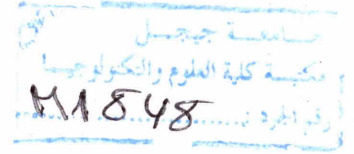


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Jijel
Faculté Des Sciences et de la Technologie
Département d'Automatique



Mémoire de fin d'étude

En vue de l'obtention du diplôme de Master
Automatique

Option : *Informatique Industrielle*



Thème

Quadrotor Autonomous Hovering

Proposé par :
M. Z.Sentouh
M. N.Oucief

Présenté par :
Oussama MERABTI
Oussama KHERKHACHE

Promotion : Juin 2014.

Table des matières

1	Etat de l'art	2
1.1	Introduction	2
1.2	Définitions	2
1.2.1	Avion	2
1.2.2	Hélicoptère	2
1.2.3	Drone	3
1.3	Quadrirotor	3
1.3.1	Définition	3
1.3.2	Avantages de la configuration quadrirotor	4
1.3.3	Les premiers quadrirotors	4
1.3.4	Les travaux de recherche récents sur les quadrirotors	5
1.4	Quelques applications des quadrirotors	7
1.4.1	Applications civiles	7
1.4.2	Applications militaires	7
1.5	Conclusion	7
2	Modélisation dynamique du quadrirotor	8
2.1	Introduction	8
2.2	Les mouvements du quadrirotor	8
2.2.1	L'altitude(Mouvement vertical)	8
2.2.2	Le lacet (Rotation autour de l'axe Z)	8
2.2.3	Le roulis (Le déplacement suivant l'axe X)	9
2.2.4	Le tangage (Le déplacement suivant l'axe Y)	9
2.3	Repérage du quadrirotor dans l'espace	9
2.3.1	Repères utilisés	9
2.3.2	Matrice de rotation	10
2.4	Modèle dynamique du quadrirotor	12
2.4.1	La dynamique de translation	12
2.4.2	La dynamique de rotation	14
2.4.3	La relation entre les angles d'Euler et la vitesse angulaire	16
2.4.4	La dynamique des rotors	16
2.4.5	Modèle d'état du quadrirotor	18
2.4.6	Les contraintes de non-holonomie	19

2.4.7	Point d'équilibre	21
2.5	Simulation en boucle ouverte	23
2.6	Conclusion	28
3	Commande de quadrirotor	29
3.1	Introduction	29
3.2	La commande à structure variable	29
3.2.1	Méthodologie	30
3.2.2	Synthèse de la commande par mode glissant	30
3.2.3	Le phénomène de chattering	31
3.2.4	Synthèse des commandes pour le quadrirotor	32
3.2.5	Résultats et simulations	35
3.3	Conclusion	37
	Annexe	38
A	Stabilité au sens de Lyapunov	39
A.1	Introduction	39
A.2	Définitions	39
A.2.1	Système autonome	39
A.2.2	Point d'équilibre	39
A.2.3	Voisinage de l'origine	39
A.2.4	Fonction candidate du Lyapunov	40
A.3	Stabilité du point d'équilibre	40
A.3.1	Stabilité/instabilité au sens de Lyapunov	40
A.3.2	Attractivité	40
A.3.3	Stabilité asymptotique	40
A.3.4	Stabilité exponentielle	40
A.4	Méthode directe de Lyapunov ou seconde méthode	41
B	Réalisation et perspectives	42
B.1	Présentation du projet	42
B.2	Obstacle et problèmes rencontrés	42
B.3	Tâches effectuées	43
B.4	Conclusion	44

Table des figures

1.1	Exemples des avions	3
1.2	Exemples des hélicoptères	3
1.3	Un drone	4
1.4	Les premiers quadrirotors	5
1.5	Le quadrirotor conçu à l'université de Pennsylvania	6
1.6	Le quadrirotor conçu à l'UTMO	6
1.7	Le quadrirotor de l'Université de Stanford	7
2.1	Les mouvements des gaz et de lacet	9
2.2	Les mouvements de roulis et de tangage	9
2.3	Les repères utilisés	10
2.4	Rotation autour de l'axe X (Roulis)	11
2.5	Rotation autour de l'axe Y (Tangage)	11
2.6	Rotation autour de l'axe Z (Lacet)	11
2.7	Paramétrisation de l'orientation du quadrirotor dans l'espace	12
2.8	La réponse du système en boucle ouverte dans le premier cas(les gaz)	24
2.9	La réponse du système en boucle ouverte dans le deuxième cas(lacet)	25
2.10	La réponse du système en boucle ouverte dans le troisième cas(tangage)	26
2.11	La réponse du système en boucle ouverte dans le quatrième cas(roulis)	27
3.1	Phénomène de réticence	32
3.2	La réponse du système	35
3.3	Les erreurs de poursuite	36
3.4	Les signaux de commande	36
3.5	Le déplacement en 3D	37
B.1	Les composants utilisés dans le quadrirotor	42
B.2	Les composants disponibles	43
B.3	Le montage qui montre le branchement du moteur avec l'Arduino	43
B.4	L'expérience de la balance	44
B.5	Duty cycle	44

Liste des tableaux

2.1	Les paramètres du quadrirotor en boucle ouverte	24
3.1	Les paramètres de la commande utilisés	35

Liste des symboles

x, y, z : Cordonnées cartésiennes dans le repère R_0
 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$: Vitesses de translation dans le repère R_0
 $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$: Vitesses de translation dans le repère R_0
 $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$: Accélérations de translation
 ϕ, θ, ψ : Angles d'Euler
 p, q, r : Vitesses angulaires
 $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$: Accélérations angulaires
 m : La masse
 d : La distance entre le centre de gravité du quadrirotor et l'axe de rotation des hélices
 g : Accélération de la pesanteur
 w_i : Vitesse angulaire
 P : Le poids du quadrirotor
 ρ_{air} : La masse volumique de l'air
 C_d : Coefficient de trainée
 F_t : Force de trainée
 F_p : Force de portance
 f_i : Force de portance produit par l'hélice i
 J : Matrice d'inertie du quadrirotor
 b : Coefficient de portance
 K : Coefficient de trainée
 J_r : Matrice d'inertie du rotor
 C_v : Coefficient de frottement visqueux

✱ *Dédicace* ✱

Nous dédions ce travail à :

- *Nos très chers parents .*
- *Nos familles.*
- *Nos amis.*
- *Toute la promotion 2014.*



Introduction générale

Reproduire les capacités humaines ou animales, de perception ou d'action dans les systèmes robotisés, a toujours été un défi que voulait relever chaque chercheur. Pour ce faire, il fallait surmonter diverses contraintes dont la miniaturisation des capteurs et celle des actionneurs, aussi intégrer les technologies nouvelles dans les systèmes embarqués. Les avancées dans le contrôle automatique et l'intelligence artificielle ont conduit à un essor dans le domaine des robots volants à voilures tournantes miniatures. Les drones sont des engins volants sans pilote capables de mener à bien une mission de façon semi autonome, ou en mode téléguidé.

Parmi ces robots on trouve un dispositif à quatre rotors nommé quadrirotor, il a pris le dessus sur les autres engins volants grâce à sa dynamique élégante et sa simplicité de construction. Pendant ces dernières années une intéressante croissance pour la construction de ce dernier a été remarquée concernant la modélisation et la commande. Ce développement est dû au fait qu'il est maintenant possible de commander des petits modèles de quadrirotors grâce à des petits légers gyroscopes. Cependant, ces systèmes sont difficiles à modéliser ce qui rend la synthèse d'une loi de commande performante difficile quelle que soit la méthode utilisée pour obtenir le modèle mathématique; car il existera toujours un compromis entre la simplicité du modèle et son aptitude à décrire l'ensemble des phénomènes qui caractérisent le comportement global du système.

Dans ce mini projet, On va s'intéresser plus ou moins à l'étude d'un quadrirotor, le travail est organisé en trois chapitres de la manière suivante :

Dans le premier chapitre on y trouvera quelques définitions et des notions de base concernant notre sujet pour mieux comprendre l'utilité et la façon dont un quadrirotor se déplace dans l'espace.

Dans le deuxième chapitre on va déduire mathématiquement le modèle général d'état d'un quadrirotor en exploitant les lois de physique (aérodynamique, mécanique rationnel) en prenant en considération les différentes forces naturelles qui agissent sur le quadrirotor.

Le troisième chapitre est consacré à la conception d'une loi de commande non-linéaire pour la stabilisation de quadrirotor et la poursuite des trajectoires désirées.

Chapitre 1

Etat de l'art

1.1 Introduction

Le développement de plateformes robotiques volantes connaît un essor croissant depuis quelques années en raison de la miniaturisation toujours plus poussée des capteurs et des actionneurs, mais surtout grâce à la possibilité d'embarquer des cartes de commande toujours plus performantes capables d'exécuter la masse de calcul nécessaires au control des robots volants. Parmi ces dispositifs volants, on va s'intéresser aux drones à quatre hélices (Quadrirotor) qui sont des véhicules complexes et difficiles à commander. Dans ce chapitre on va jeter un coup d'œil sur la définition du quadrirotor, son historique, les recherches faites dans les années précédentes, ainsi que ces divers domaines d'application.

1.2 Définitions

1.2.1 Avion

On nomme un avion chaque machine capable de voler. Les avions se divisent en deux catégories [1] :

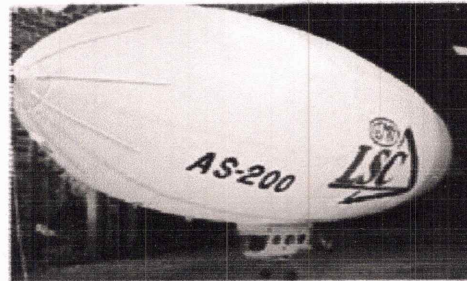
- **Léger** : Montgolfières et les dirigeables. La différence entre un ballon et un ballon dirigeable c'est que ce dernier a des moyens de conduite avancés alors que le ballon ne se dirige qu'avec le vent.
- **Lourd** : Les hélicoptères, les avions conventionnels d'aile fixe.

1.2.2 Hélicoptère

L'hélicoptère est l'architecture à voilure tournante la plus répandue et la mieux maîtrisée à ce jour, puisqu'elle fût la première à être inventée. Ce véhicule aérien peut changer sa direction très rapidement, s'arrêter et reprendre le vol à nouveau [2]. L'hélicoptère a commencé comme un principe de base de l'aviation d'aile rotative. La précision des parties dues à la révolution industrielle a permis à l'hélicoptère de s'évoluer dans le monde des machines modernes que nous voyons aujourd'hui.



(a) Montgolfière



(b) Le dirigeable

FIGURE 1.1 – Exemples des avions



(a) Hélicoptère classique



(b) Hélicoptère en tandem



(c) Hélicoptère d'attaque

FIGURE 1.2 – Exemples des hélicoptères

1.2.3 Drone

Le mot "drone" vient de l'Anglais, qui veut dire "bourdon". Un drone est un véhicule aérien robotique capable de mener une mission de façon plus ou moins autonome. En d'autres termes, cet appareil peut être contrôlé du sol ou d'un autre aéronef par un utilisateur ou bien dans le cas idéal il est parfaitement autonome pour l'exécution de sa mission. Les deux principaux avantages du drone par rapport à un aéronef standard sont :

- La miniaturisation possible, permettant ainsi d'accéder à toute zone d'intervention y compris l'intérieur des bâtiments.
- l'évolution dans un environnement dangereux et inadapté aux pilotes humains.

Ces avantages ont été reconnus très tôt dans le domaine militaire mais sont également valables dans le domaine civil [11].

1.3 Quadrirotor

1.3.1 Définition

Un quadrirotor est un dispositif appartenant à la famille des drones dont les ailes, au contraire de l'hélicoptère, sont fixes. Le contrôle de quadrirotor se fait grâce à la vitesse de rotation de ses

FIGURE 1.3 – Un drone : *Predator tirant un missile*

quatre moteurs. Ce drone est utile pour les missions de sauvetage, la recherche et la surveillance intérieur ou extérieur. Il est capable de suivre une trajectoire bien déterminée afin d'assurer ses caractéristiques dynamique. Le quadrirotor a un système de commande complexe à cause de sa sensibilité durant le processus de stabilisation.

1.3.2 Avantages de la configuration quadrirotor

La conception quadrirotor offre des avantages importants par rapport à d'autres configurations [4] :

- Leurs tailles réduites et leur manœuvrabilité leur permettent de voler dans un environnement fermé (Indoor) ou ouvert (Outdoor).
- La simplicité de sa mécanique facilite sa maintenance.
- Aucun embrayage n'est exigé entre le moteur et le rotor, et aucune exigence n'est donnée sur l'angle d'attaque des rotors.
- Quatre petits rotors remplacent le grand rotor de l'hélicoptère ce qui réduit énormément l'énergie cinétique stockée et minimise les dégâts en cas d'accidents.

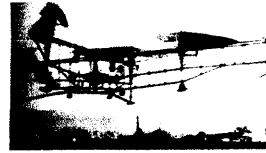
1.3.3 Les premiers quadrirotors

En 1907, les frères Breguet ont construit le premier quadrirotor nommé Gyroplane No.1 [5]. Ce travail a bien montré le principe de quadrirotor. Un an plus tard, un autre quadrirotor Gyroplane No.2 a été construit. Malheureusement, l'aéronef fut détruit lors d'un atterrissage un peu brusque. Le quadrirotor fut réparé, mais la suite des essais des frères Breguet ne déboucha sur aucun résultat significatif [6]. En 1920, Etienne Oemichen a commencé ses expériences dans la conception des aéronefs à voilures tournantes. Six modèles ont été conçus par ce jeune ingénieur de la compagnie Peugeot, après quatre ans, il a fait un premier vol réussi de 360 mètre et plus de mille tests de vol ont été effectués au cours de ces années [7]. En 1922, Georges de Bothezat a construit un quadrirotor chacun d'eux est situé à la fin de l'extrémité de croisement des deux barres placé sous la forme d'une croix [5]. Dans les années cinquantes, à Amityville (New York) Convertawings a construit un quadrirotor disposant des rotors d'un diamètre de 5.92 m et des ailes pour générer une portance vers l'avant. Deux moteurs Continental de 90 CV ont été utilisés et le véhicule a été commandé en changeant la poussée fournie par chaque rotor. Le quadrirotor de Convertawings a été piloté avec succès, mais la production a été arrêtée en raison d'un

manque d'intérêt commercial pour cet avion [7]. La configuration de quadrirotor n'a pas obtenu



(a) Le quadrirotor des frères Berguet



(b) Le quadrirotor d'Oehmichen



(c) Le quadrirotor de Bothezat



(d) Le quadrirotor de conver-tawingszat

FIGURE 1.4 – Les premiers quadrirotors

beaucoup d'attention jusqu'au début des années quatre-vingts. Depuis, plusieurs chercheurs ont commencé à s'intéresser à cette configuration à cause de sa simplicité par rapport aux autres drones, sa capacité à supporter une charge utile accrue et son coût réduit.

1.3.4 Les travaux de recherche récents sur les quadrirotors

Le développement majeur des quadrirotors n'avait vu le jour qu'à partir des années quatre-vingts. Il est dû essentiellement à l'avancement des techniques de production et l'innovation connus dans la technologie des capteurs et des calculateurs numériques, ce qui a rendu les recherches sur les quadrirotors un domaine de plus en plus populaire. Parmi les travaux récents sur les quadrirotors on peut citer :

Université de Pennsylvania

En 2003, une étude a été faite sur le quadrirotor dans l'université de l'état de Pennsylvania [8]. L'étude a été une thèse de master sur le contrôle des drones. L'unité de mesure se compose de trois gyroscopes analogiques (ADXRS150EB) et un accéléromètre (ADXL210EB). L'attitude de ce quadrirotor a été commandée avec une commande PI.

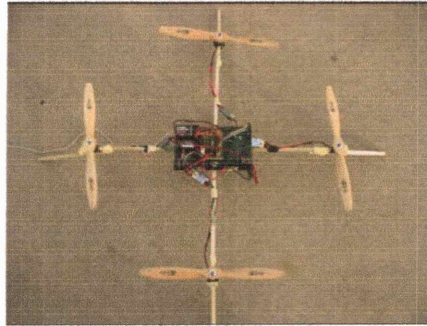


FIGURE 1.5 – Le quadrirotor conçu à l'université de Pennsylvania

Université Technique de Moyen-Orient

L'étude faite en 2004. Trois orthogonaux piézo-électrique ont été utilisé dans le système élaboré à l'université technique de Moyen-Orient pour contrôler l'attitude de quadrirotor [9]. L'attitude est contrôlée avec un régulateur quadratique linéaire et un régulateur PD.

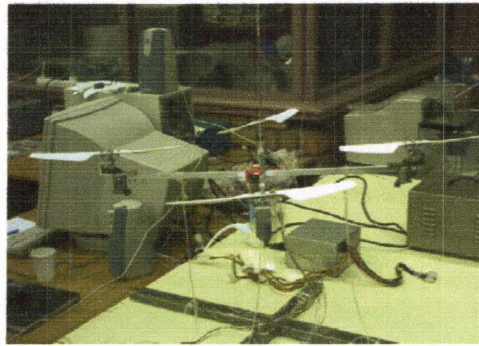


FIGURE 1.6 – Le quadrirotor conçu à l'UTMO

Université de Stanford

En 2007, l'université de Stanford a développé un projet conçu sous le nom STARMAC (*Stanford Testbed of Autonomous Rotorcraft for Multi-Agent Control*). Les quadrirotors conçus pour ce projet (X4-flyer rotorcraft développé d'après l'UNA) sont des plateformes autonomes dédiées pour des applications Outdoor idéales pour valider de nouveaux algorithmes de coordination multi-véhicules et répondent aux exigences [10] :

- Une manoeuvre simple et sûre quelque soit le milieu (indoor/outdoor).
- Une commande de position et poursuite de trajectoire en une pleine autonomie.
- L'utilisation de plusieurs capteurs pour la perception de l'environnement.
- La communication avec d'autres plateformes et avec une station au sol.
- L'implémentation en temps réel des algorithmes de coordination multi-véhicules sur des calculateurs embarqués.

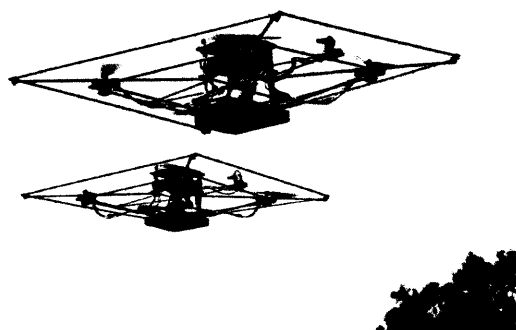


FIGURE 1.7 – Le quadrirotor conçu à l'Université de Stanford

1.4 Quelques applications des quadrirotors

1.4.1 Applications civiles

C'est dans le domaine civil que les quadrirotors sont appelés à jouer le plus grand rôle :

- Surveillance d'urgence : incendies de forêts, avalanches, volcans, tornades, recherche et sauvetage, évaluation des dégâts en cas de catastrophe naturelle.
- Surveillance civile : cultures et épandage agricole, voies maritimes, pollutions par hydrocarbures, localisation pour sauvetage, manifestations, frontières.
- Inspection des ouvrages : ponts, barrages, oléoducs, caténaires et voies ferrées, lignes à haute tension, trafic routier.

1.4.2 Applications militaires

Les quadrirotors représentent une solution intéressante pour les missions dans lesquelles la présence d'équipage à bord n'est pas indispensable ou en cas de risque élevé :

- La surveillance et le renseignement par l'imagerie.
- Le support au combat : imagerie, relais de communication, brouillage.

1.5 Conclusion

Nous constatons que la configuration quadrirotor a connu un grand intérêt dans la dernière décennie, que ce soit à l'échelle scientifique, au niveau des unités de recherche ou à l'échelle commerciale. Cela est essentiellement dû aux avancées croissantes des technologies d'instrumentation et des calculateurs et aux avantages qu'offre le quadrirotor par rapport aux autres configurations.

Chapitre 2

Modélisation dynamique du quadrirotor

2.1 Introduction

La modélisation regroupe un ensemble des techniques permettant de disposer d'une représentation mathématique du système à étudier. Elle nécessite une connaissance précise des phénomènes intervenant dans le système et une aptitude à les représenter par des équations mathématiques. La synthèse des lois de commande d'un système dynamique nécessite une modélisation précise de ce dernier afin que le modèle puisse prévoir au mieux le comportement du système aux diverses excitations (commandes, perturbations, . . .). Le quadrirotor est classé dans la catégorie des systèmes volants les plus complexes vu le nombre des phénomènes physiques qui affectent sa dynamique. Afin de concevoir un contrôleur de vol, on doit d'abord comprendre profondément les mouvements du système et sa dynamique.

2.2 Les mouvements du quadrirotor

Un quadrirotor possède, comme son nom l'indique, quatre rotors pour se sustenter. Ce sont ces quatre rotors qui fournissent la force verticale (portance) qui permet à l'appareil de s'élever. Les mouvements possibles du quadrirotor sont [12] :

2.2.1 L'altitude (Mouvement vertical)

Cela représente le mouvement de montée/descente du drone. Les quatre moteurs tournent à la même vitesse. On augmente la vitesse des quatre moteurs en même temps pour faire augmenter l'altitude et inversement pour la diminuer.

2.2.2 Le lacet (Rotation autour de l'axe Z)

Il permet de faire tourner le quadrirotor autour lui même, on réalise ce mouvement en agissant sur les moteurs par paires : on diminue la vitesse des deux moteurs avant et arrière et on augmente les deux autres (gauche et droite).

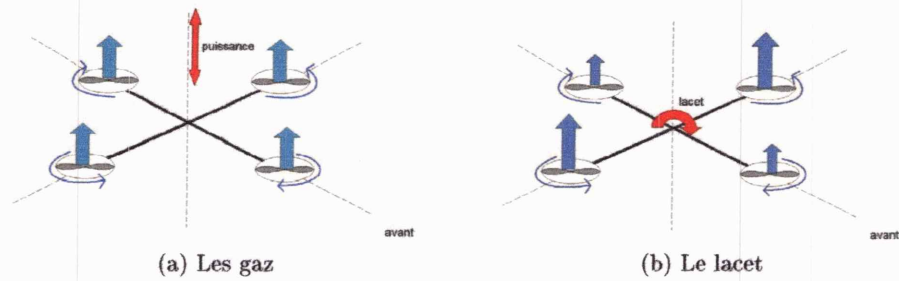


FIGURE 2.1 – Les mouvements des gaz et de lacet

2.2.3 Le roulis (Le déplacement suivant l'axe X)

Ce mouvement se produit suite à une rotation autour de l'axe X en agissant sur les moteurs latéraux (droite et gauche). Par exemple, si le quadrirotor penche à droite, on doit augmenter la vitesse du moteur droit en diminuant celle du moteur gauche.

2.2.4 Le tangage (Le déplacement suivant l'axe Y)

Ce mouvement se produit suite à une rotation autour de l'axe Y en agissant sur les moteurs avant et arrière permettant au quadrirotor de garder une assiette stable sur cet axe. Si le quadrirotor est orienté vers l'avant, il faut donner plus de vitesse au moteur avant et baisser celle du moteur arrière.

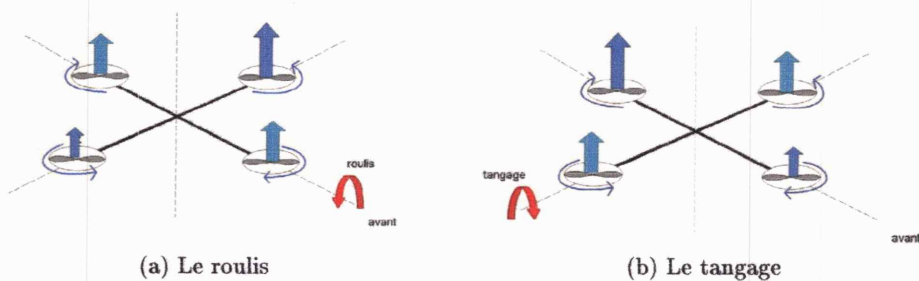


FIGURE 2.2 – Les mouvements de roulis et de tangage

2.3 Repérage du quadrirotor dans l'espace

2.3.1 Repères utilisés

Pour repérer un quadrirotor, on doit utiliser les deux repères suivants :

1. Le repère terrestre

C'est un repère lié à la terre supposé immobile. Il est noté : $R_0(O_0, X_0, Y_0, Z_0)$.

2. Le repère lié au corps du quadrirotor

C'est un repère dont l'origine O_1 coïncide avec le centre de gravité G du quadrirotor. Il est noté : $R_1(O_1, X_1, Y_1, Z_1)$.

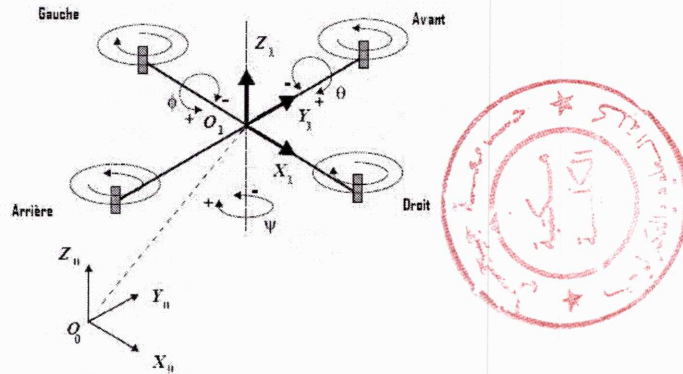


FIGURE 2.3 – Les repères utilisés

On définit les paramètres du quadrirotor $(x, y, z, \phi, \theta, \psi, V, \Omega)$ de la façon suivante :

- x : Coordonnée du centre de gravité G du quadrirotor suivant X_0 .
- y : Coordonnée du centre de gravité G du quadrirotor suivant Y_0 .
- z : Coordonnée du centre de gravité G du quadrirotor suivant Z_0 .
- ϕ (*Angle de roulis*) : Rotation autour de X_1 ($-\pi < \phi < \pi$).
- θ (*Angle de tangage*) : Rotation autour de Y_1 ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$)
- ψ (*Angle de lacet*) : Rotation autour de Z_1 ($-\pi < \psi < \pi$)
- $V = [u \ v \ w]^T \in R_1$: La vitesse linéaire liée au quadrirotor.
- $\Omega = [p \ q \ r]^T \in R_1$: La vitesse de rotation liée au même corps.

2.3.2 Matrice de rotation

On considère que les centres O_0 et O_1 des deux repères sont confondus, ce qui signifie que le repère R_1 ne fait que des rotations par rapport au repère R_0 . Trois paramètres indépendants sont nécessaires pour décrire complètement l'orientation du repère R_1 par rapport à celle de R_0 . Le passage du repère R_1 vers le repère R_0 se fera par trois rotations en utilisant deux repères intermédiaires R_i et R_j [13].

1. Passage du repère R_0 vers le repère R_i

La rotation se fait autour de l'axe $x_i = x_j$. On passe du repère R_0 vers R_i en faisant une rotation d'angle ϕ appelé angle de roulis. La représentation se fait par des figures planes, à partir desquelles nous construisons les matrices de passage. Nous avons ainsi la matrice [13] :

$$R(X_0, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

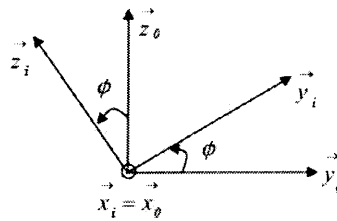


FIGURE 2.4 – Rotation autour de l'axe X (Roulis)

2. Passage du repère R_j vers le repère R_i

La rotation se fait autour de l'axe $y_j = y_i$. On passe du repère R_j vers le repère R_i en faisant une rotation d'angle θ appelé angle de tangage. Nous avons ainsi la matrice [13] :

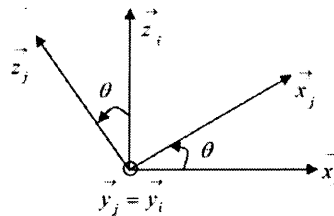


FIGURE 2.5 – Rotation autour de l'axe Y (Tangage)

$$R(Y_0, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

3. Passage du repère R_1 vers le repère R_j

La rotation se fait autour de l'axe $Z_1 = Z_j$. On passe du repère R_1 vers le repère R_j en faisant une rotation d'angle ψ appelé angle du lacet. Nous avons ainsi la matrice [13] :

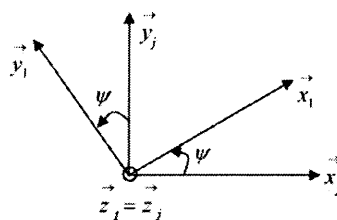


FIGURE 2.6 – Rotation autour de l'axe Z (Lacet)

$$R(Z_0, \psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Le passage du repère R_1 vers le repère R_0 ou inversement se fait par trois rotations successives de telle sorte que tous les axes de R_1 occupent des positions différentes de celle de R_0 . La matrice de passage de R_1 vers R_0 est donnée par le produit des trois matrices successives, on obtient :

$$R = R(\phi, \theta, \psi) = R(Z_0, \psi) * R(Y_0, \theta) * R(X_0, \phi)$$

$$R = \begin{bmatrix} c(\theta)c(\psi) & -c(\theta)s(\psi) + s(\phi)s(\theta)c(\psi) & s(\phi)s(\psi) + c(\phi)s(\theta)c(\psi) \\ c(\theta)s(\psi) & c(\phi)c(\psi) + s(\phi)s(\theta)s(\psi) & -s(\phi)c(\psi) + c(\phi)s(\theta)s(\psi) \\ -s(\theta) & s(\phi)c(\theta) & c(\phi)c(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Avec $c = \cos$ et $s = \sin$.

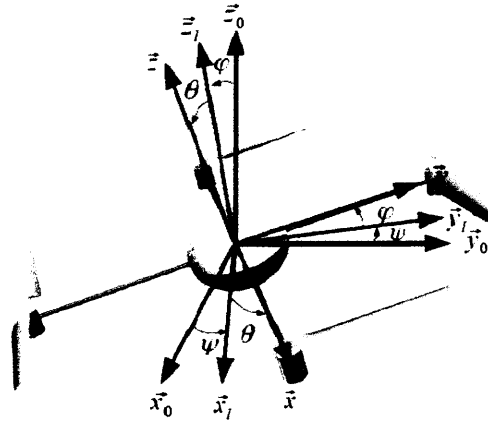


FIGURE 2.7 – Paramétrisation de l'orientation du quadrirotor dans l'espace

2.4 Modèle dynamique du quadrirotor

Pour établir le modèle dynamique du quadrirotor on considère les hypothèses suivantes [14] :

- La structure est supposée rigide.
- La structure est parfaitement symétrique.
- La portance et la traînée sont proportionnelles au carré de la vitesse de rotation des moteurs.
- On ne prend pas en compte la vitesse de rotation des rotors par rapport au sol.

2.4.1 La dynamique de translation

D'après la première loi de la dynamique de Newton :

$$\frac{d(mV)}{dt} = \sum F_{ext \rightarrow rep} \quad (2.5)$$

La vitesse exprimée dans le repère inertiel est :

$$\frac{d(mV)}{dt} = m\dot{V} \quad (2.6)$$

Les forces extérieures appliquées au quadrirotor sont :

1. Le poids

Il est donné par :

$$P = (-mg)z_0 \quad (2.7)$$

2. La force de traînée

la traînée est la force qui s'oppose au mouvement du quadrirotor. Mathématiquement c'est la composante des efforts exercés sur le drone en même direction mais au sens opposé. Elle est donnée par :

$$F_t = -\rho_{air} C_d \frac{|V|V}{2} \quad (2.8)$$

Où : C_d est le coefficient de traînée.

En prenant $C_{da} = \frac{1}{2}\rho_{air}C_d$, l'équation précédente devient :

$$F_t = -C_{da}|V|V \quad (2.9)$$

3. La force de portance

Elle représente la force totale produite par les quatre hélices. Elle est donnée par :

$$F_p = \left(\sum_{i=1}^4 f_i \right) z_1 \quad (2.10)$$

Où : f_i est la force de portance produite par la rotation de l'hélice i . Elle est donnée par :

$$f_i = bw_i^2 \quad (2.11)$$

Avec : b est le coefficient de portance. Donc la force de portance totale est :

$$F_p = b(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2)z_1 \quad (2.12)$$

Pour exprimer cette force dans le repère inertiel on doit multiplier l'équation (2.10) par la matrice de rotation R obtenue dans (2.4), cela donne :

$$F_p = \left(\sum_{i=1}^4 f_i \right) (Rz_0) \quad (2.13)$$

En remplaçant les expressions des forces, l'équation (2.5) devient :

$$\dot{V} = -gz_0 - \frac{C_{da}}{m}|V|V + \frac{F_p}{m}(Rz_0) \quad (2.14)$$

En développant l'équation précédente, sachant que $\dot{P} = V$ alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{z} = w \\ \dot{u} = -\frac{C_{da}^u}{m}|u|u + \frac{Fp}{m}(\text{Sin}(\psi)\text{Sin}(\phi) + \text{Sin}(\theta)\text{Cos}(\psi)\text{Cos}(\phi)) \\ \dot{v} = -\frac{C_{da}^v}{m}|v|v + \frac{Fp}{m}(\text{Sin}(\psi)\text{Sin}(\theta)\text{Cos}(\phi) - \text{Sin}(\phi)\text{Cos}(\psi)) \\ \dot{w} = -g - \frac{C_{da}^w}{m}|w|w + \frac{Fp}{m}(\text{Cos}(\theta)\text{Cos}(\phi)) \end{array} \right. \quad (2.15)$$

2.4.2 La dynamique de rotation

D'après la deuxième loi de la dynamique de Newton :

$$\frac{d(J\Omega)}{dt} = \sum F_{ext \rightarrow rep} \quad (2.16)$$

Et comme la vitesse angulaire est exprimé dans le repère lié au quadrirotor, alors :

$$\frac{d(J\Omega)}{dt} = J\dot{\Omega} + \Omega \wedge J\Omega \quad (2.17)$$

Les couples extérieurs sont :

1. Les couples aérodynamiques

Portance

La portance des moteurs crée en direction des axes X et Y, des couples :

$$\Gamma_a^1 = db(\omega_4^2 - \omega_2^2)$$

et

$$\Gamma_a^2 = db(\omega_3^2 - \omega_1^2)$$

Trainée

La trainée des hélices crée un couple vertical.

$$\Gamma_a^3 = k(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2)$$

On assemble les expressions dans l'équation (2.18) suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_a^1 = db(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ \Gamma_a^2 = db(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ \Gamma_a^3 = k(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Avec : k est le coefficient de traînée et d est la distance entre le centre de gravité du quadrirotor et l'axe du rotor.

2. Le moment gyroscopique

L'effet gyroscopique se définit comme la difficulté de modifier la position ou l'orientation du plan de rotation d'une masse tournante [15]. Il crée dans les systèmes physiques en mouvement avec des parties rotatoires. Lorsque la trajectoire du quadrotor change, le rotor subit des rotations du fuselage. L'expression générale de ce moment est donnée par :

$$\Gamma_{gyro} = \sum_{i=1}^4 \Omega \wedge J_r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (-1)^i \omega_i \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

La matrice d'inertie du chaque rotor est supposée diagonale :

$$J_r = \begin{bmatrix} J_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & J_{rz} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

A partir des équations (2.19) et (2.20), on obtient :

$$\Gamma_{gyro} = \sum_{i=1}^4 [(-1)^i \omega_i J_{rz}] \Omega \wedge Z_1 \quad (2.21)$$

En remplaçant l'expression (2.21) dans l'équation (2.17) :

$$J\dot{\Omega} + \Omega \wedge J\Omega = \Gamma_a + \sum_{i=1}^4 [(1)^i \omega_i J_{rz}] \Omega \wedge z_1 \quad (2.22)$$

On a cité précédemment que la structure du quadrotor est supposée symétrique cela implique que sa matrice d'inertie J est diagonale :

$$J = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Donc l'équation (2.22) devient :

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{J_y - J_z}{J_x} qr + \frac{J_{rz}}{J_x} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) q + \frac{\Gamma_a^1}{J_x} \\ \dot{q} = \frac{J_z - J_x}{J_y} pr + \frac{J_{rz}}{J_y} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) p + \frac{\Gamma_a^2}{J_y} \\ \dot{r} = \frac{J_x - J_y}{J_z} pq + \frac{\Gamma_a^3}{J_z} \end{cases} \quad (2.24)$$

2.4.3 La relation entre les angles d'Euler et la vitesse angulaire

Si un solide tourne à une vitesse constante, sa vitesse angulaire Ω est constante. Par contre, les variations des angles d'Euler seront variables car elles dépendent des angles instantanés entre les axes des deux repères. La séquence des angles d'Euler est obtenue à partir de trois rotations successives : roulis, tangage et lacet. La variation $\dot{\phi}$ nécessite une rotation, $\dot{\theta}$ nécessite deux rotations et $\dot{\psi}$ nécessite trois rotations [16] :

$$\Omega = R(X_0, \phi) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R(X_0, \phi)R(Y_0, \theta) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R(X_0, \phi)R(Y_0, \theta)R(Z_0, \psi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S\theta \\ 0 & C\phi & S\phi C\theta \\ 0 & -S\phi & C\theta C\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Donc la relation entre $\dot{\Phi} = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$ et $\Omega = [p \ q \ r]^T$ est : $\dot{\Phi} = T * \Omega$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & S\phi t\theta & C\phi t\theta \\ 0 & C\phi & -S\phi \\ 0 & \frac{S\phi}{C\theta} & \frac{C\phi}{C\theta} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

En développant l'équation précédente, on aura :

$$\begin{cases} \dot{\phi} = p + S(\phi)t(\theta)q + C(\phi)t(\theta)r \\ \dot{\theta} = C(\phi)q + S(\phi)r \\ \dot{\psi} = \frac{S\phi}{C\theta}q + \frac{C\phi}{C\theta}r \end{cases} \quad (2.28)$$

2.4.4 La dynamique des rotors

En utilisant le deuxième théorème de Newton :

$$\frac{d(J_r \bar{\omega}_i)}{dt} = \sum \Gamma_{ext \rightarrow rotor_i} \quad (2.29)$$

La matrice d'inertie J_r de chaque rotor est constante, et comme la vitesse angulaire $\bar{\omega}_i$ est exprimée dans le repère lié aux rotors, donc :

$$\frac{d(J_r \bar{\omega}_i)}{dt} = J_r \dot{\bar{\omega}}_i + \bar{\omega}_i \wedge J_r \bar{\omega}_i \quad (2.30)$$

Les couples extérieurs sont :

1. Un couple réactif

C'est un couple généré par l'hélice tournant à une vitesse $\bar{\omega}_i$ et opposant à sa rotation. Il est donné par :

$$\bar{Q}_i = -k|\bar{\omega}_i|\bar{\omega}_i \quad (2.31)$$

Où : k est le coefficient de trainée. Il dépend de plusieurs facteurs : la densité de l'air, le rayon de l'hélice, nombre de pales, . . .

2. Un couple moteur

Il est noté Γ_i .

3. Un couple de poussé

Il est produit par la force de poussé générée par l'hélice. Comme cette force est perpendiculaire au plan de rotation de l'hélice, elle ne produit aucun couple.

4. Un moment visqueux

Résultat du frottement visqueux, qui s'oppose à la rotation de l'hélice. Il est donné par :

$$\Gamma_{visq} = -C_v\bar{\omega}_i \quad (2.32)$$

Où : C_v est le coefficient du frottement visqueux.

Comme les hélices ne tournent pas dans la même direction, le signe du couple moteur est toujours celui de la vitesse de rotation ω_i , tandis que le couple réactif et le moment visqueux sont toujours opposés à lui, donc on peut écrire :

$$\sum \Gamma_{ext \rightarrow rotor_i} = (-1)^i [\Gamma_i - k\omega_i^2 - C_v\omega_i] z_1 \quad (2.33)$$

L'équation (2.29) devient :

$$\frac{d(J_r(-1)^i\omega_i)}{dt} z_1 = j_{rz} [(-1)^i\dot{\omega}_i z_1 + (-1)^i\omega_i(\Omega \wedge z_1)] \quad (2.34)$$

Le terme $(-1)^i\omega_i(\Omega \wedge z_1)$ n'est pas dans la direction de l'axe z_1 , donc la projection sur l'axe z_1 est nulle. ainsi l'équation dynamique du rotor i devient :

$$J_{rz}\dot{\omega}_i = \Gamma_i - k\omega_i^2 - C_v\omega_i \quad (2.35)$$

On aura le système suivant :

$$\begin{cases} J_{rz}\dot{\omega}_1 = \Gamma_1 - k\omega_1^2 - C_v\omega_1 \\ J_{rz}\dot{\omega}_2 = \Gamma_2 - k\omega_2^2 - C_v\omega_2 \\ J_{rz}\dot{\omega}_3 = \Gamma_3 - k\omega_3^2 - C_v\omega_3 \\ J_{rz}\dot{\omega}_4 = \Gamma_4 - k\omega_4^2 - C_v\omega_4 \end{cases} \quad (2.36)$$

2.4.5 Modèle d'état du quadrirotor

Le système dynamique final du quadrirotor donné par (2.15)(2.24)(2.28)(2.36) est subdivisé en quatre sous-systèmes (position /vitesse linéaire, angles d'Euler, vitesse angulaire et équations des rotors). Une architecture de ce type, où l'état du premier système est contrôlé par une commande indirecte, qui est en réalité l'état prochain du système, est appelée une structure cascade. Pour des raisons de simplification et comme les mouvements angulaires du quadrirotor sont de faibles amplitudes et de petites vitesses, cela revient à écrire : $\Omega = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$

Le modèle dynamique simplifié sera :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\phi} = \frac{J_y - J_z}{J_x} \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{J_{xz}}{J_x} \dot{\theta} \bar{\Omega} + \frac{d}{J_x} U_2 \\ \ddot{\theta} = \frac{J_z - J_x}{J_y} \dot{\phi} \dot{\psi} - \frac{J_{xz}}{J_y} \dot{\phi} \bar{\Omega} + \frac{d}{J_y} U_3 \\ \ddot{\psi} = \frac{J_x - J_y}{J_z} \dot{\theta} \dot{\phi} + \frac{1}{J_z} U_4 \\ \ddot{x} = (C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{y} = (C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{z} = (C\phi C\theta) \frac{U_1}{m} - g \end{array} \right. \quad (2.37)$$

Avec : U_1, U_2, U_3 et U_4 sont les entrées de commande du système où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_a^1 = dU_2 \\ \Gamma_a^2 = dU_3 \\ \Gamma_a^3 = U_4 \\ F_p = U_1 \end{array} \right. \quad (2.38)$$

L'écriture des entrées de commande en fonction des vitesses de rotation des rotors est la suivante :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b & b & b \\ 0 & -b & 0 & b \\ -b & 0 & b & 0 \\ -k & k & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Tel que :

$$\bar{\Omega} = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 \quad (2.40)$$

On aura donc le système d'état suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_1 x_4 x_6 + a_2 x_4 \bar{\Omega} + b_1 U_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = a_3 x_2 x_6 + a_4 x_2 \bar{\Omega} + b_2 U_3 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = a_5 x_2 x_4 + b_3 U_4 \\ \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_8 = \frac{U_1}{m} U_x \\ \dot{x}_9 = x_{10} \\ \dot{x}_{10} = \frac{U_1}{m} U_y \\ \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = \frac{C(x_1)C(x_3)}{m} U_1 - g \end{array} \right. \quad (2.41)$$

Où :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{J_y - J_z}{J_x}; a_2 = \frac{J_{xz}}{J_x}; a_3 = \frac{J_z - J_x}{J_y}; a_4 = -\frac{J_{xz}}{J_y}; a_5 = \frac{J_x - J_y}{J_z}; \\ b_1 = \frac{d}{J_x}; b_2 = \frac{d}{J_y}; b_3 = \frac{1}{J_z} \end{array} \right. \quad (2.42)$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_x = Cx_1 Sx_3 Cx_5 + Sx_1 Sx_5 \\ U_y = Cx_1 Sx_3 Sx_5 - Sx_1 Cx_5 \end{array} \right. \quad (2.43)$$

2.4.6 Les contraintes de non-holonomie

D'après les équations dynamiques du mouvement de rotation, on remarque que les trois angles ϕ , θ et ψ ne dépend pas théoriquement des translations, cependant, on voit bien que la dynamique de translation dépend seulement des angles de rotation.

Donc on peut conclure que toute variation dans le angles ϕ et θ ou ψ va produire une variation dans le mouvement de translation dans l'espace.

Pour obtenir un mouvement de translation désiré, il faut spécifier des conditions bien traitées sur ses deux angles ϕ et θ afin d'éviter des restrictions sur le déplacement. Autrement dit des contraintes cinématiques nommées non-holonomies pour déterminer les chemins autorisés seulement, c'est-à-dire : ne pas tomber dans les singularités.

D'après les équations dynamiques du mouvement de translation, on peut déterminer les contraintes de non-holonomies analytiquement[21].

La condition sur l'angle de roulis ϕ

De système des équations (2.37) on a :

$$\frac{m}{U_1}\ddot{x} - C\phi S\theta C\psi = S\phi S\psi \quad (2.44)$$

et

$$-\frac{m}{U_1}\ddot{y} + C\phi S\theta S\psi = S\phi C\psi \quad (2.45)$$

Multipliant (2.44) par $S\psi$ et multipliant (2.45) par $C\psi$, on obtient :

$$\left(\frac{m}{U_1}\ddot{x} - C\phi S\theta C\psi = S\phi S\psi\right)S\psi \quad (2.46)$$

$$\left(-\frac{m}{U_1}\ddot{y} + C\phi S\theta S\psi = S\phi C\psi\right)C\psi \quad (2.47)$$

La somme des équations (2.46) et (2.47) nous donne :

$$S\phi = \frac{m}{U_1}[\ddot{x}S\psi - \ddot{y}C\psi] \quad (2.48)$$

Le carré des trois dernières équations du système (2.37) donnent respectivement :

$$\ddot{x}^2 = (C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi)^2 \frac{U_1^2}{m^2} \quad (2.49)$$

$$\ddot{y}^2 = (C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi)^2 \frac{U_1^2}{m^2} \quad (2.50)$$

$$(\ddot{z} + g)^2 = (C\phi C\theta)^2 \frac{U_1^2}{m^2} \quad (2.51)$$

La somme des équations (2.49), (2.50) et (2.51) donne :

$$\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + (\ddot{z} + g)^2 = \left[\begin{aligned} &(C^2\phi S^2\theta C^2\psi + S^2\phi S^2\psi + 2S\phi S\psi C\phi S\theta C\psi + C^2\phi S^2\theta S^2\psi) \\ &+ S^2\phi C^2\psi - 2S\phi C\psi C\phi S\theta S\psi + C^2\theta C^2\phi \end{aligned} \right] \frac{U_1^2}{m^2} \quad (2.52)$$

$$\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + (\ddot{z} + g)^2} = \frac{U_1}{m} \quad (2.53)$$

$$\frac{m}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + (\ddot{z} + g)^2}} \quad (2.54)$$

En remplaçant dans (2.48), on trouve la condition sur l'angle ϕ

$$S\phi = \frac{\ddot{x}S\psi - \ddot{y}C\psi}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + (\ddot{z} + g)^2}} \quad (2.55)$$

La condition sur l'angle de roulis θ

Dans ce cas et en multipliant (2.44) par $C\psi$ et (2.45) par $S\psi$, on obtient :

$$\left(\frac{m}{U_1}\ddot{x} - C\phi S\theta C\psi = S\phi S\psi\right)C\psi \quad (2.56)$$

$$\left(-\frac{m}{U_1}\ddot{y} + C\phi S\theta S\psi = S\phi C\psi\right)S\psi \quad (2.57)$$

La somme de (2.56) et (2.57) donne :

$$\frac{m}{U_1}[\ddot{x}C\psi - \ddot{y}S\psi] = C\phi S\theta \quad (2.58)$$

Remplaçant dans la dernière équation du système (2.37), on trouve :

$$C\phi = (\ddot{z} + g)\frac{m}{U_1 C\theta} \quad (2.59)$$

En remplaçant (2.59) dans (2.58), on trouve la condition sur l'angle θ

$$tg\theta = \frac{\ddot{x}C\psi - \ddot{y}S\psi}{\ddot{z} + g} \quad (2.60)$$

Donc les contraintes de non holonomie du système sont données par :

$$\begin{cases} S\phi = \frac{\ddot{x}S\psi - \ddot{y}C\psi}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + (\ddot{z} + g)^2}} \\ tg\theta = \frac{\ddot{x}C\psi - \ddot{y}S\psi}{\ddot{z} + g} \end{cases} \quad (2.61)$$

2.4.7 Point d'équilibre

Pour mieux comprendre le système, il faut déduire le point d'équilibre de système. On prend l'équation angulaire égale à zéro[22].

$$\dot{X}_{Ang} \begin{bmatrix} x_2 \\ a_1 x_4 x_6 + a_2 x_4 \bar{\omega} \\ x_4 \\ a_3 x_2 x_6 + a_4 x_2 \bar{\omega} + b_2 U_3 \\ x_6 \\ a_5 x_2 x_4 + b_3 U_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.62)$$

On obtient :

$$\begin{cases} x_2 = x_4 = x_6 = 0 \\ U_2 = U_3 = U_4 = 0 \end{cases} \quad (2.63)$$

On met l'équation cartésienne égale à zéro :

$$\dot{X}_{cart} \begin{bmatrix} x_8 \\ \frac{1}{m} U_x \\ x_{10} \\ \frac{1}{m} U_y \\ x_{12} \\ -g + \frac{1}{m} U_z \end{bmatrix} = 0 \quad (2.64)$$

D'où :

$$\begin{cases} x_8 = 0 \\ \frac{1}{m} (C x_5 C x_1 S x_3 + S x_5 S x_1) U_1 = 0 \\ x_{10} = 0 \\ \frac{1}{m} (S x_5 C x_1 S x_3 + C x_5 S x_1) U_1 = 0 \\ x_{12} = 0 \\ -g + \frac{1}{m} (C x_3 C x_1) U_1 = 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

De (2.63) On peut clairement remarquer l'absence de rotation selon les axes x et y , ainsi, de (2.65) on peut conclure que :

$$x_2 = x_4 = x_6 = x_8 = x_{10} = 0 \quad (2.66)$$

et

$$-g + \frac{1}{m}(Cx_3Cx_1)U_1 = 0 \quad (2.67)$$

Cela implique que :

$$U_1 = mg \quad (2.68)$$

D'autre part, on a :

$$U_1 = b(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2) \quad (2.69)$$

Pour satisfaire les équations (2.40) et (2.63) il faut que :

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 \quad (2.70)$$

Des équations (2.68), (2.69) et (2.71), on aura donc :

$$W_i = \sqrt{\frac{mg}{4b}} \quad (2.71)$$

Avec : $i = 1...4$;

Où le vecteur de commande au point d'équilibre est :

$$U_1 = \begin{bmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

2.5 Simulation en boucle ouverte

Dans cette partie, on va faire la simulation de comportement du quadrirotor en injectant directement aux entrées du système les vitesses des rotations.

Pour illustrer le comportement dynamique du système et l'effet des vitesses de rotations sur les mouvements du Quadrirotor, on prend les quatres cas suivants :

1. $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 225.6779(\frac{rad}{sec})$
2. $w_1 = w_3 = 225.6779(\frac{rad}{sec})$ et $w_2 = w_4 = 215.6779(\frac{rad}{sec})$
3. $w_1 = 220.6779(\frac{rad}{sec})$ et $w_3 = 230.6779$ et $w_2 = w_4 = 225.6679(\frac{rad}{sec})$
4. $w_2 = 220.6779(\frac{rad}{sec})$, $w_4 = 230.6779(\frac{rad}{sec})$ et $w_1 = w_3 = 225.6679(\frac{rad}{sec})$

On a aussi les conditions suivantes :

- L'état initial du système est $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
- La durée de simulation en boucle ouverte est 10sec

Les paramètres du modèle du Quadrirotor utilisés dans la simulation sont présentés dans le tableau suivant :

On obtient les résultats de simulations suivantes :

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
m	0.650 kg	b	$3.13e-5$ N/rad/s
k	$7.5e-5$ N.m/rad/s	d	0.23 m
J_x	$7.5e-3$ kg.m ²	J_y	$7.5e-3$ kg.m ²
J_z	$1.3e-2$ kg.m ²	J_{rz}	$6e-5$ kg.m ²
g	9.81 N/kg	-	-

TABLE 2.1 – Les paramètres du quadrirotor en boucle ouverte

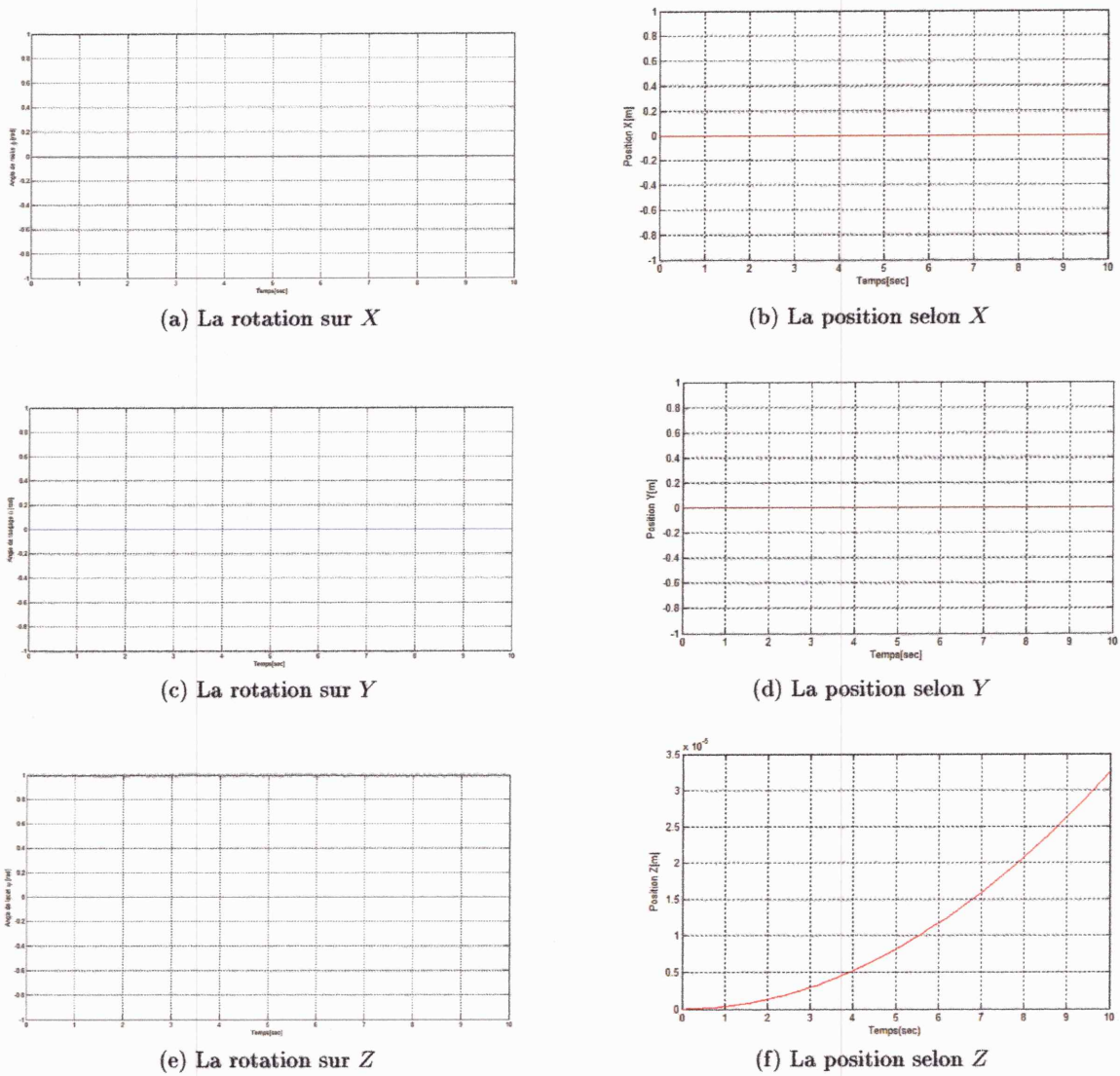
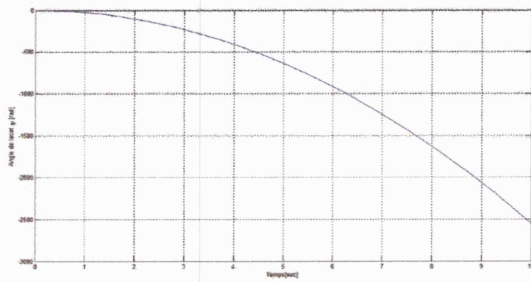
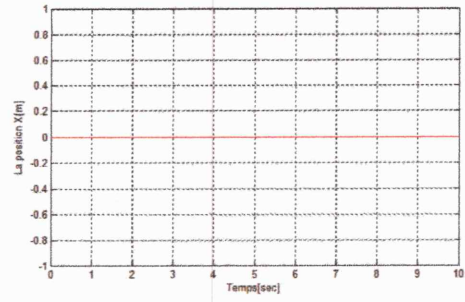


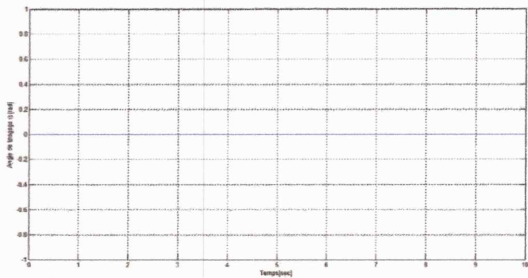
FIGURE 2.8 – La réponse du système en boucle ouverte dans le premier cas(les gaz)



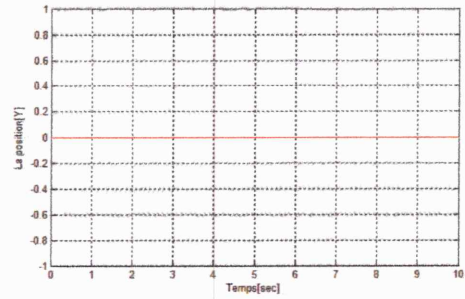
(a) La rotation sur X



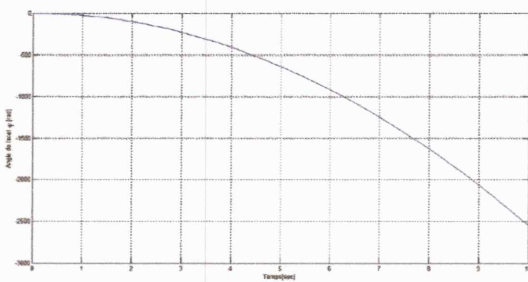
(b) La position selon X



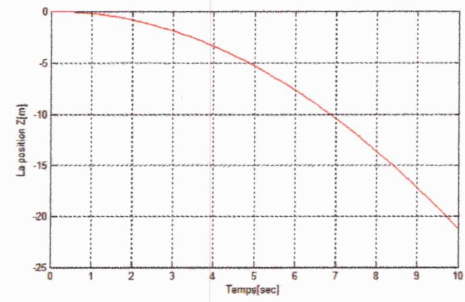
(c) La rotation sur Y



(d) La position selon Y

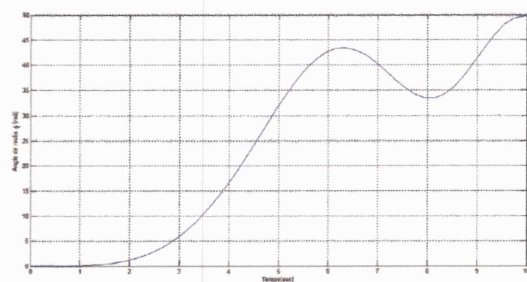


(e) La rotation sur Z

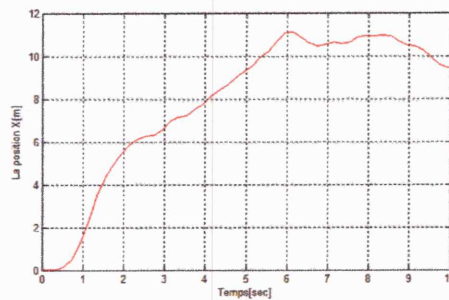


(f) La position selon Z

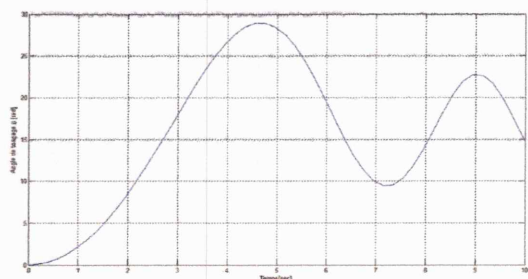
FIGURE 2.9 – La réponse du système en boucle ouverte dans le deuxième cas(lacet)



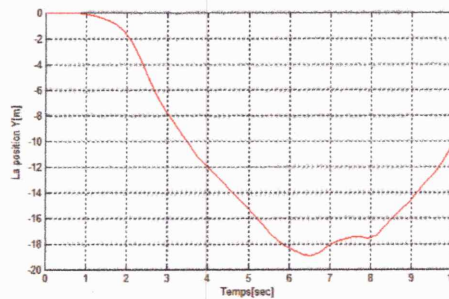
(a) La rotation sur X



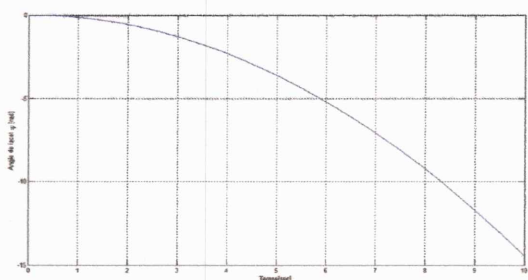
(b) La position selon X



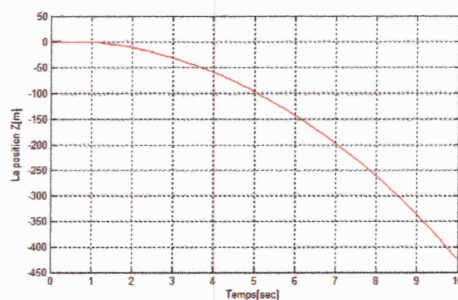
(c) La rotation sur Y



(d) La position selon Y

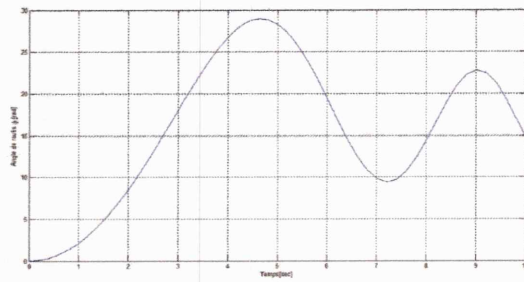


(e) La rotation sur Z

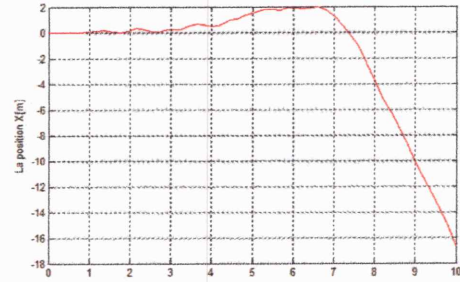


(f) La position selon Z

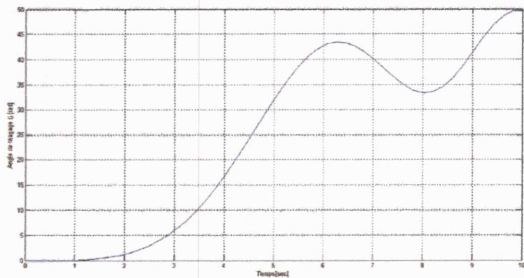
FIGURE 2.10 – La réponse du système en boucle ouverte dans le troisième cas (tangage)



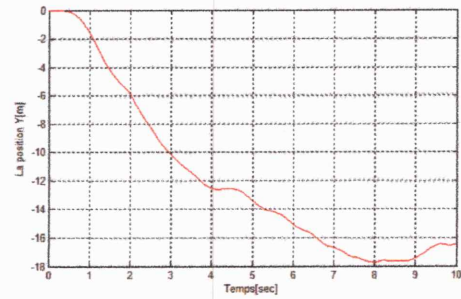
(a) La rotation sur X



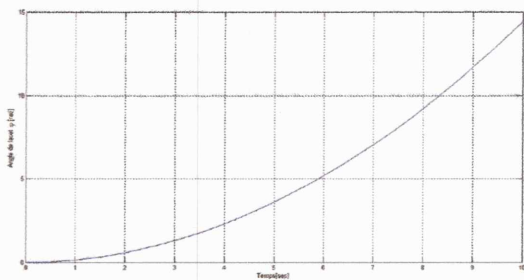
(b) La position selon X



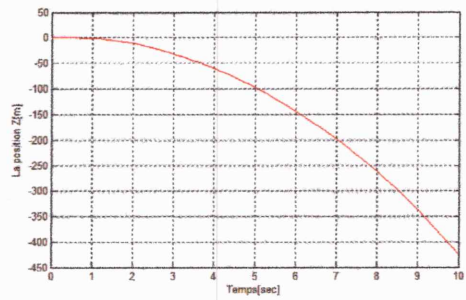
(c) La rotation sur Y



(d) La position selon Y



(e) La rotation sur Z



(f) La position selon Z

FIGURE 2.11 – La réponse du système en boucle ouverte dans le quatrième cas(roulis)

Commentaires

- D’après la figure (2.8), on remarque clairement qu’il n’existe que le mouvement de translation vertical, ce mouvement dû aux forces de portance créées par la commande U_1 . Autrement, on remarque que la translation suivant l’axe y et z est nulle car la rotation autour de ces deux axes est nulle. On conclut que la commande U_1 est responsable du mouvement de translation verticale selon l’axe z .
- D’après la figure (2.9), on remarque que la commande U_4 est non nulle ce qui explique le mouvement de rotation autour de l’axe Z . Ainsi, la commande U_1 est différente au poids du quadrirotor alors, on obtient toujours le mouvement de translation vertical.
- D’après la figure (2.10), on remarque que l’action U_3 est positive, alors on obtient un mouvement de rotation autour de l’axe Y par un angle θ .
Le mouvement de rotation sur l’axe X avec un angle ϕ engendre un mouvement de translation sur l’axe Y .
L’action U_4 est positive ce qui explique l’apparition du mouvement de lacet (rotation sur Z).
- D’après la figure (2.11), on remarque que l’action U_2 est positive ce qui explique l’obtention d’un mouvement de rotation sur l’axe X par un angle ϕ .
La rotation autour de l’axe X procure le mouvement de translation sur l’axe Y .
Malgré que l’action U_3 est nulle, il existe un mouvement de rotation sur l’axe Y dû essentiellement à l’effet gyroscopique provoqué par le mouvement de rotation autour de l’axe X .

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a décrit les mouvements du quadrirotor. Puis, on a donné un modèle dynamique en utilisant le formalisme de Newton. Ce modèle comprend presque tous les phénomènes physiques agissant sur le quadrirotor et montre la nature couplée, complexe, non linéaire, multivariées et le sous-actionnement de notre système, ce qui rend la synthèse de la commande relativement difficile.

Chapitre 3

Commande de quadrirotor

3.1 Introduction

La configuration à quatre rotors a attiré l'attention des chercheurs en aéronautique, robotique et en automatique. Ainsi, la recherche des lois de commande simples et robustes reste aussi un domaine très vaste. Plusieurs laboratoires travaillent sur la commande des drones et plusieurs lois de commande ont été proposées. Nous citerons ici quelques techniques :

1. Le contrôleur PID : Cette commande classique n'a aucune exigence sur les paramètres du système à commander et elle est très simple à mettre en oeuvre[17].
2. La commande LQR : Cette loi de commande a donné de bons résultats dans la stabilisation d'attitude du quadrirotor[14][16].
3. l'approche Backstepping : De meilleurs résultats ont été obtenus avec cette technique de commande non linéaire, la convergence des états internes du quadrirotor a été garantie[14][18]. Cette technique de commande a été renforcée par la suite dans les travaux de [14] par l'ajout de l'action intégrale. Cette approche a été validée sur OS4 dans diverses expériences de vol.
4. La commande par mode glissant : Cette technique de commande non linéaire a donné de bons résultats et la stabilisation du système a été garantie [14][18].
5. la Commande par Vision : Cette technique est basée sur la commande visuelle utilisant soit une caméra miniature embarquée à bord du quadrirotor, soit une caméra externe [19][20].

Il y a d'autres commandes élaborées pour la commande du quadrirotor comme : La logique floue, les réseaux de neurones, la commande prédictive,... Dans ce travail on va introduire une loi de commande en utilisant le mode de glissement.

3.2 La commande à structure variable

Pour les systèmes non linéaire, les lois de commande classique peuvent être insuffisantes, car elles ne sont pas robustes. La caractéristique principale des systèmes à structure variable est que leur loi de commande se modifie d'une manière discontinue. Les commutations de la commande s'effectuent en fonction des variables d'état utilisées pour créer une *surface* dite de glissement

dont le but est de forcer la dynamique de système à suivre celle définie par l'équation de cette surface, le système est dit en régime glissant. La commande par mode glissant a largement prouvé son efficacité à travers les études théoriques rapportées..

3.2.1 Méthodologie

La commande par mode de glissement consiste à :

1. Vérifier que l'objectif qu'on souhaite atteindre est possible, c'est à dire qu'il existe une commande admissible qui permet de satisfaire l'objectif.
2. Définir une surface de glissement $S = 0$.
3. Définir la commande $u(t)$ telle que la dérivée de la fonction $v(t) = \frac{1}{2}.s^2(t)$ soit négative.

On est alors certain que l'état va d'abord converger vers la surface de glissement puis vers l'objectif.

3.2.2 Synthèse de la commande par mode glissant

On considère le système non linéaire suivant :

$$(S) : \begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} \\ \dot{x}_{i+1} = f(x) + g(x)U \end{cases} \quad (3.1)$$

Avec $x = [x \ \dot{x} \ \ddot{x} \dots \overset{(n-1)}{x}]^T$

La synthèse d'un contrôleur par mode glissant pour le système (3.1) se fait en trois étapes[23] :

1. Choix de la surface de glissement

Le choix concernant la forme de cette surface est en fonction de l'application et l'objectif visé. On trouve dans la littérature que Slotine [24] a proposé une forme général qui consiste à définir une fonction scalaire dans le plan de phases donnée par :

$$S(x) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda_x \right)^{r-1} e(x) \quad (3.2)$$

Où :

x : La variable à commander.

$e(x) = x - x_d$: L'erreur de poursuite.

λ_x : Une constante positive qui interprète la dynamique de la surface.

r : Le degré relatif du système.

2. Conditions d'existence du régime glissant

Un régime glissant existe sur une surface de glissement si et seulement si, dans un voisinage de la surface de glissement toutes les trajectoires du systèmes sont dirigées vers elle. En d'autre terme :

$$\begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{S}(x) > 0 \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{S}(x) < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

On définit les deux notions de régime suivantes :

- **Régime glissant idéal** : Ce régime correspond à une oscillation de fréquence infinie et d'amplitude nulle, d'où le point représentatif du mouvement du système glisse parfaitement sur l'hyperplan de commutation ($S(x) = 0$).
- **Régime glissant réel** : La trajectoire d'état dans ce régime reste autour de l'hyperplan de glissement ($S(x) = 0$) jusqu'à au point d'équilibre.

3. Etablissement de la loi de commande

Dans le but de forcer les états du système à atteindre la surface de glissement et le contraindre à rester sur cette surface malgré la présence des incertitudes et des perturbations, la commande u contient deux termes[25] :

- La commande équivalente qui est un moyen de déterminer le comportement du système lorsqu'un régime glissant idéal est établi. Elle peut être calculée à partir de la condition d'invariance de la surface :

$$\begin{cases} S(x, t) > 0 \\ \dot{S}(x, t) < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Ce qui conduit à l'expression :

$$u_{eq}(x, t) = -\left[\frac{\partial S}{\partial x}g(x, t)\right]^{-1}\left\{\frac{\partial S}{\partial x}f(x, t) + \frac{\partial S}{\partial t}\right\} \quad (3.5)$$

- La deuxième est une fonction discontinue qui permet de satisfaire la condition d'attractivité : $S(x)\dot{S}(x) \leq 0$. Elle est généralement de la forme :

$$u_{att} = -K \text{sign}(S) \quad (3.6)$$

Donc la commande u sera :

$$u = -\left[\frac{\partial S}{\partial x}g(x, t)\right]^{-1}\left\{\frac{\partial S}{\partial x}f(x, t) + \frac{\partial S}{\partial t}\right\} - K \text{sign}(S) \quad (3.7)$$

3.2.3 Le phénomène de chattering

Lors de la commande par la technique de mode glissant, un phénomène dit de réticence (Chattering en anglais) se passe, cela à cause de l'effet de commutation de la commande entre deux valeurs, si la fréquence de commutation est infinie c'est-à-dire une commutation très rapide avec une hystérésis infiniment petite, ce phénomène sera réduit, mais à cause des retards provoqués par les hystérésis et aussi, on est limité par la technologie des actionneurs, le phénomène de réticence n'est plus annulé.

Le phénomène de chattering provoque alors des fortes oscillations au niveau de l'organe de commande. Ces oscillations peuvent exciter des dynamiques non modélisées qui endommagent les actionneurs par des oscillations de hautes fréquences ou même détériorent l'organe de commande.

Nombreuses solutions ont été proposées dans le but de réduire ou d'éliminer ce phénomène. Il existe des méthodes comme celle de la couche limite (boundary layer) qui consiste à remplacer la fonction sign de la loi de commande par une approximation continue à gain élevé dans un voisinage de S , et saturée en dehors de ce voisinage. Le régime glissant qui en résulte n'est plus confiné dans S , mais dans un voisinage de celui-ci. Dans ce cas le système est dit en régime pseudo-glissant. Ces méthodes réduisent la robustesse de la commande. Elles sont paramétrées

par une constante positive δ réglée pour avoir un bon compromis entre la réduction de chattering et la conservation de la robustesse. Dans les méthodes présentées ici, plus δ est petit, plus l'approximation tend vers la fonction *sign* et donc la robustesse est meilleur.

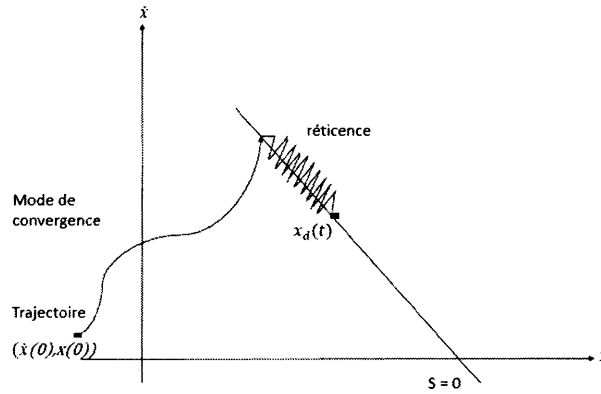


FIGURE 3.1 – Phénomène de réticence

Les fonctions les plus utilisées sont [23] :

La fonction saturation

$$sat(\sigma, \delta) = \begin{cases} sign(\sigma) & si \quad |\sigma| \geq \delta \\ \frac{\sigma}{\delta} & si \quad |\sigma| \leq \delta \end{cases} \quad (3.8)$$

La fonction arctangente

$$v(\sigma, \delta) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\sigma}{\delta}\right) \quad (3.9)$$

La fonction tangente hyperbolique

$$v(\sigma, \delta) = \tanh\left(\frac{\sigma}{\delta}\right) \quad (3.10)$$

3.2.4 Synthèse des commandes pour le quadrirotor

Tout d'abord, nous définissons les surfaces de glissement suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_\phi = \dot{e}_1 + \lambda_1 e_1 \\ S_\theta = \dot{e}_3 + \lambda_2 e_3 \\ S_\psi = \dot{e}_5 + \lambda_3 e_5 \\ S_x = \dot{e}_7 + \lambda_4 e_7 \\ S_y = \dot{e}_9 + \lambda_5 e_9 \\ S_z = \dot{e}_{11} + \lambda_6 e_{11} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Avec : $e_i = x_i - x_{id}/i \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ et $\lambda_i \geq 0$

On prend la surface S_ϕ et on effectue les étapes de la synthèse de la commande.

On a :

$$S_\phi = \dot{e}_1 + \lambda_1 e_1 \quad (3.12)$$

La dérivée de la surface S_ϕ est :

$$\dot{S}_\phi = \ddot{e}_1 + \lambda_1 \dot{e}_1 \quad (3.13)$$

Remplaçant \ddot{e}_1 et \dot{e}_1 , on obtient :

$$\dot{S}_\phi = (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_{1d}) + \lambda_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_{1d}) \quad (3.14)$$

Cela implique :

$$\dot{S}_\phi = (f(x) + g(x)U_2 - \ddot{x}_{1d}) + \lambda_1 (x_2 - \dot{x}_{1d}) \quad (3.15)$$

Maintenant, on a la fonction de Lyapunov suivantes :

$$V(S_\phi) = \frac{1}{2} S_\phi^2 \quad (3.16)$$

Après dérivation, on obtient :

$$\dot{V}(S_\phi) = S_\phi \dot{S}_\phi \quad (3.17)$$

Pour assurer la stabilité du système, il faut avoir $\dot{V}(S_\phi) < 0$

En remplaçant \dot{S}_ϕ par sa valeur, on obtient :

$$\dot{V} = S_\phi ((f(x) + g(x)U_2 - \ddot{x}_{1d}) + \lambda_1 (x_2 - \dot{x}_{1d})) \quad (3.18)$$

On a :

$$U_2 = u_{eq} + u_{glis} \quad (3.19)$$

Calcul de u_{eq}

La commande équivalente u_{eq} est calculée lorsque :

$$\dot{S}_\phi = 0 \quad (3.20)$$

A partir de (3.13) et (3.20), on a :

$$\dot{S}_\phi = 0 \iff \ddot{e}_1 + \lambda_1 \dot{e}_1 = 0 \quad (3.21)$$

En Remplaçant \ddot{e}_1 et \dot{e}_1 dans (3.20), on obtient :

$$(f(x) + g(x)U_2 - \ddot{x}_{1d}) + \lambda_1(x_2 - \dot{x}_{1d}) = 0 \quad (3.22)$$

A partir de (3.22), on obtient :

$$u_{eq} = \frac{-1}{g(x)}(f(x) - \ddot{x}_{1d} + \lambda_1(x_2 - \dot{x}_{1d})) \quad (3.23)$$

Calcul de u_{glis}

On pose u_{glis} comme suit :

$$u_{glis} = -K_1 \text{sign}(S_\phi) \quad (3.24)$$

Donc la commande U_2 est :

$$U_2 = \frac{-1}{g(x)}(f(x) - \ddot{x}_{1d} + \lambda_1(x_2 - \dot{x}_{1d})) - K_1 \text{sign}(S_\phi) \quad (3.25)$$

Remplaçant (3.25) dans (3.18), on obtient :

$$\dot{V} = S_\phi \left(\frac{-1}{g(x)} K_1 \text{sign}(S_\phi) \right) \quad (3.26)$$

Cela nous donne :

$$\dot{V} = \frac{-1}{g(x)} K_1 |S_\phi| < 0 \quad (3.27)$$

Telle que : $g(x) > 0$ et $K_1 \geq 0$

Donc la stabilité est assurée.

En remplaçant les valeurs dans l'équation (3.25), on obtient :

$$U_2 = \frac{1}{b_1} (-a_1 x_4 x_6 - a_2 x_4 \bar{\Omega} + \ddot{x}_{1d} - \lambda_1(x_2 - \dot{x}_{1d}) - K_1 \text{sign}(S_\phi)) \quad (3.28)$$

Les commandes U_3 , U_4 , U_x , U_y et U_1 sont calculées de la même manière, elles sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_3 = \frac{1}{b_2} (-a_3 x_2 x_6 - a_4 x_2 \bar{\Omega} + \ddot{x}_{3d} - \lambda_2(x_4 - \dot{x}_{3d}) - K_2 \text{sign}(S_\theta)) \\ U_4 = \frac{1}{b_3} (-a_5 x_2 x_4 + \ddot{x}_{5d} - \lambda_3(x_6 - \dot{x}_{5d}) - K_3 \text{sign}(S_\psi)) \\ U_x = \frac{m}{U_1} (\ddot{x}_{7d} - \lambda_4(x_8 - \dot{x}_{7d}) - K_4 \text{sign}(S_x)) \\ U_y = \frac{m}{U_1} (\ddot{x}_{9d} - \lambda_5(x_{10} - \dot{x}_{9d}) - K_5 \text{sign}(S_y)) \\ U_1 = \frac{m}{\cos(x_1) \cos(x_3)} (g + \ddot{x}_{11d} - \lambda_6(x_{12} - \dot{x}_{11d}) - K_6 \text{sign}(S_z)) \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Avec $K_i \geq 0$ pour $i \in [1, 6]$

3.2.5 Résultats et simulations

On a vu que la commande par mode glissant présente un phénomène de chattering. Pour remédier à ce problème, on a remplacé la fonction *sign* par la fonction $\tanh(\frac{s}{\delta})$. On présente dans les figures suivantes les résultats de simulation :

Ces résultats apparaissent en imposant les paramètres de la commande λ_i et k_i comme suit :

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
k_1	9.026	λ_1	23.289
k_2	9.9	λ_2	60.5
k_3	28.890	λ_3	94.818
k_4	1.987	λ_4	13.98
k_5	3.112	λ_5	35.5
k_6	1	λ_6	1

TABLE 3.1 – Les paramètres de la commande utilisés

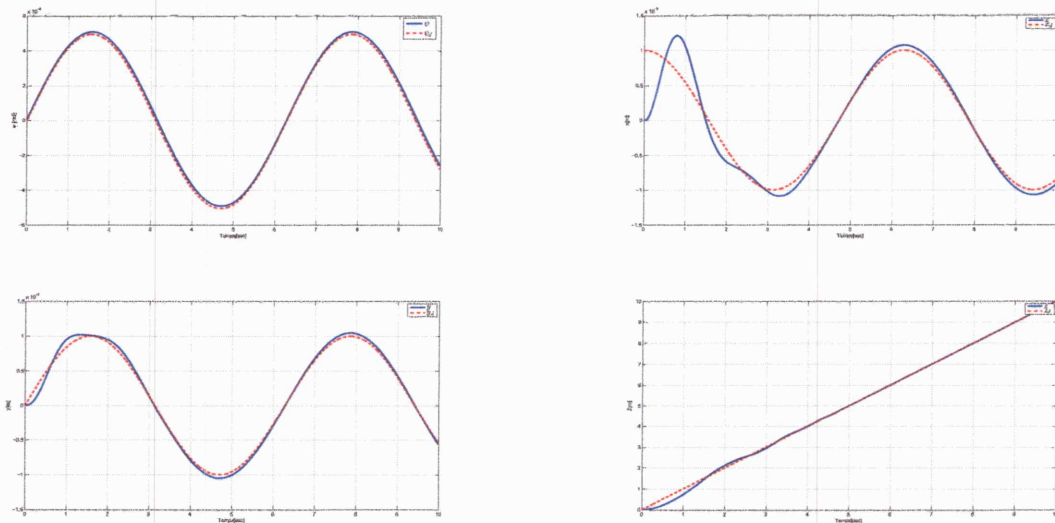


FIGURE 3.2 – La réponse du système

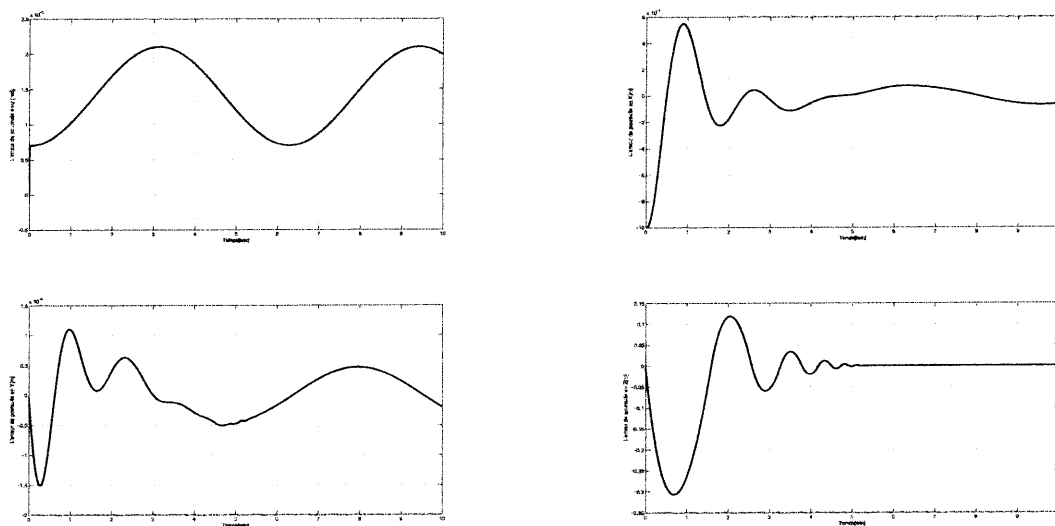


FIGURE 3.3 – Les erreurs de poursuite

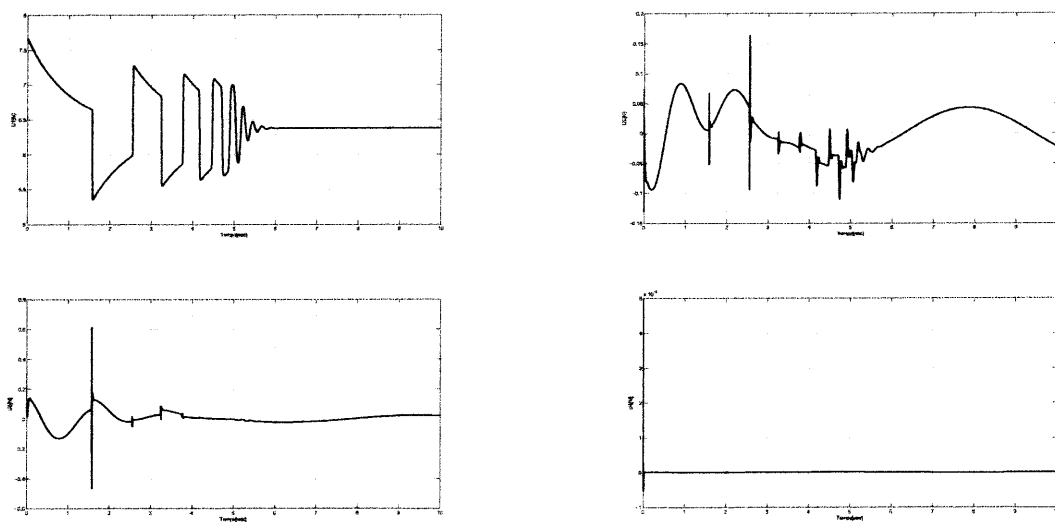


FIGURE 3.4 – Les signaux de commande

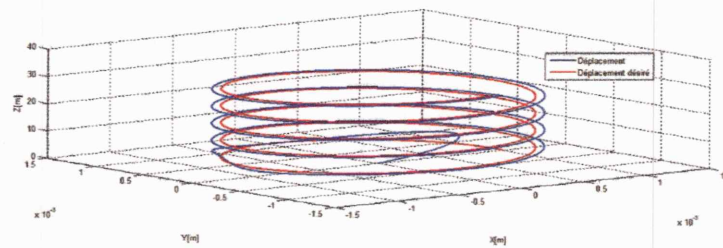


FIGURE 3.5 – Le déplacement en 3D

Commentaires

On remarque que le quadrirotor a suivi la trajectoire désirée. Les commandes sont stables après un régime transitoire très court. Donc la stabilité du système est assurée. Le choix des λ_i et k_i est difficile et délicat car un mauvais choix peut introduire l'instabilité du système. Le problème de chattering n'existe plus en utilisant des fonctions continues, ce qui représente un avantage par rapport au cas du mode glissant idéal.

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la dynamique du quadrirotor en utilisant la commande par mode glissant, ensuite, on a présenté les différents schémas résulte de cette commande. Cette loi de commande a permis une poursuite presque parfaite des trajectoires considérées.

Conclusion générale

Le quadrirotor est l'un des mini drones les plus populaire et séduisant de part son élégance et sa dynamique. Par conséquent, il a attiré l'attention et est devenu le sujet de recherche de plusieurs équipes ces dernières années. Le drone est un système complexe, non-linéaire, multivariables, instable et présente une dynamique fortement couplée, ce qui a fait de sa commande un grand défi. Le mémoire réalisé dans ce travail a pour but d'une part, la conception d'un modèle pour un engin volant à quatre rotors et d'autre part, l'établissement d'une loi de commande stabilisante et ramène le quadrirotor en poursuite de trajectoire en vol. Nous avons commencé ce travail par des aperçus généraux sur les quadrirotors : Leurs historiques, les derniers projets de recherche concernant ce domaine et ainsi leurs champs d'application. Le deuxième chapitre a permis de donner un modèle dynamique pour notre système et de comprendre les différents vols fait par un quadrirotor. Ce modèle est composé de six équations différentielles de deuxième ordre : Trois décrivent la dynamique de système en rotation et trois autres définissent la dynamique de translation. On a remarqué aussi qu'il est sous actionné porté par quatre moteurs pour fournir les forces de portance suffisantes pour l'élévation du quadrirotor. Pour résoudre le problème de sous actionnement, on a défini d'après les contraintes de non holonomie, des commandes internes pour rendre le système comme étant un système actionné. On a simulé sa commande pour tous les vols possible. Le troisième chapitre contient une étude d'une commande non-linéaire appelée *la commande par mode glissant*. C'est une technique de commande fondée sur la théorie des systèmes à structure variable. On a présenté un petit aperçu sur cette commande ainsi que les étapes d'établissement de cette loi de commande. Finalement, une simulation est établie et montrée que la commande par mode glissant assure bien les performances désirées. A l'issue de ce travail, il peut apporter soit des modifications et certainement des additions et nouveautés :

- Le choix des paramètres de réglage n'est pas optimisé. Il est envisageable d'optimiser ce choix dans le but d'améliorer les performances du système. On signale également que le choix de ces paramètres peut introduire l'instabilité du système.
- La synthèse des observateurs pour la commande du quadrirotor.

Annexe A

Stabilité au sens de Lyapunov

A.1 Introduction

L'objet de la théorie de la stabilité est de tirer des conclusions quand au comportement du système sans calculer explicitement ses trajectoires. La contribution majeure fut apportée par *A.M Lyapunov* en 1892, dont les travaux n'ont été connus qu'à partir des années 60. Il a introduit la majorité des concepts et définitions de base concernant la stabilité des systèmes représentés par des systèmes différentiels arbitraire.

A.2 Définitions

A.2.1 Système autonome

Un système est dit autonome si f ne dépend pas du temps :

$$\dot{x} = f(x) \tag{A.1}$$

Si non le système est dit non autonome.

A.2.2 Point d'équilibre

x_0 est un point d'équilibre pour le système autonome si :

$$x(t_1) = x_0 \Rightarrow x(t \geq t_1) = x_0 \tag{A.2}$$

Où de façon équivalente si :

$$f(x_0) = 0 \tag{A.3}$$

A.2.3 Voisinage de l'origine

Un voisinage de l'origine Ω , est tout domaine fermé borné incluant l'origine, un exemple de voisinage est la boule.

A.2.4 Fonction candidate du Lyapunov

Soit : $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction telle que :

1. V est continûment différentiable en tous ses arguments.
2. V est définie positive.
3. Il existe a et b deux fonctions scalaires de $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, continues, monotones, non décroissantes, telles que :

$$\begin{aligned} a(0) &= b(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ alors : } a(\|x\|) &\leq V(x) \leq b(\|x\|) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Alors V est une fonction candidate de Lyapunov

A.3 Stabilité du point d'équilibre

A.3.1 Stabilité/instabilité au sens de Lyapunov

L'état d'équilibre x_e est dit stable si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que si $\|x(0) - x_e\| < \alpha$ alors $\|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$

Dans le cas contraire, x_e est dit instable.

A.3.2 Attractivité

L'état d'équilibre x_e est attractif s'il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x(0) - x_e\| < \delta$ alors pour tout $v > 0$ il existe $T > 0$ qui satisfait $\|x(t) - x_e\| < v, \forall t \geq T$

Remarque :

L'attractivité n'applique pas la stabilité, ni l'inverse. La condition d'attractivité exprime que si l'état initial est dans un certain voisinage de l'état d'équilibre, alors l'état du système reviendra nécessairement à l'origine au bout d'un temps suffisant.

A.3.3 Stabilité asymptotique

Un point d'équilibre x_e est asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\|x(0) - x_e\| < \alpha \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e \quad (\text{A.5})$$

Un point d'équilibre est stable asymptotiquement s'il est stable et attractif. La stabilité asymptotique signifie que non seulement l'équilibre est stable mais que de plus on est capable de déterminer un voisinage du point d'équilibre tel que n'importe quelle trajectoire, issue d'un x_0 appartenant à un voisinage d'un x_e , tend vers x_e quand $t \rightarrow +\infty$.

A.3.4 Stabilité exponentielle

Un point d'équilibre x_e est exponentiellement stable s'il existe $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ tels que :

$$\forall t > 0, \exists B_r(x_e, r), \forall x_0 \in B_r, \|x(t) - x_e\| \leq \alpha \|x_0 - x_e\| e^{-\lambda t} \quad (\text{A.6})$$

Interprétation :

Cela signifie que le vecteur d'état, pour une condition initiale $x_0 \in B_r$ converge vers x_e qu'une fonction exponentielle. λ est appelé le taux de convergence. D'autre part, la stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique qui implique la stabilité.

A.4 Méthode directe de Lyapunov ou second méthode

La philosophie de la méthode réside dans l'extension mathématique d'une observation fondamentale de la physique « Si l'énergie totale d'un système est dissipée de manière continue alors le système, (qu'il soit linéaire ou non linéaire), devra rejoindre finalement un point d'équilibre. On pourra donc conclure à la stabilité d'un système par l'examen d'une seule fonction scalaire.

Théorème 1 : stabilité (asymptotique) locale

S'il existe une fonction scalaire de l'état $V(x)$ dont les dérivées partielles première sont continues et telle que :

- $V(x)$ est une fonction candidate de Lyapunov.
- $V(x)$ est localement semi définie négative dans un voisinage de l'origine Ω .

Alors le point d'équilibre x_0 est stable et un domaine de conditions initiales stables est délimité par n'importe quelle équipotentielle de Lyapunov contenue dans Ω .

Si $V(x)$ est localement définie négative dans Ω alors la stabilité est dite localement asymptotiquement dans la partie de l'espace délimité par n'importe quelle équipotentielle de Lyapunov continue dans Ω .

Théorème 2 : stabilité globale asymptotique

S'il existe une fonction V telle que :

- V est une fonction candidate de Lyapunov.
- \dot{V} est définie négative.
- La fonction $\|x\| \rightarrow +\infty$ implique $V(x) \rightarrow +\infty$.

Alors x_0 est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Le premier majeur de la méthode est de trouver une fonction de Lyapunov pour le système en l'absence de guide claire. Dans le cas non linéaire, il n'existe pas de méthode systématique pour choisir une fonction de Lyapunov convenable.

Annexe B

Réalisation et perspectives

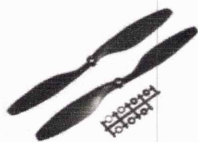
B.1 Présentation du projet

Pratiquement, l'objectif qui a été fixé au début est de réaliser un quadrirotor capable d'effectuer un vol stationnaire grâce à un capteur Ultrasonique contrôlé par une carte de développement Arduino.

B.2 Obstacle et problèmes rencontrés

Généralement, les composants indispensables pour le montage d'un quadrirotor sont :

- **Hélices préfabriquées :**
Il y a beaucoup de références dans le marché mais le type recommandé est le X650V.
- **Batterie :**
LIPO(Lithium-Polimar) est la batterie la plus recommandée.
- **Moteurs :**
Il faut utiliser un moteur léger et puissant comme le moteur Brushless.
- **Une carte de développement :**
Arduino est une bonne solution, c'est une carte développée et facile à utiliser.



(a) Les hélices X650V



(b) La batterie LIPO



(c) Le moteur Brushless



(d) La carte Arduino

FIGURE B.1 – Les composants utilisés dans le quadrirotor

Malheureusement ces composants ne sont pas disponibles dans le marché algérien, chose qui nous a poussé à se débrouiller nous-même.

Pour les moteurs on a récupéré des moteurs DC à partir des lecteurs CD/DVD qui peuvent tourner jusqu'à 2500 RPM (tours par minutes).

En ce qui concerne les hélices on a pu obtenir la forme requise mais pas l'angle d'attaque qui permet de créer une force de portance pour garantir le vol du drone. Les hélices qu'on a fabriquées sont à base de plastique et pèsent environ entre 6 et 12 grammes.

Le gabarit est à base de polystyrène, il pèse 57.

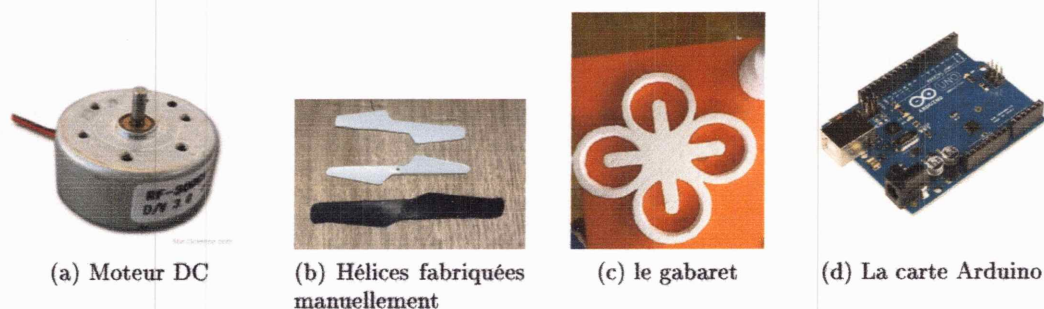


FIGURE B.2 – Les composants disponibles

B.3 Tâches effectuées

Malgré les difficultés qu'on a rencontrées pratiquement (Du côté matériels essentiellement) on a quand même pu improviser, parmi les tâches qu'on a faites :

Commande du moteur à l'aide d'un potentiomètre

On a réalisé le montage suivant :

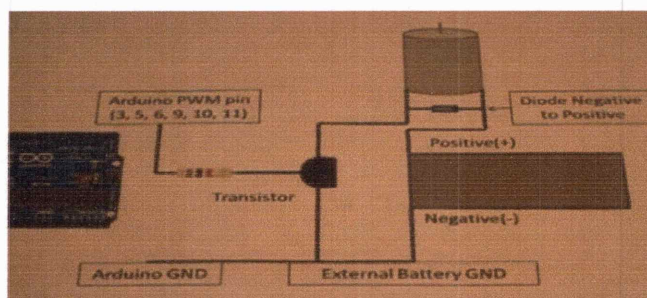


FIGURE B.3 – Le montage qui montre le branchement du moteur avec l'Arduino

Après, on a exploité le montage précédent pour faire l'expérience suivante : Ici la struc-

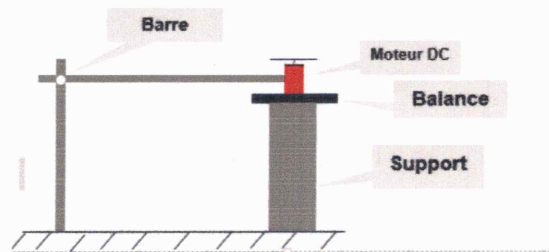


FIGURE B.4 – L'expérience de la balance

ture(moteur + hélice) est fixée à la barre verticale mobile et posée sur une balance numérique, Le poids initial affiché sur la balance est celui du moteur, après le déclenchement de ce dernier, la différence entre le poids initial et la nouvelle valeur affichée sur la balance est le poids que peu soulever le moteur.

- Le but de cette expérience est de calculer le maximum de poids qui peut être porté par chaque moteur.
- On a calculé le poids porté par le moteur pour chaque variation de α sachant que :
 1. $V = 5\text{volts} \Rightarrow \alpha = 100\%$
 2. $V = 0\text{volts} \Rightarrow \alpha = 0\%$

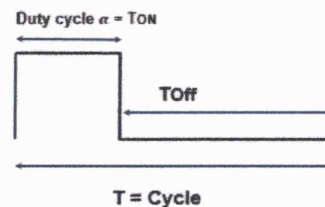


FIGURE B.5 – Duty cycle

Dans notre teste on a obtenu les résultats suivant :

- Pour $\alpha = 30\%$, le moteur n'a rien porté.
- Pour $\alpha = 100\%$, le moteur n'a pu porté que 5Grammes .

Donc la force de moteur n'est pas suffisante car Le poids du notre appareil est de 230Grammes , donc on a besoin au moins d'un moteur capable de soulever un poids supérieur à 58Grammes .

On a aussi développé un code écrit en Arduino C pour le calcul de l'altitude de l'appareil grâce à un capteur ultrasonique.

B.4 Conclusion

Dans ce projet, on s'est familiarisé avec le quadrirotor. Malheureusement la pratique s'est révélée plus difficile qu'on le croyait surtout avec l'indisponibilité des composants.

Nous espérons que notre travail sera un début dans la pratique qui est à notre avis essentiel.

Bibliographie

- [1] http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- [2] <http://www.centennialofflight.gov/index.htm>
- [3] UAVs. *New world vistas : Air and space for the 21st century*, Human Systems and Biotechnology Systems, Vol. 7, No. 0, pp. 17–18, 1997.
- [4] R. AbouSleiman, D. Korff, E. Gjioni and H. Chul Yang. "*The Oakland University Unmanned Aerial Quadrotor System*". The 2008 AUVSI UAS Student Competition.
- [5] J.G.Leisman, *Evolution of Helicopter Flight*, <http://www.100yearsofflight.com>, retrieved December 2006
- [6] <http://www.eads.net/1024/fr/eads/history/airhist/1900-1909/Breguet1-1907>.
- [7] www.aviastar.org.
- [8] E.Altuğ, *Vision based control of unmanned aerial vehicles with applications to an autonomous four rotor helicopter, Quadrotor*, PhD thesis, University of Pennsylvania, 2003.
- [9] B.Çamlýca, *Demonstration of a stabilized hovering platform for undergraduate laboratory*, December 2004.
- [10] G. Hoffmann, H. Huang, S. Waslander and C. Tomlin. "*Quadrotor helicopter flight dynamics and control : Theory and Experiment*". AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, 2007.
- [11] P. Spanoudakis, L. Doitsidis, N.C. Tsourveloudis, K.P. Valavanis, *Unmanned Systems*, 2003, 14-18 USA
- [12] A. Frenot, A. Gossmann et R. Guillerm. "*Stabilisation d'un quadrirotor*". Rapport PIP, ENSICA, Toulouse, France, 2006.
- [13] A. Kadi. "*Mécanique Rationnelle Cours et exercices résolus*". Université M'hamed Bougara, Boumerdès.
- [14] S. Bouabdallah. "*Design and Control of Quadrotors with Application to Autonomous Flying*". Thèse de Doctorat. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 2007.
- [15] <http://www.ifrance.com/adilca>
- [16] J. Miguel Brito Domingues. "*Quadrotor prototype*". Thèse de Master. Université technique de Lisbonne, Portugal, 2009.
- [17] S. Bouabdallah and R. Siegwart. "*Backstepping and Sliding-mode Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor*". Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp 2247-2252, Barcelona, Spain, 2005.

- [18] M. Onder Efe. "*Robust Low Altitude Behavior Control of a Quadrotor Rotorcraft Through Sliding Modes*", Proceeding of the 15th Mediterranean Conference on Control and Automation, Athens, July 2007
- [19] E. Altug, James P. Ostrowski and R. Mahony. "*Control of a Quadrotor Helicopter Using Visual Feedback*". Proceedings of 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 72-77, Washington, DC, May 2002.
- [20] J. Epiney. "*Quadrotor Helicopter Hovering with Vision*". Travail de diplôme, Laboratoire de systèmes autonomes, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 2006.
- [21] H. Boudjedir and M. Bouhaouia. "*Modélisation et commande des mini-hélicoptères à quatre rotors*". Thèse d'ingénieur. Université de Jijel, Algérie, Juillet 2008.
- [22] A. Boussayoud and Dj. Bouhbel. "*Synthèse par OEP des commandes PID et PID floue pour la stabilisation d'un Quadrirotor*". Thèse de master. Université de Jijel, Algérie, Juin 2013.
- [23] V. Bregeault. "*Quelques contributions à la théorie de la commande par modes glissants*". Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Nantes, France ,2010.
- [24] J.E. Slotine and W. Li. "*Applied nonlinear control*". Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991.
- [25] D. Rachedi Nedjmi. "*Commande hybride avec observation d'un UAV de type quadrotor*". Thèse de Magistère, Ecole Militaire Polytechnique, Alger, Algérie, 2010.