REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Jijel

M1804



Faculté des Sciences et de La Technologie

Département d'Automatique

Mémoire

Du projet de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de master en Automatique et Traitement du Signal.

Thème '

Commande Des Robots Mobiles

Présenté par : Benayad Abou-bakr

Chemori Tahar

10

Encadré par :

Dr. Boulkroune Abdesselem

Promotion : Juin 2014

Remerciements

es plus vifs et sincères remerciements au dieu qui nous a donnée la patience et la volonté pour finir ce travail. C'est aussi l'occasion d'adresser nos plus affectueux remerciements à nos parents et à toute ma famille pour leur précieux soutien et leurs

encouragements.

Il m'est très difficile de remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin pour ce travail. Nous veulons exprimer toute nos gratitudes à nos collègues et nos amis.

Nous voudrions remercier monsieur Boulkroune Abdesselem. Son ouverture, sa rigueur et sa volonté d'excellence sont pour nous des modèles de discipline de recherche. Nous avons appréciés ses conseils avisés, son soutien et sa disponibilité. Intransigeant et sans concession sur la qualité des travaux.

Merci aux rapporteurs de notre jury de thèse pour la lecture approfondie de notre manuscrit.

Merci à tout le personnel administratif et scientifique pour leur disponibilité, leur gentillesse et tous les services rendus.

Enfin, nous remercions d'avance tous les futurs lecteurs et lectrices qui prendront la peine de parcourir ce manuscrit, car remercier quelqu'un, c'est avant tout s'assurer de son indulgence...

Dédicace 1

e dédie ce travail à la mémoire de ma mère, à qui je dois dans la vie et que le bon dieu l'accueil dans son paradis.

A mon père qui m'a soutenu, m'aimé et m'orienté durant ma carrière.

A mes frères et sœurs.

A ma grande famille.

A mes amis.

A ma promotion : Automatique 2013/2014.

A toute personne ayant place dans ma vie.

A vous.

Dédicace 2

e dédie ce travail à dieu et à mes très chère parents qui m'ont soutenu, m'aime, me guide et m'oriente dans toute ma vie. Et j'espère qu'ils sont fiers de moi.

A mes frères et sœurs pour leur amour.

A mon très cher neveu Haroun.

A toute ma famille sans exception.

A toute la famille Martin pour leur soutien et amour.

A mes amis et surtout Mounib, Salah et Ismail.

A ma promotion : Automatique 2013/2014.

A toute personne dans ma vie.

A Khaoula.

« La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi. »

Į

Albert Einstein (1879-1955)

Sommaire

Introduction générale	. 1
-----------------------	-----

Chapitre 1 : Généralités sur les robots et leur classification

1.1. Introduction	. 3
1.2. Définition du robot	. 3
1.3. Historique	. 3
1.4. Classification des robots	.4
1.4.1. Robots mobiles	4
1.4.1.1. Robots à roues ou à chenilles	5
1.4.1.2. Robots à pattes	5
1.4.1.3. Robots hybrides	6
.4.1.4. Corps art culés	6
.4.2. Robots manipulateurs	7
.4.3. Robots télémanipulateurs	7
.4.4. Robots manipulateurs mobiles	8
.5. Conclusion	1

Chapitre 2 : Modélisation des robots mobiles

2.1. Introduction	
2.2. Equation d'E	uler-Lagrange
2.3. Propriétés str	ucturelles14
2.4. Contraintes r	on holonomes15

2.5. Formulation	de Lagrange-d'Alembert	. 18
2.6. Modélisation	des robots mobiles	. 19
2.6.1. Modélisati	on d'un robot mobile bicycle	. 19
2.6.2. Modélisati	on d'un robot mobile tricycle	. 23
2.7. Conclusion		. 27

Chapitre 3 : Commande par linéarisation E/S et par mode glissant d'un robot mobile bicycle

1

34
41

Chapitre 4 : Commande par backstepping d'un robot mobile tricycle

4.1. Introduction	
4.2 Commande p	ar backstepping
4.2.1. Exemple il	lustratif43
4.3. Commande	ar backstepping d'un robot mobile tricycle45
4.4. Simulation	
4.5. Conclusion	

Conclusion gén	rale
----------------	------



Introduction générale

Introduction générale

Avec es progrès constants dans le domaine de la robotique, les robots tendent à réaliser des tâches de plus en plus complexes avec une intervention moindre de l'homme pour les guider. Ils deviennent ainsi plus autonomes, et ils interagissent de mieux en mieux avec leur environnement pour accomplir la tâche qui leur a été assignée, le robot devient alors une "machine intelligente". Au cours des dernières décennies, la robotique a connu un développement très marqué. Les robots manipulateurs se sont largement développés dans les milieux industriels et poursuivent leur développement dans d'autres milieux tels que la chirurgie. De la nême façon, la robotique mobile s'est aussi largement développée. Cela a commencé par une automatisation des chariots guidés, en passant par les plates formes mobiles pour arriver aux robots humanoïdes. A la différence des robots manipulateurs industriels qui évoluent dans des environnements protégés et très structurés tels que des chaînes de montage, les robots mobiles sont appelés à intervenir dans des environnements en perpétuelle évolution, des milieux hostiles et non accessibles. Ce type de robot doit donc disposer d'un niveau suffisant d'autonomie pour remplir sa mission.

La problématique de la navigation et du pilotage des robots, s'ouvre aujourd'hui vers de nombreux aures champs d'application, tels que: les véhicules, les drones aériens, les engins sous-marins, les robots d'assistance, etc. Dans tous les cas, il s'agit de faire évoluer des systèmes de façon sûre dans des milieux imparfaitement connus en contrôlant les interactions entre le robot et son environnement. En premier lieu, lors de la planification, cela se fera par l'acquisition, la modélisation et la manipulation des connaissances sur l'environnement et sur l'objectif à réaliser. Ensuite, durant l'exécution, il s'agit d'exploiter les données perceptuelles pour adapter au mieux le comportement du système aux conditions de la mission qu'il doit réaliser.

Dans ce travail, nous essayons de modéliser deux types de robots mobiles nonholonomes, à savoir: un robot mobile bicycle et un robot mobile tricycle, en utilisant les formalismes d'Euler-Lagrange et de Lagrange-d'Alembert. Après, nous proposerons des commandes non-linéaires (à savoir: commande par linéarisation E/S, commande à mode glissant et commande par backstepping) pour ces deux robots. Pour vérifier la validité et l'applicabilité de ces commandes développées, des simulations numériques sous Matlab seront effectuées.

Notre mémoire est organisé en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous donnons des généralités et quelques définitions sur les robots avec leur principe de fonctionnement ainsi que leur classification. L'accent sera mise sur les robots mobiles qui nous intéressent dans ce présent travail.

Le deuxième chapitre sera complètement consacré à la modélisation des modèles dynamiques et cinématiques des robots mobiles bicycles et tricycles, en utilisant les formalismes d'Euler Lagrange et de Lagrange-d'Alembert.

Dans le troisième chapitre, nous concevons des commandes par la linéarisation entrée-sortie et à mode glissant pour les deux robots mobiles modélisés dans le chapitre précédent. Ensuite, des simulations numériques seront effectuées pour vérifier la validité de ces lois des commandes.

Le quatrième chapitre aborde la conception d'une structure particulière de commande permettant l'intégration conjointe d'un contrôleur cinématique et d'un contrôleur en couple calculé. Cette loi de commande combinée est conçue en utilisant le concept du backstepping. Ensuite, des simulations numériques seront effectuées sur le robot mobile tricycle non holonome pour tester les performances de cette loi de commande.

Chapitre 1 Généralités sur les robots et leur classification

artificielle et la robotique à Stanford avec la robot Shakey (Figure (1.2)) qu'il utilise des télémètres à ultrason et une caméra et sert de plate-forme pour la recherche en intelligence artificielle. Les développements se poursuivent avec le Stanford Cat dans la fin des années 1970, avec les premières utilisations de la stéréo-vision pour la détection des obstacles et la modélisation de l'environnement. Entre 1975 et 1991, on a eu l'apparition de la deuxième génération des robots programmables dans un environnement connu (servo-controlled, PLC). Actuellement, la troisième génération est caractérisée par des robots intelligents dans un environnement non structuré.





Figure 1.1 : Tortue de Grey Walter.

Figure 1.2 : Robot Shakey de Stanford.

1.4. Classification des robots

On peut distinguer quatre catégories :

1.4.1. Robots mobiles

Un robot mobile est un système mécanique, électronique et informatique agissant physiquement sur son environnement en vue d'atteindre un objectif qui lui a été assigné. Cette machine est polyvalente et capable de s'adapter à certaines variations de ses conditions de fonctionnement. Elle est dotée de fonctions de perception, de décision et d'action. Ainsi, le robot devrait être capable d'effectuer des tâches diverses, de plusieurs manières, et accomplir correctement sa tâche, même s'il rencontre de nouvelles situations inattendues.

On peut distinguer quatre types des robots mobiles : les robots à roues ou à chenilles, les robots à pattes, les corps articulés et les robots hybrides.

1.4.1.1. Robots à roues ou à chenilles

Ils sont les plus répondus, ils sont aisés à commander grâce au nombre restreint de degrés de liberté (le plus souvent deux) et sont très efficaces sur un sol plat modérément accidenté dans le cas de chenilles, ils sont largement utilisés dans l'industrie pour le transport et la manipulation automatisés dans les ateliers (Figure (1.3)).



Figure 1.3 : Robot à chenilles et à roues.

1.4.1.2. Robots à pattes

Ils sont des robots de degrés de liberté plus élevés et de contacte discret avec le sol ce qui permet une sélection des points d'appui en fonction des conditions locales du terrain (Figure (1.4)).



Figure 1.4 : Robot à pattes.

1.4.1.3. Robots hybrides

Ils sont des robots mobiles basés sur plusieurs principes de locomotion afin d'allier leurs qualités respectives. Il s'agit par exemple des véhicules à pattes et à roues et les véhicules tout-terrain utilisés dans les zones montagneuses, comme indiqué dans la Figure (1.5).



Figure 1.5 : Robots hybrides.

1.4.1.4. Corps articulés

Ils sont des robots constitués de plusieurs modules élémentaires disposant de plusieurs degrés de libertés l'un par rapport à l'autre. Donc, cette configuration lui permet de faire une mobilité analogue à celle de serpent. Ils sont généralement utilisés pour la maintenance des sites nucléaires, voir la Figure (1.6).



Figure 1.6 : Exemple du corps articulé.

6

1.4.2. Robots manipulateurs

Le maripulateur est un mécanisme généralement composé d'éléments en série, articulés ou coulissants l'un par rapport à l'autre, dont le but est la saisie et le déplacement d'objets suivant plusieurs degrés de liberté, voir la Figure (1.7). Il est multifonctionnel et peut être commandé directement par un opérateur humain ou par tout système logique (système à cames, logique pneumatique, logique électrique câblée ou programmée), il faut tenir en compte dans ce type des robots les conditions suivantes:

- Les trajectoires sont bien déterminées dans l'espace.
- Les positions sont discrètes.
- La commande est séquentielle.



Figure 1.7 : Robots manipulateurs.

1.4.3. Robots télémanipulateurs

Dans ce type des robots, la commande se fait à distance à l'aide de leviers ou boutons, Figure (1.8). Les exemples d'applications de ces robots sont multiples: la manutention en ambiance dangereuse, à savoir: forge, industrie nucléaire, et milieu sousmarin. l'exclusions: engin de génie civil ou agricole, pont roulant, grue, treuil, etc. Sous les conditions suivantes :

- Les trajectoires peuvent être quelconques dans l'espace.
- Les trajectoires sont définies de manière instantanée par l'opérateur.



Figure 1.8 : Robot télémanipulateur .

1.4.4. Robots manipulateurs mobiles

Le concept de manipulateur mobile est très simple. Il s'agit d'associer, dans un même système, un ou des moyens de locomotion à un ou des moyens de manipulation. Le(s) moyen(s) de locomotion assure(nt) au système un espace de travail limité principalement par son autonomie énergétique. Le(s) moyen(s) de manipulation assure(nt) des capacités de préhension et de manipulation. Cette définition ouverte laisse la place à un grand nombre de combinaisons possibles, illustrées par la diversité des dispositifs expérimentaux et/ou commerciaux existants à ce jour. Avant de donner quelques exemples de ces systèmes, notons que leur succès est lié à l'espace de travail quasiment infini qu'ils présentent. Quand un bras manipulateur industriel voit son espace de travail limité à quelques mètres cubes, le manipulateur mobile peut lui évoluer sur plusieurs centaines de mètres carrés ou de mètres cubes pour ceux, comme les manipulateurs mobiles sous-marins, dont le moyen de locomotion ne nécessite pas de contact direct avec le sol. Ils ouvrent donc un grand nombre de possibilités qu pour la plupart restent à explorer.



Parmi ces systèmes robotiques existant actuellement, nous pouvons citer trois grandes familles :

a) Robots multi bipèdes

Comme leur nom l'indique, les manipulateurs mobiles « multipèdes » peuvent posséder une à plusieurs jambes. Par le défi à la gravité qu'ils représentent, les humanoïdes en sont les plus populaires représentants, tant chez le grand public que chez les chercheurs. Du point de vue de la locomotion, ils posent le problème de la marche. D'un point de vue de la manipulation, le souhait de bio-mimétisme conduit à les équiper de mains sophistiquées dont la conception et la commande restent des sujets encore très ouverts. Leurs utilisations possibles sont limitées d'un point de vue industriel et leur principal débouché se situe dans la robotique de service, Figure (1.10).



Figure 1.10 : Structure simple d'un robot bipède.

b) Robots manipulateurs mobiles sous marins

Les manipulateurs mobiles sous-marins sont aujourd'hui les manipulateurs mobiles les plus utilisés à des fins militaires aussi bien que civiles. Souvent télé-opérés, il s'agit alors de ROV (Remotely Operated Vehicles), ils permettent l'accès à des zones maritimes non accessibles aux plongeurs et fournissent des capacités de prélèvement, de manipulation, de mesure et d'acquisition de données adaptables aux missions envisagées, voir la Figure (1.11).



Figure 1.11 : Robots manipulateurs mobiles sous marins.

c) Robots manipulateurs mobiles à roues

Moins médiatiques que les premiers, moins exploités que les seconds, les manipulateurs mobiles à roues sont cependant plus répandus que ceux précédemment cités. Cela tient particulièrement à deux faits :

- leur conception mécanique relativement simple.
- l'adéquation naturelle de leur moyen de locomotion à un grand nombre de terrains.

En lien avec ces deux points, il nous faut aussi citer l'histoire des transports qui a vu les véhicules à roues, de toutes sortes, se hisser au sommet de la hiérarchie des moyens de transport individuel. Du point de vue de la manipulation, c'est l'état de l'art en robotique qui a amené à d'abord placer un bras manipulateur à chaîne simple sur un véhicule à roues. Et de manière similaire aux engins de chantiers qui en furent les précurseurs, les manipulateurs mobiles à roues prennent aujourd'hui des formes diverses tant du point de vue de leur mode de locomotion que de leur taille ou encore de la fonction attribuée au(x) bras manipulateur(s) dans le système, voir la Figure (1.12).



Figure 1.12 : exemple d'un manipulateur mobile à roues: (robot spirit).

1.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé des généralités et quelques définitions sur les robots mobiles avec leur principe de fonctionnement ainsi que leur classification. Dans le chapitre suivant, nous allons étudier en détail la modélisation des robots mobiles à deux et à trois roues.



Chapitre 2

Modélisation des robots mobiles

2.1. Introduction

On peut estimer que les robots mobiles à roues constituent le gros des robots mobiles. Historiquement, leur étude est venue assez tôt, suivant celle des robots manipulateurs, au milieu des années 70. Leur faible complexité en a fait de bons premiers sujets d'étude pour les roboticiens intéressés par les systèmes autonomes [1].

Dans ce chapitre, nous allons essayer de modéliser deux robots mobiles non holonomes à savoir: un robot mobile tricycle et un autre bicycle. Pour cela nous allons introduire au premier lieu, quelques outils qui vont nous faciliter l'obtention de leurs modèles dynamiques, tel que : l'équation d'Euler-Lagrange et celle de Lagrange-d'Alembert.

2.2. Equation d'Euler-Lagrange

La méthode standard pour l'obtention du modèle dynamique des systèmes mécanique consiste en l'utilisation des équations d'Euler-Lagrange qui sont exprimées comme suit [8]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau \tag{2.1}$$

où $q = [q_1, ..., q_n]^T$ est l'ensemble de coordonnées généralisées du système, L est le Lagrangien, étant la différence K - V entre l'énergie cinétique K et l'énergie potentielle V, et $\tau = [\tau_1, ..., \tau_n]^T$ est le vecteur des forces généralisées agissant sur le système. Un cas particulier important aura lieu lorsque l'énergie potentielle V = V(q) est indépendante de \dot{q} , et l'énergie cinétique est une fonction quadratique du vecteur \dot{q} de la forme suivante :

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n} m_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

z Kh

$$=\frac{1}{2}\dot{q}^{T}M(q)\dot{q} \tag{2.2}$$

où la matrice d'inertie M(q) est symétrique d'ordre $n \times n$ et définie positive pour tout $q \in \mathbb{R}^n$. Le Lagrangien pour un tel système peut être calculé comme suit :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n} m_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q)$$
(2.3)

Nous avons

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j m_{kj} \left(q \right) \dot{q}_j$$



et

 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j m_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_j \frac{d}{dt}m_{kj}(q)\dot{q}_j$ $= \sum_j m_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_j \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_j \qquad (2.5)$

aussi

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j$$
(2.6)

Ainsi, l'équation d'Euler-Lagrange (2.1) peut être réécrite comme suit :

$$\sum_{j} m_{kj} \ddot{q}_{j} + \sum_{i,j} \left(\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_{i}} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_{k}} \dot{q}_{i} \dot{q}_{j} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_{k}} = \tau_{k}, k = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

En utilisant la propriété de la symétrie de la matrice d'inertie, on peut montrer que

$$\sum_{i,j} \left(\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j \right) = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.8)$$

Les coefficients suivants:

$$c_{ijk} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right)$$
(2.9)

sont connus comme les symboles de Christoffel du premier type [8]. Si l'on pose

$$\phi_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \tag{2.10}$$

Alors, nous pouvons écrire les équations d'Euler-Lagrange (2.7) comme suit :

$$\sum_{j} m_{kj}(q) \ddot{q}_{j} + \sum_{j} c_{ijk}(q) \dot{q}_{i} \dot{q}_{j} + \emptyset_{k}(q) = \tau_{k}, k = 1, \dots, n$$
(2.11)

Dans l'équation ci-dessus, il existe trois types de termes. Le premier type associé à la dérivée seconde des coordonnées généralisées. Le deuxième type consiste en termes quadratiques en les dérivées premières de q, où les coefficients peuvent dépendre de q. Ceuxci sont en outre classés en deux types, termes liés à un produit de type \dot{q}_i^2 sont appelés les termes de centrifuge, tandis que ceux portant sur un produit de type $\dot{q}_i \dot{q}_j$, où $i \neq j$, sont appelés les termes de Coriolis. Le troisième type consiste en termes impliquant uniquement q mais pas ses dérivées. De toute évidence ces derniers proviennent de la différenciation de l'énergie potentielle. En général, on peut écrire l'équation (2.11) sous la forme matricielle suivante :

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$
(2.12)

où le kj ^{ième} élément de la matrice $C(q, \dot{q})$ est défini comme :

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} c_{ijk}(q) \dot{q}_{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_{i}} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_{j}} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_{k}} \right) \dot{q}_{i}$$
(2.13)

2.3. Propriétés structurelles

Bien que les équations du modèle dynamique (2.12) soient complexes et non linéaires, elles ont des propriétés structurales fondamentales qui peuvent être généralement exploitées pour faciliter la conception de la commande et l'analyse de la stabilité. Ces propriétés sont :

• Propriété

La matrice d'inertie M(q) est symétrique et définie positive. M(q) et $M(q)^{-1}$ sont à la fois uniformément bornées en fonction de $q \in \mathbb{R}^n$ [8].

• Propriété 🕽

Il y a une entrée de commande indépendante pour chaque degré de liberté.

• Propriété 3

Tous les paramètres constants d'intérêts, comme les masses de liaison, les moments d'inertie, etc., apparaissent comme coefficients de fonctions connues des coordonnées généralisées. En définissant chaque coefficient en tant que paramètre séparé, on obtient une relation linéaire de sorte que nous pouvons écrire les équations dynamiques (2.12), en tant que:

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = Y(q,\dot{q},\ddot{q})a = \tau$$

$$(2.14)$$

où $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$ est une matrice $n \times r$ des fonctions connues et a est un vecteur de r paramètres.

• Propriété 4

La matrice $N(q, \dot{q})$, qui est définie comme suit

$$N(q, \dot{q}) = \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}), \qquad (2.15)$$

est antisymétrique.

• Propriété 5

Les équations dynamiques (2.12) d'un robot rigide définis une application $\tau \rightarrow \dot{q}$, i.e.

$$\langle \dot{q} | \tau \rangle_T = \int_0^T \dot{q}^T \tau dt \ge -\beta \tag{2.16}$$

pour $\beta > 0$, pour tout T > 0.

2.4. Contraintes non holonomes

Un système holonome est un système dynamique qui est soumis à des contraintes holonomes. Les contraintes holonomes dans un système mécanique sont caractérisées par des équations algébriques en termes de variables de position (ou elles peuvent être intégrées au niveau des équations de position). Les systèmes mécaniques avec contraintes holonomes sont généralement traités en éliminant certaines variables (coordonnées généralisées) à partir des équations du mouvement. Le processus d'élimination nécessite la résolution de certains composants de variables en termes des autres variables. En supposant que les contraintes holonomes sont indépendantes et continûment dérivables, l'élimination est analytiquement possible.

Alternativement, les contraintes holonomes peuvent être différenciées une seule fois par rapport au temps et peuvent être représentées au niveau des équations de vitesse. Dans la même forme que les contraintes non holonomes sont représentés. Puisque nous travaillons avec des systèmes mécaniques, nous supposons l'existence d'une fonction de Lagrange $L(q, \dot{q})$. Avec l'absence de contraintes, les équations dynamiques du robot peuvent être dérivées à partir des équations d'Euler-Lagrange (voir Eq. (2.1)). Etant donné k contraintes, on peut les écrire comme un vecteur de k équations [8]:

$$A_{j}^{i}(q)\dot{q} = 0, i = 1, \dots, k$$
(2.17)

où $A(q) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ représente un ensemble de k contraintes de vitesse. Une contrainte de cette forme est appelée une contrainte de *Pfaffian*. Nous supposons que les contraintes sont linéairement indépendants et donc A(q) est de rang plein. Les systèmes non holonomes sont généralement des systèmes mécaniques de dimension finie où les contraintes sont imposées sur le mouvement et ne sont pas intégrables, i.e. ces contraintes ne peuvent pas être écrites comme des dérivés de temps d'une fonction des coordonnées généralisées. Elles peuvent généralement être exprimées avec une relation linéaire non intégrable des vitesses. En d'autres termes, une contrainte de *Pfaffian* qui n'est pas intégrable est un exemple d'une contrainte non holonome. Comme un exemple d'une contrainte non holonome, nous considérons un disque roulant sans glissement sur le plan horizontal, comme le montre la Figure (2.1).



Définissons le vecteur d'état comme suit :

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \alpha \\ \varphi \end{bmatrix}$$
(2.18)

où x et y donnent la position du point de contact, φ est l'angle de rotation par rapport à l'axe perpendiculaire passant par son centre, et α est l'angle entre le plan y z et le plan du disque. L'exigence de roulement sans glissement peut être écrite comme un ensemble de contraintes de vitesse non intégrable comme :

$$\dot{x} - r\dot{\varphi}\sin\alpha = 0 \tag{2.19}$$

$$\dot{y} - r\dot{\varphi}\cos\alpha = 0 \tag{2.20}$$

Alternativement, les contraintes de vitesse peuvent être écrites sous la forme (2.17).

$$A(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -r\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -r\cos\alpha \end{bmatrix} \dot{q} = 0$$
(2.21)

Les équations de contraintes (2.19) et (2.20) sont indépendantes. Donc il y a quatre coordonnées et deux équations de contraintes, le système ne dispose que deux degrés de liberté. En particulier, noter que dans une configuration donnée de q, seuls les mouvements qui satisfont les contraintes instantanées non holonomes sont possibles, ce qui est traduit par l'espace nul de la matrice des contraintes A(q). Les contraintes peuvent être incorporées dans la dynamique à l'aide de multiplicateurs de Lagrange. C-à-d. l'équation (2.1) est modifiée en ajoutant une force de contrainte d'un multiplicateur inconnu λ définit comme [8]:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_h^T \\ \lambda_n^T \end{bmatrix}$$
(2.22)

où λ_h est le vecteur de dimension *l* de forces des contraintes associées à des contraintes holonomes, et λ_h est le vecteur de dimension *m* de forces des contraintes associées à des contraintes non holonomes [8].

Puis, l'équation (2.1) peut être écrite comme :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} + A^{T}(q)\lambda - \tau = 0$$
(2.23)

où

$$A(q) = \begin{bmatrix} A_h(q) \\ A_n(q) \end{bmatrix}$$
(2.24)

Dans l'équation (2.24), A_h représente *l* contraintes holonomes et A_n est une matrice de $m \times n$ contenant les contraintes non holonomes. Notons, comme mentionné plus haut dans

cette section, que la présence de *l* contraintes holonomes nous permettant en principe d'éliminer *l* coordonnées de Lagrangien à partir des équations de mouvement et au même temps éliminer le vecteur de force des contraintes λ_h .

Nous pouvons par la suite déduire une formule explicite pour les multiplicateurs de Lagrange. Les équations du mouvement peuvent s'écrire sous la forme :

$$M(q)\ddot{q} + N(q,\dot{q}) + A^{T}(q)\lambda = \tau \qquad (2.25)$$

où τ correspond au vecteur de forces externes et $N(q, \dot{q})$ comprend les forces non conservatrices ainsi que les forces gravitationnelles. On peut démontrer, par différenciation de l'équation de contrainte (2.17) et le remplacement de l'équation résultante dans l'équation (2.25), que le multiplicateur de Lagrange peut s'écrire sous la forme :

$$\lambda = (AM^{-1}A^{T})^{-1} (AM^{-1}(\tau - N) + \dot{A}\dot{q})$$
(2.26)

où la matrice dépendant de la configuration est de rang plein si les contraintes sont indépendantes. Les équations du mouvement sont maintenant données par l'équation. (2.25) avec le multiplicateur de Lagrange défini dans l'équation (2.26).

2.5. Formulation de Lagrange-d'Alembert

Les dynamiques de la formulation du Lagrange-d'Alembert représentent le mouvement du système en projetant les équations du mouvement sur le sous-espace des mouvements admissibles. De cette manière, il est possible d'obtenir une description concise qui est sous une forme bien adaptée pour la conception de la commande.

Considérons le déplacement virtuel δq comme un vecteur qui satisfait $A(q)\delta q = 0$. Le principe de d'Alembert stipule que les forces de contrainte n'effectuent aucun travail virtuel. Donc, $(A^{T}(q)\lambda).\delta q = 0$, pour $A(q)\delta q = 0$. Puisque $(A^{T}(q)\lambda).\delta q = 0$, l'équation. (2.23) devient:

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} - \tau\right) \cdot \delta q = 0$$
(2.27)

où

$$A(q)\delta q = 0 \tag{2.28}$$

Les équations (2.27) et (2.28) s'appellent les équations de Lagrange-d'Alembert. Dans le cas où la contrainte est intégrable, ces équations sont conformes à ceux obtenues en substituant la contrainte dans le Lagrangien, et ensuite en utilisant la version sans contraintes des équations de Lagrange. Si $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ et les contraintes ont la forme $\dot{q}_1 = A(q)\dot{q}_2$, alors les équations du mouvement peuvent être écrites comme [8]:

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} - \tau_1\right) + A^T \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} - \tau_2\right) = 0$$
(2.29)

Ce processus de réduction des équations de mouvement sera illustré dans la modélisation des robots mobiles adoptés dans ce mémoire.

2.6. Modélisation des robots mobiles

2.6.1. Modélisation d'un robot mobile bicycle



Figure 2.2 : Robot mobile à Deux roues.

Considérons un robot mobile à deux roues se déplaçant dans un plan comme il est représenté sur la Figure (2.2). Le robot se caractérise par ses coordonnées (x, y, ϕ) , qui est mesuré conformément à un référentiel local ayant son origine au centre géométrique P de la base mobile. Les angles de rotation des roues sont perpendiculaires au plan du mouvement, ayant les valeurs respectives (θ_L, θ_R) . Chaque roue est actionnée indépendamment et tourne sans glissement. Soit m la masse totale du robot, m_c la masse de la plate forme (sans roues), et m_w la masse de chaque roue, de sorte que $m = m_c + 2m_w$. Soit J le moment d'inertie total par rapport à l'axe vertical passant par P, et J_w le moment d'inertie de chaque roue par rapport à son axe de rotation. Alors, $J = J_c + m_c d^2 + 2m_w b^2$ où J_c est le moment d'inertie sans roues par rapport au centre de masse C [9]. Les coordonnées et la vitesse du point C sont :

$$P_c = P + d(\cos\phi, \sin\phi), \qquad V_c = V + \dot{\phi}d(-\sin\phi, \cos\phi)$$
(2.30)

Le Lagrangien est :

$$L = \frac{1}{2}m\langle V_c, V_c \rangle + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}J_w(\dot{\theta}_L^2 + \dot{\theta}_R^2)$$
(2.31)

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indique le produit scalaire. Il existe trois contraintes, La première est que le robot mobile ne peut pas se déplacer dans la direction latérale [9], c'est-à-dire

$$\dot{y}\cos\phi - \dot{x}\sin\phi = 0 \tag{2.32}$$

Les deux autres contraintes sont que les deux roues motrices roulent sans glissement :

$$\dot{x}\cos\phi + \dot{y}\sin\phi + b\dot{\phi} = r\dot{\theta}_{L}$$

$$\dot{x}\cos\phi + \dot{y}\sin\phi - b\dot{\phi} = r\dot{\theta}_{R}$$
(2.33)

A partir des équations (2.32) et (2.33), nous pouvons obtenir deux contraintes nonholonomes et une contrainte holonome. Pour obtenir la contrainte holonome, on soustrait la première équation de (2.33) du deuxième de celle-ci, on obtient $\dot{\phi} = r/(2b)(\dot{\theta}_L - \dot{\theta}_R)$. En intégrant cette dernière et choisissant correctement l'état initial de $(\phi, \theta_L, \theta_R)$, nous obtenons $\phi = c(\theta_L - \theta_R)$ avec c = r/(2b), qui représente clairement une équation de contrainte holonome [9]. Les deux contraintes non holonomes sont :

$$\dot{y}\cos\phi - \dot{x}\sin\phi = 0$$

$$\dot{x}\cos\phi + \dot{y}\sin\phi = cb(\dot{\theta}_L + \dot{\theta}_R)$$
(2.34)

En notant les variables de la configuration par $q = (x, y, \theta_L, \theta_R)^T$, les contraintes (2.34) peuvent être présentes sous la forme suivante:

$$A(q)\dot{q} = \begin{pmatrix} -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0\\ \cos\phi & \sin\phi & -cb & -cb \end{pmatrix} \dot{q} = 0$$
(2.35)

Les équations du mouvement sont obtenues à partir des équations de Lagrangien comme suit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + A(q)^T \lambda = E(q)\tau$$
(2.36)

où $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^T$ sont appelés les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes cinématique (2.35), $\tau = (\tau_R, \tau_L)^T$ sont les couples d'entraînement, et $E(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$. Ainsi, les équations du mouvement sont :

$$M(q)\ddot{q} + V(q,\dot{q}) + A(q)^T \lambda = E(q)\tau$$
(2.37)

où

$$M(q) = \begin{pmatrix} m & 0 & -mcd\sin\phi & mcd\sin\phi \\ 0 & m & mcd\cos\phi & -mcd\cos\phi \\ -mcd\sin\phi & mcd\cos\phi & J_1 & J_2 \\ mcd\sin\phi & -mcd\cos\phi & J_2 & J_1 \end{pmatrix}$$
(2.38)

 $J_1 = J_w + c^2 (J + md^2), J_2 = -c^2 (J + md^2)$, et

avec

$$V(q,\dot{q}) = \begin{pmatrix} -c^2 dm\dot{\phi}^2 \cos\phi \\ -c^2 dm\dot{\phi}^2 \sin\phi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
(2.39)

Définissons, maintenant :

$$N_{A}(q) = \begin{pmatrix} cb\cos\phi & cb\cos\\ cb\sin\phi & cb\sin\phi\\ 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(2.40)

De telle sorte que $A(q)N_A(q) = 0$. La pré-multiplication de l'équation (2.37) par $N_A(q)^T$ donne :

$$N_{A}(q)^{T} M(q) \ddot{q} + N_{A}(q)^{T} V(q, \dot{q}) = N_{A}(q)^{T} E(q) \tau$$
(2.41)

Etant donné que $A(q)N_A(q) = 0$, il existe un vecteur $\eta = (\eta_1, \eta_2)^T$ tel que $\dot{q} = N_A(q)\eta$. A partir de $N_A(q)$, on peut facilement vérifier que $\eta = (\dot{\theta}_L, \dot{\theta}_R)^T$. Ensuite, le calcul de la dérivée temporelle de $\dot{q} = N_A(q)\eta$ donne [9]:

$$\ddot{q} = \dot{N}_A(q)\eta + N_A(q)\dot{\eta} \tag{2.42}$$

Considérant maintenant une partition adéquate tel que $q = (P, \Theta)$ avec P = (x, y) et $\Theta = (\theta_L, \theta_R)$, on peut écrire (2.42) comme :

$$\ddot{q} = \dot{N}_{A}(q)\Theta + N_{A}(q)\ddot{\Theta}$$
(2.43)

Le remplacement de (2.43) dans (2.41) donne:

$$\ddot{\Theta} = f_{\theta}(q, \dot{q}) + g_{\theta}(q, \dot{q})\tau \tag{2.44}$$

où

$$\begin{aligned} f_{\theta}(q,\dot{q}) &= -(N_{A}^{T}MN_{A})^{-1}(N_{A}^{T}M\dot{N}_{A}\dot{\Theta} + N_{A}^{T}V) \\ g_{\theta}(q,\dot{q}) &= (N_{A}^{T}MN_{A})^{-1}N_{A}(q)^{T}E(q) \end{aligned}$$
(2.45)

et puisque $q = (P, \Theta)$, on arrive aussi à

$$\ddot{P} = f_P(q,\dot{q}) + g_P(q,\dot{q})\tau \tag{2.46}$$

L'ensemble des équations (2.44) et (2.46) représente les équations dynamiques du mouvement. En définissant $Y = P_c = P + d(\cos\phi, \sin\phi) = h(q)$ comme fonction de sortie, les équations du système deviennent [9]:

$$\begin{split} \ddot{P} &= f_P(q, \dot{q}) + g_P(q, \dot{q})\tau\\ \ddot{\Theta} &= f_\theta(q, \dot{q}) + g_\theta(q, \dot{q})\tau\\ Y &= h(q) \end{split} \tag{2.47}$$

avec

$$\begin{aligned} f_{p}(q,\dot{q}) &= \begin{pmatrix} c_{1}\dot{\phi}^{2}\cos\phi - c_{2}(\dot{\theta}_{L}^{2} - \dot{\theta}_{R}^{2})\sin\phi \\ c_{1}\dot{\phi}^{2}\sin\phi + c_{2}(\dot{\theta}_{L}^{2} - \dot{\theta}_{R}^{2})\cos\phi \end{pmatrix}, \ g_{p}(q,\dot{q}) &= c_{0}\begin{pmatrix} \cos\phi & \cos\phi \\ \sin\phi & \sin\phi \end{pmatrix}, \ f_{\theta}(q,\dot{q}) &= c_{3}\dot{\phi}\begin{pmatrix} c_{4}\dot{\theta}_{L} - c_{5}\dot{\theta}_{R} \\ c_{5}\dot{\theta}_{L} - c_{4}\dot{\theta}_{R} \end{pmatrix} \\ g_{\theta}(q,\dot{q}) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_{6} & c_{7} \\ c_{7} & c_{6} \end{pmatrix}, \quad c_{0} &= \frac{bc}{J_{w} + 2b^{2}c^{2}m}, \quad c_{1} &= \frac{2b^{2}c^{2}md}{J_{w} + 2b^{2}c^{2}m}, \quad c_{2} &= bc^{2}, \\ c_{3} &= \frac{2bc^{2}dm}{(J_{w} + 2b^{2}c^{2}m)(J_{w} + 2c^{2}(J + md^{2}))}, \ c_{4} &= c^{2}(J + m(d^{2} - b^{2})), \ c_{5} &= J_{w} + c^{2}(J + m(d^{2} + b^{2})) \\ c_{6} &= \frac{1}{(J_{w} - 2b^{2}c^{2}m)} + \frac{1}{(J_{w} + 2c^{2}(J + md^{2}))}, \quad c_{7} &= \frac{1}{(J_{w} - 2b^{2}c^{2}m)} - \frac{1}{(J_{w} + 2c^{2}(J + md^{2}))} \end{aligned}$$

2.6.2. Modélisation d'un robot mobile tricycle

Un robot mobile ayant un espace de configuration C de n dimensions avec des coordonnées généralisées $(q_1, ..., q_n)$ et soumis à des contraintes peut être décrit par le modèle dynamique suivant [10] [11]:

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F(\dot{q}) + G(q) + \tau_d = B(q)\tau - A^T(q)\lambda$$
(2.48)

où $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice d'inertie symétrique et définie positive, $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice centrifuge et à effet de Coriolis, $F(\dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ désigne les frottements, $G(q) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ est le vecteur de gravitation, τ_d dénote les perturbations inconnues et bornées et les dynamiques non modélisées et non structurées, $B(q) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ est la matrice de transformation d'entrée, $\tau \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ est le vecteur d'entrée, $A(q) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est la matrice associée aux contraintes,

 λ est le multiplicateur de Lagrange.



Figure 2.3 : Robot mobile non holonome tricycle.

Nous considérons que toutes les contraintes cinématiques de type égalité sont indépendantes du temps, et peuvent être exprimées comme suit:

$$A(q)\dot{q} = 0 \tag{2.49}$$

Soit S(t) une matrice de rang plein formée par un ensemble de champs de vecteurs lisses et linéairement indépendant s'étendant sur l'espace nul de A(q), i.e.

$$S^{T}(q)A^{T}(q) = 0 (2.50)$$

Selon (2.49) et (2.50), il est possible de trouver un vecteur auxiliaire $v(t) \in \mathbb{R}^{n-m}$ de telle sorte que:

$$\dot{q} = S(q)v(t) \tag{2.51}$$

Le robot mobile représenté sur la figure (2.2) est un exemple typique d'un système mécanique non holonome. Il se compose d'un véhicule à deux roues motrices montées sur un même axe, et une roue avant libre. Le mouvement et l'orientation sont réalisés par des vérins indépendants, par exemple des moteurs à courant continu fournissant des couples nécessaires pour les roues arrière.

La position du robot dans un repère cartésien d'inertie $\{O, Y, Y\}$ est complètement définie par le vecteur (x_c, y_c) , où x_c et y_c sont les coordonnées du centre de masse du véhicule, et θ est l'orientation de la base $\{C, XC, YC\}$ par rapport à la base inertielle. Les contraintes non holonomes signifient que le robot ne peut pas se déplacer dans la direction normale à l'axe des roues motrices, à savoir, la base mobile satisfait les conditions suivantes de roulement pur et non glissant:

$$\dot{y}_c \cos \theta - \dot{x}_c \sin \theta - d\dot{\theta} = 0 \tag{2.52}$$

A partir de (2.50), S(q) peut être choisie comme suit :

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -d\sin\theta\\ \sin\theta & d\cos\theta\\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(2.53)

Les équations cinématiques du mouvement (2.51) de C en terme de vitesse linéaire et la vitesse angulaire sont données par :

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_c \\ \dot{\boldsymbol{y}}_c \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -d\sin\theta \\ \sin\theta & d\cos\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix}$$
(2.54)

où $|v_1| \le V_{max}$ et $|v_2| \le W_{max}$, V_{max} et W_{max} sont les vitesses linéaires et angulaires maximales du robot mobile. Le système (2.54) est dit le système de directions du véhicule.

Le formalisme de Lagrange est utilisé pour dérivation des équations dynamiques du robot mobile. Dans ce cas G(q) = 0, en raison que la trajectoire de la base mobile est limitée au plan horizontal, c'est à dire, comme le système ne peut pas changer sa position verticale, son énergie potentielle reste constante. L'énergie cinétique est donnée par :

$$k_{i} = \frac{1}{2} m_{i} v_{ci}^{T} v_{ci} + \frac{1}{2} \omega_{i}^{T} I_{i} \omega_{i}$$

$$K = \sum_{i=1}^{n_{i}} k_{i}$$

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^{T} M(q) \dot{q}$$
(2.55)

Les équations dynamiques de la base mobile de la Figure (2.3) peuvent être exprimées sous la forme matricielle (2.48) où :

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & md \sin\theta \\ 0 & m & -md \cos\theta \\ md \sin\theta & -md \cos\theta & 1 \end{bmatrix}, \quad C(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & md\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 & 0 & md\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$G(q) = \begin{bmatrix} 0, B(q) = \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \\ R & -R \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix}, \quad A^T(q) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ -d \end{bmatrix}, \text{ et}$$
$$\lambda = -m(\dot{x}_c \cos\theta + \dot{y}_c \sin\theta)\dot{\theta} \tag{2.56}$$

• Propriétés structurelles de la plateforme mobile

Le modèle (2.48) est maintenant transformé en une représentation plus appropriée à des fins de contrôles. Différencier l'équation (2.51), en remplaçant ce résultat dans (2.48), puis en multipliant par S^T , nous pouvons éliminer la matrice de contraintes $A^T(q)\lambda$. Les équations de mouvement totale de la plate-forme mobile non holonome sont données par:

$$\dot{q} = Sv \tag{2.57}$$

$$S^{T}M\dot{S}\dot{v} + S^{T}(M\dot{S} + CS)v + \bar{F} + \bar{\tau}_{d} = S^{T}B\tau$$
(2.58)

où $v(t) \in \mathbb{R}^{r \times r}$ est un vecteur de vitesse. Nous pouvons réécrire (2.58) comme suit:

$$\overline{M}(q)\dot{v} + \overline{C}(q,\dot{q})v + \overline{F}(v) + \overline{\tau}_d = \overline{B}\tau$$
(2.59)

avec

$$\bar{\tau} = \bar{B}\tau \tag{2.60}$$

où $\overline{M}(q) \in \mathbb{R}^{r \times r}$ est la matrice d'inertie symétrique et définie positive, $\overline{C}(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{r \times r}$ est la matrice de Corio is et de centrifuge, $\overline{F}(v) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ présente les frottements, $\overline{\tau}_d$ dénote les perturbations inconnues et bornées et les dynamiques non modélisées et non structurées, et $\overline{\tau} \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ est le vecteur d'entrée. Si r = n - m, il est facile de vérifier que \overline{B} est une matrice non singulière constante qui dépend de la distance entre les roues motrices R et le rayon de la roue r (voir la Figure (2.3)). L'équation (2.59) décrit le comportement du système non holonome dans un nouvel repère de coordonnées locales, c'est à dire S(q) est une matrice jacobienne qui transforme les vitesses v en coordonnées de base mobile à des vitesses en coordonnées cartesiennes \dot{q} . Par conséquent, les propriétés de la dynamique originelle restent valables pour le nouvel ensemble de coordonnées [10].

- Bornitude : $\overline{M}(q)$ et la norme de $\overline{C}(q, \dot{q})$ sont bornées.
- Antisymétrie: La matrice $\overline{\dot{M}} 2\overline{C}$ est antisymétrique.

Preuve

La dérivée de la matrice d'inertie *M* et l'expression de la matrice de Coriolis et centrifuge sont données par :

$$\dot{\overline{M}} = \dot{S}^T M S + S^T \dot{M} S + S^T M \dot{S}$$
(2.61)

$$\bar{C} = S^T M \dot{S}^T C S \tag{2.62}$$

Puisque $\dot{M} - 2C$ est antisymétrique, on peut facilement démontrer que

$$\dot{\bar{M}} - 2\bar{C} = \dot{S}^T M S - (\dot{S}^T M S)^T + S^T (\dot{M} - 2C) S = 0$$
(2.63)

2.7. Conclusion

Dans ce chapitre, on a fait un bref rappel sur les deux formalismes, à savoir : celui d'Euler-Lagrange et celui de Lagrange-d'Alembert. Ces deux formalismes ont été exploités par la suite pour modéliser deux robots mobiles : robot mobile bicycle et robot mobile tricycle. Ces modèles obtenus seront utilisés par la suite dans les chapitres 3 et 4 pour concevoir les lois de commandes et faire des simulations numériques.

Chapitre 3 Commande par linéarisation E/S et par mode glissant d'un robot mobile bicycle

Chapitre 3

Commande par linéarisation E/S et par mode glissant d'un robot mobile bicycle

3.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons synthétiser une commande linéarisante entrée-sortie (E/S) et par mode glissant pour le robot mobile bicycle présenté dans le chapitre 2. Aussi, pour vérifier l'efficacité de ces commandes, nous allons faire quelques testes via des simulations numérique sur ce robot.

3.2. Commande par linéarisation E/S du robot mobile bicycle

Dans cette section, nous concevons une loi de commande pour le robot mobile bicycle en nous basant sur son modèle dynamique donnée dans le chapitre 2.

$$M(q)\ddot{q} + V(q,\dot{q}) + A(q)^T \lambda = E(q)\tau$$
(3.1)

Pour vérifier si le système (2.48) est E/S linéarisable, avec Y comme sortie, nous calculons les dérivées de Y jusqu'à ce que les entrées τ apparaissent dans les équations. En adoptant le formalisme de Lie [10], nous obtenons :

$$\ddot{Y} = F(q, \dot{q}) + G(q, \dot{q})\tau \tag{3.2}$$

avec

$$F(q,\dot{q}) = (L_{fp}^{2} + L_{f\theta}^{2})h(q)$$

$$G(q,\dot{q}) = (L_{gp}L_{fp} + L_{g\theta}L_{f\theta})h(q)$$
(3.3)

Les expressions détaillées de $F(q, \dot{q})$ et $G(q, \dot{q})$ sont données comme:

$$F(q,\dot{q}) = \begin{pmatrix} -c8\dot{\phi}\cos\phi - c9(\dot{\theta}_L^2 - \theta_R^2)\sin\phi \\ -c8\dot{\phi}\sin\phi + c9(\dot{\theta}_L^2 - \theta_R^2)\cos\phi \end{pmatrix}$$
(3.4)

$$G(q,\dot{q}) = \begin{pmatrix} c10\cos\phi - c11\sin\phi & c10\cos\phi + c11\sin\phi \\ c10\cos\phi + c11\sin\phi & -c10\cos\phi + c11\sin\phi \end{pmatrix}$$
(3.5)

où

$$c_8 = \frac{dJ_w}{(J_w + 2b^2c^2m)}, \ c_9 = \frac{c^2b(J_w + 2c^2J)}{J_w + 2c^2(J + d^2m)}$$
$$c_{10} = \frac{bc}{J_w + 2b^2c^2m} \ \text{et} \ c_{11} = \frac{cd}{J_w + 2c^2(J + d^2m)}$$

Si $G(q, \dot{q})$ est inversible, et si nous choisissons la commande comme $\tau = G^{-1}(q, \dot{q})(v - F(q, \dot{q}))$, nous pouvons réduire la dynamique non linéaire (3.2) à un double intégrateur en cascade:

$$\ddot{Y} = v \tag{3.6}$$

Le terme de commande est linéaire et permet d'assurer la stabilité. Il sera conçue par la suite. Prenons d > 0, $G(q, \dot{q})$ est toujours inversible, car son déterminant est donnée par :

$$\det(G(q,\dot{q})) = -\frac{2bc^2d}{(J_w + 2b^2c^2m)(J_w + 2c^2(J + d^2m))}$$
(3.7)

Robot

Mobile

Y



τ

Commande

Linéarisante E/S

Considérons un chemin de poursuite Y_r , donc l'erreur de poursuite est $e = Y_r - Y$. En appliquant la commande $\tau = G^{-1}(q, \dot{q}) [v - F(q, \dot{q})]$ au système, on obtient:

$$\ddot{e} = \ddot{Y}_r - \ddot{Y} = \ddot{Y}_r - v \tag{3.8}$$

Si l'on choisit

<u>Y</u>, +

$$v = \ddot{Y}_r + K_p e + K_d \dot{e} \tag{3.9}$$

où K_p et K_d sont des matrices de conception diagonales et définissent positives. Elles sont aussi choisies telle que la dynamique suivante est stable.

$$\ddot{e} + K_p e + K_d \dot{e} = 0 \tag{3.10}$$

3.3. Commande par mode glissant

3.3.1. Principe de la commande

La commande par mode glissant pour les systèmes non linéaires a été largement étudiée et développée depuis leur introduction. L'objectif de la méthode est, à l'aide d'une commande discontinue, de contraindre le système à évoluer, au bout d'un temps fini, et se maintenir sur une surface, dite surface de glissement; où le comportement résultant correspond aux dynamiques souhaitées. Le régime du système ainsi commandé est appelé mode glissant et la dynamique de celui-ci peut être rendue insensible aux variations paramétriques, aux erreurs de modélisation et à certaines perturbations externes. La loi de commande à mode glissant est conceptuellement relativement simple et présente des qualités de robustesse vis-à-vis de perturbations, et des erreurs de modélisation.

La mise en œuvre de cette méthode de commande nécessite trois étapes :

- Le choix de la surface de glissement.
- l'établissement des conditions d'existences de la convergence.
- la détermination de la loi de commande.



Figure 3.2 : Principe du mode glissant.

Considérons le système dynamique suivant:

$$x^{(n)} = f(x) + \Delta f(x) + \left(g(x) + \Delta g(x)\right)u \tag{3.11}$$

ou encore

$$x^{(n)} = f(x) + g(x)u + \Delta(x)$$
(3.12)

avec $x = \begin{bmatrix} x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)} \end{bmatrix}^T$ est le vecteur d'état, $x^{(i)}$ la $i^{ième}$ dérivée de x. $\Delta(x)$ présente les incertitudes étant supposées bornées par une constante connue $\overline{\Delta}$, i.e. $|\Delta(x)| \le \overline{\Delta}$.

L'objectif consiste à synthétiser une loi de commande par la technique des modes glissants assurant la poursuite de l'état x à une trajectoire désirée $x_d = [x_d, \dot{x}_d, ..., x_d^{(n-1)}]^T$. Pour que la tâche de poursuite soit satisfaite dans un temps fini, l'état initial désiré doit être [13]:

$$x_d(0) = x(0) \tag{3.13}$$

3.3.2. Surface de glissement

Soit $e = x_d - x$ l'erreur de poursuite de la variable x, et $E = x_d - x = [e, \dot{e}, ..., e^{(n-1)}]$ le vecteur des erreurs de poursuite.

On définit la surface de glissement comme suit:

$$S(x,t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} e = e^{(n-1)} + \alpha_{n-1}e^{(n-2)} + \dots + \alpha_1 e = 0$$
(3.14)

 λ est une constante strictement positive, choisie de telle que la rapidité et la stabilité du système sont assurées.

En se basant sur la condition initiale (3.13), le problème de poursuite de x à x_d est équivalent a celui de rester sur la surface, S(t) = 0, $\forall t > 0$ En effet, S = 0 représente une équation différentielle linéaire dont la solution unique est e = 0 [14], avec la condition initiale (3.13).

Donc le problème de poursuite d'un vecteur d'état x de dimension n peut être réduit à celui d'une stabilisation d'une variable scalaire S à zéro [14].

Notons que la bornitude de S peut être traduite en bornitude du vecteur de l'erreur de poursuite E. Par conséquence, le scalaire S représente une vraie mesure des performances de poursuite [15]. Supposons que E(0) = 0, donc nous obtenons:

$$\forall t \ge 0, |S(t)| \le \Phi \Longrightarrow \forall t > 0, |e^{(i)}|(t) \le (2\lambda)^i \xi, pour: i = 0, ..., n-1$$
(3.15)
avec $\xi = \frac{\Phi}{\lambda^{n-1}}$.

3.3.3. Condition de convergence

Les conditions de convergence permettent à la dynamique du système de converger vers les surfaces de glissement. Nous retenons de la littérature deux conditions correspondant au mode de convergence de l'état du système [16].

• Fonction directe de commutation

C'est la première condition de convergence, elle est proposée par Utkin [16]:

$$S(x)\dot{S}(x) < 0 \tag{3.16}$$

• Fonction de Lyapunov

II s'agit de formuler une fonction scalaire positive V(S) > 0 pour les variables d'état du système, et de choisir une loi de commande qui fera décroitre la dérivée temporelle de cette fonction (i.e. $\dot{V}(S) < 0$). Cette fonction est généralement utilisée pour garantir la stabilité des systèmes non linéaires.

En définissant la fonction de Lyapunov par :

$$V(S) = \frac{1}{2}S^{2}(x)$$
(3.17)

Sa dérivée temporelle est donnée par

$$\dot{V}(S) = \dot{S}(x)S(x)$$
 (3.18)

Pour que la fonction de Lyapunov soit décroissante, il suffit d'assurer que sa dérivée temporelle soit négative. Ceci est vérifie par:

$$\dot{V} = \dot{S}S < 0 \tag{3.19}$$

Remarque 3.1: Pour assurer une convergence en temps fini vers la surface de glissement, la condition d'attractive définie précédemment est remplacée par une condition plus fine, dite condition de η -attractive, donnée par [16] :

$$\dot{V} = \dot{S}S \le -\eta |S| - h(S)S \tag{3.20}$$

où $h(S) = \psi S$, et $|\eta|$ et ψ sont des constantes strictement positives.

En particulier, une fois sur la surface, les trajectoires du système restent sur cette dernière ou la condition de glissement (3.20) fait de la surface comme un ensemble invariant.

En outre, comme nous remarquons, (3.20) implique que quelques perturbations ou incertitudes dynamiques peuvent être tolérées en gardant encore la surface un ensemble invariant.

L'expression (3.20) signifie que la distance entre les états et la surface, mesurée par S^2 diminue le long de toutes les trajectoires du système. Donc, on contrainte les trajectoires de pointer vers la surface S comme illustre la Figure (3.3) [17].

Graphiquement, cela correspond au fait que dans la Figure (3.3), les trajectoires peuvent se déplacer en pointant encore vers la surface S qui vérifie (3.20) et fait référence a une surface glissante.

Le comportement du système sur la surface est appelé régime glissant ou mode glissant [15].



Figure 3.3 : Principe de glissement.

3.3.4. Loi de commande

Une fois la surface de glissement est déterminée, le prochain pas est de concevoir une loi de commande qui rend la surface de glissement attractive à l'état du système, d'une autre manière, la loi de commande doit être capable de pousser l'état du système vers la surface de glissement [14].

Si l'état du système reste sur la surface *S*, la stabilité asymptotique de la dynamique de glissement assurera la convergence vers zéro de l'erreur de poursuite [14].

a) Expression analytique de la commande

Maintenant, nous nous intéressons au calcul d'une loi de commande attractive du système qui est définie dans l'espace d'état par l'équation (3.15)

Si le système (3.15) est en boucle fermée sous la loi de commande

$$u = g^{-1}(x) \left(-f(x) + v + K_0 S(x) + K_1 sign(S) \right)$$
(3.21)

où K_0 et $K_1 > 0$ sont des constantes de conception, et la fonction signe est définie comme suit :

$$sign(S) = \begin{cases} 1 & si \ S > 0 \\ 0 & si \ S = 0 \\ -1 & si \ S < 0 \end{cases}$$
(3.22)

avec $K_1 \ge \eta + \overline{\Delta}$

Si le gain de commande g(x) est différent de zéro tout au long de la trajectoire d'état du système, la surface S convergera exponentiellement vers zéro.

Preuve

Soit la fonction de Lyapunov $V = \frac{1}{2}S^2(x)$, sa dérivée temporelle est donnée par :

$$\dot{V} = S(x)\dot{S}(x) \tag{3.23}$$

De (3.14), la dérivée temporelle de la surface S peut s'écrire comme suit :

$$\dot{S} = x_d^{(n)} - x^{(n)} + \alpha_{n-1} e^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 \dot{e}$$
(3.24)

Mettons

$$v = x_d^{(n)} + \alpha_{n-1} e^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 \dot{e}$$
(3.25)

Donc, (3.24) devient:

$$\dot{S} = -x^{(n)} + v$$
 (3.26)

ou encore

$$\dot{S} = -f(x) - g(x)u + v - \Delta(x) \tag{3.27}$$

En utilisant (3.27), \dot{V} devient:

$$\dot{V} = S(x)\dot{S}(x) \le S(x)\left(-f(x) - g(x)u + v\right) + \overline{\Delta}|S|$$
(3.28)

Si l'on introduit la loi de commande u(t) donnée par (3.21) dans (3.28), on obtient:

$$\dot{V} \leq -K_0 S^2 + (-K_1 + \overline{\Delta}) |S|$$
 (3.29)

où $K_1 \ge \overline{\Delta} + \eta$. Cela implique que

$$\dot{V} \le -\eta |S| - K_0 S^2 \tag{3.30}$$

La dynamique de \dot{V} est rendue négative ($\forall S \neq 0$), si les coefficients sont choisies positifs. Le choix de la constante K_1 est très influant, car si K_1 est très petit, le temps de réponse est trop long et si elle est trop grande, le broutement peut avoir lieu.

b) Définition des grandeurs de la commande

La structure d'un tel contrôleur comporte deux parties, une première concernant la linéarisation exacte et une deuxième stabilisante. Cette dernière est très importante dans la technique de commande non linéaire car elle est utilisée pour éliminer les effets d'imprécision du modèle et des perturbations extérieures [16],[17]. Nous posons:

$$u = u_{eq} + u_{\eta} \tag{3.31}$$

avec

$$u_{eq} = g^{-1}(x) \left(-f(x) + v \right)$$
(3.32)

et

$$u_n = g^{-1}(x) \big(K_0 S + K_1 sign(S) \big)$$
(3.33)

où u_{eq} correspond à la loi de commande équivalente proposer par Filipov et Utkin [17]. Cette commande est considérée comme la commande la plus directe et la plus simple. Elle est calculée en connaissant que le comportement du système durant le mode de glissement est décrit par $\dot{S} = 0$.

La commande u_n est déterminée pour garantir l'attractivité de la variable x à contrôler vers la surface. En d'autre terme, elle définit le comportement dynamique du système durant le mode de convergence.

3.4. Conception de la commande à mode glissant pour le robot mobile bicycle

Considérons de nouveau le système (3.2). On ajoute a ce système un terme incertain $\Delta(q, \dot{q})$ dû aux perturbations externes et aux incertitudes paramétriques omniprésentes.

$$\ddot{Y} = F(q,\dot{q}) + G(q,\dot{q})(\tau + \Delta(q,\dot{q}))$$
(3.34)

avec $\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1(q, \dot{q}) \\ \Delta_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix}$.

Choisissons une surface de glissement de type PID comme suit :

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \end{bmatrix}^T = \dot{e} + 2\lambda e + \lambda^2 \int_0^t e d\tau$$
 (3.35)

 λ est une constante de conception strictement positif.

La dérivée par rapport au temps de cette surface est donnée par :

$$\dot{S} = \ddot{e} + 2\lambda \dot{e} + \lambda^{2} e$$

$$= \ddot{Y}_{r} - \ddot{Y} + 2\lambda \dot{e} + \lambda^{2} e$$

$$= \ddot{Y}_{r} - F(q, \dot{q}) - G(q, \dot{q})\tau + 2\lambda \dot{e} + \lambda^{2} e - \Delta(q, \dot{q})$$
(3.36)

Remarque 3.2: Notons que le problème de poursuite de Y à sa référence désirée Y_r est transformé à celui d'une stabilisation du vecteur S dont la dynamique est d'ordre 1. Dans ce cas, notre objectif devient la conception d'une commande qui permet de forcer cette surface S à converger asymptotiquement ou exponentiellement vers zéro.

La commande à mode glissant est choisie comme :

$$\tau = G^{-1}(q, \dot{q}) \Big[-F(q, \dot{q}) + \ddot{Y}_r + 2\lambda \dot{e} + \lambda^2 e + K_{s0} sign(S) + K_{s1}S \Big]$$
(3.37)

avec $K_{s0} = diag(k_{s01}, k_{s02})$ et $K_{s1} = diag(k_{s11}, k_{s12})$ sont des matrices de conception choisies définies positives

En remplaçant la commande (3.37) dans la dynamique (3.36), on obtient:

$$\dot{S} = -K_{s0} sign(s) - K_{s1} S - \Delta(q, \dot{q})$$
 (3.38)

Choisissons la fonction de Lyapunov comme suit :

$$V = \frac{1}{2}S^T S \tag{3.39}$$

Sa dérivée temporelle est donnée par :

$$\dot{V} = S^T \dot{S} \tag{3.40}$$

En remplaçant l'expression (3.38) dans (3.40), on trouve

$$\dot{V} = S^{T} \left[-K_{S0} sign(S) - K_{S1} S - \Delta(q, \dot{q}) \right]$$
$$= -S^{T} K_{S0} sign(S) - S^{T} K_{S1} S - S^{T} \Delta(q, \dot{q})$$
(3.41)

Si l'on choisit $K_{s0} > |\Delta_i|$, l'expression (3.42) devient:

$$\dot{V} \le -S^T K_{\rm el} S \le 0 \tag{3.42}$$

De l'équation (3 42), on peut facilement démontrer la convergence exponentielle de S vers zéro.

3.5. Simulation

Pour illustrer les performances des deux méthodes de commandes étudiées, nous faisons des simulations numériques sur ce robot à deux roues. Pour la résolution numérique des équations différentielles, nous avons adopté la méthode de RK4. La trajectoire de références est choisie comme suit:

$$x_r = \sin(\alpha t)$$

$$y_r = \rho \cos(\beta t)$$
(3.43)

avec $\alpha = 2/3$, $\beta = 1/3$ et $\rho=2$. Dans le plan x-y, ce chemin de référence prend la forme d'un *huit*. Les paramètres du robots sont choisis comme : $m_c = 94 \text{ kg}$, $m_w = 5 \text{ kg}$, $J_c = 6.61 \text{ kgm}^2$, $J_w = 0.01 \text{ kgm}^2$, r=0 075 m, b=0.171 m, et d=0.08 m.

Pour tester la robustesse de chaque commande, nous avons considéré deux cas: i.e. avec perturbation $(\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}^T)$ et sans perturbation $(\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T)$.

a) Résultats de simulation de la commande par linéarisation E/S

Les paramètres du contrôleur linéarisant E/S sont choisis comme $k_p = 5$ et $k_d = 5$. Les résultats de simulation pour les deux cas (avec et sans perturbation) sont représentés respectivement sur les Figures (3.4) et (3.5). La Figure (3.4a) montre les erreurs de poursuite. La Figure (3.4b) montre la trajectoire tracée par le robot mobile. La figure (3.4c) illustre les signaux de commande envoyés au robot. Quant à la Figure (3.4c), elle montre les angles de rotations des roues.

Quand des perturbations sont ajoutées au modèle, les performances de la commande par linéarisation E/S se dégradent, comme le montre les Figures (3.5a) et (3.5b).

Chapitre 3 : Commande par linéarisation E/S et par mode glissant d'un robot mobile bicycle



Figure 3.4 : *Résultats de simulation obtenus en appliquant la commande par linéarisation* E/S *en absence des perturbations: a) Erreurs de poursuite:* e_x (trait plein) et e_y (trait pointillé). b) Trajectoire dans le plan : xy (trait plein) et x_ry_r (trait pointillé). c) Signaux de commande : τ_1 (trait plein) et τ_2 (trait pointillé). d) Angles de rotation : θ_L (trait plein) et θ_R (trait pointillé).



Figure 3.5 : Résultats de simulation obtenus en appliquant la commande par linéarisation E/S en présence des perturbations: a) Erreurs de poursuite: e_x (trait plein) et e_y (trait pointillé). b) Trajectoire dans le plan : xy (trait plein) et $x_r y_r$ (trait pointillé). c) Signaux de commande : τ_1 (trait plein) et τ_2 (trait pointillé). d) Angles de rotation : θ_L (trait plein) et θ_R (trait pointil

Chapitre 3 : Commande par linéarisation E/S et par mode glissant d'un robot mobile bicycle



Figure 3.6 : *Résultats de simulation obtenus en appliquant la commande à mode glissant en absence des perturbations: a) Erreurs de poursuite:* e_x (trait plein) et e_y (trait pointillé). b) Trajectoire dans le plan : xy (trait plein) et x_ry_r (trait pointillé). c) Signaux de commande : τ_1 (trait plein) et τ_2 (trait pointillé). d) Angles de rotation : θ_L (trait plein) et θ_R (trait pointillé).



Figure 3.7 : *Résultats de simulation obtenus en appliquant la commande à mode glissant en présence des perturbations: a) Erreurs de poursuite:* e_x (trait plein) et e_y (trait pointillé). b) Trajectoire dans le plan : xy (trait plein) et x_ry_r (trait pointillé). c) Signaux de commande : τ_1 (trait plein) et τ_2 (trait pointillé). d) Angles de rotation : θ_L (trait plein) et θ_R (trait pointillé).

b) Résultats de simulation de la commande par mode glissant

Les paramètres de la commande par mode glissant sont choisis comme suit: $\lambda = 2$, $K_{s0} = diag(10,10)$ et $K_{s1} = diag(1,1)$. Les résultats de simulation, pour les deux cas : à savoir avec et sans perturbation, sont illustrés respectivement sur les Figures (3.6) et (3.7). Nous remarquons d'après ces figures que les performances en terme de poursuite dans les deux cas sont très bonnes. Les commandes sont bornées et admissibles. Comparativement à la commande linéarisante, les performances de la commande à mode glissant ne sont pas dégradées en présence des perturbations externes.

c) Etude comparative entre les deux méthodes de commandes

D'après ces résultats obtenus, nous constatons que la réponse du système est plus rapide lorsqu'on utilise la loi de commande à mode glissant même en présence des perturbations, et que l'erreur de poursuite correspondant tend vers zéro plus rapidement. Par contre, la loi de commande par linéarisation E/S peut être performante, si le modèle du robot est parfaitement connu. Mais elle est moins robuste et très sensible aux perturbations et aux variations paramétriques.

3.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé pour un robot mobile bicycle deux approches de commande non linéaire à savoir: la commande par linéarisation E/S et la commande à mode glissant. Les performances de ces commandes ont été vérifiées via des simulations numériques. Les résultats de simulation obtenus, en présence des perturbations externes, ont montré clairement la supériorité de la commande à mode glissant (en terme de précision, rapidité et rejet de perturbations) par rapport à celle obtenue par linéarisation E/S.



Chapitre 4 Commande par backstepping d'un robot mobile tricycle

4.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous rappellerons le concept de base de la commande par backstepping à travers un exemple simple. Cette technique sera utilisée par la suite pour commander le modèle cinématique aussi bien que le modèle dynamique du robot mobile tricycle présenté dans le chapitre 2. Les performances de cette commande backstepping seront vérifiées via des simulations numériques.

4.2. Commande par backstepping

La technique de commande par backstepping a été développée au début des années 90. L'arrivée de la commande par backstepping a donné un nouveau souffle à la commande des systèmes non linéaires, qui est malgré les grands progrès réalisés, il manquait des approches générales. Cette technique est une méthode systématique et récursive de synthèse de lois de commande non linéaires qui utilise le principe de stabilité de Lyapunov (méthode directe) et qui peut s'appliquer à une large classe de systèmes non linéaires ayant une forme triangulaire inférieure.

L'idée de base de la commande de type backstepping est de rendre les systèmes bouclés équivalents à des sous-systèmes d'ordre un en cascade stable au sens de Lyapunov, ce qui leur confère des qualités de robustesse et une stabilité asymptotique globale. En d'autres termes, c'est une méthode multi-étapes. A chaque étape du processus, une commande virtuelle est ainsi générée pour assurer la convergence du système vers son état d'équilibre. Cela peut être atteint à partir des fonctions de Lyapunov qui assurent pas à pas la stabilisation de chaque étape de synthèse.

Dans cette section, on va présenter la commande par backstepping dans le cas non adaptatif pour les systèmes non linéaires décrits par les équations différentielles suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1} = f_{1}(x_{1}) + g_{1}(x_{1})x_{2} \\ \dot{x}_{2} = f_{2}(x_{1}, x_{2}) + g_{2}(x_{1}, x_{2})x_{3} \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_{1}, \dots, x_{n-1}) + g_{n-1}(x_{1}, \dots, x_{n-1})x_{n} \\ \dot{x}_{n} = f_{n}(x_{1}, \dots, x_{n}) + g_{n}(x_{1}, \dots, x_{n})u \\ y = x_{1} \end{cases}$$

$$(4.1)$$

où les fonctions $g_i \neq 0$ et f_i sont des fonctions connues, lisses et non linéaires.

4.2.1. Exemple illustratif

Considérons un système non linéaire modélisé par la dynamique suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u \\ y = x_1 \end{cases}$$
(4.2)

où les fonctions $(g_1(x_1) \text{ et } g_2(x_1, x_2) \neq 0)$ et $(f_1(x_1) \text{ et } f_2(x_1, x_2))$ sont des fonctions connues, lisses et non linéaires.

L'objectif est de ramener l'état x_1 vers une trajectoire désirée x_{1d} . Puisque le système (4.2) en considération est du 2ième ordre, la synthèse de la loi de commande s'effectuera alors en deux étapes.

• Etape 1

$$e_1 = x_1 - x_{1d} \Rightarrow \dot{e}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 - \dot{x}_{1d}$$
 (4.3)

où x_2 est la commande virtuelle et x_{2d} est la valeur désirée de x_2 . On définit l'erreur de poursuite de x_2 comme $e_2 = x_2 - x_{2d}$.

On choisit la fonction de Lyapunov candidate comme suit:

$$V_1 = \frac{1}{2}e_1^2 \tag{4.4}$$

Sa dérivée temporelle est

$$\dot{V}_1 = e_1 \dot{e}_1 = e_1 (f_1(x_1) + g_1(x_1) x_2 - \dot{x}_{1d})$$
 (4.5)

On pose

$$-k_1 e_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1) x_{2d} - \dot{x}_{1d}$$
(4.6)

où k_1 est une constante positive de conception.

D'après l'équation (4.6), on trouve la commande virtuelle comme :

$$x_{2d} = \frac{1}{g_1(x_1)} \left(-f_1(x_1) - k_1 e_1 + \dot{x}_{1d} \right)$$
(4.7)

On aura donc

$$\dot{V}_1 = -k_1 e_1^2 + g_1 e_2 e_1 \tag{4.8}$$

Dans l'étape suivante, on va essayer de stabiliser e_2 .

• Etape 2

La dynamique de e_2 peut être donnée comme suit:

$$\dot{e}_2 = \dot{x}_2 - \dot{x}_{2d} = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u - \dot{x}_{2d}$$
(4.9)

La dynamique de e_1 peut être réécrite comme:

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1 + g_1 e_2 \tag{4.10}$$

A partir de (4.9) et (4.10), on a:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -k_1 e_1 + g_1 e_2 \\ \dot{e}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2) u - \dot{x}_{2d} \end{cases}$$
(4.11)

Maintenant, on choisit la fonction de Lyapunov candidate comme suit :

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}e_2^2 = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2$$
(4.12)

Sa dérivée temporelle est :

$$\dot{V}_2 = \begin{vmatrix} -k_1 e_1^2 + e_2(g_1 e_1 + f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u - \dot{x}_{2d}) \end{vmatrix}$$
(4.13)

On cherche une loi de commande qui vérifie :

$$-k_2 e_2 = g_1 e_1 + f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u - \dot{x}_{2d}$$
(4.14)

Ce qui donne :

$$u = \frac{1}{g_2(x_1, x_2)} \left(-f_2(x_1, x_2) - k_2 e_2 - g_1 e_1 + \dot{x}_{2d} \right) , \text{ avec } k_2 > 0$$
(4.15)

où \dot{x}_{2d} est calculé analytiquement comme suit :

$$\dot{x}_{2d} = \frac{dx_{2d}}{dx_1} \dot{x}_1 + \frac{dx_{2d}}{dx_{1d}} \dot{x}_{1d} + \frac{dx_{2d}}{d\dot{x}_{1d}} \ddot{x}_{1d}$$
(4.16)

On aura donc :

$$\dot{V}_2 = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 \tag{4.17}$$

On peut conclure alors que e_1 et e_2 sont exponentiellement stables.

4.3. Commande par backstepping d'un robot mobile tricycle

Notre objectif dans cette section consiste à concevoir un algorithme de commande backstepping en utilisant conjointement le modèle cinématique et le modèle dynamique du robot mobile non holonome tricycle dont le modèle est donné dans le chapitre 2:

$$\dot{q} = sv$$

 $\overline{M}(q)\dot{v} + \overline{C}(q,\dot{q})v + \overline{F}(v) + \overline{\tau}_d = \overline{\tau}$, avec $\overline{\tau} = \overline{B}\tau$ (4.17)

Le problème de la navigation non holonome de direction peut être divisé en trois problèmes fondamentaux, à savoir : la poursuite d'une trajectoire de référence, le suivi d'un chemin, et la stabilisation d'un point. Il est souhaitable d'avoir un algorithme de conception commun capable de faire face à ces trois problèmes de navigation de base. Cet algorithme peut être mis en œuvre en considérant que chacun des problèmes de base peut être résolu en utilisant des entrées de commande virtuelle lisse adéquate de vitesse.

Les trois problèmes de navigation de base sont résolus comme suit.

• Poursuite

Le problème de poursuite d'une trajectoire pour les véhicules non holonomes est posé comme suit. Considérons la référence suivante :

$$\dot{x}_{r} = v_{r} \cos \theta_{r}$$

$$\dot{y}_{r} = v_{r} \sin \theta_{r}$$

$$\dot{\theta}_{r} = w_{r}$$

$$q_{r} = \begin{bmatrix} x_{r} & y_{r} & \theta_{r} \end{bmatrix}^{T}, v_{r} = \begin{bmatrix} v_{r} & w_{r} \end{bmatrix}^{T}$$
(4.19)

avec $v_r > 0$ pour out t, trouver une commande de vitesse lisse $U_c = f_c(e_p, v_r, K)$ de telle

sorte que $\lim_{t\to\infty} (q_r + q) = 0$, où e_p, v_r, K sont respectivement l'erreur de poursuite de position $e_p = q_r - q$, le vecteur de vitesse de référence et le vecteur de gain de commande. Puis on calcule la commande en couple $\tau(t)$ pour le modèle dynamique du robot mobile de telle sorte que $v \to U_c$ quand $t \to \infty$.

• Suivi d'un chemin

Etant donné un chemin P dans un plan et la vitesse linéaire du robot mobile v(t), le problème consiste à trouver une commande lisse et adéquate de vitesse $U_c = f_c(e_{\theta}, v, b, K)$ où e_{θ} et b(t) sont respectivement l'erreur d'orientation et la distance entre un point de référence dans le robot mobile et le chemin P, de telle sorte que $\lim_{t\to\infty} e_{\theta} = 0$ et $\lim_{t\to\infty} b(t) = 0$. Ensuite, calculer une commande en couple $\tau(t)$ pour le modèle dynamique du robot mobile, de telle sorte que $v \to U_c$ quand $t \to \infty$.

• Stabilisation d'un point

Compte tenu d'une configuration arbitraire q_r , trouver une commande lisse et variant dans le temps de vitesse $U_c = f_c(e_p, v_r, K, t)$ de telle sorte que $\lim_{t\to\infty} (q_r - q) = 0$. Puis calculer la commande en couple $\tau(t)$ pour le modèle dynamique (4.18), de telle sorte que $v \to U_c$ quand $t \to \infty$.

Considérons comme exemple le problème de poursuite décrit précédemment. Le vecteur des erreurs de poursuite exprimées dans la base liée à la plate-forme mobile est donné par

$$e_p = T_e(q_r - q) \tag{4.20}$$

ou encore

$$e_{p} = \begin{bmatrix} e_{1} \\ e_{2} \\ e_{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r} - x \\ y_{r} - y \\ \theta_{r} - \theta \end{bmatrix}$$
(4.21)

A partir de (4.21), la dynamique des erreurs de poursuite est donnée par

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} we_2 - v + v_r \cos(e_3) \\ -we_1 + v_r \sin(e_3) \\ w_r - w \end{bmatrix}$$
(4.22)

où $U = \begin{bmatrix} v & w \end{bmatrix}^T$ est l'entrée de commande (virtuelle) du modèle cinématique.

Pour concevoir la commande du système τ permettant de stabiliser conjointement le modèle cinématique et le modèle dynamique du robot mobile à tricycle, on va appliquer l'approche backstepping en deux étapes.

Etape 1

Dans cette étape, on va concevoir U_c qui stabilise la dynamique (4.22). Pour cette fin, on choisit la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V_1 = k_1(e_1^2 + e_2^2) + 2k_3v_r(1 - \cos(e_3))$$
(4.23)

où k_1 et $k_3 > 0$ sont deux constantes de conception et v_r est supposé strictement positive. La dérivée de V_1 par rapport au temps est donnée par :

$$\dot{V}_1 = 2k_1(\dot{e}_1e_1 + \dot{e}_2e_2) + 2k_3v_r\dot{e}_3\sin(e_3)$$
(4.24)

On peut choisir la commande virtuelle suivante :

$$U_{c} = \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{c} \\ w_{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{r} \cos(e_{3}) + k_{1}e_{1} \\ w_{r} + k_{3}v_{r} \sin(e_{3}) + k_{1}v_{r}e_{2} \end{bmatrix}$$
(4.25)

où $k_2 = k_1 / v_{2r} k_3$.

En remplaçant cette commande Uc dans \dot{V}_1 , on obtient:

$$\dot{V}_{1} \leq -k_{1}^{2}e_{1}^{2} - k_{3}^{2}v_{r}^{2}\sin^{2}(e_{3}) + 2k_{1}e_{1}e_{c1} + 2k_{3}v_{r}e_{c2}\sin(e_{3})$$
(4.26)

où $e_{c1} = u_{c1} - v$ et $e_{c2} = u_{c2} - w$.

Dans l'étape suivante, on va essayer de concevoir $\overline{\tau}$ permettant de commander le modèle dynamique (4.18) du robot mobile à tricycle.

Etape 2:

On définit l'erreur de poursuite de la vitesse comme suit:

$$e_{c} = U_{c} - U = \begin{bmatrix} v_{c} - v \\ w_{c} - w \end{bmatrix}$$
(4.27)

A partir de (4.27) et (4.18), on peut obtenir la dynamique de e_c

$$\overline{M}(q)\dot{e}_{c} = -\overline{C}(q,\dot{q})e_{c} - \overline{\tau} + f(x) + \overline{\tau}_{d}$$
(4.28)

où la fonction non linéaire importante du robot est donné e par

$$f(x) = \bar{M}(q)\dot{U}_{c} + \bar{C}(q,\dot{q})U_{c} + \bar{F}(v)$$
(4.29)

La commande permettant de stabiliser le dynamique (4.18) peut être donnée par

$$\overline{\tau} = f(x) + K_4 e_c + K_5 \operatorname{sign}(e_c) \tag{4.30}$$

où K_4 est une matrice diagonale définie positive de choix libre et K_5 est une matrice donnée par :

où
$$\eta_1 \ge \left| \overline{\tau}_{d_1} \right|$$
 and $\eta_2 \ge \left| \overline{\tau}_{d_2} \right|$. (4.31)

Pour démontrer la stabilité du système global, on choisit la fonction de Lyapunov suivante:

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} e_c^T \bar{M}(q) e_c$$
 (4.32)

On peut montrer facilement que \dot{V}_2 est bornée comme suit

$$\dot{V}_2 \le -k_1^2 e_1^2 - k_3^2 v_r^2 \sin^2(e_3) - e_c^T K_4 e_c$$
(4.33)

De (4.33) et en utilisant le théorème de Barbalat, on peut démontrer la convergence asymptotique des erreurs de poursuite vers zéro.



Figure 4.1 : Schéma générale de commande.

4.4. Simulation

Dans cette section, nous allons tester en simulation numérique cette commande backstepping développée pour ce robot mobile de type tricycle. Les paramètres du robot utilisés sont choisis comme [12]: m = 10kg, I = 5kg. m^2 , R = 0.5m, r = 0.05m, $v_r = 0.5m/s$, et d = 0.25m. Les trajectoires souhaitées sont choisies comme suit: $x_r(t) = t + 2$, $y_r(t) = t$, et $\theta_r = 0.78 rad$. Les conditions initiales du robot sont choisies comme suit : $(1,0,\pi/8)$. Les résultats de simulation obtenus sont représentés sur les Figures (4.2) – (4.3).

D'après ces résultats de simulation, nous remarquons que le robot suit bien ces trajectoires désirées et les erreurs de poursuite tendent asymptotiquement vers zéro et les entrées de commande sont bornées. Ces résultats de simulation confirment l'applicabilité du système de commande étudié dans ce chapitre.



Figure 4.2 : Résultats de simulation obtenus: a) Poursuite de x : x (trait plein) et x_r (trait pointillé). b) Poursuite de y : y (trait plein) et y_r (trait pointillé). c) régulation de l'angle d'orientation : θ (trait plein) et θ_r (trait pointillé). d) Trajectoire dans le plan xy : xy (trait plein) et $x_r y_r$ (trait pointillé).



Figure 4.3 : Résultats de simulation obtenus: a) Erreurs de poursuite: e_x (trait pointillé) et e_y (trait plein). b) Erreur de poursuite pour l'angle d'orientation. c) Signal de commande τ_1 . d) Signal de commande τ_2 .

4.5. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté à travers un exemple simple le concept de la commande backstepping. Ensuite, on a essayé de concevoir une commande backstepping pour le robot mobile non-holonome de type tricycle. Cette commande peut stabiliser le modèle cinématique aussi bien que le modèle dynamique du robot mobile.



Conclusion générale

Dans ce travail, nous nous sommes particulièrement intéressés à la modélisation et à la conception des commandes non linéaires (à savoir: commande par linéarisation E/S, commande à mode glissant et commande par backstepping) des robots mobiles non-holonomes à 2 roues et 3 roues. Pour chaque commande développée, un ensemble de testes par simulation numérique a été effectué à fin de vérifier leur applicabilité et efficacité. Notre mémoire a été principalement articulé en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté des définitions et des généralités sur les robots ainsi que leur principe de fonctionnement. Nous les avons classé en quatre grandes familles. L'accent a été mise sur les robots mobiles.

Dans le deuxième chapitre, nous avons essayé d'établir les modèles dynamiques et cinématiques des robots mobiles non-holonomes bicycles et tricycles, en utilisant le formalisme de Lagrange-d'Alembert et celui d'Euler Lagrange. Ces modèles ont été exploités dans la conception et la simulation des lois de commande développées dans les chapitres 3 et 4.

Dans le troisième chapitre, nous avons conçu une commande non-linéaire basée sur la linéarisation exacte entrée-sortie et une commande à mode glissant pour le robot mobile bicycle. Des testes par simulation numérique sous Matlab ont été effectués et une étude comparative entre les deux méthodes de commande a été faite.

Le quatrième chapitre a présenté à travers un exemple simple le concept de la commande backstepping. Ensuite, une commande backstepping pour le robot mobile nonholonome de type tricycle a été conçue. Cette commande peut contrôler le modèle cinématique aussi bien que le modèle dynamique du robot mobile.

Ce travail reste perfectible et ouvre d'autres axes de recherches, à savoir:

- 1- L'introduction des observateurs pour l'estimation des états. En fait, toutes les commandes développées dans ce mémoire sont basées sur la mesure complète de l'état.
- 2- L'utilisation des approximateurs universels (comme les systèmes flous et les réseaux de neurones artificielles) pour approcher les non-linéarités incertaines.
- 3- Le test de ces commandes sur des robots réels.

Bibliographie

[1] B. BAYLE, «*Robotique mobile* », Télécom Physique Strasbourg, Université de Strasbourg, année 2008-2009.

[2] A MAOUDJ, «Conception et commande d'un prototype mobile à base de microcontrôleur», Mémoire de PFE, Université Jijel, département d'Electronique. Juin 2012.

[3] D. FILLIAT, « *Robotique Mobile* », Cours, Ecole Nationale Supérieure de Techniques avancées, Paris, 5 Octobre 2011.

[4] J.-L. BOIMOND, «*Robotique* », Cours de l'Université Angers, (,www.istia.univ-angers.fr/~boimond/Cours robotique.pdf).

[5] P. ALEXANDRE, « *Le contrôle hiérarchisé d'un robot marcheur hexapode* », Thèse de doctorat en Sciences Appliquées, Université Libre de Bruxelles, 1997.

[6] N. ACHOUR, R.TOUMI, « Modélisation d'un Manipulateur Mobile – Application à une tâche d'écriture», Mémoire de PFE, Université de l'USTHB, Faculté d'Electronique et d'informatique, Mars 2007.

[7] V. PADOIS, *Enchaînements dynamiques de tâches pour des manipulateurs mobiles à roues* », Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, Novembre 2005.

[8] J. H. CHUNG, « *Modeling and control of mobile manipulators* », *Rapport of the* California AHMCT Research Center, University of California at Davis, February 15,1997.

[9] C. RAIMUNDEZ, «Adaptive Tracking in Mobile Robots with Input-Output Linearization» Nonlinear Control Group Department of Systems & Control Engineering University of Vigo. Spain. Mai 2014.

[10] F. L. LEWIS, C. T. ABDALLAH, AND D. M. DAWSON, « Control of Robot Manipulators», New York: MacMillan, 1993.

[11] N. SARKAR, X. YUN, AND V. KUMAR, «Control of mechanical systems with rolling constraints: Application to dynamic control of mobile robots » Int. j. Robot. Res., vol. 13, no. 1,pp. 55-69,1994.

[12] R. FIERRO AND F. L. LEWIS, « Control of a Nonholonomic Mobile Robot Using Neural Networks», IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 9, No. 4, July 1998.

[13] N. BLAIDI, « commande tolérante aux défauts passive de la machine asynchrone », Mémoire de master, Université de Jijel, 2011.

[14] A. KHALD¹, «Commande par les modes glissants non linéaires de la MSAP alimentée par un onduleur de tension dans le cas général à N niveaux », PFE, USTHB, 2002.

[15] B. BENHEILAL, « Etude comparative de deux commandes robustes commande a structure variable et commande floue optimisé par un algorithme génétique », Thèse de magistère. Université de Blida, 2001.

[16] N. BOUNAR, « commande par apprentissage itératif: application au pendule inversé », Thèse de Magister, Ecole Militaire Polytechnique, Alger, 2004.

[17] J.J.E SLOT NE, W.LI, « Applied nonlinear control », Prentice Hall, 1991.