الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد الصديق بن يحيى– جيجل

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الألي

قسم الرياضيات

مذكرة مقدمة لنيل شهادة ماسترفي الرياضيات

تخصص: رياضيات أساسية ومتقطعة

الدوال المولدة للأعداد وكثيرات الحدود الغوصية

إعـــــداد :

نبيهة صابة

مريم فركيوي

لجـــــنة المنـــــــاقشة:

أ.نور السادات توافق	جامعة محمد الصديق بن يحيى	رئيسا
أ.عــــلي بوسعــــيود	جامعة محمد الصديق بن يحيى	مقررا
أ. منيـرة قميــحــة	جامعة محمد الصديق بن يحيى	ممتحنا
أ. مـحمــد كــرادة	جامعة محمد الصديق بن يحيى	مدعوا

السنة الجامعية 2019/2018

دعاء

يا رب لا تجعلني أصاب بالغرور إذا نجحت

ولا باليأس إذا أخفقت

يا رب ذكرني دائما أنّ الإخفاق هو التجربة التي تسبق النجاح

يا رب إذا أعطيتني نجاحا فلا تأخذ تواضعي

وإذا أعطيتني تواضعا فلا تأخذ اعتزازا بكرامتي

اللهم إني أسألك خير المسألة

وخير الدعاء وخير العمل وخير الثواب

يا رب إذا جردتني من نعمة الصحة أترك لي

نعمة الإيمان

وإذا جردتني من المال أترك لي

الأمل

يا رب إذا أسأت إلى الناس أعطني

شجاعة الاعتذار

وإذا أساء إليّ الناس أعطني

شجاعة العفو والغفران

يا رب إذا نسيتك فلا تنساني

آمين.

.

شكر وعرفان

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على المبعوث رحمة للعالمين سيدنا

محمد وعلى آله وصحبه أجمعين

عملا بقوله تعالى "وإذا تأذن ربك لئن شكرتم لأزيدنكم............."

نشكر الله على نعمه التي لا تعد ولا تحصى ومنها توفيقه تعالى لنا على إتمام

هذا العمل المتواضع من غير حول منّا ولا قوة، فهو الذي له الفضل أوّلا و آخرا .

بداية نخص بالشكر الجزيل الوالدين الكريمين على دعمهم المعنوي والمادي.

كما نتقدم بجزيل الشكر والامتنان وخالص العرفان والتقدير إلى الأستاذ المشرف

الأستاذ" **علي بوسعيود**" الذي أعطانا من وقته وعلمه الكثير و رافقنا طيلة فترة

إنجاز هذا العمل بتوجيهاته القيمة ونصائحه الثّمينة فجزاه الله خير الجزاء.

كما نتوجه بجزيل الشكر إلى السادة الأساتذة أعضاء لجنة المناقشة كل من

الأستاذ"**نور السادات توافق**"، الأستاذة "**منيرة قميحة** " و الأستاذ"**محمد**

كرادة" على اقتطاعهم جزءا من وقتهم الثمين من أجل الإطلاع على هذه المذكرة .

والشكر موصول إلى كل من ساعدنا على انجاز وإتمام بحثنا هذا، ونخص

بالذكر أساتذة الماستر رياضيات أساسية.

ن+م

إهداء

بعد ذكر وحمد رب العزة والخلق أجمعين والثناء على سيد الأنبياء والمرسلين أهدي ثمرة

جهدي هذا:

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار...إلى من علمني العطاء بدون انتظار...

إلى من أحمل اسمه بكل افتخار...إلى قدوتي وسندي في الحياة...

*"**أبي العزيز**" وهبه الله حسن المآب.*

إلى ملاكي في الحياة...إلى مصدر الحنان والعطاء...إلى بسمة الروح...

إلى من كان دعاؤها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي...

*"**أمي الغالية**" حفظها الله.*

إلى من جمعتني معهم ظلمة رحم واحد...إلى من أقمت لهم مكانا عميقا في قلبي

*وتقاسمت معهم حلاوة الحياة..."**إخوتي**" "**أخواتي**" كل باسمه*

*إلى البراعم الصغار "**أولاد أختاي**"*

إلى من تتلمذت على أياديهم، وأمدوني بنصائحهم و توجيهاتهم

*" **أســـاتذتي**"*

*إلى زميلتي التي شاركتني في إنجاز هذا العمل "**مريم**"*

إلى صديقاتي ورفيقات دربي كل باسمه.

نبيهة

إهداء

إلهي لا يطيب الليل الا بشكرك ولا يطيب النهار إلا بطاعتك ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك

ولا تطيب الآخرة و الجنة إلا بعفوك أهدي ثمرة جهدي هذا إلى:

الماس الذي لا ينكسر...نبع العطاء الذي زرع الأخلاق بداخلي وعلمني طرق الارتقاء...

"**أبي العزيز**"

الزهرة التي لا تذبل...نبع الحنان التي ساندتني ووقفت إلى جانبي حتى وصلت

إلى هذه المرحلة من التقدم والنجاح

"**أمي الغالية**"

إلى من كونت معهم بحر ذكرياتي ونقشت أسماءهم في صدري"**إخوتي**" **أخواتي**"

إلى الكتاكيت الأحبة "**أولاد أختاي**"

إلى جميع أساتذتنا

إلى زميلتي التي شاركتني في إنجاز هذا العمل "**نبيهة**"

إلى رفيقات الدرب...بنات المستقبل...صديقاتي المخلصات كل باسمه .

مريم

الفهرس

العنوان | الصفحة

المقدمة

إن الأعداد الغوصية وخصائصها مثيرة للاهتمام، وهوعبارة عن موضوع بحثي ذو أهمية كبيرة، إذ كان محل دراسة العديد من الباحثين أولهم غوص في سنة 1832، ثم في سنة 1963 قدم هورادام مفهوم أعداد غوصيان فيبوناتشي، ليقوم بعدها جوردن بتقديم بعض العلاقات بين متتالية فيبوناتشي العادية وغوصيان فيبوناتشي وغوصيان فيبوناتشي ذو الدليل السالب نذكر منها:

$$GF_n = F_n + iF_{n-1}.$$
$$GF_{-n} = iGF_n.$$

وفي عام 1981 قام هارمان بتعميم الطرق التي قدمها هورادام في سنة 1963.

كما قام العديد من الباحثين الرياضيين بدراسة كثيرات الحدود الغوصية المتعامدة على غرار آسكي و غورال سنة 2013 و أوز سنة 2018، إذ وضعوا العلاقات التراجعية لبعض كثيرات الحدود الغوصية والدوال المولدة الخاصة بها.

من جهة أخرى تحتل التوابع التناظرية مكانا هاما في الرياضيات الكلاسيكية، حيث أبدع كلا من الفرنسيين مارسيل بول و آليان لاسكو في إيجاد العديد من النتائج الجديدة والمهمة باستعمال الدوال التناظرية.

نهتم في هذه المذكرة بدراسة التوابع التناظرية وذلك باستعمال تأثير المؤثر $\delta_{a_1a_2}^{k+1}$ على السلسلة القابلة للقلب $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(P)a_1^n z^n$ وهذا بهدف الحصول على دوال مولدة جديدة وأخرى تم الحصول عليها من طرف بعض الباحثين بطرق مختلفة.

تم تقسيم هذه المذكرة إلى أربعة فصول، الفصل الأول يتناول بعض المفاهيم العامة حول السلاسل الشكلية، العلاقات التراجعية لأعداد غوصيان-(فيبوناتشي، لوكاس، جاكوبستال، جاكوبستال لوكاس، بال و بال لوكاس)، الدوال المولدة لها، كما تطرقنا إلى بعض كثيرات الحدود المتعامدة (غوصيان جاكوبستال، غوصيان جاكوبستال لوكاس، غوصيان بال، غوصيان بال لوكاس وكثيرات الحدود تشيبتشاف من النوعين الثالث والرابع) وفي الأخير قمنا بالتذكير بالمفاهيم الأساسية وبعض الخصائص حول التوابع التناظرية وتطبيقاتها .

أما في الفصل الثاني فقمنا باستنتاج الدوال المولدة للأعداد وكثيرات الحدود الغوصية المذكورة سابقا، كما قدمنا نظرية مكنتنا من حساب الدوال المولدة لجداءات كثيرات الحدود الغوصية، جداءات كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوعين الثالث والرابع وجداءات كثيرات الحدود الغوصية مع كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوعين الثالث والرابع.

وفي الفصل الثالث قمنا باقتراح نظرية جديدة التي سمحت لنا بالحصول على الدوال المولدة لجداءات الأعداد الغوصية وجداءات الأعداد الغوصية مع كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث وذلك بإجراء تطبيقات على النظرية 1.1.

وفي الفصل الرابع والأخير قمنا بحساب بعض الدوال المولدة الجديدة وذلك بالاعتماد على النظرية 1.1 المقترحة في الفصل الثالث والتي سمحت لنا بحساب الدوال المولدة لجداءات الأعداد الغوصية بدليلين متواليين وغير متواليين بالإضافة إلى جداءات الأعداد الغوصية مع كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع.

الفصل الأول

مفاهيم عامة

نتطرق في هذا الفصل إلى بعض المفاهيم العامة، حيث نستهل الفصل بتقديم تعريف للسلاسل الشكلية، العلاقات التراجعية لأعداد غوصيان فيبوناتشي، غوصيان لوكاس، غوصيان جاكوبستال وغوصيان جاكوبستال لوكاس، بعد ذلك نقوم بتعريف كثيرات الحدود المتعامدة لكل من تشيبتشاف من النوع الثالث والرابع، غوصيان جاكوبستال وغوصيان جاكوبستال لوكاس، ثم نقدم مفهوما للدوال المولدة العادية، وكيفية إيجاد الدوال المولدة للأعداد و كثيرات الحدود المتعامدة السالف ذكرها، بعد ذلك نتناول العناصر الأساسية لنظرية التوابع التناظرية، حيث سنتطرق إلى المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية ونقدّم بعض التعاريف حول التوابع التناظرية الأولية والتامة، وفي الأخير نقدم بعض خصائص التوابع التناظرية مع بعض التطبيقات على التوابع التناظرية التامة، نشير للقارئ أننا استعملنا المراجع [1-14].

1.1 السلاسل الشكلية

1.1.1 حقل السلاسل الشكلية

ليكن $(\mathbb{k},+,.)$ حقل تبديلي $(\mathbb{k}=\mathbb{C})$

تعريف1.1:

عناصر $\mathbb{k}\left[\left[x\right]\right]=\left\{\sum_{i=0}^{+\infty}a_i x^i, a_i \in \mathbb{k}\right\}$تسمى السلاسل الشكلية بمعاملات في $\mathbb{k}$. من أجل $i\in\mathbb{N}$، x^i يسمى وحيد الدرجة i و a_i هي معاملات من $\mathbb{k}$، حيث x لا معين.

- المعامل a_0 يدعى بالحد الثابت للسلسلة الشكلية $u=\sum_{i=0}^{+\infty}a_i x^i$

تعريف2.1:

لتكن $u=\sum_{i=0}^{+\infty}a_i x^i$ و $v=\sum_{i=0}^{+\infty}b_i x^i$ سلسلتين شكليتين، نعرف مجموعهما و جداءهما بالتالي:

$$u+v=\sum_{i=0}^{+\infty}\left(a_i+b_i\right)x^i, \tag{1.1}$$

$$u.v=\sum_{i=0}^{+\infty}c_i x^i \quad / \quad c_i=\sum_{k=0}^{i}a_k b_{i-k}. \tag{2.1}$$

2.1.1 العمليات على السلاسل الشكلية

1) الضرب في سلمي:

السلسلة $v=\sum_{i=0}^{+\infty}k a_i x^i$ هي ناتج ضرب السلسلة $u=\sum_{i=0}^{+\infty}a_i x^i$ في السلمي k.

2) الإشتقاق الشكلي:

السلسلة $v=\sum_{i=0}^{+\infty}(i+1)a_{i+1}x^i$ هي نتيجة الاشتقاق الشكلي للسلسلة $u=\sum_{i=0}^{+\infty}a_ix^i$ بالنسبة إلى x.

3) المكاملة الشكلية:

السلسلة $v=\sum_{i=0}^{+\infty}a_i\frac{x^{i+1}}{i+1}$ هي ناتج المكاملة الشكلية للسلسلة $u=\sum_{i=0}^{+\infty}a_ix^i$ بالنسبة إلى x.

3.1.1 السلاسل القابلة للقلب

تعريف3.1:

نقول أنّ السلسلة $\sum_{i=0}^{+\infty}a_ix^i$ قابلة للقلب إذا و فقط إذا وجدت سلسلة $\sum_{i=0}^{+\infty}b_ix^i$ حيث:

$$\left(\sum_{i=0}^{+\infty}a_i\ x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{+\infty}b_i\ x^i\right)=1. \tag{3.1}$$

أمثلـــة:

1) السلسلة $u=\sum_{i=0}^{+\infty}x^i$ قابلة للقلب و مقلوبها $v=1-x$.

2) السلسلة $u=\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i x^i$ قابلة للقلب ومقلوبها $v=1+x$.

3) السلسلة $u=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{x^i}{i!}$ قابلة للقلب ومقلوبها $v=\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i\frac{x^i}{i!}$.

خاصية 1.1:

السلسلة الشكلية $u=\sum_{i=0}^{+\infty}a_ix^i$ قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان $a_0\neq 0$.

2.1 العلاقات التراجعية

نركز في هذه الفقرة اهتمامنا على البحث عن الحلول للعلاقات التراجعية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة.

تعريف 1.2:

نسمي علاقة تراجعية خطية متجانسة من الرتبة k ذات معاملات ثابتة كل علاقة من الشكل:

$$u_n+d_1u_{n-1}+d_2u_{n-2}+...+d_ku_{n-k}=0, \tag{1.2}$$

حيث أنّ: $d_1,d_2,...,d_k$ عبارة عن معاملات ثابتة و $d_k\neq 0$.

نظرية 1.2:

يوجد حل وحيد للعلاقة التراجعية (1.2) مع:

$u_0 = b_0\ ,\ u_1 = b_1, ...,\ u_{k-1} = b_{k-1}$ و $b_0, b_1, ..., b_{k-1}$ ثوابت معطاة.

ملاحظة 1.2:

من الواضح أن $u_n = 0$ هو حل للمعادلة (1.2) ويسمى الحل الصفري (التافه).

تعريف 2.2:

لتكن $u_n + d_1 u_{n-1} + d_2 u_{n-2} + ... + d_k u_{n-k} = 0$ علاقة تراجعية خطية ذات معاملات ثابتة، كثير الحدود المميز المرفق لها هو:

$$P(x) = x^k + d_1 x^{k-1} + d_2 x^{k-2} + ... + d_k . \qquad (2.2)$$

ملاحظة 2.2:

لمّا $P(x) = 0$ تدعى هذه العلاقة بالمعادلة المميزة (المساعدة) للعلاقة التراجعية وتسمى جذورها بالجذور المميزة.

نظرية 2.2:

لتكن $u_n + d_1 u_{n-1} + d_2 u_{n-2} + \cdots + d_k u_{n-k} = 0$ علاقة تراجعية خطية ذات معاملات ثابتة وجذورها المميزة هي: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ درجة تضاعفها $m_1, m_2, ..., m_r$ على الترتيب حيث $m_i \geq 1$ من أجل $i \in \{1, 2, ..., r\}$ و $\sum_{i=0}^{r} m_i = k$، إذن u_n هو الحل العام للعلاقة التراجعية إذا وفقط إذا كان $u_n = \sum_{i=1}^{r} \left(c_{i1} + c_{i2} n + ... + c_{im_i} n^{m_i - 1}\right) x_i^n$، حيث c_{ij} ثوابت حقيقية تحقق: $1 \leq i \leq r \wedge 1 \leq j \leq m_r$.

نظرية 3.2: (الحلول مختلفة)

لتكن $u_n + d_1 u_{n-1} + d_2 u_{n-2} + \cdots + d_k u_{n-k} = 0$ علاقة تراجعية خطية ذات معاملات ثابتة وجذورها المميزة هي: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ مختلفة عن بعضها البعض، عندئذ من أجل كل مجموعة من الثوابت $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ فإنّ:

$$u_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n + \cdots + c_k \alpha_k^n . \qquad (3.2)$$

عبارة عن الحل العام للعلاقة التراجعية.

تعريف 3.2:

أعداد فيبوناتشي المعممة تعرف بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} u_n = pu_{n-1} + qu_{n-2} & , \quad \forall\, n \geq 2 \\ u_0 = \alpha,\ u_1 = \beta \end{cases} \quad , \tag{4.2}$$

حيث $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ و $p, q \in \mathbb{N}$.

ملاحظات:

1. لما $\begin{cases} p=1, q=1 \\ \alpha = i, \beta = 1 \end{cases}$ نتحصل على العلاقة التراجعية لأعداد غوصيان فيبوناتشي.
2. لما $\begin{cases} p=1, q=1 \\ \alpha = 2-i, \beta = 1+2i \end{cases}$ نتحصل على العلاقة التراجعية لأعداد غوصيان لوكاس.
3. لما $\begin{cases} p=1, q=2 \\ \alpha = \frac{i}{2}, \beta = 1 \end{cases}$ نتحصل على العلاقة التراجعية لأعداد غوصيان جاكوبستال.
4. لما $\begin{cases} p=1, q=2 \\ \alpha = 2-\frac{i}{2}, \beta = 1+2i \end{cases}$ نتحصل على العلاقة التراجعية لأعداد غوصيان جاكوبستال لوكاس.
5. لما $\begin{cases} p=2, q=1 \\ \alpha = i, \beta = 1 \end{cases}$ نتحصل على العلاقة التراجعية لأعداد غوصيان بال.
6. لما $\begin{cases} p=2, q=1 \\ \alpha = 2-2i, \beta = 2+2i \end{cases}$ نتحصل على العلاقة التراجعية لأعداد غوصيان بال لوكاس.

قضية 1.2:

الحل العام للعلاقة التراجعية (4.2) يعطى بـ:

$$u_n = \frac{c_1 x_1^n - c_2 x_2^n}{x_1 - x_2},$$

مع: $c_1 = \beta - \alpha x_2$ و $c_2 = \beta - \alpha x_1$ حيث x_1 و x_2 هما حلول للمعادلة المميزة للعلاقة التراجعية (4.2) و $x_1 \neq x_2$.

3.1 كثيرات الحدود المتعامدة

خاصية 1.3: (Favadar's)

كل متتالية كثيرات حدود $\left(P_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ذات علاقة تراجعية من الرتبة الثانية عبارة عن كثيرات حدود متعامدة.

تعريف 1.3:

كثيرات الحدود لفيبوناتشي المعممة تعرف بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} P_n(x) = pxP_{n-1}(x) + qP_{n-2}(x) & , \forall\, n \geq 2 \\ P_0(x) = \alpha,\ P_1(x) = \beta x + \gamma \end{cases}, \qquad (1.3)$$

حيث: $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ و $p,q \in \mathbb{Z}$.

ملاحظات:

1. لما $\begin{cases} \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = -1 \\ p = 2, q = -1 \end{cases}$ نجد العلاقة التراجعية لكثير الحدود تشيبتشاف من النوع الثالث.
2. لما $\begin{cases} \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1 \\ p = 2, q = -1 \end{cases}$ نجد العلاقة التراجعية لكثير الحدود تشيبتشاف من النوع الرابع.
3. لما $\begin{cases} \alpha = i, \beta = 0, \gamma = 1 \\ p = 2, q = 1 \end{cases}$ نجد العلاقة التراجعية لكثير الحدود غوصيان بال.

تعريف 2.3:

نعرف كثيرات الحدود لغوصيان جاكوبستال بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} GJ_n(x) = GJ_{n-1}(x) + 2xGJ_{n-2}(x) & , \forall\, n \geq 2 \\ GJ_0(x) = \frac{i}{2},\ GJ_1(x) = 1 \end{cases}. \qquad (2.3)$$

تعريف 3.3:

نعرف كثيرات الحدود لغوصيان جاكوبستال لوكاس بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} Gj_n(x) = Gj_{n-1}(x) + 2xGj_{n-2}(x) & , \forall\, n \geq 2 \\ Gj_0(x) = 2 - \frac{i}{2},\ Gj_1(x) = 1 + 2ix \end{cases}. \qquad (3.3)$$

4.1 الدوال المولدة

1.4.1 الدوال المولدة العادية

تعريف 1.4:

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية، نرفق بهذه المتتـالية العددية الدالة المولدة العادية التالية:

$$S(u)(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n\ . \qquad (1.4)$$

الدالة المعرفة بهذه السلسلة تسمّى الدالة المولدة العـادية المرفقة بالمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

نظرية 1.4:

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية معرفة بالعلاقة التراجعية (4.2)، الدالة المولدة المرفقة بالمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي:

$$g(x)=\frac{\alpha+(\beta-p\alpha)x}{1-px-qx^2}. \qquad (2.4)$$

البرهان:

لدينا:

$$\begin{aligned}
g(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n\\
&=u_0+u_1x+\sum_{n=2}^{+\infty}u_nx^n\\
&=\alpha+\beta x+\sum_{n=2}^{+\infty}(pu_{n-1}+qu_{n-2})x^n\\
&=\alpha+\beta x+p\sum_{n=2}^{+\infty}u_{n-1}x^n+q\sum_{n=2}^{+\infty}u_{n-2}x^n\\
&=\alpha+\beta x+px\sum_{n=1}^{+\infty}u_nx^n+qx^2\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n\\
&=\alpha+\beta x+px\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n-\alpha\right)+qx^2\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n\\
&=\alpha+\beta x-px\alpha+pxg(x)+qx^2g(x),
\end{aligned}$$

و منه ينتج لنا:

$$g(x)=\frac{\alpha+(\beta-p\alpha)x}{1-px-qx^2}.$$

وهو المطلوب.

انطلاقا من النظرية 1.4 والفقرة الثانية نتحصل على النتـائج المدونة في الجدول التالي:

الأعداد الغوصية	p	q	α	β	الدالة المولدة
GF_n	1	1	i	1	$g(x)=\frac{i+(1-i)x}{1-x-x^2}.$
GL_n	1	1	$2-i$	$1+2i$	$g(x)=\frac{2-i+(3i-1)x}{1-x-x^2}.$
GJ_n	1	2	$\frac{i}{2}$	1	$g(x)=\frac{i+(2-i)x}{2-2x-4x^2}.$
Gj_n	1	2	$2-\frac{i}{2}$	$1+2i$	$g(x)=\frac{4-i+(5i-2)x}{2-2x-4x^2}.$
GP_n	2	1	i	1	$g(x)=\frac{i+(1-2i)x}{2-2x-x^2}.$
GQ_n	2	1	$2-2i$	$2+2i$	$g(x)=\frac{2-2i+(6i-2)x}{2-2x-x^2}.$

الجدول 1.1 الدوال المولدة للأعداد الغوصية.

2.4.1 الدوال المولدة المرفقة بكثيرات الحدود المتعامدة

نظرية 2.4:

لتكن $\left(P_n\left(x\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كثيرات الحدود المعرفة بالعلاقة التراجعية (1.3)، الدالة المولدة المرفقة بالمتتالية $\left(P_n\left(x\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ هي:

$$g\left(z\right)=\frac{\alpha+\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)z}{1-pxz-qz^{2}}. \tag{3.4}$$

البرهان:

لدينا:

$$\begin{aligned}
g\left(z\right)&=\sum_{n=0}^{+\infty}P_n\left(x\right)z^{n}\\
&=P_0\left(x\right)+P_1\left(x\right)z+\sum_{n=2}^{+\infty}P_n\left(x\right)z^{n}\\
&=\alpha+\left(\beta x+\gamma\right)z+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(pxP_{n-1}\left(x\right)+qP_{n-2}\left(x\right)\right)z^{n}\\
&=\alpha+\left(\beta x+\gamma\right)z+px\sum_{n=2}^{+\infty}P_{n-1}\left(x\right)z^{n}+q\sum_{n=2}^{+\infty}P_{n-2}\left(x\right)z^{n}\\
&=\alpha+\left(\beta x+\gamma\right)z+pxz\sum_{n=1}^{+\infty}P_n\left(x\right)z^{n}+qz^{2}\sum_{n=0}^{+\infty}P_n\left(x\right)z^{n}\\
&=\alpha+\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)z+pxzg\left(z\right)+qz^{2}g\left(z\right)\\
&=\alpha+\left(\beta x+\gamma\right)z+Pxz\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P_n\left(x\right)z^{n}-\alpha\right)+qz^{2}\sum_{n=0}^{+\infty}P_n\left(x\right)z^{n},
\end{aligned}$$

ومنه ينتج لنا:

$$g\left(z\right)=\frac{\alpha+\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)z}{1-pxz-qz^{2}}.$$

و هو المطلوب.

انطلاقا من النظرية 2.4 والفقرة الثالثة نتحصل على النتـائج المدونة في الجدول التالي:

الأعداد الغوصية	p	q	α	β	γ	الدالة المولدة
$V_n(z)$	2	-1	1	2	-1	$g(z)=\dfrac{1-z}{1-2xz+z^2}.$
$W_n(z)$	2	-1	1	2	1	$g(z)=\dfrac{1+z}{1-2xz+z^2}.$
$GP_n(z)$	2	1	i	0	1	$g(z)=\dfrac{i+(1-2ix)z}{1-2xz-z^2}.$

الجدول 2.1 الدوال المولدة لكثيرات الحدود.

نظرية 3.4:

الدالة المولدة لكثير الحدود غوصيان جاكوبستال هي:

$$g(z)=\frac{i+(2-i)z}{2-2z-4xz^2}.$$

البرهان:

لدينـا:

$$g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_n(x)z^n$$

$$\begin{aligned}
&=GJ_0(x)+GJ_1(x)z+\sum_{n=2}^{+\infty}GJ_n(x)z^n\\
&=GJ_0(x)+GJ_1(x)z+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(GJ_{n-1}(x)+2xGJ_{n-2}(x)\right)z^n\\
&=GJ_0(x)+GJ_1(x)z+\sum_{n=2}^{+\infty}GJ_{n-1}(x)z^n+2x\sum_{n=2}^{+\infty}GJ_{n-2}(x)z^n\\
&=GJ_0(x)+GJ_1(x)z+z\sum_{n=1}^{+\infty}GJ_n(x)z^n+2xz^2\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_n(x)z^n\\
&=\frac{i}{2}+z+z\left(\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_n(x)z^n-\frac{i}{2}\right)+2xz^2\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_n(x)z^n\\
&=\frac{i+(2-i)z}{2}+zg(z)+2xz^2g(z),
\end{aligned}$$

و منه ينتج لنا:

$$g(z)=\frac{i+(2-i)z}{2-2z-4xz^{2}}.$$

و هو المطلوب.

نظرية 4.4:

الدالة المولدة لكثيرات الحدود غوصيان جاكوبستال لوكاس هي:

$$g(z)=\frac{4-i+(4ix+i-2)z}{2-2z-4xz^{2}}.$$

البرهان:

لدينــا:

$$\begin{aligned}
g(z)&=\sum_{n=0}^{+\infty}Gj_n(x)z^n\\
&=Gj_0(x)+Gj_1(x)z+\sum_{n=2}^{+\infty}Gj_n(x)z^n\\
&=Gj_0(x)+Gj_1(x)z+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(Gj_{n-1}(x)+2xGj_{n-2}(x)\right)z^n\\
&=Gj_0(x)+Gj_1(x)z+\sum_{n=2}^{+\infty}Gj_{n-1}(x)z^n+2x\sum_{n=2}^{+\infty}Gj_{n-2}(x)z^n\\
&=Gj_0(x)+Gj_1(x)z+z\sum_{n=1}^{+\infty}Gj_n(x)z^n+2xz^2\sum_{n=0}^{+\infty}Gj_n(x)z^n\\
&=\left(2-\frac{i}{2}\right)+(1+2ix)z+z\left(\sum_{n=0}^{+\infty}Gj_n(x)z^n-\left(2-\frac{i}{2}\right)\right)+2xz^2\sum_{n=0}^{+\infty}Gj_n(x)z^n\\
&=\frac{4-i+(4ix+i-2)z}{2}+zg(z)+2xz^2g(z),
\end{aligned}$$

و منه ينتج لنا:

$$g(z)=\frac{4-i+(4ix+i-2)z}{2-2z-4xz^{2}}.$$

و هو المطلوب.

5.1 المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية

نعتبر المعادلة الجبرية من الدرجة الثانية $x^2 - x - 1 = 0$، حيث λ_1 و λ_2 حلول للمعادلة لدينا العلاقة التالية:

$$\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 = -1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \end{cases}$$

لتكن المصفوفة $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ تسمى هذه المصفوفة "المصفوفة المرفقة" لكثير الحدود:

$$P_M(\lambda) = \lambda^2 - tr(M)\lambda + \det M ,$$

وعليه يمكن تعريف متتالية غوصيان فيبوناتشي $(GF_n)_{n\geq 1}$ بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{pmatrix} GF_{n+1} \\ GF_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} GF_n \\ GF_{n-1} \end{pmatrix}; \ \mathrm{GF}_0 = i, \ \mathrm{GF}_1 = 1, \tag{1.5}$$

من العلاقة (1.5) تنتج لنا العلاقتين التاليتين:

$$\begin{cases} GF_{n+1} = GF_n + GF_{n-1} & , \quad \forall\, n \geq 1 \\ \mathrm{GF}_0 = i, \ \mathrm{GF}_1 = 1 & , \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\begin{pmatrix} GF_{n+1} \\ GF_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} GF_1 \\ GF_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

1.5.1 دراسة قابلية تقطير المصفوفة M

<u>أولا:</u> تعيين القيم الذاتية:

يعطى كثير الحدود المميز للمصفوفة M بالعلاقة التالية:

$$P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_2) = \lambda^2 - \lambda - 1. \tag{4.5}$$

هذا الأخير ينعدم من أجل: $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$، وهما القيمتين الذاتيتين للمصفوفة M و أيضا جذرين للمعادلة الأولى.

ثانيا: الأشعة الذاتية المرفقة لـ λ_2, λ_1:

ليكن V_i شعاعا ذاتيا مرفقا للقيمة الذاتية λ_i إذن: $MV_i = \lambda_i V_i ; \mathrm{i} = \overline{1,2}$ ، حيث $V_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$:

أي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \left(i = \overline{1,2}\right). \tag{5.5}$$

و منه:

$$\begin{cases} x + y = \lambda_i y \,, \\ \quad\;\; x = \lambda_i y \,. \end{cases} \tag{6.5}$$

من المعادلتين السابقتين ينتج لنا: $x = \lambda_i y$.

الأشعة الذاتية المرافقة لـ λ_1 ، λ_2 هي على الترتيب: $V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

إذن: M قابلة للتقطير ومنه توجد مصفوفة P قابلة للقلب و مصفوفة D قطرية حيث:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} / P = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

وعليه ينتج لنا: $M = PDP^{-1}$ مع $M^n = PD^n P^{-1}$ ، إذن المصفوفة M^n تعطى بالعلاقة التالية:

$$M^n = \begin{pmatrix} \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} & \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}} & \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

6.1 التوابع التـنـاظـرية

1.6.1 التوابع التناظرية الأوليّة

نعتبر فيما يلي n,k عددين صحيحين موجبين و $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ جذور مختلفة (حقيقية أو مركبة) لمعادلة جبرية من الدرجة n.

تعريف 1.6:

التابع المتناظر الأولي من الرتبة k يعرف بـ:

$$e_k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)=\sum_{i_1+i_2+...+i_n=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}, \qquad (1.6)$$

مــع: $i_1,i_2,...,i_n=1\vee 0$ و $e_k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$ معدومة من أجل $k>n$ و $k<0$.

مثال 1.6:

من أجل معادلة من الدرجة الثانية ($n=2$ ، الجذور: λ_1,λ_2) لدينا:

$$\begin{cases} e_0^{(2)}=1 \\ e_1^{(2)}=\lambda_1+\lambda_2 \\ e_2^{(2)}=\lambda_1\lambda_2. \end{cases}$$

قضية 1.6:

التوابع التناظرية الأولية هي معاملات النشر في السلسلة:

$$E(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}e_k^{(n)}z^k=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i z). \qquad (2.6)$$

2.6.1 التوابع التناظرية التامة

تعريف 2.6:

التابع التناظري التام بالنسبة للجذور يعرف بالعلاقة التالية:

$$h_k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)=\sum_{i_1+i_2+....+i_n=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}, \qquad (3.6)$$

مع: $i_1,i_2,...,i_n\geq 0$ و $\forall k<0, h_k^{(n)}=0$.

مثال 2.6:

من أجل معادلة من الدرجة الثانية ($n=2$ ، الجذور: λ_1,λ_2) لدينا:

$$\begin{cases} h_0^{(2)} = 1 = e_0^{(2)} \\ h_1^{(2)} = \lambda_1 + \lambda_2 = e_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} = \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 \\ h_3^{(2)} = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^2 \\ \vdots \end{cases}$$

قضية 2.6:

التوابع التناظرية التامة من الرتبة k هي معاملات النشر في السلسلة:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{(n)} z^k = \prod_{i=1}^{n} (1-\lambda_i z)^{-1}. \tag{4.6}$$

7.1 بعض خصائص التوابع التناظرية

انطلاقا من المصفوفة M^n المعطاة بالعلاقة (7.5) واعتمادا على التعريف 2.6، يمكن إعطاء التعريف التـالي للتوابع التناظرية.

تعريف 1.7:

نعتبر الأبجدية $P = \{p_1, p_2\}$، نعرف التابع المتناظر S_n المرفق بالأبجدية P بـ:

$$S_n(P) = S_n(p_1 + p_2) = \frac{p_1^{n+1} - p_2^{n+1}}{p_1 - p_2}, n \in \mathbb{N}.$$

مع:

$$\begin{cases} S_0(P) = h_0^{(2)} = 1 \\ S_1(P) = h_1^{(2)} = p_1 + p_2 \\ S_2(P) = h_2^{(2)} = p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2 \\ \vdots \\ S_n(P) = h_n^{(2)}, \end{cases}$$

و $S_n(P) = 0$ من أجل $n < 0$.

تعريف 2.7:

لتكن A و B أبجديتين، نرمز بـ $S_n(A-B)$ لمعاملات السلسلة المعرفة بـ:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A-B) z^n = \frac{\prod_{b\in B}(1-bz)}{\prod_{a\in A}(1-az)} = \mathrm{H}(z)\mathrm{E}(-z), \tag{1.7}$$

مـــع: $\forall n<0, S_n\left(A-B\right)=0$.

<u>نتيجة 1.7:</u>

بوضع $A=\{0,0,...,0\}$ في العلاقة (1.7) نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(-B\right)z^n=\prod_{b\in B}\left(1-bz\right). \tag{2.7}$$

<u>خاصية 1.7:</u>

إذا كان $A=\{0,0,...,0\}$ أو $B=\{0,0,...,0\}$ فإنه ينتج لنا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(A-B\right)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(A\right)z^n.\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(-B\right)z^n. \tag{3.7}$$

<u>ملاحظة 1.7:</u>

إذا كان $B=A$ من العلاقتين (1.7) و (3.7) نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(A\right)z^n\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(-A\right)z^n=1,$$

أي:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(A\right)z^n=\frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(-A\right)z^n}.$$

الخاتمة:

ختاما فإننا قمنا في هذا الفصل بإعطاء بعض المفاهيم العامة التي سنلجأ إليها في الفصول القادمة. حيث تم التطرق إلى بعض التعريفات الخاصة بالأعداد الغوصية و كثيرات الحدود المشهورة، وكذا الدوال الموّلدة المرفقة لكل منها، كما تطرقنا إلى التوابع التناظرية الأولية و التامة وبعض خصائصها.

المـــــــــــــــراجع:

المراجع باللغة العربية:

[1] أ. حميد شراري، م. عبد العزيز الزهيري، مقدمة في نظرية التركيبات، مطبوعات جامعة سعود، المملكة العربية السعودية، 2010.

[2] علي بوسعيود، مطبوعة البيداغوجية، جامعة محمد الصديق بن يحيى جيجل، سبتمبر 2018.

[3] س. بوغابة، كثيرات الحدود المتعامدة و التوابع التناظرية، مذكرة التخرج ماستر، جامعة جيجل 2017.

المراجع باللغة الأجنبية:

[4] A. Abderrezzak, Généralisation d'identités de Carlitz, Howard et Lehmer, *Aequationes Math*. 49, 36-46, 1995.

[5] M. Asci, E. Gurel, Gaussian Jacobsthal and Gaussian Jacobsthal Lucas polynomials, *Notes Number Theory Discrete Math*. 19, 25-36, 2013.

[6] A. Benoit, Algorithmique Semi-Numérique Rapide de Série Tchebychev, èThèse Doctorat, Ecole doctorale de mathématiques et informatiquesde Bordeaux, 2012.

[7] A. Boussayoud, M. Boulyer and M. Kerada, on some identities and symmetric function for Lucas and Pell numbers, *Electron. j.Math Analysis Appl.* 5(1), pp. 202-207, 2017.

[8] A. Boussayoud, N. Harrouche, Complete symetric functions and k-Fibonacci-numbers, *Commun. Appl. Anal*. 20, 457-465, 2016.

[9] A. Boussayoud, M. Kerada, M. Boulyer, A simple and accurate. method for determination of some generalized sequence of numbers, *Int. J. Pure App. Math*. 108, 503-511, 2016.

[10] S. Falcon, On the k-Lucas numbers of arithmetic indexes, *Appl. Math*. 31202-1206, 2012.

[11] S. Falcon, A. Plaza, On k-Fibonacci sequences and polynomials and the- irderivatives, *Chaos Solitons Fractals*. 39, 1005-1019, 2009.

[12] D. Foata, G. Han, Principes de combinatoire classique, Université Louis Pasteur, Strasbourg département de mathématiques, 2008.

[13] T. Mansour. A formula for the generating functions of powers of Hor-adam's sequence, *Australas. J. Comb*. 30, 207-212, 2004.

[14] I. Mezo, Several generating functions for second-order recurrence se- quences, *J. Integer Seq*. 12, 2009.

الفصل الثاني

التوابع التناظرية للأعداد وكثيرات الحدود الغوصية

في هذا الفصل سنتطرق إلى دراسة تأثير المؤثر $\delta_{p_1p_2}^{k}$ على السلسلة القابلة للقلب $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)\, p_1^n z^n$ الذي يسمح لنا بالحصول على الدالة المولدة لأعداد كل من غوصيان فيبوناتشي، غوصيان لوكاس ،غوصيان جاكوبستال، غوصيان جاكوبستال لوكاس، غوصيان بال و غوصيان بال لوكاس و كذلك الدوال المولدة لكثيرات الحدود لكل من غوصيان لوكاس، غوصيان جاكوبستال، غوصيان جاكوبستال لوكاس، غوصيان بال و تشيبتشاف من النوعين الثالث و الرابع، كما سنقوم بحساب الدوال المولدة لجداءات كثيرات الحدود الغوصية المذكورة سابقا و جداءات كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوعين الثالث والرابع وذلك بإجراء تطبيقات على النظرية 1.2 المقترحة أدناه وهذا في حالة الأبجدية $P=\{p_1,p_2\}$، نشير للقارئ أننا استعملنا المراجع [1-11].

1.2 مفاهيم أساسية

تعريف 1.1:

لتكن $P=\{p_1,p_2\}$ أبجدية، نعرف المؤثر $\delta_{p_1p_2}^{k}$ بـ:

$$\delta_{p_1p_2}^{k} f(p_1)=\frac{p_1^k f(p_1)-p_2^k f(p_2)}{p_1-p_2}. \qquad (1.1)$$

تعريف 2.1:

نعتبر التابع g من $\mathbb{R}^n$، نعرف الفرق المقسوم بـ:

$$\partial_{x_ix_{i+1}}(g)=\frac{g(x_1,x_2,\ldots x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)-g(x_1,x_2,\ldots,x_{i+1},x_i,\ldots,x_n)}{x_i-x_{i+1}}. \qquad (2.1)$$

خاصية 1.1:

لتكن الأبجدية $P=\{p_1,p_2\}$، من أجل كل عدد طبيعي k لدينا:

$$\delta_{p_1p_2}^{k} f(p_1)=S_{k-1}(p_1+p_2)\, f(p_1)+p_2^k\partial_{p_1p_2}(f). \qquad (3.1)$$

البرهان:

$$\delta_{p_1p_2}^{k} f(p_1)=\frac{p_1^k f(p_1)-p_2^k f(p_2)}{p_1-p_2}$$

$$=\frac{p_1^k f(p_1)-p_2^k f(p_2)+p_2^k f(p_1)-p_2^k f(p_1)}{p_1-p_2}$$

$$=\frac{p_1^k-p_2^k}{p_1-p_2} f(p_1)+p_2^k\,\frac{f(p_1)-f(p_2)}{p_1-p_2}$$

$$= S_{k-1}(p_1+p_2)f(p_1)+p_2^k\partial_{p_1p_2}(f).$$

و هو المطلوب .

ملاحظات:

-1 إذا كان $f(p_1)=p_1$ المؤثر **(1.1)** يعطى بالعلاقة التالية:

$$\delta_{p_1p_2}^k f(p_1)=\frac{p_1^{k+1}-p_2^{k+1}}{p_1-p_2}=S_K(p_1+p_2).$$

-2 إذا كان $f(p_1)=p_1^{k+1}$ الفرق المقسوم **(2.1)** يعطى بالعلاقة التالية:

$$\partial_{p_1p_2}(f)=\frac{f(p_1)-f(p_2)}{p_1-p_2}=\frac{p_1^{k+1}-p_2^{k+1}}{p_1-p_2}=S_k(p_1+p_2).$$

2.2 الدوال التناظرية

سنتطرق للنظرية الأساسية [9] التي ستسمح لنا بالحصول على الدوال المولدة للأعداد و كثيرات الحدود الغوصية.

نظرية 1.2:

لتكن $P=\{p_1,p_2\}$ و $A=\{a_1,a_2,...\}$ أبجديتين و k عدد طبيعي، لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A)S_{k+n-1}(P)z^n=\frac{\sum_{n=0}^{k-1}S_n(-A)p_1^np_2^nS_{k-n-1}(P)z^n-p_1^kp_2^kz^{k+1}\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n+k+1}(-A)S_n(P)z^n}{\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^nz^n\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_2^nz^n}. \qquad (1.2)$$

البرهان:

- بإدخال المؤثر $\delta_{P_1P_2}^k$ على السلسلة القابلة للقلب $f(p_1)=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A)p_1^nz^n$ فإن الطرف الأيسر للعلاقة (1.2) يكتب على الشكل:

$$\delta_{P_1P_2}^k f(p_1)=\frac{p_1^kf(p_1)-p_2^kf(p_2)}{p_1-p_2}$$

$$=\frac{p_1^k\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A)p_1^nz^n-p_2^k\sum_{n=0}^{\infty}S_n(A)p_2^nz^n}{p_1-p_2}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)\frac{p_1^{k+n}-p_2^{k+n}}{p_1-p_2}z^n$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)S_{n+k-1}(P)z^n.$$

- من جهة أخرى بإدخال المؤثر $\delta_{P_1P_2}^k$ على السلسلة القابلة للقلب $f(p_1)=\dfrac{1}{\prod_{a\in A}(1-ap_1z)}$ فإن الطرف الأيمن للعلاقة (1.2) يكتب على الشكل:

$$\delta^k{}_{p_1p_2} f(p_1)=\delta^k{}_{p_1p_2}\frac{1}{\prod_{a\in A}(1-ap_1z)}$$

$$=\frac{p_1^k\dfrac{1}{\prod_{a\in A}(1-ap_1z)}-p_2^k\dfrac{1}{\prod_{a\in A}(1-ap_2z)}}{p_1-p_2}$$

$$=\frac{p_1^k\prod_{a\in A}(1-ap_2z)-p_2^k\prod_{a\in A}(1-ap_1z)}{(p_1-p_2)\prod_{a\in A}(1-ap_2z)\prod_{a\in A}(1-ap_1z)}$$

$$=\frac{p_1^k\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_2^nz^n\right)-p_2^k\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^nz^n\right)}{(p_1-p_2)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_2^nz^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^np_2^n\left(\dfrac{p_1^{k-n}-p_2^{k-n}}{p_1-p_2}\right)z^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_2^nz^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^np_2^nS_{k-n-1}(p_1+p_2)z^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_2^nz^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{k-1}S_n(-A)p_1^np_2^nS_{k-n-1}(p_1+p_2)z^n+\sum_{n=k+1}^{+\infty}S_n(-A)p_1^np_2^nS_{k-n-1}(p_1+p_2)z^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_2^nz^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{k-1}S_n(-A)p_1^np_2^nS_{k-n-1}(p_1+p_2)z^n+\sum_{n=k+1}^{+\infty}S_n(-A)p_1^kp_2^k\left(\dfrac{p_2^{n-k}-p_1^{n-k}}{p_1-p_2}\right)z^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_2^nz^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{k-1} S_n(-A)p_1^n p_2^n S_{k-n-1}(p_1+p_2)z^n-\sum_{n=k+1}^{+\infty} S_n(-A)p_1^k p_2^k S_{n-k-1}(p_1+p_2)z^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)p_1^n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)p_2^n z^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{k-1} S_n(-A)p_1^n p_2^n S_{k-n-1}(p_1+p_2)z^n-p_1^k p_2^k\sum_{n=k+1}^{+\infty} S_n(-A)S_{n-k-1}(p_1+p_2)z^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)p_1^n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)p_2^n z^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{k-1} S_n(-A)p_1^n p_2^n S_{k-n-1}(p_1+p_2)z^n-p_1^k p_2^k z^{k+1}\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+k+1}(-A)S_n(p_1+p_2)z^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)p_1^n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)p_2^n z^n\right)}.$$

وهو المطلوب .

من النظرية 1.2 وبأخذ الأبجديتين $P=\{p_1,p_2\}$ ، $A=\{1\}$ و $k\in\{0,1\}$ نستنتج الخاصيتين التاليتين:

<u>خاصية 1.2:</u>

لتكن $P=\{p_1,p_2\}$ أبجدية لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(p_1+p_2)z^n=\frac{1}{\prod_{p\in P}(1-pz)}. \qquad (2.2)$$

<u>خاصية 2.2:</u>

لتكن $P=\{p_1,p_2\}$ أبجدية لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(p_1+p_2)z^n=\frac{z}{\prod_{p\in P}(1-pz)}. \qquad (3.2)$$

3.2 الدوال المولدة المرفقة ببعض الأعداد وكثيرات الحدود الشهيرة

1.3.2 الدوال المولدة المرفقة بالأعداد

- فيما يأتي نقوم بتبديل p_2 بـ$[-p_2]$ في العلاقتين (2.2) و (3.2).

<u>أولا:</u> بأخذ $\begin{cases} p_1-p_2=1 \\ p_1p_2=1 \end{cases}$ في العلاقتين (2.2) و(3.2) وضرب العلاقة (2.2) في (i) وجمعها مع العلاقة (3.2) المضروبة في $(1-i)$ نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_n z^n = \frac{i+z(1-i)}{1-z-z^2}. \qquad (1.3)$$

العلاقة (1.3) تمثل الدالة المولدة لأعداد غوصيان فيبوناتشي، ومنه يمكن استنتاج النتيجة التالية:

نتيجة 1.3:

من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا العلاقة التالية:

$$GF_n = iS_n(p_1+[-p_2]) + (1-i)S_{n-1}(p_1+[-p_2]).$$

ثانيا: بأخذ $\begin{cases} p_1 - p_2 = 1 \\ p_1 p_2 = 1 \end{cases}$ في العلاقتين (2.2) و(3.2) وضرب العلاقة (2.2) في $(2-i)$ وجمعها مع العلاقة (3.2) المضروبة في $(3i-1)$ نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_n z^n = \frac{2-i+z(3i-1)}{1-z-z^2}. \qquad (2.3)$$

العلاقة (2.3) تمثل الدالة المولدة لأعداد غوصيان لوكاس، ومنه يمكن استنتاج النتيجة التالية:

نتيجة 2.3:

من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا العلاقة التالية:

$$GL_n = (2-i)S_n(p_1+[-p_2]) + (3i-1)S_{n-1}(p_1+[-p_2])$$

ثالثا: بأخذ $\begin{cases} p_1 - p_2 = 1 \\ p_1 p_2 = 2 \end{cases}$ في العلاقتين (2.2) و(3.2) وضرب العلاقة (2.2) في $\left(\frac{i}{2}\right)$ وجمعها مع العلاقة (3.2) المضروبة في $\left(\frac{2-i}{2}\right)$ نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_n z^n = \frac{i+z(2-i)}{1-2z-4z^2}. \qquad (3.3)$$

العلاقة (3.3) تمثل الدالة المولدة لأعداد غوصيان جاكوبستال، ومنه يمكن استنتاج النتيجة التالية:

نتيجة 3.3:

من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا العلاقة التالية:

$$GJ_n = \frac{i}{2}S_n(p_1+[-p_2]) + \left(\frac{2-i}{2}\right)S_{n-1}(p_1+[-p_2]).$$

رابعا: بأخذ $\begin{cases} p_1 - p_2 = 1 \\ p_1 p_2 = 2 \end{cases}$ في العلاقين(2.2) و (3.2) وضرب العلاقة (2.2) في $\left(2 - \frac{i}{2}\right)$ وجمعها مع العلاقة (3.2) المضروبة في $\left(\frac{5i}{2} - 1\right)$ نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_n z^n = \frac{4 - i + z(5i - 2)}{1 - 2z - 4z^2}. \tag{4.3}$$

العلاقة (4.3) تمثل الدالة المولدة لأعداد غوصيان جاكوبستال لوكاس، ومنه يمكن استنتاج النتيجة التالية:

نتيجة 4.3:

من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا العلاقة التالية:

$$Gj_n = \left(2 - \frac{i}{2}\right) S_n\left(p_1 + [-p_2]\right) + \left(\frac{5i}{2} - 1\right) S_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right).$$

خامسا: بأخذ $\begin{cases} p_1 - p_2 = 2 \\ p_1 p_2 = 1 \end{cases}$ في العلاقتين (2.2) و(3.2) وضرب (2.2) في (i) وجمعها مع (3.2) المضروبة في $(1 - 2i)$ نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_n z^n = \frac{i + z(1 - 2i)}{1 - 2z - z^2}. \tag{5.3}$$

العلاقة (5.3) تمثل الدالة المولدة لأعداد غوصيان بال، ومنه يمكن استنتاج النتيجة التالية:

نتيجة 5.3:

من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا العلاقة التالية:

$$GP_n = iS_n\left(p_1 + [-p_2]\right) + (1 - 2i) S_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right).$$

سادسا: بأخذ $\begin{cases} p_1 - p_2 = 2 \\ p_1 p_2 = 1 \end{cases}$ في العلاقتين (2.2) و(3.2) وضرب العلاقة (2.2) في $(2 - 2i)$ وجمعها مع العلاقة (3.2) المضروبة في $(6i - 2)$ نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_n z^n = \frac{2 - 2i + (6i - 2)z}{2 - 2z - z^2}. \tag{6.3}$$

العلاقة (6.3) تمثل الدالة المولدة لأعداد غوصيان بال لوكاس، ومنه يمكن استنتاج النتيجة التالية:

نتيجة 6.3:

من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا العلاقة التالية:

$$GQ_n = (2-2i)S_n(p_1+[-p_2]) + (6i-2)S_{n-1}(p_1+[-p_2]).$$

2.3.2 الدوال المولدة المرفقة ببعض كثيرات الحدود الشهيرة

- نقوم بتبديل p_2 بـ$[-p_2]$ في العلاقتين (2.2) و (3.2).

أولا: بأخذ $\begin{cases} p_1 - p_2 = 1 \\ p_1 p_2 = 2x \end{cases}$ في العلاقتين (2.2) و(3.2) وضرب العلاقة (2.2) في$\left(\frac{i}{2}\right)$ وجمعها مع العلاقة (3.2) المضروبة في $\left(1-\frac{i}{2}\right)$ نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_n(x) z^n = \frac{i+(2-i)z}{2-2z-4xz^2}. \tag{7.3}$$

العلاقة (7.3) تمثل الدالة المولدة لكثير الحدود غوصيان جاكوبستال حيث:

$$GJ_n(x) = \frac{i}{2}S_n(p_1+[-p_2]) + \left(1-\frac{i}{2}\right)S_{n-1}(p_1+[-p_2]).$$

ثانيا: بأخذ $\begin{cases} p_1 - p_2 = 1 \\ p_1 p_2 = 2x \end{cases}$ في العلاقتين (2.2) و(3.2) وضرب العلاقة (2.2) في $\left(2-\frac{i}{2}\right)$ وجمعها مع العلاقة (3.2) المضروبة في $\left(2ix-1+\frac{i}{2}\right)$ نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_n(x) z^n = \frac{4-i+(4ix+i-2)}{2-2z-4xz^2}. \tag{8.3}$$

العلاقة (8.3) تمثل الدالة المولدة لكثير الحدود غوصيان جاكوبستال لوكاس حيث:

$$Gj_n(x) = \left(2-\frac{i}{2}\right)S_n(p_1+[-p_2]) + \left(2ix-1+\frac{i}{2}\right)S_{n-1}(p_1+[-p_2]).$$

ثالثا: بأخذ $\begin{cases} p_1 - p_2 = 2x \\ p_1 p_2 = 1 \end{cases}$ في العلاقتين (2.2) و(3.2) وضرب العلاقة (2.2) في (i) وجمعها مع العلاقة (3.2) المضروبة في $(1-2ix)$ نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_n(x) z^n = \frac{i+(1-2ix)}{1-2xz-z^2}. \tag{9.3}$$

العلاقة (9.3) تمثل الدالة المولدة لكثير الحدود غوصيان بال حيث:

$$GP_n(x) = iS_n(p_1+[-p_2]) + (1-2ix)S_{n-1}(p_1+[-p_2]).$$

- نقوم بتبديل p_1 بـ $2p_1$ و p_2 بـ$[-2p_2]$ في العلاقتين (2.2) و (3.2).

أولا: بأخذ $\begin{cases} p_1 - p_2 = x \\ 4p_1p_2 = -1 \end{cases}$ في العلاقتين (2.2) و(3.2) وطرح العلاقة (3.2) من العلاقة (2.2) نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} V_n(x) z^n = \frac{1-z}{1-2xz+z^2}. \tag{10.3}$$

العلاقة (10.3) تمثل الدالة المولدة لكثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث حيث:

$$V_n(x) = S_n(2p_1+[-2p_2]) - S_{n-1}(2p_1+[-2p_2]).$$

ثانيا: بأخذ $\begin{cases} p_1 - p_2 = x \\ 4p_1p_2 = -1 \end{cases}$ في العلاقتين (2.2) و(3.2) وجمعهما نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} W_n(x) z^n = \frac{1+z}{1-2xz+z^2}. \tag{11.3}$$

العلاقة (11.3) تمثل الدالة المولدة لكثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع حيث:

$$W_n(x) = S_n(2p_1+[-2p_2]) + S_{n-1}(2p_1+[-2p_2]).$$

من النظرية 1.2 وبأخذ الأبجديتين $P=\{p_1,p_2\}$ ، $A=\{a_1,a_2\}$ و $k\in\{0,1\}$ نستنتج الخاصيتين التاليتين:

خاصية 1.3:

لتكن $P=\{p_1,p_2\}$ و $A=\{a_1,a_2\}$ أبجديتين لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+a_2)S_n(p_1+p_2)z^n = \frac{1-p_1p_2a_1a_2z^2}{\prod_{a\in A}(1-ap_1z)\prod_{a\in A}(1-ap_2z)}. \tag{12.3}$$

نتيجة 1.3:

من العلاقة (12.3) نستنتج العلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1+a_2)S_{n-1}(p_1+p_2)z^n = \frac{z - p_1p_2a_1a_2z^3}{\prod_{a\in A}(1-ap_1z)\prod_{a\in A}(1-ap_2z)}. \qquad (13.3)$$

خاصية 2.3:

لتكن $P=\{p_1,p_2\}$ و $A=\{a_1,a_2\}$ أبجديتين لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+a_2)S_{n-1}(p_1+p_2)z^n = \frac{(a_1+a_2)z-(p_1+p_2)a_1a_2z^2}{\prod_{a\in A}(1-ap_1z)\prod_{a\in A}(1-ap_2z)}. \qquad (14.3)$$

4.2 الدوال المولدة الجديدة لجداءات كثيرات الحدود

1.4.2 الدوال المولدة الجديدة لجداءات كثيرات الحدود الغوصية

- نقوم بتبديل p_2 بـ $[-p_2]$ و a_2 بـ $[-a_2]$ في العلاقات (12.3)، (13.3)، (14.3) وتحت الشروط التالية: $\begin{cases} p_1-p_2=1 \\ p_1p_2=2y \end{cases}$ و $\begin{cases} a_1-a_2=1 \\ a_1a_2=2x \end{cases}$.

نظرية 1.4:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء كثيرات الحدود غوصيان جاكوبستال تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_n(x)GJ_n(y)z^n = \frac{-1+5z+((4i+2)(x+y)+4xy)z^2-4xy(3-4i)z^3}{4-4z-8(x+y+4xy)z^2-16xyz^3+64x^2y^2z^4}. \qquad (1.4)$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_n(x)GJ_n(y)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{i}{2}S_n(a_1+[-a_2])+\left(1-\frac{i}{2}\right)S_{n-1}(a_1+[-a_2])\right]$$
$$\left[\frac{i}{2}S_n(p_1+[-p_2])+\left(1-\frac{i}{2}\right)S_{n-1}(p_1+[-p_2])\right]z^n$$

$$=\left(\frac{i}{2}\right)^2\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$
$$+\frac{i\,(2-i)}{4}\sum_{i=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$
$$+\frac{i\,(2-i)}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$
$$+\left(\frac{2-i}{2}\right)^2\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n.$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_n(x)GJ_n(y)z^n=\frac{-\left(1-4xyz^2\right)+i\,(2-i)\left(z+2xz^2\right)}{4\left(1-z-2(x+y+4xy)z^2-4xyz^3+16x^2y^2z^4\right)}$$
$$+\frac{i\,(2-i)\left(z+2yz^2\right)+(3+4i)\left(z-4xyz^3\right)}{4\left(1-z-2(x+y+4xy)z^2-4xyz^3+16x^2y^2z^4\right)}$$
$$=\frac{-1+5z+\left((4i+2)(x+y)+4xy\right)z^2-4xy\,(3-4i)z^3}{4-4z-8(x+y+4xy)z^2-16xyz^3+64x^2y^2z^4}.$$

و هو المطلوب.

نظرية 2.4:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء كثيرات الحدود غوصيان جاكوبستال لوكاس تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}Gj_n(x)Gj_n(y)z^n=\frac{15-8i+\left(8i\,(x+y)-16xy+8i-11\right)z}{4-4z-8(x+y+4xy)z^2-16xyz^3+64x^2y^2z^4}$$
$$+\frac{\left(2(x+y)(6i-7)+4xy\,(24i-11)\right)z^2}{4-4z-8(x+y+4xy)z^2-16xyz^3+64x^2y^2z^4}$$
$$+\frac{\left(64x^2y^2+\left((16+32i)(x+y)-12\right)xy\right)z^3}{4-4z-8(x+y+4xy)z^2-16xyz^3+64x^2y^2z^4}. \tag{2.4}$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_n(x)Gj_n(y)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(2-\frac{i}{2}\right)S_n\left(a_1+[-a_2]\right)+\left(2ix-1+\frac{i}{2}\right)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right]$$

$$\left[\left(2-\frac{i}{2}\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)+\left(2iy-1+\frac{i}{2}\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\right]z^n$$

$$=\left(\frac{4-i}{2}\right)^2\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$

$$+\frac{(4-i)(4iy-2+i)}{4}\sum_{i=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$

$$+\frac{(4-i)(4ix-2+i)}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$

$$+\frac{(4ix-2+i)(4iy-2+i)}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n.$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_n(x)Gj_n(y)z^n = \frac{(15-8i)\left(1-4xyz^2\right)}{4\left(1-z-2(x+y+4xy)z^2-4xyz^3+16x^2y^2z^4\right)}$$

$$+\frac{\left(4y(4i+1)+6i-7\right)\left(z+2xz^2\right)}{4\left(1-z-2(x+y+4xy)z^2-4xyz^3+16x^2y^2z^4\right)}$$

$$+\frac{\left(4x(4i+1)+6i-7\right)\left(z+2yz^2\right)}{4\left(1-z-2(x+y+4xy)z^2-4xyz^3+16x^2y^2z^4\right)}$$

$$-\frac{\left(16xy+(4+8i)(x+y)+4i-3\right)\left(z-4xyz^3\right)}{4\left(1-z-2(x+y+4xy)z^2-4xyz^3+16x^2y^2z^4\right)}$$

$$=\frac{15-8i}{4-4z-8(x+y+4xy)z^2-16xyz^3+64x^2y^2z^4}$$

$$+\frac{\left(8i(x+y)-16xy+8i-11\right)z}{4-4z-8(x+y+4xy)z^2-16xyz^3+64x^2y^2z^4}$$

$$+\frac{\left(2(x+y)(6i-7)+4xy(24i-11)\right)z^2}{4-4z-8(x+y+4xy)z^2-16xyz^3+64x^2y^2z^4}$$

$$+\frac{\left(64x^2y^2+\left((16+32i)(x+y)-12\right)xy\right)z^3}{4-4z-8(x+y+4xy)z^2-16xyz^3+64x^2y^2z^4}.$$

و هو المطلوب .

- نقوم بتبديل p_2 بـ $[-p_2]$ و a_2 بـ $[-a_2]$ في العلاقات (12.3)، (13.3)، (14.3) و تحت الشروط التالية: $\begin{cases} p_1 - p_2 = 2y \\ p_1p_2 = 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} a_1 - a_2 = 2x \\ a_1a_2 = 1 \end{cases}$.

<u>نظرية 3.4:</u>

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة لجداء كثيرات الحدود غوصيان بال تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_n(x)GP_n(y)z^n = \frac{-1+\left(2x(2y-i)+2iy+1\right)z+\left((x+y)(2i+4x)+1\right)z^2+\left(4x(i+x)-1\right)z^3}{1-4xyz-\left(4\left(x^2+y^2\right)+2\right)z^2-4xyz^3+z^4}. \quad (3.4)$$

البرهان:

لدينا:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} GP_n(x)GP_n(y)z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[iS_n\left(a_1+[-a_2]\right)+(1-2ix)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right] \\ &\quad \left[iS_n\left(p_1+[-p_2]\right)+(1-2ix)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\right]z^n \\ &= (i)^2\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n \\ &\quad + i(1-2ix)\sum_{i=0}^{+\infty} S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n \\ &\quad + i(1-2ix)\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n \\ &\quad + (1-2ix)^2\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n.\end{aligned}$$

إذن:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} GP_n(x)GP_n(y)z^n &= \frac{-\left(1-z^2\right)+(i+2x)\left(2xz+2yz^2\right)}{1-4xyz-\left(4\left(x^2+y^2\right)+2\right)z^2-4xyz^3+z^4} \\ &\quad + \frac{(i+2x)\left(2yz+2xz^2\right)}{1-4xyz-\left(4\left(x^2+y^2\right)+2\right)z^2-4xyz^3+z^4} \\ &\quad + \frac{\left(1-4x^2-4ix\right)\left(z-z^3\right)}{1-4xyz-\left(4\left(x^2+y^2\right)+2\right)z^2-4xyz^3+z^4}\end{aligned}$$

$$=\frac{-1+\left(2x\left(2y-i\right)+2iy+1\right)z}{1-4xyz-\left(4\left(x^{2}+y^{2}\right)+2\right)z^{2}-4xyz^{3}+z^{4}}$$
$$+\frac{\left(\left(x+y\right)\left(2i+4x\right)+1\right)z^{2}+\left(4x\left(i+x\right)-1\right)z^{3}}{1-4xyz-\left(4\left(x^{2}+y^{2}\right)+2\right)z^{2}-4xyz^{3}+z^{4}}.$$

و هو المطلوب.

2.4.2 الدوال المولدة الجديدة لجداءات كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوعين الثالث و الرابع

- نقوم بتبديل a_1 بـ $2a_1$ و a_2 بـ $[-2a_2]$ و p_1 بـ $2p_1$ و p_2 بـ $[-2p_2]$ في العلاقات (12.3)، (13.3)، (14.3) وتحت الشروط التالية: $\begin{cases}a_1-a_2=x\\4a_1a_2=-1\end{cases}$ و $\begin{cases}p_1-p_2=y\\4p_1p_2=-1\end{cases}$.

<u>نظرية 4.4:</u>

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}V_n\left(x\right)V_n\left(y\right)z^{n}=\frac{1+\left(1-2\left(x+y\right)\right)z-\left(1-2\left(x+y\right)-1\right)z^{2}-z^{3}}{4-4xyz-\left(2-4\left(x^{2}+y^{2}\right)\right)z^{2}-4xyz^{3}+z^{4}}. \tag{4.4}$$

البرهان:

لدينا:

$$V_n\left(x\right)=S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)-S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}V_n\left(x\right)V_n\left(y\right)z^{n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)-S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)\right]$$
$$\left[S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)-S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^{n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$
$$-\sum_{i=0}^{+\infty}S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n$$
$$-\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n$$
$$+\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n.$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}V_n(x)V_n(y)z^n=\frac{\left(1-z^2\right)-\left(2xz-2yz^2\right)-\left(2yz-2xz^2\right)+\left(z-z^3\right)}{1-4xyz-\left(2-4\left(x^2+y^2\right)\right)z^2-4xyz^3+z^4}$$
$$=\frac{1+\left(1-2(x+y)\right)z-\left(1-2(x+y)-1\right)z^2-z^3}{4-4xyz-\left(2-4\left(x^2+y^2\right)\right)z^2-4xyz^3+z^4}$$

و هو المطلوب.

نظرية 5.4:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}W_n(x)W_n(y)z^n=\frac{1+\left(1+2(x+y)\right)z-\left(2(x+y)+1\right)z^2-z^3}{1-4xyz-\left(2-4\left(x^2+y^2\right)\right)z^2-4xyz^3+z^4}. \quad (5.4)$$

البرهان:

لدينا:

$$W_n(x)=S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)+S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}W_n(x)W_n(y)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)+S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)\right]$$
$$\left[S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$\begin{aligned}&=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n\\&+\sum_{i=0}^{+\infty}S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n\\&+\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n\\&+\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n.\end{aligned}$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}W_n(x)W_n(y)z^n=\frac{\left(1-z^2\right)+\left(2xz-2yz^2\right)+\left(2yz-2xz^2\right)+\left(z-z^3\right)}{1-4xyz-\left(2-4\left(x^2+y^2\right)\right)z^2-4xyz^3+z^4}.$$

$$=\frac{1+\left(1+2(x+y)\right)z-\left(2(x+y)+1\right)z^2-z^3}{1-4xyz-\left(2-4\left(x^2+y^2\right)\right)z^2-4xyz^3+z^4}.$$

و هو المطلوب .

3.4.2 الدوال المولدة الجديدة لجداءات كثيرات الحدود الغوصية مع كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوعين الثالث و الرابع

- فيما يأتي نقوم بتبديل a_2 بـ $[-a_2]$ و p_1 بـ $[2p_1]$ p_2 بـ $[-2p_2]$ في العلاقات (12.3)، (13.3)، (14.3) وتحت الشروط التالية: $\begin{cases}p_1-p_2=y\\4p_1p_2=-1\end{cases}$ و $\begin{cases}a_1-a_2=1\\a_1a_2=2x\end{cases}$.

نظرية 6.4:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء كثيرات الحدود غوصيان جاكوبستال مع كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث تعطى بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_n(x)V_n(y)z^n\\&=\frac{i+\left(2y(2-i)-2\right)z+\left(2ix(1-2y)+i-2\right)z^2-2x(2-i)z^3}{2-4yz+2\left(4x\left(1-2y^2\right)+1\right)z^2+8xyz^3+8x^2z^4}.\end{aligned}\qquad(6.4)$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_n(x)V_n(y)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{i}{2}S_n(a_1+[-a_2])+\left(1-\frac{i}{2}\right)S_{n-1}(a_1+[-a_2])\right]$$
$$\left[S_n(2p_1+[-2p_2])-S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right]z^n$$
$$=\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(a_1+[-a_2])S_n(p_1+[-p_2])z^n$$
$$-\frac{i}{2}\sum_{i=0}^{+\infty}S_n(a_1+[-a_2])S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])z^n$$
$$+\left(1-\frac{i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}(a_1+[-a_2])S_n(2p_1+[-2p_2])z^n$$
$$-\left(1-\frac{i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}(a_1+[-a_2])S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])z^n.$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_n(x)V_n(y)z^n$$
$$=\frac{i(1+2xz^2)-i(z+4xyz^2)+(2-i)(2yz-z^2)-(2-i)(z+2xz^3)}{2\left(1-2yz-\left(1+4x(1-2y^2)+1\right)z^2+4xyz^3+4x^2z^4\right)}$$
$$=\frac{i+\left(2y(2-i)-2\right)z+\left(2ix(1-2y)+i-2\right)z^2-2x(2-i)z^3}{2-4yz+2\left(4x(1-2y^2)+1\right)z^2+8xyz^3+8x^2z^4}.$$

و هو المطلوب.

<u>نظرية 7.4:</u>

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء كثيرات الحدود غوصيان جاكوبستال مع كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_n(x)W_n(y)z^n$$
$$=\frac{i+\left(2y(2-i)+2\right)z+\left(2ix(1+2y)-2+i\right)z^2+2x(2-i)z^3}{2-4yz+2\left(4x(1-2y^2)+1\right)z^2+8xyz^3+8x^2z^4}. \quad (7.4)$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_n(x)W_n(y)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{i}{2}S_n\left(a_1+[-a_2]\right)+\left(1-\frac{i}{2}\right)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right]$$
$$\left[S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$
$$=\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$
$$+\frac{i}{2}\sum_{i=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n$$
$$+\left(1-\frac{i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n$$
$$+\left(1-\frac{i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n.$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_n(x)W_n(y)z^n = \frac{i\left(1+2xz^2\right)+i\left(z+4xyz^2\right)+(2-i)\left(2yz-z^2\right)+(2-i)\left(z+2xz^3\right)}{2\left(1-2yz-\left(1+4x\left(1-2y^2\right)+1\right)z^2+4xyz^3+4x^2z^4\right)}$$
$$=\frac{i+\left(2y(2-i)+2\right)z+\left(2ix(1+2y)-2+i\right)z^2+2x(2-i)z^3}{2-4yz+2\left(4x\left(1-2y^2\right)+1\right)z^2+8xyz^3+8x^2z^4}.$$

و هو المطلوب.

<u>نظرية 8.4:</u>

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء كثيرات الحدود غوصيان جاكوبستال لوكاس مع كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_n(x)V_n(y)z^n = \frac{4-i+\left(2y(i-2)+4xi(2y-1)-2\right)z}{2-4yz+2\left(4x\left(1-2y^2\right)+1\right)z^2+8xyz^3+8x^2z^4}$$
$$+\frac{\left(4xy(i-4)+2x(4-3i)+2-i\right)z^2+2x(2-i-4ix)z^3}{2-4yz+2\left(4x\left(1-2y^2\right)+1\right)z^2+8xyz^3+8x^2z^4}. \quad (8.4)$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_n(x)V_n(y)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(2-\frac{i}{2}\right)S_n\left(a_1+[-a_2]\right)+\left(2ix-1+\frac{i}{2}\right)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right]$$

$$\left[S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)-S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$=\left(2-\frac{i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$

$$-\left(2-\frac{i}{2}\right)\sum_{i=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n$$

$$+\left(2ix-1+\frac{i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n$$

$$-\left(2ix-1+\frac{i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n.$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_n(x)V_n(y)z^n = \frac{(4-i)\left(1+2xz^2\right)-(4-i)\left(z+4xyz^2\right)}{2\left(1-2yz-\left(1+4x\left(1-2y^2\right)+1\right)z^2+4xyz^3+4x^2z^4\right)}$$

$$+\frac{(4ix-2+i)\left(2yz-z^2\right)-(4ix-2+i)\left(z+2xz^3\right)}{2\left(1-2yz-\left(1+4x\left(1-2y^2\right)+1\right)z^2+4xyz^3+4x^2z^4\right)}$$

$$=\frac{4-i+\left(2y(i-2)+4xi(2y-1)\right)z}{2-4yz+2\left(4x\left(1-2y^2\right)+1\right)z^2+8xyz^3+8x^2z^4}$$

$$+\frac{\left(4xy(i-4)+2x(4-3i)+2-i\right)z^2+2x(2-i-4ix)z^3}{2-4yz+2\left(4x\left(1-2y^2\right)+1\right)z^2+8xyz^3+8x^2z^4}.$$

و هو المطلوب.

نظرية 9.4:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء كثيرات الحدود غوصيان جاكوبستال لوكاس مع كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_n(x)W_n(y)z^n = \frac{4-i+\left(2y(i-2)+4xi(2y+1)-2\right)z}{2-4yz+2\left(4x\left(1-2y^2\right)+1\right)z^2+8xyz^3+8x^2z^4} + \frac{\left(4xy(4-i)+2x(4-3i)+2-i\right)z^2+2x(4ix-2+i)z^3}{2-4yz+2\left(4x\left(1-2y^2\right)+1\right)z^2+8xyz^3+8x^2z^4}. \tag{9.4}$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_n(x)W_n(y)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(2-\frac{i}{2}\right)S_n\left(a_1+[-a_2]\right)+\left(2ix-1+\frac{i}{2}\right)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right]$$
$$\left[S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$
$$=\left(2-\frac{i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$
$$+\left(2-\frac{i}{2}\right)\sum_{i=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n$$
$$+\left(2ix-1+\frac{i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n$$
$$+\left(2ix-1+\frac{i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n.$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_n(x)W_n(y)z^n = \frac{(4-i)\left(1+2xz^2\right)+(4-i)\left(z+4xyz^2\right)}{2\left(1-2yz-\left(1+4x\left(1-2y^2\right)+1\right)z^2+4xyz^3+4x^2z^4\right)}$$
$$+\frac{(4ix-2+i)\left(2yz-z^2\right)+(4ix-2+i)\left(z+2xz^3\right)}{2\left(1-2yz-\left(1+4x\left(1-2y^2\right)+1\right)z^2+4xyz^3+4x^2z^4\right)}$$
$$=\frac{4-i+\left(2y(i-2)+4xi(2y+1)-2\right)z}{2-4yz+2\left(4x\left(1-2y^2\right)+1\right)z^2+8xyz^3+8x^2z^4}$$
$$+\frac{\left(4xy(4-i)+2x(4-3i)+2-i\right)z^2+2x(4ix-2+i)z^3}{2-4yz+2\left(4x\left(1-2y^2\right)+1\right)z^2+8xyz^3+8x^2z^4}.$$

و هو المطلوب.

- فيما يأتي نقوم بتبديل a_2 بـ $[-a_2]$ و p_1 بـ $[2p_1]$ p_2 بـ $[-2p_2]$ في العلاقات (12.3)، (13.3)، (14.3) وتحت الشروط التالية: $\begin{cases} p_1 - p_2 = y \\ 4p_1p_2 = -1 \end{cases}$ و $\begin{cases} a_1 - a_2 = 2x \\ a_1a_2 = 1 \end{cases}$.

نظرية 10.4:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء كثيرات الحدود غوصيان بال مع كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_n(x)V_n(y)z^n = \frac{i+\left(2y\left(1-2ix\right)-1\right)z+\left(2x\left(2ix-1\right)+i\left(1-2y\right)\right)z^2-\left(1-2ix\right)z^3}{1-4xyz-\left(4\left(y^2-x^2\right)-2\right)z^2+4xyz^3+z^4}. \tag{10.4}$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_n(x)V_n(y)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[iS_n\left(a_1+[-a_2]\right)+\left(1-2ix\right)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right]$$
$$\left[S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)-S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$
$$= i\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$
$$-i\sum_{i=0}^{+\infty} S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n$$
$$+\left(1-2ix\right)\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n$$
$$-\left(1-2ix\right)\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n.$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_n(x)V_n(y)z^n$$
$$= \frac{i\left(1+z^2\right)-i\left(2xz+2yz^2\right)+\left(1-2ix\right)\left(2yz-2xz^2\right)-\left(1-2ix\right)\left(z+z^3\right)}{1-4xyz-\left(4\left(y^2-x^2\right)-2\right)z^2+4xyz^3+z^4}$$
$$= \frac{i+\left(2y\left(1-2ix\right)-1\right)z+\left(2x\left(2ix-1\right)+i\left(1-2y\right)\right)z^2-\left(1-2ix\right)z^3}{1-4xyz-\left(4\left(y^2-x^2\right)-2\right)z^2+4xyz^3+z^4}.$$

و هو المطلوب.

نظرية 11.4:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء كثيرات الحدود غوصيان بال مع كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_n(x)W_n(y)z^n = \frac{i+\left(2y(1-2ix)+1\right)z+\left(2x(2ix-1)+i(1+2y)\right)z^2+(1-2ix)z^3}{1-4xyz-\left(4\left(y^2-x^2\right)-2\right)z^2+4xyz^3+z^4}. \quad (11.4)$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_n(x)W_n(y)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[iS_n(a_1+[-a_2])+(1-2ix)S_{n-1}(a_1+[-a_2])\right]$$
$$\left[S_n(2p_1+[-2p_2])+S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right]z^n$$
$$= i\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+[-a_2])S_n(p_1+[-p_2])z^n$$
$$+i\sum_{i=0}^{+\infty} S_n(a_1+[-a_2])S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])z^n$$
$$+(1-2ix)\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1+[-a_2])S_n(2p_1+[-2p_2])z^n$$
$$+(1-2ix)\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1+[-a_2])S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])z^n.$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_n(x)W_n(y)z^n$$
$$= \frac{i\left(1+z^2\right)+i\left(2xz+2yz^2\right)+(1-2ix)\left(2yz-2xz^2\right)+(1-2ix)\left(z+z^3\right)}{1-4xyz-\left(4\left(y^2-x^2\right)-2\right)z^2+4xyz^3+z^4}$$
$$= \frac{i+\left(2y(1-2ix)+1\right)z+\left(2x(2ix-1)+i(1+2y)\right)z^2+(1-2ix)z^3}{1-4xyz-\left(4\left(y^2-x^2\right)-2\right)z^2+4xyz^3+z^4}.$$

و هو المطلوب.

الخاتمة:

وختاما فإننا قمنا من خلال هذا الفصل بإعطاء التوابع التناظرية لبعض الأعداد الغوصية وكثيرات الحدود المتعامدة التي تساعدنا على إستنتاج الدوال المولدة لجداءات الأعداد الغوصية، كما قمنا بحساب الدوال المولدة لجداءات كثيرات الحدود الغوصية وكثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوعين الثالث و الرابع وذلك بإجراء تطبيقات على النظرية 1.2.

المـــــــــــــــراجع:

[1] A. Abderrezzak, Généralisation d'identités de Carlitz, Howard et Lehmer, *Aequationes Math*. **49**, 36-46, 1995.

[2] A. Abderrezzak, Généralisation de la Transformation d'Eler d'une série formelle, *Adv. Math*.**103**, 180-195, 1994.

[3] A. Abderrezzak, quelques formules d'inversion à plusieurs variables, *Eur. J. Comb*. **14**, 507-512, 1993.

[4] M. Asci, E. Gurel, Gaussian Jacobsthal and Gaussian Jacobsthal Lucas polynomials, *Notes Number Theory Discrete Math*.19, 25-36, 2013.

[5] S. Boughaba, A. Boussayoud, Construction of generating function Gaussian-Fibonacci numbers and polynomials, *Online J. Anal. Comb*. (submitted).

[6] A. Boussayoud, S. Boughaba, On some identities and generating functions for k-Pell sequences and Chebyshev polynomials, *Online J. Anal. Comb*. 14 #3, 1-13, 2019.

[7] A. Boussayoud , M. Kerada, R. Sahali, Symmetrizing operations on some orthogonal polynomails, *Int. Electron. J. Pure ApplMath*.**9**, 191-199, 2015.

[8] A. Boussayoud , M. Kerada, Symmetric and generating functions, *Int. Electron. J. Pure Appl Math*.**7**, 195-203, 2014.

[9] A. Boussayoud, M. Kerada, R. Sahali, W. Rouibah, Some applications on generating functions, *J Concr Appl Math*. **12**, 321-330, 2014.

[10] A. Boussayoud, M. Kerada, A. Abderrezzak, A generalization of some orthogonal polynomials, *Springer Proc Math Stat*. **41**, 235-241, 2013.

[11] M.Merca, A generalization of the symmetry between completes and elementar symmetric functions, *Indian. J. Pure Appl. Math*. **45**, 75-89, 2014.

الفصل الثالث

الدوال المولدة لمربع الأعداد الغوصية

في هذا الفصل سنتطرق إلى دراسة تأثير المؤثر $\delta_{a_1a_2}^{k+1}$ على السلسلة القابلة للقلب $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(P) a_1^n z^n$ الذي يسمح لنا بالحصول على الدوال المولدة لمربع الأعداد لكل من غوصيان فيبوناتشي، غوصيان لوكاس، غوصيان جاكوبستال، غوصيان جاكوبستال لوكاس، غوصيان بال و غوصيان بال لوكاس، بالإضافة إلى جداءات الأعداد الغوصية المذكورة سابقا مع كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث و ذلك بإجراء تطبيقات على النظرية 1.1 المقترحة أدناه و هذا في حالة الأبجديتين $A=\{a_1,a_2\}$ و $P=\{p_1,p_2\}$ و التي تمكننا من الحصول على بعض الدوال المولدة الجديدة.

1.3 نتـائج أسـاسية

نظرية 1.1:

لتكن A و P أبجديتين معرفتين على الترتيب بـ: $\{p_1,p_2\},\{a_1,a_2\}$ و k عدد طبيعي لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+k}(a_1+a_2) S_n(p_1+p_2) z^n = \frac{S_k(a_1+a_2)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-P) a_2^n z^n - a_2^{k+1}\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-P) S_{n-1}(A) z^n}{\prod_{p\in P}(1-pa_1z)\prod_{p\in P}(1-pa_2z)}.$$

البرهان:

- بإدخال المؤثر $\delta_{a_1a_2}^{k+1}$ على السلسلة القابلة للقلب $f(a_1z)=\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(P) a_1^n z^n$ الطرف الأيسر للعلاقة السابقة يكتب كما يلي:

$$\delta_{a_1a_2}^{k+1} f(a_1z) = \frac{a_1^{k+1}\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(P) a_1^n z^n - a_2^{k+1}\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(P) a_2^n z^n}{a_1-a_2}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(P) a_1^{n+k+1} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(P) a_2^{n+k+1} z^n}{a_1-a_2}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(P) \frac{a_1^{n+k+1}-a_2^{n+k+1}}{a_1-a_2} z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(P) S_{n+k}(A) z^n.$$

- من جهة أخرى بإدخال المؤثر $\delta_{a_1a_2}^{k+1}$ على السلسلة القابلة للقلب $f(a_1z)=\frac{1}{\prod_{p\in P}(1-pa_1z)}$ الطرف الأيمن للعلاقة السابقة يكتب كما يلي:

$$\delta_{a_1a_2}^{k+1} f(a_1z) = S_k(a_1+a_2) f(a_1z) + a_2^{k+1}\partial_{a_1a_2} f(a_1z).$$

و لدينا:

$$\partial_{a_1a_2} f\left(a_1z\right)=\frac{\dfrac{1}{\prod\limits_{p\in P}\left(1-a_1pz\right)}-\dfrac{1}{\prod\limits_{p\in P}\left(1-a_2pz\right)}}{a_1-a_2}$$

$$=\frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_n\left(-P\right)a_2^n z^n-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_n\left(-P\right)a_1^n z^n}{\left(a_1-a_2\right)\prod\limits_{p\in P}\left(1-pa_1z\right)\prod\limits_{p\in P}\left(1-pa_2z\right)}$$

$$=\frac{-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_n\left(-P\right)S_{n-1}\left(A\right)z^n}{\prod\limits_{p\in P}\left(1-pa_1z\right)\prod\limits_{p\in P}\left(1-pa_2z\right)}.$$

إذن:

$$\delta_{a_1a_2}^{k+1} f\left(a_1z\right)=S_k\left(a_1+a_2\right)\frac{1}{\prod\limits_{p\in p}\left(1-pa_1z\right)}-a_2^{k+1}\frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_n\left(-P\right)S_{n-1}\left(A\right)z^n}{\prod\limits_{p\in P}\left(1-pa_1z\right)\prod\limits_{p\in P}\left(1-pa_2z\right)}$$

$$=\frac{S_k\left(a_1+a_2\right)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_n\left(-P\right)a_2^n z^n-a_2^{k+1}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_n\left(-P\right)S_{n-1}\left(A\right)z^n}{\prod\limits_{p\in P}\left(1-pa_1z\right)\prod\limits_{p\in P}\left(1-pa_2z\right)}.$$

وهو المطلوب.

من النظرية 1.1 وبأخذ الأبجديتين $P=\{p_1,p_2\}$ و $A=\{a_1,a_2\}$ و $k\in\{0,1,2,3\}$ نستنتج الخواص التالية:

خاصية 1.1:[10]

لتكن $P=\{p_1,p_2\}$ و $A=\{a_1,a_2\}$ أبجديتين و n عدد طبيعي لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+a_2\right)S_n\left(p_1+p_2\right)z^n=\frac{1-p_1p_2a_1a_2z^2}{\prod\limits_{p\in P}\left(1-pa_1z\right)\prod\limits_{p\in P}\left(1-pa_2z\right)}. \qquad (1.1)$$

خاصية 2.1:[10]

لتكن $P=\{p_1,p_2\}$ و $A=\{a_1,a_2\}$ أبجديتين و n عدد طبيعي لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+1}(a_1+a_2) S_n(p_1+p_2) z^n = \frac{(a_1+a_2)-(p_1+p_2)a_1a_2z}{\prod_{p\in P}(1-pa_1z)\prod_{p\in P}(1-pa_2z)}. \quad (2.1)$$

نتيجة 1.1:

من العلاقة (2.1) نستنتج العلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+a_2) S_{n-1}(p_1+p_2) z^n = \frac{(a_1+a_2)z-(p_1+p_2)a_1a_2z^2}{\prod_{p\in P}(1-pa_1z)\prod_{p\in P}(1-pa_2z)}. \quad (3.1)$$

خاصية 3.1:

لتكن $P=\{p_1,p_2\}$ و $A=\{a_1,a_2\}$ أبجديتين و n عدد طبيعي لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+2}(a_1+a_2) S_n(p_1+p_2) z^n$$
$$= \frac{(a_1+a_2)^2-a_1a_2-a_1a_2(a_1+a_2)(p_1+p_2)z+p_1p_2(a_1a_2)^2z^2}{\prod_{p\in P}(1-pa_1z)\prod_{p\in P}(1-pa_2z)}. \quad (4.1)$$

خاصية 4.1:

لتكن $P=\{p_1,p_2\}$ و $A=\{a_1,a_2\}$ أبجديتين و n عدد طبيعي لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+3}(a_1+a_2) S_n(p_1+p_2) z^n$$
$$= \frac{(a_1+a_2)^3-2a_1a_2(a_1+a_2)-(p_1+p_2)\left(a_1a_2(a_1+a_2)^2-a_1^2a_2^2\right)z+p_1p_2a_1^2a_2^2(a_1+a_2)z^2}{\prod_{p\in P}(1-pa_1z)\prod_{p\in P}(1-pa_2z)}. \quad (5.1)$$

نتيجة 2.1:

من العلاقة (5.1) نستنتج العلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+2}(a_1+a_2) S_{n-1}(p_1+p_2) z^n$$
$$= \frac{\left((a_1+a_2)^3-2a_1a_2(a_1+a_2)\right)z-(p_1+p_2)\left(a_1a_2(a_1+a_2)^2-a_1^2a_2^2\right)z^2+p_1p_2a_1^2a_2^2(a_1+a_2)z^3}{\prod_{p\in P}(1-pa_1z)\prod_{p\in P}(1-pa_2z)}. \quad (6.1)$$

2.3 تطبيقات على الدوال المولدة

1.2.3 الدوال المولدة الجديدة لمربعات الأعداد الغوصية

- فيما يأتي نقوم بتبديل p_2 بـ $[-p_2]$ و a_2 بـ $[-a_2]$ في العلاقتين (1.1)، (3.1) و تحت الشروط التالية: $\begin{cases} p_1 - p_2 = \gamma \\ p_1 p_2 = \lambda \end{cases}$ و $\begin{cases} a_1 - a_2 = \alpha \\ a_1 a_2 = \beta \end{cases}$، حيث أن $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$.

نظرية 1.2:

الدالة المولدة الجديدة لمربع أعداد غوصيان فيبوناتشي تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_n^2 z^n = \frac{-1+2z+(3+2i)z^2+2iz^3}{1-z-4z^2-z^3+z^4}, n \in \mathbb{N}. \qquad (1.2)$$

البرهان:

لدينا:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} GF_n^2 z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[iS_n(a_1+[-a_2]) + (1-i)S_{n-1}(a_1+[-a_2]) \right] \\
&\left[iS_n(p_1+[-p_2]) + (1-i)S_{n-1}(p_1+[-p_2]) \right] z^n \\
&= i^2 \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+[-a_2]) S_n(p_1+[-p_2]) z^n \\
&+ i(1-i) \sum_{i=0}^{+\infty} S_n(a_1+[-a_2]) S_{n-1}(p_1+[-p_2]) z^n \\
&+ i(1-i) \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1+[-a_2]) S_n(p_1+[-p_2]) z^n \\
&+ (1-i)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1+[-a_2]) S_{n-1}(p_1+[-p_2]) z^n .
\end{aligned}$$

بأخذ $\alpha = \beta = \gamma = \lambda = 1$ نجد:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} GF_n^2 z^n &= \frac{i^2(1-z^2)}{1-z-4z^2-z^3+z^4} + \frac{2i(1-i)(z+z^2)}{1-z-4z^2-z^3+z^4} + \frac{(1-i)^2(z-z^3)}{1-z-4z^2-z^3+z^4} \\
&= \frac{-1+2z+(3+2i)z^2+2iz^3}{1-z-4z^2-z^3+z^4}.
\end{aligned}$$

و هو المطلوب .

نظرية 2.2:

الدالة المولدة الجديدة لمربع أعداد غوصيان لوكاس تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_n^2 z^n = \frac{3-4i+(8i-6)z+(18i-1)z^2+(8+6i)z^3}{1-z-4z^2-z^3+z^4}, n \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_n^2 z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(2-i)S_n(a_1+[-a_2])+(3i-1)S_{n-1}(a_1+[-a_2])\right]$$
$$\left[(2-i)S_n(p_1+[-p_2])+(3i-1)S_{n-1}(p_1+[-p_2])\right]z^n$$
$$=(2-i)^2\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+[-a_2])S_n(p_1+[-p_2])z^n$$
$$+(2-i)(3i-1)\sum_{i=0}^{+\infty} S_n(a_1+[-a_2])S_{n-1}(p_1+[-p_2])z^n$$
$$+(2-i)(3i-1)\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1+[-a_2])S_n(p_1+[-p_2])z^n$$
$$+(3i-1)^2\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1+[-a_2])S_{n-1}(p_1+[-p_2])z^n.$$

بأخذ $\alpha=\beta=\gamma=\lambda=1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_n^2 z^n = \frac{(2-i)^2(1-z^2)}{1-z-4z^2-z^3+z^4}+\frac{2(2-i)(3i-1)(z+z^2)}{1-z-4z^2-z^3+z^4}+\frac{(3i-1)^2(z-z^3)}{1-z-4z^2-z^3+z^4}$$
$$=\frac{3-4i+(8i-6)z+(18i-1)z^2+(8+6i)z^3}{1-z-4z^2-z^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 3.2:

الدالة المولدة الجديدة لمربع أعداد غوصيان جاكوبستال تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_n^2 z^n = \frac{-1+5z+8(i+1)z^2+4(4i-3)z^3}{4-4z-48z^2-16z^3+64z^4}, n \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_n^2 z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{i}{2}S_n\left(a_1+[-a_2]\right)+\frac{2-i}{2}S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right]$$

$$\left[\frac{i}{2}S_n\left(p_1+[-p_2]\right)+\frac{2-i}{2}S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\right]z^n$$

$$=\left(\frac{i}{2}\right)^2\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$

$$+\frac{i}{2}\left(\frac{2-i}{2}\right)\sum_{i=0}^{+\infty} S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$

$$+\frac{i}{2}\left(\frac{2-i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$

$$+\left(\frac{2-i}{2}\right)^2\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n.$$

بأخذ $\alpha=\gamma=1$ و $\beta=\lambda=2$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_n^2 z^n = -\frac{1-4z^2}{4\left(1-z-12z^2-4z^3+16z^4\right)}+\frac{2\left(2i+1\right)\left(z+2z^2\right)}{4\left(1-z-12z^2-4z^3+16z^4\right)}+\frac{\left(3-4i\right)\left(z-4z^3\right)}{4\left(1-z-12z^2-4z^3+16z^4\right)}$$

$$=\frac{-1+5z+8\left(i+1\right)z^2+4\left(4i-3\right)z^3}{4-4z-48z^2-16z^3+64z^4}.$$

وهو المطلوب.

<u>نظرية 4.2:</u>

الدالة المولدة الجديدة لمربع أعداد غوصيان جاكوبستال لوكاس تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_n^2 z^n = \frac{15-8i+\left(24i-27\right)z+\left(120i-72\right)z^2+\left(80i+84\right)z^3}{4-4z-48z^2-16z^3+64z^4}, n\in\mathbb{N}. \quad (4.2)$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_n^2 z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(2-\frac{i}{2}\right)S_n\left(a_1+[-a_2]\right)+\left(\frac{5i}{2}-1\right)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right]$$

$$\left[\left(2-\frac{i}{2}\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)+\left(\frac{5i}{2}-1\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\right]z^n$$

$$=\left(2-\frac{i}{2}\right)^2\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$
$$+\left(2-\frac{i}{2}\right)\left(\frac{5i}{2}-1\right)\sum_{i=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$
$$+\left(2-\frac{i}{2}\right)\left(\frac{5i}{2}-1\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$
$$+\left(\frac{5i}{2}-1\right)^2\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n.$$

بأخذ $\alpha=\gamma=1$ و $\beta=\lambda=2$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}Gj_n^2z^n=\frac{(15-8i)(1-4z^2)}{4(1-z-12z^2-4z^3+16z^4)}+\frac{2(22i-3)(z+2z^2)}{4(1-z-12z^2-4z^3+16z^4)}-\frac{(21+20i)(z-4z^3)}{4(1-z-12z^2-4z^3+16z^4)}$$
$$=\frac{15-8i+(24i-27)z+(120i-72)z^2+(80i+84)z^3}{4-4z-48z^2-16z^3+64z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 5.2:

الدالة المولدة الجديدة لمربع أعداد غوصيان بال تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GP_n^2z^n=\frac{-1+5z+(9+4i)z^2-(3+4i)z^3}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4},n\in\mathbb{N}. \quad (5.2)$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GP_n^2z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[iS_n\left(a_1+[-a_2]\right)+(1-2i)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right]$$
$$\left[iS_n\left(p_1+[-p_2]\right)+(1-2i)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\right]z^n$$
$$=i^2\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$
$$+i(1-2i)\sum_{i=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$
$$+i(1-2i)\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$
$$+(1-2i)^2\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n.$$

بأخذ $\alpha=\gamma=2$ و $\beta=\lambda=1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GP_n^2z^n=\frac{i^2\left(1-z^2\right)}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}+\frac{2i\left(1-2i\right)\left(2z+2z^2\right)}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}+\frac{\left(1-2i\right)^2\left(z-z^3\right)}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}$$

$$=\frac{-1+5z+\left(9+4i\right)z^2-\left(3+4i\right)z^3}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}.$$

و هو المطلوب .

نظرية 6.2:

الدالة المولدة الجديدة لمربع أعداد غوصيان بال لوكاس تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GQ_n^2z^n=\frac{-8i+40iz+\left(32+64i\right)z^2-\left(32+24i\right)z^3}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4},n\in\mathbb{N}. \tag{6.2}$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GQ_n^2z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[\left(2-2i\right)S_n\left(a_1+[-a_2]\right)+\left(6i-2\right)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)\Big]$$

$$\Big[\left(2-2i\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)+\left(6i-2\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\Big]z^n$$

$$=\left(2-2i\right)^2\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$

$$+\left(2-2i\right)\left(6i-2\right)\sum_{i=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$

$$+\left(2-2i\right)\left(6i-2\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$

$$+\left(6i-2\right)^2\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n.$$

بأخذ $\alpha=\gamma=2$ و $\beta=\lambda=1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GQ_n^2z^n=\frac{\left(2-2i\right)^2\left(1-z^2\right)}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}+\frac{2\left(2-2i\right)\left(6i-2\right)\left(2z+2z^2\right)}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}+\frac{\left(6i-2\right)^2\left(z-z^3\right)}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}$$

$$=\frac{-8i+40iz+\left(32+64i\right)z^2-\left(32+24i\right)z^3}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}.$$

و هو المطلوب .

2.2.3 الدوال المولدة الجديدة لجداءات الأعداد الغوصية مع كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث

- نقوم بتبديل a_2 بـ $\left[-a_2\right]$ و p_1 بـ $2p_1$ و p_2 بـ $\left[-2p_2\right]$ في العلاقات (1.1)، (2.1)، (3.1)، (4.1)، (6.1) و تحت الشروط التالية: $\begin{cases} a_1 - a_2 = \alpha \\ a_1 a_2 = \beta \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1 - p_2 = x \\ 4p_1 p_2 = -1 \end{cases}$ حيث $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

<u>نظرية 7.2:</u>

الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان فيبوناتشي مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_n V_n(x) z^n = \frac{i + \left(2x(1-i) - 1\right)z + \left(2i(1-x) - 1\right)z^2 + (i-1)z^3}{1 - 2xz - \left(4x^2 - 3\right)z^2 + 2xz^3 + z^4}, n \in \mathbb{N}. \tag{7.2}$$

البرهان:

نعلم أن:

$$GF_n = iS_n\left(a_1 + \left[-a_2\right]\right) + (1-i)S_{n-1}\left(a_1 + \left[-a_2\right]\right).$$

$$\wedge$$

$$V_n(x) = S_n\left(2p_1 + \left[-2p_2\right]\right) - S_{n-1}\left(2p_1 + \left[-2p_2\right]\right).$$

إذن:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} GF_n V_n(x) z^n = &\sum_{n=0}^{+\infty} \left[iS_n\left(a_1 + \left[-a_2\right]\right) + (1-i)S_{n-1}\left(a_1 + \left[-a_2\right]\right)\right] \\
&\left[S_n\left(2p_1 + \left[-2p_2\right]\right) + S_{n-1}\left(2p_1 + \left[-2p_2\right]\right)\right] z^n \\
= &\, i\sum_{n=0}^{+\infty} \left[S_n\left(a_1 + \left[-a_2\right]\right) S_n\left(2p_1 + \left[-2p_2\right]\right)\right] z^n \\
&- i\sum_{n=0}^{+\infty} \left[S_n\left(a_1 + \left[-a_2\right]\right) S_{n-1}\left(2p_1 + \left[-2p_2\right]\right)\right] z^n \\
&+ (1-i)\sum_{n=0}^{+\infty} \left[S_{n-1}\left(a_1 + \left[-a_2\right]\right) S_n\left(2p_1 + \left[-2p_2\right]\right)\right] z^n \\
&- (1-i)\sum_{n=0}^{+\infty} \left[S_{n-1}\left(a_1 + \left[-a_2\right]\right) S_{n-1}\left(2p_1 + \left[-2p_2\right]\right)\right] z^n.
\end{aligned}$$

بأخذ $\alpha=\beta=1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_n V_n(x) z^n = \frac{i\left(1+z^2\right)-i\left(z+2xz^2\right)+(1-i)\left(2xz-z^2\right)-(1-i)\left(z+z^3\right)}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4}$$
$$=\frac{i+\left(2x(1-i)-1\right)z+\left(2i(1-x)-1\right)z^2+(i-1)z^3}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 8.2:

الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان لوكاس مع كثيرالحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_n V_n(x) z^n = \frac{2-i+\left(2x(3i-1)-(2i+1)\right)z+\left(2x(i-2)+3-4i\right)z^2+(1-3i)z^3}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4}, n\in\mathbb{N}. \quad (8.2)$$

البرهان:

نعلم أن:

$$GL_n=(2-i)S_n\left(a_1+[-a_2]\right)+(3i-1)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right).$$
$$\wedge$$
$$V_n(x)=S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)-S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right).$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_n V_n(x) z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(2-i)S_n\left(a_1+[-a_2]\right)+(3i-1)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right]$$
$$\left[S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)-S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$
$$=(2-i)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$
$$-(2-i)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$
$$+(3i-1)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$
$$-(3i-1)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n.$$

بأخذ $\alpha=\beta=1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_n V_n(x) z^n = \frac{(2-i)(1+z^2)-(2-i)(z+2xz^2)+(3i-1)(2xz-z^2)-(3i-1)(z+z^3)}{1-2xz-(4x^2-3)z^2+2xz^3+z^4}$$

$$= \frac{2-i+(2x(3i-1)-(2i+1))z+(2x(i-2)+3-4i)z^2+(1-3i)z^3}{1-2xz-(4x^2-3)z^2+2xz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 9.2:

الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان جاكوبستال مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_n V_n(x) z^n = \frac{i+(2x(2-i)-2)z+(i(3-4x)-2)z^2+(2i-4)z^3}{2-4xz-2(8x^2-5)z^2+8xz^3+8z^4}, n\in\mathbb{N}. \qquad (9.2)$$

البرهان:

نعلم أن:

$$GJ_n = \frac{i}{2}S_n(a_1+[-a_2])+\frac{2-i}{2}S_{n-1}(a_1+[-a_2]).$$

$$\wedge$$

$$V_n(x) = S_n(2p_1+[-2p_2])-S_{n-1}(2p_1+[-2p_2]).$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_n V_n(x) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{i}{2}S_n(a_1+[-a_2])+\frac{2-i}{2}S_{n-1}(a_1+[-a_2])\right]$$

$$\left[S_n(2p_1+[-2p_2])-S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right]z^n$$

$$=\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_n(a_1+[-a_2])S_n(2p_1+[-2p_2])\right]z^n$$

$$-\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_n(a_1+[-a_2])S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right]z^n$$

$$+\frac{2-i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n-1}(a_1+[-a_2])S_n(2p_1+[-2p_2])\right]z^n$$

$$-\frac{2-i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n-1}(a_1+[-a_2])S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right]z^n.$$

بأخذ $\alpha=1$ و $\beta=2$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_nV_n(x)z^n=\frac{i\left(1+2z^2\right)-i\left(z+4xz^2\right)+\left(2-i\right)\left(2xz-z^2\right)-\left(2-i\right)\left(z+2z^3\right)}{2\left(1-2xz-\left(8x^2-5\right)z^2+4xz^3+4z^4\right)}$$

$$=\frac{i+\left(2x\left(2-i\right)-2\right)z+\left(i\left(3-4x\right)-2\right)z^2+\left(2i-4\right)z^3}{2-4xz-2\left(8x^2-5\right)z^2+8xz^3+8z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 10.2:

الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان جاكوبستال لوكاس مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_nV_n(x)z^n =\frac{4-i+\left(2x\left(5i-2\right)-4i-2\right)z+\left(4x\left(i-4\right)-7i+10\right)z^2-\left(10i-4\right)z^3}{2-4xz-2\left(8x^2-5\right)z^2+8xz^3+8z^4},n\in\mathbb{N}. \tag{10.2}$$

البرهان:

نعلم أن:

$$Gj_n=\left(2-\frac{i}{2}\right)S_n\left(a_1+[-a_2]\right)+\left(\frac{5i}{2}-1\right)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right).$$

$$\wedge$$

$$V_n(x)=S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)-S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right).$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_nV_n(x)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(1-\frac{i}{2}\right)S_n\left(a_1+[-a_2]\right)+\left(\frac{5i}{2}-1\right)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right]$$

$$\left[S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)-S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$=\left(1-\frac{i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$
$$-\left(1-\frac{i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$
$$+\left(\frac{5i}{2}-1\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$
$$-\left(\frac{5i}{2}-1\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n.$$

بأخذ $\alpha=1$ و $\beta=2$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}Gj_nV_n(x)z^n=\frac{(4-i)\left(1+2z^2\right)-(4-i)\left(z+4xz^2\right)+(5i-2)\left(2xz-z^2\right)-(5i-2)\left(z+2z^3\right)}{2\left(1-2xz-\left(8x^2-5\right)z^2+4xz^3+4z^4\right)}$$
$$=\frac{4-i+\left(2x(5i-2)-4i-2\right)z+\left(4x(i-4)-7i+10\right)z^2-(10i-4)z^3}{2-4xz-2\left(8x^2-5\right)z^2+8xz^3+8z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 11.2:

الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان بال مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GP_nV_n(x)z^n=\frac{i+\left(2x(1-2i)-1\right)z+\left(i(5-2x)-2\right)z^2-(1-2i)z^3}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+4xz^3+z^4}. \qquad (11.2)$$

البرهان:

نعلم أن:

$$GP_n=iS_n\left(a_1+[-a_2]\right)+(1-2i)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right).$$
$$\wedge$$
$$V_n(x)=S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)-S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right).$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GP_nV_n(x)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[iS_n\left(a_1+[-a_2]\right)+(1-2i)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right]$$
$$\left[S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)-S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$=i\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$
$$-i\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$
$$+(1-2i)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$
$$-(1-2i)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n.$$

بأخذ $\alpha=2$ و $\beta=1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GP_nV_n(x)z^n=\frac{i\left(1+z^2\right)-i\left(2z+2xz^2\right)+(1-2i)\left(2xz-z^2\right)-(1-2i)\left(z+z^3\right)}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+2xz^3+z^4}$$
$$=\frac{i+\left(2x(1-2i)-1\right)z+\left(i(5-2x)-2\right)z^2-(1-2i)z^3}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+2xz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

<u>نظرية 12.2:</u>

الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان بال لوكاس مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GQ_nV_n(x)z^n$$
$$=\frac{2-2i+\left(4x(3i-1)-2-2i\right)z+\left(4x(i-1)-14i+6\right)z^2-(6i-2)z^3}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+4xz^3+z^4},n\in\mathbb{N}. \qquad (12.2)$$

البرهان:

نعلم أن:

$$GQ_n=(2-2i)S_n\left(a_1+[-a_2]\right)+(6i-2)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right).$$
$$\wedge$$
$$V_n(x)=S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)-S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right).$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GQ_nV_n(x)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(2-i)S_n\left(a_1+[-a_2]\right)+(6i-2)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right]$$
$$\left[S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)-S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$
\begin{aligned}
&=(2-i)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n\\
&-(2-i)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n\\
&+(6i-2)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n\\
&-(6i-2)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n.
\end{aligned}
$$

بأخذ $\alpha=2$ و $\beta=1$ نجد:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}GQ_nV_n(x)z^n&=\frac{(2-2i)\left(1+z^2\right)-(2-2i)\left(2z+2xz^2\right)}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+2xz^3+z^4}\\
&+\frac{(6i-2)\left(2xz-z^2\right)-(6i-2)\left(z+z^3\right)}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+2xz^3+z^4}\\
&=\frac{2-2i+\left(4x(3i-1)-2-2i\right)z}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+2xz^3+z^4}\\
&+\frac{\left(4x(i-1)-14i+6\right)z^2-(6i-2)z^3}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+2xz^3+z^4}.
\end{aligned}
$$

وهو المطلوب.

<u>نظرية 13.2:</u>

الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان فيبوناتشي مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث بدليلين غير متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$
\sum_{n=0}^{+\infty}GF_{n+2}V_n(x)z^n=\frac{i+1+\left(2(x-1)-i\right)z+\left(i-2x(i+1)\right)z^2-z^3}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4},n\in\mathbb{N}. \tag{13.2}
$$

البرهان:

نعلم أن:

$$
\begin{gathered}
GF_{n+2}=iS_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)+(1-i)S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right).\\
\wedge\\
V_n(x)=S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)-S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right).
\end{gathered}
$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+2} V_n(x) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[iS_{n+2}(a_1+[-a_2]) + (1-i) S_{n+1}(a_1+[-a_2]) \right]$$

$$\left[S_n(2p_1+[-2p_2]) - S_{n-1}(2p_1+[-2p_2]) \right] z^n$$

$$= i\sum_{n=0}^{+\infty} \left[S_{n+2}(a_1+[-a_2]) S_n(2p_1+[-2p_2]) \right] z^n$$

$$-i\sum_{n=0}^{+\infty} \left[S_{n+2}(a_1+[-a_2]) S_{n-1}(2p_1+[-2p_2]) \right] z^n$$

$$+(1-i)\sum_{n=0}^{+\infty} \left[S_{n+1}(a_1+[-a_2]) S_n(2p_1+[-2p_2]) \right] z^n$$

$$-(1-i)\sum_{n=0}^{+\infty} \left[S_{n+1}(a_1+[-a_2]) S_{n-1}(2p_1+[-2p_2]) \right] z^n.$$

بأخذ $\alpha = \beta = 1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+2} V_n(x) z^n = \frac{i(2+2xz+z^2) - i(3z+4xz^2+z^3)}{1-2xz-(4x^2-3)z^2+2xz^3+z^4}$$

$$+\frac{(1-i)(1+2xz) - (1-i)(2z+2xz^2+z^3)}{1-2xz-(4x^2-3)z^2+2xz^3+z^4}$$

$$= \frac{i+1+(2(x-1)-i)z + (i-2x(i+1))z^2 - z^3}{1-2xz-(4x^2-3)z^2+2xz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

<u>نظرية 14.2:</u>

الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان فيبوناتشي مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث بدليلين متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+1} V_n(x) z^n = \frac{1+(i(2x-1)-1)z + (1-i-2x)z^2 - iz^3}{1-2xz-(4x^2-3)z^2+2xz^3+z^4}, n \in \mathbb{N}. \qquad (14.2)$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+2} V_n(x) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (GF_{n+1} + GF_n) V_n(x) z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+1}V_n(x)z^n+\sum_{n=0}^{+\infty} GF_nV_n(x)z^n.$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+1}V_n(x)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+2}V_n(x)z^n-\sum_{n=0}^{+\infty} GF_nV_n(x)z^n$$

إذن من العلاقتين (7.2) و (13.2) نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+1}V_n(x)z^n=\frac{1+(i(2x-1)-1)z+(1-i-2x)z^2-iz^3}{1-2xz-(4x^2-3)z^2+2xz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 15.2:

الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان لوكاس مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث بدليلين غير متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+2}V_n(x)z^n=\frac{3+i+(2x(1+2i)-(3i+4))z+(2-i-2x(i+3))z^2-(2i+1)z^3}{1-2xz-(4x^2-3)z^2+2xz^3+z^4},n\in\mathbb{N}. \quad (15.2)$$

البرهان:

نعلم أن:

$$GL_{n+2}=(2-i)S_{n+2}(a_1+[-a_2])+(3i-1)S_{n+1}(a_1+[-a_2]).$$

$$\wedge$$

$$V_n(x)=S_n(2p_1+[-2p_2])-S_{n-1}(2p_1+[-2p_2]).$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+2}V_n(x)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(2-i)S_{n+2}(a_1+[-a_2])+(3i-1)S_{n+1}(a_1+[-a_2])\right]$$

$$\left[S_n(2p_1+[-2p_2])-S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right]z^n$$

$$=(2-i)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$
$$-(2-i)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$
$$+(3i-1)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$
$$-(3i-1)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n.$$

بأخذ $\alpha=\beta=1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GL_{n+2}V_n(x)z^n=\frac{(2-i)\left(2+2xz+z^2\right)-(2-i)\left(3z+4xz^2+z^3\right)}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4}$$
$$+\frac{(3i-1)(1+2xz)-(3i-1)\left(2z+2xz^2+z^3\right)}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4}$$
$$=\frac{(3+i)+\left(2x(1+2i)-(3i+4)\right)z}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4}$$
$$+\frac{\left(2-i-2x(i+3)\right)z^2-(2i+1)z^3}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 16.2:

الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان لوكاس مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث بدليلين متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GL_{n+1}V_n(x)z^n=\frac{1+2i+\left(2x(2-i)-3-i\right)z+\left(3i-1-2x(2i+1)\right)z^2+(i-2)z^3}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4},n\in\mathbb{N}. \quad (16.2)$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GL_{n+2}V_n(x)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(GL_{n+1}+GL_n\right)V_n(x)z^n$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}GL_{n+1}V_n(x)z^n+\sum_{n=0}^{+\infty}GL_nV_n(x)z^n.$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+1}V_n(x)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+2}V_n(x)z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} GL_nV_n(x)z^n.$$

إذن من العلاقتين (8.2) و (15.2) نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+1}V_n(x)z^n = \frac{1+2i+\left(2x(2-i)-3-i\right)z+\left(3i-1-2x(2i+1)\right)z^2+(i-2)z^3}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 17.2:

الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان جاكوبستال مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث بدليلين غير متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_{n+2}V_n(x)z^n = \frac{2i+2+\left(2x(4-i)-(2i+6)\right)z+\left(4i-4x(1+2i)\right)z^2-8z^3}{2-4xz-2\left(8x^2-5\right)z^2+8xz^3+8z^4}, n\in\mathbb{N}. \quad (17.2)$$

البرهان:

نعلم أن:

$$GJ_{n+2} = \frac{i}{2}S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)+\left(1-\frac{i}{2}\right)S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right).$$

$$\wedge$$

$$V_n(x) = S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)-S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right).$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_{n+2}V_n(x)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{i}{2}S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)+\left(1-\frac{i}{2}\right)S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right]$$

$$\left[S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)-S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$=\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$-\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$+\left(1-\frac{i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$-\left(1-\frac{i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n.$$

بأخذ $\alpha=1$ و $\beta=2$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_{n+2}V_n(x)z^n = \frac{i\left(3+2xz+4z^2\right)-i\left(5z+10xz^2+4z^3\right)}{4\left(1-2xz-\left(8x^2-5\right)z^2+4xz^3+4z^4\right)}$$

$$+\frac{(2-i)(1+4xz)-(2-i)\left(3z+2xz^2+4z^3\right)}{2-4xz-2\left(8x^2-5\right)z^2+8xz^3+8z^4}$$

$$=\frac{2i+2+\left(2x(4-i)-(2i+6)\right)z+\left(4i-4x(1+2i)\right)z^2-8z^3}{2-4xz-2\left(8x^2-5\right)z^2+8xz^3+8z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 18.2:

الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان جاكوبستال مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث بدليلين متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_{n+1}V_n(x)z^n = \frac{2+\left(2i(1-x)-2\right)z+\left(4(1-x)-2i\right)z^2-4iz^3}{2-4xz-2\left(8x^2-5\right)z^2+8xz^3+8z^4}, n\in\mathbb{N}. \quad (18.2)$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_{n+2}V_n(x)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(GJ_{n+1}+2GJ_n\right)V_n(x)z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_{n+1}V_n(x)z^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_nV_n(x)z^n.$$

و منه:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_{n+1}V_n(x)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} GJ_{n+2}V_n(x)z^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_nV_n(x)z^n.$$

إذن من العلاقتين (9.2) و (17.2) نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_{n+1}V_n(x)z^n = \frac{2+\left(2i(1-x)-2\right)z+\left(4(1-x)-2i\right)z^2-4iz^3}{2-4xz-2\left(8x^2-5\right)z^2+8xz^3+8z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 19.2:

الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان جاكوبستال لوكاس مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث بدليلين غير متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_{n+2} V_n(x) z^n = \frac{10+2i+\left(2i(9x-5)-14\right)z+\left(16-36x-4i\right)z^2-\left(8+16i\right)z^3}{2-4xz-2\left(8x^2-5\right)z^2+8xz^3+8z^4}, n \in \mathbb{N}. \quad (19.2)$$

البرهان:

نعلم أن:

$$Gj_{n+2} = \left(2-\frac{i}{2}\right)S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)+\left(\frac{5}{2}i-1\right)S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right).$$

$$\wedge$$

$$V_n(x) = S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)-S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right).$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_{n+2} V_n(x) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(2-\frac{i}{2}\right)S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)+\left(\frac{5}{2}i-1\right)S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right]$$

$$\left[S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)-S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$\begin{aligned}
&= \left(2-\frac{i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n \\
&-\left(2-\frac{i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n \\
&+\left(\frac{5}{2}i-1\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n \\
&-\left(\frac{5}{2}i-1\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n.
\end{aligned}$$

بأخذ $\alpha=1$ و $\beta=1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_{n+2} V_n(x) z^n = \frac{(4-i)\left(3+2xz+4z^2\right)-(4-i)\left(5z+10xz^2+4z^3\right)}{2\left(1-2xz-\left(8x^2-5\right)z^2+4xz^3+4z^4\right)}$$

$$+\frac{(5i-2)+(1+4xz)-(5i-2)\left(3z+2xz^2+4z^3\right)}{2\left(1-2xz-\left(8x^2-5\right)z^2+4xz^3+4z^4\right)}$$

$$=\frac{10+2i+\left(2i\left(9x-5\right)-14\right)z+\left(16-36x-4i\right)z^{2}-\left(8+16i\right)z^{3}}{2-4xz-2\left(8x^{2}-5\right)z^{2}+8xz^{3}+8z^{4}}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 20.2:

الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان جاكوبستال لوكاس مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث بدليلين متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}Gj_{n+1}V_{n}\left(x\right)z^{n}=\frac{1+2i-\left(5-x\left(4-i\right)+9i\right)z-\left(2-5i+x\left(2+4i\right)\right)z^{2}+\left(2i-8\right)z^{3}}{2-4xz-2\left(8x^{2}-5\right)z^{2}+8xz^{3}+8z^{4}},n\in\mathbb{N}. \quad (20.2)$$

البرهان:

لدينا:

$$Gj_{n+2}=Gj_{n+1}+2Gj_{n}$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}Gj_{n+2}V_{n}\left(x\right)z^{n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(Gj_{n+1}+2Gj_{n}\right)V_{n}\left(x\right)z^{n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}Gj_{n+1}V\left(x\right)_{n}z^{n}+2\sum_{n=0}^{+\infty}Gj_{n}V_{n}\left(x\right)z^{n}$$

إذن من العلاقتين (10.2) و (19.2) نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}Gj_{n+1}V_{n}\left(x\right)z^{n}=\sum_{n=0}^{+\infty}Gj_{n+2}V_{n}\left(x\right)z^{n}-2\sum_{n=0}^{+\infty}Gj_{n}V_{n}\left(x\right)z^{n}.$$

بأخذ $\alpha=1$ و $\beta=2$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}Gj_{n+1}V_{n}\left(x\right)z^{n}=\frac{1+2i-\left(5-x\left(4-i\right)+9i\right)z-\left(2-5i+x\left(2+4i\right)\right)z^{2}+\left(2i-8\right)z^{3}}{2-4xz-2\left(8x^{2}-5\right)z^{2}+8xz^{3}+8z^{4}}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 21.2:

الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان بال مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث بدليلين غير متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+2} V_n(x) z^n = \frac{2+i+\left(2x(1-i)-2i-5\right)z+\left(i-2x(2+i)\right)z^2-z^3}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+4xz^3+z^4}, n \in \mathbb{N}. \quad (21.2)$$

البرهان:

نعلم أن:

$$GP_{n+2} = iS_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)+(1-2i)S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right).$$

$$\wedge$$

$$V_n(x) = S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)-S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right).$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+2} V_n(x) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[iS_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)+(1-2i)S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right]$$

$$\left[S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)-S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$= i\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$-i\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$+(1-2i)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$-(1-2i)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n.$$

بأخذ $\alpha = 2$ و $\beta = 1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+2} V_n(x) z^n = \frac{i\left(5+2xz+z^2\right)-i\left(12z+10xz^2+2z^3\right)}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+2xz^3+z^4}$$

$$+\frac{(1-2i)(2+2xz)-(1-2i)\left(5z+4xz^2+z^3\right)}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+4xz^3+z^4}$$

$$= \frac{2+i+\left(2x(1-i)-2i-5\right)z+\left(i-2x(2+i)\right)z^2-z^3}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+4xz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

<u>نظرية 22.2:</u>

الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان بال مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث بدليلين متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+1}V_n(x)z^n = \frac{1+(i(x-1)-2)z+(1-2x-2i)z^2-iz^3}{1-4xz-(4x^2-6)z^2+4xz^3+z^4}, n \in \mathbb{N}. \quad (22.2)$$

البرهان:

لدينا:

$$GP_{n+2} = 2GP_{n+1} + GP_n$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+2}V_n(x)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (2GP_{n+1} + GP_n)V_n(x)z^n$$

$$= 2\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+1}V(x)_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} GP_nV_n(x)z^n$$

إذن من العلاقتين (11.2) و (21.2) نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+1}V_n(x)z^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+2}V_n(x)z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} GP_nV_n(x)z^n\right)$$

بأخذ $\alpha = 2$ و $\beta = 1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+1}V_n(x)z^n = \frac{1+(i(x-1)-2)z+(1-2i-2x)z^2-iz^3}{1-4xz-(4x^2-6)z^2+4xz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 23.2:

الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان بال لوكاس مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث بدليلين غير متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+2}V_n(x)z^n = \frac{2i+6+(2i(4x-3)-14)z+(2-2i-4x(i+3))z^2-2(i+1)z^3}{1-4xz-(4x^2-6)z^2+4xz^3+z^4}, n \in \mathbb{N}. \quad (23.2)$$

البرهان:

نعلم أن:

$$GQ_{n+2} = (2-2i)S_{n+2}(a_1+[-a_2]) + (6i-2)S_{n+1}(a_1+[-a_2]).$$

$$\wedge$$

$$V_n(x) = S_n(2p_1+[-2p_2]) - S_{n-1}(2p_1+[-2p_2]).$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+2}V_n(x)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(2-2i)S_{n+2}(a_1+[-a_2])+(6i-2)S_{n+1}(a_1+[-a_2])\right]$$

$$\left[S_n(2p_1+[-2p_2])-S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right]z^n$$

$$=(2-2i)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+2}(a_1+[-a_2])S_n(2p_1+[-2p_2])\right]z^n$$
$$-(2-2i)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+2}(a_1+[-a_2])S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right]z^n$$
$$+(6i-2)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+1}(a_1+[-a_2])S_n(2p_1+[-2p_2])\right]z^n$$
$$-(6i-2)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+1}(a_1+[-a_2])S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right]z^n.$$

بأخذ $\alpha=2$ و $\beta=1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+2}V_n(x)z^n = \frac{(2-2i)(5+2xz+z^2)-(2-2i)(12z+10xz^2+2z^3)}{1-4xz-(4x^2-6)z^2+2xz^3+z^4}$$
$$+\frac{(6i-2)+(2+2xz)-(6i-2)(5z+4xz^2+z^3)}{1-4xz-(4x^2-6)z^2+4xz^3+z^4}$$
$$=\frac{2i+6+(2i(4x-3)-14)z+(2-2i-4x(i+3))z^2-2(i+1)z^3}{1-4xz-(4x^2-6)z^2+4xz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 24.2:

الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان بال لوكاس مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث بدليلين متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+1}V_n(x)z^n$$
$$=\frac{2+2i+(2x-6-2i(1+x))z+(6i-2-4x(1+i))z^2+(2i-2)z^3}{1-4xz-(4x^2-6)z^2+4xz^3+z^4}, n\in\mathbb{N}. \quad (24.2)$$

البرهان:

لدينا:

$$GQ_{n+2}=2GQ_{n+1}+GQ_n$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+2}V_n(x)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(2GQ_{n+1}+GQ_n\right)V_n(x)z^n$$

$$= 2\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+1}V_n(x)z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} GQ_nV_n(x)z^n$$

إذن من العلاقتين (12.2) و (23.2) نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+1}V_n(x)z^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+2}V_n(x)z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} GQ_nV_n(x)z^n\right)$$

بأخذ $\alpha = 2$ و $\beta = 1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+1}V_n(x)z^n = \frac{2+2i+\left(2x-6-2i(1+x)\right)z+\left(6i-2-4x(1+i)\right)z^2+\left(2i-2\right)z^3}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+4xz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

الخاتمة:

وختاما فإننا قمنا من خلال هذا الفصل بإيجاد دوال مولدة جديدة لجداءات الأعداد الغوصية و جداءات الأعداد الغوصية مع كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث باستعمال التوابع التناظرية، وذلك باقتراح النظرية 1.1.

المـــــــــــــــــراجع:

[1] A. Abderrezzak, Généralisation de la transformation d'Euler d'une série formelle, *Adv. Math*. 103, 180-195, 1994.

[2] M. Asci, E. Gurel, Gaussian Jacobsthal and Gaussian Jacobsthal Lucas polynomials, *Notes Number Theory Discrete Math*.19, 25-36, 2013.

[3] A. Boussayoud, S. Boughaba, M. Kerada, S. Araci and M. Acikgoz, Generating functions of binary products of k-Fibonacci and orthogonal polynomials, *Rev. R. Acad. Cienc. ExactasFís. Nat., Ser. A Mat*., 113, 2575-2586, 2019.

[4] A. Boussayoud, S. Boughaba, On Some Identities and Generating functions for k-Pell sequences and Chebyshev polynomials, *Online. J. Anal. Comb*. 14 #3, 1-13, 2019.

[5] A. Boussayoud, A. Abderrezzak and S. Araci, A new symmetric endomorphism operator for some generalizations of certain generating functions, *Notes Number Theory Discrete Math*. 24, 45-58, 2018.

[6] A. Boussayoud, M. Chelgham, S. Boughaba, On some identities and generating functions for Mersenne numbers and polynomials, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*. 6(3), 93-97, 2018.

[7] A. Boussayoud, S. Boughaba, M. Kerada, Generating Functions k-Fibonacci and k-Jacobsthal number satnegative indices, *Electron. J. Math. Analysis Appl*. 6(2), 195-202, 2018.

[8] A. Boussayoud, On some identities and generating functions for Pell-Lucas numbers, *Online. J. Anal. Comb*. 12 #1, 1-10, 2017.

[9] A. Boussayoud, M. Boulyer and M. Kerada, A simple and accurate method for determination of some generalized sequence of numbers, *Int. J. Pure Appl. Math*. 108, 503-511, 2016.

[10] A. Boussayoud, M. Kerada, A. Abderrezzak, A generalization of Some orthogonal polynomials, *Springer Proc. Math. Stat*. 41, 229-235, 2013.

[11] I.G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, second edition, *Oxford mathematical monographs*, 1995.

الفصل الرابع

تطبيقات على التوابع التناظرية

في هذا الفصل سنقوم بحساب بعض الدوال المولدة الجديدة، و ذلك بالاعتماد على النظرية 1.1 المقترحة في الفصل الثالث التي تسمح لنا بالحصول على دوال مولدة جديدة لجداءات الأعداد لكل من غوصيان- (فيبوناتشي، لوكاس، جاكوبستال، جاكوبستال لوكاس، بال و بال لوكاس) بدليلين متواليين وغير متواليين، بالإضافة إلى جداءات الأعداد الغوصية المذكورة سابقا مع كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع.

1.4 الدوال المولدة الجديدة لجداءات الأعداد الغوصية بدليلين متواليين وغير متواليين

- فيما يأتي نقوم بتبديل p_2 بـ $[-p_2]$ و a_2 بـ $[-a_2]$ في العلاقات (1.1)، (2.1)، (3.1)، (4.1)، (6.1) من الفصل الثالث و تحت الشروط التالية: $\begin{cases} p_1 - p_2 = \gamma \\ p_1 p_2 = \lambda \end{cases}$ و $\begin{cases} a_1 - a_2 = \alpha \\ a_1 a_2 = \beta \end{cases}$، حيث أن $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$.

نظرية 1.1:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان فيبوناتشي بدليلين غير متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+2} GF_n z^n = \frac{i - 1 + 3z + 3z^2 + (i-1)z^3}{1 - z - 4z^2 - z^3 + z^4}. \tag{1.1}$$

البرهان:

لدينا:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+2} GF_n z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[iS_{n+2}\left(a_1 + [-a_2]\right) + (1-i) S_{n+1}\left(a_1 + [-a_2]\right) \right] \\
&\quad \left[iS_n\left(p_1 + [-p_2]\right) + (1-i) S_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right) \right] z^n \\
&= i^2 \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+2}\left(a_1 + [-a_2]\right) S_n\left(p_1 + [-p_2]\right) z^n \\
&\quad + i(1-i) \sum_{i=0}^{+\infty} S_{n+2}\left(a_1 + [-a_2]\right) S_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right) z^n \\
&\quad + i(1-i) \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+1}\left(a_1 + [-a_2]\right) S_n\left(p_1 + [-p_2]\right) z^n \\
&\quad + (1-i)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+1}\left(a_1 + [-a_2]\right) S_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right) z^n .
\end{aligned}$$

بأخذ $\alpha=\beta=\gamma=\lambda=1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+2}GF_n z^n = \frac{i^2\left(2+z-z^2\right)}{1-z-4z^2-z^3+z^4}+\frac{i\left(1-i\right)\left(3z+2z^2-z^3\right)}{1-z-4z^2-z^3+z^4}$$

$$+\frac{i\left(1-i\right)\left(1+z\right)}{1-z-4z^2-z^3+z^4}+\frac{\left(1-i\right)^2\left(2z+z^2-z^3\right)}{1-z-4z^2-z^3+z^4}$$
$$=\frac{i-1+3z+3z^2+\left(i-1\right)z^3}{1-z-4z^2-z^3+z^4}.$$

و هو المطلوب.

نظرية 2.1:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان فيبوناتشي بدليلين متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+1}GF_n z^n = \frac{i+z-2iz^2-\left(i+1\right)z^3}{1-z-4z^2-z^3+z^4}. \tag{2.1}$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+2}GF_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(GF_{n+1}+GF_n\right)GF_n z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+1}GF_n z^n+\sum_{n=0}^{+\infty} GF_n^2 z^n.$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+1}GF_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+2}GF_n z^n-\sum_{n=0}^{+\infty} GF_n^2 z^n$$

إذن من العلاقة (1.1) و باستعمال العلاقة (1.2) من الفصل الثالث نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+1}GF_n z^n = \frac{i+z-2iz^2-\left(i+1\right)z^3}{1-z-4z^2-z^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 3.1:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان لوكاس بدليلين غير متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+2}GL_n z^n = \frac{7-i+(12i-9)z+(12i-9)z^2+(7-i)z^3}{1-z-4z^2-z^3+z^4}. \tag{3.1}$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+2}GL_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big[(2-i)S_{n+2}(a_1+[-a_2])+(3i-1)S_{n+1}(a_1+[-a_2])\Big]$$
$$\Big[(2-i)S_n(p_1+[-p_2])+(3i-1)S_{n-1}(p_1+[-p_2])\Big]z^n$$
$$=(2-i)^2\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+2}(a_1+[-a_2])S_n(p_1+[-p_2])z^n$$
$$+(2-i)(3i-1)\sum_{i=0}^{+\infty} S_{n+2}(a_1+[-a_2])S_{n-1}(p_1+[-p_2])z^n$$
$$+(2-i)(3i-1)\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+1}(a_1+[-a_2])S_n(p_1+[-p_2])z^n$$
$$+(3i-1)^2\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+1}(a_1+[-a_2])S_{n-1}(p_1+[-p_2])z^n.$$

بأخذ $\alpha=\beta=\gamma=\lambda=1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+2}GL_n z^n = \frac{(2-i)^2(2+z-z^2)}{1-z-4z^2-z^3+z^4}+\frac{(2-i)(3i-1)(3z+2z^2-z^3)}{1-z-4z^2-z^3+z^4}$$
$$+\frac{(2-i)(3i-1)(1+z)}{1-z-4z^2-z^3+z^4}+\frac{(3i-1)^2(2z+z^2-z^3)}{1-z-4z^2-z^3+z^4}$$
$$=\frac{7-i+(12i-9)z+(12i-9)z^2+(7-i)z^3}{1-z-4z^2-z^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 4.1:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان لوكاس بدليلين متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+1}GL_n z^n = \frac{4+3i+(4i-3)z-(6i+8)z^2-(1+7i)z^3}{1-z-4z^2-z^3+z^4}. \tag{4.1}$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+2} GL_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(GL_{n+1} + GL_n\right) GL_n z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+1} GL_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} GL_n^2 z^n .$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+1} GL_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+2} GL_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} GL_n^2 z^n$$

إذن من العلاقة (3.1) و باستعمال العلاقة (2.2) من الفصل الثالث نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+1} GL_n z^n = \frac{(4+3i)+(4i-3)z-(6i+8)z^2-(1+7i)z^3}{1-z-4z^2-z^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 5.1:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان جاكوبستال بدليلين غير متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_{n+2} GJ_n z^n = \frac{2i-2+(2i+14)z+(2i+19)z^2+(16i-32)z^3}{4-4z-48z^2-16z^3+64z^4}. \qquad (5.1)$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_{n+2} GJ_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{i}{2} S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right) + \frac{2-i}{2} S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right]$$

$$\left[\frac{i}{2} S_n\left(p_1+[-p_2]\right) + \frac{2-i}{2} S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\right] z^n$$

$$=\left(\frac{i}{2}\right)^2\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$
$$+\frac{i}{2}\left(\frac{2-i}{2}\right)\sum_{i=0}^{+\infty}S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$
$$+\frac{i}{2}\left(\frac{2-i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$
$$+\left(\frac{2-i}{2}\right)^2\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n.$$

بأخذ $\alpha=\gamma=1$ و $\beta=\lambda=2$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_{n+2}GJ_nz^n=\frac{-\left(3+2z-8z^2\right)}{4\left(1-z-12z^2-4z^3+16z^4\right)}+\frac{\left(2i+1\right)\left(5z+5z^2-8z^3\right)}{4\left(1-z-12z^2-4z^3+16z^4\right)}$$
$$+\frac{\left(2i+1\right)\left(1+2z\right)}{4\left(1-z-12z^2-4z^3+16z^4\right)}+\frac{\left(3-4i\right)\left(3z-2z^2-8z^3\right)}{4\left(1-z-12z^2-4z^3+16z^4\right)}$$
$$=\frac{2i-2+\left(2i+14\right)z+\left(2i+19\right)z^2+\left(16i-32\right)z^3}{4-4z-48z^2-16z^3+64z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 6.1:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداءات أعداد غوصيان جاكوبستال بدليلين متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_{n+1}GJ_nz^n=\frac{2i+\left(4+2i\right)z+\left(3-14i\right)z^2-\left(8+16i\right)z^3}{4-4z-48z^2-16z^3+64z^4}. \quad (6.1)$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_{n+2}GJ_nz^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(GJ_{n+1}+2GJ_n\right)GJ_nz^n$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_{n+1}GJ_nz^n+2\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_n^2z^n.$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_{n+1}GJ_nz^n=\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_{n+2}GJ_nz^n-2\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_n^2z^n.$$

إذن من العلاقة (5.1) و باستعمال العلاقة (3.2) من الفصل الثالث نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_{n+1}GJ_n z^n = \frac{2i+(4+2i)z+(3-14i)z^2-(8+16i)z^3}{4-4z-48z^2-16z^3+64z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية7.1:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان جاكوبستال لوكاس بدليلين غير متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_{n+2}Gj_n z^n = \frac{42-2i+(78i-54)z+(134i-177)z^2+(192-16i)z^3}{4-4z-48z^2-16z^3+64z^4}. \quad (7.1)$$

البرهان:

لدينا:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_{n+2}Gj_n z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(2-\frac{i}{2}\right)S_{n+2}(a_1+[-a_2])+\left(\frac{5i}{2}-1\right)S_{n+1}(a_1+[-a_2])\right]\\ &\quad\left[\left(2-\frac{i}{2}\right)S_n(p_1+[-p_2])+\left(\frac{5i}{2}-1\right)S_{n-1}(p_1+[-p_2])\right]z^n\\ &=\left(2-\frac{i}{2}\right)^2\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n+2}(a_1+[-a_2])S_n(p_1+[-p_2])z^n\\ &+\left(2-\frac{i}{2}\right)\left(\frac{5i}{2}-1\right)\sum_{i=0}^{+\infty}S_{n+2}(a_1+[-a_2])S_{n-1}(p_1+[-p_2])z^n\\ &+\left(2-\frac{i}{2}\right)\left(\frac{5i}{2}-1\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n+1}(a_1+[-a_2])S_n(p_1+[-p_2])z^n\\ &+\left(\frac{5i}{2}-1\right)^2\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n+1}(a_1+[-a_2])S_{n-1}(p_1+[-p_2])z^n.\end{aligned}$$

بأخذ $\alpha=\gamma=1$ و $\beta=\lambda=2$ نجد:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_{n+2}Gj_n z^n &= \frac{(15-8i)(3+2z-8z^2)}{4(1-z-12z^2-4z^3+16z^4)}+\frac{(22i-3)(5z+5z^2-8z^3)}{4(1-z-12z^2-4z^3+16z^4)}\\ &+\frac{(22i-3)(1+2z)}{4(1-z-12z^2-4z^3+16z^4)}-\frac{(21+20i)(3z-2z^2-8z^3)}{4(1-z-12z^2-4z^3+16z^4)}\\ &=\frac{42-2i+(78i-54)z+(134i-177)z^2+(192-16i)z^3}{4-4z-48z^2-16z^3+64z^4}.\end{aligned}$$

نظرية 8.1:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداءات أعداد غوصيان جاكوبستال لوكاس بدليلين متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_{n+1}Gj_n z^n = \frac{12+14i+30iz-(33+106i)z^2+(24-176i)z^3}{4-4z-48z^2-16z^3+64z^4}. \tag{8.1}$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_{n+2}Gj_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(Gj_{n+1}+2Gj_n)GJ_n z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} Gj_{n+1}Gj_n z^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_n^2 z^n.$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_{n+1}Gj_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} Gj_{n+2}Gj_n z^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_n^2 z^n.$$

إذن من العلاقة (7.1) و باستعمال العلاقة (4.2) من الفصل الثالث نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_{n+1}Gj_n z^n = \frac{12+14i+30iz-(33+106i)z^2+(24-176i)z^3}{4-4z-48z^2-16z^3+64z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 9.1:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان بال بدليلين غير متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+2}GP_n z^n = \frac{2i-1+(9-6i)z+(9-6i)z^2+(2i-1)z^3}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}. \tag{9.1}$$

البرهان:

لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+2}GP_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[iS_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)+(1-2i)S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right]$$

$$\left[iS_n\left(p_1+[-p_2]\right)+(1-2i)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\right] z^n$$

$$= i^2\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$

$$+i(1-2i)\sum_{i=0}^{+\infty} S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$

$$+i(1-2i)\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$

$$+(1-2i)^2\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n.$$

بأخذ $\alpha=\gamma=2$ و $\beta=\lambda=1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+2}GP_n z^n = \frac{-\left(5+4z-z^2\right)}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}+\frac{(i+2)\left(12z+10z^2-2z^3\right)}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}$$

$$+\frac{(i+2)(2+2z)}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}-\frac{(3+4i)\left(5z+4z^2-z^3\right)}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}$$

$$=\frac{2i-1+(9-6i)z+(9-6i)z^2+(2i-1)z^3}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}.$$

و هو المطلوب.

<u>نظرية 10.1:</u>

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان بال بدليلين متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+1}GP_n z^n = \frac{i+(2-3i)z-5iz^2+(3i+1)z^3}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}. \qquad (10.1)$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+2}GP_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(2GP_{n+1}+GP_n\right)GP_n z^n$$

$$=2\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+1}GP_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} GP_n^2 z^n .$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+1}GP_n z^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+2}GP_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} GP_n^2 z^n\right)$$

إذن من العلاقة (9.1) و باستعمال العلاقة (5.2) من الفصل الثالث نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+1}GP_n z^n = \frac{2i+(2-3i)z-5iz^2+(3i+1)z^3}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

<u>نظرية 11.1:</u>

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان بال لوكاس بدليلين غير متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+2}GQ_n z^n = \frac{16-8i+(72i-48)z+(72i-48)z^2+(16-8i)z^3}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}. \quad (11.1)$$

<u>البرهان:</u>

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+2}GQ_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big[(2-2i)S_{n+2}(a_1+[-a_2])+(6i-2)S_{n+1}(a_1+[-a_2])\Big]$$
$$\Big[(2-2i)S_n(p_1+[-p_2])+(6i-2)S_{n-1}(p_1+[-p_2])\Big]z^n$$

$$=(2-2i)^2\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+2}(a_1+[-a_2])S_n(p_1+[-p_2])z^n$$
$$+(2-2i)(6i-2)\sum_{i=0}^{+\infty} S_{n+2}(a_1+[-a_2])S_{n-1}(p_1+[-p_2])z^n$$
$$+(2-2i)(6i-2)\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+1}(a_1+[-a_2])S_n(p_1+[-p_2])z^n$$
$$+(6i-2)^2\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+1}(a_1+[-a_2])S_{n-1}(p_1+[-p_2])z^n .$$

بأخذ $\alpha=\gamma=2$ و $\beta=\lambda=1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+2}GQ_n z^n = \frac{-8i\left(5+4z-z^2\right)}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}+\frac{\left(16i+8\right)\left(12z+10z^2-2z^3\right)}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}$$

$$+\frac{\left(16i+8\right)\left(2+2z\right)}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}-\frac{\left(32+24i\right)\left(5z+4z^2-z^3\right)}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}$$

$$=\frac{16-8i+\left(72i-48\right)z+\left(72i-48\right)z^2+\left(16-8i\right)z^3}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

<u>نظرية 12.1:</u>

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان بال لوكاس بدليلين متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+1}GQ_n z^n = \frac{8+\left(16i+24\right)z+\left(4i-40\right)z^2-\left(8+16i\right)z^3}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}. \qquad (12.1)$$

البرهان:

لدينا:

$$GQ_{n+2}=2GQ_{n+1}+GQ_n$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+2}GQ_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(2GQ_{n+1}+GQ_n\right)GQ_n z^n$$

$$=2\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+1}GQ_n z^n+\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_n^2 z^n$$

إذن من العلاقتين (11.1) و باستعمال العلاقة (6.2) من الفصل الثالث نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+1}GQ_n z^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+2}GQ_n z^n-\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_n^2 z^n\right)$$

$$=\frac{8+\left(16i+24\right)z+\left(4i-40\right)z^2-\left(8+16i\right)z^3}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

2.4 الدوال المولدة الجديدة لجداءات الأعداد الغوصية مع كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع

- نقوم بتبديل a_2 بـ $[-a_2]$ و p_1 بـ $2p_1$ و p_2 بـ $[-2p_2]$ في العلاقات (1.1)، (2.1)، (3.1)، (4.1)، (6.1) من الفصل الثالث و تحت الشروط التالية: $\begin{cases} a_1 - a_2 = \alpha \\ a_1 a_2 = \beta \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1 - p_2 = x \\ 4p_1 p_2 = -1 \end{cases}$، حيث $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

<u>نظرية 1.2:</u>

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان فيبوناتشي مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_n W_n(x) z^n = \frac{i + \left(2x(1-i)+1\right)z + \left(2i(1+x)-1\right)z^2 + (1-i)z^3}{1 - 2xz - \left(4x^2-3\right)z^2 + 2xz^3 + z^4}. \qquad (1.2)$$

البرهان

نعلم أن:

$$GF_n = iS_n\left(a_1 + [-a_2]\right) + (1-i)S_{n-1}\left(a_1 + [-a_2]\right).$$

$$\wedge$$

$$W_n(x) = S_n\left(2p_1 + [-2p_2]\right) + S_{n-1}\left(2p_1 + [-2p_2]\right).$$

إذن:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} GF_n W_n(x) z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[iS_n\left(a_1 + [-a_2]\right) + (1-i)S_{n-1}\left(a_1 + [-a_2]\right) \right] \\
&\quad \left[S_n\left(2p_1 + [-2p_2]\right) + S_{n-1}\left(2p_1 + [-2p_2]\right) \right] z^n \\
&= i\sum_{n=0}^{+\infty} \left[S_n\left(a_1 + [-a_2]\right) S_n\left(2p_1 + [-2p_2]\right) \right] z^n \\
&\quad + i\sum_{n=0}^{+\infty} \left[S_n\left(a_1 + [-a_2]\right) S_{n-1}\left(2p_1 + [-2p_2]\right) \right] z^n \\
&\quad + (1-i)\sum_{n=0}^{+\infty} \left[S_{n-1}\left(a_1 + [-a_2]\right) S_n\left(2p_1 + [-2p_2]\right) \right] z^n \\
&\quad + (1-i)\sum_{n=0}^{+\infty} \left[S_{n-1}\left(a_1 + [-a_2]\right) S_{n-1}\left(2p_1 + [-2p_2]\right) \right] z^n.
\end{aligned}$$

بأخذ $\alpha=\beta=1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_nW_n(x)z^n = \frac{i\left(1+z^2\right)+i\left(z+2xz^2\right)}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4}$$

$$+\frac{(1-i)\left(2xz-z^2\right)+(1-i)\left(z+z^3\right)}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4}$$

$$=\frac{i+\left(2x(1-i)+1\right)z+\left(2i(1+x)-1\right)z^2+(1-i)z^3}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 2.2:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان لوكاس مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_nW_n(x)z^n = \frac{2-i+\left(2x(3i-1)+2i+1\right)z+\left(2x(2-i)+3-4i\right)z^2+(3i-1)z^3}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4}. \quad (2.2)$$

البرهان:

نعلم أن:

$$GL_n=(2-i)S_n\left(a_1+[-a_2]\right)+(3i-1)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right).$$

$$\wedge$$

$$W_n(x)=S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right).$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_nW_n(x)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(2-i)S_n\left(a_1+[-a_2]\right)+(3i-1)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right]$$

$$\left[S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$=(2-i)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$+(2-i)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$+(3i-1)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$+(3i-1)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n.$$

بأخذ $\alpha=\beta=1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_nW_n(x)z^n=\frac{(2-i)(1+z^2)+(2-i)(z+2xz^2)}{1-2xz-(4x^2-3)z^2+2xz^3+z^4}$$
$$+\frac{(3i-1)(2xz-z^2)+(3i-1)(z+z^3)}{1-2xz-(4x^2-3)z^2+2xz^3+z^4}$$
$$=\frac{2-i+(2x(3i-1)+2i+1)z}{1-2xz-(4x^2-3)z^2+2xz^3+z^4}$$
$$+\frac{(2x(2-i)+3-4i)z^2+(3i-1)z^3}{1-2xz-(4x^2-3)z^2+2xz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب .

نظرية 3.2:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان جاكوبستال مع كثير الحدود لتشيبيتشاف من النوع الرابع تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_nW_n(x)z^n=\frac{i+(2x(2-i)+2)z+(i(3+4x)-2)z^2+2(2-i)z^3}{2-4xz-2(8x^2-5)z^2+8xz^3+8z^4}. \tag{3.2}$$

البرهان:

نعلم أن:

$$GJ_n=\frac{i}{2}S_n(a_1+[-a_2])+\frac{2-i}{2}S_{n-1}(a_1+[-a_2]).$$
$$\wedge$$
$$W_n(x)=S_n(2p_1+[-2p_2])+S_{n-1}(2p_1+[-2p_2]).$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_nW_n(x)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{i}{2}S_n(a_1+[-a_2])+\frac{2-i}{2}S_{n-1}(a_1+[-a_2])\right]$$
$$\left[S_n(2p_1+[-2p_2])+S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right]z^n$$

$$=\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_n\left(a_1+\left[-a_2\right]\right)S_n\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)\right]z^n$$
$$+\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_n\left(a_1+\left[-a_2\right]\right)S_{n-1}\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)\right]z^n$$
$$+\frac{2-i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n-1}\left(a_1+\left[-a_2\right]\right)S_n\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)\right]z^n$$
$$+\frac{2-i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n-1}\left(a_1+\left[-a_2\right]\right)S_{n-1}\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)\right]z^n.$$

بأخذ $\alpha=1$ و $\beta=2$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_nW_n\left(x\right)z^n=\frac{i\left(1+2z^2\right)+i\left(z+4xz^2\right)+\left(2-i\right)\left(2xz-z^2\right)+\left(2-i\right)\left(z+2z^3\right)}{2\left(1-2xz-\left(8x^2-5\right)z^2+4xz^3+4z^4\right)}$$

$$=\frac{i+\left(2x\left(2-i\right)+2\right)z+\left(i\left(3+4x\right)-2\right)z^2+2\left(2-i\right)z^3}{2-4xz-2\left(8x^2-5\right)z^2+8xz^3+8z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 4.2:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان جاكوبستال لوكاس مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}Gj_nW_n\left(x\right)z^n=\frac{4-i+\left(2x\left(5i-2\right)+4i+2\right)z+\left(4x\left(4-i\right)-7i+10\right)z^2+\left(10i-4\right)z^3}{2-4xz-2\left(8x^2-5\right)z^2+8xz^3+8z^4}. \quad (4.2)$$

البرهان:

نعلم أن:

$$Gj_n=\left(2-\frac{i}{2}\right)S_n\left(a_1+\left[-a_2\right]\right)+\left(\frac{5i}{2}-1\right)S_{n-1}\left(a_1+\left[-a_2\right]\right).$$
$$\wedge$$
$$W_n\left(x\right)=S_n\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)+S_{n-1}\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right).$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_nW_n(x)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(2-\frac{i}{2}\right)S_n(a_1+[-a_2])+\left(\frac{5i}{2}-1\right)S_{n-1}(a_1+[-a_2])\right]$$

$$\left[S_n(2p_1+[-2p_2])+S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right]z^n$$

$$=\left(2-\frac{i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_n(a_1+[-a_2])S_n(2p_1+[-2p_2])\right]z^n$$

$$+\left(2-\frac{i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_n(a_1+[-a_2])S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right]z^n$$

$$+\left(\frac{5i}{2}-1\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n-1}(a_1+[-a_2])S_n(2p_1+[-2p_2])\right]z^n$$

$$+\left(\frac{5i}{2}-1\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n-1}(a_1+[-a_2])S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right]z^n.$$

بأخذ $\alpha=1$ و $\beta=2$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_nW_n(x)z^n = \frac{(4-i)(1+2z^2)+(4-i)(z+4xz^2)}{2\left(1-2xz-(8x^2-5)z^2+4xz^3+4z^4\right)}$$

$$+\frac{(5i-2)(2xz-z^2)+(5i-2)(z+2z^3)}{2-4xz-2(8x^2-5)z^2+8xz^3+8z^4}$$

$$=\frac{4-i+(2x(5i-2)+4i+2)z}{2-4xz-2(8x^2-5)z^2+8xz^3+8z^4}$$

$$+\frac{(4x(4-i)-7i+10)z^2+(10i-4)z^3}{2-4xz-2(8x^2-5)z^2+8xz^3+8z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 5.2:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان بال مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_nW_n(x)z^n = \frac{i+(2x(1-2i)+1)z+(i(5+2x)-2)z^2+(1-2i)z^3}{1-4xz-(4x^2-6)z^2+4xz^3+z^4}. \quad (5.2)$$

البرهان:

نعلم أن:

$$GP_n = iS_n\left(a_1+\left[-a_2\right]\right)+\left(1-2i\right)S_{n-1}\left(a_1+\left[-a_2\right]\right).$$

$$\wedge$$

$$W_n\left(x\right) = S_n\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)+S_{n-1}\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right).$$

إذن:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} GP_n W_n\left(x\right)z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[iS_n\left(a_1+\left[-a_2\right]\right)+\left(1-2i\right)S_{n-1}\left(a_1+\left[-a_2\right]\right)\right]\\ &\left[S_n\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)+S_{n-1}\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)\right]\\ &= i\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_n\left(a_1+\left[-a_2\right]\right)S_n\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)\right]z^n\\ &+i\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_n\left(a_1+\left[-a_2\right]\right)S_{n-1}\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)\right]z^n\\ &+\left(1-2i\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n-1}\left(a_1+\left[-a_2\right]\right)S_n\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)\right]z^n\\ &+\left(1-2i\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n-1}\left(a_1+\left[-a_2\right]\right)S_{n-1}\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)\right]z^n.\end{aligned}$$

بأخذ $\alpha = 2$ و $\beta = 1$ نجد:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} GP_n W_n\left(x\right)z^n &= \frac{i\left(1+z^2\right)+i\left(2z+2xz^2\right)}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+2xz^3+z^4}\\ &+\frac{\left(1-2i\right)\left(2xz-z^2\right)+\left(1-2i\right)\left(z+z^3\right)}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+2xz^3+z^4}\\ &= \frac{i+\left(2x\left(1-2i\right)+1\right)z+\left(i\left(5+2x\right)-2\right)z^2+\left(1-2i\right)z^3}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+2xz^3+z^4}.\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

<u>نظرية 6.2:</u>

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان بال لوكاس مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_n W_n(x) z^n = \frac{2-2i+\left(4x(3i-1)+2+2i\right)z+\left(4x(1-i)-14i+6\right)z^2+(6i-2)z^3}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+4xz^3+z^4}. \tag{6.2}$$

البرهان:

نعلم أن:

$$GQ_n = (2-2i)S_n\left(a_1+[-a_2]\right)+(6i-2)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right).$$
$$\wedge$$
$$W_n(x) = S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right).$$

إذن:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_n W_n(x) z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big[(2-i)S_n\left(a_1+[-a_2]\right)+(6i-2)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)\Big]\\
&\Big[S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\Big]z^n\\
&=(2-i)\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\Big]z^n\\
&+(2-i)\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\Big]z^n\\
&+(6i-2)\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\Big]z^n\\
&+(6i-2)\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\Big]z^n.\end{aligned}$$

بأخذ $\alpha = 2$ و $\beta = 1$ نجد:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_n W_n(x) z^n &= \frac{(2-2i)\left(1+z^2\right)+(2-2i)\left(2z+2xz^2\right)+(6i-2)\left(2xz-z^2\right)+(6i-2)\left(z+z^3\right)}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+2xz^3+z^4}\\
&=\frac{2-2i+\left(4x(3i-1)+2+2i\right)z+\left(4x(1-i)-14i+6\right)z^2+(6i-2)z^3}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+2xz^3+z^4}.\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

نظرية 7.2:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان فيبوناتشي مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع بدليلين غير متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+2} W_n(x) z^n = \frac{i+1+\left(2(x+1)+i\right)z+\left(i+2x(i+1)\right)z^2+z^3}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4}. \tag{7.2}$$

البرهان:

نعلم أن:

$$GF_{n+2} = iS_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)+(1-i)S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right).$$
$$\wedge$$
$$W_n(x) = S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right).$$

إذن:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+2} W_n(x) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big[& iS_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)+(1-i)S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)\Big]\\ &\Big[S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\Big]z^n\\ &= i\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\Big]z^n\\ &+i\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\Big]z^n\\ &+(1-i)\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\Big]z^n\\ &+(1-i)\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\Big]z^n.\end{aligned}$$

بأخذ $\alpha = 2$ و $\beta = 1$ نجد:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+2} W_n(x) z^n &= \frac{i\left(2+2xz+z^2\right)+i\left(3z+4xz^2+z^3\right)}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4}\\ &+\frac{(1-i)(1+2xz)+(1-i)\left(2z+2xz^2+z^3\right)}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4}\\ &=\frac{i+1+\left(2(x+1)+i\right)z+\left(2x(i+1)+i\right)z^2+z^3}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4}.\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

نظرية 8.2:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان فيبوناتشي مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع بدليلين متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+1} W_n(x) z^n = \frac{1+\left(i(2x+1)+1\right)z+(1+i)z^2+iz^3}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4}. \qquad (8.2)$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+2} W_n(x) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (GF_{n+1}+GF_n) W_n(x) z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+1} W_n(x) z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} GF_n W_n(x) z^n.$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+1} W_n(x) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+2} W_n(x) z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} GF_n W_n(x) z^n$$

إذن من العلاقتين (1.2) و (7.2) نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GF_{n+1} W_n(x) z^n = \frac{1+\left(i(2x+1)+1\right)z+(1+i)z^2+iz^3}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4}.$$

و هو المطلوب.

نظرية 9.2:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان لوكاس مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع بدليلين غير متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+2} W_n(x) z^n = \frac{i+3+\left(2x(1+2i)+4+3i\right)z+\left(2x(3+i)+(2-i)\right)z^2+(1+2i)z^3}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4}. \qquad (9.2)$$

البرهان:

نعلم أن:

$$GL_{n+2} = (2-i) S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)+(3i-1) S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right).$$

$$\wedge$$

$$W_n(x) = S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right).$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+2}W_n(x)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big[(2-i)S_{n+2}\big(a_1+[-a_2]\big)+(3i-1)S_{n+1}\big(a_1+[-a_2]\big)\Big]$$
$$\Big[S_n\big(2p_1+[-2p_2]\big)+S_{n-1}\big(2p_1+[-2p_2]\big)\Big]z^n$$

$$=(2-i)\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[S_{n+2}\big(a_1+[-a_2]\big)S_n\big(2p_1+[-2p_2]\big)\Big]z^n$$
$$+(2-i)\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[S_{n+2}\big(a_1+[-a_2]\big)S_{n-1}\big(2p_1+[-2p_2]\big)\Big]z^n$$
$$+(3i-1)\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[S_{n+1}\big(a_1+[-a_2]\big)S_n\big(2p_1+[-2p_2]\big)\Big]z^n$$
$$+(3i-1)\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[S_{n+1}\big(a_1+[-a_2]\big)S_{n-1}\big(2p_1+[-2p_2]\big)\Big]z^n.$$

بأخذ $\alpha=\beta=1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+2}W_n(x)z^n = \frac{(2-i)\big(2+2xz+z^2\big)+(2-i)\big(3z+4xz^2+z^3\big)}{1-2xz-\big(4x^2-3\big)z^2+2xz^3+z^4}$$
$$+\frac{(3i-1)(1+2xz)+(3i-1)\big(2z+2xz^2+z^3\big)}{1-2xz-\big(4x^2-3\big)z^2+2xz^3+z^4}$$
$$=\frac{i+3+\big(2x(1+2i)+4+3i\big)z+\big(2x(3+i)+(2-i)\big)z^2+(1+2i)z^3}{1-2xz-\big(4x^2-3\big)z^2+2xz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب .

نظرية 10.2:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان لوكاس مع كثير الحدود لتشيبيتشاف من النوع الرابع بدليلين متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+1}W_n(x)z^n = \frac{1+2i+\big(2x(2-i)+3+i\big)z+\big(2x(1+2i)-1+3i\big)z^2+(2-i)z^3}{1-2xz-\big(4x^2-3\big)z^2+2xz^3+z^4}. \qquad (10.2)$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+2}W_n(x)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\big(GL_{n+1}+GL_n\big)W_n(x)z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+1}W_n(x)z^n+\sum_{n=0}^{+\infty} GL_nW_n(x)z^n.$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+1}W_n(x)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+2}W_n(x)z^n-\sum_{n=0}^{+\infty} GL_nW_n(x)z^n$$

إذن من العلاقتين (2.2) و (9.2) نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GL_{n+1}W_n(x)z^n=\frac{1+2i+\left(2x(2-i)+3+i\right)z+\left(2x(1+2i)-1+3i\right)z^2+(2-i)z^3}{1-2xz-\left(4x^2-3\right)z^2+2xz^3+z^4}.$$

و هو المطلوب.

نظرية 11.2:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان جاكوبستال مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع بدليلين غير متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_{n+2}W_n(x)z^n=\frac{2i+2+\left(2x(4-i)+2(i+3)\right)z+\left(4x(2i+1)+4i\right)z^2+8z^3}{2-4xz-2\left(8x^2-5\right)z^2+8xz^3+8z^4}. \quad (11.2)$$

البرهان:

نعلم أن:

$$GJ_{n+2}=\frac{i}{2}S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)+\frac{2-i}{2}S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right).$$

$$\wedge$$

$$W_n(x)=S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right).$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_{n+2}W_n(x)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{i}{2}S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)+\frac{2-i}{2}S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right]$$

$$\left[S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$=\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$
$$+\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$
$$+\frac{2-i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$
$$+\frac{2-i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n.$$

بأخذ $\alpha=1$ و $\beta=2$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_{n+2}W_n(x)z^n=\frac{i\left(3+2xz+4z^2\right)+i\left(5z+10xz^2+4z^3\right)}{2\left(1-2xz-\left(8x^2-5\right)z^2+4xz^3+4z^4\right)}$$
$$+\frac{(2-i)(1+4xz)+(2-i)\left(3z+2xz^2+4z^3\right)}{2-4xz-2\left(8x^2-5\right)z^2+8xz^3+8z^4}$$
$$=\frac{2i+2+\left(2x(4-i)+2(i+3)\right)z+\left(4x(2i+1)+4i\right)z^2+8z^3}{2-4xz-2\left(8x^2-5\right)z^2+8xz^3+8z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 12.2:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة لجداء أعداد غوصيان جاكوبستال مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع بدليلين متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_{n+1}W_n(x)z^n=\frac{1+(i+1+ix)z+\left(2(x+1)-i\right)z^2+2iz^3}{2-4xz-2\left(8x^2-5\right)z^2+8xz^3+8z^4}. \quad (12.2)$$

البرهان:

لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_{n+2}W_n(x)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(GJ_{n+1}+2GJ_n\right)W_n(x)z^n$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_{n+1}W_n(x)z^n+2\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_nW_n(x)z^n.$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_{n+1}W_n(x)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_{n+2}W_n(x)z^n-2\sum_{n=0}^{+\infty}GJ_nW_n(x)z^n$$

إذن من العلاقتين (3.2) و (11.2) نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GJ_{n+1}W_n(x)z^n=\frac{1+(i+1+ix)z+(2(x+1)-i)z^2+2iz^3}{2-4xz-2(8x^2-5)z^2+8xz^3+8z^4}.$$

و هو المطلوب.

نظرية 13.2:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان جاكوبستال لوكاس مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع بدليلين غير متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_{n+2}W_n(x)z^n=\frac{10+2i+(2i(9x+5)+14)z+(16+36x-4i)z^2+(8+16i)z^3}{2-4xz-2(8x^2-5)z^2+8xz^3+8z^4}. \quad (13.2)$$

البرهان:

نعلم أن:

$$Gj_{n+2}=\left(2-\frac{i}{2}\right)S_{n+2}(a_1+[-a_2])+\left(\frac{5}{2}i-1\right)S_{n+1}(a_1+[-a_2]).$$

$$\wedge$$

$$W_n(x)=S_n(2p_1+[-2p_2])+S_{n-1}(2p_1+[-2p_2]).$$

إذن:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_{n+2}W_n(x)z^n&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(2-\frac{i}{2}\right)S_{n+2}(a_1+[-a_2])+\left(\frac{5}{2}i-1\right)S_{n+1}(a_1+[-a_2])\right]\\&\quad\left[S_n(2p_1+[-2p_2])+S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right]z^n\\&=\left(2-\frac{i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+2}(a_1+[-a_2])S_n(2p_1+[-2p_2])\right]z^n\\&\quad+\left(2-\frac{i}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+2}(a_1+[-a_2])S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right]z^n\\&\quad+\left(\frac{5}{2}i-1\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+1}(a_1+[-a_2])S_n(2p_1+[-2p_2])\right]z^n\\&\quad+\left(\frac{5}{2}i-1\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+1}(a_1+[-a_2])S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right]z^n.\end{aligned}$$

بأخذ $\alpha=1$ و $\beta=2$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_{n+2}W_n(x)z^n = \frac{(4-i)(3+2xz+4z^2)+(4-i)(5z+10xz^2+4z^3)}{2(1-2xz-(8x^2-5)z^2+4xz^3+4z^4)}$$
$$+\frac{(5i-2)(1+4xz)+(5i-2)(3z+2xz^2+4z^3)}{2-4xz-2(8x^2-5)z^2+8xz^3+8z^4}$$
$$=\frac{10+2i+(2i(9x+5)+14)z+(16+36x-4i)z^2+(8+16i)z^3}{2-4xz-2(8x^2-5)z^2+8xz^3+8z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 14.2:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان جاكوبستال لوكاس مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع بدليلين متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_{n+1}W_n(x)z^n = \frac{1+2i+(5+x(4-i)+i)z+(5i-2+2x(2i+1))z^2+(8-2i)z^3}{2-4xz-2(8x^2-5)z^2+8xz^3+8z^4}. \quad (14.2)$$

البرهان:

لدينا:

$$Gj_{n+2}=Gj_{n+1}+2Gj_n$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_{n+2}W_n(x)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(Gj_{n+1}+2Gj_n)W_n(x)z^n$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_{n+1}W_n(x)z^n+2\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_nW_n(x)z^n$$

إذن من العلاقتين (4.2) و (13.2) نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_{n+1}W_n(x)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} Gj_{n+2}W_n(x)z^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_nW_n(x)z^n.$$

بأخذ $\alpha=1$ و $\beta=2$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Gj_{n+1}W_n(x)z^n = \frac{1+2i+(5+x(4-i)+i)z+(5i-2+2x(2i+1))z^2+(8-2i)z^3}{2-4xz-2(8x^2-5)z^2+8xz^3+8z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 15.2:

أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان بال مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع بدليلين غير متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+2} W_n(x) z^n = \frac{2+i+\left(2x(1-i)+2i+5\right)z+\left(2x(2+i)+i\right)z^2+z^3}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+4xz^3+z^4}. \quad (15.2)$$

البرهان:

نعلم أن:

$$GP_{n+2} = iS_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)+(1-2i)S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right).$$

$$\wedge$$

$$W_n(x) = S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right).$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+2} W_n(x) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[iS_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)+(1-2i)S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)\right]$$

$$\left[S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$= i\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$+i\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+2}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$+(1-2i)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n$$

$$+(1-2i)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right]z^n.$$

بأخذ $\alpha=2$ و $\beta=1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+2} W_n(x) z^n = \frac{i\left(5+2xz+z^2\right)+i\left(12z+10xz^2+2z^3\right)}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+2xz^3+z^4}$$

$$+\frac{(1-2i)(2+2xz)+(1-2i)\left(5z+4xz+z^3\right)}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+4xz^3+z^4}$$

$$= \frac{2+i+\left(2x(1-i)+2i+5\right)z+\left(2x(2+i)+i\right)z^2+z^3}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+4xz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 16.2:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان بال مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع بدليلين متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+1} W_n(x) z^n = \frac{1+(ix+i+2)z+(2x-2i+1)z^2+iz^3}{1-4xz-(4x^2-6)z^2+4xz^3+z^4}. \quad (16.2)$$

البرهان:

لدينا:

$$GP_{n+2} = 2GP_{n+1} + GP_n$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+2} W_n(x) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (2GP_{n+1} + GP_n) W_n(x) z^n$$

$$= 2\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+1} W(x)_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} GP_n W_n(x) z^n$$

إذن من العلاقتين (5.2) و (15.2) نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+1} W_n(x) z^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+2} W_n(x) z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} GP_n W_n(x) z^n\right)$$

بأخذ $\alpha = 2$ و $\beta = 1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_{n+1} W_n(x) z^n = \frac{1+(ix+i+2)z+(2x-2i+1)z^2+iz^3}{1-4xz-(4x^2-6)z^2+4xz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 17.2:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان بال لوكاس مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع بدليلين غير متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+2} W_n(x) z^n = \frac{2i+6+(14+2i(4x+3))z+(2-2i+4x(i+3))z^2+2(i+1)z^3}{1-4xz-(4x^2-6)z^2+4xz^3+z^4}. \quad (17.2)$$

البرهان:

نعلم أن:

$$GQ_{n+2}=(2-2i)S_{n+2}(a_1+[-a_2])+(6i-2)S_{n+1}(a_1+[-a_2]).$$

$$\wedge$$

$$W_n(x)=S_n(2p_1+[-2p_2])+S_{n-1}(2p_1+[-2p_2]).$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GQ_{n+2}W_n(x)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(2-2i)S_{n+2}(a_1+[-a_2])+(6i-2)S_{n+1}(a_1+[-a_2])\right]$$

$$\left[S_n(2p_1+[-2p_2])+S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right]z^n$$

$$=(2-2i)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+2}(a_1+[-a_2])S_n(2p_1+[-2p_2])\right]z^n$$

$$+(2-2i)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+2}(a_1+[-a_2])S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right]z^n$$

$$+(6i-2)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+1}(a_1+[-a_2])S_n(2p_1+[-2p_2])\right]z^n$$

$$+(6i-2)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_{n+1}(a_1+[-a_2])S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right]z^n.$$

بأخذ $\alpha=2$ و $\beta=1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}GQ_{n+2}W_n(x)z^n=\frac{(2-2i)(5+2xz+z^2)+(2-2i)(12z+10xz^2+2z^3)}{1-4xz-(4x^2-6)z^2+4xz^3+z^4}$$

$$+\frac{(6i-2)(2+2xz)+(6i-2)(5z+4xz^2+z^3)}{1-4xz-(4x^2-6)z^2+4xz^3+z^4}$$

$$=\frac{2i+6+(14+2i(4x+3))z+(2-2i+4x(i+3))z^2+2(i+1)z^3}{1-4xz-(4x^2-6)z^2+4xz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 18.2:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة الجديدة لجداء أعداد غوصيان بال لوكاس مع كثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع بدليلين متواليين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+1}W_n(x)z^n = \frac{2+2i+\left(2x(1-i)+6+2i\right)z+\left(4x(1+i)-2+6i\right)z^2+\left(2-2i\right)z^3}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+4xz^3+z^4}. \quad (18.2)$$

البرهان:

لدينا:

$$GQ_{n+2} = 2GQ_{n+1} + GQ_n$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+2}W_n(x)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(2GQ_{n+1}+GQ_n\right)W_n(x)z^n$$

$$= 2\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+1}W_n(x)z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} GQ_nW_n(x)z^n$$

إذن من العلاقتين (6.2) و (17.2) نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+1}W_n(x)z^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+2}W_n(x)z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} GQ_nW_n(x)z^n\right)$$

بأخذ $\alpha = 2$ و $\beta = 1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GQ_{n+1}V_n(x)z^n = \frac{2+2i+\left(2x(1-i)+6+2i\right)z+\left(4x(1+i)-2+6i\right)z^2+\left(2-2i\right)z^3}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+4xz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

الخاتمة:

وختاما فإننا قمنا من خلال هذا الفصل بحساب الدوال المولدة الجديدة لجداءات الأعداد الغوصية بدليلين متواليين وغير متواليين و جداءات الأعداد الغوصية مع كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع باستعمال التوابع التناظرية، وذلك بالاعتماد على النظرية 1.1 المقترحة في الفصل الثالث.

المــــــــــــــراجع:

المراجع باللغة العربية:

[1] علي بوسعيود، مطبوعة البيداغوجية، جامعة محمد الصديق بن يحيى جيجل، سبتمبر 2018.

[2] س. بوغابة، كثيرات الحدود المتعامدة و التوابع التناظرية، مذكرة التخرج ماستر، جامعة جيجل 2017.

المراجع باللغة الأجنبية:

[3] A. Abderrezzak, Généralisation de la transformation d'Euler d'une série formelle, *Adv. Math*. 103, 180-195, 1994.

[4] M. Asci, E. Gurel, Gaussian Jacobsthal and Gaussian Jacobsthal Lucas polynomials, *Notes Number Theory Discrete Math*.19, 25-36, 2013.

[5] A. Boussayoud, S. Boughaba, M. Kerada, S. Araci and M. Acikgoz, Generating functions of binary products of k-Fibonacci and orthogonal polynomials, *Rev. R. Acad. Cienc. ExactasFís. Nat., Ser. A Mat*., 113, 2575-2586, 2019.

[6] A. Boussayoud, S. Boughaba, On Some Identities and Generating Functions for k-Pell sequences and Chebyshev polynomials, *Online. J. Anal. Comb*. 14 #3, 1-13, 2019.

[7] A. Boussayoud, A. Abderrezzak and S. Araci, A new symmetric endomorphism operator for some generalizations of certain generating functions, *Notes Number Theory Discrete Math*. 24, 45-58, 2018.

[8] A. Boussayoud, M. Chelgham, S. Boughaba, On some identities and generating functions for Mersenne numbers and polynomials, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*. 6(3), 93-97, 2018.

[9] A. Boussayoud, S. Boughaba, M. Kerada, Generating Functions k-Fibonacci and k-Jacobsthal number satnegative indices, *Electron. J. Math. Analysis Appl*. 6(2), 195-202, 2018.

[10] A. Boussayoud, On some identities and generating functions for Pell-Lucas numbers, *Online. J. Anal. Comb*. 12 #1, 1-10, 2017.

[11] A. Boussayoud, M. Boulyer and M. Kerada, A simple and accurate method for determination of some generalized sequence of numbers, *Int. J. Pure Appl. Math*.108, 503-511, 2016.

[12] A. Boussayoud, M. Kerada, A. Abderrezzak, A generalization of some orthogonal polynomials, *Springer Proc. Math. Stat*. 41, 229-235, 2013.

الخاتمة

و ختاما فإننا قمنا من خلال هذه المذكرة بحساب الدوال المولدة باستعمال التوابع التناظرية، و ذلك باقتراح نظرية جديدة في الفصل الثالث التي سمحت لنا بالحصول على الدوال المولدة الجديدة لجداءات الأعداد لكل من غوصيان-(فيبونـاتشي، لوكـاس، جاكوبستال، جاكوبستال لوكاس، بال و بال لوكاس)، بالإضافة إلى جداءات الأعداد الغوصية المذكورة سابقا مع كثيرات الحدود غوصيان-(جاكوبستال، جاكوبستال لوكاس وبال) و تشيبتشاف من النوعين الثالث والرابع، كما قمنا بحساب الدوال المولدة لجداءات كثيرات الحدود السالف ذكرها.

وانطلاقا من النتائج المتوصل إليها من خلال هذه المذكرة، فإنه يمكننا الحصول على دوال مولدة جديدة كلما قمنا بتوسيع عناصر الأبجديتين A و P، و يبقى البحث في هذا الموضوع مفتوح.

نذكر فيما يلي بعض الاقتراحات الممكنة:

1. بأخذ k عبارة عن عدد طبيعي غير معدوم في النظرية الأولى من الفصل الثالث فإننا سنتحصل على دوال مولدة معممة جديدة لجداءات الأعداد الغوصية مع كثيرات الحدود المتعامدة الشهيرة.
2. بأخذ الأبجدية $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ في النظرية الأولى من الفصل الثالث، سنتمكن من الحصول على العديد من التوابع المولدة لجداءات توابع تناظرية ذات عدة متغيرات مع الأعداد الغوصية و كثيرات الحدود المتعامدة.
3. بأخذ الأبجديتين $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $P=\{p_1,p_2,p_3\}$، سنلجأ لوضع مقترح نظرية جديدة والتي ستمكننا من الحصول على جداءات كثيرات الحدود 2- متعامدة.