

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

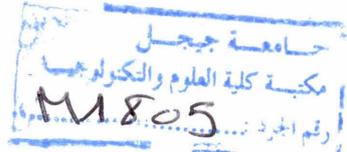
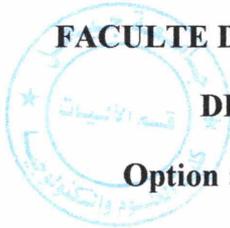
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHES  
CIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL

FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Option : Automatique et Traitement du Signal



MEMOIRE DE FIN D'ÉTUDE

PRESENTE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPÔLME DE MASTER EN  
GENIE ELECTRIQUE

THÈME

**Commande par Backstepping avec et sans  
observateur des robots manipulateurs**

Présenté par :  
LABIOD Nour el houda  
BARNOU Amina

Proposé par : Mr. BOUAKRIF  
président de jury : A. ZIBRA  
jury : Mr. BENSLIMAN



# *Remerciements*

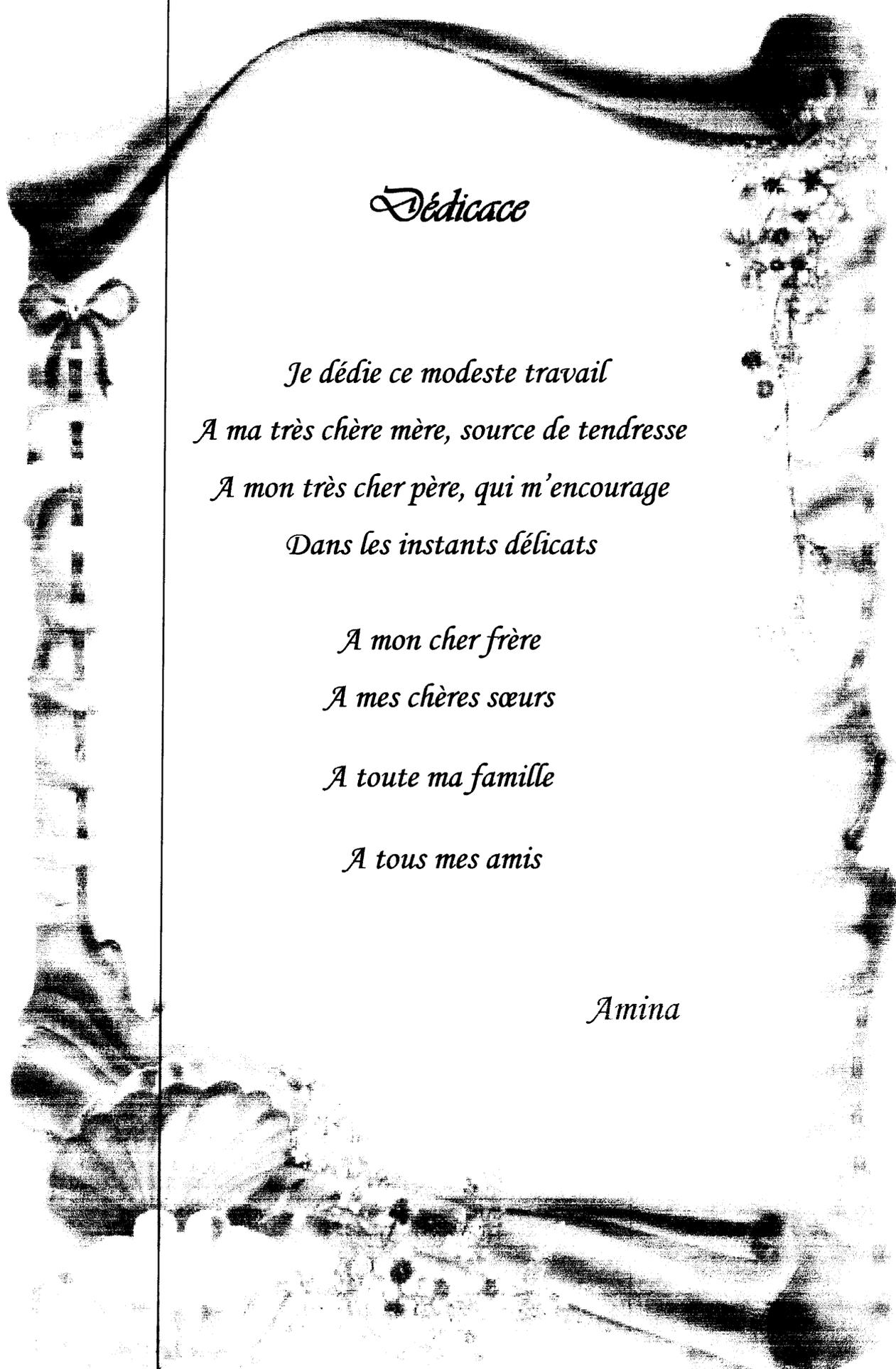


*Tout d'abord nous remercions Allah le tout puissant qui nous a éclairé le bon chemin.*

*Nous tenons à remercier très vivement notre promoteur monsieur **Bouakrif Fareh**, qui est un potentiel infini pour les conseils avisés et l'encouragement constant.*

*Enfin nous associons nos remerciements à toute personne d'étant montré coopérant de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire de fin d'étude, Ainsi que tous les professeurs qui ont contribué à notre formation.*

*Nour El Houda et Amina*

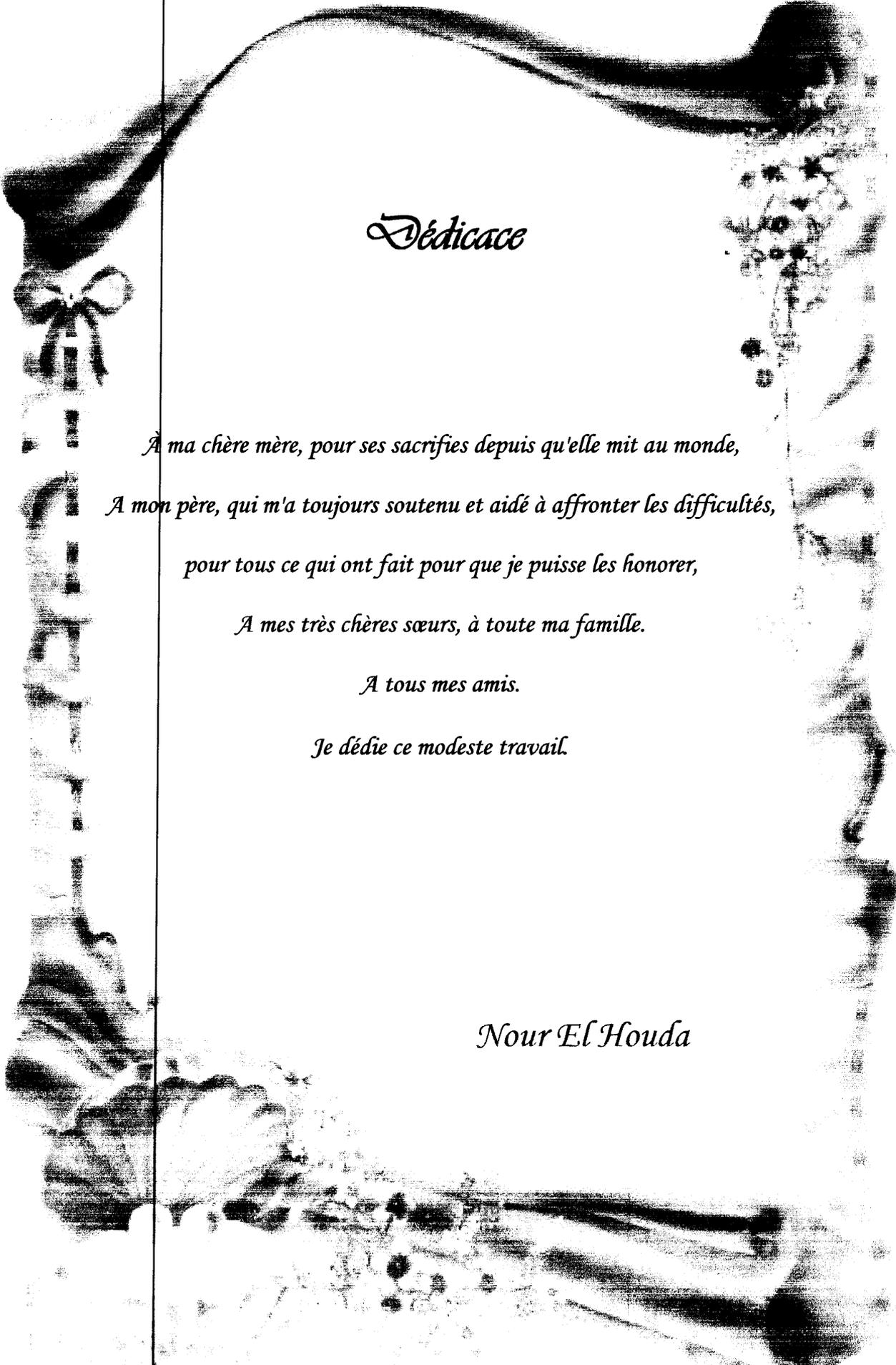


*Dédicace*

*Je dédie ce modeste travail  
A ma très chère mère, source de tendresse  
A mon très cher père, qui m'encourage  
Dans les instants délicats*

*A mon cher frère  
A mes chères sœurs  
A toute ma famille  
A tous mes amis*

*Amina*



*Dédicace*

*À ma chère mère, pour ses sacrifices depuis qu'elle mit au monde,  
À mon père, qui m'a toujours soutenu et aidé à affronter les difficultés,  
pour tous ce qui ont fait pour que je puisse les honorer,  
À mes très chères sœurs, à toute ma famille.*

*À tous mes amis.*

*Je dédie ce modeste travail.*

*Nour El Houda*

# SOMMAIRE

<b>Introduction générale</b> .....	1
------------------------------------	---

## **Chapitre I : Généralités Sur La Robotique**

I.1 Introduction.....	4
I.2 Définition générales .....	5
I.2.1 Articulations .....	5
I.2.2 Degré de liberté .....	5
I.2.3 Espace articulaire .....	5
I.2.4 Espace opérationnel .....	5
I.3 Modélisation des robots .....	6
I.3.1 Modèle géométrique direct et inverse .....	6
I.3.2 Modèle cinématique direct et inverse.....	6
I.3.3 Modèle dynamique .....	6
Conclusion.....	8

## **Chapitre II : Techniques de commande des robots manipulateurs**

II.1 Introduction .....	10
II.2 Structure de commande.....	10
II.2.1 Structure de commande dans l'espace articulaire.....	11
II.2.2 Structure de commande dans l'espace cartésien .....	12
II.3 Commande des robots.....	13
II.3.1 Commande linéaire classique .....	13
II.3.2 Commande linéarisante .....	14
II.3.3 Commande par apprentissage itératif .....	15
II.3.3.a. L'objectif de la Commande par apprentissage itératif.....	15
II.3.3.b. Forme générale d'un régulateur CAI.....	15
II.3.4 Commande par backstepping.....	16
II.4 Conclusion.....	17

## **Chapitre III : Commande par backstepping**

III.1 Introduction .....	19
III.2 Notions de bases .....	19

III.2.1 Systèmes non linéaires .....	19
III.2.2 Equilibre .....	20
III.2.3 plan de phase .....	21
III.2.4 stabilité .....	21
III.3 méthode de Lyapunov.....	22
III.3.1 Première méthode de Lyapunov.....	22
III.3.2 Deuxième méthode de Lyapunov.....	23
III.4 Commande par backstepping.....	25
III.4 Commande par backstepping d'un bras manipulateur à 2DDL.....	26
III.4.1 Représentation d'état du robot.....	26
III.4.2 Description de la méthode .....	27
III.4.2.1 Cas non adaptative .....	28
III.4.2.2 Cas adaptative .....	29
III.4.3 Résultats de simulation.....	31
III.4.3.1 Cas non adaptative.....	31
III.4.3.2 Cas adaptative.....	35
III.5 Conclusion.....	39

#### **Chapitre. IV : Commande par backstepping adaptative avec observateur**

IV.1 Introduction .....	41
IV.2 Commande par backstepping adaptative avec observateur.....	42
IV.3 Observateur.....	45
IV.4 Application de commande par backstepping adaptative avec observateur sur un robot manipulateur à deux degrés de liberté .....	45
IV.4.1 Modèle et propriétés .....	45
IV.4.2 Backstepping adaptative avec observateur.....	46
IV.4.3 Etude de la stabilité.....	49
IV.4.4.1 Le modèle .....	50
IV.4.4.2 Résultats.....	51
IV.5 Conclusion.....	55
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>56</b>

**Table des figures**

<b>Figure II . 1:</b> Structure de commande dans l'espace articulaire.....	11
<b>Figure II . 2:</b> Structure de commande dans l'espace cartésien.....	12
<b>Figure II . 3:</b> Schéma bloc de la commande classique des robots manipulateurs.....	13
<b>Figure II . 4:</b> Schéma de la commande linéarisante des robots manipulateurs.....	15
<b>Figure II . 5:</b> Schéma de la commande par apprentissage itératif.....	16
<b>Figure III.1 :</b> Trajectoire d'un système dans le plan de phase.....	20
<b>Figure III.2 :</b> Type de stabilité selon lyapunov.....	21
<b>Figure III.3:</b> contours à énergie constante dans le plan de phase.....	24
<b>Figure III.4 :</b> Commande adaptative du système bouclé.....	31
<b>Figure III.5 :</b> trajectoires réelles et désirées pour les deux articulations.....	32
<b>Figure III.6 :</b> Erreurs de positions et de vitesses pour les deux articulations.....	33
<b>Figure III.7 :</b> Couples d'entrée pour les deux articulations.....	34
<b>Figure III.8:</b> Trajectoires réelles et désirées pour les deux articulations.....	36
<b>Figure III.9 :</b> Erreurs de positions et de vitesses pour les deux articulations.....	37
<b>Figure III.10 :</b> Couples d'entrée pour les deux articulations.....	38
<b>Figure III.11 :</b> Paramètres estimés.....	39
<b>Figure IV.1 :</b> schéma de principe de l'observateur.....	42
<b>Figure IV.2 :</b> Schéma de principe de la commande par backstepping non adaptative avec observateur.....	42
<b>Figure IV.3 :</b> Schémas de principe de la commande par backstepping adaptative avec observateur.....	43

---

<b>Figure IV.4 :</b> Diagramme bloc de commande avec observateur.....	48
<b>Figure IV.5 :</b> trajectoires réelles et désirées pour les deux articulations.....	52
<b>Figure IV.6 :</b> Erreurs de positions et de vitesses pour les deux articulations.....	53
<b>Figure IV.7 :</b> Paramètres estimés .....	53
<b>Figure IV.8 :</b> Erreur entre le vecteur $x_1$ et $\hat{x}_1$ pour les deux articulations.....	54

## Introduction générale

La commande des manipulateurs a fait l'objet de plusieurs années de recherche, et continue encore d'en faire cet objet. Cela est dû aux difficultés posées par ce genre de systèmes, notamment :

- Les dynamiques hautement non linéaires du robot et éventuellement des actionneurs, incluant les effets inertiels, gravitationnels, centrifuges et de Coriolis, ainsi que les frottements, jeux et flexibilités.
- L'existence de couplages entre les entrées et les sorties du système.
- Les paramètres variant dans le temps, par exemple du fait du changement de charge, de configuration, et de vitesse de mouvement.

En effet, la commande de ce type de systèmes pose beaucoup de problèmes aussi bien en théorie qu'en pratique. Parce que ces systèmes ne disposent pas d'outils et de techniques généraux permettant de synthétiser leurs commandes. Durant ces trois dernières décennies et afin d'améliorer les performances des manipulateurs, des recherches avancées ont permis de faire émerger de nouvelles techniques de commande appliquées aux robots manipulateurs. Comme résultat de ces activités de recherche, une variété de méthodes de commande des robots manipulateurs ont été proposées, telles que, commande proportionnelle intégrale dérivative (PID), commande à couple calculé, commande adaptative, commande par apprentissage itératif et commande par backstepping.

L'idée de cette approche consiste à fragmenter le système en un ensemble de sous-systèmes imbriqués d'ordre croissant. Le calcul de la fonction de Lyapunov s'effectue, ensuite, récursivement en partant de l'intérieur de la boucle. A chaque étape, l'ordre du système est augmenté et la partie non stabilisée lors de l'étape précédente est traitée. A la dernière étape, la loi de commande est trouvée.

Lorsque le système possède des variations paramétriques (comme le cas de notre système), il est important d'introduire une loi d'adaptation dans la loi de commande. Dans ce mémoire, nous avons utilisé la commande par backstepping adaptative.

Beaucoup de robots manipulateurs disponibles au marché ne sont pas équipés par ces tachymètres, car les mesures fournies par les tachymètres sont souvent contaminés par des bruits, ce qui peut réduire les performances dynamiques du manipulateur. D'où la nécessité d'utiliser un observateur de vitesse qui estime les vitesses à partir de ses positions mesurées. Ce problème est traité dans le quatrième chapitre de ce travail.

Le mémoire est organisé en quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré aux notions préliminaires sur la robotique et les robots manipulateurs. Dans un deuxième lieu nous avons présentés les deux structures de commande des robots manipulateurs, la structure de commande dans l'espace articulaire et opérationnel. Cette dernière est une méthode analytique pour trouver la commande qui assure la stabilité du système en boucle fermée via la fonction de Lyapunov. Et nous avons appliqués cette technique sur un robot manipulateur à deux degrés de liberté. Dans le troisième chapitre de ce mémoire, nous avons étudié la commande par backstepping non adaptative et adaptative des robots manipulateurs.

Le dernier chapitre, nous avons présenté la théorie de la commande par backstepping adaptative avec observateur de vitesse des robots manipulateurs. Parmi les problèmes que nous avons rencontrés au cours de l'application de cette technique.

Enfin, nous terminerons par une conclusion générale englobant les perspectives et les investigations futures à poursuivre.

# *CHAPITRE I*

## *Généralités sur la robotique*

## I. Généralités Sur La Robotique

### I.1 Introduction

La robotique est un domaine relativement jeune de la technologie moderne transcende les frontières de l'ingénierie traditionnelle. Comprendre la complexité des robots et leurs applications nécessite des connaissances en génie électrique, génie mécanique, systèmes et génie industriel, informatique, économie, et en mathématiques. De nouvelles disciplines de l'ingénierie, tels que l'ingénierie de fabrication, l'ingénierie d'applications et d'ingénierie des connaissances ont vu le jour pour faire face à la complexité du domaine de la robotique et l'automatisation industrielle.

Il y a différentes façons de classer les robots. On peut, par exemple, différencier les robots leur source d'énergie. On parlera des robots hydrauliques versus électrique ou encore pneumatiques. D'autre fois, on distinguera des robots fixes versus des robots mobiles.

Mais souvent, on classe structurellement les robots en fonction des systèmes de coordonnées dans lesquels ils travaillent :

- ❖ **Cartésien** : trois axes de translation.
- ❖ **Cylindrique** : deux axes de translation, un axe de rotation.
- ❖ **Sphérique** : un axe de translation, deux axes de rotation.
- ❖ **Articulé** : trois axes de rotation.

Le système de coordonnées dans lequel il faut travailler dépend souvent de l'application à mettre en œuvre. C'est ainsi qu'un robot cylindrique convient bien à une pièce d'estampage, tandis qu'un robot articulé pourra effectuer des soudures à divers endroits invisible depuis la base du robot.

On rencontre dans la littérature anglo-saxonne une notation abrégée pour décrire le type et le nombre d'articulation d'un robot, en désignant une translation (sliding) par la lettre S et une rotation par la lettre R, un robot articulé se désignerait sous le signe « RRR », tandis qu'un cylindre pourrait répondre à l'appellation « SSR » [1] [2].

## **I.2 Définitions Générales**

### **I.2.1 Articulations**

On admettra qu'un corps solide rigide isolé dans l'espace à trois dimensions possède Six degrés de liberté, trois composantes d'un vecteur de position et trois composantes d'orientation. Les divers formalismes pratiques utilisés pour quantifier ces degrés de liberté. Quand on relie un tel corps à un autre, au moyen de Liaisons mécaniques, il perd de sa mobilité par rapport au second. On peut imaginer diverses combinaisons de translations et de rotations.

### **I.2.2 Degré de liberté**

Le degré de liberté d'un robot manipulateur est la somme des degrés de liberté de ses articulations. D'où le degré de liberté d'une articulation est le nombre de mouvement du corps qui est en aval par rapport au corps qui est en amont.

### **I.2.3 Espace articulaire**

L'espace articulateur d'un robot est celui dans lequel est représentée la situation de tous ses corps. La situation la plus simple consiste à utiliser les variables aux coordonnées articulaires.

Sa dimension  $N$  est égal au nombre des variables articulaires indépendantes et correspond au nombre de degrés de liberté de la structure mécanique.

### **I.2.4 Espace opérationnel**

L'espace opérationnel est celui dans lequel est représentée la situation de l'organe terminal (on considère donc autant d'espace opérationnel qu'il y a des organes terminaux). Sa dimension est égal au nombre des paramètres indépendants nécessaire pour décrire la dimension de l'organe terminal dans l'espace. Dans l'espace tridimensionnel ce nombre est de six (trois point pour placer un point du corps en un point quelconque de cet espace et trois pour orienter ce corps de façon quelconque) [1] [3].

### I.3 Modélisation des Robots

La synthèse d'une loi de commande et/ou d'un modèle de diagnostique nécessite un modèle du robot. Les chercheurs classent les modèles du robot en trois classes, modèle géométrique, modèle cinématique et modèle dynamique.

#### I.3.1 Modèle géométrique direct et inverse

Le modèle géométrique direct exprime la situation de l'organe terminal en fonction des variables articulaires parmi les méthodes utilisées pour trouver ce modèle, par exemple la méthode des paramètres de **Denavit-Hartenberg** [4].

Le modèle géométrique inverse exprime les variables d'articulation en fonction des variables opérationnelle. Donc, il est constitué par la fonction inverse de la fonction qui donne le modèle direct. Parmi les méthodes de calcul du modèle inverse, on cite la méthode analytique.

La méthode analytique consiste à établir toutes les fonctions reliant chaque variable articulaire à toutes les variables opérationnelles et ceci quelle que soit la configuration du robot. Elle assure la détermination de toutes les relations [4].

#### I.3.2 Modèle cinématique direct et inverse

Le modèle cinématique direct des robots manipulateurs exprime la vitesse de l'organe terminal en fonction des vitesses articulaires.

Si  $\dot{x}$  est la vitesse de l'organe terminal et  $\dot{q}$  est la vitesse des articulations, alors le problème de cinématique direct est d'exprimer  $\dot{x} = J(\dot{q}, q)$ , où  $J$  est appelé la Jacobien.

Le modèle cinématique inverse et le problème inverse du modèle cinématique direct c'est-à-dire, à partir de la vitesse de l'organe terminal du robot, on détermine la vitesse des articulations.

#### I.3.3 Modèle dynamique

Le modèle dynamique définit l'équation du mouvement du robot qui exprime les relations entre les couples ou les forces appliqués au niveau des articulations et la position, la vitesse et l'accélération des articulations. Il existe plusieurs méthodes pour obtenir ce modèle dynamique comme la méthode d'Hamiltonien et la méthode d'Euler-Lagrange.

Cette dernière est utilisée par la suite pour écrire le modèle dynamique du robot manipulateur.

La méthode d'Euler-Lagrange donne le modèle dynamique d'un robot manipulateur [5] :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = T \quad (I.1)$$

$$L = \tau - P \quad (I.2)$$

Avec :

$\tau$  : L'énergie cinétique.

$P$  : L'énergie potentielle.

$q \in R^n$  : Vecteur des coordonnées généralisées.

$T \in R^n$  : Vecteur des forces et couples appliqués.

Dans le cas particulier d'un robot manipulateur rigide avec  $n$  degrés de liberté, on a les données suivantes :

$$\tau = \tau(q) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (I.3.a)$$

$$P = P(q) \quad (I.3.b)$$

Où  $M(q)$  représente la matrice d'inertie de dimension  $(n \times n)$  symétrique et définie positive.

A partir des équations (I.1) et (I.2), l'équation générale du mouvement d'un robot manipulateur rigide est donnée par :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = T \quad (I.4)$$

Où  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  : vecteur de force de Coriolis et de centrifuge défini par :

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \dot{M}(q)\dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial (\dot{q}^T M(q) \dot{q})}{\partial q} \quad (I.5.a)$$

Et 
$$G(q) = \frac{\partial P(q)}{\partial q} \quad (I.5.b)$$

Où  $G(q)$  est le vecteur des couples gravitationnel.

**Remarque**

L'équation (I.4) représente la dynamique générale d'un robot manipulateur en l'absence des frottements et d'autre perturbation [6]. Dans le cas des frottements, l'équation (I.4) devient [5] :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + H(\dot{q}) = T \quad (1.6)$$

Où  $H(\dot{q}) \in R^n$  : Vecteur regroupant les frottements (sec et visqueuse).

Dans le cas des frottements et des perturbations externes, l'équation générale du mouvement d'un robot manipulateur sera [9] :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + H(\dot{q}) + d = T \quad (1.7)$$

Où  $d$  est un vecteur de dimension  $(n \times 1)$  regroupant les perturbations et les dynamiques non modélisées.

**I.4 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons donné les notions nécessaires concernant le domaine de la robotique. Et donné également les différents modèles des robots manipulateurs à savoir, le modèle géométrique direct et inverse, le modèle cinématique direct et inverse et le modèle dynamique.

### II.2.2 Structures de commande dans l'espace cartésien

Dans ce type de structures, les variables cartésiennes, positions ou vitesses, sont directement commandées, c'est-à-dire contrairement aux structures articulaires, le bouclage est réalisé sur les variables cartésiennes, figure (II .2).

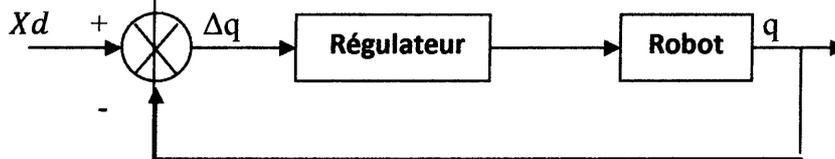


Figure II .2: Structure de commande dans l'espace cartésien.

Mais cet avantage n'est que peu senti, car dans la plus part des cas, l'obtention des variables cartésiennes passe par le calcul de la géométrie directe (source d'imprécision), Partant des variables articulaires mesurées.

En outre, ces structures présentent un coût en calculs considérables, ce qui peut être comparé aux transformations inverses requises dans les structures articulaires. Cependant ces calculs sont effectués on line, ce qui implique, pour une implémentation numérique, l'utilisation des périodes d'échantillonnages qui peuvent dégrader les performances du système de commande.

Au-delà de ces limitations, le recours à la commande dans l'espace cartésien devient intéressant et même nécessités si l'on est confronté au problème de commande avec interaction entre le robot et son environnement. En effet, la commande dans l'espace des articulations suffit uniquement pour la commande en mouvements des robots évoluent dans l'espace libre. Quand un manipulateur est contraint par son environnement, par exemple, dans le cas de contact avec une surface déformable, il est nécessaire de commander, et les positions et les forces de contact et il convient de se référer aux structures de commande dans l'espace cartésien. Les structures de commande dans l'espace cartésien sont basées sur une comparaison directe entre les entrées, spécifiant la trajectoire désirée, et les sorties du système.

### II.3 Commande des robots

La commande des robots consiste à activer les actionneurs de chaque articulation de manière à faire évoluer le système mécanique vers un point de l'espace selon certaines caractéristiques [4] :

- ❖ Soit le mouvement du robot dans l'espace est quelconque du point source au point but.
- ❖ Soit le mouvement est contraint de suivre une trajectoire prédéfinie.
- ❖ Soit le temps parcouru et les caractéristiques dynamiques sont imposés

### II.3.1 Commande linéaire classique

Cette méthode se base sur l'utilisation de la dérivée de la variable articulaire du robot dans une boucle supplémentaire en plus de la boucle de retour habituelle. Plus précisément, elle utilise un contrôleur PD qui génère une loi de commande par contre réaction donnée par [8] :

$$T = Kv(\dot{q}_d - \dot{q}) + Kp(q_d - q) \quad (\text{II.1})$$

Où  $Kp$  et  $Kv$  sont respectivement des gains proportionnels et différentiels de dimension  $(n \times n)$ . Ils doivent être constants, positives et diagonales.

Les variables  $q_d$  et  $\dot{q}_d$  sont respectivement la position désirée et la vitesse désirée. On peut illustrer cette loi de commande par le schéma bloc de la figure II.3

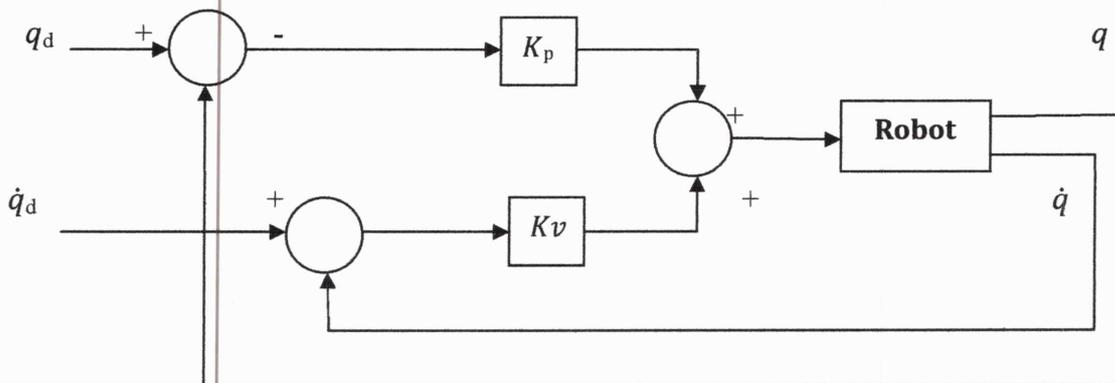


Figure II.3: Schéma bloc de la commande classique des robots manipulateurs

### II.3.2 Commande linéarisant

Cette technique est très utilisée parce qu'elle transforme le problème de la commande non linéaire en un problème de commande d'un système linéaire en effectuant le découplage et la linéarisation des dynamiques non linéaires du modèle d'un robot. Pour ce nouveau problème de commande linéaire, divers-outils de résolution sont disponibles [5,9].

Considérons le modèle dynamique d'un robot manipulateur rigide donné par (I.6), pour linéariser ce modèle, il suffit de prendre  $T$  de la forme [7] :

$$T = M(q)T' + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (\text{II.2})$$

### II.3.3 Commande par apprentissage itératif

On considère un système dynamique non linéaire fonctionnant d'une manière répétitive, sur un intervalle de temps fixe ;  $t \in [0, T]$ , avec la connaissance a priori de la sortie désirée  $y_d(t)$ .

L'équation d'état décrivant le système à la  $k^{\text{ième}}$  itération est donnée

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = f[x_k(t), u_k(t)] \\ y_k(t) = g[x_k(t), u_k(t)] \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Où  $x_k(t)$ ,  $y_k(t)$  et  $u_k(t)$  sont l'état, la sortie et la commande du système, respectivement.

L'erreur de poursuite à la  $k^{\text{ième}}$  itération est définie par :  $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ .

#### II.3.3.a. L'objectif de la commande par apprentissage itératif

L'objectif principal de la Commande par Apprentissage Itératif CAI est d'atteindre certaines performances (stabilité et convergence) et de les maintenir (robustesse) malgré les incertitudes. En d'autres termes, étant donné le modèle dynamique(II.7).

La sortie désirée  $y_d(t)$ , on cherche une séquence de commande  $u_k(t)$ , telle que la sortie réelle  $y_k(t)$  converge vers la sortie désirée  $y_d(t)$ .

#### II.3.3.b. Forme générale d'un régulateur CAI

En général, une loi de commande CAI se présente sous la forme suivante

$$u_{k+1}(t) = f(u_k(t), e_{k+1}(t), e_k(t), \dots, e_{k-m}(t)), \quad m \geq 1. \quad (\text{II.8})$$

On note que  $f$  peut dépendre à la fois des erreurs, et/ou de ses dérivées, et/ou de ses intégrales obtenues durant les différents cycles. Le problème fondamental réside dans la détermination d'une forme récursive  $f$  simple assurant la convergence de l'erreur avec une vitesse de convergence satisfaisante.

Le schéma bloc de la figure (II.5) traduit la CAI suivante :

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \phi_{k+1}e_{k+1}(t) + \phi_k e_k(t) + \dots + \phi_{k-m}e_{k-m}(t) \quad m \geq 1. \quad (\text{II.8})$$

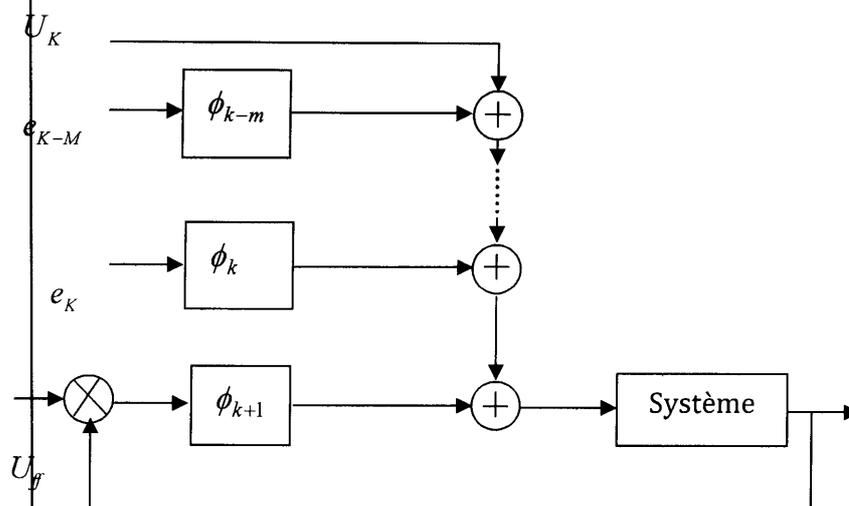


Figure II . 5: Schéma de la commande par apprentissage itératif.

### II.3.4 Commande par backstepping

Depuis quelques années, beaucoup de recherche ont été effectuées dans le domaine de la commande des systèmes non linéaires. Le backstepping fait partie de ces nouvelles méthodes de commande. Cette partie dans un deuxième temps nous présente l'application de cette technique de commande sur un robot manipulateur à un et deux degré de liberté.

Puisque le backstepping est basée sur l'utilisation de la 2<sup>ème</sup> méthode de Lyapunov, il est important de donner une définition de cette dernière et ce que nous allons voir dans le chapitre précédent.

### II.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un panorama des méthodes de commande pour les robots manipulateur. Ces méthodes sont :

Commande linéaire classique, ces lois de commande ne prennent pas en compte les non linéarités ni les couplages dans le système.

La commande linéarisant dite aussi (méthode de couple calculé) qui a pour objectif le découplage et la linéarisation du système, non linéaire. Cette propriété lui assure une place honorable parmi les différentes commandes, la troisième commande est la commande par apprentissage itérative ainsi que la commande par backstepping qui est une méthode analytique applicable au système dit triangulaire inférieur ou supérieur.

## *CHAPITRE III*

### *Commande par backstepping*

### III. Commande par backstepping

#### III.1 Introduction

La plupart des systèmes physiques (procédés) qui nous entourent sont non linéaires. Bien souvent, ces non-linéarités sont faibles ou ne sont pas visibles sur la plage d'opérations de ces procédés. Le souci constant d'améliorer les performances des systèmes commandés conduit à des modélisations de plus en plus précises qui permettent de reprendre sur une plus large plage d'opérations. C'est à ce moment que les non-linéarités se font sentir et rendent les outils d'analyse et /ou de synthèse des lois de commande, utilisés dans le domaine linéaire, incapables de rendre compte de certains phénomènes. C'est pourquoi, depuis quelques années, beaucoup de recherche ont été effectuées dans le domaine de la commande des systèmes non linéaires. Le backstepping fait partie de ces nouvelles méthodes de commande. Ce chapitre présente, dans un premier temps, une brève introduction des systèmes non linéaires et du vocabulaire qu'il comporte, et dans un deuxième temps, il introduit la méthode du backstepping.

#### III.2 Notions de bases

Cette section présente quelques notions de bases nécessaires à la compréhension des subtilités de la théorie du backstepping. La majorité de ces notions sont tirées de la référence [10].

##### III.2.1 Systèmes non linéaires

De façon générale, les systèmes physiques représentés par des équations différentielles linéaires, à coefficient constants sont appelés systèmes linéaires. L'hypothèse de linéarité équivaut au principe de superposition. Les systèmes non linéaires, par opposition aux systèmes linéaires, sont des systèmes physiques qui ne sont pas régis par des équations linéaires. Autrement dit, le principe de superposition ne peut pas leur être appliqué.

Les systèmes non linéaires peuvent être le lieu de plusieurs phénomènes. Par exemple, ils peuvent converger, en permanent, à différents points d'équilibre, contrairement aux systèmes linéaires, qui n'en possèdent qu'un seul. Cependant, bien d'autres phénomènes caractérisent les systèmes non linéaires [10]. Quelques différences vont être introduites dans les sous sections suivantes.

### III.2.2 Equilibre

Physiquement, un système est en équilibre lorsqu'il conserve son état en absence de forces externes. Mathématiquement, cela équivaut à dire que la dérivée  $\dot{x}$  de son vecteur d'état est nulle. Pour un système

$$\dot{x} = \varphi(x) \quad (\text{III.1})$$

L'état (ou les états) d'équilibres  $x_e$  est la solution (sont les solutions) de l'équation algébrique

$$\varphi(x) = 0 \quad (\text{III.2})$$

Pour les systèmes linéaires, on a  $\varphi(x) = Ax$  ce qui implique que  $x = 0$  est un point d'équilibre pour les systèmes linéaires. Deux cas différent peuvent survenir :

- Si  $A$  est régulière, alors l'origine est le seul point d'équilibre.
- Si  $A$  est singulière, ce qui définit un sous-espace où  $Ax = 0$ , alors il existe une région d'équilibre.

Pour les systèmes non linéaires, la solution n'est pas aussi évidente l'équilibre ne se trouve pas toujours à l'origine. Les régions d'équilibre peuvent être constituées de domaines continus ou de points isolés et/ou la combinaison des deux.

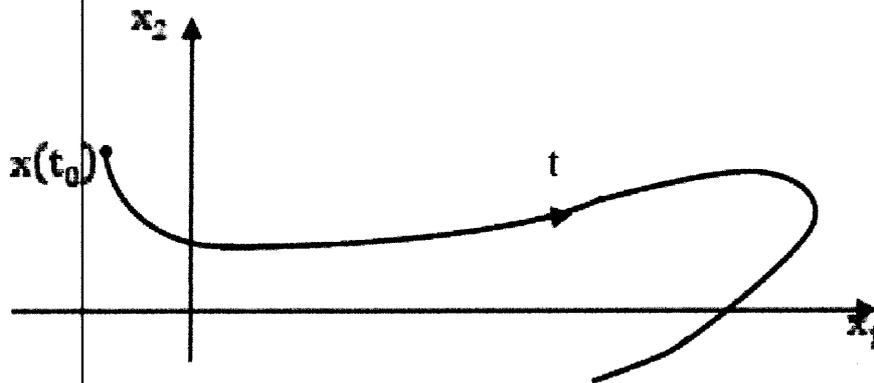


Figure III.1 : Trajectoire d'un système dans le plan de phase

### III.2.3 plan de phase

Pour bien comprendre le comportement d'un système non linéaire, on fait appel à une représentation de ses trajectoires dans l'espace de phase (figure III.1) .ces trajectoires sont un ensemble de courbes qui représentent l'évolution de l'état du système dans le temps .cette représentation doit toutefois passer par la résolution de l'équation différentielles, ce qui n'est pas toujours facile. Cependant, les techniques basées sur la deuxième méthode de lyapunov contournent ce problème. Cette méthode sera montrée plus loin dans ce chapitre.

### III.2.4 stabilité

De façons générale, on dit qu'un système est stable si, déplacé de sa position d'équilibre, il tend à y revenir, et instable s'il tend à s'en écarter davantage. Lyapunov fournit une explication un peu plus mathématique de la stabilité. Prenons comme exemple un système dont l'état est défini par le vecteur  $x$  qui possède la position d'équilibre  $x_e$  .

Ecarté de sa position d'équilibre et abandonné à lui-même au temps  $t=t_0$  avec les conditions initiales  $x(t_0)$  , le système aura comme état  $x(t)$  .la position d'équilibre du système est stable (figure III-2) si, pour tout  $\epsilon > 0$  , il existe  $\sigma > 0$  tel que

$$\| x(t_0) - x_e \|^2 < \sigma$$

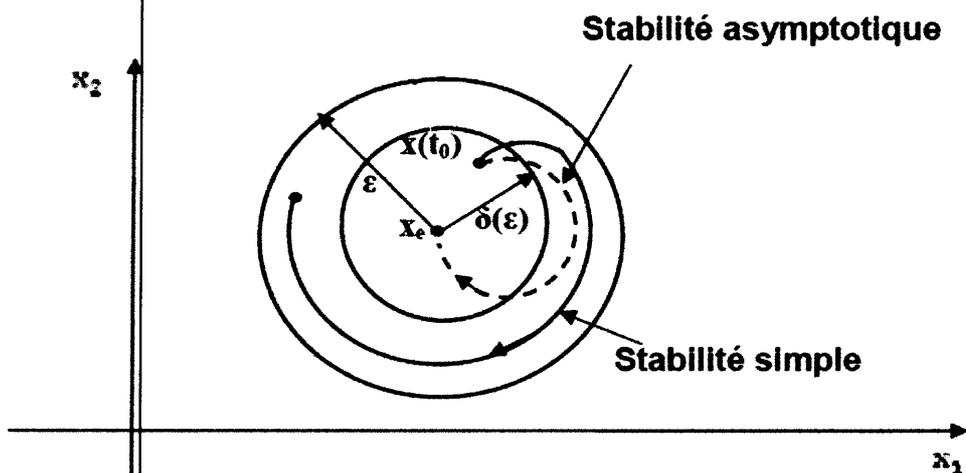


Figure III.2 : Type de stabilité selon lyapunov

Et qu'après un certain temps  $t$ , et pour toutes les valeurs  $t > t_0$ , la relation suivante est vérifiée :

$$\| x(t) - x_e \|^2 < \epsilon$$

Dans le cas contraire l'équilibre instable il n'est nécessaire que l'état  $x(t)$  tende vers  $x_e$  lorsque  $t$  augmente indéfiniment, pour que le système soit stable. Si l'état tend effectivement vers  $x_e$  mais qu'ils restent à l'intérieur d'un certain seuil  $\varepsilon$  alors le système a une stabilité simple (figure III-2).

### III.3 méthode de Lyapunov

Les faibles non-linéarités dans un système commandé sont la plupart du temps, traitées comme des perturbations affectant un modèle linéaire du système. Toutes les théories, qui ont été développées depuis plusieurs années et qui sont bien connues des systèmes linéaires sont utilisées. Malheureusement, ces non-linéarités ne peuvent pas toujours être de côté et il faut alors utiliser d'autres méthodes.

Il y a deux approches possibles pour la commande d'un système non linéaire. La première vise à linéariser le système à commander, afin de profiter des techniques des modèles linéaires. Cette linéarisation est réalisée, moyennant des approximations ou des transformations géométriques dans l'espace de phase. Le système linéarisé est ensuite traité avec la théorie des systèmes linéaires.

La deuxième approche consiste à trouver une fonction de commande de Lyapunov garantissant certaines performances pour le système en boucle fermée. De telles fonctions peuvent être très difficiles à trouver pour un système non linéaire d'ordre élevé. C'est là qu'entre en jeu la technique sera développée plus en détail à la section (III.4). Toutefois, avant d'introduire le backstepping, les deux méthodes d'analyse des systèmes non linéaires, fournies par Lyapunov, vont être brièvement décrites. Une attention particulière sera portée sur la deuxième méthode de Lyapunov qui fournit un outil très puissant pour tester et trouver des conditions suffisantes à la stabilité des systèmes dynamiques, sans avoir à résoudre explicitement les équations différentielles les décrivant.

#### III.3.1 Première méthode de Lyapunov

Le théorème de stabilité local de Lyapunov, connu sous le nom de première méthode, permet de se prononcer sur la linéarisation d'une dynamique autour d'un point d'équilibre. Cette méthode apporte une validité théorique à la technique de la linéarisation. Elle mentionne que si le système linéarisé est asymptotiquement stable, alors il y a stabilité asymptotique. Dans le cas où le système linéaire est instable, il y a instabilité. Par contre si celui-ci est stable sans pour autant l'être asymptotiquement, alors il est impossible de se prononcer sur la

stabilité. Ce théorème est d'une importance limitée, car il permet d'étudier que la stabilité locale [10].

### III.3.2 Deuxième méthode de Lyapunov

Cette méthode est basée sur le concept d'énergie dans un système. Pour un système physique, l'énergie est une fonction définie positive de son état. Dans un système conservatif, l'énergie reste constante; pour un système dissipatif, elle décroît. Pour ces deux cas, le système est stable. Si l'énergie croît, le système est instable.

L'idée de cette méthode est d'analyser la stabilité du système, sans avoir à résoudre explicitement les équations différentielles non linéaires le régissant. Il suffit simplement d'étudier les variations (signe de la dérivée) de l'énergie (ou une fonction qui lui est équivalente) le long de la trajectoire du système (figure III.3). Les théorèmes suivantes, qui permettent de se prononcer sur la stabilité (ou instabilité) d'un système, sont fournis par Lyapunov (Lyapunov 1966). Ceux-ci sont tirés de la référence [10].

#### **Théorème 3.1 (Stabilité asymptotique)**

S'il est possible de trouver une fonction  $V(x)$  de signe défini (avec  $V(0) = 0$ ), dans un domaine  $D$  comprenant la position d'équilibre et dont la dérivée totale par rapport au temps  $\dot{V}$  soit définie et de signe opposé dans le même domaine, l'équilibre sera asymptotiquement stable dans ce domaine.

#### **Théorème 3.2 (Instabilité)**

S'il est possible de trouver une fonction  $V$  dont la dérivée est de signe défini dans un domaine  $D$  comprenant l'origine et que  $V$  soit

- ✓ définie de même signe que  $\dot{V}$ , ou
- ✓ indéfinie en signe l'équilibre est instable.

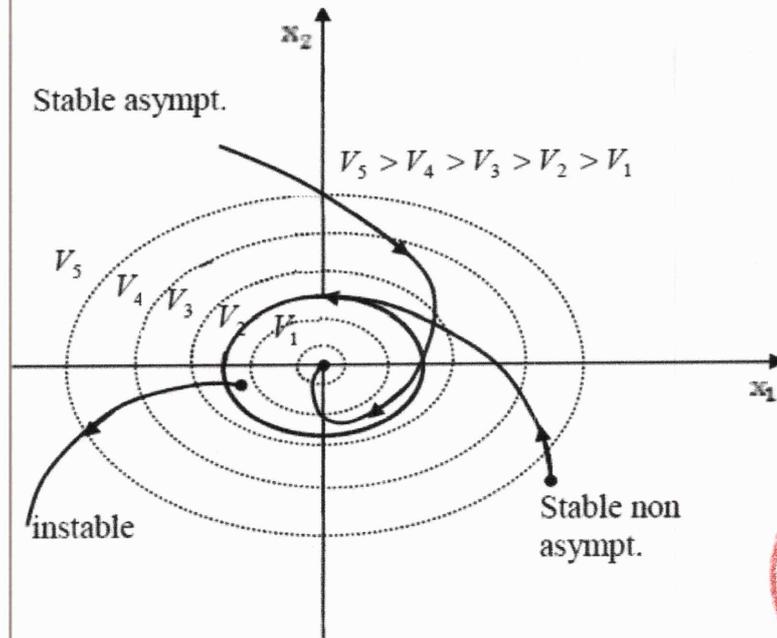


Figure III.3: contours à énergie constante dans le plan de phase

### Théorème 3.3 (Stabilité simple)

S'il est possible de trouver une fonction  $V$  de signe défini dans un domaine  $D$  et dont la dérivée totale  $\dot{V}$  soit semi-définie et de signe opposé dans le même domaine, l'équilibre est (simplement) stable dans ce domaine (c'est-à-dire stable non asymptotiquement, (figure III.3).

Contrairement à la première méthode, la deuxième méthode donne plus d'informations au niveau de la stabilité. Elle a l'avantage de ne pas se limiter à la prédiction des points d'équilibre, mais bien d'une région d'attraction autour de ces points d'équilibre. Ces théorèmes présentent une condition suffisante à la stabilité. Pour l'étude de la stabilité d'un système caractérisé par un vecteur d'état  $x$ , la méthode directe de Lyapunov consiste alors, à chercher une fonction  $V(x)$  (représentative de l'énergie) de signe défini qui se prête à l'application de l'un des théorèmes cités précédemment. Il n'y a aucune méthode qui permet de trouver directement une fonction de Lyapunov pour un système donné. Néanmoins, il existe des approches qui conduisent, en générale, à des résultats acceptables [10].

Voici quelques exemples de fonction de Lyapunov :

- Fonction quadratique

$$V(x) = x^T P x \quad (\text{III.3})$$

Où  $P$  est une matrice symétrique définie positive.

➤ Fonction quadratique plus intégrale (Lur'e)

$$V(x) = x^T P x + \int_0^2 \varphi(u) du \quad (\text{III.4})$$

Avec  $\varphi$  assujettie à certaines contraintes.

### III.4 Commande par backstepping

La méthode de la commande par backstepping consiste à fragmenter le système en un ensemble de sous-systèmes imbriqués d'ordre décroissant.

Le calcul de la fonction de Lyapunov s'effectue, ensuite, récursivement en partant de l'intérieur de la boucle. A chaque étape, l'ordre du système est augmenté et la partie non stabilisée lors de l'étape précédente est traitée. A la dernière étape, la loi de commande est trouvée. Celle-ci permet de garantir, en tout temps, la stabilité globale du système compensé tout en travaillant en poursuite et en régulation.

Contrairement à la plupart des autres méthodes, le backstepping n'a aucune contrainte au niveau du type de non-linéarité. Cependant, le système peut se présenter sous la forme dite paramétrique pure. Les équations d'un tel système sont données par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varphi_1(x_1)^T \theta + \Psi_1(x_1) x_2 \\ \dot{x}_2 &= \varphi_2(x_1, x_2)^T \theta + \Psi_2(x_1, x_2) x_3 \\ &\square \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

$$\dot{x}_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})^T \theta + \Psi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n$$

$$\dot{x}_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)^T \theta + \Psi_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) u$$

$$y = x_1$$

Où  $\theta$  est le vecteur de paramètres constants. Les  $\Psi_i$  et les  $\varphi_i$  sont des fonctions non linéaires connues, avec  $\varphi(0) = 0$  et  $\Psi_n(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in R^n$ . De plus, le backstepping permet de garder les non-linéarités utiles [10].

### III.4 Commande par backstepping d'un bras manipulateur à 2DDL

Les robots manipulateurs sont des systèmes mécaniques avec la dynamique non-linéaire fortement couplée et l'incertitude des paramètres caractéristiques. Si les paramètres initiaux de robot sont bien connus, le couple calculé et les contrôleurs de découplage non-linéaires peuvent être employés pour réaliser le suivi satisfaisant d'une trajectoire [11].

Cependant, la connaissance des valeurs des paramètres initiaux est faible dans ce cas une commande adaptative est nécessaire.

Dans cette application on va utiliser la commande par backstepping pour traiter ces deux derniers cas.

#### III.4.1 Représentation d'état du robot

On considère un bras manipulateur rigide à deux degrés de liberté (2DDL) montré sur l'annexe dérivé par l'intermédiaire de l'équation d'Euler-Lagrange [11].

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = T \quad (\text{III.6})$$

Dans la suite, nous noterons aussi  $q_d$  (2x1) vecteur de position articulaire désirée. Les équations de la dynamique (III.5) peuvent s'écrire en utilisant le changement de variable ci-dessous

$$\begin{cases} q = x_1 \\ \dot{q} = x_2 \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

Avec :

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad \text{Et} \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Alors, de (III.5) et (III.6) la représentation d'état suivante est obtenue par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{q} = M(q)^{-1}[\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)] \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

La représentation (III.7) et sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \beta \cdot u + \Psi(x_1, x_2)^T \theta \\ y = x_1 \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

Avec :

$$\beta = M(\theta)^{-1}; u = \tau;$$

$$\Psi(x_1, x_2)^T \theta = -M(q)^{-1} [C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)]$$

$$\Psi(x_1, x_2)^T = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_3 & \Psi_4 \end{bmatrix}$$

Prenant les éléments de  $M(\theta)$ ,  $C(\theta, \dot{\theta})$  et  $G(\theta)$  données dans l'annexe, on trouve :

$$\begin{aligned} \Psi_1 = l_2^2 (2l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 - l_2 g \cos(q_1 + q_2) - l_1 g \cos(q_1)) + \\ (l_2^2 + l_1 l_2 \cos(q_2))(l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + l_2 g \cos(q_1 + q_2)) \end{aligned}$$

$$\Psi_2 = -l_2^2 l_1 g \cos(q_1)$$

$$\begin{aligned} \Psi_3 = (l_2^2 + l_1 l_2 \cos(q_2))(-2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + l_2 g \cos(q_1 + q_2) \\ + l_1 g \cos(q_1)) - (l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2) + l_1^2)(l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + l_2 g \cos(q_1 + q_2)) \end{aligned}$$

$$\Psi_4 = l_1 g \cos(q_1) (l_2^2 + l_1 l_2 \cos(q_2)) - l_1^2 (l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + l_2 g \cos(q_1 + q_2))$$

$$\theta = \frac{1}{\det M(q)} \begin{bmatrix} m_2^2 \\ m_1 m_2 \end{bmatrix}$$

### III.4.2 Description de la méthode

Dans ce qui suit, on tient compte de  $\hat{\theta}$  qui est l'estimation du paramètre inconnu  $\theta$ . Le changement de variable adopté est décrit par les expressions suivantes :

$$z_1 = x_1 - q_d \quad (\text{III.10})$$

$$z_2 = x_2 - \alpha_1 - \dot{q}_d \quad (\text{III.11})$$

Soit la fonction stabilisante  $\alpha_1$ :

$$\alpha_1(x_1) = -c_1 z_1 \quad (\text{III.12})$$

Avec :

$c_1$ : Constante réelle positive dite «gain de la contre réaction »

### III.4.2.1 Cas non adaptative

Alors le système peut être formulé en utilisant les nouvelles variable  $z_1$  et  $z_2$  :

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2 \quad (\text{III.13})$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 - \ddot{q}_d \\ &= \beta \cdot u + \Psi(x_1, x_2)^T \theta - \dot{\alpha}_1 - \ddot{q}_d \end{aligned}$$

Et

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d$$

$$\dot{z}_2 = \beta \cdot u + \Psi(x_1, x_2)^T \theta - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d - \ddot{q}_d \quad (\text{III.14})$$

Pour le système d'équation (III.12) et (III.13), on va concevoir une loi de commande  $u = \alpha_2(x_1, x_2)$ . Afin de rendre la dérivée de la fonction de lyapunov définie négative. Cet objectif peut être complété par une simple fonction de lyapunov définie positive :

$$V = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 \quad (\text{III.15})$$

$$\dot{V} = z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2$$

$$\dot{V} = -c_1 z_1^2 + z_2 z_1 + \underbrace{\left[ \beta \cdot u + \psi(x_1, x_2)^T \theta - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta_d} \dot{\theta}_d - \ddot{\theta}_d \right]}_{-c_1 z_1} \quad (\text{III.16})$$

Pour atteindre la négativité de  $\dot{V}$ , le long de la trajectoire, on va choisir la commande  $u$  comme suit :

$$-c_2 z_2 = z_1 + \beta \cdot u + \Psi(x_1, x_2)^T \theta - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d - \ddot{q}_d \quad (\text{III.17})$$

$$u = \frac{1}{\beta} [-z_1 - c_2 z_2 - \psi(x_1, x_2)^T \theta + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d - \ddot{q}_d] \quad (\text{III.18})$$

Avec :

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} = -c_1 \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} = c_1 \end{cases}$$

L'expression de la fonction stabilisante  $\alpha_2(x_1, x_2)$  s'écrit comme suit :

$$\alpha_2(x_1, x_2) = -z_1 - c_2 z_2 - \psi(x_1, x_2)^T \theta + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d \quad (\text{III.19})$$

Alors :

$$\dot{V} = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \quad (\text{III.20})$$

Avec :

$c_2$ : Constante réelle positive

Ce qui signifie que l'équilibre est globalement asymptotiquement stable. Alors le système en boucle fermée est linéaire stable. On décrit le système sous forme matricielle par :

$$\dot{Z} = AZ \quad (\text{III.21})$$

$$A = \begin{bmatrix} -c_1 & 1 \\ -1 & c_2 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad \text{Et} \quad \dot{Z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}$$

### III.4.2.2 Cas adaptative

La dynamique des erreurs sera donc

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2 \quad (\text{III.22})$$

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 - \ddot{q}_d$$

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d + \frac{d\alpha_1}{d\hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \quad (\text{III.23})$$

$$\dot{z}_2 = \beta \cdot u + \psi(x_1, x_2)^T \hat{\theta} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d - \frac{d\alpha_1}{d\hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \ddot{q}_d \quad (\text{III.24})$$

$$V = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad (\text{III.25})$$

Avec  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta} \rightarrow \dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$

On dénote par  $\Gamma$  le gain d'adaptation.

Alors la dérivée de  $V$  est :  $\dot{V} = z_1 \dot{z}_2 + z_2 \dot{z}_2 - \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}$

$$\dot{V} = -c_1 z_1^2 + z_2 \left[ z_1 + \beta \cdot u + \Psi(x_1, x_2)^T \hat{\theta} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \ddot{q}_d \right] +$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{-c_2 z_2}$$

$$\tilde{\theta}^T \left[ \Gamma \Psi z_2 - \dot{\hat{\theta}} \right] \quad (\text{III.26})$$

### Loi d'adaptation

Deux hypothèses interviennent :

1. Si  $\tilde{\theta} = 0$ , le système devient alors asymptotiquement linéaire et stable.
2. Si  $\tilde{\theta} \neq 0$ , on doit choisir une loi d'adaptation pour éliminer l'erreur paramétrique  $\tilde{\theta}$ .

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_2(x_1, x_2, \hat{\theta}); \quad \tau_2 = \Psi \cdot z_2 \quad (\text{III.27})$$

### Loi de commande par backstepping adaptative

Pour que le système soit globalement stable ( $\dot{V} = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2$ ) il faut que :

$$\beta \cdot u + z_1 + \Psi(x_1, x_2)^T \hat{\theta} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \ddot{q}_d = -c_2 z_2 \quad (\text{III.28})$$

Avec :

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} = 0$$

Alors la loi de commande sera comme suit :

$$u = \frac{1}{\beta} \left[ -z_1 - c_2 z_2 - \Psi(x_1, x_2)^T \hat{\theta} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} + \ddot{q}_d \right] \quad (\text{III.29})$$

L'expression de la fonction stabilisante  $\alpha_2$  s'écrit :

$$\alpha_2(x_1, x_2, \hat{\theta}, q_d, \dot{q}_d) = -z_1 - c_2 z_2 - \Psi(x_1, x_2)^T \hat{\theta} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \quad (\text{III.30})$$

Puisque :

$$u = \frac{1}{\beta} [\alpha_2(x_1, x_2, \hat{\theta}, q_d, \dot{q}_d) + \ddot{q}_d] \quad (\text{III.31})$$

Donc l'équilibre  $x_1 \rightarrow q_d$  est globalement asymptotiquement stable (GAS) et  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) \rightarrow q_d(t)$  ; le système en boucle fermée résultant est linéaire stable, comme l'indique sa représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 & 1 \\ -1 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \psi^T \end{bmatrix} \tilde{\theta} \quad (\text{III.32})$$

Ce qui nous permet d'avoir le diagramme suivant qui représente la commande adaptative du système en boucle fermée :

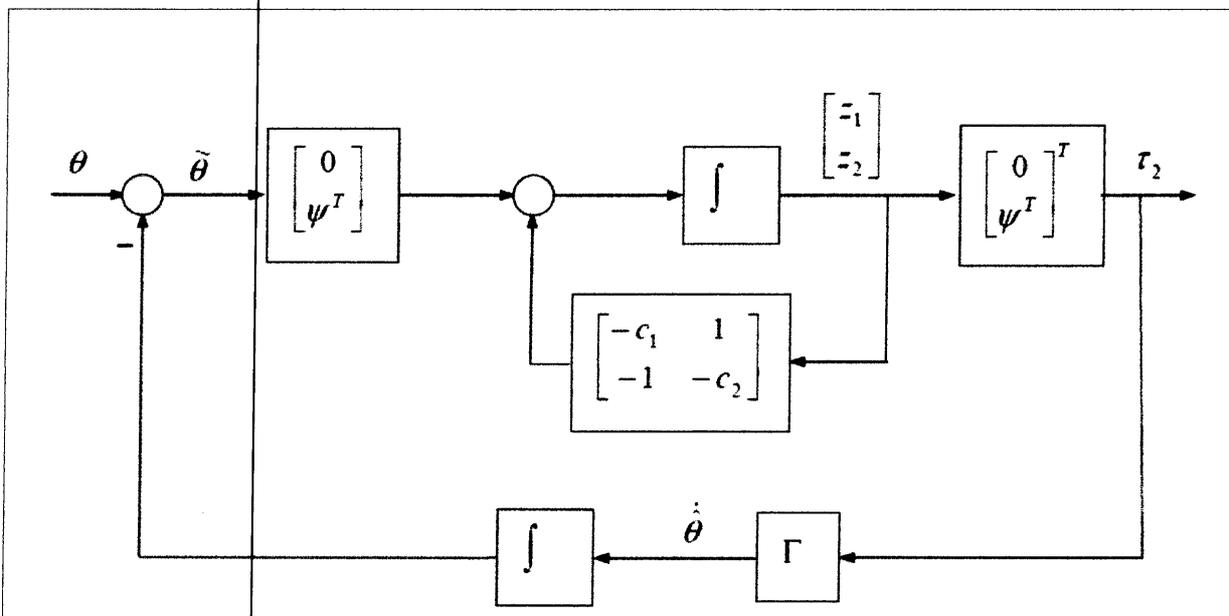


Figure III.4 : Commande adaptative du système bouclé

### III.4.3 Résultats de simulation

#### III.4.3.1 Cas non adaptative

$l_1 = 0.432 \text{ m}$  ;  $l_2 = 0.432 \text{ m}$  ;  $m_1 = 15.5 \text{ kg}$  ;  $m_2 = 11.5 \text{ kg}$  ;  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  ;  $c_1 = 8$  ;  $c_2 = 1$  ;  $q_1(0) = 0$  ;  $q_2(0) = 0$  ;

$$q_{1d}(t) = 2\cos\left(\frac{4\pi t}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi t}{3}\right) \text{ rad} ; 0 \leq t \leq 5 ; q_{2d}(t) = 1 - 2\cos\left(\frac{4\pi t}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi t}{3}\right) \text{ rad}$$

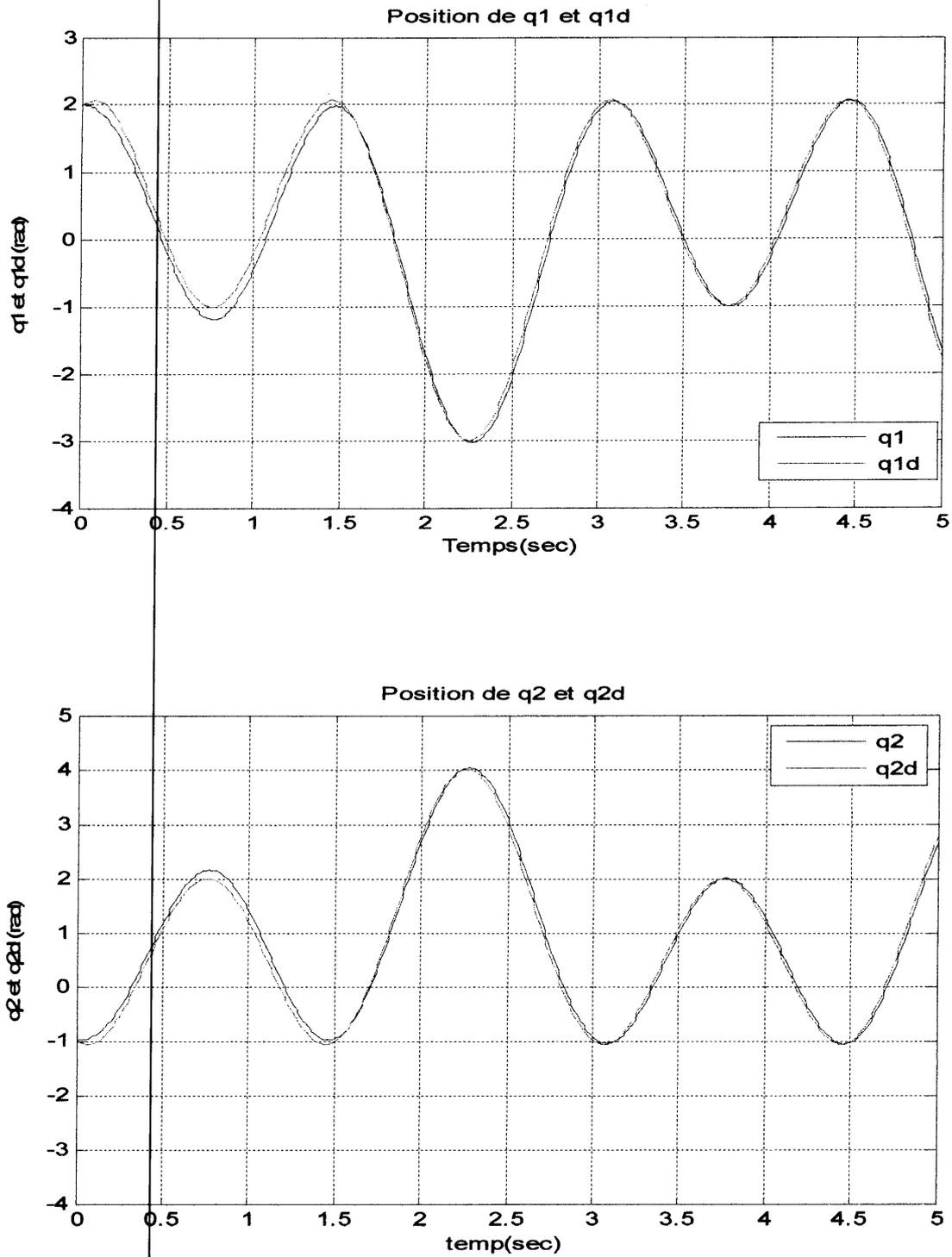


Figure III.5 : trajectoires réelles et désirées pour les deux articulations

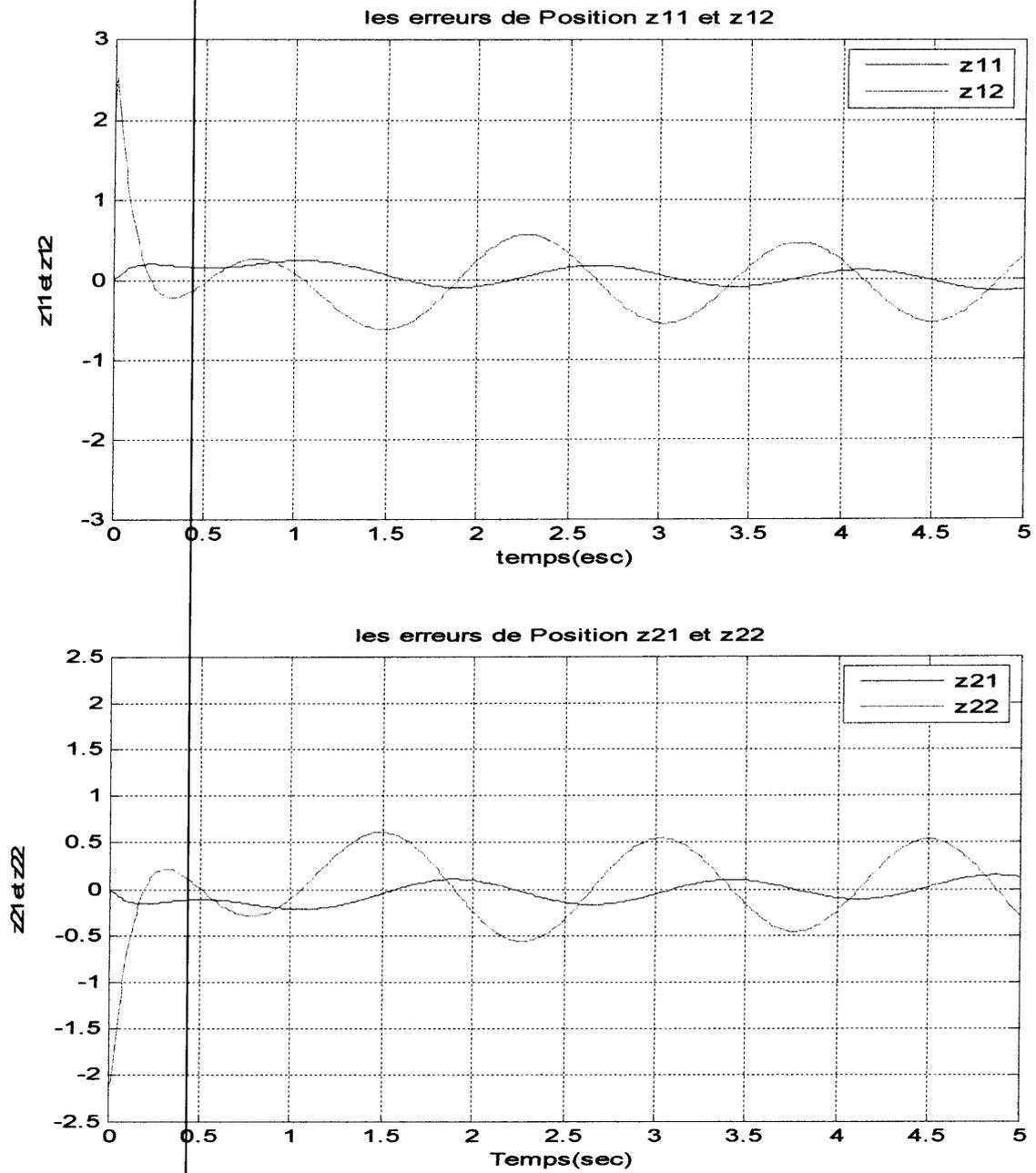


Figure III.6 : Erreurs de positions et de vitesses pour les deux articulations

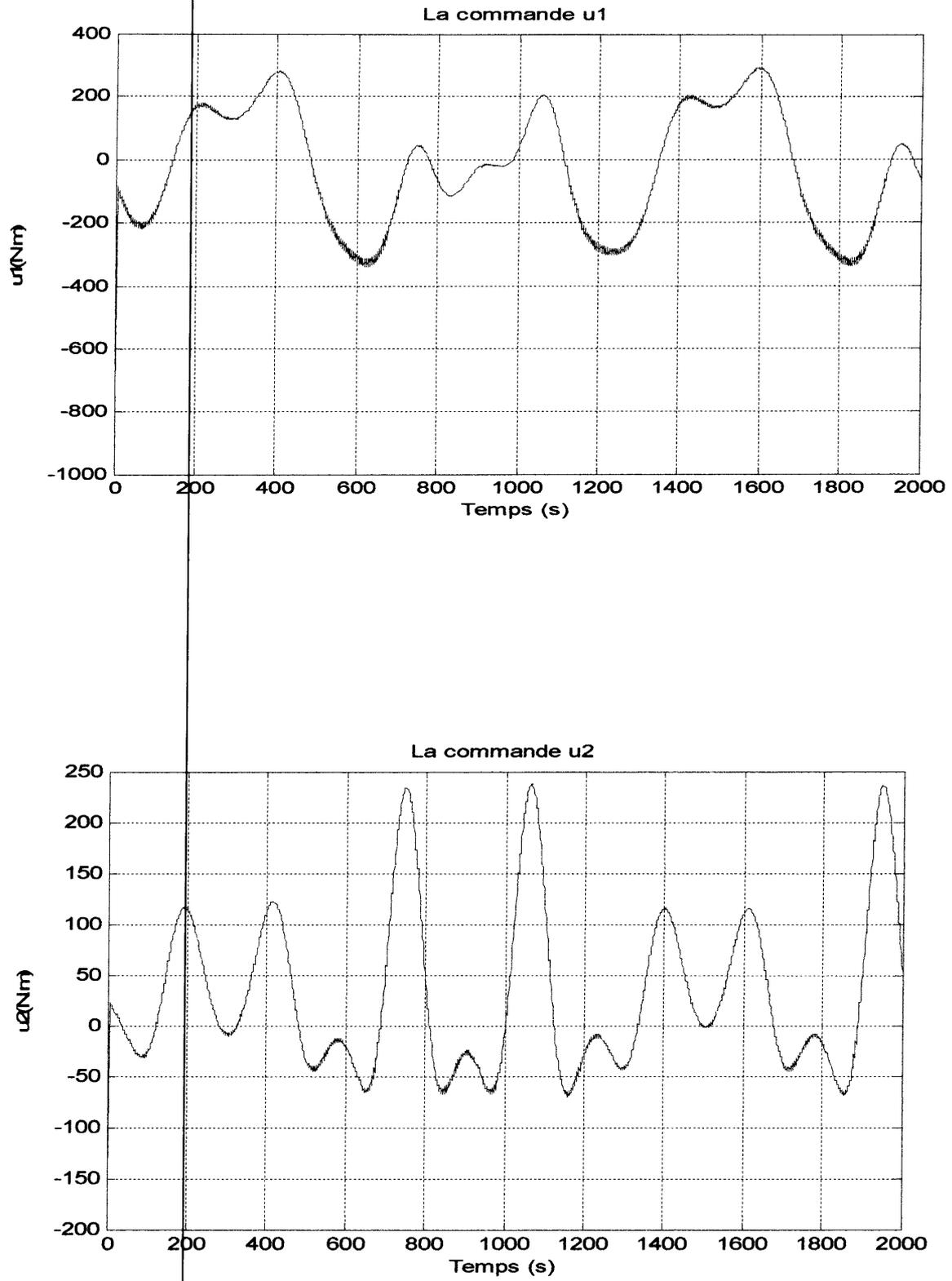


Figure III.7 : Couples d'entrée pour les deux articulations

Les figures (III.5), (III.6) et (III.7) représentent le résultat de la commande par backstepping avec tous les paramètres sont bien connus.

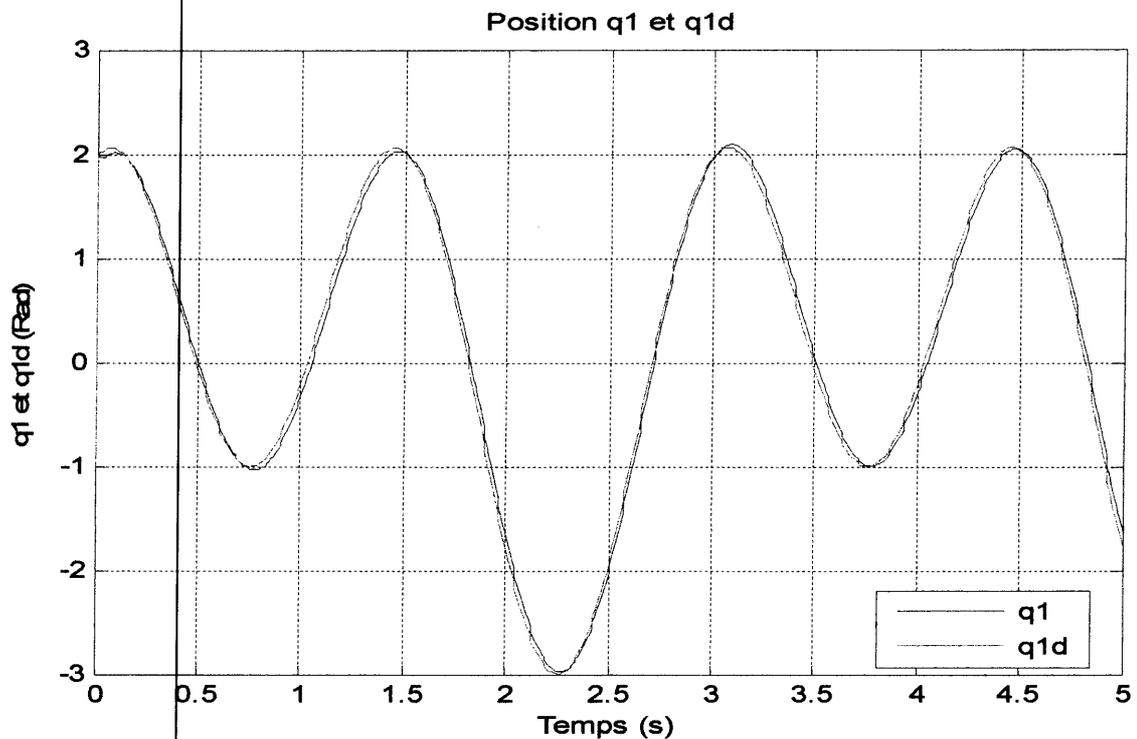
Le suivi de la trajectoire désirée est réalisé après 0.5 second avec une erreur presque nulle après 1 seconde. Concernent le couple d'entrée, la valeur de la commande d'entrée est très satisfaisante. Malheureusement, cette commande est valable sauf pour les systèmes connus avec précision.

On suppose maintenant que les masses de notre robot ne sont pas connus, la commande par backstepping adaptative est appliquée pour résoudre ce problème-là.

### III.4.3.2 Cas adaptative

$l_1=0.432$  m;  $l_2=0.432$  m;  $m_{01}= 15$  kg;  $m_{02} =12$  kg;  $g= 9.81$  m/s<sup>2</sup>;  $c_1=1$ ;  $c_2=190$ ;  $q_1(0) =0$ ;  $q_2(0)=0$ ;  $\Gamma=5$ ;

$$q_{1d}=2\cos\left(\frac{4\pi t}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi t}{3}\right) \text{ rad}; 0 \leq t \leq 5; q_{2d}(t) = 1 - 2\cos\left(\frac{4\pi t}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi t}{3}\right) \text{ rad.}$$



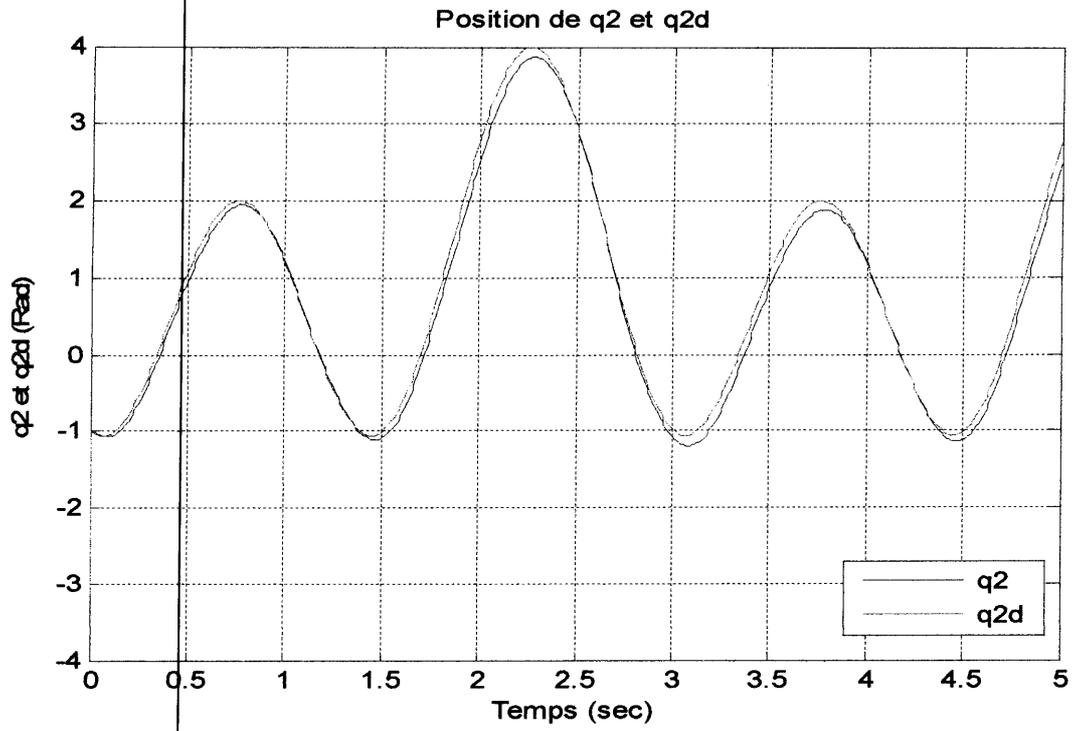
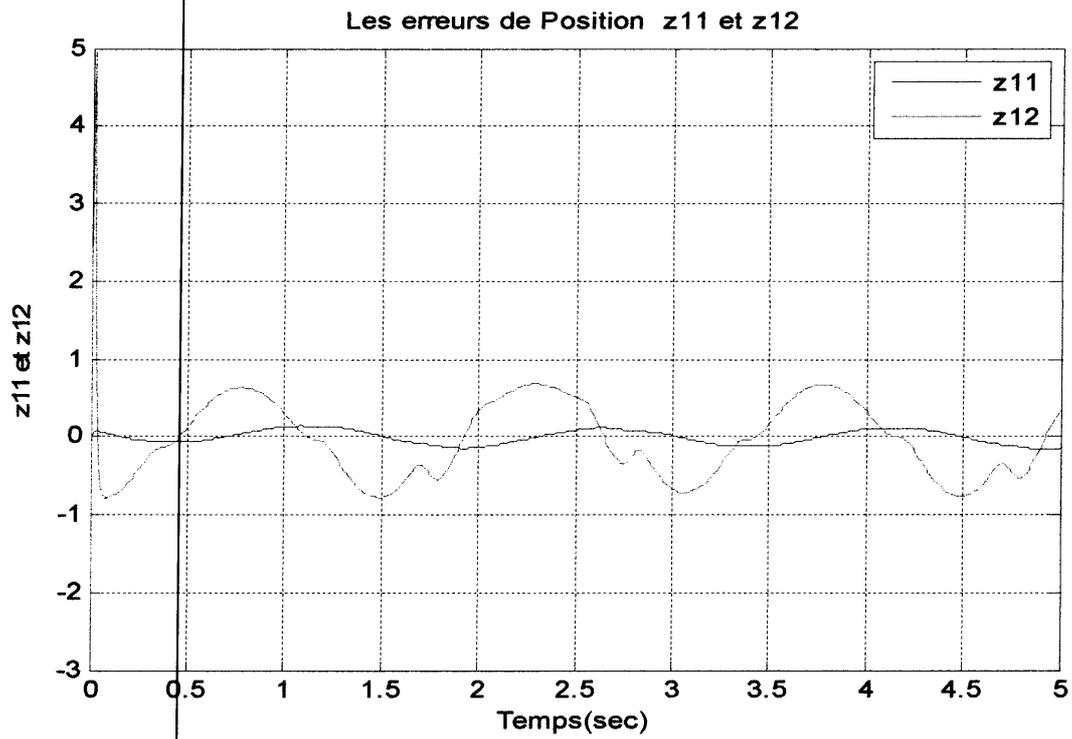


Figure III.8: trajectoires réelles et désirées pour les deux articulations



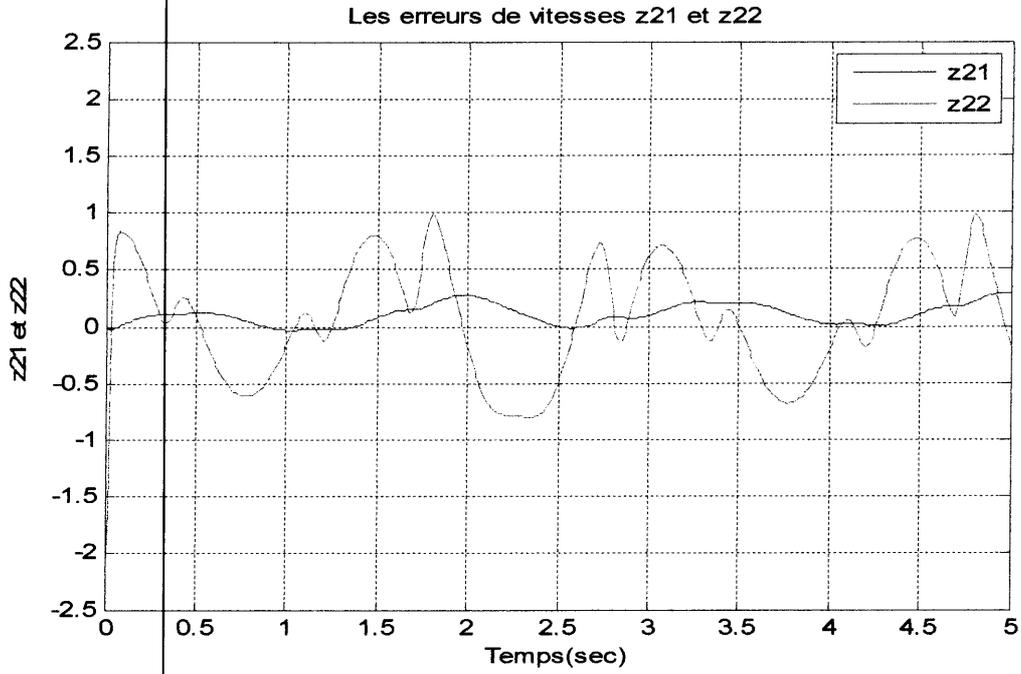
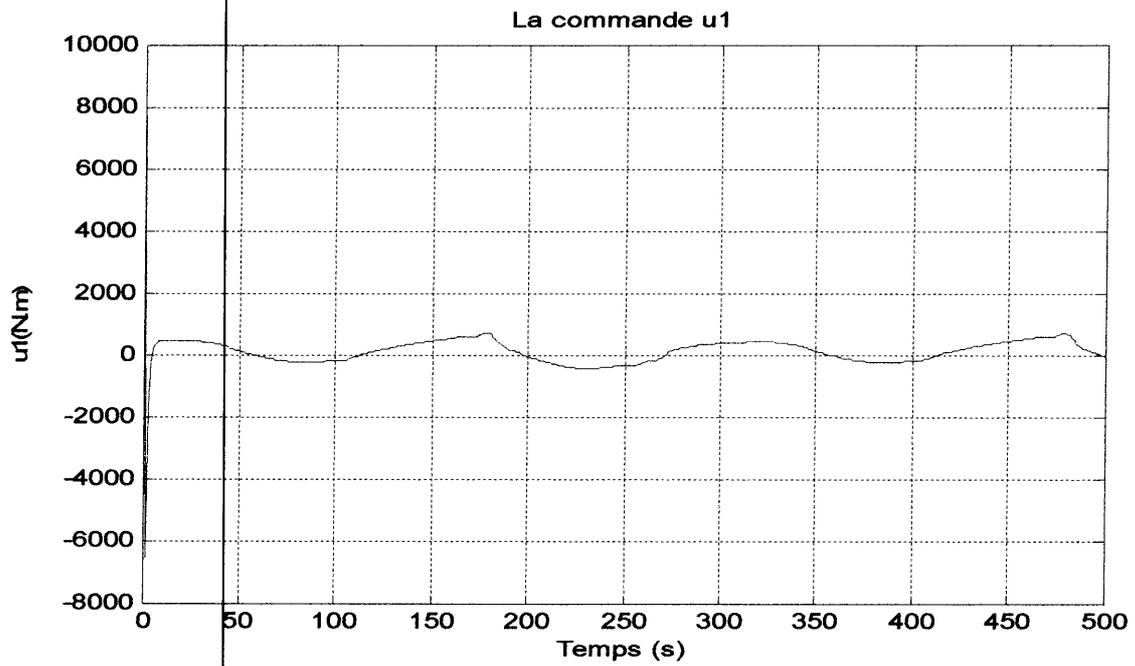


Figure III.9 : Erreurs de positions et de vitesses pour les deux articulations



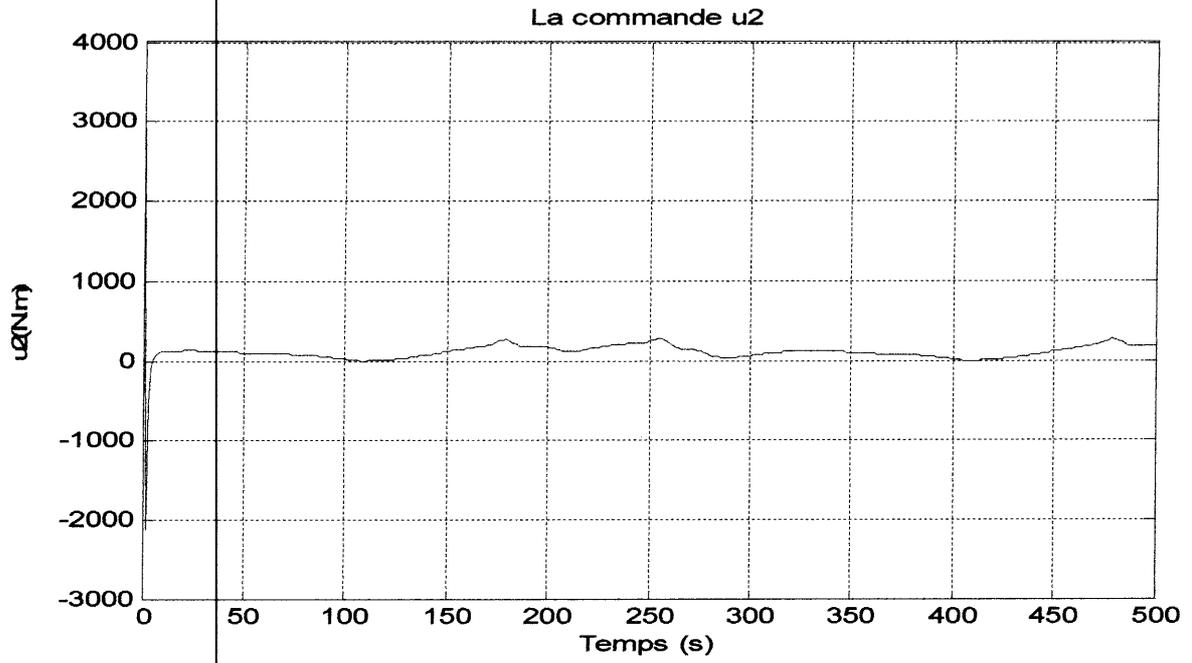
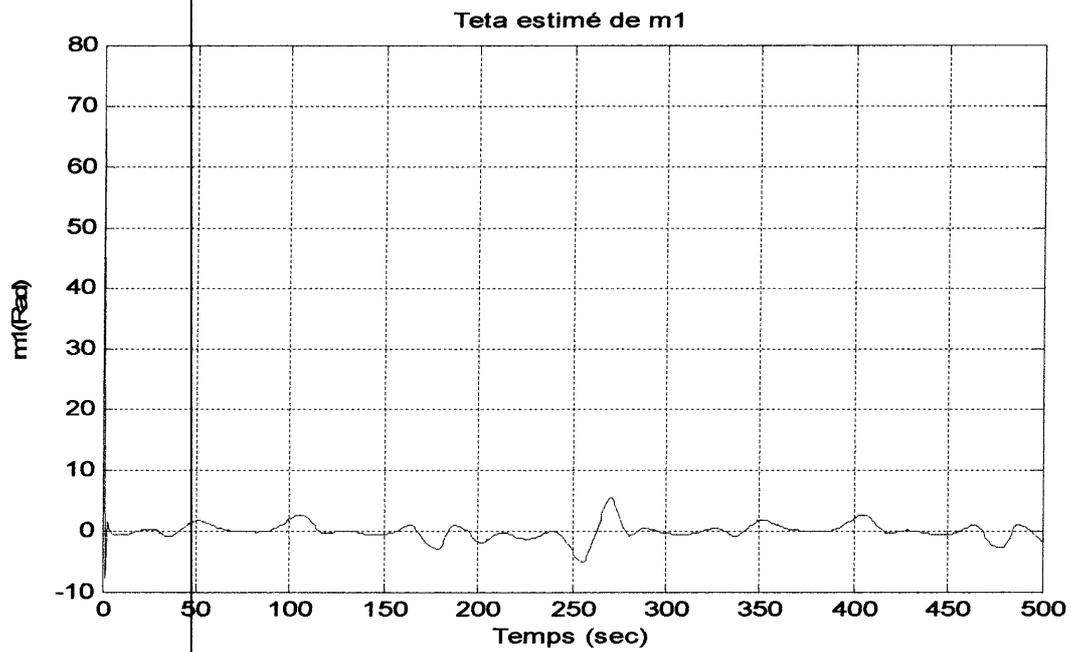
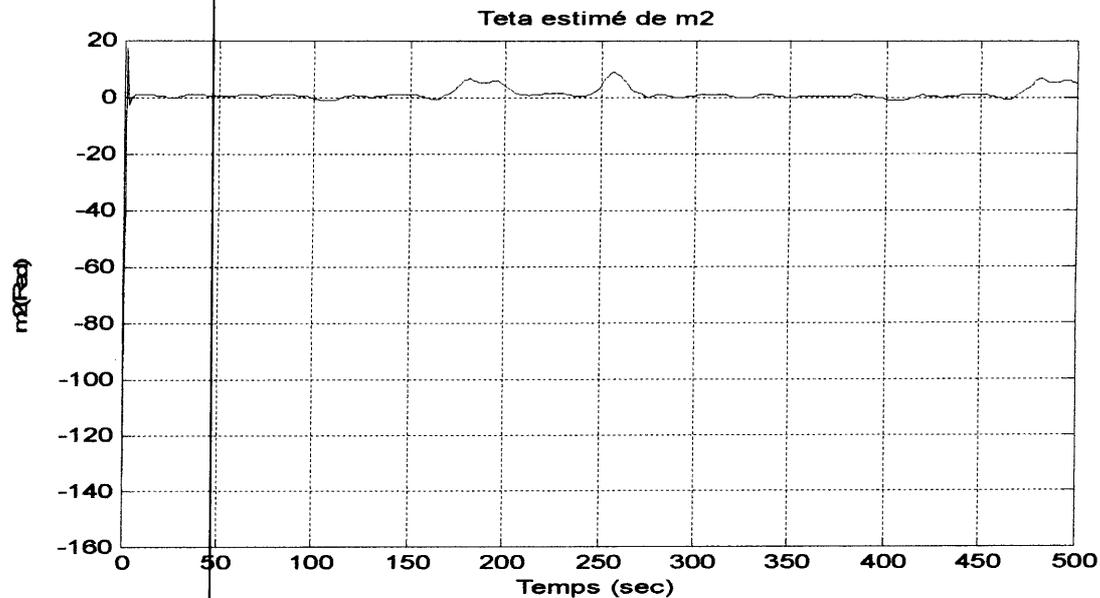


Figure III.10 : Couples d'entrée pour les deux articulations





**Figure III.11 : Paramètres estimés**

Les trajectoires réelles et désirées des deux articulations sont données par la figure (III.8). Nous remarquons que la trajectoire réelle suit la trajectoire désirée pour les deux articulations. La figure (III.9) donne les erreurs de suivi de trajectoires désirées pour les deux articulations, il est clair que ces erreurs tendent vers zéro. Les estimations, des valeurs inconnues des mesures sont données par la figure (III.11). Ces résultats prouvent clairement l'efficacité de cette loi de commande par backstepping adaptative.

La figure (III.10) donne les couples d'entrée pour les deux articulations. Ces couples restent acceptables.

### III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait un petit rappel sur les systèmes non linéaires ensuite la description de la technique du « backstepping » et aussi « backstepping adaptative » ont été présentées. Cette procédure permet d'obtenir de façon constructive une loi de commande qui assure la stabilité du système en boucle fermée via une fonction de Lyapunov. En appliquant cette technique de commande sur un robot à deux degrés de liberté, nous avons obtenu des bons résultats, ce qui prouve l'importance de la technique utilisée.

## *CHAPITRE IV*

*Commande par backstepping  
adaptative avec observateur  
appliquée sur un robot  
manipulateur*

## IV. Commande par Backstepping adaptative avec observateur

### IV.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à la commande par backstepping adaptative basée sur la présence d'un observateur. Le problème d'observabilité a une importance pratique, car certaines variables internes sont quelques fois inaccessible à la mesure ou « coûteuse » à mesurer. La plupart du temps, soit par l'impossibilité physique d'introduire un capteur, soit les capteurs sont coûteux [10].

On va voir comment on peut, à partir des mesures faites sur l'entrée et la sortie du processus, reconstruire, le vecteur d'état  $x$ , noté  $\hat{x}$ . Le sous-système, qui réalise cette reconstruction, est appelé observateur.

L'observateur a comme entrée les entrées et les sorties du processus réel et comme sortie la valeur estimée (reconstruite) de l'état de processus (figure IV.1).

Le problème de l'observateur consiste donc à reconstruire, pour un processus donné, un système défini par ses équations d'état, dont la sortie donne une estimation de l'état réel du processus. Cette estimation comporte une erreur qui doit tendre vers zéro. Quand cette propriété est satisfaite, l'observateur est asymptotiquement stable.

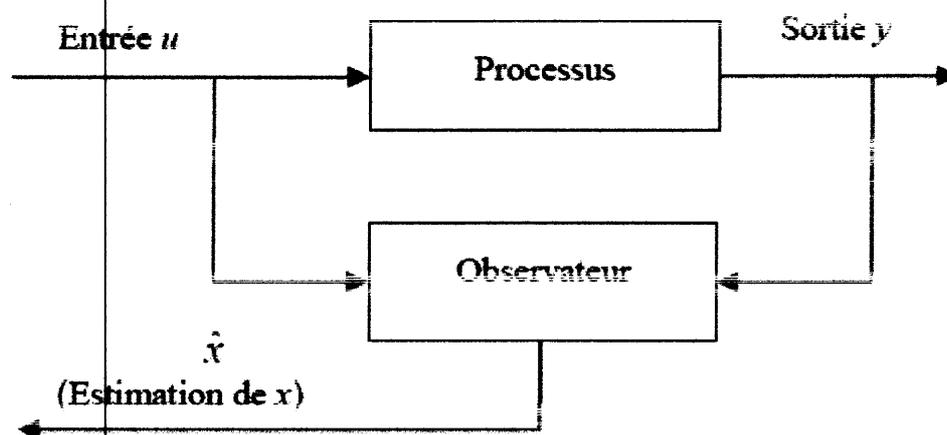


Figure IV.1 : schéma de principe de l'observateur.

## IV.2 Commande par backstepping adaptative avec observateur

Pour atteindre l'objectif fixé dans cette partie, on doit adopter un ensemble d'hypothèses afin d'introduire l'observateur. On va traiter un exemple selon les étapes habituelles de la commande par backstepping adaptative.

Le principe consiste à exposer deux schémas permettant d'éclairer la différence entre la commande par backstepping non adaptative avec observateur (figure IV.2) et la commande par backstepping adaptative avec observateur (figure IV.3).

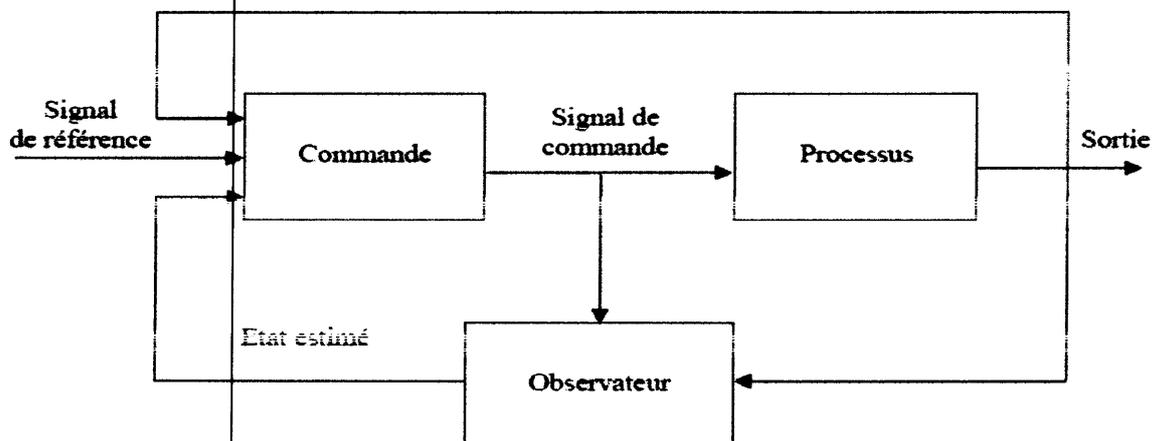


Figure IV.2 : Schéma de principe de la commande par backstepping non adaptative avec observateur

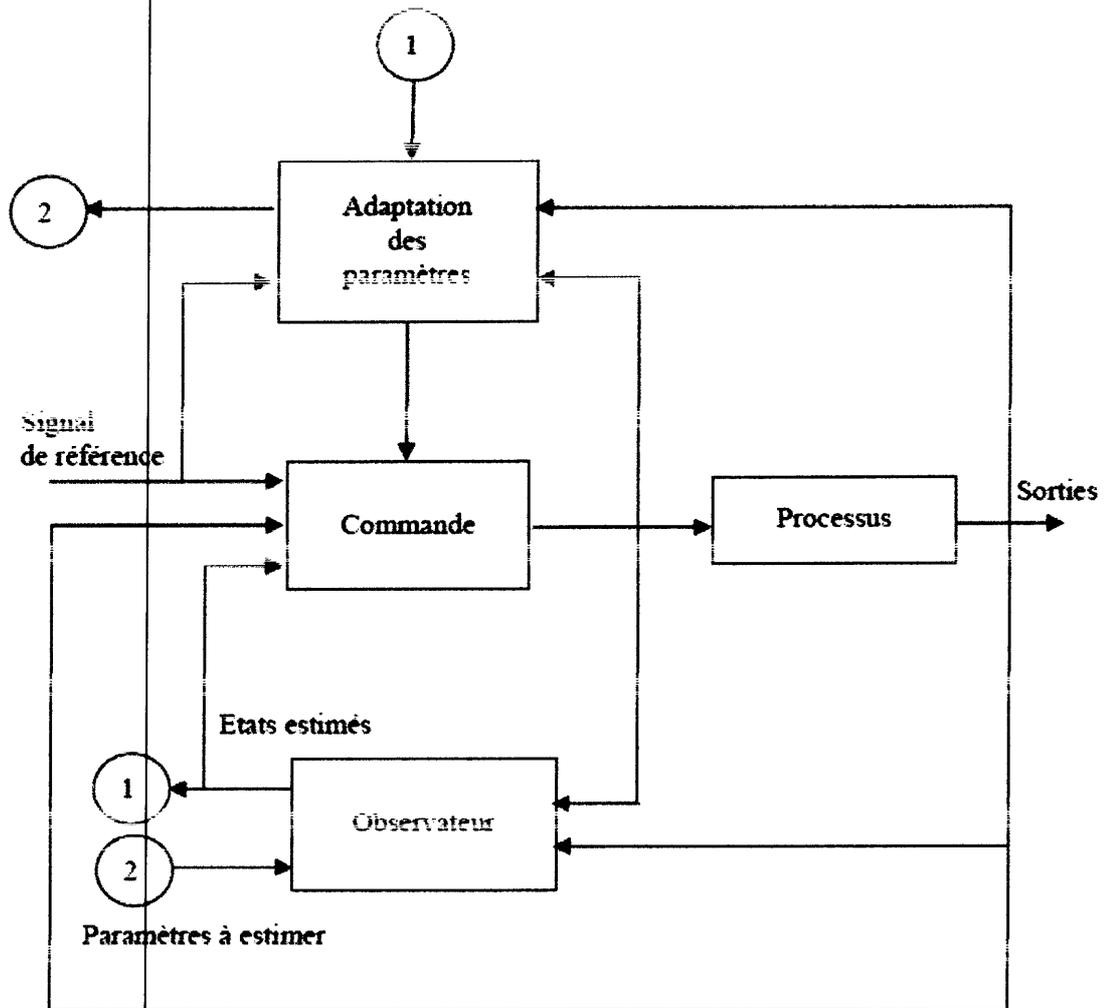


Figure IV.3 : Schémas de principe de la commande par backstepping adaptative avec observateur

Dans le but de faire la synthèse de la commande par backstepping adaptative avec observateur, les hypothèses suivantes sont supposées réalisées :

- 1 .la plupart des états ne sont pas disponibles ;
- 2 .la fonction de sortie  $y = h(x)$  doit être définie ;
- 3 .les non-linéarités du système sont fonctions de grandeurs mesurables.

Ces conditions supplémentaires permettent au système de prendre la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 + \varphi_1(y)^T \theta \\ \dot{x}_2 = x_3 + \varphi_2(y)^T \theta \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \varphi_{n-1}(y)^T \theta \\ \dot{x}_n = \beta(x)u + \varphi_n(y)^T \theta \\ y = x_1 \end{array} \right. \quad (IV.1)$$

Tel que chaque  $\varphi_i: R \rightarrow R^P$  est un vecteur de fonction nom linéaires, et  $\theta \in R^P$  est un vecteur de paramètres constants.

Dans le but de concevoir un observateur, le système (IV.1) peut être représenté par la somme :

1. d'une partie comme linéaire.
2. d'une partie non linéaire inconnue.
3. d'une fonction de commande.

$$\dot{x} = \underbrace{Ax}_{\text{Partie linéaire}} + \underbrace{\varphi(y)^T \theta}_{\text{Non linéaire inconnue}} + \underbrace{G \cdot \beta(y)u}_{\text{Commande}}$$

Où :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \varphi(y) = [\varphi_1(y)^T \quad \varphi_2(y)^T \quad \dots \quad \varphi_i(y)^T \quad \dots \quad \varphi_n(y)^T]$$

$$G = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 1] ; x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_i \ \dots \ x_n]^T ; \theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_i \ \dots \ \theta_P]^T$$

### IV.3 Observateur

Si on note  $\hat{x}$  le vecteur d'état estimé et  $\tilde{x}$  l'erreur de l'observation alors [10]

$$x = \hat{x} + \tilde{x}$$

Un observateur est définie par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \varphi^T(y)\theta + \beta(y)u + K(y - \hat{y}) \\ y = C^T \hat{x} \end{cases} \quad (IV.2)$$

Avec  $K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ \dots \ k_n]^T$ ,  $k_i \geq 0$ ,  $0 \leq i \leq n$

On choisit  $K$  de façon que :  $A_0 = A - KC^T$  est une matrice Hurwitz,

En a l'erreur d'observateur  $\tilde{x} = x - \hat{x}$  alors [12] :

$$\dot{\tilde{x}} = A_0 \tilde{x} \quad (IV.3)$$

$$\tilde{x}(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \hat{x}_0 = x_0 - x_0$$

### IV.4 Application de commande par backstepping adaptative avec observateur sur un robot manipulateur à deux degrés de liberté

Pour cette application, on va montrer comment le problème de la commande adaptative d'un robot manipulateur à deux degrés de liberté va être résolu en utilisant la technique du backstepping avec un observateur de vitesse en supposant que seules les positions des segments sont mesurables.

#### IV.4.1 Modèle et propriétés

##### ➤ Modèle

En appliquant le formalisme de Lagrange, le système peut être décrit par le modèle, suivant :

$$\ddot{M}(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = T \quad (IV.4)$$

Le vecteur d'état peut être décrit par :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ q \end{bmatrix}$$

La représentation d'état du système sans frottement peut s'écrire alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = M^T(x_2)[T - C(x_1, x_2)x_1 - G(x_2)] \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \quad (IV.5)$$

➤ Propriétés

Ce type de robot possède les propriétés suivantes :

- Propriété 1 :  $M(q)$  est symétrique définie positive,  $\exists M_M \geq M_m > 0$  tel que  $M_m I_n < \|M(q)\| < M_M I_n, \forall q \in R^n$  Avec  $I_n$  matrice d'identité (2x2).
- Propriété 2 :  $C(q, \dot{q}_1)\dot{q}_2 = C(q, \dot{q}_2)\dot{q}_1$ .
- Propriété 3 :  $\|C(q, \dot{q})\| < C_M \|\dot{q}\|$  avec  $C_M$  une constante positive.
- Propriété 4 :  $N(q, \dot{q}) = \dot{M}(q, \dot{q}) - 2C(q, \dot{q})$  est antisymétrique, et

$$\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C^T(q, \dot{q}).$$

-propriété 5 :  $M(q)\Psi + C(q, \zeta)\zeta + G(q) = \varphi_0(q, \zeta, \Psi) + \varphi(q, \zeta, \Psi)\theta$  où  $\zeta \in R^P$  et  $\theta \in R^P$  vecteur de paramètre inconnus. [12]

IV.4.2 Backstepping adaptative avec observateur

On suppose que la vitesse du robot est limitée par une valeur constante  $\omega_{max}$  tel que  $\|\dot{q}\| < \omega_{max} \forall t \geq 0$ .

On considère l'erreur et sa dérivée suivantes :

$$\begin{cases} z_1 = q - q_d \\ \dot{z}_1 = x_1 - \dot{q}_d \end{cases} \quad (IV.6)$$

L'idée principale du backstepping est de choisir l'un des variables d'état comme étant la commande virtuelle.

$$\zeta_1 = \hat{x}_1 = z_2 + \alpha_1 \quad (IV.7)$$

Tel que  $\zeta_1$  représente la somme de l'erreur  $z_2$  et la fonction stabilisante  $\alpha_1$ , alors on peut déduire à partir de l'équation (IV.7) :

$$\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1 + \tilde{x}_1 - \dot{q}_d \quad (\text{IV.8})$$

Avec :  $x_1 = \hat{x}_1 + \tilde{x}_1$

La fonction stabilisante est choisie de sorte que :

$$\alpha_1 = -C_1 z_1 - D_1 z_1 + \dot{q}_d \quad (\text{IV.9})$$

Avec  $C_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  matrice positive et toujours diagonale, et  $D_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  positive diagonal tel que :

$$\begin{cases} C_1 = \text{diag}[C_{11}, C_{12}] \\ D_1 = \text{diag}[D_{11}, D_{12}] \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

Avec :  $\begin{cases} C_{ii} > 0 \\ D_{ii} > 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2)$

Sachant que le terme  $-D_1 z_1$  est rajouté pour compenser  $\tilde{x}_1$ , on peut écrire (IV.8) sous forme :

$$\dot{z}_1 = -(C_1 + D_1)z_1 + z_2 + \tilde{x}_1 \quad (\text{IV.11})$$

L'étape suivante consiste à représenter la dynamique de  $z_2$  en utilisant l'équation (IV.7), ce qui donne :

$$\dot{z}_2 = \dot{\zeta}_1 - \dot{\alpha}_1 = \dot{\hat{x}}_1 + (C_1 + D_1)\dot{z}_1 - \ddot{q}_d \quad (\text{IV.12})$$

$$\dot{z}_2 = -(C_1 + D_1)^2 z_1 + (C_1 + D_1)(z_2 + \tilde{x}_1) - \ddot{q}_d + \hat{M}(q)^{-1} [T - \hat{C}(q, \hat{x}_1)\hat{x}_1 - \hat{G}(q)] + K \cdot \tilde{x}_1 \quad (\text{IV.13})$$

L'équation de l'observateur est donnée par l'équation (IV.14) et explicitée par la figure (IV.4)

$$\dot{\hat{x}}_1 = \Psi(q, \hat{x}_1, T, \hat{\theta}) + K \cdot \tilde{x}_1 \quad (\text{IV.14})$$

$$\Psi(q, \hat{x}_1, T, \hat{\theta}) = \hat{M}(q)^{-1} [T - \hat{C}(q, \hat{x}_1)\hat{x}_1 - G(q)] \quad (\text{IV.15})$$

Tel que  $\tilde{x}_1 = x_1 - \hat{x}_1$  et l'erreur d'observateur, et  $K > 0$  est la matrice diagonale de gain.

Le paramètre estimé utiliser en (IV.14) et (IV.15), est obtenu à partir de la loi d'adaptation :

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma\varphi^T(q, \hat{x}_1, \Psi)\tilde{x}_1 \tag{IV.16}$$

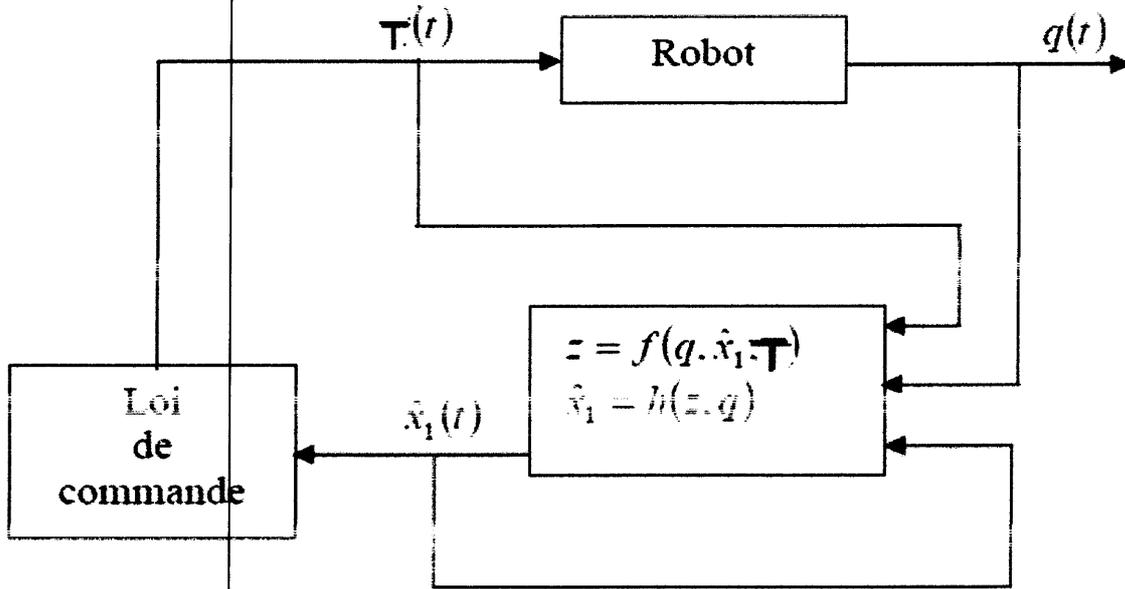


Figure IV.4 : Diagramme bloc de commande avec observateur

On choisit la loi de commande suivante :

$$u = T = -\hat{M}(q)[-(C_1 + D_1)^2 z_1 + (C_1 + D_1)z_2 - \ddot{q}_d + C_2 z_2 + D_2 z_2 + z_1] + \hat{C}(q, \hat{x}_1)\tilde{x}_1 + \hat{G}(q) \tag{IV.17}$$

Avec  $C_2 \in R^{2 \times 2}$  matrice positive et diagonale. A partir des équations (IV.16) et (IV.17), on aura :

$$\dot{z}_2 = -C_2 z_2 - D_2 z_2 - z_1 + \Omega \tilde{x}_1 \tag{IV.18}$$

Tel que :

$$\Omega = (C_1 + D_1) + K$$

$$D_2 \in R^{2 \times 2}, D_2 = \text{dag}[d_{21}\omega_1^T \omega_1, d_{22}\omega_2^T \omega_2]$$

$$\Omega^T = [\omega_1, \dots, \omega_n] \text{ Et } d_i > 0 \quad (i = n + 1, \dots, 2n)$$

## IV.4.3 Etude de la stabilité

En tenant compte des équations (IV.11) et (IV.18), la dynamique de l'erreur peut s'écrire :

$$\dot{z} = -(C_z + D_z)z + W \cdot \tilde{x}_1 \quad (\text{IV.19})$$

$$\hat{M}^{-1}(q)\dot{\tilde{x}}_1 = -C(q, x_1)x_1 + C(q, \tilde{x}_1)\tilde{x}_1 - M(q)K \cdot \tilde{x}_1 - \varphi(q, \tilde{x}_1, \Psi)\tilde{\theta} \quad (\text{IV.20})$$

Avec :

$$z = [z_1 \ z_2]^T, \quad C_z = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}, \quad D_z = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}, \quad W = [I \ \Omega]^T$$

Considérons la fonction de Lyapunov :

$$V = \frac{1}{2}(z^T z + \tilde{x}_1^T M(q)\tilde{x}_1 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}) \quad (\text{IV.21})$$

En utilisant les équations (IV.19) et (IV.20), la dérivée de  $v$  aura la structure suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -z^T C_z z - z^T D_z z + z^T W \cdot \tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^T (M(q)K + C(q, x_1) - C(q, \tilde{x}_1))\tilde{x}_1 \\ & + \tilde{x}_1^T \left( \frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, x_1) \right) \tilde{x}_1 - \tilde{\theta}^T (\varphi^T(q, \tilde{x}_1, \Psi) + \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}) \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

Avec l'ajoute du terme nul  $\frac{1}{4}(\tilde{x}_1^T P \cdot \tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^T P \cdot \tilde{x}_1)$  et l'utilisation de l'équation (IV.17) et la propriété(4), on aura :

$$\dot{V} = -z^T C_z z - z^T D_z z + z^T W \cdot \tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^T P \cdot \tilde{x}_1 + \tilde{x}_1^T (M(q)K + C(q, x_1) - C(q, \tilde{x}_1) - \frac{1}{4}P) \cdot \tilde{x}_1 \quad (\text{IV.23})$$

On définit la matrice  $P$  par :

$$P = pI \quad (\text{IV.24})$$

$$\text{Avec :} \quad p = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{d_i} \quad (\text{IV.25})$$

$$\text{Sachant que :} \quad -z^T D_z z + z^T W \cdot \tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^T P \cdot \tilde{x}_1 \leq 0 \quad (\text{IV.26})$$

On peut déduire la dérivée de Lyapunov suivante :

$$\dot{V} \leq -z^T C_z z - \tilde{x}_1^T (M(q)K + C(q, x_1) - C(q, \tilde{x}_1) - \frac{1}{4}P) \cdot \tilde{x}_1$$

$$\leq -z^T C_z z - \left( M_M(q)K + C_M \omega_{max} - C_M \|\tilde{x}_1\| - \frac{1}{4}P \right) \cdot \|\tilde{x}_1\|^2 \quad (IV.27)$$

La condition qui satisfait la stabilité est telle que :

$$M_M K + C_M \omega_{max} - C_M \|\tilde{x}_1\| - \frac{1}{4}P > 0$$

Ce qui permet d'écrire :  $\dot{V} \leq 0$

#### IV.4.4 Résultats de simulations

##### IV.4.4.1 Le modèle

On considère un robot manipulateur à deux masse  $m, m_2 (kg)$ , de longueur  $l_1, l_2 (m)$ , d'angles  $q_1, q_2 (rad)$ , et couple  $T_1, T_2 (N.m)$ ,  $m_2$  est le paramètre inconnu constant. [10]

Le modèle dynamique s'écrit :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = T \text{ et } \theta = m_2$$

Où

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}, G(q) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \text{ et } T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

Avec  $M_{11}, M_{12}, M_{21}$  et  $M_{22}, C_{11}, C_{12}, C_{21}$  et  $C_{22}, g_1$  et  $g_2, T_1$  et  $T_2$  sont motionnées sur l'annexe.

En utilisant les notations suivantes  $C_z = \cos q_z, s_z = \sin q_z$  et  $C_{12} = \cos(q_1 + q_2)$ , on peut déduire les fonctions représentatives suivantes :

$$\varphi^T(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} (l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2 + l_1^2)\ddot{q}_2 + (l_2^2 + l_1 l_2 c_2)\ddot{q}_2 - (2l_1 l_2 s_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_1 l_2 s_2 \dot{q}_2^2) + (l_2 g c_{12} + l_1 g c_1) \\ (l_2^2 + l_1 l_2 c_2)\ddot{q}_1 + l_2^2 \ddot{q}_1 + l_1 l_2 s_2 \dot{q}_1^2 + l_2 g c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\Psi(t) = (M(q(t)))^{-1} \cdot [T(t) - \hat{C}(q, \hat{x}_1)\hat{x}_1(t) - \hat{G}(q(t))]$$

$$\hat{M}(q) = \begin{bmatrix} \hat{\theta} \cdot l_2^2 + 2\hat{\theta} \cdot l_1 l_2 c_2 + (m_1 + \hat{\theta}) l_1^2 & \hat{\theta} \cdot l_2^2 + \hat{\theta} \cdot l_1 l_2 c_2 \\ \hat{\theta} \cdot l_2^2 + \hat{\theta} \cdot l_1 l_2 c_2 & \hat{\theta} \cdot l_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}(q, \hat{x}_1) = \begin{bmatrix} -2\hat{\theta} \cdot l_1 l_2 s_2 \cdot \hat{x}_{12} & -\hat{\theta} \cdot l_1 l_2 s_2 \cdot \hat{x}_{12} \\ \hat{\theta} \cdot l_1 l_1 s_2 \cdot \hat{x}_{11} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{G}(q) = \begin{bmatrix} \hat{\theta} \cdot l_2 g c_{12} + (m_1 + \hat{\theta}) l_1 g c_1 \\ \hat{\theta} \cdot l_2 g c_{12} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = [x_{11} \quad x_{12}]^T = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T, \Psi = [\Psi_1 \quad \Psi_2]^T$$

$$\varphi^T(q, \hat{x}_1, \Psi)$$

$$= \begin{bmatrix} (l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2 + l_1^2) \cdot \Psi_1 + (l_2^2 + l_1 l_2 c_2) \cdot \Psi_2 - (2l_1 l_2 s_2 \cdot \hat{x}_{11} \cdot \hat{x}_{12} + l_1 l_2 s_2 \cdot \hat{x}_{12}^2) + (l_2 g c_{12} + l_1 g c_1) \\ (l_2^2 + l_1 l_2 c_2) \cdot \Psi_1 + l_2^2 \cdot \Psi_2 + l_1 l_2 s_2 \cdot \hat{x}_{11}^2 + l_2 g c_{12} \end{bmatrix}$$

#### IV.4.4.1 Résultats

Pour les paramètres de synthèse nous avons pris

$$l_1 = 0.432 \text{ m}; l_2 = 0.432 \text{ m}; m_1 = 15.91 \text{ kg}; g = 9.81 \text{ m/s}^2;$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 35 & 0 \\ 0 & 35 \end{bmatrix}; C_2 = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix}; D_1 = \begin{bmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 40 \end{bmatrix}; D_2 = \begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$m_2 = 8 \text{ kg}; \Gamma = 0.1; q_1(0) = 0; q_2(0) = 0; \hat{x}_{11}(0) = 0; \hat{x}_{12}(0) = 0;$$

$$q_{1d}(t) = 2 \cos\left(\frac{4\pi t}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi t}{3}\right) \text{ rad}; q_{2d}(t) = 1 - 2 \cos\left(\frac{4\pi t}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi t}{3}\right) \text{ rad}$$

$$(a): 0 \leq t \leq 3 \quad ; \quad (b): 0 \leq t \leq 0.4$$

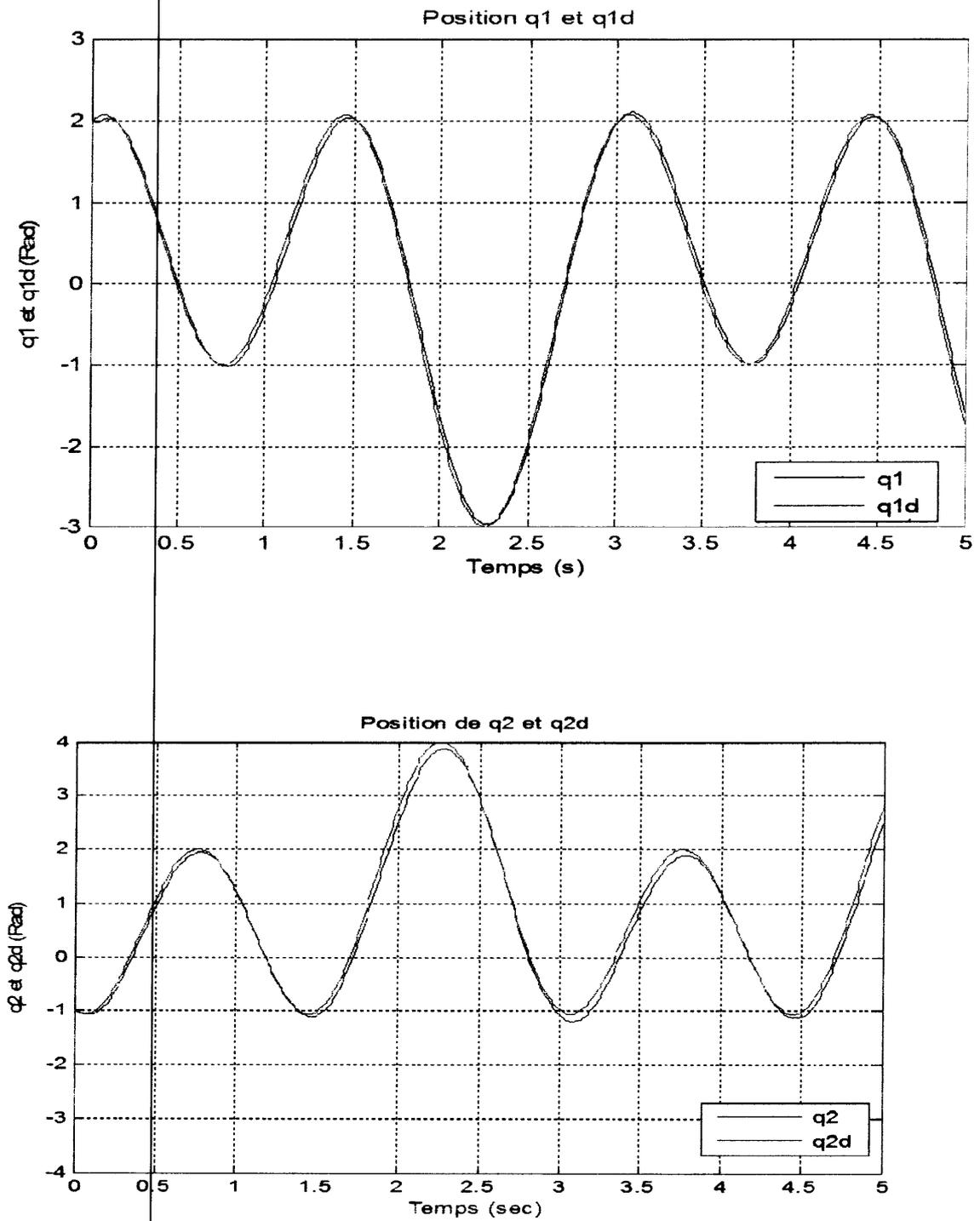


Figure IV.5 : trajectoires réelles et désirées pour les deux articulations

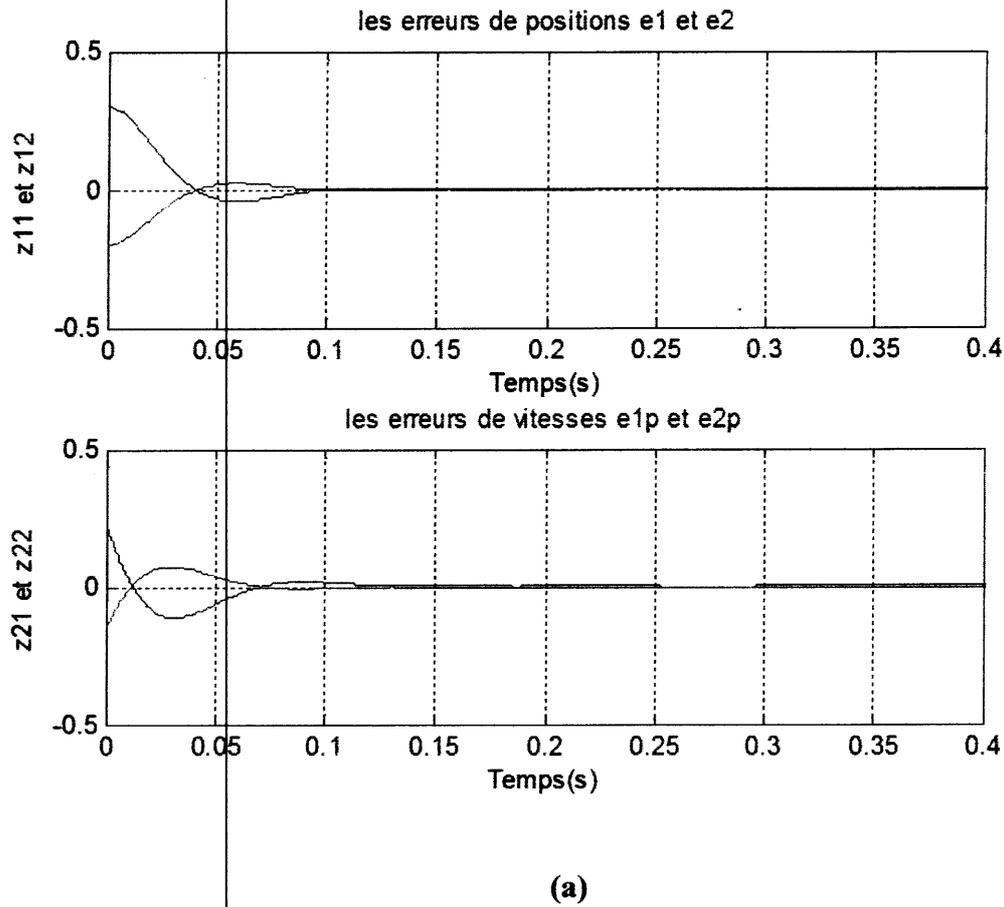
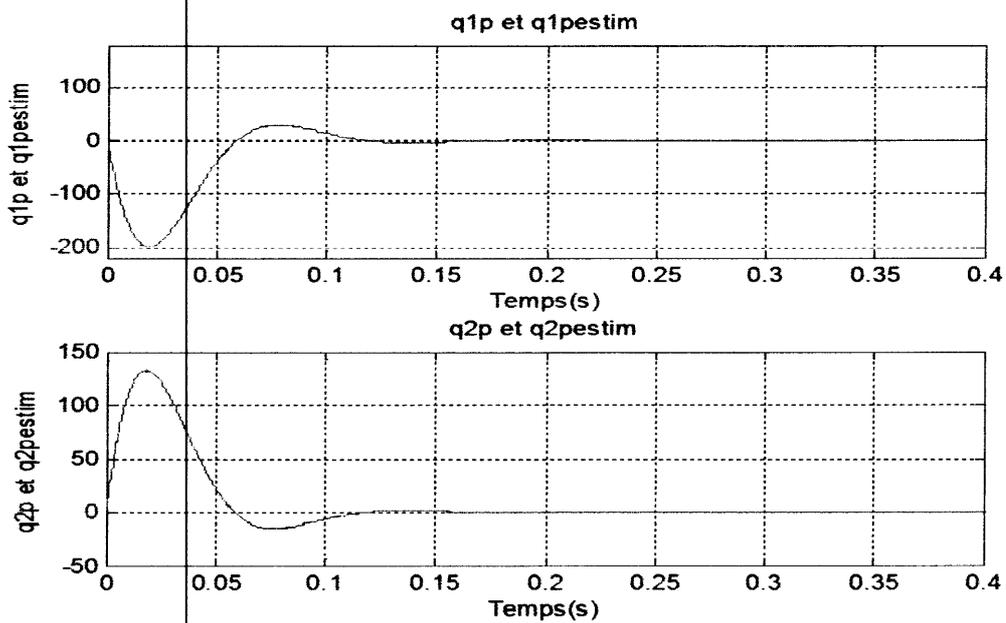


Figure IV.6 : Erreurs de positions et de vitesses pour les deux articulations



(a) Et (b)

Figure IV.7 : Paramètres estimés

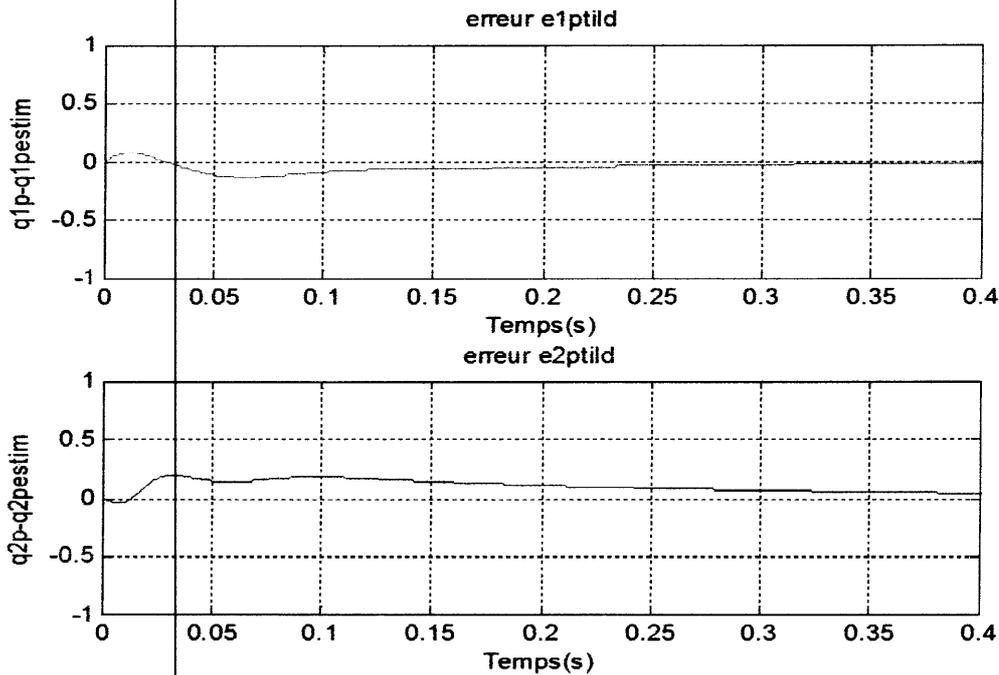


Figure IV.8 : Erreur entre le vecteur  $x_1$  et  $\hat{x}_1$  pour les deux articulation

Les figures de (IV.5) jusqu'à (IV.8) montrent l'efficacité de la commande par backstepping adaptative avec observateur sur le robot manipulateur a deux degrés de liberté.

Le suivie de la trajectoire et réalisé avec une erreur entre 0.08 et -0.08 et une estimation de la valeur inconnue de masse acceptable.

L'erreur entre le vecteur de vitesse  $x_1$  et le vecteur d'estimation de vitesse  $\hat{x}_1$  est bonne, et elle est entre la valeur 0.02 et -0.02.

Le couple d'entré est un peu élever au démarrage mais après 0.5 second la commande se stabilise.

**IV.5 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté la théorie de la commande par backstepping adaptative avec observateur de vitesse des robots manipulateurs. Parmi les problèmes que nous avons rencontrés au cours de l'application de cette technique, l'adaptation de la méthode d'intégration de l'observateur et l'augmentation.

## Conclusion générale

Les systèmes industriels ont souvent un comportement significativement non linéaire. La linéarisation autour d'un point de fonctionnement est souvent inadaptée pour les besoins de la commande, par conséquent il est important de développer des méthodes de commande non linéaires pour ce type de systèmes. En effet, dans la commande des systèmes non linéaire, la stabilité est un élément très important. Auquel la théorie de Lyapunov apporte une solution à la fois sûre et efficace.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la commande par backstepping des robots manipulateurs. Cette dernière est une approche récursive et analytique, qui sert à trouver la commande qui rend le système globalement asymptotiquement stable via l'utilisation de la deuxième méthode de Lyapunov. L'idée de Lyapunov est de trouver une fonction définie positive, si la dérivée de cette fonction par rapport au temps est nulle, alors le système est stable. Si cette dérivée est strictement négative, alors le système est asymptotiquement stable.

Pour donner une idée sur les robots, nous avons donné des notions générales et différentes définitions concernant les robots manipulateurs et leur équation dynamique non linéaire issue du formalisme de Lagrange Euler.

Dans le deuxième chapitre, nous avons donné quelques notions sur les systèmes non linéaires et la stabilité de ce genre de systèmes. Nous avons présenté également, le principe de la commande par backstepping.

Dans le troisième chapitre de ce mémoire, nous avons étudié la commande par backstepping non adaptative et adaptative des robots manipulateurs.

Dans la dernière partie, nous avons présenté la théorie de la commande par backstepping adaptative avec observateur de vitesse des robots manipulateurs. Parmi les problèmes que nous avons rencontrés au cours de l'application de cette technique, l'adaptation de la méthode d'intégration de l'observateur et l'augmentation de l'ordre des équations dynamique du robot manipulateur. Concernant l'adaptation, il est difficile de trouver la forme triangulaire qui sépare les paramètres à estimer des non linéarités. Par conséquent, on peut dire qu'il sera difficile de trouver une méthode générique de la commande par backstepping adaptative avec observateur qui s'applique à tous les types des systèmes non linéaires.

Les résultats de simulation, obtenus de l'application de cette approche de commande à un robot manipulateur à deux degrés de liberté, prouvent l'intérêt de cette technique combinée avec un observateur de vitesse.

Ce travail ouvre des nouvelles perspectives, à savoir :

- Application du backstepping sur les robots manipulateurs ayant un grand degré de liberté.
- Commande par backstepping avec des filtres.

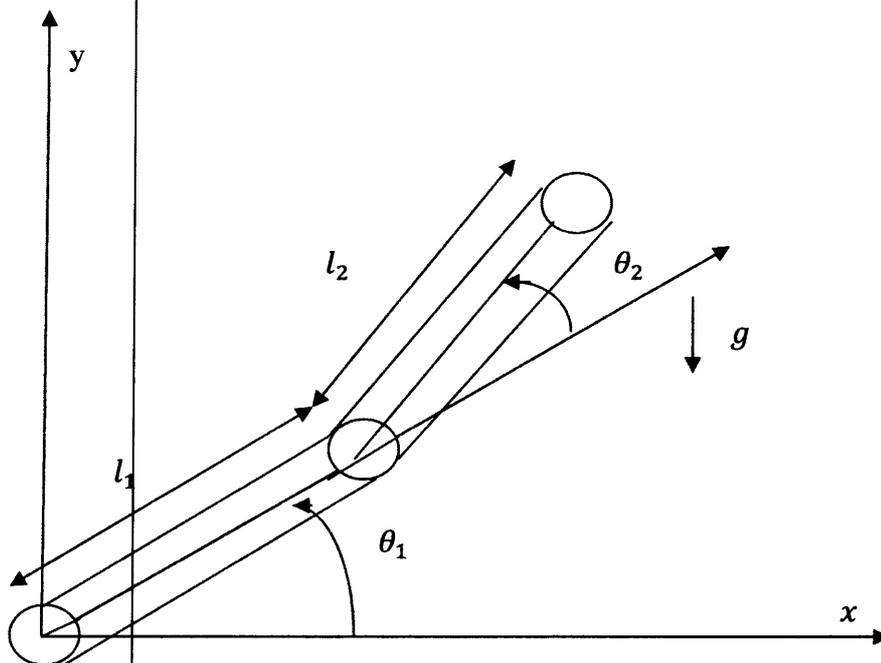
## ***Bibliographie***

- [1] W.Khalil et E. Dombre, « Modélisation, identification et commande des robots » deuxième édition, Hermes Science publication, Paris, 1999.
- [2] J-P-L. Allemand et S.Zegloul, «robotique aspects fondamentaux».
- [3] A. Liegois,«Modélisation et commande des manipulateurs » Technique de l'ingénieur article S7730.
- [4] Alain Pruski, Robotique générale, Ellipses, Paris 1988.
- [5] H. Berghuis, Model\_based control: forme theory to practice, Enschede, The Netherlandeis , Juin 1993.
- [6] J.J.E Solotine et WLI, Adaptative manipulator control: a case study, IEEE. Transaction on automatic control, Vol33.
- [7] B. D'Andrea-Novel, « Commande non linéaire des robots», hermès, 1988
- [8] Harry. Berghuis, «Model-based control from theory to practice», PHD Thesis, Enschede, the Netherlands, Juin 1993.
- [9] A.Bouketouta, A Kenzai « commande adaptative des robots manipulateurs »,PEE CU de Jijel, primotion 2003.
- [10] L.N. Paquin, «Application du Backstepping à une Colonne de Flottation », Mémoire pour l'obtention du grade de Maitre des sciences (M.Sc), Université de Laval, Faculté des études supérieurs, Juillet 2000.
- [11] M. Mokhtari, «Commande Adaptative des Systèmes Non-Linéaires: "Backstepping" », thèse de magister, Département d'électronique, Université de Batna, 2003 .

## Annexe

### Modèle dynamique d'un bras manipulateur rigide à deux degrés de liberté

Le robot manipulateur à deux degrés de liberté utilisé dans ce mémoire est schématisé par la figure suivante:



**Figure A.1:** Structure d'un robot manipulateur à deux degrés de liberté

Le modèle dynamique de ce robot est donné par l'équation matricielle suivante :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = T$$

Où :

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \text{ Vecteur de la variable articulaire généralisée}$$

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \text{ Vecteur des couples généralisés}$$

Matrice d'inertie

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 c_2 (m_1 + m_2) l_1^2 & m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c_2 \\ m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c_2 & m_2 l_2^2 \end{bmatrix}$$

Matrice de Coriolis et de centrifuge

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{q}_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vecteur des forces de gravité

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1 \\ m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix}$$

Avec la notation  $c_1 = \cos(q_1)$ ,  $c_2 = \cos(q_2)$ ,  $s_2 = \sin(q_2)$ ,  $c_{12} = \cos(q_1 + q_2)$ , etc. les paramètres du modèle sont  $m_1 = 15.91 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 13.36 \text{ kg}$ ,  $l_1 = 0.432 \text{ m}$ ,

$l_2 = 0.432 \text{ m}$ .