RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique
Département de Mathématique

Mémoire de fin d'études
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : *Mathématiques.*
Option : *Mathématiques Fondamentales et Discrètes.*

Thème

Sur les équations aux différences (floues)

Présenté par :
Hadjar Talbi *Amina Madi*

Devant le jury :

Président	:	**N.Touafek**	Prof.
Encadreur	:	**I. Dekkar**	M.C.B
Examinateur	:	**F. Belhannache**	M.C.A

Promotion **2018/2019**

شكر و تقدير

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء و
المرسلين سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين.
بادئ ذي بدء نحمد الله العلي القدير الذي يسّر لنا كل عسير ووفقنا
لإتمام هذا العمل.
نتقدم بخالص الشّكر و التّقدير إلى الأستاذة المشرفة 'إيمان دكّار' لما
قدّمته لنا من توجيهات و نصائح فجزاها الله خيرا، و كذا كلاّ من
رئيس اللّجنة الأستاذ 'توافق'و الأستاذة الممتحنة 'بلحناش' لإشرافهم
على مناقشة هذه المذكّرة.
الفضل والإمتنان لكل أساتذة الرياضيات و نخص بالذّكر أساتذة
الرياضيات الأساسيّة و المتقطّعة وكل طلاّبها و إلى من علمنا علما و
نفعنا به، ولا ننسى فضل العائلة بكل أفرادها كبيرا و صغيرا على
دعمهم و صبرهم في تعليمنا. وأيضا كل الزملاء و الأصدقاء داخل
الجامعة و خارجها، وكل من قدم يد العون.

إهداء

الحمد لله حمدا طيّبا مباركا فيه، وصلّ اللّهم على نبيّنا محمّد صلّى الله عليه و سلم وآله و صحبه أجمعين.

مع خالص احترامي و تقديري،أهدي هذا العمل إلى من أوصاني الله بهما برّا و إحسانا، إلى من أنارا لي درب الحياة في ظلمتها: أمي و أبي حفظهما الله.

إلى من تقاسمنا ظروف الحياة إخوتي: عمّار، فريال،أسماء، إسحاق و روميسة، و إلى زوجة أخي: هاجر.

إلى صغار العائلة: هارون، رتاج، تسنيم، أريج، مرام و أسيل.

إلى كلّ أقاربي و أخص بالذكر جدي أطال الله في عمره.

إلى من تقاسمنا أجمل اللحظات: صديقاتي العزيزات.

إلى صديقاتي خلال مسيرتي الجامعية بالأخص: آمنة، يسرى،أميرة، إيمان و هبة.

إلى كلّ من علمني علما ونفعني به خلال مسيرتي الدراسية وكل من وقف بجانبي من قريب أو من بعيد.

هاجر طالبي

إهداء

إلى من منحني الثقة و الرعاية : أبي الغالي

إلى من علمتني الصبر و العطاء : أمي الغالية

إلى من علمتني العناد و غرست في الطموح : أختي الكبرى

إلى أخواتي العزيزات و إخوتي الأعزاء

إلى نسمات البراءة و الطفولة: أنس بلقيس محمد الطاهر عبد الودود آدم عبد الرحمان سلسبيل آلاء الرحمان وآخر العنقود عبد البارئ.

إلى كل عزيز قريب كان أم بعيد إلى كل من ساهم فيما أنا عليه اليوم أهدي عملي هذا مع خالص احترامي و تقديري.

آمنة ماضي

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS

Notations	Terminologies
$\mathbb{R}$	Corps des réels
$\mathbb{R}_+^*$	Les nombres réels strictement positifs
$\mathbb{Z}$	L'ensemble des nombres entiers
$\mathbb{N}$	L'ensemble des entiers naturels
$\mathcal{F}(X)$	L'ensemble de tous les ensembles flous de X
$\mathcal{F}(\mathbb{R})$	L'ensemble des nombres flous
$\varnothing$	L'ensemble vide
χ_A	La fonction caratéristique
μ_A	La fonction d'appartenance
$Noy(A)$	Le noyau d'un ensemble flou A
$SuppA$	Le support d'un ensemble flou A
$hgt(A)$	L'hauteur d'un ensemble flou A
$\|A\|$	Le cardinalité d'un ensemble flou A
A_α	Une $\alpha - coupe$ d'un ensemble flou
$[A]_\alpha$	Une $\alpha - coupe$ d'un nombre flou
$A_{l,\alpha}$	Borne inférieur de $[A]_\alpha$
$A_{r,\alpha}$	Borne supérieur de $[A]_\alpha$
$\\|.\\|$	Une norme matricielle
$D_\infty(A, B)$	La distance de Hausdorff entre A et B
J_F	La matrice jacobienne de la fonction F
$C^{m\times m}$	L'ensemble des matrices constantes de m lignes et m colonnes

ملخص

يندرج هذا العمل في إطار دراسة السلوك العام للحلول الموجبة لنوع من أنواع المعادلات الفرقية الضبابية الكسرية من الدّرجة الثّانية، والذي ينقسم إلى ثلاثة فصول :

في الفصل الأول نجمع بعض التّعاريف و النّظريات الأساسية المتعلقة بنظرية المجموعات الضّبابية، أمّا في الفصل الثاني فسوف نهتم بدراسة السلوك المقارب للحلول الموجبة لنظام معادلات فرقية كسرية من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية، في حين أن الفصل الثّالث هو رابط بين الفصلين الأول والثّاني، و هو يعالج إحدى أنواع المعادلات الفرقية الضّبابيّة الكسرية من الدّرجة الثانية، بدقة أكثر، وجود و وحدانية الحلول و سلوكها العام.

كلمات مفتاحية :

معادلات الفرقية الكسرية (الضبابية)، المجموعات الضبابية، الأعداد الضبابية، درجة الانتماء، الإستقرار، نقاط التوازن.

Résumé

Ce travail est dédiée à l'étude du comportement global des solutions positives d'une équation aux différences floue rationnelle d'ordre deux. Il est est répartie en trois chapitres :

Dans le premier chapitre nous allons grouper quelques définitions et théorèmes fondamentaux concernant la théorie des ensembles flous qui seront utiles dans notre travail, dans le deuxième chapitre nous serons intéressées à l'étude du comportement asymptotique des solutions positives d'un système d'équations aux différences rationnels d'ordre deux à coefficients réels, bien que le troisième chapitre sera un lien entre le premier et le deuxième chapitre qui traite une équation aux différences floue rationnelle d'ordre deux, en l'occurrence, l'existence et l'unicité et leurs comportement global.

Mots clés : Équations aux différences rationnelles (floues), ensembles flous, nombres flous, degré d'appartenance, points d'équilibre, stabilité.

Abstract

This work deals with the study of the asymptotic behavior of positive solutions of a second-order fuzzy rational difference equation, and it is distributed on three chapters:
In the first chapter we will give some fundamental definitions and theorems concerning the theory of fuzzy sets which will be useful in our work. While that, in the second chapter we will be interested on the asymptotic behavior of the positive solutions of a system of second-order rational difference equations. However, the third chapter will be a link between the first and the second one, where we will treat a second-order fuzzy rational difference equation. More precisely, we will study the existence and uniqueness of solutions and its global behavior.

Keywords: Second-order (fuzzy) rational difference equation , fuzzy sets, fuzzy numbers, degree of membership, equilibrum points, stability.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

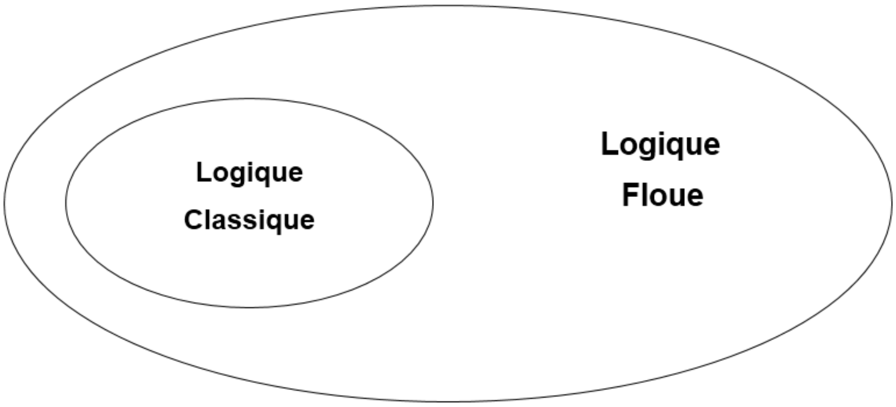
La logique floue ≪Fuzzy logic≫ proposée par Lotfi Zadeh en 1965 est une branche de mathématiques qui permet à un ordinateur de modéliser le monde réel de la même façon que les humains, d'une manière plus simple, la logique floue est la logique qui nous permet de traduire le langage humain à un langage mathématique. Elle permet d'accommoder le concept de vérité partielle : des valeurs entre complètement vrai et complètement faux sont admises.

Comme la science dépend du principe de mesure, nous posons souvent les questions suivantes : comment représenter les valeurs non mesurables ? comment représenter ce qui est incertain ? Et plus clairement, comment représenter les termes du langage humain ? Sachant que les descriptions linguistiques sont un peu ambiguës, mais cela ne veut pas dire que ce sont inexactes, et c'est exactement ce que la logique floue veut exprimer, où si une donnée n'est pas connue précisément, elle peut être exprimée par un intervalle de valeurs possibles pour la donnée.

La logique floue est une technique de résolution du problème très puissante avec une large applicabilité dans le contrôle et la prise de décision, où ça marche avec les situations dont il existe un beaucoup plus d'incertitude et du doute dans l'estimation de certains normes et des valeurs de données, ce qui permet d'étudier différents phénomènes naturels, en s'appuyant sur la fonction d'appartenance et les règles de cette logique.
La définition de Zadeh : ≪ Fuzzy logic is determined as a set of mathematical principles for knowledge representation based on degree of membership rather than on crisp

membership of classical binary logic $\gg$.

La logique floue est une extension de la logique classique, en effet, la logique booléenne classique ne permet que deux états : VRAI ou FAUX, bien que la logique floue permet d'exprimer différents niveaux, plutôt que seulement 1 et 0 .



La logique floue repose sur la théorie des ensembles flous qu'est une théorie mathématique du domaine de l'algèbre abstraite, elle est le formalisme le plus adapté pour décrire de manière qualitative les variables linguistiques (la température, l'âge, la vitesse, le poids,...). La théorie des ensembles flous et exactement la logique floue a de nombreuses applications, elle commence à être utilisée dans l'industrie, la médecine, la mise en place du système expert dans le milieu des années 70, puis verra son utilisation généralisé dans les années 90 (traitement des systèmes complexes, traitement d'images, l'intelligence artificielle, probabilités et statistique ([1], [3]), les équations différentielles [9], les équations aux différences ([7], [11]), ...).

Les équations aux différences et leurs vastes utilisations ont dépassé le stade de l'adolescence pour occuper une place centrale dans l'analyse applicable. Elles sont le support de nombreuse algorithmes d'analyse numérique et sont également omniprésentes en combinatoire. Elles jouent également un rôle important dans de nombreux domaines de la discipline, par exemple en économie, en biomathématique, en sciences et en ingénierie, aussi elles apparaissent dans la modélisation de nombreux problèmes intéressants où les valeurs de données ou d'informations spécifiées pour un problème peuvent être imprécises ou spécifiées partiellement ([2], [8]). Cela nous motive à entamer une étude sur les «équations aux différences floues».

Ce qui nous intéresse en ce mémoire c'est l'application de la logique floue sur les équations aux différences qui nous donne ce qu'on l'appelle équation aux différences floue.
Pour cela, ce travail est organisé comme suit :
Le premier chapitre est consacré à la théorie des ensembles flous, ses propriétés, leur projection sur l'espace des réels, et ainsi que leurs opérations arithmétiques.
Dans le deuxième chapitre, on fait l'étude du comportement des solutions d'un système d'équations non linéaire qui on bénéficiera de ses résultats au dernier chapitre.
Enfin, le troisième chapitre est une approche entre le premier et le deuxième chapitre, nous nous intéressons démontrer l'existence et l'unicité des solutions d'une équation aux différences floue et leur comportement en utilisant les règles de la théorie des sous-ensembles flous de $\mathbb{R}$.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES ENSEMBLES FLOUS

Dans ce chapitre, nous allons donner un apperçu sur les sous-ensembles flous, ses propriétés et leur côté arithmétique.
Commençons d'abord par la définition des sous-ensembles flous, puis, nous discutons ses caractéristiques, et ensuite, nous nous concentrons sur les sous-ensembles flous des nombres réels, appelés les nombres flous, et leurs α–coupes. Enfin, nous nous intéressons aux opérations arithmétiques élémentaires sur les nombres flous.

1.1 Définition d'un ensemble flou

Donnons pour commencer la définition d'un ensemble classique.

Définition 1.1. ***(Ensemble classique)***
Un ensemble classique est une collection d'objets satisfaisant un certain nombre de propriétés et chacun de ses objets est appelé élément de cet ensemble.

Définition 1.2. ***(Fonction caractéristique)***
Soit X un ensemble et A un sous-ensemble de X ($A \subseteq X$). Alors, la fonction

$$\begin{array}{rcccl} \chi_A & : & X & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & & x & \longmapsto & \chi_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases} \end{array}$$

est appelée la fonction caractéristique de A dans X, et $\{0,1\}$ *est dit l'ensemble de valuation.*

Remarque 1.3. *Les ensembles classiques peuvent être représenter par leurs fonctions caractéristiques.*

Exemple 1.4. *Soit* $X = \mathbb{R}$*, l'intervalle* $A = [a, b]$ *tel que* $a, b \in \mathbb{R}$ *peut être définie par*

$$\begin{array}{rcccl} \chi_A & : & X & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & & x & \longmapsto & \chi_A(x) = \begin{cases} 0, & si\ x > b\ ou\ x < a, \\ 1, & si\ a \leq x \leq b. \end{cases} \end{array}$$

Lorsque l'ensemble de valuation $\{0,1\}$ est permis d'être l'intervalle $[0,1]$, A est dit sous-ensemble flou.

Définition 1.5. ***(Sous-ensemble flou)*** *Un sous-ensemble flou A d'un ensemble X est défini comme l'ensemble des couples*

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in A\},$$

où $\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$ *appellée la fonction d'appartenance et qui associe à chaque élément x de X, le degré d'appartenance* $\mu_A(x)$ *compris entre 0 et 1.*
Plus précisément, $\mu_A(x) = 0$ *si x n'appartient pas à A,* $0 < \mu_A(x) < 1$ *si x appartient partiellement à A et* $\mu_A(x) = 1$ *si x appartient entièrement à A.*
On note par $\mathcal{F}(X)$ *l'ensemble de tous les sous-ensembles flous sur X.*

Remarque 1.6.

1. *On utilise indifféremment les termes «sous-ensemble flou» et «ensemble flou».*
2. *Tout ensemble classique est un ensemble flou, dont la fonction d'appartenance est exactement la fonction caractéristique.*
3. *Deux ensembles flous A et B sont égaux si pour tout* $x \in X$*, on a*

$$\mu_A(x) = \mu_B(x).$$

Les mêmes opérations ensemblistes qu'en théorie des ensembles classiques comme l'inclusion, l'intersection, l'union et le complément ont été définis sur les ensembles flous en s'appuyant sur des opérations sur les fonctions d'appartenances
(Pour plus de détails voir [4], [6]).

Exemple 1.7. ***(Cas fini)***

Considérons X l'ensemble des températures possibles pour un malade, en degrés celsius, on a alors

$$X = \{36.5, 37, 37.5, 38, 38.5, 39, 39.5, 40\}.$$

Au cours du classement des températures suivant qu'elles soient normales ou élevées, on définit le sous-ensemble flou A des "températures élevées " comme suit :

$$A = \{(36.5, 0), (37, 0), (37.5, 0.1), (38, 0.5), (38.5, 0.7), (39, 0.9), (39.5, 1), (40, 1)\},$$

où chacun des nombres $0, 0.1, 0.5, 0.7, 0.9, 1$ *représente le degré d'appartenance de chaque température à A.*

Exemple 1.8. ***(Cas infini)***

Prenons $X = \mathbb{R}$, *le sous-ensemble A de X caractérisé par la fonction d'appartenance*

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in X,$$

est le sous-ensemble flou des nombres réels proche à 0. Voir la figure (1.1).

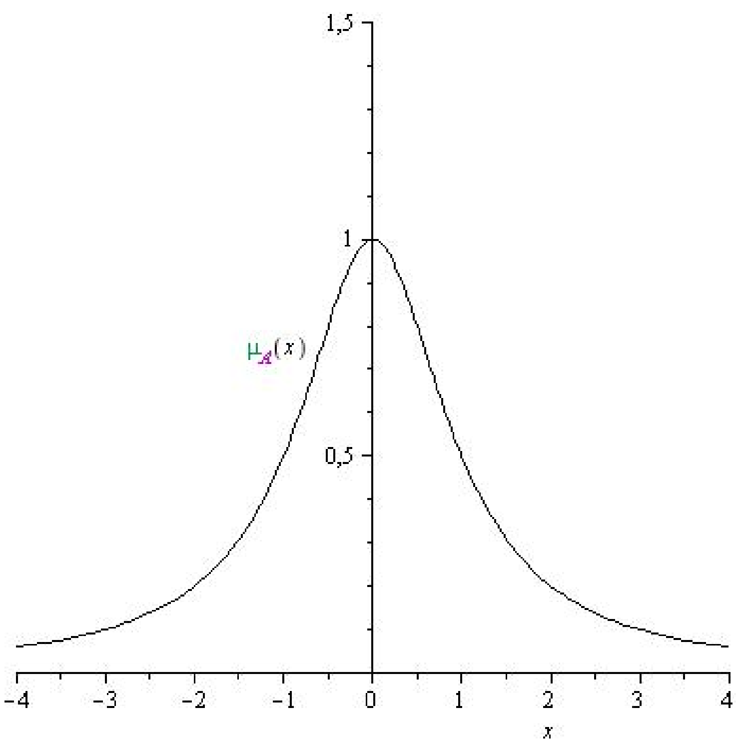


FIGURE 1.1 – L'ensemble flou qui modélise les nombres réels proche à 0.

1.2 Les caractéristiques d'un ensemble flou

Clairement, un ensemble flou est complètement défini par sa fonction d'appartenance et cette dernière a permis de définir plusieurs caractéristiques pour ces ensembles.
Dans cette partie on va donner quelques unes et qu'elles sont les plus utiles pour décrire les ensembles flous.

Définition 1.9. *Le noyau d'un ensemble flou A de X est un sous-ensemble classique de X, noté **Noy(A)** et défini par*

$$Noy(A) = \{x \in X, \mu_A(x) = 1\}.$$

Définition 1.10. *L'hauteur d'un ensemble flou A de X noté **hgt(A)** est défini par*

$$hgt(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x).$$

Définition 1.11. *Un ensemble flou A est dit normalisé si son noyau n'est pas vide, ou alors, $hgt(A) = 1$.*

Remarque 1.12. *L'ensemble flou vide $\varnothing$ est défini par la fonction d'appartenance*

$$\mu_\varnothing(x) = 0, \forall x \in X,$$

bien sûr, on a $\mu_X(x) = 1, \forall x \in X$.

Définition 1.13. *Le cardinalité d'un ensemble flou A de X noté $|A|$ est défini par*

$$|A| = \sum_{x \in A} \mu_A(x).$$

Définition 1.14. *Une α–coupe d'un ensemble flou A de X avec $\alpha \in [0, 1]$ est le sous-ensemble classique de X noté A_α et défini par*

$$A_\alpha = \{x \in X, \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Il est clair que si $\alpha = 0$ alors $A_\alpha = X$, et si $\alpha = 1$ alors $A_\alpha = Noy(A)$.

Exemple 1.15. *Nous illustrons les définitions précédentes en prenant l'ensemble A défini dans l'exemple (1.7) comme suit*

$$A = \{(36.5, 0), (37, 0), (37.5, 0.1), (38, 0.5), (38.5, 0.7), (39, 0.9), (39.5, 1), (40, 1)\}.$$

Alors, $Noy(A) = \{39.5, 40\}$, $hgt(A) = 1$, $|A| = 4.2$, et pour $\alpha = 0.8$ on a
$A_{0.8} = \{39, 39.5, 40\}$.

Théorème 1.16. ***(Théorème de décomposition)***
La fonction d'appartenance d'un ensemble flou A peut s'écrire en fonction de ses α–coupes comme suit

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha\in]0,1]} (\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x)), \forall x \in X,$$

avec

$$\chi_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in A_\alpha, \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Preuve. Soit $x \in X$. On pose $\mu_A(x) = \alpha$, avec $\alpha \in]0,1]$. Alors on a

$$\chi_{A_\alpha}(x) = 1 \quad si \quad \mu_A(x) \geq \alpha,$$

donc

$$\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x) = \alpha = \mu_A(x),$$

d'où

$$\sup_{\alpha\in]0,1]} (\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x)) \geq \mu_A(x) = \alpha. \tag{1.1}$$

D'autre part, on a pour tout $\alpha \in]0,1]$,

$$\begin{cases} \chi_{A_\alpha}(x) = 1 \quad si \quad \mu_A(x) \geq \alpha, \\ \chi_{A_\alpha}(x) = 0 \quad si \quad \mu_A(x) < \alpha. \end{cases}$$

Alors, pour tout $\alpha \in]0,1]$, on a

$$\begin{cases} \alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x) = \alpha \quad si \quad \mu_A(x) \geq \alpha, \\ \alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x) = 0 \quad si \quad \mu_A(x) < \alpha. \end{cases}$$

On remarque dans les deux cas que

$$\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x) \leq \alpha, \forall \alpha \in]0,1],$$

d'où

$$\sup_{\alpha\in]0,1]} (\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x)) \leq \mu_A(x). \tag{1.2}$$

De (1.1) et (1.2) on déduit que pour tout $x \in X$,

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha\in]0,1]} (\alpha \cdot \mu_{A_\alpha}(x)).$$

□

Remarque 1.17. *Le théorème de décomposition nous permet de déduire qu'il est équivalent de connaître la famille de toutes les α–coupes d'un ensemble flou ou de connaître l'ensemble lui-même. Autrement dit, la suite des α–coupes d'un ensemble flou représente le complètement.*

Définition 1.18. *Un ensemble flou A est dit convexe si et seulement si μ_A est quasi-concave, i.e., pour tous $x, y \in X$, pour tout $\lambda \in [0, 1]$,*

$$\mu_A(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq min(\mu_A(x), \mu_A(y)). \tag{1.3}$$

1.3 Les nombres flous

Les nombres flous généralisent les nombres réels classiques, et plus précisément, les nombres flous sont des sous-ensembles flous de $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels, qui ont quelques propriétés additionnelles.

Définition 1.19. *Soit A un sous-ensemble flou de $\mathbb{R}$. Alors, A est dit un nombre flou s'il satisfait les propriétés suivantes :*

1. *A est normalisé.*
2. *A est convexe.*
3. *μ_A est semi-continue supérieurement sur $\mathbb{R}$,i.e., pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

   a– $\limsup\limits_{x \longrightarrow x_0} \mu_A(x) = \mu_A(x_0)$.

   b– *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $W \subset \mathbb{R}$ de x_0 tel que pour tout $x \in W$ on a $\mu_A(x) - \mu_A(x_0) < \varepsilon$.*
4. *μ_A est à support compact i.e., l'ensemble $\overline{\{x \in \mathbb{R}, \mu_A(x) > 0\}}$ est compact. On le note Supp A.*

On note par $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble des nombres flous.

Remarque 1.20.

1. *Tout nombre réel est un nombre flou dit "nombre flou trivial", i.e., $\mathbb{R} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Ici , on peut voir $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des singletons $\{x\}$, pour tout x un nombre réel, où la fonction d'appartenance associée est $\mu_{\{x\}} = \chi_{\{x\}}$.*
2. *On dit qu'un nombre flou est positif (respectivement strictement positif) si Supp $A \subset [0, +\infty[$ (respectivement $]0, +\infty[$).*

3. *On dit qu'un nombre flou est négatif (respectivement strictement négatif) si* $Supp\ A \subset]-\infty, 0]$ $(respectivement\ \ ]-\infty, 0[)$.

Exemple 1.21.

1. *Le sous-ensemble flou A de $\mathbb{R}$ qu'a pour fonction caractéristique*

$$\begin{array}{rcccl} \mu_A & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ & & x & \longmapsto & \mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < -5, \\ \frac{x+5}{4}, & -5 \leq x < -1, \\ \frac{1-x}{2}, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases} \end{array}$$

est un nombre flou, appelé nombre flou triangulaire (Voir la figure (1.2)*). En effet,*

(a) *A est normalisé, puisque, il existe $x = -1$, tel que $\mu_A(x) = 1$.*

(b) *Soit $\lambda \in [0,1]$, on veut vérifier que*

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y)). \tag{1.4}$$

Distinguons les cas suivants :

1^{er} ***cas*** *: Si $x \in]-\infty, -5[$ et $y \in]-\infty, -5[\cup [-5, -1] \cup [-1, 1] \cup]1, +\infty[$.*

On a

$$\mu_A(x) = 0 = \min(\mu_A(x), \mu_A(y)),$$

et comme

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq 0,$$

alors l'inégalité (1.4) *est vérifiée.*

Notons que au cas inverse, c'est à dire,

lorsque $y \in]-\infty, -5[$ et $x \in]-\infty, -5[\cup [-5, -1] \cup [-1, 1] \cup]1, +\infty[$, l'inégalité est aussi vérifiée.

2^{me} ***cas*** *: Si $x, y \in [-5, -1]$, alors on a*

$$\mu_A(x) = \frac{x+5}{4} \quad et \quad \mu_A(y) = \frac{y+5}{4}.$$

Supposons que $x \geq y$, alors

$$\begin{aligned} \mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \frac{(\lambda x + (1-\lambda)y) + 5}{4} \\ &= \frac{\lambda(x-y)}{4} + \frac{y+5}{4} \\ &\geq \frac{y+5}{4} = \min(\mu_A(x), \mu_A(y)). \end{aligned}$$

Maintenant, si $y \geq x$, *alors*

$$\begin{aligned}\mu_A(\lambda x+(1-\lambda)y) &= \frac{[\lambda x+(1-\lambda)y]+5}{4}\\ &= \frac{(\lambda x+(1-\lambda)y)+5+x-x}{4}\\ &= \frac{x+5}{4}+\frac{(1-\lambda)(y-x)}{4}\\ &\geq \frac{x+5}{4} = \min(\mu_A(x),\mu_A(y)).\end{aligned}$$

D'où l'inégalité (1.4) *est vérifiée.*

3^{me} ***cas*** *: Si* $x, y \in [-1,1]$, *alors on a*

$$\mu_A(x) = \frac{1-x}{2} \quad et \quad \mu_A(y) = \frac{1-y}{2}.$$

Supposons que $y \geq x$, *alors*

$$\begin{aligned}\mu_A(\lambda x+(1-\lambda)y) &= \frac{1-(\lambda x+(1-\lambda)y)}{2}\\ &= \frac{\lambda(y-x)}{2}+\frac{1-y}{2}\\ &\geq \frac{1-y}{2} = \min\left(\mu_A(y),\mu_A(x)\right).\end{aligned}$$

Inversement, si $x \geq y$, *alors*

$$\begin{aligned}\mu_A(\lambda x+(1-\lambda)y) &= \frac{1-(\lambda x+(1-\lambda)y)}{2}\\ &= \frac{1-\lambda x-y+\lambda y+x-x}{2}\\ &= \frac{(1-\lambda)(x-y)}{2}+\frac{1-x}{2}\\ &\geq \frac{1-x}{2} = \min\left(\mu_A(y),\mu_A(x)\right).\end{aligned}$$

D'où l'inégalité (1.4) *est vérifiée.*

4^{me} ***cas*** *: Si* $x \in [-5,-1]$ *et* $y \in [-1,1]$, *alors*

$$\mu_A(x) = \frac{x+5}{4} \quad et \quad \mu_A(y) = \frac{1-y}{2}.$$

On a dans ce cas $y \geq x$, *et* $(\lambda x+(1-\lambda)y) \in [-5,1]$.

Premièrement, si $(\lambda x+(1-\lambda)y) \in [-5,-1]$, *alors*

$$\begin{aligned}\mu_A(\lambda x+(1-\lambda)y) &= \frac{\lambda x+(1-\lambda)y+5}{4}\\ &= \frac{\lambda x+(1-\lambda)y+x-x+5}{4}\\ &= \frac{(1-\lambda)(y-x)}{4}+\frac{x+5}{4}\\ &\geq \frac{x+5}{4} \geq \min\left(\frac{x+5}{4},\frac{1-y}{2}\right).\end{aligned}$$

Deuxièmement, si $\mu_A(\lambda x+(1-\lambda)y)\in[-1,1]$, *on obtient*

$$\begin{aligned}\mu_A(\lambda x+(1-\lambda)y) &= \frac{[1-[\lambda x+(1-\lambda)y]}{2}\\ &= \frac{1-\lambda x-y+\lambda y}{2}\\ &= \frac{1-y}{2}+\frac{\lambda(y-x)}{2}\\ &\geq \frac{1-y}{2}\geq \min\left(\frac{1-y}{2},\frac{x+5}{4}\right).\end{aligned}$$

D'où l'inégalité (1.4) *est vérifiée.*

Notons que la démonstration du cas inverse, c'est à dire, lorsque $y\in[-5,-1]$ *et* $x\in[-1,1]$ *se fait de la même manière.*

5^{me} ***cas*** *: Si* $x\in]1,+\infty[$ *et* $y\in]-\infty,-5[\cup[-5,-1]\cup[-1,1]\cup]1,+\infty[$.

On a

$$\mu_A(x)=0=\min(\mu_A(x),\mu_A(y)),$$

et comme

$$\mu_A(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq 0,$$

alors l'inégalité (1.4) *est vérifiée.*

De la même façon, on peut démontrer que lorsque $y\in]1,+\infty[$ *et* $x\in]-\infty,-5[\cup[-5,-1]\cup[-1,1]\cup]1,+\infty[$, *l'inégalité* (1.4) *vérifiée.*

En conclusion, on déduit que A *est convexe.*

(c) Il est clair que la fonction μ_A *est continue sur* $\mathbb{R}$.

(d) A *est à support compact. En effet,*

$$Supp\ A=\overline{\{x\in\mathbb{R},\mu_A(x)>0\}}=\overline{]-5,1[}=[-5,1],$$

qui est un intervalle borné fermé dans $\mathbb{R}$. *D'où le résultat.*

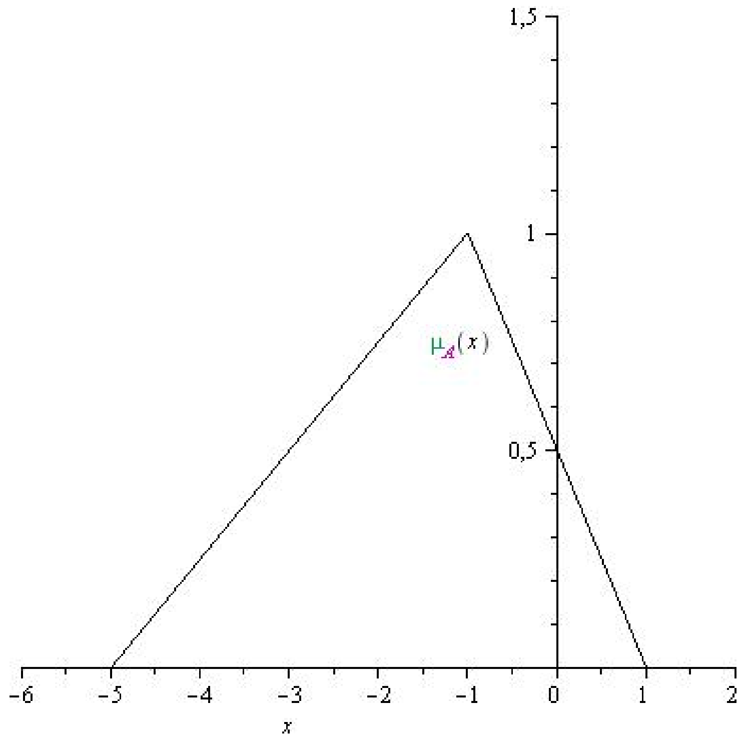


FIGURE 1.2 – Un nombre flou triangulaire.

2. *L'ensemble flou A représenté par la figure* (1.1) *n'est pas un nombre flou puisque* $SuppA = \mathbb{R}$ *qui n'est pas un compact.*
3. *L'ensemble flou représenté par la figure* (1.3) *n'est pas un nombre flou puisqu'il n'est pas convexe.*

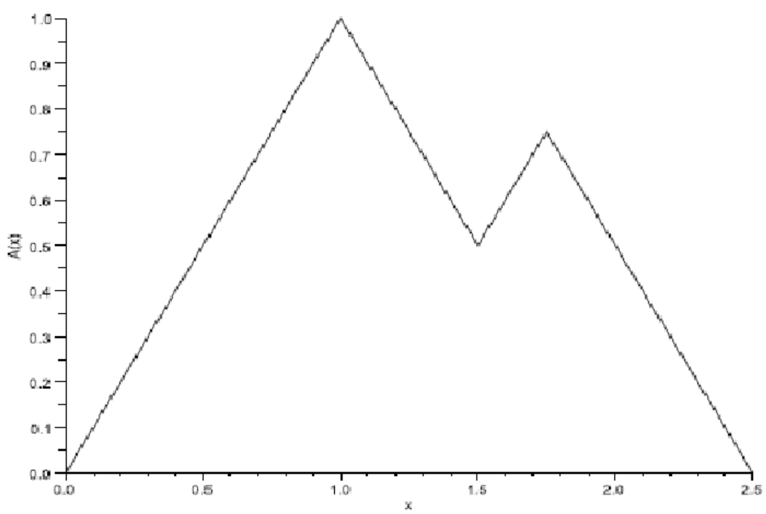


FIGURE 1.3 – Un sous-ensemble flou de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un nombre flou.

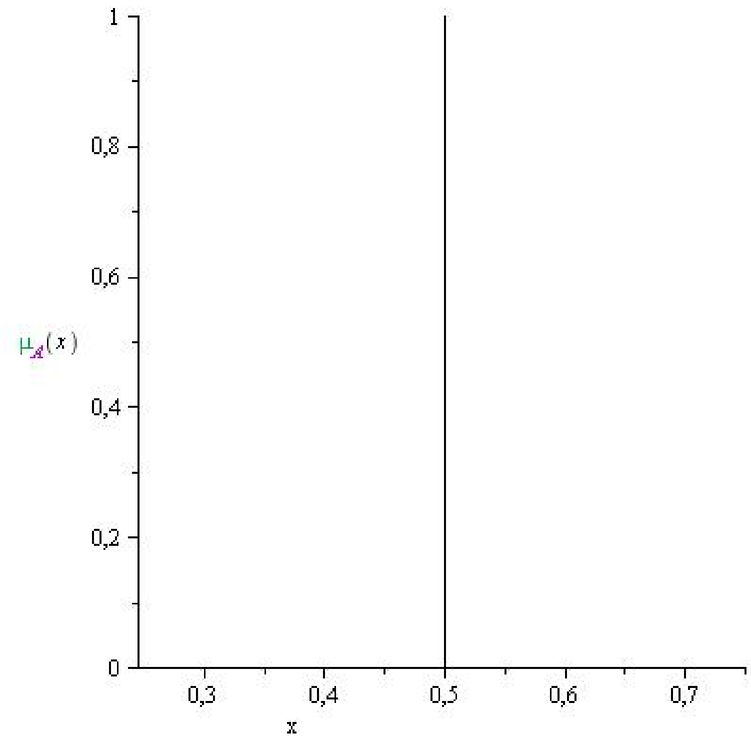


FIGURE 1.4 – Exemple d'un nombre flou trivial.

1.4 Les α–coupes des nombres flous

Dans tout ce qui suit, les α–coupes d'un nombre flou seront noté $[A]_\alpha, \alpha \in [0,1]$.

Proposition 1.22. *Soit $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ un nombre flou et $[A]_\alpha, \alpha \in [0,1]$ ses α–coupes. Alors,*

1. *$[A]_\alpha$ est un intervalle fermé borné, tel que pour tout $\alpha \in]0,1], [A]_\alpha = [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]$.*
2. *Si $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$, alors $[A]_{\alpha_2} \subseteq [A]_{\alpha_1}$.*
3. *Supp $A = \overline{\bigcup_{\alpha \in]0,1]} [A]_\alpha}$.*

Preuve. 1. Soit A un nombre flou et $\alpha \in]0,1]$, remarquons d'abord que tous les ensembles $[A]_\alpha$ ne sont pas vides puisque $[A]_1 \neq \varnothing$ (A normalisé) et ils sont bornés car *Supp A* est borné (tout ensemble compact dans $\mathbb{R}$ est fermé borné).
Si $a, b \in [A]_\alpha$, alors $\mu_A(a) \geq \alpha$ et $\mu_A(b) \geq \alpha$. Puis de la convexité floue, si $x \in [a,b]$ on obtient

$$\mu_A(x) \geq \min\{\mu_A(a), \mu_A(b)\} = \alpha,$$

i.e., $x \in [A]_\alpha$. En conclusion, $[A]_\alpha$ contient tout intervalle fermé $[a,b]$ et cela signifie que $[A]_\alpha$ est convexe.

Maintenant on montre que $[A]_\alpha$ est fermé, pour cela il suffit de montrer que son complémentaire, i.e., $V = \{x \in \mathbb{R}, \mu_A(x) < \alpha\}$ est un ouvert. Soit $x_0 \in V$, alors $\mu_A(x_0) < \alpha$, puisque la fonction μ_A est semi-continue supérieurement en x_0, alors il existe un voisinage $W \subset \mathbb{R}$ de x_0 tel que pour tout $x \in W$ on a $\mu_A(x) - \mu_A(x_0) < \varepsilon$, donc

$$\mu_A(x) < \varepsilon + \mu_A(x_0),$$

Pour ε assez petit et comme $\mu_A(x_0) < \alpha$ on obtient que $\mu_A(x) < \alpha$, i.e., $x \in V$, ce qui implique que $W \subset V$. D'où V est ouvert et par suite $[A]_\alpha$ est fermé. Dans $\mathbb{R}$, les ensembles convexes fermés sont des intervalles fermés (Voir [10] p.14), d'où $[A]_\alpha$ est un intervalle fermé pour tout $\alpha \in]0,1]$.

2. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ tel que $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Soit $x \in [A]_{\alpha_2}$, alors on a $\mu_A(x) \geq \alpha_2 \geq \alpha_1$. D'où $x \in [A]_{\alpha_1}$.

3. Premièrement, on montre l'inclusion $\overline{\bigcup_{\alpha \in]0,1]} [A]_\alpha} \subset SuppA$. On a pour tout $\alpha \in]0,1]$,

$$[A]_\alpha = \{x \in \mathbb{R}, \mu_A(x) \geq \alpha\} \subset \{x \in \mathbb{R}, \mu_A(x) > 0\},$$

donc

$$\bigcup_{\alpha \in]0,1]} [A]_\alpha \subset \{x \in \mathbb{R}, \mu_A(x) > 0\},$$

d'où

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in]0,1]} [A]_\alpha} \subset \overline{\{x \in \mathbb{R}, \mu_A(x) > 0\}} = SuppA.$$

Deuxièmement, on montre que $SuppA \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in]0,1]} [A]_\alpha}$.

Pour cela, soit $x \in SuppA = \overline{\{x \in \mathbb{R}, \mu_A(x) > 0\}}$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Supposons $\mu_A(x_n) = \alpha_n, n \in \mathbb{N}$, alors

$$x_n \in [A]_{\alpha_n} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [A]_{\alpha_n} \subset \bigcup_{\alpha \in]0,1]} [A]_\alpha,$$

d'où

$$x \in \overline{\bigcup_{\alpha \in]0,1]} [A]_\alpha}.$$

Ainsi

$$SuppA \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in]0,1]} [A]_\alpha}.$$

D'où le résultat.

$\square$

Exemple 1.23. *Soit A le nombre flou où sa fonction d'appartenance est donnée par*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 4(x - x^2), & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1], \end{cases}$$

voir la figure ci-dessous

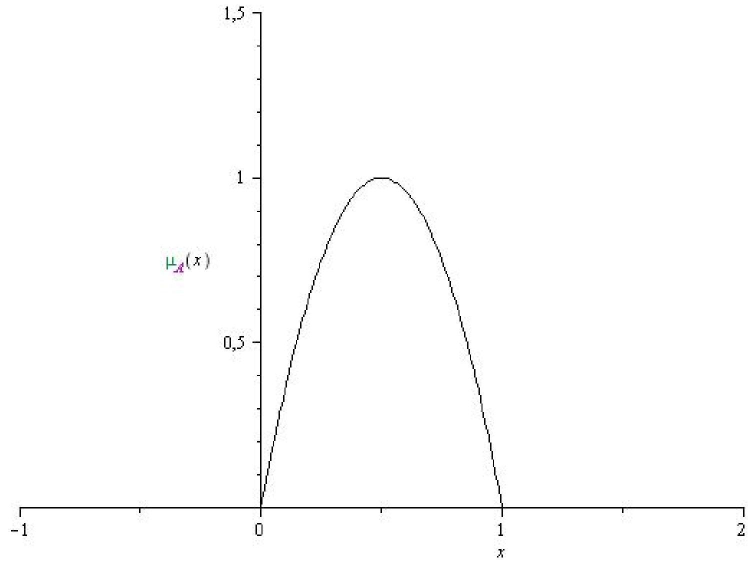


FIGURE 1.5 – Le nombre flou A.

Nous voulons montrer que les $\alpha-$coupes de A sont des intervalles fermées bornées de $\mathbb{R}$. *Soit $\alpha \in]0,1]$, on a*

$$\begin{aligned} [A]_\alpha &= \{x \in \mathbb{R},\ \mu_A(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x \in \mathbb{R},\ 4(x - x^2) \geq \alpha\}. \end{aligned}$$

Prenons l'équation

$$4(x - x^2) - \alpha = 0,$$

qui admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-\alpha}) \ \ et \ \ x_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-\alpha}).$$

Donc, l'inégalité $4(x - x^2) \geq \alpha$ est satisfaite si et seulement si

$$x \in [\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-\alpha}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-\alpha})].$$

D'où

$$[A]_\alpha = [\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-\alpha}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-\alpha})],$$

qui est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

Lemme 1.24. *[4] Soit $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ un nombre flou, et $[A]_\alpha = [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]$, pour $\alpha \in]0,1]$ ses α–coupes. Alors $A_{l,\alpha}$ et $A_{r,\alpha}$ peuvent être considérées comme des fonctions en α définies sur l'intervalle $]0,1]$, qui satisfont*

1. *$A_{l,\alpha}$ est croissante et continue à gauche, i.e., pour tout $a \in]0,1]$, $\lim\limits_{\alpha \xrightarrow{<} a} A_{l,\alpha} = A_{l,a}$.*
2. *$A_{r,\alpha}$ est décroissante et continue à gauche.*
3. *$A_{l,1} \leq A_{r,1}$*

Inversement, pour toute fonction L_α et R_α définie sur $]0,1]$ qui vérifie $(1)-(3)$ dans ce qui précède, il existe un unique $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ tel que $[A]_\alpha = [L_\alpha, R_\alpha]$ pour tout $\alpha \in]0,1]$.

Maintenant, nous enumérons certaines opérations arithmétiques pour les intervalles fermés de $\mathbb{R}$ dont nous aurons besoin lors des défintions des opérations algébriques sur les nombres flous.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = [a,b]$ et $B = [c,d]$ deux intervalles fermés de $\mathbb{R}$. Alors on a :

a) La somme entre A et B est l'intervalle

$$A + B = [a + c, b + d].$$

b) La différence entre A et B est l'intervalle

$$A - B = [a - d, b - c].$$

c) La multiplication de A par un scalaire λ est l'intervalle

$$\lambda A = \begin{cases} [\lambda a, \lambda b], & si \quad \lambda \geq 0, \\ [\lambda b, \lambda a], & si \quad \lambda < 0. \end{cases}$$

d) La multiplication de A et B est l'intervalle

$$A \cdot B = [minP, maxP],$$

où $P = \{ac, ad, bc, bd\}$.

e) Le quotient de A et B, si $0 \notin B$, est l'intervalle

$$\begin{aligned} A/B &= [a,b]/[c,d] \\ &= [min(a/c, a/d, b/c, b/d), max(a/c, a/d, b/c, b/d)]. \end{aligned}$$

1.5 Les opérations algébriques des nombres flous

Souvent, nous devons effectuer des opérations avec des paramètres incertains, c'est à dire, des nombres flous. Pour cette raison, les opérations analogues à celles classiques entre nombres réels ont été définies et develloppées de manière extensive. Avant d'entamer leur théorie, nous allons parler du principe d'extension de Zadeh qui est l'une des idées les plus fondamentales de la théorie des ensembles flous. Il permet d'exploiter nos connaissances classiques dans le cas des données floues.

Définition 1.25. *[4] (**Principe d'extension de Zadeh**) Soient X et Y deux ensembles classiques et soit f une fonction de X dans Y. Alors, elle peut être prolongée en une fonction $F : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ (fonction floue) tel que pour tout $A \in \mathcal{F}(X), B = F(A)$ est donnée par $B = \{(y, \mu_B(y)), y \in f(X)\}$, où*

$$\mu_B(y) = \begin{cases} sup\{\mu_A(x) : x \in X, f(x) = y\}, si \ f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0, si \ f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases} , \forall y \in f(X)$$

Nous appelons la fonction F "l'extension de Zadeh de f".

Remarque 1.26.

1. *L'extension de Zadeh est bien définie pour tout ensemble flou $A \in \mathcal{F}(X)$. En effet, si $f^{-1}(y) \neq \varnothing$, l'ensemble $\{\mu_A(x) : x \in X, f(x) = y\}$ n'est pas vide et borné et ainsi, il admet au moins une borne supérieure.*
2. *Lorsque $X = X_1 \times X_2$, le produit cartésien des ensembles X_1 et X_2.*
   Soit $f : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y$, alors f peut être prolongée à $F : \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ tel que pour tout $A \in \mathcal{F}(X_1), B \in \mathcal{F}(X_2), C = F(A, B)$, où

   $$\mu_C(y) = \begin{cases} \sup\{\mu_{A\times B}(x_1, x_2), x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, f(x_1, x_2) = y\} & si \ f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 & sinon \end{cases}$$

   avec $\mu_{A\times B}(x_1, x_2) = \min\{\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)\}$.

Pour le cas des nombres flous, il est naturel de poser la question de savoir si l'image d'un nombre flou par une fonction définit aussi un nombre flou. Le théorème suivant confirme cette propriété pour les fonctions continues et il a été developpé en utilisant le principe d'extension de Zadeh. Pour une démonstration détaillée, voir [4].

Théorème 1.27. *Toute fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut être prolongée à une fonction $F : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$, et pour tout $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ on peut déterminer $B = F(A)$ par ses α–coupes $[B]_\alpha = [B_{l,\alpha}, B_{r,\alpha}], \alpha \in]0,1]$, où*

$$B_{l,\alpha} = inf\{f(x), x \in [A]_\alpha\},$$

et

$$B_{r,\alpha} = sup\{f(x), x \in [A]_\alpha\},$$

avec $[A]_\alpha, \alpha \in]0,1]$ désignent les α–coupes de A.

La proposition suivante contient des cas particuliers du théorème (1.27).

Proposition 1.28. *Soit $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ un nombre flou tel que $[A]_\alpha = [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}], \alpha \in [0,1]$ ses α–coupes. Alors*

1. *La multiplication de A par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}_+$ est un nombre flou et ses α–coupes sont données par*

$$[\lambda A]_\alpha = \lambda [A]_\alpha, \ \forall \alpha \in [0,1], \ \lambda > 0.$$

   où, $\lambda[A]_\alpha$ est le produit usuel d'un réel par un intervalle de $\mathbb{R}$.

2. *Pour $\lambda = -1$, l'opposé de A, noté $-A$ est un nombre flou et ses α–coupes sont données par*

$$[-A]_\alpha = -[A]_\alpha, \ \forall \alpha \in [0,1].$$

3. *Si $0 \notin [A]_\alpha$, alors, l'inverse de A, noté A^{-1} ou $\dfrac{1}{A}$ est un nombre flou et ses α–coupes sont données par*

$$[A^{-1}]_\alpha = \left[\frac{1}{A}\right]_\alpha = \frac{1}{[A]_\alpha}, \ \forall \alpha \in [0,1].$$

Preuve.

1. Prenons la fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (\lambda, x) & \longmapsto & f(\lambda, x) = \lambda x \end{array}$$

   Il clair qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$, donc en appliquant le Théorème 1.27, on obtient pour tout $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}), B = \lambda A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ et on a $[B]_\alpha = [\lambda A]_\alpha = [B_{l,\alpha}, B_{r,\alpha}]$ tels que,

$$\begin{aligned} B_{l,\alpha} &= inf\{f(x), x \in [A]_\alpha\} \\ &= inf\{\lambda x, x \in [A]_\alpha\} \\ &= inf\{\lambda x, \lambda x \in \lambda[A]_\alpha\} \\ &= inf\{\lambda x, \lambda x \in [\lambda A_{l,\alpha}, \lambda A_{r,\alpha}]\} \\ &= \lambda A_{l,\alpha}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} B_{r,\alpha} &= sup\{f(x), x \in [A]_\alpha\} \\ &= sup\{\lambda x, x \in [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]\} \\ &= sup\{\lambda x, \lambda x \in [\lambda A_{l,\alpha}, \lambda A_{r,\alpha}]\} \\ &= \lambda A_{r,\alpha}. \end{aligned}$$

D'où

$$[\lambda A]_\alpha = [\lambda A_{l,\alpha}, \lambda A_{r,\alpha}] = \lambda[A]_\alpha.$$

2. Prenons la fonction

$$\begin{array}{rccl} f & : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = -x \end{array}$$

Il clair qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$, donc en appliquant le Théorème 1.27, on obtient pour tout $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}), B = -A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ et on a $[B]_\alpha = [-A]_\alpha = [B_{l,\alpha}, B_{r,\alpha}]$ tels que,

$$\begin{aligned} B_{l,\alpha} &= inf\{f(x), x \in [A]_\alpha\} \\ &= inf\{-x, x \in [A]_\alpha\} \\ &= inf\{-x, -x \in -[A]_\alpha\} \\ &= inf\{-x, -x \in [-A_{r,\alpha}, -A_{l,\alpha}]\} \\ &= -A_{r,\alpha}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} B_{r,\alpha} &= sup\{f(x), x \in [A]_\alpha\} \\ &= sup\{-x, x \in [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]\} \\ &= sup\{-x, -x \in [-A_{r,\alpha}, -A_{l,\alpha}]\} \\ &= -A_{l,\alpha}. \end{aligned}$$

D'où

$$[-A]_\alpha = [-A_{r,\alpha}, -A_{l,\alpha}] = -[A]_\alpha.$$

3. On applique le Théorème 1.27, pour la fonction continue

$$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(x) = \frac{1}{x} \end{array}$$

Alors,

$A^{-1} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ et pour $\alpha \in [0,1]$, on a

$$\left[\frac{1}{A}\right]_\alpha = [A^{-1}]_\alpha = [B_{l,\alpha}, B_{r,\alpha}],$$

où

$$\begin{aligned} B_{l,\alpha} &= \inf\{f(x), x \in [A]_\alpha\} \\ &= \inf\{\frac{1}{x}, x \in [A]_\alpha\} \\ &= \inf\left\{\frac{1}{x}, \frac{1}{x} \in \frac{1}{[A]_\alpha}\right\} \\ &= \inf\left\{\frac{1}{x}, \frac{1}{x} \in \frac{1}{[A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]}\right\} \\ &= \inf\left\{\frac{1}{x}, \frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{A_{r,\alpha}}, \frac{1}{A_{l,\alpha}}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{A_{r,\alpha}}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} B_{r,\alpha} &= \sup\{f(x), x \in [A]_\alpha\} \\ &= \sup\left\{\frac{1}{x}, x \in [A]_\alpha\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{1}{x}, \frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{A_{r,\alpha}}, \frac{1}{A_{l,\alpha}}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{A_{l,\alpha}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\left[\frac{1}{A}\right]_\alpha = \left[\frac{1}{A_{r,\alpha}}, \frac{1}{A_{l,\alpha}}\right].$$

□

Le théorème suivant est aussi important.

Théorème 1.29. *Soient f :$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f peut être prolongée à F : $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$, et pour tout $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}), C = F(A,B)$ est déterminé par ses α–coupes $[C]_\alpha = [C_{l,\alpha}, C_{r,\alpha}], \alpha \in [0,1]$, tels que*

$$C_{l,\alpha} = inf\{f(x,y)|x \in [A]_\alpha, y \in [B]_\alpha\},$$

et

$$C_{r,\alpha} = sup\{f(x,y)|x \in [A]_\alpha, y \in [B]_\alpha\}.$$

Preuve. Voir [4]. □

Proposition 1.30. ***(La somme de deux nombres flous)*** *Soient $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ deux nombres flous, alors la somme de ces deux nombres flous, notée $A+B$, est un nombre flou et ses α –coupes sont données par*

$$[A+B]_\alpha = \{x+y|x \in [A]_\alpha, y \in [B]_\alpha\} = [A]_\alpha + [B]_\alpha,$$

avec $[A]_\alpha + [B]_\alpha$ est la somme de deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Preuve.

Prenons la fonction

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = x+y \end{array}$$

Il clair qu'elle est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc en appliquant le Théorème 1.29, on obtient pour tout $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}), C = A+B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ et on a $[C]_\alpha = [A+B]_\alpha = [C_{l,\alpha}, C_{r,\alpha}]$ tels que,

$$\begin{aligned} C_{l,\alpha} &= \inf\{f(x,y), x \in [A]_\alpha, y \in [B]_\alpha\} \\ &= \inf\{x+y, x+y \in [A+B]_\alpha\} \\ &= \inf\{x+y, x+y \in [A_{l,\alpha}+B_{l,\alpha},\ A_{r,\alpha}+B_{r,\alpha}]\} \\ &= A_{l,\alpha}+B_{l,\alpha}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} C_{r,\alpha} &= \sup\{f(x,y), x \in [A]_\alpha, y \in [B]_\alpha\} \\ &= \sup\{x+y, x+y \in [A+B]_\alpha\} \\ &= \sup\{x+y, x+y \in [A_{l,\alpha}+B_{l,\alpha},\ A_{r,\alpha}+B_{r,\alpha}]\} \\ &= A_{r,\alpha}+B_{r,\alpha}. \end{aligned}$$

D'où

$$[A+B]_\alpha = [A_{l,\alpha}+B_{l,\alpha},\ A_{r,\alpha}+B_{r,\alpha}] = [A]_\alpha + [B]_\alpha.$$

□

Théorème 1.31.

1. *L'addition des nombres flous est associative et commutative, i.e.,*$\forall A, B, C \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$,
$$A + (B + C) = (A + B) + C,$$
et
$$A + B = B + A.$$
2. $0 \in \mathbb{R}$ *est l'élément neutre, i.e.,*
$$A + 0 = 0 + A = A, \forall A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}).$$
3. *Aucun élément* $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \backslash \mathbb{R}$ *posséde un opposé dans* $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
4. *Soit A, B et C sont tous des nombres flous positifs ou négatifs, alors*
$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C).$$
5. *Pour* $\lambda \in \mathbb{R}$, *et* $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, *on a*
$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B.$$
6. *Pour* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *et* $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, *on a*
$$(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A).$$

Preuve. Voir [4]. □

Proposition 1.32. ***(Le produit de deux nombres flous**)* *Soient* $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ *deux nombres flous, alors le produit de A et B,* $C = A \cdot B$ *est un nombre flou et ses* α*–coupes* $[C]_\alpha = [A \cdot B]_\alpha = [C_{l,\alpha}, C_{r,\alpha}], \alpha \in [0, 1]$ *sont données par*
$$C_{l,\alpha} = (A \cdot B)_{l,\alpha} = \min\{A_{l,\alpha}B_{l,\alpha}, A_{l,\alpha}B_{r,\alpha}, A_{r,\alpha}B_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}B_{r,\alpha}\},$$
et
$$C_{r,\alpha} = (A \cdot B)_{r,\alpha} = \max\{A_{l,\alpha}B_{l,\alpha}, A_{l,\alpha}B_{r,\alpha}, A_{r,\alpha}B_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}B_{r,\alpha}\}.$$

Preuve.

Prenons la fonction
$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = x \cdot y \end{array}$$

Il clair qu'elle est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc en appliquant le Théorème 1.29, on obtient pour tout $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}), C = A \cdot B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ et on a $[C]_\alpha = [A \cdot B]_\alpha = [C_{l,\alpha}, C_{r,\alpha}]$ tels que

$$\begin{aligned} C_{l,\alpha} &= \min\{f(x,y), x \in [A]_\alpha, y \in [B]_\alpha\} \\ &= \min\{x \cdot y, x \cdot y \in [A \cdot B]_\alpha\} \\ &= \min\{x \cdot y, x \cdot y \in [A]_\alpha \cdot [B]_\alpha\} \\ &= \min\{A_{l,\alpha}B_{l,\alpha}, A_{l,\alpha}B_{r,\alpha}, A_{r,\alpha}B_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}B_{r,\alpha}\} \\ &= (A \cdot B)_{l,\alpha}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} C_{r,\alpha} &= \max\{f(x,y), x \in [A]_\alpha, y \in [B]_\alpha\} \\ &= \max\{x \cdot y, x \cdot y \in [A \cdot B]_\alpha\} \\ &= \max\{x \cdot y, x \cdot y \in [A]_\alpha \cdot [B]_\alpha\} \\ &= \max\{A_{l,\alpha}B_{l,\alpha}, A_{l,\alpha}B_{r,\alpha}, A_{r,\alpha}B_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}B_{r,\alpha}\} \\ &= (A \cdot B)_{r,\alpha}. \end{aligned}$$

□

Théorème 1.33. *Soient A,B,C des nombres flous, alors*

1. *Le produit est associatif et commutatif, i.e,*

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),$$

   et

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

2. *Aucun élément $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$ possède un inverse dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.*
3. *Si A est un nombre flou positif alors $-A$ est un nombre flou négatif.*
4. $(-A) \cdot B = -(A \cdot B)$.
5. $1 \in \mathbb{R}$ *est l'élément neutre, i.e.,*

$$A \cdot 1 = 1 \cdot A = A, \forall A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}).$$

6. *On a*

$$((A + B) \cdot C)_\alpha \subseteq (A \cdot C)_\alpha + (B \cdot C)_\alpha, \forall \alpha \in [0, 1].$$

   L'inclusion inverse n'est pas vraie en général et donc la distributivité ne tient pas.

Preuve. Voir [4]. □

Remarque 1.34. *L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ n'est pas un espace véctoriel car les opérations $(+)$ et $(\cdot)$ n'ademttent pas d'éléments symétriques. C'est une propriété qui restreint plusieurs domaines de mathématiques floues, comme par exemple, le domaine des équations différentielles et les équations aux différences floues.*

1.6 Espace métrique des nombres flous

Maintenant, on va définir une distance sur l'espace des nombres flous $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Définition 1.35. *Soit A,B deux nombres flous, où $[A]_\alpha = [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]$ et $[B]_\alpha = [B_{l,\alpha}, B_{r,\alpha}]$ ses $\alpha -$ coupes respectivement. On définit la distance entre deux nombres flous par*

$$\begin{aligned} D_\infty : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (A, B) &\longmapsto D_\infty(A, B) \end{aligned}$$

tel que

$$D_\infty(A, B) = \underset{\alpha\in]0,1]}{sup}\, max\{|A_{l,\alpha} - B_{l,\alpha}|, |A_{r,\alpha} - B_{r,\alpha}|\}.$$

Proposition 1.36. $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), D_\infty)$ *est un espace métrique.*

Preuve.

Pour que $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), D_\infty)$ soit un espace métrique, il faut que D_∞ soit une distance sur $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ c'est à dire il faut vérifier les conditions suivantes :
Si A,B et C trois nombres flous, alors

(a) $D_\infty(A, B) \geq 0$.

(b) $D_\infty(A, B) = 0$, alors $A = B$.

(c) $D_\infty(A, B) = D_\infty(B, A)$.

(d) $D_\infty(A, C) \leq D_\infty(A, B) + D_\infty(B, C)$.

On a

(a) De la définition de D_∞, il est clair que $D_\infty(A, B) \geq 0$.

(b) $D_\infty(A, B) = \underset{\alpha\in]0,1]}{sup}\, max\{|A_{l,\alpha} - B_{l,\alpha}|, |A_{r,\alpha} - B_{r,\alpha}|\} = 0,$

alors

$$|A_{l,\alpha} - B_{l,\alpha}| = 0 \text{ et } |A_{r,\alpha} - B_{r,\alpha}| = 0,$$

donc

$$A_{l,\alpha} = B_{l,\alpha} \text{ et } A_{r,\alpha} = B_{r,\alpha}.$$

(c)

$$\begin{aligned}
D_\infty(A,B) &= \sup_{\alpha\in]0,1]} max\{|A_{l,\alpha} - B_{l,\alpha}|, |A_{r,\alpha} - B_{r,\alpha}|\} \\
&= \sup_{\alpha\in]0,1]} max\{|B_{l,\alpha} - A_{l,\alpha}|, |B_{r,\alpha} - A_{r,\alpha}|\} \\
&= D_\infty(B,A).
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
D_\infty(A,C) &= \sup_{\alpha\in]0,1]} max\{|A_{l,\alpha} - C_{l,\alpha}|, |A_{r,\alpha} - C_{r,\alpha}|\} \\
&= \sup_{\alpha\in]0,1]} max\{|A_{l,\alpha} - B_{l,\alpha} + B_{l,\alpha} - C_{l,\alpha}|, |A_{r,\alpha} - B_{r,\alpha} + B_{r,\alpha} - C_{r,\alpha}|\},
\end{aligned}$$

comme

$$|A_{l,\alpha} - B_{l,\alpha} + B_{l,\alpha} - C_{l,\alpha}| \leq |A_{l,\alpha} - B_{l,\alpha}| + |B_{l,\alpha} - C_{l,\alpha}|,$$

et

$$|A_{r,\alpha} - B_{r,\alpha} + B_{r,\alpha} - C_{r,\alpha}| \leq |A_{r,\alpha} - B_{r,\alpha}| + |B_{r,\alpha} - C_{r,\alpha}|,$$

alors

$$D_\infty(A,C) \leq D_\infty(A,B) + D_\infty(B,C).$$

De (a), (b), (c) et (d), on déduit que D_∞ est une distance sur $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, i.e., $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), D_\infty)$ est un espace métrique.

$\square$

CHAPITRE 2

SUR LE COMPORTEMENT DES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES RATIONNELS D'ORDRE DEUX

Dans ce chapitre, nous présentons dans un premier temps quelques notions et théorèmes de base sur les équations aux différences. Ensuite, nous faisons l'étude du comportement global des solutions du système d'équations aux différences d'ordre deux suivant

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{a + y_n y_{n-1}} \\ y_{n+1} = \frac{y_n + y_{n-1}}{b + x_n x_{n-1}} \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

où a et b sont des constantes réelles strictement positives et les valeurs initiales $x_{-1},\ x_0,\ y_{-1},\ y_0$ sont des nombres réels positifs.

2.1 Généralités sur les équations et les systèmes d'équations aux différences

Définition 2.1. *Une équation aux différences d'ordre k+1 est une équation de la forme suivante*

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k}), \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.1}$$

où $f : I^{k+1} \longrightarrow I$, avec $I \subset \mathbb{R}$ et $x_0,\ x_{-1},\ ...,\ x_{-k} \in I$ sont les valeurs initiales.

Remarque 2.2.

1. *Une solution de l'équation* (2.1) *est une suite* $(x_n)_{n\geq -k}$ *qui satisfait* (2.1) *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
2. *L'équation* (2.1) *admet une et une seule solution une fois fixées les* $k+1$ *valeurs initiales.*

Définition 2.3. *Une équation aux différences est dite linéaire non homogène d'ordre* $k+1$ *si elle est de la forme*

$$x_{n+1} + a_0 x_n + ... + a_k x_{n-k} = g(n), \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.2}$$

avec $a_i, i \in \{1, ..., k\}$ *sont des constantes réelles, tel que* $a_k \neq 0$ *et* $g(n)$ *est une fonction réelle définie sur* $\mathbb{N}$.
Si $g(n) = 0$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *alors l'équation* (2.2) *est dite homogène.*

Définition 2.4. *Soit* $(x_n)_{n\geq -k}$ *une solution de l'équation* (2.1), *on dit que* $(x_n)_{n\geq -k}$ *est permanente s'il existe* $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *et* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que, pour tout* $n \geq n_0$, $\beta \leq x_n \leq \gamma$.

Définition 2.5. *On dit que* $\bar{x} \in I$ *est un point d'équilibre de l'équation* (2.1) *si*

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, ..., \bar{x}).$$

Considérons le système d'équations

$$\begin{cases} x_{n+1} &= f(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}) \\ y_{n+1} &= g(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.3}$$

où $f : I^2 \times J^2 \longrightarrow I, g : I^2 \times J^2 \longrightarrow I$ sont des fonctions de classe $C^1(I^2 \times J^2, I^2 \times J^2)$. $I, J \subset \mathbb{R}$ et $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 \in \mathbb{R}$ sont les valeurs initiales.

Définition 2.6. *Un point* $(\bar{x}, \bar{y}) \in I \times J$ *est dit point d'équilibre du système* (2.3) *si*

$$\begin{cases} \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{y}) \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{y}) \end{cases}$$

Posons $X_n = (x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1})^t$, alors le système (2.3) peut s'écrire sous la forme vectorielle suivante :

$$X_{n+1} = F(X_n), \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.4}$$

où

$$F: \quad I^2 \times J^2 \longrightarrow I^2 \times J^2$$
$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \longmapsto F\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(u_0,u_1,v_0,v_1) \\ u_0 \\ g(u_0,u_1,v_0,v_1) \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Définition 2.7. *Un vecteur $\bar{X} \in I^2 \times J^2$ est dit point d'équilibre du système* (2.4) *s'il vérifie*

$$\bar{X} = F(\bar{X}).$$

Définition 2.8. *Soit $\bar{X}$ un point d'équilibre du système* (2.4).

1. *On dit que $\bar{X}$ est stable (localement stable) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une solution du système* (2.4) *avec la valeur initiale $X_0 \in I^4$ vérifiant $\|X_0 - \bar{X}\| < \delta$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|X_n - \bar{X}\| < \varepsilon$.*
   où $\|.\|$ est une norme vectorielle. Si non, le point $\bar{X}$ est dit instable.
2. *On dit que $\bar{X}$ est asymptotiquement stable (localement asymptotiquement stable) si $\bar{X}$ est stable, et s'il existe $\gamma > 0$ tel que, si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une solution du système* (2.4) *avec la valeur initiale $X_0 \in I^4$ vérifiant $\|X_n - \bar{X}\| < \gamma$, alors, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} X_n = \bar{X}$.*
3. *On dit que $\bar{X}$ est globalement attractif si pour toute solution $(X_n)_{n\geq 0}$ du système* (2.4) *avec la valeur initiale $X_0 \in I^4$, on a*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} X_n = \bar{X}.$$

4. *On dit que $\bar{X}$ est globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif.*

Remarque 2.9. *Il est clair que $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point d'équilibre du système* (2.3) *si et seulement si $\bar{X} = (\bar{x}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{y})$ est un point d'équilibre du système* (2.4) *et donc pour étudier la stabilité du point d'équilibre $(\bar{x}, \bar{y})$ il suffit d'étudier celle de suffit d'étudier la $\bar{X}$.*

Définition 2.10. *Soit $\bar{X}$ un point d'équilibre du système* (2.3)*, supposons que $F \in C^1(I^2 \times J^2, I^2 \times J^2)$. On appelle système linéaire associé au système* (2.3) *autour du point $\bar{X}$ le système*

$$Z_{n+1} = J_F Z_n, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

où $Z_n = X_n - \bar{X}$, J_F est la matrice jacobienne de F au point $\bar{X}$ donnée par,

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_0}(\bar{X}) & \frac{\partial f}{\partial u_1}(\bar{X}) & \frac{\partial f}{\partial v_0}(\bar{X}) & \frac{\partial f}{\partial v_1}(\bar{X}) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u_0}(\bar{X}) & \frac{\partial g}{\partial u_1}(\bar{X}) & \frac{\partial g}{\partial v_0}(\bar{X}) & \frac{\partial g}{\partial v_1}(\bar{X}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et son polynôme caractéristique associé est donné par

$$P(\lambda) = \det(J_F - \lambda I_4),$$

où I_4 est la matrice unité d'ordre 4.

Le théorème suivant est fondamental pour étudier la stabilité des systèmes d'équations aux différences non linéaires.

Théorème 2.11. *[8] Considérons le système (2.3) où $F \in C^1(I^2 \times J^2, I^2 \times J^2)$, et soit $\bar{X}$ un point d'équilibre de ce système.*

1. *Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne J_F sont de module strictement inférieur à 1, alors le point d'équilibre $\bar{X}$ est asymptotiquement stable.*
2. *Si au moins une des valeurs propres de la matrice jacobienne J_F est de module strictement supérieur à 1, alors le point d'équilibre $\bar{X}$ est instable.*
3. *Si une des valeurs propres de la matrice jacobienne est de module égale à 1, alors le point d'équilibre $\bar{X}$ peut être stable, instable ou asymptotiquement stable.*

2.2 Étude du comportement global des solutions d'un système d'équations aux différences non linéaires

On considère le système rationnel d'ordre deux suivant

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{a + y_n y_{n-1}} \\ y_{n+1} = \frac{y_n + y_{n-1}}{b + x_n x_{n-1}} \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.5}$$

avec les valeurs initiales $x_{-1},\ x_0,\ y_{-1},\ y_0 \in \mathbb{R}_+$ et $a,\ b \in \mathbb{R}_+^*$.

2.2.1 Points d'équilibre

Dans ce qui suit, on va chercher les points d'équilibre de ce système. On a $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point d'équilibre du système (2.5), alors il satisfait

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{2\bar{x}}{a+\bar{y}^2} \\ \bar{y} = \frac{2\bar{y}}{b+\bar{x}^2}. \end{cases}$$

Alors, on obtient

$$\bar{x}(\bar{y}^2 + a - 2) = 0 \quad \text{et} \quad \bar{y}(\bar{x}^2 + b - 2) = 0,$$

donc

$$\bar{x} = 0 \quad \text{ou} \quad \bar{y} = \sqrt{2-a},$$

et

$$\bar{x} = \sqrt{2-b} \quad \text{ou} \quad \bar{y} = 0.$$

Il est clair que $(0, 0)$ est une solution de ces deux équations et donc $O = (0, 0)$ est un point d'équilibre du système (2.5).
Si de plus, $a, b < 2$, le système admet un deuxième point d'équilibre $E = (\sqrt{2-b}, \sqrt{2-a})$ qui est strictement positif.

2.2.2 Étude de la stabilité du point $E = (\sqrt{2-b}, \sqrt{2-a})$

Par linéarisation nous allons étudier dans le théorème suivant la stabilité du point d'équilibre $E = (\sqrt{2-b}, \sqrt{2-a})$.

Théorème 2.12. *Si $a, b < 2$, alors le point d'équilibre $E = (\sqrt{2-b}, \sqrt{2-a})$ est instable.*

Preuve.

On a le système linéaire associé au système (2.5) autour du point d'équilibre $E = (\sqrt{2-b}, \sqrt{2-a})$ est

$$Z_{n+1} = J_F^{(1)} Z_n, \ n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.6}$$

où $Z_n = X_n - \bar{X}_1$ et $J_F^{(1)}$ est la matrice jacobienne de F au point $\bar{X}_1 = (\sqrt{2-b}, \sqrt{2-b}, \sqrt{2-a}, \sqrt{2-a})$, avec

$$\begin{array}{rccc} f, g: & \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \\ & (u_0, u_1, v_0, v_1) & \longmapsto & f, g((u_0, u_1, v_0, v_1)) \end{array}$$

sont des fonctions continues et différentiables sur $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$, où

$$f((u_0,u_1,v_0,v_1)) = \frac{u_0+u_1}{a+v_0v_1},$$
$$g((u_0,u_1,v_0,v_1)) = \frac{v_0+v_1}{b+u_0u_1}.$$

Donc par définition, on a

$$J_F^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_0}(\bar{X}_1) & \frac{\partial f}{\partial u_1}(\bar{X}_1) & \frac{\partial f}{\partial v_0}(\bar{X}_1) & \frac{\partial f}{\partial v_1}(\bar{X}_1) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u_0}(\bar{X}_1) & \frac{\partial g}{\partial u_1}(\bar{X}_1) & \frac{\partial g}{\partial v_0}(\bar{X}_1) & \frac{\partial g}{\partial v_1}(\bar{X}_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où

$$\frac{\partial f}{\partial u_0}(u_0,u_1,v_0,v_1) = \frac{1}{a+v_0v_1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial u_1}(u_0,u_1,v_0,v_1) = \frac{1}{a+v_0v_1},$$
$$\frac{\partial f}{\partial v_0}(u_0,u_1,v_0,v_1) = -\frac{(u_0+u_1)v_1}{(a+v_0v_1)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v_1}(u_0,u_1,v_0,v_1) = -\frac{(u_0+u_1)v_0}{(a+v_0v_1)^2},$$
$$\frac{\partial g}{\partial u_0}(u_0,u_1,v_0,v_1) = -\frac{(v_0+v_1)u_1}{(b+u_0u_1)^2}, \qquad \frac{\partial g}{\partial u_1}(u_0,u_1,v_0,v_1) = -\frac{(v_0+v_1)u_0}{(b+u_0u_1)^2},$$
$$\frac{\partial g}{\partial v_0}(u_0,u_1,v_0,v_1) = \frac{1}{b+u_0u_1}, \qquad \frac{\partial g}{\partial v_1}(u_0,u_1,v_0,v_1) = \frac{1}{b+u_0u_1}.$$

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial u_0}(\bar{X}_1) = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial u_1}(\bar{X}_1) = \frac{1}{2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial v_0}(\bar{X}_1) = -\frac{1}{2}\sqrt{2-a}\sqrt{2-b}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v_0}(\bar{X}_1) = -\frac{1}{2}\sqrt{2-a}\sqrt{2-b},$$
$$\frac{\partial g}{\partial u_0}(\bar{X}_1) = -\frac{1}{2}\sqrt{2-a}\sqrt{2-b}, \qquad \frac{\partial g}{\partial u_1}(\bar{X}_1) = -\frac{1}{2}\sqrt{2-a}\sqrt{2-b},$$
$$\frac{\partial g}{\partial v_0}(\bar{X}_1) = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial g}{\partial v_1}(\bar{X}_1) = \frac{1}{2}.$$

Posons $\theta = -\frac{1}{2}\sqrt{2-a}\sqrt{2-b}$, alors

$$J_F^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \theta & \theta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \theta & \theta & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$P(\lambda) = det|J_F^{(1)} - \lambda I_4| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} & \theta & \theta \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ \theta & \theta & \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix},$$

donc, le polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - \left(\frac{3}{4} + \theta^2\right)\lambda^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\theta^2\right)\lambda + \frac{1}{4} - \theta^2. \tag{2.7}$$

On a, P est continue tel que

$$P(1) = -4(\theta)^2 < 0,$$

et

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} P(\lambda) = +\infty,$$

donc P admet une racine $|\lambda| > 1$. D'après le Théorème 2.11 le point $E = (\sqrt{2-b}, \sqrt{2-a})$ est instable. □

2.2.3 Stabilité asymptotique du point d'équilibre $O = (0,0)$

Par linéarisation nous allons étudier dans le théorème suivant la stabilité locale du point d'équilibre $O = (0,0)$.

Théorème 2.13. *On a*

(i) Si $a, b > 2$, alors le point d'équilibre $O = (0,0)$ du système (2.5) est localement asymptotiquement stable.

(ii) Si $a < 2$ ou $b < 2$, alors le point d'équilibre $O = (0,0)$ du système (2.5) est instable.

(iii) Si $a, b = 2$, alors le point d'équilibre $O = (0,0)$ du système (2.5) peut être stable, instable ou asymptotiquement stable.

Preuve.

On a le système linéaire associé au système (2.5) autour du point d'équilibre $O = (0,0)$ est

$$Z_{n+1} = J_F^{(2)} Z_n, \; n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.8}$$

où $Z_n = X_n - \bar{X}_2$, et $J_F^{(2)}$ est la matrice jacobienne calculée au point $\bar{X}_2 = (0,0,0,0)$ associée à la fonction F. Donc par définition on a

$$J_F^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_0}(\bar{X}_2) & \frac{\partial f}{\partial u_1}(\bar{X}_2) & \frac{\partial f}{\partial v_0}(\bar{X}_2) & \frac{\partial f}{\partial v_1}(\bar{X}_2) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u_0}(\bar{X}_2) & \frac{\partial g}{\partial u_1}(\bar{X}_2) & \frac{\partial g}{\partial v_0}(\bar{X}_2) & \frac{\partial g}{\partial v_1}(\bar{X}_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où, $\bar{X}_2 = (0, 0, 0, 0)$. En utilisant les formules de f et g, on trouve

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial u_0}(\bar{X}_2) = \dfrac{1}{a}, & \dfrac{\partial f}{\partial u_1}(\bar{X}_2) = \dfrac{1}{a}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial v_0}(\bar{X}_2) = 0, & \dfrac{\partial f}{\partial v_1}(\bar{X}_2) = 0, \\ \dfrac{\partial g}{\partial u_0}(\bar{X}_2) = 0, & \dfrac{\partial g}{\partial u_1}(\bar{X}_2) = 0, \\ \dfrac{\partial g}{\partial v_0}(\bar{X}_2) = \dfrac{1}{b}, & \dfrac{\partial g}{\partial v_1}(\bar{X}_2) = \dfrac{1}{b}. \end{array}$$

Donc

$$J_F^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, le polynôme caractéristique associé est

$$P(\lambda) = det|J_F^{(2)} - \lambda I_4| = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} - \lambda & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} - \lambda & \frac{1}{b} \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

D'où

$$P(\lambda) = \left(\lambda^2 - \frac{1}{a}\lambda - \frac{1}{a}\right)\left(\lambda^2 - \frac{1}{b}\lambda - \frac{1}{b}\right)$$

Posons

$$P(\lambda) = P_1(\lambda)P_2(\lambda)$$

où

$$P_1(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{a}\lambda - \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad P_2(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{b}\lambda - \frac{1}{b}$$

Comme $a, b > 0$, on a

$$\triangle_1 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{4}{a} > 0 \quad \text{et} \quad \triangle_2 = \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \frac{4}{b} > 0$$

Alors chacun de $P_1(\lambda), P_2(\lambda)$ admet deux racines réelles qui sont, respectivement,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4a+1}}{2a} \quad \text{et} \quad \lambda_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{4b+1}}{2b}.$$

A présent, distinguons les cas suivants :

(i) Si $a, b > 2$, alors on a $|\lambda_{1,2}| < 1$ et $|\lambda_{3,4}| < 1$, i.e., toutes les valeurs propres de $J_F^{(2)}$ sont de valeurs absolues inférieurs strictement à 1. En effet, il est clair que $\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2a} > -1$. D'autre part, on a

$$\begin{array}{rc} & a > 2 \\ \Longleftrightarrow & 4a^2 > 8a \\ \Longleftrightarrow & 4a^2 - 4a + 1 > 4a + 1 \\ \Longleftrightarrow & (2a-1)^2 > 4a + 1 \\ \Longleftrightarrow & 2a - 1 > \sqrt{4a+1} \\ \Longleftrightarrow & 2a > 1 + \sqrt{4a+1} \\ \Longleftrightarrow & \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2a} < 1, \end{array}$$

d'où

$$\left| \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2a} \right| < 1.$$

Aussi remarquons que l'inégalité $\frac{1-\sqrt{4a+1}}{2a} < 1$ est vérifiée. Et montrons par absurde que $\frac{1-\sqrt{4a+1}}{2a} > -1$, on a

$$\begin{array}{rc} & \frac{1-\sqrt{4a+1}}{2a} < -1 \\ \Longleftrightarrow & 1 - \sqrt{4a+1} < -2a \\ \Longleftrightarrow & 1 + 2a < \sqrt{4a+1} \\ \Longleftrightarrow & (1+2a)^2 < 4a + 1 \\ \Longleftrightarrow & 4a^2 + 4a + 1 < 4a + 1 \\ \Longleftrightarrow & 4a^2 < 0. \end{array}$$

Contradiction avec le fait que $a > 2$. D'où $-1 < \frac{1-\sqrt{4a+1}}{2a} < 1$. Donc d'après le t Théorème 2.11 on déduit que le point $O = (0, 0)$ est localement asymptotiquement stable.

(ii) Si $a < 2$ ou $b < 2$, alors $|\lambda_1| = |\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2a}| > 1$ et $|\lambda_3| = |\frac{1+\sqrt{4b+1}}{2b}| > 1$. En effet, si on suppose que $|\lambda_1| < 1$, i.e., $\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2a} < 1$ on obtient

$$\begin{array}{rc} & \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2a} < 1 \\ \Longleftrightarrow & 1 + \sqrt{4a+1} < 2a \\ \Longleftrightarrow & 0 < \sqrt{4a+1} < 2a - 1 \\ \Longleftrightarrow & 0 < 4a + 1 < (2a-1)^2 \\ \Longleftrightarrow & 4a + 1 < 4a^2 - 4a + 1 \\ \Longleftrightarrow & 8a < 4a^2 \\ \Longleftrightarrow & a > 2. \end{array}$$

Contradiction. Alors, $|\lambda_1| > 1$. Donc, d'après le Théorème 2.11, on déduit que le point $O = (0,0)$ est instable dans ce cas.

(iii) Si $a, b = 2$, alors on a $|\lambda_1| = |\lambda_3| = \frac{1+\sqrt{9}}{4} = 1$ et $|\lambda_2| = |\lambda_4| = |\frac{1-\sqrt{9}}{4}| = \frac{1}{2}$.
Donc, d'après le Théorème 2.11, on déduit que le point $O = (0,0)$ peut être stable, instable, ou asymptotiquement stable.

□

2.2.4 Attractivité globale du point $O = (0,0)$

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude de l'attractivité globale du point d'équilibre $O = (0,0)$.

Théorème 2.14. *Soit* $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty}$ *une solution du système* (2.5)*, alors pour tout* $n \geq -1$*, on a*

$$0 \leq x_n \leq c_1 \left(\frac{1-\sqrt{4a+1}}{2a}\right)^n + c_2 \left(\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2a}\right)^n,$$

$$0 \leq y_n \leq c_3 \left(\frac{1-\sqrt{4b+1}}{2b}\right)^n + c_4 \left(\frac{1+\sqrt{4b+1}}{2b}\right)^n,$$

tels que

$$c_1 = \frac{-2u_{-1} + (1-\sqrt{4a+1})u_0}{2\sqrt{4a+1}}, \qquad c_2 = \frac{2u_{-1} + (1+\sqrt{4a+1})u_0}{2\sqrt{4a+1}},$$
$$c_3 = \frac{-2v_{-1} + (1-\sqrt{4b+1})v_0}{2\sqrt{4b+1}}, \qquad c_4 = \frac{2v_{-1} + (1+\sqrt{4b+1})v_0}{2\sqrt{4b+1}},$$

avec $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 \in \mathbb{R}_+$ *sont les valeurs initiales.*

Preuve. De (2.5), on a pour tout $n \geq 0$

$$x_{n+1} \leq \frac{1}{a}(x_n + x_{n-1}), \tag{2.9}$$

et

$$y_{n+1} \leq \frac{1}{b}(y_n + y_{n-1}). \tag{2.10}$$

Considérons les équations aux différences linéaires d'ordre deux suivantes

$$u_{n+1} = \frac{1}{a}(u_n + u_{n-1}), \tag{2.11}$$

et

$$v_{n+1} = \frac{1}{b}(v_n + v_{n-1}). \tag{2.12}$$

Les polynômes caractéristiques associés à ces équations sont

$$P_1(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{a}\lambda - \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad P_2(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{b}\lambda - \frac{1}{b}.$$

On a, le polynôme P_1 admet deux racines distinctes,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2a},$$

et les deux racines de P_2 sont,

$$\lambda_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2b}.$$

Alors, les solutions des équations (2.11) et (2.12) sont données par

$$u_n = c_1 \left(\frac{1-\sqrt{4a+1}}{2a} \right)^n + c_2 \left(\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2a} \right)^n, \; n = -1, 0, 1, ..., \tag{2.13}$$

$$v_n = c_3 \left(\frac{1-\sqrt{4b+1}}{2b} \right)^n + c_4 \left(\frac{1+\sqrt{4b+1}}{2b} \right)^n, \; n = -1, 0, 1, ..., \tag{2.14}$$

où c_1, c_2, c_3 et c_4 sont des nombres réels dépendants des valeurs initiales $u_{-1}, u_0, v_{-1},$ et v_0, comme suit :

$$c_1 = \frac{-2u_{-1} + (-1+\sqrt{4a+1})u_0}{2\sqrt{4a+1}}, \qquad c_2 = \frac{2u_{-1} + (1+\sqrt{4a+1})u_0}{2\sqrt{4a+1}},$$
$$c_3 = \frac{-2v_{-1} + (-1+\sqrt{4b+1})v_0}{2\sqrt{4b+1}}, \qquad c_4 = \frac{2v_{-1} + (1+\sqrt{4b+1})v_0}{2\sqrt{4b+1}}.$$

En effet, si $n = 0$ alors on a de (2.13), $u_0 = c_1 + c_2$, et donc $c_1 = u_0 - c_2$. On a aussi pour $n = -1$

$$\begin{aligned}
u_{-1} &= c_1 \left(\frac{1-\sqrt{4a+1}}{2a} \right)^{-1} + c_2 \left(\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2a} \right)^{-1} \\
&= c_1 \left(\frac{2a}{1-\sqrt{4a+1}} \right) + c_2 \left(\frac{2a}{1+\sqrt{4a+1}} \right) \\
&= 2a \left[\frac{c_1(1+\sqrt{4a+1}) + c_2(1-\sqrt{4a+1})}{(1-\sqrt{4a+1})(1+\sqrt{4a+1})} \right] \\
&= 2a \left[\frac{(u_0-c_2)(1+\sqrt{4a+1}) + c_2(1-\sqrt{4a+1})}{1-4a-1} \right] \\
&= \frac{-1}{2} \left[u_0(1+\sqrt{4a+1}) + c_2(-1-\sqrt{4a+1}+1-\sqrt{4a+1}) \right] \\
&= \frac{-1}{2} \left[u_0(1+\sqrt{4a+1}) - 2c_2(\sqrt{4a+1}) \right] \\
&= \frac{-(1+\sqrt{4a+1})}{2} u_0 + c_2(\sqrt{4a+1}),
\end{aligned}$$

d'où

$$c_2 = \frac{2u_{-1} + (1+\sqrt{4a+1})u_0}{2\sqrt{4a+1}},$$

par suite,

$$\begin{aligned}
c_1 &= u_0 - c_2\\
c_1 &= u_0 - \frac{2u_{-1} + (1+\sqrt{4a+1})u_0}{2\sqrt{4a+1}}\\
&= \frac{u_0(2\sqrt{4a+1}) - 2u_{-1} - (1+\sqrt{4a+1})u_0}{2\sqrt{4a+1}}\\
&= \frac{2\sqrt{4a+1}u_0 - 2u_{-1} - u_0 - \sqrt{4a+1}u_0}{2\sqrt{4a+1}}\\
&= \frac{\sqrt{4a+1}u_0 - u_0 - 2u_{-1}}{2\sqrt{4a+1}}\\
&= \frac{-2u_{-1} + (-1+\sqrt{4a+1})u_0}{2\sqrt{4a+1}}.
\end{aligned}$$

De la même manière, on calcule c_3 et c_4. Posons $u_{-1} = x_{-1},\ u_0 = x_0,\ v_{-1} = y_{-1},$ et $v_0 = y_0$.
Montrons que $x_n \leq u_n$ et $y_n \leq v_n$, pour tout $n \geq -1$.
On a de (2.9)

$$x_1 \leq \frac{1}{a}(x_0 + x_{-1}) = \frac{1}{a}(u_0 + u_{-1}) = u_1.$$

Supposons maintenant qu'il existe $m \geq 1$ tel que

$$x_{m+1} > u_{m+1},$$

et

$$x_n \leq u_n,\ \text{pour tout}\ n \leq m.$$

Alors,

$$x_{m+1} > u_{m+1} = \frac{1}{a}(u_m + u_{m-1}) \geq \frac{1}{a}(x_m + x_{m-1}).$$

Ce qui est une contradiction avec (2.9). D'où

$$x_n \leq u_n,\ \text{pour tout}\ n \geq -1.$$

De la même manière on démontre que $y_n \leq v_n,\ \text{pour tout}\ n \geq -1.$
En conclusion, on obtient que

$$0 \leq x_n \leq u_n = c_1\left(\frac{1-\sqrt{4a+1}}{2a}\right)^n + c_2\left(\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2a}\right)^n,$$

et

$$0 \leq y_n \leq v_n = c_3\left(\frac{1-\sqrt{4b+1}}{2b}\right)^n + c_4\left(\frac{1+\sqrt{4b+1}}{2b}\right)^n.$$

$\square$

Théorème 2.15. *Si $a, b > 2$, alors le point d'équilibre $O = (0,0)$ du système (2.5) est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. On sait déjà du hTéorème 2.13 que si $a, b > 2$, le point d'équilibre $O = (0,0)$ est asymptotiquement stable. On a aussi d'après le Théorème 2.14,

$$0 \leq x_n \leq c_1 \left(\frac{1-\sqrt{4a+1}}{2a}\right)^n + c_2 \left(\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2a}\right)^n,$$

et

$$0 \leq y_n \leq c_3 \left(\frac{1-\sqrt{4b+1}}{2b}\right)^n + c_4 \left(\frac{1+\sqrt{4b+1}}{2b}\right)^n.$$

De plus,

$$\left|\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2a}\right| < 1 \ \text{ et } \ \left|\frac{1-\sqrt{4a+1}}{2a}\right| < 1 \ \text{ si et seulement si } \ a > 2,$$

et

$$\left|\frac{1-\sqrt{4b+1}}{2b}\right| < 1 \ \text{ et } \ \left|\frac{1+\sqrt{4b+1}}{2b}\right| < 1 \ \text{ si et seulement si } \ b > 2.$$

D'où

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} y_n = 0$$

Ainsi, le point d'équilibre $O = (0,0)$ est globalement asymptotiquement stable. □

2.2.5 L'ordre de convergence

Ici, on va discuter l'ordre de convergence des solutions du système (2.5) qui convergent vers le point d'équilibre $(0,0)$.

Étant donné le système d'équations aux différences

$$X_{n+1} = (A + B_n)X_n, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.15}$$

où X_n est un vecteur de dimension m, $A \in C^{m \times m}$ est une matrice constante,
et $B_n : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow C^{m \times m}$ est une fonction matricielle qui satisfait

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|B_n\| = 0, \tag{2.16}$$

telle que la norme $\|.\|$ est une norme matricielle.

Proposition 2.16. ***(Premier théorème de Perron)***
Supposons que la condition (2.16) *est vérifiée.*
Si X_n est une solution de (2.15), *alors, ou bien $X_n = 0$ pour tout n, ou bien*

$$\rho = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\|X_{n+1}\|}{\|X_n\|}, \tag{2.17}$$

existe et est égal au module de l'une des valeurs propres de la matrice A.

Proposition 2.17. ***(Deuxième théorème de Perron)***
Supposons que la condition (2.16) *est vérifiée.*
Si X_n est une solution de (2.15)*, alors, ou bien $X_n = 0$ pour tout n, ou bien*

$$\rho = \lim_{n \longrightarrow \infty} (\|X_n\|)^{(1/n)}, \tag{2.18}$$

existe et est égal au module de l'une des valeurs propres de la matrice A.

Théorème 2.18. *Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq 0}$ une solution du système* (2.5) *strictement positif tels que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = \bar{x}$ et $\lim_{n \longrightarrow +\infty} y_n = \bar{y}$, et $O = (\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$, alors le vecteur d'erreur*

$$E_n = \begin{bmatrix} e_n^1 \\ e_{n-1}^1 \\ e_n^2 \\ e_{n-1}^2 \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

de chaque solution du système (2.5) *satisfait les relations*

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \longrightarrow \infty} (\|X_n\|)^{(1/n)}, \\ \rho &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\|X_{n+1}\|}{\|X_n\|}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

où $e_n^1 = x_n - \bar{x}$, $e_{n-1}^1 = x_{n-1} - \bar{x}$, $e_n^2 = y_n - \bar{y}$, $e_{n-1}^2 = y_{n-1} - \bar{y}$
et ρ est égale au module d'une des valeurs propres de la matrice jacobienne $A = J_F^{(2)}$.

Preuve.

Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq 0}$ une solution du système (2.15) telle que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = \bar{x}, \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} y_n = \bar{y},$$

avec $O = (\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$. On a

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - \bar{x} &= \frac{x_n + x_{n-1}}{a + y_n y_{n-1}} - \frac{2\bar{x}}{a + \bar{y}^2} \\
&= \frac{x_n + x_{n-1} + 2\bar{x} - 2\bar{x}}{a + y_n y_{n-1}} - \frac{2\bar{x}}{a + \bar{y}^2} \\
&= \frac{x_n - \bar{x}}{a + y_n y_{n-1}} + \frac{x_{n-1} - \bar{x}}{a + y_n y_{n-1}} + \frac{2\bar{x}}{a + y_n y_{n-1}} - \frac{2\bar{x}}{a + \bar{y}^2} \\
&= \frac{x_n - \bar{x}}{a + y_n y_{n-1}} + \frac{x_{n-1} - \bar{x}}{a + y_n y_{n-1}} + \frac{2\bar{x}(a + \bar{y}^2) - 2\bar{x}(a + y_n y_{n-1})}{(a + y_n y_{n-1})(a + \bar{y}^2)} \\
&= \frac{x_n - \bar{x}}{a + y_n y_{n-1}} + \frac{x_{n-1} - \bar{x}}{a + y_n y_{n-1}} + \frac{2a\bar{x} + 2\bar{x}\bar{y}^2 - 2a\bar{x} - 2\bar{x} y_n y_{n-1}}{(a + y_n y_{n-1})(a + \bar{y}^2)} \\
&= \frac{x_n - \bar{x}}{a + y_n y_{n-1}} + \frac{x_{n-1} - \bar{x}}{a + y_n y_{n-1}} + \frac{2\bar{x}\bar{y}^2 - 2\bar{x} y_n y_{n-1}}{(a + y_n y_{n-1})(a + \bar{y}^2)} \\
&= \frac{x_n - \bar{x}}{a + y_n y_{n-1}} + \frac{x_{n-1} - \bar{x}}{a + y_n y_{n-1}} + \frac{2\bar{x}\bar{y}^2 - 2\bar{x} y_n y_{n-1} + 2\bar{x}\bar{y} y_{n-1} - 2\bar{x}\bar{y} y_{n-1}}{(a + y_n y_{n-1})(a + \bar{y}^2)} \\
&= \frac{x_n - \bar{x}}{a + y_n y_{n-1}} + \frac{x_{n-1} - \bar{x}}{a + y_n y_{n-1}} - \frac{2\bar{x} y_{n-1}(y_n - \bar{y})}{(a + y_n y_{n-1})(a + \bar{y}^2)} - \frac{2\bar{x}\bar{y}(y_{n-1} - \bar{y})}{(a + y_n y_{n-1})(a + \bar{y}^2)},
\end{aligned}$$

on pose

$$a_n^1 = b_n^1 = \frac{1}{a + y_n y_{n-1}}, \ c_n^1 = -\frac{2\bar{x} y_{n-1}}{(a + y_n y_{n-1})(a + \bar{y}^2)}, \ d_n^1 = -\frac{2\bar{x}\bar{y}}{(a + y_n y_{n-1})(a + \bar{y}^2)},$$

alors

$$x_{n+1} - \bar{x} = a_n^1(x_n - \bar{x}) + b_n^1(x_{n-1} - \bar{x}) + c_n^1(y_n - \bar{y}) + d_n^1(y_{n-1} - \bar{y}).$$

De la même manière on a,

$$\begin{aligned}
y_{n+1} - \bar{y} &= \frac{y_n + y_{n-1}}{b + x_n x_{n-1}} - \frac{2\bar{y}}{b + \bar{x}^2} \\
&= \frac{y_n + y_{n-1} + 2\bar{y} - 2\bar{y}}{a + x_n x_{n-1}} - \frac{2\bar{y}}{a + \bar{x}^2} \\
&= \frac{y_n - \bar{y}}{b + x_n x_{n-1}} + \frac{y_{n-1} - \bar{y}}{b + x_n x_{n-1}} - \frac{2\bar{y} x_{n-1}(x_n - \bar{x})}{(b + x_n x_{n-1})(b + \bar{x}^2)} - \frac{2\bar{x}\bar{y}(x_{n-1} - \bar{x})}{(b + x_n x_{n-1})(b + \bar{x}^2)},
\end{aligned}$$

où

$$a_n^2 = -\frac{2\bar{y} x_{n-1}}{(b + x_n x_{n-1})(b + \bar{x}^2)}, \ b_n^2 = -\frac{2\bar{x}\bar{y}}{(b + x_n x_{n-1})(b + \bar{x}^2)}, \ c_n^2 = d_n^2 = -\frac{1}{b + x_n x_{n-1}},$$

alors

$$y_{n+1} - \bar{y} = a_n^2(x_n - \bar{x}) + b_n^2(x_{n-1} - \bar{x}) + c_n^2(y_n - \bar{y}) + d_n^2(y_{n-1} - \bar{y}).$$

Posons $e_n^1 = x_n - \bar{x}$ et $e_n^2 = y_n - \bar{y}$, alors on obtient

$$\begin{cases} e_{n+1}^1 & = a_n^1 e_n^1 + b_n^1 e_{n-1}^1 + c_n^1 e_n^2 + d_n^1 e_{n-1}^2 \\ e_{n+1}^2 & = a_n^2 e_n^1 + b_n^2 e_{n-1}^1 + c_n^2 e_n^2 + d_n^2 e_{n-1}^2 \end{cases}$$

ce système s'écrit sous forme matricielle comme suit

$$\begin{bmatrix} e_{n+1}^1 \\ e_n^1 \\ e_{n+1}^2 \\ e_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n^1 & b_n^1 & c_n^1 & d_n^1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_n^2 & b_n^2 & c_n^2 & d_n^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_n^1 \\ e_{n-1}^1 \\ e_n^2 \\ e_{n-1}^2 \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.20}$$

où

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n^1 = \lim_{n\to\infty} b_n^1 &= \frac{1}{a+\bar{y}^2} = \frac{1}{a}, \\ \lim_{n\to\infty} c_n^1 = \lim_{n\to\infty} d_n^1 &= -\frac{2\bar{x}\bar{y}}{(a+\bar{y}^2)^2} = 0, \\ \lim_{n\to\infty} a_n^2 = \lim_{n\to\infty} b_n^2 &= -\frac{2\bar{x}\bar{y}}{(b+\bar{x}^2)^2} = 0, \\ \lim_{n\to\infty} c_n^2 = \lim_{n\to\infty} d_n^2 &= \frac{1}{b+\bar{x}^2} = \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

On peut écrire

$$a_n^1 = b_n^1 = \frac{1}{a} + \varepsilon_n^1, \text{ avec } \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n^1 = 0,$$

et

$$c_n^2 = d_n^2 = \frac{1}{b} + \varepsilon_n^2, \text{ avec } \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n^2 = 0,$$

donc le système (2.20) s'écrit sous la forme (2.15) tels que, A est la matrice jacobienne évaluée au point $O = (0, 0)$

$$J_F^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

E_n est le vecteur erreur et B_n est donnée par

$$B_n = \begin{bmatrix} \varepsilon_n^1 & \varepsilon_n^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_n^2 & \varepsilon_n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tel que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|B_n\| = 0.$$

Alors, on applique la Proposition 2.16 et 2.17 on obtient le résultat. □

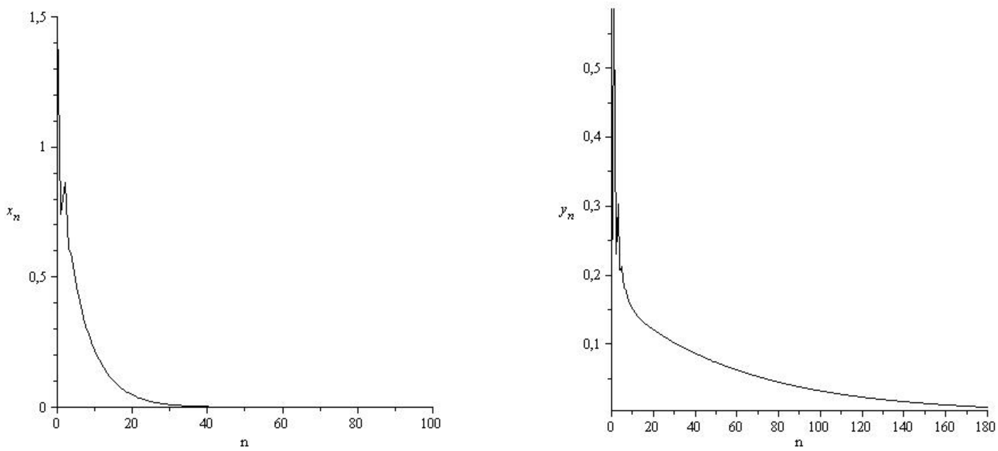
2.2.6 Exemples numériques

Pour confirmer les résultats théoriques précédents nous donnons des exemples numériques.

Exemple 2.19. *Considérons le système*(2.5) *tels que* $a = 2.5,\ b = 2.05,$ *alors on a*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2.5 + y_n y_{n-1}} \\ y_{n+1} = \frac{y_n + y_{n-1}}{2.05 + x_n x_{n-1}} \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

avec les valeurs initiales $x_{-1} = 0.5,\ x_0 = 1.5,\ y_{-1} = 1.5,\ y_0 = 0.14.$ *Comme* $a, b > 2,$ *alors d'après le théorème (2.15), le point d'équilibre* $O = (0, 0)$ *du système* (2.19) *est globalement asymptotiquement stable.*
On peut voir ce résultat clairement dans les graphes présentés la figure (2.1).



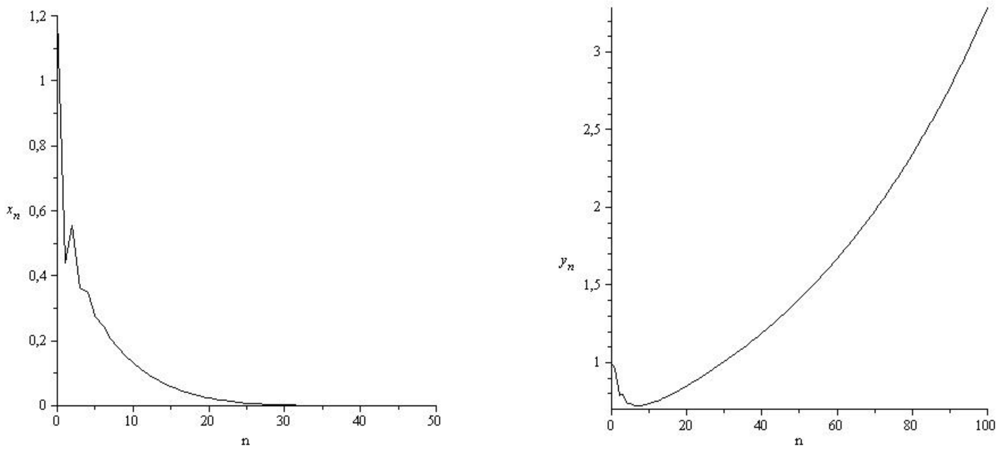
(a) Graphe de x_n (b) Graphe de y_n

FIGURE 2.1 – Ce graphique représente le comportement de la solution du système (2.19) avec les valeurs initiales données dans l'exemple (2.19).

Exemple 2.20. *Considérons le système* (2.5) *tels que* $a = 1.99,\ b = 1.95,$ *alors on a*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{1.99 + y_n y_{n-1}} \\ y_{n+1} = \frac{y_n + y_{n-1}}{1.95 + x_n x_{n-1}} \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

avec les valeurs initiales $x_{-1} = 0.1,\ x_0 = 1.2,\ y_{-1} = 1,\ y_0 = 0.99.$ *Comme* $a, b < 2,$ *alors d'après le théorème (2.13) le point d'équilibre* $O = (0, 0)$ *est instable. Voir la figure (2.2).*



(a) Graphe de x_n (b) Graphe de y_n

FIGURE 2.2 – Ce graphique représente le comportement de la solution du système (2.20) avec les valeurs initiales données dans l'exemple (2.20).

CHAPITRE 3

ÉTUDE D'UNE ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES FLOUE RATIONNELLE D'ORDRE DEUX

Ce chapitre est une simulation entre le premier et le deuxième chapitre. On va étudier une équation aux différences où ses coefficients et ses valeurs initiales sont des nombres flous, et ce qu'on l'appelle "équation aux différences floue".

Considérons l'équation rationnelle d'ordre deux suivante

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{P + x_n x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{3.1}$$

avec P est un nombre flou strictement positif et les valeurs initiales $x_{-1},\ x_0$ sont des nombres flous positifs.

3.1 Existence et unicité des solutions

Le but de cette section est d'étudier l'éxistence et l'unicité des solutions de l'équation aux différences floue (3.1).

Définition 3.1. *Une solution (positive) de l'équation* (3.1) *est une suite de nombres flous (positifs) qui satisfait* (3.1).

Théorème 3.2. *Considérons l'équation* (3.1) *où P est un nombre flou strictement positif, alors, il existe une seule solution positive $(x_n)_{n\geq -1}$ de* (3.1) *avec x_{-1}, x_0, ses valeurs initiales, sont des nombres flous positifs.*

Preuve.

Supposons qu'il existe une suite de nombres flous $(x_n)_{n\geq -1}$ satisfaisant l'équation (3.1) avec les valeurs initiales x_{-1}, x_0.
Considérons les α–coupes, pour tout $\alpha \in]0,1]$

$$[x_n]_\alpha = [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}], \quad n = -1, 0, 1, ...,$$

et

$$[P]_\alpha = [P_{l,\alpha}, P_{r,\alpha}].$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
[x_{n+1}]_\alpha &= [L_{n+1,\alpha}, R_{n+1,\alpha}] \\
&= \left[\frac{x_n + x_{n-1}}{P + x_n x_{n-1}}\right]_\alpha \\
&= \frac{[x_n]_\alpha + [x_{n-1}]_\alpha}{[P]_\alpha + [x_n]_\alpha [x_{n-1}]_\alpha} \\
&= \frac{[L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}] + [L_{n-1,\alpha}, R_{n-1,\alpha}]}{[P_{l,\alpha}, P_{r,\alpha}] + [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}][L_{n-1,\alpha}, R_{n-1,\alpha}]} \\
&= \frac{[L_{n,\alpha} + L_{n-1,\alpha}, R_{n,\alpha} + R_{n-1,\alpha}]}{[P_{l,\alpha}, P_{r,\alpha}] + [L_{n,\alpha}L_{n-1,\alpha}, R_{n,\alpha}R_{n-1,\alpha}]} \\
&= \frac{[L_{n,\alpha} + L_{n-1,\alpha}, R_{n,\alpha} + R_{n-1,\alpha}]}{[P_{l,\alpha} + L_{n,\alpha}L_{n-1,\alpha}, P_{r,\alpha} + R_{n,\alpha}R_{n-1,\alpha}]} \\
&= \left[\frac{L_{n,\alpha} + L_{n-1,\alpha}}{P_{r,\alpha} + R_{n,\alpha}R_{n-1,\alpha}}, \frac{R_{n,\alpha} + R_{n-1,\alpha}}{P_{l,\alpha} + L_{n,\alpha}L_{n-1,\alpha}}\right].
\end{aligned}$$

D'où, par identification

$$\begin{cases} L_{n+1,\alpha} &= \frac{L_{n,\alpha}+L_{n-1,\alpha}}{P_{r,\alpha}+R_{n,\alpha}R_{n-1,\alpha}} \\ R_{n+1,\alpha} &= \frac{R_{n,\alpha}+R_{n-1,\alpha}}{P_{l,\alpha}+L_{n,\alpha}L_{n-1,\alpha}} \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{3.2}$$

pour tout $\alpha \in]0,1]$.
Il est clair que le système (3.2) est de la forme (2.3), et donc pour toutes valeurs $L_{-1,\alpha},\ L_{0,\alpha},\ R_{-1,\alpha}$

et $R_{0,\alpha}$, pour $\alpha \in [0,1]$, il admet une unique solution $(L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha})_{n\geq -1}$.
Dans ce qui suit, on va démontrer que $[L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}], \alpha \in]0,1]$, où $(L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha})_{n\geq -1}$ est la solution du système (3.2), définie la solution (x_n) de l'équation (3.1) tel que

$$[x_n]_\alpha = [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}],\ n = -1, 0, 1, ...$$

Pour cela, on va vérifier les conditions (1)-(3) du Lemme 1.24.
Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in]0,1]$ tel que $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Dans ce qui suit on va montrer par récurrence que

$$[L_{n,\alpha_2}, R_{n,\alpha_2}] \subseteq [L_{n,\alpha_1}, R_{n,\alpha_1}], \quad n = -1, 0, 1, ...$$

i.e.,

$$0 \leq L_{n,\alpha_1} \leq L_{n,\alpha_2} \leq R_{n,\alpha_2} \leq R_{n,\alpha_1}, \quad n = -1, 0, 1, ...$$

puisque x_{-1}, x_0 sont des nombres flous, alors on déduit du lemme (1.24) que

$$0 \leq L_{-1,\alpha_1} \leq L_{-1,\alpha_2} \leq R_{-1,\alpha_2} \leq R_{-1,\alpha_1},$$

$$0 \leq L_{0,\alpha_1} \leq L_{0,\alpha_2} \leq R_{0,\alpha_2} \leq R_{0,\alpha_1},$$

ce qui montre que la propriété est vraie pour $n = 0, -1$.
De plus, comme P est un nombre flou strictement positif, alors on a

$$0 < P_{l,\alpha_1} \leq P_{l,\alpha_2} \leq P_{r,\alpha_2} \leq P_{r,\alpha_1}.$$

Supposons que la propriété est vraie pour tout $n \leq k$ et montrons pour $k+1$, alors on a

$$0 \leq L_{k,\alpha_1} \leq L_{k,\alpha_2} \leq R_{k,\alpha_2} \leq R_{k,\alpha_1},$$

et

$$0 \leq L_{k-1,\alpha_1} \leq L_{k-1,\alpha_2} \leq R_{k-1,\alpha_2} \leq R_{k-1,\alpha_1},$$

donc

$$0 \leq L_{k,\alpha_1} + L_{k-1,\alpha_1} \leq L_{k,\alpha_2} + L_{k-1,\alpha_2} \leq R_{k,\alpha_2} + R_{k-1,\alpha_2} \leq R_{k,\alpha_1} + R_{k-1,\alpha_1}. \tag{3.3}$$

D'autre part, on a

$$0 < P_{l,\alpha_1} + L_{k,\alpha_1}L_{k-1,\alpha_1} \leq P_{l,\alpha_2} + L_{k,\alpha_2}L_{k-1,\alpha_2} \leq P_{r,\alpha_2} + R_{k,\alpha_2}R_{k-1,\alpha_2} \leq P_{r,\alpha_1} + R_{k,\alpha_1}R_{k-1,\alpha_1},$$

donc

$$0 < \frac{1}{P_{r,\alpha_1} + R_{k,\alpha_1}R_{k-1,\alpha_1}} \leq \frac{1}{P_{r,\alpha_2} + R_{k,\alpha_2}R_{k-1,\alpha_2}} \leq \frac{1}{P_{l,\alpha_2} + L_{k,\alpha_2}L_{k-1,\alpha_2}} \leq \frac{1}{P_{l,\alpha_1} + L_{k,\alpha_1}L_{k-1,\alpha_1}}. \tag{3.4}$$

De (3.3) et (3.4), on trouve que

$$0 \leq \frac{L_{k,\alpha_1} + L_{k-1,\alpha_1}}{P_{r,\alpha_1} + R_{k,\alpha_1}R_{k-1,\alpha_1}} \leq \frac{L_{k,\alpha_2} + L_{k-1,\alpha_2}}{P_{r,\alpha_2} + R_{k,\alpha_2}R_{k-1,\alpha_2}} \leq \frac{R_{k,\alpha_2} + R_{k-1,\alpha_2}}{P_{l,\alpha_2} + L_{k,\alpha_2}L_{k-1,\alpha_2}} \leq \frac{R_{k,\alpha_1} + R_{k-1,\alpha_1}}{P_{l,\alpha_1} + L_{k,\alpha_1}L_{k-1,\alpha_1}},$$

i.e.,

$$0 \leq L_{k+1,\alpha_1} \leq L_{k+1,\alpha_2} \leq R_{k+1,\alpha_2} \leq R_{k+1,\alpha_1}.$$

D'où la propriété est vraie pour $k+1$. Ainsi pour tout $n \geq -1$,

$$0 \leq L_{n,\alpha_1} \leq L_{n,\alpha_2} \leq R_{n,\alpha_2} \leq R_{n,\alpha_1}.$$

Donc, on peut déduire deux résultats. Premièrement c'est que $L_{n,\alpha}$ est une suite croissante et $R_{n,\alpha}$ est décroissante, pour tout $\alpha \in]0,1]$. Deuxièmement, pour tout $\alpha \in]0,1], n \geq -1$, on a $L_{n,\alpha} \leq R_{n,\alpha}$.

Maintenant, on montre que pour tout $n = -1, 0, 1, ...,$ $L_{n,\alpha}$ et $R_{n,\alpha}$ sont continues à gauche. Prouvons par récurrence. On a d'après le Lemme 1.24, $L_{-1,\alpha_1},\ L_{0,\alpha_1},\ R_{-1,\alpha_1},\ R_{0,\alpha_1}$ sont continues à gauche car $x_{-1},\ x_0$ sont des nombres flous.

Supposons que la propriété est vraie jusqu'à n, et la montrons pour $n+1$.

Soit $a \in]0,1]$. Comme $P_{l,\alpha}$ et $P_{r,\alpha}$ sont continues à gauche, alors on a

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \xrightarrow{\leq} a} L_{n+1,\alpha} &= \lim_{\alpha \xrightarrow{\leq} a} \frac{L_{n,\alpha} + L_{n-1,\alpha}}{P_{r,\alpha} + R_{n,\alpha}R_{n-1,\alpha}} \\
&= \frac{L_{n,a} + L_{n-1,a}}{P_{r,a} + R_{n,a}R_{n-1,a}} \\
&= L_{n+1,a}.
\end{aligned}$$

D'où, $L_{n,\alpha}$ est continue à gauche, pour tout $n \geq -1$. De même, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \xrightarrow{\leq} a} R_{n+1,\alpha} &= \lim_{\alpha \xrightarrow{\leq} a} \frac{R_{n,\alpha} + R_{n-1,\alpha}}{P_{l,\alpha} + L_{n,\alpha}L_{n-1,\alpha}} \\
&= \frac{R_{n,a} + R_{n-1,a}}{P_{l,a} + L_{n,a}L_{n-1,a}} \\
&= R_{n+1,a}.
\end{aligned}$$

Donc, $R_{n,\alpha}$ est continue à gauche, pour tout $n \geq -1$.

Ainsi, $L_{n,\alpha}$ et $R_{n,\alpha}$ sont des fonctions qui vérifient les conditions du Lemme 1.24, alors, il existe un unique nombre flou x_n tel que

$$[x_n]_\alpha = [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}], \quad n = -1, 0, 1, ...$$

De ce qui précède $[L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}] \subset [0, +\infty[$ pour tout $\alpha \in]0,1]$, alors,

$$Supp\ x_n = \overline{\underset{\alpha \in]0,1]}{\cup} [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}]} \subset [0, +\infty[,$$

c'est à dire x_n est positif. D'où, $[L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}]$ pour $\alpha \in [0,1]$ sont les $\alpha -$ *coupes* associées à un nombre flou positif x_n tel que

$$[x_n]_\alpha = [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}], \quad n = -1, 0, 1, ...$$

Pour tout $n \geq -1$. Et par construction, on a

$$\begin{aligned} [x_{n+1}]_\alpha &= [L_{n+1,\alpha}, R_{n+1,\alpha}] \\ &= \left[\frac{L_{n,\alpha} + L_{n-1,\alpha}}{P_{r,\alpha} + R_{n,\alpha} R_{n-1,\alpha}}, \frac{R_{n,\alpha} + R_{n-1,\alpha}}{P_{l,\alpha} + L_{n,\alpha} L_{n-1,\alpha}} \right] \\ &= \left[\frac{x_n + x_{n-1}}{P + x_n x_{n-1}} \right]_\alpha . \end{aligned}$$

C'est à dire $(x_n)_{n\geq -1}$ est une solution de l'équation (3.1), et l'unicité vient du Lemme 1.24. □

3.2 Permanence des solutions

Dans ce qui suit, nous allons donner une condition nécessaire pour que toute solution de l'équation (3.1) soit permanente.

Définition 3.3. *Une suite $(x_n)_{n\geq -1}$ de nombres flous est dite permanente s'il existe des nombres réels m et M tel que*

$$Supp\ x_n \subset [m, M], \ \textit{pour tout}\ n = -1, 0, 1, ...$$

Théorème 3.4. *Soit $(x_n)_{n\geq -1}$une solution positive de* (3.1)*. Supposons que $P_{l,\alpha} > 2$, alors, $(x_n)_{n\geq -1}$ est permanente.*

Preuve.

Soit $(x_n)_{n\geq -1}$ une solution positive de (3.1) tel que

$$[x_n]_\alpha = [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}], n = -1, 0, 1, ...,$$

et

$$[P]_\alpha = [P_{l,\alpha}, P_{r,\alpha}].$$

Comme P, x_{-1}, x_0 sont des nombres flous, alors il existe a_p, b_p, β_{-1}, β_0, γ_{-1}, $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$Supp\ P = \overline{\bigcup_{\alpha \in]0,1]} [P_{l,\alpha}, P_{r,\alpha}]} \subset [a_p, b_p],\ Supp\ x_{-1} \subset [\beta_{-1}, \gamma_{-1}],\ Supp\ x_0 \subset [\beta_0, \gamma_0],$$

c'est à dire, pour tout $\alpha \in]0,1]$

$$[P_{l,\alpha}, P_{r,\alpha}] \subset [a_p, b_p],$$

ainsi

$$[L_{-1,\alpha}, R_{-1,\alpha}] \subset [\beta_{-1}, \gamma_{-1}],$$

et

$$[L_{0,\alpha}, R_{0,\alpha}] \subset [\beta_0, \gamma_0].$$

Maintenant, considérons le système

$$\begin{cases} s_{n+1} = \frac{s_n + s_{n-1}}{b_p + t_n t_{n-1}} \\ t_{n+1} = \frac{t_n + t_{n-1}}{a_p + s_n s_{n-1}} \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.5}$$

Soit $(s_n, t_n)_{n \geq -1}$ une solution du système (3.5) avec $s_{-1} = \beta_{-1}, s_0 = \beta_0, t_{-1} = \gamma_{-1}, t_0 = \gamma_0$. Alors, pour tout $\alpha \in]0,1]$,

$$[L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}] \subset [s_n, t_n], \quad n = -1, 0, 1, ...$$

Prouvons par récurrence cette propriété. On a pour tout $\alpha \in]0,1]$,

$$[P_{l,\alpha}, P_{r,\alpha}] \subset [a_p, b_p],$$

donc

$$a_p \leq P_{l,\alpha} \leq P_{r,\alpha} \leq b_p.$$

D'une part,

$$P_{r,\alpha} \leq b_p,$$

alors

$$\begin{gathered} P_{r,\alpha} + R_{0,\alpha} R_{-1,\alpha} \leq P_{r,\alpha} + \gamma_0 \gamma_{-1} \leq b_p + \gamma_0 \gamma_{-1}, \\ \frac{1}{b_p + \gamma_0 \gamma_{-1}} \leq \frac{1}{P_{r,\alpha} + \gamma_0 \gamma_{-1}} \leq \frac{1}{P_{r,\alpha} + R_{0,\alpha} R_{-1,\alpha}}, \\ \frac{\beta_0 + \beta_{-1}}{b_p + \gamma_0 \gamma_{-1}} \leq \frac{\beta_0 + \beta_{-1}}{P_{r,\alpha} + \gamma_0 \gamma_{-1}} \leq \frac{L_{-1,\alpha} + L_{0,\alpha}}{P_{r,\alpha} + R_{0,\alpha} R_{-1,\alpha}}, \end{gathered}$$

d'où

$$\frac{s_0 + s_{-1}}{b_p + t_0 t_{-1}} \leq \frac{L_{0,\alpha} + L_{-1,\alpha}}{P_{r,\alpha} + R_{0,\alpha} R_{-1,\alpha}},$$

i.e.,

$$s_1 \leq L_{1,\alpha}.$$

D'autre part,

$$a_p \leq P_{l,\alpha},$$

$$a_p + \beta_{-1}\beta_0 \leq P_{l,\alpha} + \beta_{-1}\beta_0 \leq P_{l,\alpha} + L_{-1,\alpha}L_{0,\alpha},$$
$$\frac{1}{P_{l,\alpha} + L_{-1,\alpha}L_{0,\alpha}} \leq \frac{1}{P_{l,\alpha} + \beta_{-1}\beta_0} \leq \frac{1}{a_p + \beta_{-1}\beta_0},$$
$$\frac{R_{-1,\alpha} + R_{0,\alpha}}{P_{l,\alpha} + L_{-1,\alpha}L_{0,\alpha}} \leq \frac{\gamma_{-1} + \gamma_0}{P_{l,\alpha} + \beta_{-1}\beta_0} \leq \frac{\gamma_{-1} + \gamma_0}{a_p + \beta_{-1}\beta_0},$$

alors

$$R_{1,\alpha} \leq t_1.$$

D'où

$$[L_{1,\alpha}, R_{1,\alpha}] \subset [s_1, t_1],$$

donc la propriété est vraie pour $k = 1$.

Supposons que cette propriété est vraie pour tout $n \leq k$, c'est à dire

$$[L_{k,\alpha}, R_{k,\alpha}] \subset [s_k, t_k], \quad k \leq n,$$

et montrons pour $k + 1$. On a pour tout $\alpha \in]0, 1]$,

$$a_p \leq P_{l,\alpha} \leq P_{r,\alpha} \leq b_p.$$

D'une part,

$$P_{r,\alpha} \leq b_p,$$

alors

$$P_{r,\alpha} + R_{k-1,\alpha}R_{k,\alpha} \leq P_{r,\alpha} + t_k t_{k-1} \leq b_p + t_k t_{k-1},$$
$$\frac{1}{b_p + t_k t_{k-1}} \leq \frac{1}{P_{r,\alpha} + t_k t_{k-1}} \leq \frac{1}{P_{r,\alpha} + R_{k-1,\alpha}R_{k,\alpha}},$$
$$\frac{s_k + s_{k-1}}{b_p + t_k t_{k-1}} \leq \frac{s_k + s_{k-1}}{P_{r,\alpha} + t_k t_{k-1}} \leq \frac{L_{k-1,\alpha} + L_{k,\alpha}}{P_{r,\alpha} + R_{k-1,\alpha}R_{k,\alpha}},$$

d'où

$$\frac{s_k + s_{k-1}}{b_p + t_k t_{k-1}} \leq \frac{L_{k,\alpha} + L_{k-1,\alpha}}{P_{r,\alpha} + R_{k,\alpha}R_{k-1,\alpha}},$$

alors

$$s_{k+1} \leq L_{k+1,\alpha}.$$

D'autre part,

$$a_p \leq P_{l,\alpha},$$

alors

$$a_p + s_{k-1}s_k \leq P_{l,\alpha} + s_{k-1}s_k \leq P_{l,\alpha} + L_{k-1,\alpha}L_{k,\alpha},$$
$$\frac{1}{P_{l,\alpha} + L_{k-1,\alpha}L_{k,\alpha}} \leq \frac{1}{P_{l,\alpha} + s_{k-1}s_k} \leq \frac{1}{a_p + s_{k-1}s_k},$$

$$\frac{R_{k-1,\alpha}+R_{k,\alpha}}{P_{l,\alpha}+L_{k-1,\alpha}L_{k,\alpha}} \leq \frac{t_{k-1}+t_k}{Pl,\alpha+s_{k-1}s_k} \leq \frac{t_{k-1}+t_k}{a_p+s_{k-1}s_k},$$

i.e.,

$$R_{k+1,\alpha} \leq t_{k+1}.$$

Ainsi la propriété est vraie pour tout $n \geq -1$, et pour tout $\alpha \in]0,1]$. Par conséquent,

$$Supp\ x_n \subset [s_n, t_n], \text{ pour tout } n \geq -1.$$

Comme $P_{l,\alpha} > 2$, on a $a_P,\ b_P > 2$, alors d'après le théorème (2.15) la solution du système (3.5), $(s_n, t_n)_{n\geq -1}$ converge vers le point d'équilibre $(0,0)$, et par suite $(s_n)_{n\geq -1}$ et $(t_n)_{n\geq -1}$ sont des suites bornées, ainsi $(x_n)_{n\geq -1}$ est permanente . □

3.3 Points d'équilibre

Dans cette partie, on va chercher les points d'équilibre de l'équation (3.1).

Définition 3.5. *Un point d'équilibre* $\bar{x}$ *de* (3.1) *est un nombre flou qui vérifie l'équation*

$$\bar{x} = \frac{2\bar{x}}{P+\bar{x}^2} \tag{3.6}$$

Il est clair que $\bar{x} = 0$ est une solution de l'équation (3.6), alors, $\bar{x} = 0$ est un point d'équilibre de l'équation (3.1).
Supposons $\bar{x}$ est un point d'équilibre strictement positif satisfaisant l'équation (3.1). Considérons les α–coupes, pour tout $\alpha \in [0,1]$

$$[\bar{x}]_\alpha = [L_\alpha, R_\alpha],$$

et

$$[P]_\alpha = [P_{l,\alpha}, P_{r,\alpha}].$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
[\bar{x}]_\alpha &= [L_\alpha, R_\alpha] \\
&= \left[\frac{2\bar{x}}{P+\bar{x}^2}\right]_\alpha \\
&= \frac{[2\bar{x}]_\alpha}{[P]_\alpha + [\bar{x}^2]_\alpha} \\
&= \frac{[2L_\alpha, 2R_\alpha]}{[P_{l,\alpha}, P_{r,\alpha}] + [L_\alpha^2, R_\alpha^2]} \\
&= \frac{[2L_\alpha, 2R_\alpha]}{[P_{l,\alpha} + L_\alpha^2, P_{r,\alpha} + R_\alpha^2]} \\
&= \left[\frac{2L_\alpha}{P_{r,\alpha} + R_\alpha^2}, \frac{2R_\alpha}{P_{l,\alpha} + L_\alpha^2}\right].
\end{aligned}$$

D'où par identification

$$\begin{aligned}
L_\alpha &= \frac{2L_\alpha}{P_{r,\alpha} + R_\alpha^2}, \quad R_\alpha = \frac{2R_\alpha}{P_{l,\alpha} + L_\alpha^2}, \\
1 &= \frac{2}{P_{r,\alpha} + R_\alpha^2}, \quad 1 = \frac{2}{P_{l,\alpha} + L_\alpha^2}, \\
P_{r,\alpha} + R_\alpha^2 &= 2, \quad P_{l,\alpha} + L_\alpha^2 = 2, \\
R_\alpha &= \sqrt{2 - P_{r,\alpha}}, \quad L_\alpha = \sqrt{2 - P_{l,\alpha}}.
\end{aligned}$$

On a $L_\alpha \leq R_\alpha$, alors

$$\begin{aligned}
\sqrt{2 - P_{l,\alpha}} &\leq \sqrt{2 - P_{r,\alpha}}, \\
2 - P_{l,\alpha} &\leq 2 - P_{r,\alpha}, \\
-P_{l,\alpha} &\leq -P_{r,\alpha},
\end{aligned}$$

donc

$$P_{r,\alpha} \leq P_{l,\alpha}.$$

On sait que $P_{l,\alpha} \leq P_{r,\alpha}$, alors $P_{r,\alpha} = P_{l,\alpha}$. Ainsi $[P]_\alpha = [P_{l,\alpha}, P_{r,\alpha}]$ est la α–coupe d'un nombre flou positif trivial P. Dans ce cas, $[\bar{x}]_\alpha = [L_\alpha, R_\alpha]$ tels que $L_\alpha = R_\alpha = \sqrt{2-P}$, i.e., $\bar{x} = \sqrt{2-P}$. En conclusion, l'équation (3.1) admet un point d'équilibre strictement positif si P est nombre flou positif trivial.

3.4 Attractivité globale du point d'équilibre $\bar{x} = 0$ de l'équation (3.1)

Maintenant, on va étudier le comportement global des solutions autour du point d'équilibre $\bar{x} = 0$ de l'équation (3.1).

Définition 3.6. *Soit $(x_n)_{n\geq -1}$ une solution de l'équation (3.1) et $\bar{x}$ un point d'équilibre tels que pour tout $\alpha \in]0,1]$*

$$[x_n]_\alpha = [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}], \quad n = -1, 0, -1, ...,$$

et

$$[\bar{x}]_\alpha = [L_\alpha, R_\alpha].$$

On dit que la solution $(x_n)_{n\geq -1}$ converge vers $\bar{x}$ si

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} D_\infty(x_n, \bar{x}) = 0$$

et dans ce cas le point d'équilibre $\bar{x}$ est dit globalement attractif.

Théorème 3.7. *Soit $(x_n)_{n\geq -1}$ une solution positive de (3.1). Supposons que $P_{l,\alpha} > 2$, alors, le point d'équilibre $\bar{x} = 0$ est globalement attractif.*

Preuve.

Soit $(x_n)_{n\geq -1}$ la solution du (3.1). Comme $P_{l,\alpha} > 2$, on a $b_p,\ a_p > 2$, alors d'après le Théorème 2.15 on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} s_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} t_n = 0.$$

Dans ce qui précède, on déduit que pour tout $\alpha \in]0,1]$

$$0 \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} L_{n,\alpha} \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} R_{n,\alpha} \leq 0,$$

alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} L_{n,\alpha} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} R_{n,\alpha} = 0,$$

donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sup_{\alpha\in]0,1]} \{max\{|L_{n,\alpha} - 0|, |R_{n,\alpha} - 0|\}\} = 0,$$

i.e.,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} D_\infty(x_n, 0) = 0.$$

D'où le point d'équilibre $\bar{x} = 0$ est globalement attractif. $\square$

CONCLUSION

Dans ce mémoire, d'après un chapitre introductif nous avons présenté des résultats sur le comportement asymptotique du système d'équations aux différences rationnel d'ordre deux suivant

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{a + y_n y_{n-1}} \\ y_{n+1} = \frac{y_n + y_{n-1}}{b + x_n x_{n-1}} \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

où a et b sont des constantes réelles strictement positives et les valeurs initiales $x_{-1},\ x_0,\ y_{-1},\ y_0$ sont des nombres réels positifs. Ainsi qu'une étude d'une classe d'équations aux différences floue d'ordre deux donnée par

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{P + x_n x_{n-1}},\ n = 0, 1, 2, ...,$$

avec P est un nombre flou strictement positif et les valeurs initiales $x_{-1},\ x_0$ sont des nombres flous positifs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **S. Ambapour**, *Théorie des ensembles flous : application à la mesure de la pauvreté au Congo*, Congo, 2009. Disponible à l'adresse : www.cnsee.org/pdf/BAMSI16.Pdf.

[2] **R. P. Agarwal**, *Difference equations and inequalities : theory, methods, and applications*, seconde edition, revised and expanded, Marcel Dekker Inc, New York, 1992.

[3] **A. Billot**, *De la théorie des sous-ensembles flous aux probabilités non-additives : 36 remarques* [Rapport de recherche], Institut de mathématiques économiques (IME), 1992. Disponible à l'adresse : /http ://hal.archives-ouvertes.fr.

[4] **B. Bede**, *Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic*, Springer, Verlug Berlin Heidlberg, 2013.

[5] **N. Bourbaki**, *Élément de mathématique, topologie générale*, Hermann, Paris, 1974.

[6] **D. Dubois, H. Prade**, *Fuzzy sets and systems, theory and applications*, Academic Press, London, 1980.

[7] **Q. Din**, *Asymptotic behavior of a second-order fuzzy rational difference equation*, Journal of Discrete Mathimatics, Vol. 2015, Article ID 524931, 7 pages.

[8] **S. Elaydi**, *An introduction to difference equations*, Undergraduate texts in mathematics, third edition, New york, USA, 2005.

[9] **T. Jayakumar, D. Maheskumar, K. Kanagarajan**, *Numerical solution of fuzzy differentiel equations by runge kutta methode of order five*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 6, No. 60, (2012), 2989-3002.

[10] **R. Tyrrell Rockafellar**, *Convex analysis*, Princeton University Press, New Jersey, 1970.

[11] **Q. H. Zhang, L. H. Yang, D. X. Liao**, *Behavior of solutions to a fuzzy nonlinear difference equation*, Iranian Journal of Fuzzy Systems, Vol. 9, No. 2, (2012), 1-12.

[12] **H. J. Zimmermann**, *Fuzzy sets theory and its application*, fourth edition, Springer, New york, 2001.