz+h} + b}{c\frac{ez+f}{gz+h} + d} \\ &= \frac{(ae+bg)z + af + bh}{(ce+dg)z + cf + dh}. \end{aligned}$$

3. $I_2 \cdot z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z = z, \forall z \in \mathcal{H}$.
4. Pour la transitivité de cette action, il suffit de montrer que tous les éléments de $\mathcal{H}$ ont la même orbite et qui est $\mathcal{H}$.
   On a $\forall z = x + iy \in \mathcal{H}$, il existe $\gamma = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}$ qui est dans $SL_2(\mathbb{R})$ telle que $\gamma \cdot i = z$, c'est à dire tous les éléments z de $\mathcal{H}$ sont dans la classe de i et donc $T_z = T_i$, $\forall z \in \mathcal{H}$ et l'action est transitive.

■

Remarque. *L'action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}$ n'est pas fidèle car pour $\gamma \in SL_2(\mathbb{R})$*

$$\begin{aligned}
\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \bigcap_{z \in \mathcal{H}} SL_2(\mathbb{R})_z &\iff \gamma \cdot z = z, \forall z \in \mathcal{H} \\
&\iff \frac{az+b}{cz+d} = z, \forall z \in \mathcal{H} \\
&\Longrightarrow cz^2 + (d-a)z + b = 0, \forall z \in \mathcal{H} \\
&\Longrightarrow c = b = 0 \text{ et } a = d,
\end{aligned}$$

comme $\gamma \in SL_2(\mathbb{R})$, la condition

$$\begin{aligned}
ad - bc = 1 &\Longrightarrow a^2 = 1 \\
&\Longrightarrow a = \pm 1 \\
&\Longrightarrow \gamma = \pm I_2.
\end{aligned}$$

Comme $I_2 \cdot z = z, \forall z \in \mathcal{H}$, alors $\bigcap_{z \in \mathcal{H}} SL_2(\mathbb{R})_z = \{\pm I_2\}$.

2.2 Groupe modulaire

Soit $SL_2(\mathbb{Z})$ le sous groupe de $SL_2(\mathbb{R})$ formé des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Définition 2.5. *On appelle groupe modulaire le groupe quotient $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm I_2\}$.*

Théorème 2.6. *les matrices $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ engendrent $SL_2(\mathbb{Z})$.*

Démonstration. Remarquons que : $\forall n \in \mathbb{Z}$; $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S^2 = -I_2$, $ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $(ST)^3 = -I_2$. Notons $G = \langle S, T \rangle$ le sous groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ engendré par S et T. Il suffit de montrer que $SL_2(\mathbb{Z}) \subset G$.
Supposons le contraire, $SL_2(\mathbb{Z}) \setminus G \neq 0$ et $\gamma \notin G$.

Soient $\mathcal{F} = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \wedge \gamma \notin G\}$ et $\gamma_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}$ avec $\mid a_0 \mid \leqslant \mid a \mid, \forall a \in \mathbb{Z}$, tel que $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{F}$. Nécessairement $a_0 \neq 0$ car sinon $a_0 d_0 - b_0 c_0 = 1$, ceci implique $-b_0 c_0 = 1$ et donc $-b_0 = c_0 = \pm 1$
donc $\gamma_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \mp 1 & d_0 \end{pmatrix} = \pm ST^{\pm d_0} \in G$, ce qui est absurde avec le fait que $\gamma_0 \notin G$.
Soit q le quotient de la division euclidienne de $-b_0$ par a_0, alors $-b_0 = a_0 q + r$ avec $\mid r \mid < \mid a_0 \mid$. On a la matrice :
$\gamma_0 T^q(-S) = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 q + b_0 & -a_0 \\ c_0 q + d_0 & -c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & -a_0 \\ c_0 q + d_0 & -c_0 \end{pmatrix}$ et $\gamma_0 T^q(-S) \in \mathcal{F}$ avec $\mid r \mid < \mid a_0 \mid$, ce qui contredit la minimalité de $\mid a_0 \mid$.
D'où $SL_2(\mathbb{Z}) \subset G$ et donc $SL_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T \rangle$.

■

2.3 Formes modulaires

Définition 2.7. *Soit $k \in \mathbb{Z}$. Une fonction $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ est appelée forme modulaire de poids k sur $SL_2(\mathbb{Z})$ si elle vérifie*

1. *f est holomorphe sur $\mathcal{H}$.*
2. *Pour toute matrice $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$,et tout $z \in \mathcal{H}$*

$$(f \underset{k}{|} \gamma)(z) = f(z)$$

tel que

$$(f \underset{k}{|} \gamma)(z) = (cz+d)^{-k} f(\gamma z).$$

3. *La fonction f est holomorphe à l'infini, i.e, $f(z)$ admet une limite finie quand $\Im m(z) \to +\infty$ (notée $f(\infty)$).*

L'ensemble des formes modulaires de poids $k \in \mathbb{Z}$ est noté M_k.

Remarques.

1. *La seconde condition s'appelle condition de modularité.*
2. *Si $f \in M_k$ alors f est périodique de période 1. En effet on prend la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ dans la condition de modularité,on obtient $(1)^{-k} f(z+1) = f(z)$.*

3. *Les formes modulaires de poids impair sont identiquement nuls. En effet on prend la matrice $\gamma = -I$ dans la condition de modularité,on obtient $(-1)^{-k} f(\frac{-z}{-1}) = f(z)$, c'est à dire ,$-f(z) = f(z)$ et donc $f(z) = 0, \forall z \in \mathcal{H}$.*

Proposition 2.8. *Soit $f \in M_k$. Soit $\rho = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.*

1. *Si k n'est pas un multiple de 4 alors $f(i) = 0$.*
2. *Si k n'est pas un multiple de 6 alors $f(\rho) = 0$.*

Démonstration. Soit $f \in M_k$.

1. Si k n'est pas un multiple de 4,
   On a $f(i) = (f\underset{k}{|}S)(i) = i^{-k} f(i)$ donc $f(i) = 0$.
2. Si k n'est pas un multiple de 6 ,
   On a $ST\rho = \frac{-1}{\rho+1} = \rho$.
   Donc $f(\rho) = (f\underset{k}{|}ST)(\rho) = \rho^{-k} f(\rho)$ donc $f(\rho) = 0$.

$\blacksquare$

Proposition 2.9. *Soit $\mathbb{H}(\mathcal{H})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}$, on a alors M_k est un sous espace vectoriel de $\mathbb{H}(\mathcal{H})$.*

Démonstration.

- $M_k \neq \emptyset$ car la fonction nulle notée 0 est un élément de M_k.
- $M_k \subset \mathbb{H}(\mathcal{H})$, car toute forme modulaire est holomorphe sur $\mathcal{H}$.
- $\forall f, g \in M_k, \forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), z \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}
((f+g)\underset{k}{|}\gamma)(z) &= (cz+d)^{-k}(f+g)(\gamma z) \\
&= (cz+d)^{-k}(f(\gamma z) + g(\gamma z)) \\
&= (cz+d)^{-k} f(\gamma z) + (cz+d)^{-k} g(\gamma z) \\
&= (f\underset{k}{|}\gamma)(z) + (g\underset{k}{|}\gamma)(z) \\
&= f(z) + g(z) \\
&= (f+g)(z).
\end{aligned}$$

Comme $f + g \in \mathbb{H}(\mathcal{H})$ et $\lim\limits_{\Im m z \to +\infty} (f+g)$ existe, alors $f + g \in M_k$.

- $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f \in M_k, \forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), z \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}((\alpha \cdot f)\underset{k}{|}\gamma))(z) &= (cz+d)^{-k} \cdot (\alpha f)(\gamma z) \\ &= (cz+d)^{-k} \cdot \alpha \cdot f(\gamma z) \\ &= \alpha \cdot (cz+d)^{-k} f(\gamma z) \\ &= \alpha \cdot (f\underset{k}{|}\gamma)(z) \\ &= \alpha \cdot f(z) \\ &= (\alpha \cdot f)(z).\end{aligned}$$

Comme $\alpha \cdot f \in \mathbb{H}(\mathcal{H})$ et $\lim\limits_{\Im m z \to +\infty} (\alpha \cdot f)$ existe, alors $\alpha \cdot f \in M_k$.
D'où M_k est un sous espace vectoriel de $\mathbb{H}(\mathcal{H})$

■

Proposition 2.10.

1. *Les sous espaces vectoriels M_k, pour $k \in \mathbb{N}$, sont en somme directe .*
2. *$\forall (k, k') \in \mathbb{N}^2$, $M_k M_{k'} \subset M_{k+k'}$*

Démonstration.

1. Pour montrer que les M_k sont en somme directe pour $k \in \mathbb{N}$, il suffit de montrer que les M_k sont en somme directe pour n'importe quel ensemble fini $\{k_1, ..., k_n\} \subset \mathbb{N}$.
On montre par récurrence
    - Pour $n = 1$, c'est évident.
    - supposons le résultat établi à l'orde $n - 1$.
    Soient $(f_1, ..., f_n) \in M_{k_1} \times ... \times M_{k_n}$ telles que $\sum_{i=1}^{n} f_i = 0$.
    Pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, $z \in \mathcal{H}$
    $$\sum_{i=1}^{n} f_i(\gamma z) = 0,$$
    alors
    $$\sum_{i=1}^{n} (cz+d)^{k_i} f_i(z) = 0.$$
    On fixe $z \in \mathcal{H}$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on prend $\gamma = \begin{pmatrix} 1-p & -p^2 \\ 1 & 1+p \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$
    $$\sum_{i=1}^{n} (z+1+p)^{k_i} f_i(z) = 0.$$

Alors, l'ensemble des racines du polynôme

$$\sum_{i=1}^{n}(z+1+X)^{k_i}f_i(z)=0.$$

est infini (car tout les entiers sont des racines) et donc ce polynôme est nul. Notons par k le plus grand poids, alors $f_k=0$. et d'après l'hypothèse de récurrence on trouve que $f_i=0, \quad \forall i\in\{1,...,n\}$.

2. Soient $f\in M_k, g\in M_{k'}$, donc $(f\underset{k}{|}\gamma)(z)=f(z)$ et $(g\underset{k'}{|}\gamma)(z)=g(z), \forall z\in\mathcal{H}, \forall\gamma\in SL_2(\mathbb{Z})$.On a

$$\begin{aligned}(fg\underset{k+k'}{|}\gamma)(z) &= (cz+d)^{-(k+k')}(fg)(\gamma z)\\ &= (cz+d)^{-(k+k')}f(\gamma z)g(\gamma z)\\ &= (cz+d)^{-k}f(\gamma z)(cz+d)^{-k'}g(\gamma z)\\ &= (f\underset{k}{|}\gamma)(z)(g\underset{k'}{|}\gamma)(z)\\ &= f(z)g(z)\\ &= (fg)(z).\end{aligned}$$

Comme f et g sont holomorphes et $\lim\limits_{\Im m z\to+\infty}(f\cdot g)(z)$ existe, alors $f\cdot g\in M_{k+k'}$. D'où $M_kM_{k'}\subset M_{k+k'}$.

■

Corollaire 2.11. $M_*=\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{N}}M_k$ *est une algèbre graduée.*

Proposition 2.12. *Tout élément f dans M_k admet un développement appelé développement de Fourier de la forme*

$$f(z)=\sum_{n\geq 1}\widehat{f}(n)q^n, \quad q=e^{2i\pi z},$$

normalement convergent sur toute partie de $\mathcal{H}$ vérifiant $Imz>A, A\in\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. Soit $f\in M_k$, comme $f\in\mathbb{H}(\mathcal{H})$ et f est périodique de période égale à 1, il existe, d'après le théorème (1.51), $\widehat{f}:D-\{0\}\longrightarrow\mathbb{C}$ tel que $f(z)=\widehat{f}(q)$, $q=e^{2i\pi z}$, holomorphe sur $D-\{0\}$. Comme $\lim\limits_{\Im m z\to+\infty}f(z)$ existe, $\widehat{f}$ est holomorphe en 0 et assure l'existence d'un tel développement. ■

Définition 2.13. *Une fonction $f:\mathcal{H}\longrightarrow\mathbb{C}$ holomorphe sur $\mathcal{H}$ est holomorphe à l'infini si $\widehat{f}$ est holomorphe en 0.*

Définition 2.14. *On appelle forme parabolique toute fonction* $f = \sum_{n\geq 0} \widehat{f}(n)q^n \in M_k$ *vérifiant* $\widehat{f}(0) = 0$ *avec* $q = e^{2i\pi z}$ *.*
L'ensemble de ces formes est noté S_k*.*

Proposition 2.15. S_k *est un sous espace vectoriel de* M_k *.*

Démonstration.

- Il est clair que $S_k \subset M_k$ et que $S_k \neq \emptyset$.
- $\forall f, g \in S_k$, si $f = \sum_{n\geq 0} \widehat{f}(n)q^n$ et $g = \sum_{n\geq 0} \widehat{g}(n)q^n$ alors $f + g = \sum_{n\geq 0} c_n q^n = \sum_{n\geq 0} (\widehat{f}(n) + \widehat{g}(n))q^n$, avec $c_0 = \widehat{f}(0) + \widehat{g}(0) = 0$.
  Donc $f + g \in S_k$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{C}, f \in S_k : (\alpha \cdot f)(z) = \sum_{n\geq 0} c_n q^n = \alpha \sum_{n\geq 0} \widehat{f}(n)q^n = \sum_{n\geq 0} \alpha\widehat{f}(n)q^n$.
  D'où $c_0 = \alpha \cdot \widehat{f}(0) = 0$.
  Donc $\alpha \cdot f \in S_k$.

$\blacksquare$

2.4 Exemples sur les formes modulaires

2.4.1 Séries d'Eisenstein

Définition 2.16. *Soit* $k \geq 4$ *tel que* k *est un entier pair. La série d'Eisenstein d'indice* k *est définie comme suit*

$$G_k(z) = \frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k} \sum_{(n,m)\in(\mathbb{Z}^2)^*} \frac{1}{(mz+n)^k}, \text{ pour } z \in \mathcal{H}.$$

G_k *converge uniformément* $\forall z \in \Omega$ *tel que* $\Omega = \{z \in \mathcal{H}/\Im m(z) \geqslant \eta, \mid Re(z) \mid \leqslant \delta\}$ *avec* $\eta > 0$ *et* $\delta > 0$ *.*

Proposition 2.17. *Soit* $k \geq 4$ *tel que* k *est un entier pair, alors* G_k *est une forme modulaire de poids* k*.*

Démonstration. Soient $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, $z \in \mathcal{H}$

$$G_k(\gamma z) = \frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k} \sum_{(n,m)\in(\mathbb{Z}^2)^*} \frac{1}{(m\gamma z+n)^k}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k} \sum_{(n,m)\in(\mathbb{Z}^2)^*} \frac{1}{(m\frac{az+b}{cz+d}+n)^k} \\
&= (cz+d)^k \frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k} \sum_{(n,m)\in(\mathbb{Z}^2)^*} \frac{1}{((am+cn)z+bm+dn)^k} \\
&= (cz+d)^k \frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k} \sum_{(n',m')\in(\mathbb{Z}^2)^*} \frac{1}{(m'\gamma z+n')^k} \\
&= (cz+d)^k G_k(z).
\end{aligned}$$

car il existe une bijection

$$\begin{aligned}
f : (\mathbb{Z}^2)^* &\longrightarrow (\mathbb{Z}^2)^* \\
(m,n) &\longmapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = (am+cn, bm+dn)
\end{aligned}$$

Dont l'inverse est

$$\begin{aligned}
f^{-1} : (\mathbb{Z}^2)^* &\longrightarrow (\mathbb{Z}^2)^* \\
(m,n) &\longmapsto \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On montre maintenant que G_k est holomorphe à l'infini. $G_k(z)$ a une limite quand $\Im m(z) \to +\infty$.

Pour calculer cette limite on peut restreindre z à Ω où G_k converge uniformément. On peut passer à la limite terme à terme

$$\begin{aligned}
\lim_{Im(z)\to+\infty} G_k(z) &= \frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k} \sum_{(m,n)\in(\mathbb{Z}^2)^*} \lim_{\Im m(z)\to+\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} \\
&= \frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k} \sum_{(m,n)\in(\mathcal{Z}^2)^*} \frac{1}{n^k} \\
&= \frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k} \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \frac{1}{n^k} = \frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k} \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} \right) \\
&= \frac{(k-1)!}{(2i\pi)^k} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{(k-1)!}{(2i\pi)^k} \zeta(k).
\end{aligned}$$

où ζ est la fonction définie dans la définition 1.56.

D'où G_k est holomorphe sur $\mathcal{H}$.

Donc G_k est une forme modulaire de poids k. ■

- Développement de Fourier des séries d'Eisenstein G_k

Proposition 2.18. *[7] Le développement de Fourier de G_k, pour $k \geq 4$ est donné par*

$$G_k(z) = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n\geq 1} \sigma_{k-1}(n)q^n$$

tel que

- *B_k est le k^e nombre de Bernoulli défini précédemment (Définition 1.55).*
- *Pour $z \in \mathbb{C}$*

$$\sigma_z(n) = \sum_{\substack{d\in\mathbb{N}^* \\ d\backslash n}} d^z.$$

On privilégie parfois le fait que le premier coefficient (le coefficient constant) du développement de Fourier soit égal à 1. Pour cela on introduit la définition suivante

Définition 2.19. *Pour tout $k \geq 4$ tel que k est un entier pair,on définit la série d'Eisenstein normée par*

$$E_k = -\frac{2k}{B_k} G_k,$$

dont le développement de Fourier est donné par

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n\geq 1} \sigma_{k-1}(n)q^n.$$

En particulier,

$$\begin{aligned}
\text{Si } k = 4\ ;\ E_4(z) &= 1 + 240 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_3(n)q^n \\
&= 1 + 240q + 2160q^2 + 6720q^3 + 17520q^4 + 30240q^5 + 60480q^6 + O(q^7) \\
\text{Si } k = 6\ ;\ E_6(z) &= 1 - 504 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_5(n)q^n \\
&= 1 - 504q - 16632q^2 - 122976q^3 - 532728q^4 - 1575504q^5 - 4058208q^6 + O(q^7).
\end{aligned}$$

2.4.2 La fonction Δ

Définition 2.20. *On définit la fonction Δ par*

$$\Delta = \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728}.$$

tel que $E_4^3 = (E_4)^3$ et $E_6^2 = (E_6)^2$.

Proposition 2.21. *La fonction* Δ *est une forme parabolique de poids* 12.

Démonstration. Soient $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, $z \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}
(\Delta \underset{12}{|} \gamma)(z) &= (cz+d)^{-12}\Delta(\gamma z) \\
&= (cz+d)^{-12}\frac{E_4^3(\gamma z) - E_6^2(\gamma z)}{1728} \\
&= \frac{((cz+d)^{-4}E_4(\gamma z))^3 - ((cz+d)^{-6}E_6(\gamma z))^2}{1728} \\
&= \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728} \\
&= \Delta(z).
\end{aligned}$$

Il est clair par considération des développements de Fourier de E_4 et E_6 que le premier coefficient de développement de Fourier de Δ est nul, ce qui est équivalent à dire que Δ s'annule à l'infini. ∎

2.5 Dimension de M_k

Dans cette partie,on donne la dimension de l'espace M_k. Si f est une fonction méromorphe sur $\mathcal{H}$ non identiquement nulle et $z_0 \in \mathcal{H}$, on note $v_{z_0}(f)$ l'ordre de f en z_0, c'est l'entier n tel que $f/(z-z_0)^n$ soit holomorphe et non nulle en z_0. De plus, si $f = \sum_n \widehat{f}(n)q^n$, notons $v_\infty(f) = min\{n/\widehat{f}(n) \neq 0\}$.

Lemme 2.22. *[7] Soit f une fonction modulaire de poids k, non identiquement nulle. On a alors la formule suivante*

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_j(f) + \sum_{\substack{z\in\mathbb{H} \\ z\neq i,j}} v_z(f) = \frac{k}{12}.$$

où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Corollaire 2.23. *Si* $k < 0$ *ou* $k = 2$ *alors* $M_k = S_k = \{0\}$.

Démonstration. Si f est un élément non nul de M_k. Par définition, f est holomorphe, donc l'ordre de f en tout point z est positif, alors tous les termes du membre gauche de la formule

$$v_\infty + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_j(f) + \sum_{\substack{z\in\mathbb{H} \\ z\neq i,j}} v_z(f) = \frac{k}{12}$$

sont positifs, d'où k est positif. Si on suppose que f est une forme modulaire de poids 2 donc $\frac{1}{6} = n_1 + \frac{n_2}{2} + \frac{n_3}{3}$, alors $6n_1 + 3n_2 + n_3 = 1$, avec n_i des entiers positifs, ce qui est impossible. ■

Proposition 2.24. *Pour $k \geqslant 4$ tel que k pair, $M_k = \langle G_k \rangle \bigoplus S_k$, $\langle G_k \rangle$ le sous espace vectoriel de M_k engendré par G_k.*

Démonstration. On a

$$G_k \in M_k, S_k \subset M_k \Longrightarrow S_k + \langle G_k \rangle \subset M_k. \tag{2.2}$$

Soit $f \in M_k$, puisque $\widehat{G_k}(0) \neq 0$ on a

$$\frac{\widehat{f}(0)}{\widehat{G_k}(0)} G_k \in \langle G_k \rangle \text{ et } f - \frac{\widehat{f}(0)}{\widehat{G_k}(0)} G_k \in S_k,$$

d'où il existe $g \in S_k$ tel que $f = \frac{\widehat{f}(0)}{\widehat{G_k}(0)} G_k + g$ et donc

$$M_k \subset S_k + \langle G_k \rangle. \tag{2.3}$$

De (2.2) et (2.3) on a $M_k = S_k + \langle G_k \rangle$. Comme $G_k \notin S_k$ et $\langle G_k \rangle = \mathbb{C}G_k$ donc $\langle G_k \rangle \bigcap S_k = \{0\}$.
D'où S_k et $\langle G_k \rangle$ sont en somme directe alors $M_k = \langle G_k \rangle \oplus S_k$. ■

Proposition 2.25. $S_k \simeq M_{k-12}$.

Démonstration. Soit $f \in S_k$, comme $\Delta \in S_{12}$ alors $\frac{f}{\Delta} \in M_{k-12}$, on peut considérer l'application $\varphi : S_k \longrightarrow M_{k-12}$ tel que $\varphi(f) = \frac{f}{\Delta}$. φ est linéaire, injective. De plus $\forall g \in M_{k-12}$, $\exists f = \Delta g \in M_{k-12+12} = M_k$ tel que $\varphi(\Delta g) = \frac{\Delta g}{\Delta} = g$.
De plus

$$\begin{aligned} \Delta \in S_k &\Longrightarrow \widehat{\Delta}(0) = 0 \\ &\Longrightarrow \widehat{\Delta}(0)\widehat{g}(0) = (\widehat{\Delta g})(0) = 0 \\ &\Longrightarrow \widehat{f}(0) = 0. \end{aligned}$$

D'où $\Delta g \in S_k$ et φ est surjective.
Alors φ est bijective donc $S_k \simeq M_{k-12}$. ■

Lemme 2.26. *Le sous espace S_k est le noyau de l'application linéaire ϕ définie sur M_k par*

$$f \longmapsto f(\infty)$$

De plus $dim(M_k/S_k) \leq 1$.

Démonstration. Montrons que

$$\phi : M_k \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$f \longmapsto \phi(f) = f(\infty)$$

est une application linéaire.
Soient $f, g \in M_k$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\phi(\alpha f + \beta g) &= (\alpha f + \beta g)(\infty) = (\alpha f)(\infty) + (\beta g)(\infty)\\ &= \alpha f(\infty) + \beta g(\infty)\\ &= \alpha\phi(f) + \beta\phi(g).\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}Ker(\phi) &= \{f \in M_k / \phi(f) = 0\}\\ &= \{f \in M_k / f(\infty) = 0\}\\ &= \{f \in M_k / \widehat{f}(0) = 0\} = S_k.\end{aligned}$$

Donc par le premier théorème d'isomorphisme des espaces vectoriels on trouve que $M_k \backslash S_k \simeq \Im m(\phi)$, ce dernier est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}$, alors sa dimension est inférieure ou égal 1, donc $dim\frac{M_k}{S_k} \leq 1$. ■

Théorème 2.27. *Pour $k \in \{0, 4, 6, 8, 10\}$, M_k est un espace de dimension 1 admettant respectivement comme base 1, G_4, G_6, G_8, G_{10}, de plus $S_k = \{0\}$.*

Démonstration. Si $k \leq 10 \Longrightarrow k-12 < 0$ et donc $S_k = \{0\}$, alors $dim(M_k) \leq 1$. Comme 1, G_4, G_6, G_8 et G_{10} sont des éléments non nuls de $M_0, M_4, M_6, M_8, M_{10}$ respectivement, donc $dim(M_k) = 1$ pour $k \in \{0, 4, 6, 8, 10\}$. ■

Corollaire 2.28. *Pour $k = 12$, $dimM_k = 2$.*

Démonstration. On a $M_{12} = \langle G_{12}\rangle \oplus S_{12}$ avec $S_{12} \simeq M_0$ qui est de dimension 1 (et même engendré par la forme parabolique Δ de poids 12). Donc $dimM_{12} = dim < G_{12} >$ $+dim(S_{12}) = 2$. ■

Corollaire 2.29. *Si M_k est de dimension d, alors M_{k+12} est de dimension $d + 1$.*
Résumons ceci dans un tableau.

k	<0	0	2	4	6	8	10	12	...	k	...	$k+12$	...
$dimM_k$	0	1	0	1	1	1	1	2	...	d	...	$d+1$	...

Théorème 2.30. *L'ensemble*

$$\mathcal{B}_k = \{E_4^\alpha E_6^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{N} \mid 4\alpha + 6\beta = k\}$$

est une base de M_k.

Démonstration. D'abord, on montre que $\mathcal{B}_k$ est une partie de M_k pour tout $k \geq 12$. On a pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ tels que $4\alpha + 6\beta = k$, $E_4^\alpha \in M_{4\alpha}$ et $E_6^\beta \in M_{6\beta}$, donc $E_4^\alpha E_6^\beta \in M_{4\alpha+6\beta} = M_k$.
On montre maintenant que $\mathcal{B}_k$ engendre M_k.
Le cas où $k \in \{0, ..., 10\}$ est vérifié (théorème 2.27), il suffit de prendre (α, β) égale respectivement à $(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1)$.
Pour $k \geq 10$, on montre par récurrence sur k.
Le cas où $k = 10$ est déjà vérifié ci-dessus. Soit $k \geq 12$, soit $f \in M_k$, il existe $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{N}$ tels que $4\alpha_0 + 6\beta_0 = k$, donc

$$f - \widehat{f}(0) E_4^{\alpha_0} E_6^{\beta_0} \in S_k$$

alors, il existe $g \in M_{k-12}$ telle que

$$f - \widehat{f}(0) E_4^{\alpha_0} E_6^{\beta_0} = \Delta g,$$

avec

$$g = \sum_{4\alpha+6\beta=k-12} \lambda_{\alpha,\beta} E_4^\alpha E_6^\beta$$

d'où

$$\begin{aligned} f &= \Delta g + \widehat{f}(0) E_4^{\alpha_0} E_6^{\beta_0} \\ &= \frac{1}{1728} \sum_{4(\alpha+3)+6\beta=k} \lambda_{\alpha,\beta} E_4^{(\alpha+3)} E_6^\beta - \frac{1}{1728} \sum_{4\alpha+6(\beta+2)=k} \lambda_{\alpha,\beta} E_4^\alpha E_6^{(\beta+2)} + \widehat{f}(0) E_4^{\alpha_0} E_6^{\beta_0}. \end{aligned}$$

On montre que $\mathcal{B}_k$ est libre.
Le cas où $k \in \{0, ..., 10\}$ est trivial car E_4 et E_6 sont différentes de la fonction nulle.
Pour $k \geq 10$, on montre par récurrence, le cas où $k = 10$ est déjà vérifié ci-dessus.
Soit $k \geq 12$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ vérifient $4\alpha + 6\beta = k$ soit $\lambda_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}$ tels que

$$\sum_{4\alpha+6\beta=k} \lambda_{\alpha,\beta} E_4^\alpha E_6^\beta = 0. \tag{2.4}$$

Pour $z = i$, on a $E_6(i) = 0$ (proposition 2.8), donc l'égalité (2.4) est équivalente à

$$\sum_{4\alpha=k} \lambda_{\alpha,\beta} E_4^\alpha(i) = 0$$

et comme $E_4(i) \neq 0$, on trouve $\lambda_{\frac{k}{4},0} = 0$.
On peut déduire que si $\lambda_{\alpha,\beta}$ est différent de zéro alors β est différent de zéro.

Ainsi, s'il existe un $\beta \neq 0$ tel que $4\alpha + 6\beta = k$ et vérifie la relation (2.4), alors la relation (2.4) devient

$$\sum_{4\alpha+6\beta=k} \lambda_{\alpha,\beta} E_4^\alpha E_6^\beta = 0$$

avec les β non nuls.

Comme les β sont différents de zéro

$$\sum_{4\alpha+6\beta=k} \lambda_{\alpha,\beta} E_4^\alpha E_6^\beta = \sum_{4\alpha+6\beta=k} \left(\lambda_{\alpha,\beta} E_4^\alpha E_6^{\beta-1}\right) E_6 = 0$$

alors

$$\sum_{4\alpha+6(\beta-1)=k-6} \lambda_{\alpha,\beta} E_4^\alpha E_6^{\beta-1} = 0$$

par récurrence sur k on déduit que tout les $\lambda_{\alpha,\beta}$ sont nuls. ■

Corollaire 2.31. $M_* = \mathbb{C}[E_4, E_6]$.

2.6 Formes modulaires et réseaux

Définition 2.32. *Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.*
Un réseau de V est un sous-groupe Ω de V tel qu'il existe une $\mathbb{R}$-base $(w_1, ..., w_n)$ de V qui soit une $\mathbb{Z}$-base de Ω (i.e $\Omega = \mathbb{Z}w_1 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}w_n$).

Considérons $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On note par $\mathcal{R}$ l'ensemble des réseaux de $\mathbb{C}$, et par B l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}^2$ de la forme (w_1, w_2) tels que $\{w_1, w_2\}$ est une base de $\mathbb{C}$: il est bien sûr équivalent de demander $w_2 \in \mathbb{C}^*$ et $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$, on note de plus B^+ le sous ensemble de B des bases (w_1, w_2) telles que $\Im m(\frac{w_1}{w_2}) > 0$ (i.e, $\frac{w_1}{w_2} \in \mathcal{H}$).
Pour un couple $(w_1, w_2) \in B$ on associe le réseau

$$\Omega(w_1, w_2)$$

de base (w_1, w_2) . on a alors la surjection

$$\begin{array}{ccc} B & \to & \mathcal{R} \\ (w_1, w_2) & \mapsto & \Omega(w_1, w_2). \end{array}$$

Proposition 2.33. *Deux éléments (w_1, w_2), $(w_1', w_2') \in B^+$ définissent le même réseau si et seulement si (w_1, w_2) et (w_1', w_2') sont congrus modulo $SL_2(\mathbb{Z})$ (i.e, $\exists \gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$).*

Démonstration. Supposons que (w_1, w_2), $(w'_1, w'_2) \in B^+$ avec $\Omega(w_1, w_2) = \Omega(w'_1, w'_2)$, (w_1, w_2) et (w'_1, w'_2) sont deux bases de $\mathbb{C}$, alors il existe une matrice de passage $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

alors $(w'_1, w'_2) = (aw_1 + bw_2, cw_1 + dw_2)$, et comme $w'_1, w'_2 \in \Omega(w_1, w_2) = w_1\mathbb{Z} \oplus w_2\mathbb{Z}$, alors $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, donc $det(P) = ad - cb \in \mathbb{Z}$ alors $det(P) = \pm 1$.
On pose $z = \frac{w_1}{w_2}$, $z' = \frac{w'_1}{w'_2}$, alors

$$z' = \frac{az + b}{cz + d},$$

donc

$$\Im m(z') = det(P)\frac{\Im m(z)}{|cz + d|^2}, \tag{2.5}$$

Si $det(P) = -1$ alors $\Im m(z)$ et $\Im m(z')$ ne sont pas de même signe, ce qui contredit le fait que (w_1, w_2), $(w'_1, w'_2) \in B^+$, d'où $det(P) = 1$.
Réciproquement, soient $(w_1, w_2), (w'_1, w'_2) \in B^+$, supposons il existe $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

donc $w'_1 = aw_1 + bw_2$ et $w'_2 = cw_1 + dw_2$, alors $\Omega(w_1, w_2) \subset \Omega(w'_1, w'_2)$ (car $\mathbb{Z}w'_1, \mathbb{Z}w'_2 \in \Omega(w_1, w_2)$ et $\Omega(w_1, w_2)$ est un groupe), et considérons la matrice inverse on obtient l'égalité. ■

Lemme 2.34. *Le groupe $\mathbb{C}^*$ agit naturellement sur $\mathcal{R}$ par*

$$(\lambda, \Omega(w_1, w_2))) \mapsto \lambda.\Omega(w_1, w_2) = \Omega(\lambda w_1, \lambda w_2) \qquad (w_1, w_2) \in B.$$

Proposition 2.35. *L'application $z \mapsto z\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, induit une bijection*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}/SL_2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathcal{R}/\mathbb{C}^* \\ \bar{z} \quad &\longmapsto \overline{z\mathbb{Z} + \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Démonstration. On montre d'abord que $\bar{z} \mapsto \overline{z\mathbb{Z} + \mathbb{Z}}$ est bien une application.
Soient $z, z' \in \mathcal{H}$ tels que $\bar{z} = \bar{z'}$, alors il existe $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(z)$ telle que

$$z' = \gamma z = \frac{az + b}{cz + d}$$

alors

$$\begin{aligned}
\overline{z'\mathbb{Z}+\mathbb{Z}} &= \overline{\frac{az+b}{cz+d}\mathbb{Z}+\mathbb{Z}} \\
&= \overline{(az+b)\mathbb{Z}+(cz+d)\mathbb{Z}} \\
&= \overline{z\mathbb{Z}+\mathbb{Z}}.
\end{aligned}$$

car

$$\begin{pmatrix} az+b \\ cz+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On montre maintenant que cette application est injective :
Soient$z, z' \in \mathcal{H}$ tels que $\overline{z'\mathbb{Z}+\mathbb{Z}} = \overline{z\mathbb{Z}+\mathbb{Z}}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $z'\mathbb{Z}+\mathbb{Z} = \lambda z\mathbb{Z}+\lambda\mathbb{Z}$. Donc d'après la proposition 2.33 il existe $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que

$$\begin{pmatrix} z' \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \lambda z \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

alors $z' = a\lambda z + b\lambda$, $1 = c\lambda z + b\lambda$.

$$z' = \frac{z'}{1} = \frac{a\lambda z + b\lambda}{c\lambda z + d\lambda} = \frac{az+b}{cz+d} = \gamma z,$$

donc $\bar{z'} = \bar{z}$.
On montre la surjectivité :
Soit $w_1\mathbb{Z} + w_2\mathbb{Z} \in \mathcal{R}$, avec $(w_1, w_2) \in B$, alors $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$.
• Si $\Im m(\frac{w_1}{w_2}) > 0$, on considère $z = \frac{w_1}{w_2} \in \mathcal{H}$, l'image de $\bar{z}$ est $\overline{\frac{w_1}{w_2}\mathbb{Z}+\mathbb{Z}} = \overline{w_2^{-1}(w_1\mathbb{Z}+w_2\mathbb{Z})} = \overline{w_1\mathbb{Z}+w_2\mathbb{Z}}$.
• Si $\Im m(\frac{w_1}{w_2}) < 0$, ona $w_1\mathbb{Z} - w_2\mathbb{Z} = w_1\mathbb{Z} + w_2\mathbb{Z}$ car

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ -w_2 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad \text{et } \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}) \text{ avec } det(\gamma) = -1.$$

Posons $z = \frac{w_1}{w_2} \in \mathcal{H}$ et $z' = \frac{w_1}{-w_2} \in \mathcal{H}$, d'après la relation 2.5 on déduit que $z' \in \mathcal{H}$. Alors on considère $z' = \frac{w_1}{-w_2} \in \mathcal{H}$, l'image de $\bar{z'}$ est $\overline{z'\mathbb{Z}-\mathbb{Z}} = \overline{w_1\mathbb{Z}-w_2\mathbb{Z}} + \overline{w_1\mathbb{Z}+w_2\mathbb{Z}}$.

■

Définition 2.36. *Soit F une fonction sur $\mathcal{R}$.*
On dit que F est homogène de poids k, si $\forall\ \Omega \in \mathcal{R}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$

$$F(\lambda\Omega) = \lambda^{-k}F(\Omega).$$

Remarque. $\Omega = \Omega(w_1, w_2)$, *on peut écrire F comme fonction de (w_1, w_2), alors on peut dire que F est homogène de poids k, si $\forall\ (w_1, w_2) \in B^+$, $\forall\lambda \in \mathbb{C}^*$*

$$F(\lambda w_1, \lambda w_2) = \lambda^{-k}F(w_1, w_2).$$

On pose $\lambda = w_2^{-1}$*, cela implique que* $w_2^k F(w_1, w_2)$ *dépend uniquement de* $z = \frac{w_1}{w_2}$*, donc on peut écrire*

$$F(w_1, w_2) = w_2^{-K} f\left(\frac{w_1}{w_2}\right), \qquad f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}.$$

Alors, f *vérifie la condition de modularité de poids* k*.*
Soient $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(z)$*,* $z \in \mathcal{H}$

$$f(\gamma z) = f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k F(az+b, cz+d) = (cz+d)^k F(z,1) = (cz+d)^k f(z).$$

Chapitre 3

Structures différentielles

Dans ce chapitre on va introduire deux extensions isomorphes de l'espace des fonctions modulaires, aussi les crochets de Rankin-Cohen et quelques opérateurs différentiels sur ces espaces.

On aimerait bien avoir un opérateur différentiel laissant stable par dérivation l'algèbre graduée $M_* = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} M_k$.

la première idée est de considérer la dérivée usuelle

$$Df(z) = \frac{1}{2\pi i} f'.$$

Soit $f \in M_k$ non constante, donc pour tout matrice $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), z \in \mathcal{H}$

$$(cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = f(z)$$

on dérive, on trouve

$$\frac{1}{2\pi i}(cz+d)^{-2} f'\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{1}{2\pi i}\left[(cz+d)^k f'(z) + kc(cz+d)^{k-1} f(z)\right]$$

alors

$$(cz+d)^{-k-2} Df\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = Df(z) + \frac{k}{2\pi i}\frac{c}{cz+d} f(z) \tag{3.1}$$

Si on suppose par l'absurde que Df est une forme modulaire de poids l, donc $\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), \forall z \in \mathcal{H}$

$$Df(\gamma z) = (cz+d)^l Df(z) \tag{3.2}$$

De (3.2) et(3.1) on obtient

$$\left((cz+d)^l-(cz+d)^{k+2}\right)Df(z)=\frac{k}{2\pi i}c(cz+d)^{k+1}f(z).$$

Soit $p\in\mathbb{Z}$, on prend $\gamma=\begin{pmatrix}1-p & -p^2\\ 1 & 1+p\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})$, alors

$$\left((z+1+p)^l-(z+1+p)^{k+2}\right)Df(z)-\frac{k}{2\pi i}(z+1+p)^{k+1}f(z)=0.$$

Pour $z\in\mathcal{H}$ fixé, les entiers sont des racines du polynôme

$$\left((z+1+X)^l-(z+1+X)^{k+2}\right)Df(z)-\frac{k}{2\pi i}(z+1+X)^{k+1}f(z).$$

donc l'ensemble des racines de ce polynôme est infini, donc ce polynôme est nul.
Si $l=k+2$, alors $f(z)=0$, sinon $Df(z)=0$, dans les deux cas on aura une contradiction avec le fait que f n'est pas constante.

Ce qui signifie que la dérivée d'une forme modulaire n'est pas une forme modulaire. On cherche alors d'agrandir l'espace des formes modulaires de façon à obtenir un espace stable par dérivation.

3.1 Formes quasi-modulaires

Définition 3.1. *Soit $(k,n)\in\mathbb{N}$. Une fonction $f:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ est appelée forme quasi-modulaire de poids k et de profondeur s, s'il existe des fonctions $f_0,...,f_s$ holomorphes sur $\mathcal{H}$ où f_s n'est pas la fonction nulle, telles que*

1. *f est holomorphe sur $\mathcal{H}$.*
2. *f vérifie la relation de quasi-modularité :*
   $\forall\gamma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z}),\forall z\in\mathcal{H}\quad (f\underset{k}{|}\gamma)(z)=\displaystyle\sum_{j=0}^{s}f_j(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^j.$
3. *f vérifie la condition de croissance :*
   $\exists p\in\mathbb{N},\exists c\geq 0,\forall i\in\{0,...,s\},\forall z\in\mathcal{H}\quad |f_i(z)|\leq c\left(\dfrac{1+|z|^2}{\Im m z}\right)^p.$

L'ensemble des formes quasi-modulaires de poids k et de profondeur s est noté $\widetilde{M_k^s}$, et l'ensemble des fonctions quasi-modulaires de poids k et de profondeur inférieure ou égale à s est noté $\widetilde{M_k^{\leq s}}$.

Remarques.

1. *On note par* $P_{f,z}(X)$ *le polynôme associé à* f *défini par* $P_{f,z}(X) = \sum_{j=0}^{s} f_j(z)X^j$.
2. *Si* $f \in \widetilde{M}_k^{\leq s}$ *alors* $f_0 = f$*, En effet on prend la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ *dans la relation de quasi -modularité.*
3. *Si* $f \in \widetilde{M}_k^{\leq s}$ *alors* f *est périodique du période 1. En effet on prend la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ *dans la relation de quasi -modularité.*
4. *Une forme modulaire de poids* k *est une forme quasi-modulaire de poids* k *et de profondeur* 0.
5. *D'après l'égalité* (3.1)*, si* $f \in M_k$ *alors* $Df \in \widetilde{M}_{k+2}^1$.
6. *On note par* $Q_i(f)(z)$ *d'une forme quasi-modulaire* f*, le coefficient associé au* X^i *dans* $P_{f,z}(X)$.

Proposition 3.2. *La profondeur d'une forme quasi-modulaire est unique.*

Démonstration. supposons que f est une forme quasi modulaire de poids k et de profondeur s et s' tel que $s \leq s'$. Alors il existe $f_0, ..., f_s, g_0, ..., g_{s'}$ fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}$ avec $f_s \neq 0$ et $g_{s'} \neq 0$ telles que
$\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), \forall z \in \mathcal{H}$

$$\begin{cases} (f \underset{k}{|} \gamma)(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} f_j(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j \\ (f \underset{k}{|} \gamma)(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s'} g_j(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j \end{cases}$$

comme f_s et $g_{s'}$ sont holomorphes sur $\mathcal{H}$ et donc analytiques, d'après la proposition 1.46 leurs zéros sont isolés, donc il existe $z_0 \in \mathcal{H}$ tel que $f_s(z_0) \neq 0$ et $g_{s'}(z_0) \neq 0$.
alors on a pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$

$$\begin{cases} (cz_0+d)^{s'} (f \underset{k}{|} \gamma)(z_0) = \sum_{j=0}^{s} f_j(z_0) c^j (cz_0+d)^{s'-j} \\ (cz_0+d)^{s'} (f \underset{k}{|} \gamma)(z_0) = \sum_{j=0}^{s'} g_j(z_0) c^j (cz_0+d)^{s'-j} \end{cases}$$

donc

$$\sum_{j=0}^{s} f_j(z_0) c^j (cz_0+d)^{s'-j} = \sum_{j=0}^{s'} g_j(z_0) c^j (cz_0+d)^{s'-j}$$

Soit $p \in \mathbb{Z}$, on prend $\gamma = \begin{pmatrix} 1-p & -p^2 \\ 1 & 1+p \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, on obtient

$$\sum_{j=0}^{s} f_j(z_0)c^j(z_0+1+p)^{s'-j} - \sum_{j=0}^{s'} g_j(z_0)c^j(z_0+1+p)^{s'-j} = 0$$

L'ensemble des racines du polynôme $\sum_{j=0}^{s} f_j(z_0)(z_0+1+X)^{s'-j} - \sum_{j=0}^{s'} g_j(z_0)(z_0+1+X)^{s'-j}$ est infini (car tout les entiers sont des racines), donc ce polynôme est nul, et comme $g_{s'}(z_0) \neq 0$, on obtient

$$s = s' \quad \text{et} \quad \forall j \in \{0, ..., s\} \quad f_j(z_0) = g_j(z_0).$$

■

Définition 3.3. *la série d'Eisenstein E_2 est définie par*

$$E_2 = \frac{D\Delta}{\Delta}$$

de développement de Fourier

$$E_2(z) = 1 - 24\sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_1(n)q^n$$

Proposition 3.4. *E_2 est une forme quasi-modulaire de poids 2 et de profondeur 1 et de polynôme associé*

$$P_{E_2,z}(X) = E_2(z) + \frac{6}{i\pi}X.$$

Démonstration. $E_2 = \frac{D\Delta}{\Delta}$,
on sait de la proposition 2.21 que Δ est une forme modulaire de poids 12 :
Pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, $z \in \mathcal{H}$

$$\Delta(\gamma z) = (cz+d)^{12}\Delta(z),$$

et

$$(cz+d)^{-14}D\Delta(\gamma z) = D\Delta(z) + \frac{6}{i\pi}\frac{c}{cz+d}\Delta(z).$$

D'où pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, $z \in \mathcal{H}$

$$(E_2 \underset{2}{|} \gamma)(z) = E_2(z) + \frac{6}{i\pi}\frac{c}{cz+d}.$$

■

Notation.
$\widetilde{M_k} = \bigcup\limits_{s\in\mathbb{N}} \widetilde{M}_k^{\leq s}$.

Proposition 3.5.

1. *Les sous espaces vectoriels* $\widetilde{M_k}$*, pour* $k \in \mathbb{N}$*, sont en somme directe.*
2. $\forall (k,k') \in \mathbb{N}^2, \quad \widetilde{M_k}\widetilde{M_{k'}} \subset \widetilde{M}_{k+k'}$

Démonstration.

1. Pour montrer que les $\widetilde{M_k}$ sont en somme directe pour $k \in \mathbb{N}$, il suffit de montrer que les $\widetilde{M_k}$ sont en somme directe pour n'importe quel ensemble fini $\{k_1, ..., k_n\} \subset \mathbb{N}$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $(f_1, ..., f_n) \in \widetilde{M}_{k1} \times ... \times \widetilde{M}_{k_n}$, $k_i \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} f_i = 0 \quad$ alors $f_i = 0 \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$.

   - Pour $n = 1$, c'est évident.
   - Supposons le résultat établi à l'ordre $n-1$.
     Soit $(f_1, ..., f_n) \in \widetilde{M}_{k_1} \times ... \times \widetilde{M}_{k_n} \quad$ telle que $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i = 0$,
     alors pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, $z \in \mathcal{H} \qquad \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = 0.$
     Notons par s_i les profondeurs de f_i , $\forall i \in \{1, ..., n\}$.
     Pour chaque f_i il existe $f_{i_1}, ..., f_{i_n}$ fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}$, telles que

$$(f\underset{k}{|}\gamma)(z) = \sum_{j=0}^{s} f_j(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j, \quad \forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), \forall z \in \mathcal{H}.$$

Notons par s la plus grande profondeur, alors on a pour tout $i \in \{1, ..., n\}$

$$f_i \left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \sum_{j=0}^{s} f_{i,j}(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^{j+k_i}, \quad \forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), \forall z \in \mathcal{H}.$$

avec$f_{i,j} = 0$, pour tout $j \geq s_i$. On obtient alors

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{s} f_{i,j}(z) c^j (cz+d)^{k_i+s-j} = 0.$$

On fixe $z \in \mathcal{H}$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on prend $\gamma = \begin{pmatrix} 1-p & -p^2 \\ 1 & 1+p \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{s} f_{i,j}(z) (z+1+p)^{k_i+s-j} = 0$$

Alors, l'ensemble des racines du polynôme

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{s} f_{i,j}(z)(z+1+X)^{k_i+s-j} = 0$$

est infini (car tout les entiers sont des racines) et donc ce polynôme est nul. Notons par k le plus grand poids, alors $f_{k,0} = 0$. Or $f_{k,0} = f_k$ alors $f_k = 0$. et d'après l'hypothèse de récurrence on trouve que $f_i = 0, \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$.

2. Soit $(f, g) \in \widetilde{M}_k \times \widetilde{M}_{k'}$, alors il existe $f_1, ..., f_s, g_1, ..., g_{s'}$ fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}$ telles que $\quad f_s \neq 0$ et $g_{s'} \neq 0$ et pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), z \in \mathcal{H}$

$$\begin{cases} (f\underset{k}{|}\gamma)(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} f_j(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^j \\ (f\underset{k'}{|}\gamma)(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s'} g_j(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^j \end{cases}$$

Alors

$$(fg\underset{k+k'}{|}\gamma)(z) = \sum_{j=0}^{s+s'}\left(\sum_{i=0}^{j} f_i(z)g_{j-i}(z)\right)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^j.$$

D'où $\quad f.g \in \widetilde{M}_{k+k'}^{\leq s+s'} \subset \widetilde{M}_{k+k'}$.

■

Corollaire 3.6. $\widetilde{M}_* = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \widetilde{M}_k$ *est une algèbre graduée.*

Proposition 3.7. *Soit* $f \in \widetilde{M}_k^{\leq s}$ *de polynôme associé* $P_{f,z}(X) = \sum_{j=0}^{s} f_j(z)X^j$*.*
Alors, Pour tout $j \in \{0, ..., s\}$

$$f_j \in \widetilde{M}_{k-2j}^{\leq s-j}$$

et pour tout $z \in \mathcal{H}$

$$P_{f_j,z}(X) = \sum_{l=0}^{s-j}\binom{l+j}{l} f_{l+j}(z)X^l.$$

En particulier, $\quad f_s \in M_{k-2s}$*.*

Démonstration. Soient $\gamma_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$
Alors

$$\gamma_1.\gamma_2 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{cases} a_3 = a_1a_2 + b_1c_2 \\ b_3 = a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_3 = c_1a_2 + d_1c_2 \\ d_3 = c_1b_2 + d_1d_2 \end{cases} \tag{3.3}$$

donc

$$\begin{cases} c_1 = d_2c_3 - c_2d_3 \\ d_1 = -b_2c_3 + a_2d_3 \end{cases} \tag{3.4}$$

On a

$$(f\underset{k}{|}\gamma_1\gamma_2)(z) = (c_3z + d_3)^{-k} f\left(\frac{a_3z + b_3}{c_3z + d_3}\right)$$

et

$$\begin{aligned} (f\underset{k}{|}\gamma_1)(\gamma_2z) &= (c_1\gamma_2z + d_1)^{-k} f\left(\frac{a_1\gamma_2z + b_1}{c_1\gamma_2z + d_1}\right) \\ &= \left(c_1\frac{a_2z + b_2}{c2z + d_2} + d_1\right)^{-k} f\left(\frac{a_1\frac{a_2z+b_2}{c2z+d_2} + b_1}{c_1\frac{a_2z+b_2}{c2z+d_2} + d_1}\right) \\ &= \left(\frac{(c_1a_2 + d_1c_2)z + c_1b_1 + d_1d_2}{c_2z + d_2}\right)^{-k} f\left(\frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + a_1b_2 + b_1d_2}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + c_1b_2 + d_1d_2}\right) \end{aligned}$$

de (3.3) et (3.4) on trouve

$$(f\underset{k}{|}\gamma_1)(\gamma_2z) = (c_2z + d_2)^k(f\underset{k}{|}\gamma_1\gamma_2)(z).$$

On a

$$(f\underset{k}{|}\gamma_1\gamma_2)(z) = \sum_{n=0}^{s} f_m(z)\left(\frac{c}{c_3z + d_3}\right)^m \tag{3.5}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (f\underset{k}{|}\gamma_1\gamma_2)(z) &= (c_2z + d_2)^{-k}(f\underset{k}{|}\gamma_1)(\gamma_2z) \\ &= (c_2z + d_2)^{-k}\sum_{n=0}^{s} f_n(\gamma_2z)\left(\frac{c_1}{c_1\gamma_2z + d_1}\right)^n \end{aligned} \tag{3.6}$$

De (3.4)

$$\begin{aligned}\frac{c_1}{c_1\gamma_2 z+d_1} &= \frac{d_2c_3-c_2d_3}{c_3z+d_3}(c_2z+d_2)\\ &= (c_2z+d_2)\left(\frac{(c_2zd_2)c_3-c_2(c_3z+d_3)}{c_3z+d_3}\right)\\ &= \frac{(c_2z+d_2)^2}{c_3z+d_3}-(c_2z+d_2)c_2\\ &= (c_2z+d_2)^2\left(\frac{c_3}{c_3+d_3}-\frac{c_2}{c_2z+d_2}\right).\end{aligned}$$

alors (3.6) devient

$$\begin{aligned}(f\underset{k}{|}\gamma_1\gamma_2)(z) &= (c_2z+d_2)^{-k}\sum_{n=0}^{s} f_n(\gamma_2 z)(c_2z+d_2)^{2n}\left(\frac{c_3}{c_3z+d_3}-\frac{c_2}{c_2z+d_2}\right)^n\\ &= \sum_{n=0}^{s}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\binom{n}{m}c_2^{n-m}(c_2z+d_2)^{n+m-k}f_n(\gamma_2 z)\left(\frac{c_3}{c_3z+d_3}\right)^m\\ &= \sum_{m=0}^{s}\sum_{n=m}^{s}(-1)^{n-m}\binom{n}{m}c_2^{n-m}(c_2z+d_2)^{n+m-k}f_n(\gamma_2 z)\left(\frac{c_3}{c_3z+d_3}\right)^m\\ &= \sum_{m=0}^{s}\left(\sum_{n=m}^{s}(-1)^{n-m}\binom{n}{m}\left(\frac{c_2}{c_2z+d_2}\right)^{n-m}(c_2z+d_2)^{2n-k}f_n(\gamma_2 z)\right)\left(\frac{c_3}{c_3z+d_3}\right)^m\end{aligned} \tag{3.7}$$

Par identification de (3.5) avec (3.6), on obtient

$$f_m(z)=\sum_{n=m}^{s}(-1)^{n-m}\binom{n}{m}(f_n\underset{k-2n}{|}\gamma_2)(z)\left(\frac{c_2}{c_2z+d_2}\right)^{n-m} \tag{3.8}$$

avec γ_2 est une matrice quelconque de $SL_2(\mathbb{Z})$.

On a alors

$\forall m\in\{0,...,s\},\forall\gamma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z}),\forall z\in\mathcal{H}$

$$f_m(z)=\sum_{n=0}^{s-m}(-1)^n\binom{n+m}{m}(f_{n+m}\underset{k-2n-2m}{|}\gamma)(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^n \tag{3.9}$$

Montrons par récurrence que pour tout $i\in\{0,...,s\},\gamma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z}),z\in\mathcal{H}$

$$(f_i\underset{k-2i}{|}\gamma)(z)=\sum_{j=0}^{s-i}\binom{i+j}{i}f_{i+j}(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^j$$

- Pour $i=0$, $(f_0\underset{k}{|}\gamma)(z)=\sum_{j=0}^{s} f_j(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^j$ car $f_0=f$.

- Supposons que l'égalité est vérifiée pour tout $j\in\{0,...,i-1\}, i\in\{0,...,s\}$.

  Soient $\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z}), z\in\mathcal{H}$, on a de (3.9)

$$f_i(z)=(f_i\underset{k-2i}{|}\gamma)(z)+\sum_{j=1}^{s-i}(-1)^j\binom{j+i}{i}(f_{j+i}\underset{k-2j-2i}{|}\gamma)(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^j$$

alors

$$\begin{aligned}
(f_i\underset{k-2i}{|}\gamma)(z) &= f_i(z)+\sum_{j=1}^{s-i}(-1)^{j-1}\binom{j+i}{i}(f_{j+i}\underset{k-2j-2i}{|}\gamma)(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^j\\
&= f_i(z)+\sum_{j=0}^{s-i-1}(-1)^j\binom{j+i+1}{i}(f_{j+i+1}\underset{k-2j-2i-2}{|}\gamma)(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{j+1}\\
&= f_i(z)+\sum_{j=0}^{s-i-1}\sum_{l=0}^{s-j-i-1}(-1)^j\binom{j+i+1}{i}\binom{l+j+i+1}{l}f_{l+j+i+1}\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{l+j+1}\\
&= f_i(z)+\sum_{j=0}^{s-i-1}\sum_{l=0}^{j}(-1)^{j-l}\binom{j-l+i+1}{i}\binom{j+i+1}{l}f_{j+i+1}\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{j+1}\\
&= f_i(z)+\sum_{j=0}^{s-i-1}\sum_{l=0}^{j}(-1)^{j-l}\frac{(j+i+1)!}{(j+1-l)!i!l!}f_{j+i+1}\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{j+1}\\
&= f_i(z)+\sum_{j=0}^{s-i-1}\frac{(j+i+1)!}{(j+1)!i!}f_{j+i+1}\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{j+1}\left(\sum_{l=0}^{j}(-1)^{j-l}\frac{(j+1)!}{(j+1-l)!l!}\right).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{j}(-1)^{j-l}\frac{(j+1)!}{(j+1-l)!l!} &= -\sum_{l=0}^{j}(-1)^{j+1-l}\frac{(j+1)!}{(j+1-l)!l!}\\
&= 1-\sum_{l=0}^{j+1}1^l(-1)^{j+1-l}\frac{(j+1)!}{(j+1-l)!l!}\\
&= 1-(1-1)^{j+1}\\
&= 1 \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

alors

$$(f_i \underset{k-2i}{|} \gamma)(z) = f_i(z) + \sum_{j=1}^{s-i} \frac{(j+i)!}{j!i!} f_{j+i} \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j$$
$$= \sum_{j=0}^{s-i} \binom{i+j}{i} f_{i+j}(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j$$

■

Corollaire 3.8. *Si $f \in \widetilde{M}_k^s$ alors k est pair et $k \geq 2s$.*

Proposition 3.9. *Soit $f \in \widetilde{M}_k^s$ avec $P_{f,z}(X) = \sum_{j=0}^{s} f_j(z) X^j$ son polynôme associé. Alors $Df \in \widetilde{M}_{k+2}^{s+1}$, et le polynôme associé à Df est*

$$P_{f,z}(X) = \sum_{j=0}^{s+1} g_j(z) X^j$$

avec

$$\begin{aligned}
& g_0 = Df_0 \\
& g_j = Df_j + \frac{k-j+1}{2i\pi} f_{j-1}, \quad \textit{pour } j \in \{1, ..., s\} \\
\textit{et} \quad & g_{s+1} = \frac{k-s}{2i\pi} f_s.
\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $f \in \widetilde{M}_k^s$,
f vérifie la relation de quasi-modularité Soient $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), z \in \mathcal{H}$

$$(cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \sum_{j=0}^{s} f_j(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j$$

On dérive

$$\begin{aligned}
-\frac{kc}{2\pi i}(cz+d)^{-k-1} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + (cz+d)^{-k-2} Df\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \\
= \sum_{j=0}^{s} \left(Df_j(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j - f_j(z) \frac{c^{j+1} j}{2\pi i} (cz+d)^{-j-1} \right) \\
= Df_0(z) + \sum_{j=1}^{s} Df_j(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j - \sum_{j=0}^{s} \frac{j}{2\pi i} f_j(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^{j+1} \\
= Df_0(z) + \sum_{j=1}^{s} Df_j(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j - \sum_{j=1}^{s+1} \frac{j-1}{2\pi i} f_{j-1}(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j \\
= Df_0(z) + \sum_{j=1}^{s} \left(Df_j(z) - \frac{j-1}{2\pi i} f_{j-1}(z) \right) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j - \frac{s}{2\pi i} f_s(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^{s+1}
\end{aligned}$$

alors

$$
\begin{aligned}
(cz+d)^{-k-2}Df\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= Df_0(z) + \sum_{j=1}^{s}\left(Df_j(z) - \frac{j-1}{2\pi i}f_{j-1}(z)\right)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^j \\
&\quad - \frac{s}{2\pi i}f_s(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{s+1} + \frac{kc}{2\pi i}\sum_{j=0}^{s} f_j(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{j+1} \\
&= Df_0(z) + \sum_{j=1}^{s}\left(Df_j(z) - \frac{j-1}{2\pi i}f_{j-1}(z)\right)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^j - \\
&\quad \frac{s}{2\pi i}f_s(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{s+1} + \frac{kc}{2\pi i}\sum_{j=1}^{s} f_{j-1}(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{j} + \\
&\quad \frac{k}{2\pi i}f_s\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{s+1} \\
&= Df_0 + \sum_{j=1}^{s}\left(Df_j(z) - \frac{j+k-1}{2\pi i}f_{j-1}(z)\right)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^j + \\
&\quad \frac{k-s}{2\pi i}f_s\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{s+1}.
\end{aligned}
$$

■

Théorème 3.10. *Soit $f \in \widetilde{M}_k^{\leq s}$, il existe pour tout $j \in \{0, ..., s\}, g_j \in M_{k-2j}$ telles que $f = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} g_j E_2^j$. Autrement dit, on a*

$$
\widetilde{M}_k^{\leq s} = \bigoplus_{j=0}^{s} M_{k-2j}E_2^j
$$

Démonstration. Soit $f \in \widetilde{M}_k^{\leq s}$; alors il existe $f_0, ...f_s$ fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}$ telles que

$\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), \forall z \in \mathcal{H}, \quad (f\underset{k}{|}\gamma)(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} f_j(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^j.$

On montre par récurrence le résultat énoncé,

- Pour $s = 0$, il suffit de choisir $g_0 = f$.
- Supposons le résultat établi à l'ordre $s-1$,
  On a $E_2 \in \widetilde{M}_2^1$, donc pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), z \in \mathcal{H}$

$$
\begin{aligned}
(E_2^s\underset{2s}{|}\gamma)(z) &= (cz+d)^{-2s}E_2^s(\gamma z) \\
&= \left((cz+d)^{-2}E_2(\gamma z)\right)^s \\
&= \left(E_2(z) + \frac{6}{i\pi}\frac{c}{cz+d}\right)^s \\
&= \sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}E_2^{s-j}(z)\left(\frac{6}{i\pi}\right)^j\left(\frac{c}{cz+d}\right)^j.
\end{aligned}
$$

donc, $E_2^s \in \widetilde{M}_{2s}^{\leq s}$.
Ainsi, pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), z \in \mathcal{H}$

$$\left(f - \left(\frac{i\pi}{6}\right)^s f_s E_2^s \underset{k}{|} \gamma\right)(z) = \sum_{j=0}^{s} f_j(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j - \left(\frac{i\pi}{6}\right)^s f_s(z) \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} E_2^{s-j}(z) \left(\frac{6}{i\pi}\right)^j \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{s-1} \left(f_j(z) - \left(\frac{6}{i\pi}\right)^{s-j} f_s(z) \binom{s}{j} E_2^{j-s}(z)\right) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j.$$

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $j \in \{0, ..., s-1\}$, il existe $g_j \in M_{k-2j}$ telles que

$$f - \left(\frac{i\pi}{6}\right)^s f_s E_2^s = \sum_{j=0}^{s-1} g_j E_2^j$$

Or, d'après la proposition 3.7 $f_s \in M_{k-2s}$ alors $f = \sum_{j=0}^{s} g_j E_2^j$, avec $g_s = \left(\frac{i\pi}{6}\right)^s f_s$.

On montre maintenant que la somme est directe. Soit pour tout $i \in \{0, ..., s\}$, $g_i \in M_{k-2i}$, on suppose $g_s \neq 0$.
On pose

$$f = \sum_{i=0}^{s} g_i E_2^i.$$

$Q_s(f) = g_s Q_s(E_2^s) = \left(\frac{6}{i\pi}\right) g_s \neq 0$. D'où $f \neq 0$ et donc la somme est directe. ■

Corollaire 3.11. *Les formes quasi-modulaires sont des polynômes en E_2, E_4 et E_6.*

Démonstration. C'est un résultat de corollaire 2.31 et de théorème 3.10. ■

Corollaire 3.12. $\widetilde{M}_* = \mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$.

Proposition 3.13. *Les fonctions E_2, E_4 et E_6 sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$. C'est à dire, Si $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ vérifie $P(E_2, E_4, E_6) = 0$ alors $P = 0$.*

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ tel que $P(E_2, E_4, E_6) = 0$.
Par regroupement de termes de P, On peut écrire

$$P(X, Y, Z) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{\substack{(a,b,c)\in\mathbb{N}^3 \\ 4a+6b+2c=k}} P_{a,b,c} X^c Y^a Z^b$$

Comme $P(E_2, E_4, E_6) = 0$, la proposition 3.5 implique pour tout k

$$\sum_{\substack{(a,b,c)\in\mathbb{N}^3\\ 4a+6b+2c=k}} P_{a,b,c}E_2^cE_4^aE_6^b = 0.$$

Supposons l'existence d'un entier c_0 tel que $P_{a,b,c_0} \neq 0$, alors le terme de gauche est une forme quasi modulaire de poids k et de profondeur au moins c_0, or le terme de droite est du profondeur 0, l'unicité donne que $c_0 = 0$, donc lorsque $c \neq 0$ $P_{a,b,c} = 0$, d'où

$$\sum_{\substack{(a,b)\in\mathbb{N}^3\\ 4a+6b=k}} P_{a,b,0}E_4^aE_6^b = 0.$$

le théorème 2.30 donne la nullité de chacun des coefficients $P_{a,b,0}$ et donc de P. ■

Théorème 3.14. *Soit $f \in \widetilde{M}_k^s$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$, il existe $g_i \in M_{k-2i}$, $i \in \{0, ..., s\}$ tels que*

$$f = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{s} D^i g_i & si\ s < \dfrac{k}{2} \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-2} D^i g_i + \alpha D^{\frac{k}{2}-1}E_2 & si\ s = \dfrac{k}{2}. \end{cases}$$

Autrement dit, on a

$$\widetilde{M}_k^{\leq\frac{k}{2}} = \bigoplus_{i=0}^{\frac{k}{2}-2} D^i M_{k-2i} \oplus \mathbb{C}D^{\frac{k}{2}-1}E_2.$$

Démonstration. Soit $f \in \widetilde{M}_k^s$.
On cherche d'une fonction $g \in M_{k-2s}$ tel que $Q_s(D^s g) = Q_s(f_s)$.
D'après la proposition 3.9, Si $g \in M_{k-2s}$ alors $Dg \in \widetilde{M}_{k+2}^1$ et

$$Q_1(Dg) = \frac{k-2s}{\pi i} g_0 = \frac{k-2s}{\pi i} g.$$

alors

$$\begin{aligned} Q_2(D^2g) &= \frac{1}{(2\pi i)^2}(k-2s+1)(k-2s)g. \\ &\vdots \\ Q_s(D^sg) &= \frac{1}{(2\pi i)^s}(k-s-1)...(k-2s+1)(k-2s)g \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^s}\frac{(k-s-1)!}{(k-2s-1)!}g \\ &= \frac{s!}{(2\pi i)^s}\binom{k-s-1}{s} g. \end{aligned} \tag{3.11}$$

On a

$(k-s-1)...(k-2s+1)(k-2s)=0 \Leftrightarrow k=2s$ (car $k \geq 2s$).

Donc,

- Si $s < \frac{k}{2}$, qui est le cas où $\binom{k-s-1}{s} \neq 0$, on choisit

$$g = \frac{(2\pi i)^s}{s!} \frac{1}{\binom{k-s-1}{s}} fs.$$

alors $f - D^s g \in \widetilde{M}_k^{s-1}$.

On pose $g_s = g$. On procède par descente sur la profondeur s par appliquant les mêmes étapes sur $f - D^s g_s \in \widetilde{M}_k^{s-1}$, alors

$f - D^s g_s - D^{s-1} g_{s-1} \in \widetilde{M}_k^{s-2}$ avec $g_{s-1} \in M_{k-2s+2}$.

$\vdots$

$f - \sum_{i=1}^{s} D^i g_i \in M_k$ avec $g_i \in M_{k-2i}$.

D'où

$$f = \sum_{i=0}^{s} D^i g_i \text{ avec } g_i \in M_{k-2i}.$$

- Si $s = \frac{k}{2}$, ce procédé ne peut être efficace puisque le coefficient binomial est nul. En revanche, par réitération de la proposition 3.9 on a

$$P_{E_2,z}(X) = E_2(z) + \frac{6}{i\pi}.$$

Donc

$$\begin{aligned} Q_1(E_2) &= \frac{6}{i\pi}, \\ Q_2(DE_2) &= \frac{1}{2\pi} \frac{6}{i\pi}, \\ Q_3(D^2E_2) &= \frac{2}{(2\pi)^2} \frac{6}{i\pi}, \\ &\vdots \\ Q_{\frac{k}{2}}(D^{\frac{k}{2}-1}E_2) &= \frac{(\frac{k}{2}-1)!}{(2\pi i)^{\frac{k}{2}-1}} \frac{6}{i\pi}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Comme $Q_{\frac{k}{2}}(f) \in M_0 = \mathbb{C}$, on pose

$$\alpha = \frac{i\pi}{6} \frac{(2\pi i)^{\frac{k}{2}-1}}{(\frac{k}{2}-1)!} Q_{\frac{k}{2}}(f) \in \mathbb{C}.$$

Alors
$$f - \alpha D^{\frac{k}{2}-1}E_2 \in \widetilde{M}_k^{\frac{k}{2}-1}.$$

On applique le 1^{er} cas, il existe $g_i \in M_{k-2i}$, $i \in \{0, ..., \frac{k}{2} - 1\}$ telles que
$$f - \alpha D^{\frac{k}{2}-1}E_2 = \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-1} D^i g_i.$$

Or $g_{\frac{k}{2}-1} \in M_2 = \{0\}$ alors
$$f = \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-1} D^i g_i + \alpha D^{\frac{k}{2}-1}E_2.$$

On montre maintenant que la somme est directe.

— Si $s < \frac{k}{2}$, soit pour tout $i \in \{0, ..., s\}$, $g_i \in M_{k-2i}$, on suppose $g_s \neq 0$, soit
$$f = \sum_{i=0}^{s} D^i g_i.$$
On a $Q_s(D^s g_s) \neq 0$ (relation 3.11 et $s < \frac{k}{2}$), donc $Q_s(f) \neq 0$ et donc $f \neq 0$.

— Si $s = \frac{k}{2}$, soit pour tout $i \in \{0, ..., \frac{k}{2} - 2\}$, $g_i \in M_{k-2i}$, soit $\alpha \neq 0$, soit
$$f = \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-2} D^i g_i + \alpha D^{\frac{k}{2}-1}E_2.$$
On a $Q_{\frac{k}{2}}(f) = \alpha Q_{\frac{k}{2}}(D^{\frac{k}{2}-}1E_2) \neq 0$ (relation 3.12), donc $f \neq 0$.

■

3.2 Formes modulaires presque holomorphes

Définition 3.15. *Soit $(k, n) \in \mathbb{N}$. Une fonction $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ est appelée forme modulaire presque holomorphe de poids k et de profondeur s, s'il existe des fonctions $f_0, ..., f_s$ holomorphes sur $\mathcal{H}$ où f_s n'est pas la fonction nulle, telles que*

1. $\forall z \in \mathcal{H}, \quad f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{(\Im m(z))^j}.$
2. $\forall \gamma \in SL_2(\mathbb{Z}), \quad (f \underset{k}{|} \gamma) = f$
3. *f vérifie la condition de croissance :*
$\exists p \in \mathbb{N}, \exists c \geq 0, \forall i \in \{0, ..., s\}, \forall z \in \mathcal{H} \quad |f_i(z)| \leq c \left(\dfrac{1 + |z|^2}{\Im m z}\right)^p.$

L'ensemble des formes modulaires presque holomorphes de poids k et de profondeur s est noté $\widehat{M}_k^s$.
L'ensemble des formes modulaires presque holomorphes de poids k et de profondeur inférieur ou égale à s est noté $\widehat{M}_k^{\leq s}$.

Remarques.

1. *Une forme modulaire de poids k est une forme presque holomorphe de poids k et de profondeur* 0.
2. *Si $f \in \widehat{M}_k^{\leq s}$ alors f vérifie la condition de modularité, et donc f est périodique de période 1.*

Proposition 3.16. *La profondeur d'une forme modulaire presque holomorphe est unique.*

Démonstration. supposons que f est une forme modulaire presque holomorphe de poids k et de profondeur s et s' tel que $s \leq s'$. Alors il existe $f_0, ..., f_s, g_0, ..., g_{s'}$ fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}$ avec $f_s \neq 0$ et $g_{s'} \neq 0$ telles que $\forall z \in \mathcal{H}$

$$f(z) = \sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{(\Im m(z))^j} = \sum_{j=0}^{s'} \frac{g_j(z)}{(\Im m(z))^j}$$

Posons $f_j = 0$ pour $j > 1$, et $h_j = f_j - g_j$ pour tout $j \in \{0, ..., s'\}$. Supposons par l'absurde l'existence d'un plus grand entier l tel que la fonction h_l ne soit pas la fonction nulle, on a alors pour $z = x + iy$

$$\sum_{j=0}^{l} \frac{h_j(z)}{(\Im m(z))^j} = 0$$

On dérive par rapport à x et par rapport à y on trouve

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{l} \frac{\frac{\partial h_j}{\partial x}(x+iy)}{y^j} = 0 & (3.13) \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{l} \left(\frac{i\frac{\partial h_j}{\partial y}(x+iy)}{y^j} - j\frac{h_j(x+iy)}{y^{j+1}} \right) = 0 & (3.14) \end{cases}$$

Or, les h_j sont holomorphes sur $\mathcal{H}$ pour tout $j \in \{0, ..., l\}$, alors d'après la proposition 1.44 la somme des deux équations (3.13) et (3.14) donne

$$\sum_{j=1}^{l} j\frac{h_j(x+iy)}{y^{j+1}} = 0$$

On a alors éliminé la fonction h_0, on répète le procédé pour $\displaystyle\sum_{j=1}^{l}(j-1)\frac{h_{j-1}(x+iy)}{y^j}=0$, on obtient

$$\sum_{j=1}^{l-1} j(j-1)\frac{h_{j-1}(x+iy)}{y^{j+1}}=0$$

On a alors éliminé la fonction h_1, on répète le procédé jusqu'à trouver $h_l = 0$; cela contredit l'existence de l et achève la démonstration. ∎

Définition 3.17. *La fonction E_2^* est définie, pour tout $z \in \mathcal{H}$, par*

$$E_2^*(z) = E_2(z) - \frac{3}{\pi \Im m(z)}.$$

Proposition 3.18. *E_2^* est une forme modulaire presque holomorphe de poids 2 et de profondeur 1.*

Démonstration. On a E_2^* n'est pas holomorphe, mais E_2 et $\frac{3}{\pi}$ sont holomorphes, de plus, pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, $z \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}
(E_2^* \underset{2}{|} \gamma)(z) &= (cz+d)^{-2} E_2^*(\gamma z) \\
&= (cz+d)^{-2} E_2(\gamma z) - \frac{3}{\pi}\frac{(cz+d)^{-2}}{\Im m(\gamma z)} \\
&= E_2(z) + \frac{6}{i\pi} - \frac{3}{\pi \Im m(z)}(cz+d)^{-2}|cz+d|^2 \\
&= E_2(z) + \frac{6}{i\pi} - \frac{3}{\pi \Im m(z)}\frac{(c\bar{z}+d)}{(cz+d)} \\
&= E_2(z) + \frac{6}{i\pi} - \frac{3}{\pi \Im m(z)}\left(1 - \frac{2ic\Im m(z)}{(cz+d)}\right) \\
&= E_2^*(z).
\end{aligned}$$

∎

Notation.

$$\widehat{M_k} = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} \widehat{M_k^{\leq s}} \qquad , \qquad \widehat{M_*} = \bigoplus_{s\in\mathbb{N}} \widehat{M_k}.$$

Proposition 3.19.

1. *Les sous espaces vectoriels $\widehat{M_k}$, pour $k \in \mathbb{N}$, sont en somme directe.*
2. *$\forall (k,k') \in \mathbb{N}^2, \quad \widehat{M_k}\widehat{M_{k'}} \subset \widehat{M_{k+k'}}$*

Démonstration.

1. La même démonstration que celle des M_k car une forme modulaire presque holomorphe vérifie la condition de modularité.
2. Soit $(f,g) \in \widehat{M_k} \times \widehat{M_{k'}}$, alors il existe $f_0, ..., g_s, g_0, ..., g_{s'}$ fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}$ avec $f_s \neq 0$ et $g_{s'} \neq 0$ telles que $\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \in SL_2(\mathbb{Z}), \forall z \in \mathcal{H}$

$$\begin{cases} f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{(\Im m(z))^j} \\ (cz+d)^{-k} f(\gamma z) = f(z) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} g(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s'} \frac{g_j(z)}{(\Im m(z))^j} \\ (cz+d)^{-k} g(\gamma z) = g(z) \end{cases}$$

alors

$$(cz+d)^{-(k+k')} fg(\gamma z) = fg(z)$$

et

$$fg(z) = \sum_{j=0}^{s} \sum_{p=0}^{s'} \frac{f_j g_p(z)}{(\Im m(z))^{j+p}}$$

Posons pour $l \in \{0, ..., s+s'\}$ $\quad h_l = f_j g_p$ elles que $l = j+p, \forall j \in \{0, ..., s\}$ et $\forall p \in \{0, ..., s'\}$,

Donc $fg(z) = \displaystyle\sum_{l=0}^{s+s'} \frac{h_l(z)}{(\Im m(z))^l}$, d'où $f.g \in \widehat{M}_{k+k'}^{\leq s+s'} \in \widehat{M}_{k+k'}$.

■

Corollaire 3.20. $\widehat{M_*} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \widehat{M_k}$ *est une algèbre graduée.*

Proposition 3.21. *Soit* $f \in \widehat{M_k^{\leq s}}$, $\quad f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{(\Im m(z))^j}, \forall z \in \mathcal{H}$ *et* $\forall j \in \{0, ..., s\}$, f_j *holomorphe sur* $\mathcal{H}$*. Alors, pour tout* $j \in \{0, ..., s\}$ $\quad f_j \in \widetilde{M}_{k-2j}^{\leq s-j}$*, et pour tout* $z \in \mathcal{H}$

$$P_{f_j,z}(X) = \sum_{l=0}^{s-j} (2i)^l \binom{j+l}{j} f_{j+l}(z) X^l.$$

Démonstration. Soit $f \in \widehat{M_k^{\leq s}}, \forall z \in \mathcal{H} \quad f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{(\Im m(z))^j}$

$\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \in SL_2(\mathbb{Z})$

$$(f \underset{k}{|} \gamma)(z) = \sum_{j=0}^{s} (cz+d)^{-k} \frac{f_j(\gamma z)}{(\Im m(\gamma z))^j}$$

D'autre part, on a pour $z = x + iy$

$$
\begin{aligned}
\Im m(\gamma z) &= \Im m\left(\frac{ax+iay+b}{cx+icy+d}\right) \\
&= \Im m\left(\frac{(ax+iay+b)(cx+d-icy)}{(cx+d)^2+(^2cy)}\right) \\
&= \frac{y}{|cz+d|^2}
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Im m(\gamma z)} &= (cz+d)\frac{c\bar{z}+d}{y} \\
&= (cz+d)\left(-2ic+\frac{cz+d}{y}\right)
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
(f\underset{k}{|}\gamma)(z) &= \sum_{j=0}^{s} f_j(\gamma z)(cz+d)^{-k+j}\left(-2ic+\frac{cz+d}{y}\right)^j \\
&= \sum_{j=0}^{s}\sum_{l=0}^{j}(-2i)^{j-l}\frac{1}{y^l}\binom{j}{l}(f_j\underset{k-2j}{|}\gamma)(z)(cz+d)^{-j+l}c^{j-l} \\
&= \sum_{l=0}^{s}\frac{1}{y^l}\sum_{j=l}^{s}(-2i)^{j-l}\binom{j}{l}(f_j\underset{k-2j}{|}\gamma)(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{j-l}
\end{aligned}
$$

Comme f vérifie la condition du modularité alors pour tout $i \in \{0, ..., s\}$

$$
f_l(z) = \sum_{j=l}^{s}(-2i)^{j-l}\binom{j}{l}(f_j\underset{k-2j}{|}\gamma)(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{j-l}
\tag{3.17}
$$

On a pour $l = s$, $f_s = (f_s \underset{k-2s}{|} \gamma)$ donc f_s vérifie l'égalité demandée et $f_s \in M_{k-2s}$. Montrons par récurrence décroissante l'égalité demandée, supposons que l'égalité est vérifiée pour tout $j \in \{l+1, ...s\}$ avec$l \in \{0, ...s\}$

D'après (3.17)

$$
f_l(z) = (f_l\underset{k-2l}{|}\gamma)(z) + \sum_{j=l+1}^{s}(-2i)^{j-l}\binom{j}{l}(f_j\underset{k-2j}{|}\gamma)(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{j-l}
$$

alors

$$\begin{aligned}
(f_l \underset{k-2l}{|} \gamma)(z) &= f_l(z) + \sum_{j=l+1}^{s} (-1)^{j-l-1}(2i)^{j-l} \binom{j}{l} (f_j \underset{k-2j}{|} \gamma)(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^{j-l} \\
&= f_l(z) + \sum_{j=0}^{s-l-1} (-1)^{j}(2i)^{j+1} \binom{j+l+1}{l} (f_{j+l+1} \underset{k-2j-2l-2}{|} \gamma)(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^{j+1} \\
&= f_l(z) + \sum_{j=0}^{s-l-1} \sum_{n=0}^{s-j-l-1} (-1)^{j}(2i)^{j+n+1} \binom{j+l+1}{l} \binom{n+j+l+1}{l+j+1} \times \\
&\quad f_{n+j+l+1}(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^{j+n+1} \\
&= f_l(z) + \sum_{p=0}^{s-l-1} \sum_{n=0}^{p} (-1)^{p-n}(2i)^{p+1} \binom{l+p+1-n}{l} \binom{p+l+1}{l+p+1-n} \times \\
&\quad f_{p+l+1}(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^{p+1} \\
&= f_l(z) + \sum_{p=0}^{s-l-1} (2i)^{p+1} \frac{(p+1+l)!}{(p+1)!l!} f_{p+l+1}(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^{p+1} \times \\
&\quad \left(\sum_{n=0}^{p} (-1)^{p-n} \frac{(p+1)!}{(p+1-n)!n!}\right) \\
&\overset{(3.10)}{=} f_l(z) + \sum_{p=0}^{s-l-1} (2i)^{p+1} \binom{p+l+1}{l} f_{p+l+1}(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^{p+1} \\
&= \sum_{p=0}^{s-l} (2i)^{p} \binom{p+l}{l} f_{p+l}(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^{p}
\end{aligned}$$

■

Corollaire 3.22. *Si $f \in \widehat{M}_k^{\leq s}$ alors k est pair et $k \geq 2s$.*

Définition 3.23. *On définit sur $\widehat{M}_k$ l'opérateur différentiel (de Maass-Shimura) δ_k par*

$$\delta_k f = \frac{1}{2\pi i}\left(f' + \frac{k}{2i\Im m} f\right) = Df - \frac{k}{4\pi \Im m} f.$$

Proposition 3.24. *Soit $f \in \widehat{M}_k^{s}$, $\quad f(z) = \sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{(\Im m(z))^j}, \forall z \in \mathcal{H}$ et $\forall j \in \{0, ..., s\}$, f_j holomorphe sur $\mathcal{H}$. Alors $\delta_k f \in \widehat{M}_{k+2}^{\leq s+1}$, et pour tout $z \in \mathcal{H}$*

$$\delta_k f = \sum_{j=0}^{s+1} \frac{g_j(z)}{(\Im m(z))^j}$$

avec

$$g_0 = Df_0$$
$$g_j = Df_j - \frac{k-j+1}{4\pi} f_{j-1}, \quad \textit{pour } j \in \{1, ..., s\}$$

et $$g_{s+1} = -\frac{k-s}{4\pi} f_s.$$

Démonstration.

$$\delta_k f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{s} \left(\frac{f_j'(z)(\Im m(z))^j + \frac{1}{2} j i (\Im m(z))^{j-1} f_j(z)}{(\Im m(z))^{2j}} + \frac{k}{2i(\Im m(z))^{j+1}} f_j(z) \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{s} \left(\frac{f_j'(z)}{(\Im m(z))^j} + \frac{k-j}{2i(\Im m(z))^{j+1}} f_j(z) \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(f_0'(z) + \sum_{j=1}^{s} \frac{f_j'(z)}{(\Im m(z))^j} + \sum_{j=1}^{s} \frac{k-j+1}{2i(\Im m(z))^j} f_{j-1}(z) + \frac{k-s}{2i(\Im m(z))^{s+1}} f_s(z) \right)$$

$$= Df_0(z) + \sum_{j=0}^{s} \frac{1}{(\Im m(z))^j} \left(Df_j(z) - \frac{k-j+1}{4\pi} f_{j-1}(z) \right) - \frac{k-s}{4\pi(\Im m(z))^{s+1}} f_s(z).$$

D'autre part, soient $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \in \mathcal{H}$

$$(\delta_k f \underset{k+2}{|} \gamma)(z) = \frac{1}{2\pi i} \left((cz+d)^{-k-2} f'(\gamma z) + \frac{k}{2i\Im m(\gamma z)} (cz+d)^{-k-2} f(\gamma z) \right)$$

$$\overset{.......et(3.1)}{=} Df(z) + \frac{k}{2i\pi} \frac{c}{cz+d} f(z) - \frac{k}{4\pi} \frac{|cz+d|^2}{\Im m(z)} \frac{1}{(cz+d)^2} f(z)$$

$$= Df(z) + \frac{k}{2i\pi} \frac{c}{cz+d} f(z) - \frac{k}{4\pi \Im m(z)} \frac{c\bar{z}+d}{cz+d} f(z)$$

$$= Df(z) + \frac{f(z)}{2i\pi(cz+d)} \left(kc + \frac{k}{2i\Im m(z)} (c\bar{z}+d) \right)$$

$$= Df(z) - \frac{k}{4\pi \Im m(z)} f(z)$$

$$= \delta_k f(z).$$

d'où, $\delta_k f \in \widehat{M}_{k+2}^{\leq s+1}$. ■

3.3 Isomorphisme entre $\widetilde{M}_*$ et $\widehat{M}_*$

Théorème 3.25. *Soit* $f \in \widehat{M}_k^{\leq s}$ *avec* $f(z) = \sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{(\Im m(z))^j}$ *pour tout* $z \in \mathcal{H}$.
Alors, l'application

$$\Phi : \widehat{M}_k^{\leq s} \longrightarrow \widetilde{M}_k^{\leq s}$$
$$f \longmapsto f_0$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
De plus, Φ *définit un isomorphisme d'algèbres graduées filtrées de* $\widehat{M}_*$ *dans* $\widetilde{M}_*$.

Démonstration.

- Φ est bien définie d'après la proposition (3.21).
- Φ est bien un morphisme d'algèbres par linéarité des sommes finies, et puisque le terme constant d'un produit de polynômes est le produit de termes constants.
- Φ est injective car :
  Si $f \in \widehat{M}_k^{\leq s}$ telle que $f_0 = 0$, alors d'après la proposition (3.21) on a pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), z \in \mathcal{H}$

$$\sum_{l=0}^{s} (2i)^l f_l(z) \left(\frac{c}{cz+d} \right)^l = 0$$

alors

$$\sum_{l=0}^{s} (2i)^l f_l(z) c^l (cz+d)^{s-l} = 0$$

donc pour $\gamma = \begin{pmatrix} 1-p & -p^2 \\ 1 & 1+p \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{l=0}^{s} (2i)^l f_l(z) \left(\frac{c}{cz+d} \right)^l = 0$$

alors

$$\sum_{l=0}^{s} (2i)^l f_l(z)(z+1+p)^{s-l} = 0$$

alors l'ensemble des racines du polynôme $\sum_{l=0}^{s} (2i)^l f_l(z)(z+1+X)^{s-l}$ est infini d'où $f_j = 0, \forall j \in \{0, ..., s\}$ alors $f = 0$.

- Φ est surjective car :

  Si $f \in \widetilde{M}_k^{\leq s}$, alors f vérifie la relation de quasi-modularité

$$(f\underset{k}{|}\gamma)(z) = \sum_{j=0}^{s} f_j(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j \quad \forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), \forall z \in \mathcal{H}$$

  Considérons l'application g de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = \sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{(2i\Im m(z))^j}$$

  Montrons que $f \in \widehat{M}_k^{\leq s}$

  Pour les première et troisième conditions de la définitions d'une forme modulaire presque holomorphe sont vérifiées, il reste à montrer la condition de modularité.

  Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), z = x + iy \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}
(g\underset{k}{|}\gamma)(z) &\overset{(3.15)}{=} \sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(\gamma z)}{(cz+d)^k} \frac{|cz+d|^{2j}}{(2iy)^j} \\
&\overset{(3.16)}{=} \sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(\gamma z)}{(cz+d)^k} (cz+d)^j \left(\frac{cz+d}{2iy} - c\right)^j \\
&= \sum_{j=0}^{s} \sum_{l=0}^{j} \frac{f_j(\gamma z)}{(cz+d)^k} \binom{j}{l} (-1)^{j-l} c^{j-l} \frac{(cz+d)^{j+l}}{(2iy)^l} \\
&= \sum_{j=0}^{s} \sum_{l=0}^{j} \frac{f_j(\gamma z)}{(cz+d)^k} \binom{j}{l} (-1)^{j-l} c^{j-l} (cz+d)^{l-j} \frac{(cz+d)^{2j}}{(2iy)^l} \\
&= \sum_{l=0}^{s} \left(\sum_{j=l}^{s} (-1)^{j-l} \binom{j}{l} \frac{f_j(\gamma z)}{(cz+d)^{k-2j}} \left(\frac{c}{cz+d}\right)^{j-l} \right) \frac{1}{(2iy)^l} \\
&\overset{(3.8)}{=} \sum_{l=0}^{s} \frac{f_l(z)}{(2iy)^l} \\
&= g(z).
\end{aligned}$$

  d'où $g \in \widehat{M}_k^{\leq s}$ et comme $\Phi(g) = f_0 = f$ cela montre la surjectivité de Φ.

$\blacksquare$

Remarques.

1. *L'isomorphisme Φ est d'inverse*

$$\Phi^{-1} : f \mapsto \sum_{j=0}^{s} \frac{Q_j(f)}{(2\Im m(z))^j}.$$

2. E_2 est l'image de E_2^* par Φ.

Corollaire 3.26. *Le digramme suivant*

$$\begin{tikzcd} \widehat{M}_k^{\leq s} \arrow[r, "\delta_k"] \arrow[d, "\Phi"'] & \widehat{M}_{k+2}^{\leq s+1} \arrow[d, "\Phi"] \\ \widetilde{M}_k^{\leq s} \arrow[r, "D"'] & \widetilde{M}_{k+2}^{\leq s+1} \end{tikzcd}$$

est commutatif,

c'est à dire, $\Phi \circ \delta_k = D \circ \Phi$.

3.4 Crochets de Rankin-Cohen

Définition 3.27. *Soient $f \in \widetilde{M}_k^{\leq s}$, $g \in \widetilde{M}_l^{\leq t}$, $n \in \mathbb{N}$*

Le crochet de Rankin-Cohen $[\ ,\ ]_{n;s,t}$ de f et g est défini par

$$[f,g]_{n;s,t} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{k-s+n-1}{n-r} \binom{l-t+n-1}{r} D^r f D^{n-r} g$$

.

Proposition 3.28. $[f,g]_{n;s,t} \in \widetilde{M}_{k+l+2n}^{\leq s+t}$.

Démonstration. Voir [7], p99. ∎

Soient $f, g \in M_*$, alors f et g s'écrivent de façon unique

$$f = \sum_{k \in 2\mathbb{N}} f_k, \qquad g = \sum_{k \in 2\mathbb{N}} g_k$$

avec $f_k, g_k \in M_k$ pour tout k.

$[\ ,\ ]_{1;0,0}$ n'est pas défini sur M_* car $[f,g]_{1;0,0}$ dépend du poids de f et g, mais comme $M_* = \bigoplus_{k \in 2\mathbb{N}} M_k$, on définit alors le crochet de Rankin-Cohen $[\ ,\ ]_1$ sur M_* par

$$[f,g]_1 = \sum_{k \in 2\mathbb{N}} \sum_{l \in 2\mathbb{N}} [f_k, g_l]_{1;0,0}$$

avec $[f_k, g_l]_{1;0,0} = kfDg - lgDf$.

Proposition 3.29. *L'algèbre M_* munie du crochet $[\ ,\ ]_1$ est une algèbre de Poisson.*

Démonstration. $[\ ,\ ]_1$ est antisymétrique car $[\ ,\ ]_{1;0,0}$ l'est.
Ainsi, par bilinéarité, il suffit de vérifier la loi de Leibniz et l'identité de Jacobi pour $f \in M_k$, $g \in M_l$ et $h \in M_m$.

1.
$$\begin{aligned}[fg,h]_1 &= (k+l)fgDh - mD(fg)h \\ &= kfgDh + lfgDh - mghDf - mfhDh \\ &= f(lgDh - mhDg) + g(kfDh - mhDf) \\ &= f[g,h]_1 + [f,h]_1 g.\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}[f,[g,h]_1]_1 = {}& k(l-m)fD(g)D(h) + klfgD^2h - kmfhD^2g \\ & - (l+m+2)lgD(f)D(h) + (l+m+2)mhD(f)D(g) \quad (3.18)\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}[g,[h,f]_1]_1 = {}& l(m-k)gD(h)D(f) + lmghD^2f - lkgfD^2h \\ & - (m+k+2)mhD(f)D(g) + (m+k+2)kfD(h)D(g) \quad (3.19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[h,[f,g]_1]_1 = {}& m(k-l)hD(f)D(g) + mkhfD^2g - mlhgD^2f \\ & - (k+l+2)kfD(g)D(h) + (k+l+2)lgD(f)D(h) \quad (3.20)\end{aligned}$$

La somme de (3.18), (3.19) et (3.20) est nulle.

■

Le fait que $D\Delta = \Delta E_2$ donne la proposition suivante

Proposition 3.30. *Soient $f \in \widetilde{M}_k^{\leq s}$, $g \in \widetilde{M}_l^{\leq t}$ alors*

$$[\Delta f, g]_{n;s,t} = \Delta h$$

avec $h \in \widetilde{M}_{k+l+2n}^{s+t}$.

Démonstration. On a $[\Delta f, g]_{n;s,t} \in \widetilde{M}_{k+l+2n+12}^{s+t}$
Or, $D\Delta = \Delta E_2$ alors, $[\Delta f, g]_{n;s,t} = \Delta h$, comme $\Delta \in M_{12}$ d'où $h \in \widetilde{M}_{k+l+2n}^{s+t}$. ■

Soit $f \in M_k$ alors
$$\frac{[\Delta, f]_1}{12\Delta} = Df - \frac{k}{12} fE_2$$

Proposition 3.31. *l'application*

$$\begin{aligned} \vartheta_k : M_k &\longrightarrow M_{k+2} \\ f &\longmapsto Df - \frac{k}{12} \end{aligned}$$

induit par prolongement linéaire une dérivation sur M_*, cette dérivation est appelée dérivation de Serre.

Démonstration. ϑ_k est bien définit car $\dfrac{[\Delta, f]_1}{12\Delta} = Df - \dfrac{k}{12} fE_2$, $[\Delta, f]_1 \in M_{k+12+2}$ et $\Delta \in M_{12}$ et donc si $f \in M_k$, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, $z \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} (cz+d)^{-(k+2)} \vartheta_k(\gamma z) &= (cz+d)^{-k-2-12+12} \frac{[\Delta, f]_1}{12\Delta} \\ &= \frac{(cz+d)^{-k-14} [\Delta, f]_1}{12(cz+d)^{-12}\Delta} \\ &= \frac{[\Delta, f]_1}{12\Delta} \\ &= \vartheta_k(z). \end{aligned}$$

Et comme $\dfrac{[\Delta, f]_1}{12\Delta} = Df - \dfrac{k}{12} fE_2$, d'après la remarque 1.1.4 et la proposition 3.29 ϑ_k induit par prolongement linéaire une dérivation sur M_*. ■

Chapitre 4

Équations différentielles

Dans ce chapitre, on va présenter quelques identités et équations différentielles satisfaits par les séries d'Eisenstein, ainsi on va les récrire en utilisant les crochet de Ranken-Cohen, puis on fini par voir que chaque forme modulaire vérifie une équation différentielle.

4.1 Séries d'Eisenstein et équations différentielles

Proposition 4.1. *E_2, E_4 et E_6 vérifient les relations suivantes*

$$DE_2 = \frac{1}{12}(E_2^2 - E_4)$$
$$DE_4 = \frac{1}{3}(E_4E_2 - E_6)$$
$$DE_6 = \frac{1}{2}(E_6E_2 - E_4^2)$$

Ces relations sont connues sous le nom d'identités de Ramanujan.

Démonstration. D'après la proposition 3.9 $DE_2 \in \widetilde{M}_4^{\leq 2}$, le théorème 3.10 donne

$$\widetilde{M}_4^{\leq 2} = M_4 + M_2E_2 + M_0E_2^2$$

or $M_4 = \mathbb{C}E_4$, $M_2 = 0$ et $M_0 = \mathbb{C}$, alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$DE_2 = \alpha E_4 + \beta E_2^2$$

Par comparaison des développements de Fourier

$$-24q + O(q) = \alpha(1 + 240q + O(q)) + \beta(1 - 48q + O(q))$$

on obtient

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 240\alpha - 48\beta = -24 \end{cases}$$

on trouve $\alpha = -\frac{1}{12}$, $\beta = \frac{1}{12}$
donc

$$DE_2 = \frac{1}{12}(E_2^2 - E_4) \tag{4.1}$$

De même, $DE_4 \in \widetilde{M}_6^{\leq 1}$

$$\widetilde{M}_6^{\leq 1} = M_6 + M_4 E_2$$

or, $M_6 = \mathbb{C}E_6$ alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$DE_4 = \alpha E_6 + \beta E_4 E_2$$

alors

$$240q + O(q) = \alpha(1 - 504q + O(q)) + \beta(1 + 216q + O(q))$$

on trouve $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$
donc

$$DE_4 = \frac{1}{3}(E_4 E_2 - E_6) \tag{4.2}$$

Enfin, $DE_6 \in \widetilde{M}_8^{\leq 1}$

$$\widetilde{M}_8^{\leq 1} = M_8 + M_6 E_2$$

or, $M_8 = \mathbb{C}E_4^2$ alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$DE_6 = \alpha E_4^2 + \beta E_6 E_2$$

alors

$$-504q + O(q) = \alpha(1 + 480q + O(q)) + \beta(1 - 528 + O(q))$$

on trouve $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$
donc

$$DE_6 = \frac{1}{2}(E_6 E_2 - E_4^2). \tag{4.3}$$

■

Proposition 4.2. *E_2 est une solution de l'équation de Chazy, c'est à dire*

$$D^3 E_2 = E_2 D^2 E_2 - \frac{3}{2}(DE_2)^2. \tag{4.4}$$

Démonstration. On dérive (4.1)

$$D^2E_2 = \frac{1}{12}(2E_2DE_2 - DE_4)$$
$$= \frac{E_2DE_2}{6} - \frac{DE_4}{12}$$

on utilise (4.1) et (4.3)

$$D^2E_2 = \frac{1}{72}E_2^3 - \frac{1}{24}E_2E_4 + \frac{1}{36}E_6 \tag{4.5}$$

on dérive encore une fois (4.5)

$$D^3E_2 = \frac{1}{24}E_2^2DE_2 - \frac{1}{24}E_4DE_2 - \frac{1}{24}E_2DE_4 + \frac{1}{36}DE_6$$

on utilise (4.1), (4.2) et (4.3)

$$D^3E_2 = \frac{1}{288}(E_2^4 - E_2^2E_4) - \frac{1}{288}(E_2^2E^4 - E_4^2) - \frac{1}{72}(E_4E_2^2 - E_6E_2) + \frac{1}{72}(E_6E_2 - E_4^2)$$

donc

$$D^3E_2 = \frac{1}{288}E_2^4 - \frac{1}{96}E_4^2 - \frac{1}{48}E_2^2E_4 + \frac{1}{36}E_2E_6 \tag{4.6}$$

on multiple ainsi (4.5) par E_2, et on reporte le résultat dans (4.6) on obtient

$$D^3E_2 = -\frac{1}{96}E_2^4 + E_2D^2E_2 + \frac{1}{48}E_2^2E_4 - \frac{1}{96}E_4^2 \tag{4.7}$$

on élève (4.1) au carré

$$(DE_2)^2 = \frac{1}{144}E_2^4 + \frac{1}{144}E_4^2 - \frac{1}{72}E_2^2E_4$$

on reporte le résultat dans (4.7), on obtient

$$D^3E_2 = E_2D^2E_2 - \frac{3}{2}(DE_2)^2.$$

∎

4.2 Crochets de Rankin-Cohen et équations différentielles

Les identités de Ramanujan peuvent être écrites en utilisant des crochets de Rankin-Cohen, la proposition suivante le montrera.

Proposition 4.3. *Les identités de Ramanujan peuvent être écrites comme suit*

$$[E_2, \Delta]_{1;1,0} = \Delta E_4$$
$$[E_4, \Delta]_{1;0,0} = 4\Delta E_6$$
$$[E_6, \Delta]_{1;0,0} = 6\Delta E_4^2$$

Démonstration. On a d'une part,

$$[E_2, \Delta]_{1;1,0} = E_2 D\Delta - 12\Delta DE_2 = \Delta E_2^2 - 12\Delta DE_2 \tag{4.8}$$

d'autre part, la proposition 3.30 implique l'existence d'une fonction $h \in \widetilde{M}_4^{\leq 1}$ telle que

$$[E_2, \Delta]_{1;1,0} = \Delta h$$

Le théorème 2.30 donne $\widetilde{M}_4^{\leq 1} = M_4 + M_2 E_2$, or $M_2 = \{0\}$ donc $\widetilde{M}_4^{\leq 1} = \mathbb{C}E_4$.
alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$[E_2, \Delta]_{1;1,0} = \alpha\Delta E_4$$

Par comparaison de développement de Fourier on trouve $\alpha = 1$
donc

$$[E_2, \Delta]_{1;1,0} = \Delta E_4$$

L'égalité (4.8) donne que cette dernière équation est équivalente à la première équation de Ramanujan.

De même on obtient les deux équations restantes. ■

La proposition suivante donne une autre démonstration que E_2 vérifie l'équation de Chazy.

Proposition 4.4. *On a*

$$[[K, \Delta]_{1;0,0}, \Delta]_{1;0,0} = 24\Delta K^2$$

avec $K = [E_2, \Delta]_{1;1,0}$*, Cette relation est équivalente à la relation* (4.4)*, et donc* E_2 *est une solution de l'équation de Chazy.*

Démonstration. D'après la proposition 4.3 $K = \Delta E_4$, et on a $[\ ,\ ]_{1;0,0}$ vérifie la loi de Leibniz

$$[K, \Delta]_{1;0,0} = [\Delta E_4, \Delta]_{1;0,0} = \Delta[E_4, \Delta]_{1;0,0} = 4\Delta^2 E_6.$$

donc

$$[[K, \Delta]_{1;0,0}, \Delta]_{1;0,0} = [4\Delta^2 E_6, \Delta]_{1;0,0} = 4\Delta^2[E_6, \Delta]_{1;0,0} + E_6[4\Delta^2, \Delta]_{1;0,0}$$

or, $[4\Delta^2, \Delta]_{1;0,0} = 0$ alors

$$[[K, \Delta]_{1;0,0}, \Delta]_{1;0,0} = [4\Delta^2 E_6, \Delta]_{1;0,0} = 24\Delta^3 E_4^2 = 24\Delta K^2.$$

Il reste à vérifier que cette dernière égalité est équivalente à la relation (4.4).
On a

$$K = [E_2, \Delta]_{1;1,0} = \Delta(E_2^2 - 12\Delta E_2) \tag{4.9}$$

ainsi

$$\begin{cases} 16KD\Delta = 16K\Delta E_2 = 16\Delta^2(E_2^2 - 12DE_2)E_2 \\ 12D(K)\Delta = 12\Delta^2 E_2(E_2^2 - 12DE_2) + 12\Delta^2(2E_2DE_2 - 12D^2E_2) \end{cases}$$

alors

$$[K\Delta]_{1;0,0} = 4\Delta^2(E_2^3 - 18E_2DE_2 + 36D^2E_2)$$

donc

$$\begin{cases} 30[K, \Delta]_{1;0,0}D\Delta = 120\Delta^3(E_2^4 - 18E_2^2DE_2 + 36E_2D^2E_2) \\ 12D([K, \Delta]_{1;0,0})\Delta = 48\Delta^3(2E_2^4 - 33E_2^2DE_2 + 54E_2D^2E_2 - 18(DE_2)^2 + 36D^3E_2) \end{cases}$$

d'où

$$[[K, \Delta]_{1;0,0}, \Delta]_{1;0,0} = 24\Delta^3(E_2^4 - 24E_2^2DE_2 + 72E_2D^2E_2 + 36(DE_2)^2 - 72D^3E_2) \tag{4.10}$$

On élève (4.9) au carré

$$24\Delta K^2 = 24\Delta^3(E_2^4 - 24E_2^2DE_2 + 144(DE_2)^2) \tag{4.11}$$

(4.10)=(4.11) donne

$$2D^2E_2 - 2E_2D^2E_2 + 3(DE_2)^2 = 0.$$

■

4.3 Formes quasi-modulaires et équations différentielles

Proposition 4.5. *Si $f \in \widetilde{M}_*$ alors f est une solution d'une équation différentielle non nécessairement linéaire d'ordre 3 à coefficients constants.*

Démonstration. Soit $f \in \widetilde{M}_*$,
On a $\widetilde{M}_* = \mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$, alors $f, Df, D^2f, D^3f \in \mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$, d'après la définition 1.34, le degré de transcendance de $\mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$ est le degré de transcendance de corps

des fractions de $\mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$, or le corps des fractions de $\mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$ est exactement $\mathbb{C}(E_2, E_4, E_6)$, d'après la proposition 3.13 on peut déduire que E_2, E_4, E_6 est une base de transcendance de $\mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$. Alors f, Df, D^2f, D^3f sont algébriquement dépendantes, d'où il existe un polynôme non identiquement nul $P \in \mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$ tel que

$$P(f, Df, D^2f, D^3f) = 0.$$

■

Exemple 4.6. *E_2 satisfait l'équation de Chazy, c'est une équation différentielle non linéaire d'ordre* 3.

4.4 Formes modulaires et équations différentielles

Le fait qu'une forme modulaire soit une forme quasi-modulaire du poids 0 implique d'après la proposition 4.5 que toute forme modulaire vérifie une équation différentielle non nécessairement linéaire d'ordre 3, mais ça n'est pas vraiment utile, car c'est difficile d'extraire les propriétés d'une fonction à partir d'une équation différentielle non linéaire. Dans cette section on va voir une chose plus utile, une forme modulaire vérifie de plus une équation différentielle linéaire à coefficients algébriques.

4.4.1 Fonctions modulaires

Définition 4.7. *Une fonction $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ est appelée fonction modulaire si*

1. *f est méromorphe sur $\mathcal{H}$*
2. *$\forall \gamma \in SL_2(\mathbb{Z}), \forall z \in \mathcal{H}$ $f(\gamma z) = f(z)$*
3. *f est méromorphe à l'infini.*

Exemple 4.8. *l'invariant modulaire j défini par*

$$j(z) = \frac{E_4^3(z)}{\Delta(z)}, \qquad \forall z \in \mathcal{H}$$

est une fonction modulaire. En effet, la fonction j est méromorphe sur $\mathcal{H}$, elle a un pôle simple à l'infini, donc j est méromorphe à l'infini.

De plus si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, $z \in \mathcal{H}$

$$j(\gamma z) = \frac{(cz+d)^{-12}}{(cz+d)^{-12}} \frac{E_4^3(z)}{\Delta(z)} = \frac{E_4^3(z)}{\Delta(z)} = j(z).$$

Lemme 4.9. *Toute fonction modulaire est une fonction rationnelle de j.*

Démonstration. Soit f une fonction modulaire.

- Si f est holomorphe

  Comme Δ s'annule à l'infini, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $g = \Delta^n f$ soit holomorphe à l'infini, la fonction g est une forme modulaire de poids $12n$, alors g s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de la base $E_4^\alpha E_6^\beta$ tels que α, β vérifient $4\alpha + 6\beta = 12n$.
  Grâce à linéarité, il suffit de prendre le cas où $g = E_4^\alpha E_6^\beta$ avec $4\alpha + 6\beta = 12n$.
  alors $f = \frac{E_4^\alpha E_6^\beta}{\Delta^n}$ avec $2\alpha + 3\beta = 6n$.
  la relation $2\alpha + 3\beta = 6n$ implique que 3 divise α et 2 divise β, On pose $p = \frac{\alpha}{3}$, $q = \frac{\beta}{2}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $p + q = n$.
  Donc

$$\begin{aligned} f &= \frac{E_4^{3p} E_6^{2q}}{\Delta^{p+q}} \\ &= j^p \left(\frac{E_6^2}{\Delta} \right)^q \\ &= j^p \left(\frac{E_4^3 - 1728\Delta}{\Delta} \right)^q \\ &= j^p (j - 1728)^q. \end{aligned}$$

  Donc, il existe un polynôme $A(X)$ tel que

$$f = A(j)$$

- Si f est méromorphe

  L'idée est de trouver un polynôme $B(X)$ pour que $B(j)f$ soit holomorphe.
  Soit z_0 un pôle de f d'ordre m_0, supposons $Dj(z_0) \neq 0$, considérons

$$(j(z) - j(z_0))^{m_0} f(z).$$

  Si on écrit $j(z)$ et $f(z)$ en séries de Laurent comme suit

$$j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{et} \quad f(z) = \sum_{n=-m_0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

  car j est holomorphe en z_0, et z_0 est un pôle de f d'ordre m_0.
  On note $a_0 = j(z_0)$, alors

$$\begin{aligned} (j(z) - j(z_0))^{m_0} f(z) &= \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right) - a_0 \right)^{m_0} f(z) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right) \sum_{n=-m_0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

le résultat sera un développement sans des puissances négatives de $(z - z_0)$, alors $(j(z) - j(z_0))^{m_0} f(z)$ est holomorphe en z_0. On fait le produit de ces polynômes en $j(z)$, (pour chaque pôle z_K on associe le polynôme $(j(z) - j(z_k))^{m_k}$, il reste le cas d'avoir un pôle z_{i_0} tel que $Dj(z_{i_0}) = 0$, comme $Dj(z) = -\frac{E_6(z)j(z)}{E_4(z)}$, donc c'est le cas où $z_{i_0} = i$ ou $z_{i_0} = \rho$ (proposition 2.8), il n'est pas difficile de trouver des polynômes en $j(z)$ de telle sorte que leur produit avec f soit holomorphe. On note $B(j(z))$ le produit de tout les polynômes associés à tout les pôles de f, donc $B(j)f$ est holomorphe, on implique le premier cas, on trouve

$$f(z) = \frac{A(j(z))}{B(j(z))}.$$

■

4.4.2 Équations différentielles

Théorème 4.10. *Soit $f \in M_k$, $k > 0$, soit t une fonction modulaire non constante, alors la fonction F définie localement au voisinage de tout point $z_0 \in \mathcal{H}$ par $F(t(z)) = f(z)$ est une solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients algébriques.*

Démonstration. Soit l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C}^{k+1} \\ z &\longmapsto f(z) \begin{pmatrix} z^k \\ z^{k-1} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), z \in \mathcal{H}$ on a

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma z) &= (cz+d)^k f(z) \begin{pmatrix} (\gamma z)^k \\ (\gamma z)^{k-1} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= f(z) \begin{pmatrix} (az+b)^k \\ (az+b)^{k-1}(cz+d) \\ \vdots \\ (cz+d)^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= f(z) \begin{pmatrix} a^k & \binom{k}{1} a^{k-1}b & \cdots\cdots & b^k \\ a^{k-1}c & a^{k-1}d + \binom{k-1}{1} a^{k-2}bc & \cdots\cdots & b^{k-1}d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ac^{k-1} & bc^{k-1} + \binom{k-1}{1} ac^{k-2}d & \cdots\cdots & bd^{k-1} \\ c^k & \binom{k}{1} c^{k-1}d & \cdots\cdots & d^k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} z^k \\ z^{k-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= S^k(\gamma)\Phi(z) \tag{4.12}$$

où $S^k(\gamma)$ est la k-ième puissance symétrique de γ, et est définie ainsi $\forall i, j \in \{1, ..., k+1\}$ $\left(S^k(\gamma)\right)_{i,j}$ est le coefficient de terme de degré $k+1-j$ du polynôme $(aX+b)^{k+1-i}(cX+d)^{i-1}$ et vérifie $det(S^k(\gamma)) = 1$.

- On définit l'opérateur $D_t = \frac{1}{t'(z)}\frac{d}{dz}$
  Comme $\Phi(\gamma z) = S^k(\gamma)\Phi(z)$ et $S^k(\gamma)$ ne dépend pas de z, si on dérive on obtient
  $$(cz+d)^{-2}\Phi'(\gamma z) = S^k(\gamma)\Phi'(z) \tag{4.13}$$
  d'autre part, on a $t(\gamma z) = t(z)$ alors
  $$(cz+d)^{-2}t'(\gamma z) = t'(z) \tag{4.14}$$
  de (4.13) et (4.14) on déduit pour tout $z \in \mathcal{H}$ tel que $t'(z) \neq 0$
  $$\frac{\Phi'(\gamma z)}{t'(\gamma z)} = S^k(\gamma)\frac{\Phi'(z)}{t'(z)}$$
  donc $(D_t\Phi)(\gamma z) = S^k(\gamma)(D_t\Phi)(z)$. ainsi on obtient facilement par récurrence
  $$(D_t^i\Phi)(\gamma z) = S^k(\gamma)(D_t^i\Phi)(z), \qquad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{4.15}$$

- On définit pour tout $z \in \mathcal{H}$ tel que $t'(z) \neq 0$, la matrice $M(z)$ de $(k+2)$ lignes, $(k+2)$ colonnes par
  $$M(z) = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \Phi(z) & \vdots & (D\Phi)(z) & \vdots & \cdots & \vdots & (D^{k+1}\Phi)(z) \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & & & \cdots\cdots \\ f(z) & \vdots & (Df)(z) & \vdots & \cdots & \vdots & (D^{k+1}f)(z) \end{pmatrix}$$
  Cette matrice est écrite sous forme d'une matrice par bloc, si on l'écrit sous forme d'une matrice d'éléments de $\mathbb{C}$, on trouve que les deux dernières lignes sont identiques,

donc $det(M(z)) = 0$.

On calcule le déterminant de $M(z)$ en développant par rapport à la dernière ligne

$$det(M(z)) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i (D_t^i f)(z) det(M_i(z)) = 0 \tag{4.16}$$

où pour tout $i \in \{0, ..., i+1\}$, $M_i(z)$ est la matrice obtenue par suppression de la dernière ligne et la colonne n° $= i+1$ de $M(z)$

$$M_i(z) = \begin{pmatrix} \Phi(z) & (D_t\Phi)(z) & \cdots & (D_t^{i-1}\Phi)(z) & (D_t^{i+1}\Phi)(z) & \cdots & (D_t^{k+1}\Phi)(z) \end{pmatrix}.$$

- Soit $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$, $z \in \mathcal{H}$ tel que $t'(z) \neq 0$, $i \in \{0, ..., k+1\}$

$$M_i(\gamma z) = \begin{pmatrix} \Phi(\gamma z) & \cdots & (D_t^{i-1}\Phi)(\gamma z) & (D_t^{i+1}\Phi)(\gamma z) & \cdots & (D_t^{k+1}\Phi)(\gamma z) \end{pmatrix}$$

(4.12) et (4.15) impliquent

$$\begin{aligned} M_i(\gamma z) &= \begin{pmatrix} S^k(\gamma)\Phi(z) & \cdots & S^k(\gamma)(D_t^{i-1}\Phi)(z) & S^k(\gamma)(D_t^{i+1}\Phi)(z) & \cdots & S^k(\gamma)(D_t^{k+1}\Phi)(z) \end{pmatrix} \\ &= S^k(\gamma)M_i(z) \end{aligned}$$

d'où, $det(M_i(\gamma z)) = det(M_i(z))$ car $det(S^k(\gamma)) = 1$, alors pour tout $i \in \{0, ..., k+1\}$ la fonction $z \mapsto det(M_i(z))$ est une fonction modulaire, cette fonction d'après le lemme 4.9 est une fonction rationnelle de j, tout comme t, il existe alors une fonction algébrique a_i telle que $det(M_i(z)) = a_i(t(z))$.

- Soit $z_0 \in \mathcal{H}$

On a

$$F(t(z)) = f(z)$$

alors

$$t'(z)F'(t(z)) = f'(z)$$

donc

$$F'(t(z)) = D_t f(z) \tag{4.17}$$

par récurrence on obtient $F^{(i)}(t(z)) = D_t^i f(z)$, pour tout $i \in \{1, ..., k+1\}$.

Alors, l'équation (4.16) devient

$$\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^k a_i(t(z)) F^{(i)}(t(z)) = 0. \tag{4.18}$$

  - Si a_{k+1} n'est pas identiquement nulle sur un voisinage de z_0, alors l'équation (4.18) est l'équation différentielle recherchée , c'est une équation différentielle d'ordre $k+1$ à coefficient algébriques.

- Sinon, on aura $det(M_i(z)) = 0$, ce qui implique la dépendance linéaire de $\Phi(z), (D_t\Phi)(z), ..., (D_t^k\Phi)(z)$ au même voisinage de z_0.
  Il existe $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que

$$\lambda_0\Phi(z) + \lambda_1(D_t\Phi)(z) + ... + \lambda_k(D_t^k\Phi)(z) = 0$$

On a $\lambda_0\Phi(z) + \lambda_1(D_t\Phi)(z) + ... + \lambda_k(D_t^k\Phi)(z) \in \mathbb{C}^{k+1}$
alors, la dernière composante de ce vecteur vérifie

$$\lambda_0 f(z) + \lambda_1(D_t f)(z) + ... + \lambda_k(D_t^k f)(z) = 0$$

donc et d'après la relation (4.17)

$$\lambda_0 F(t(z)) + \lambda_1 F'(t(z))(z) + ... + \lambda_k F^{(k)}(t(z))(z) = 0 \tag{4.19}$$

L'équation (4.19) alors est l'équation différentielle recherchée, c'est une équation différentielle d'ordre au plus k à coefficients constants.

■

Exemple 4.11. *Si on prend $f(z) = \sqrt[4]{E_4(z)}$, $t(z) = \frac{1728}{j(z)}$, alors la fonction $F(t)$ définie dans le théorème 4.10 est une fonction hypergéométrique*

$$\sqrt[4]{E_4(z)} = F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; 1; t(z)\right)$$

cette formule est déjà donnée par Fricke et klein.
D'après la proposition 1.58, $F(t)$ est une solution de l'équation différentielle d'ordre 2

$$t(z)(1 - t(z))u''t((z)) + (1 - (\frac{1}{12} + \frac{5}{12} + 1)t(z))u'(t(z)) - \frac{1}{12}\frac{5}{12}u(t(z)) = 0.$$

Bibliographie

[1] **A. Hitta**, *Cours d'Algèbre et éxercices corrigés*, offices des publications universitaires, (2012).

[2] **A. Minguez**, *Introduction aux formes modulaires*, cours en ligne, institut de mathématiques jussieu, université Paris 6, (2016).

[3] **A. Scherer**, *The j-function and the Monster*, cours en ligne, (2010).

[4] **C. Chevalier, T. Vidick**, *Formes modulaires et indépendance algèbrique*, (2003).

[5] **D. Zagier**, *Modular forms and differential operators*, Proceedings Mathematical Sciences, vol. 104, no 1, p. 57-75, (1994).

[6] **E. Royer**, *Quasimodular forms : an introduction*, Annales mathématiques Blaise Pascal, Vol. 19, No. 2, pp. 297-306, (2012).

[7] **E. Royer** *Un cours «Africain» sur les formes modulaires*, cours en ligne, (2013).

[8] **F. Aliouane**,*Fonctions spéciales par les équations différentielles*, (2017-2018).

[9] **F. Martin, E. Royer**,*Formes modulaires et périodes*, cours en ligne.

[10] **F. Martin, E. Royer**,*Rankin-Cohen brackets on quasi modular forms*, lien : https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00009145v1, (2005).

[11] **H. Cartan**,*Théorie élémentaire des fonctions analytiques*, Hermann, editeurs des sciences et des arts, (1985)

[12] **J. H. Bruinier, G. v. d.Geer, G. Harder, D. Zagier**, *The 1-2-3 of modular forms*, Lecture at a summer school in Nordfjordeid, Norway, Springer.

[13] **J. P. Serre**,*A cours in Arithmetic*, Springer-Verlag New York, Inc., NewYork, NY, (1973).

[14] **J. S. Milne**,*A primer of commutative Algebra* Junuary 1, V1.00, (2009).

[15] **M. Kontsevich, D. Zagier**,*Periods*, institut des Hautes Etudes scientifiques 35, (2001).

[16] **M. Reversat, B. Zhang**, *Cours de théorie des corps*, université Paul Sabatier de Toulouse, (2003).

[17] **N. Ouled Azaiez**, *Thèse de doctorat : Formes quasi-modulaires sur des groupes modulaires co-compactes et restrictions des formes modulaires de Hilbert aux courbes modulaires*, (2005).

[18] **O. Bouillot**,*Mémoire de mathématique : proprietés différentielles de formes modulaires*, université Paris sud Orsay.

[19] **Mémoire de master : W. Boulahmar, A. Belmehnouf**, *Action des opérateurs de Hacke sur l'espace des formes modulaires*, université de Jijel, (2017-2018).

[20] **Y. Wu**, *Transcendence degree*, cours en ligne.

ملخص

نحن مهتمون في هذا العمل بدراسة الخصائص التفاضلية للأشكال النمطية. لذلك قمنا بتقديم فضاء هذه الأشكال النمطية و خصائصها. بعدها قمنا بدراسة الأشكال شبه النمطية و الأشكال النمطية تامة الشكل تقريبا، اللذين يعتبران توسعتين لفضاء الأشكال النمطية M_* مستقرتين بالإشتقاق(العادي و اشتقاق 'ماس-شيمورا' على الترتيب) على العكس من M_*. في حين هذا الأخير مستقر بالنسبة لاشتقاق 'سار ($Serre$)'. في الختام قمنا بذكر أمثلة عن معادلات تفاضلية محققة من طرف مختلف الأشكال سابقة الذكر في الفصول الأولى.

Résumé

Nous nous sommes interesses dans ce travail à l'étude des proprietés différentielles des formes modulaires. Pour cela nous avons commencé par présenter l'espace de ces formes et ses propriétés. Ensuite nous avons étudié les espaces des formes quasi-modulaires et formes modulaires presque holomorphes, qui sont des extensions de l'espace des formes modulaires M_* stables par dérivation (usuelle respectivement de Maass-Shimura) contrairement à M_*. Sur ce dernier est définie une dérivation appelée dérivation de Serre, pour laquelle il est stable, Nous avons fini par les exemples d'équations différentielles vérifiées par les différentes formes déja étudiés dans les premiers chapitres.

Abstract

We are interested in this work in the study of differential properties of modular forms. We started by presenting the space of modular forms, and their properties. Then we studied the spaces of quasimodular forms and almost holomorphic modular forms, that are two extensions of the space of modular forms M_* stables by usual derivation and Maass-Shimura derivation respectively unlike M_*. While the latter space is stable by Serre derivation. We finished by some examples of differential equations satisfied by some forms already studied in the first chapters.