

Faculté des Sciences et  
de la Technologie



M18071

Département Automatique



## Mémoire

de fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme de master  
en Automatique et traitement de signal

## Thème

**Commande des systèmes non linéaires avec retard**

Présenté par  
Amine Boukerroum

Encadré par  
M<sup>me</sup> Dounia Saifia

Promotion 2014

## **Remerciements**

*Je tiens à remercier «Allah » qui a donné du courage et de la Volonté d'avoir réussi dans cette étude.*

*Je tiens à remercier mon encadreur Saïfia.D qui a proposé ce sujet de recherche, et qui a encadré et surtout pour ses conseils, sa compréhension, sa gentillesse, ses encouragements et sa bibliographie.*

*Je remercie tous la famille Boukerroum et la famille en particulier pères et mères qui ont encouragées par tous les moyens, matériels et morales notamment par leur supplication.*

*Je remercie aussi toute personne qui a contribué de loin ou de près à la réalisation de ce mémoire, et tous les enseignants de département d'automatique de l'université de Jijel.*

*Enfin, mes respect aux membres de jury pour examiner cette mémoire.*

**Merci à tous**

# Notation

## Matrices et opérateurs

$I_r$	Un ensemble $\{1, 2, \dots, r\}$
$\mathfrak{R}$	Un ensemble de nombres réels
$\mathfrak{R}^{n \times m}$	Un ensemble de $n \times m$ matrice réelle
$C^1$	Ensemble des fonctions continûment dérivables
*	Le bloc de la matrice symétrique

## Acronymes

LMI	<b>L</b> inear <b>M</b> atrix <b>I</b> nequality
PDC	<b>P</b> arallel <b>D</b> istributed <b>C</b> ompensatio

## Notations relatives aux model de Takaji-Sujeno

$x(t) \in \mathfrak{R}^n$	Le vecteur d'état
$y(t) \in \mathfrak{R}^p$	Le vecteur de sortie
$u(t) \in \mathfrak{R}^m$	Le vecteur de commande
(.)	Représente le temps ( $t$ )
$\mu_i$	Fonction d'activation correspondant ou $i^{\text{ème}}$ modèle local

## Notations relatives à la saturation d'actionneurs

$\sigma(t) \in \mathfrak{R}^m$	Sortie de l'actionneur
$sat(u)$	Un vecteur de commande saturée
$\underline{u}(i)$ et $\bar{u}(i)$	Respectivement, $u_{\min}(i)$ et $u_{\max}(i)$
$E$	Un ensemble de $n \times m$ matrices diagonales dont les éléments diagonales sont 1 ou 0
$E_s$	Un élément de $E$
$\bar{E}_s$	La matrice $I - E_s$

## Listes des figures

<b>Figure 1.1</b> Réponse du système sans et avec retard.....	7
<b>Figure 2.1</b> : Trajectoire de la variable d'état $x_1$ .....	25
<b>Figure 2.2</b> : Trajectoire de la variable d'état $x_2$ .....	26
<b>Figure 2.3</b> : Trajectoire de la variable d'état $x_3$ .....	26
<b>Figure 2.4</b> : Trajectoire de la commande $u$ .....	27
<b>Figure 3.1</b> Fonction de saturation.....	31
<b>Figure 3.2</b> : Trajectoire de la variable d'état $x_1$ .....	37
<b>Figure 3.3</b> : Trajectoire de la variable d'état $x_2$ .....	38
<b>Figure 3.4</b> : Trajectoire de la variable d'état $x_3$ .....	38
<b>Figure 3.5</b> : Trajectoire de la commande $u$ saturée.....	39

## Table des matières

<b>Introduction général</b> .....	1
<b>Chapitre 1 : Modèle de Takagi-Sugeno avec retard</b> .....	3
1.1 Introduction.....	4
1.2 Systèmes linéaires.....	4
1.3 Les systèmes non linéaires.....	5
1.4 Les systèmes à retard.....	5
1.5 Types de retard.....	6
1.5.1 Retards constants .....	6
1.5.2 Retards variables majorés .....	6
1.6 Problèmes systèmes avec le retard.....	7
1.7 Modèle de Takagi-Sugeno.....	8
1.8 Obtention des modèles de type Takagi-Sugeno.....	9
1.8.1 Par identification.....	9
1.8.2 Par linéarisation.....	9
1.8.3 Approche par secteur non linéaire.....	10
1.9 Modèle de Takagi-Sugeno avec retard.....	12
1.10 Exemple.....	12
1.11 Conclusion.....	13
<b>Chapitre 2 : Stabilité et stabilisation de modèle de Takagi-sugeno avec retard</b> .....	14
2.1 Introduction .....	15
2.2 Notions fondamentales de la stabilité.....	15
2.3 Stabilité au sens de Lyapunov.....	16
2.4 Fonction quadratique de Lyapunov.....	16
2.5 Problèmes classiques d'inégalité matricielle linéaire (LMI).....	17

## Table des matières

---

2.6 Complément de Schur.....	17
2.7 Stabilité des modèles T-S.....	18
2.8 Stabilisation des modèles T-S.....	19
2.8.1 Lois de commande PDC.....	19
2.9 Stabilité et stabilisation des modèles T-S avec retard.....	20
2.9.1 L'approche de Lyapunov-Krasovskii.....	20
2.9.2 Stabilité des modèles T-S avec retard.....	21
2.9.3 Stabilisation des modèles T-S avec retard.....	22
2.10 Application numérique.....	24
2.11 Conclusion.....	27
<b>Chapitre 3 : Modèle de Takagi-sugeno avec retard en présence de saturation d'actionneur.....</b>	<b>28</b>
3.1 Introduction.....	29
3.2 Problème de saturation.....	29
3.3 Saturation d'actionneur.....	30
3.3.1 Définition de la saturation.....	30
3.3.2 Analyse de stabilité des modèles T-S avec saturations d'actionneurs.....	32
3.3.3 La commande PDC saturante.....	32
3.3.4 Stabilisation de modèle de T-S avec retard en présence de saturation.....	34
3.4 Application numérique.....	36
3.5 Conclusion.....	39
<b>Conclusion général.....</b>	<b>40</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>41</b>

## Introduction générale

Un système dynamique est un ensemble d'objets ou de phénomènes liés entre eux et isolés artificiellement du monde extérieur. Sa modélisation vise à établir les relations qui lient les variables caractéristiques de ce processus entre elles et à représenter rigoureusement son comportement dans un domaine de fonctionnement donné. Elle nécessite, dans cet objectif, un ensemble de techniques permettant de disposer d'une représentation mathématique du système étudié. Dans le même sens, on peut dire que la modélisation théorique exige une connaissance précise des phénomènes intervenant dans le système et une aptitude à les représenter par des équations mathématiques.

Le grand problème d'un mathématicien est de représenter les systèmes physiques réels avec une précision par un modèle de structure simple. Le dilemme réside alors entre la fidélité du modèle vis-à-vis du processus réel et l'adéquation de celui-ci à une forme mathématiquement exploitable. Le modèle de Takagi-Sugeno (T-S) a suscité beaucoup d'intérêt depuis quelques années [Takagi et Sugeno 1985, Boyd *et al.* 1994, Wong *et al.* 1996, Tanaka *et al.* 1998a, Tanaka *et al.* 1998b, Chadli 2002, Cao et Lin 2003, Guerra et Vermeiren 2004, Fang *et al.* 2006, Li *et al.* 2008, Chadli 2006, Kim et Park 2008, Chadli *et al.* 2009]. Ce modèle fournit une représentation d'un système non linéaire décrit par un ensemble de modèles linéaires ou affines [Chadli 2002]. Les modèles T-S peuvent être obtenus soit par identification à partir de données sur les entrées et les sorties [Sugeno et Kang 1988], ou par linéarisation autour de différents points de fonctionnement [Murray et Johansen 1997], ou soit par transformation directe d'un modèle affine en l'état [Wong *et al.* 1996].

L'étude de la stabilité est une phase très importante dans l'analyse du comportement dynamique d'un système. De nombreux travaux, concernant la stabilité et la stabilisation du modèle T-S par les fonctions de Lyapunov ont été publiés [Boyd *et al.* 1994, Tanaka *et al.* 1998a, Tanaka *et al.* 1998b, Kim et lee 2000, Chadli 2003, Fang *et al.* 2006, Leonardo *et al.* 2009]. La plupart de ces travaux ont fait appel aux fonctions de Lyapunov quadratiques [Tanaka *et al.* 1998a, Tanaka *et al.* 1998b, Kim et lee 2000, Chadli 2002, Fang *et al.* 2006].

De point de vue pur pratique, plus particulièrement en science de l'ingénieur, on constate que les phénomènes de retard apparaissent naturellement dans les processus physiques. Et même si un parmi eux ne contient pas de retards intrinsèques, bien souvent ils apparaissent dans la boucle de commande. Parmi les principales sources induisant des retards, on cite les temps de réactions des capteurs ou des actionneurs, les temps de transmissions des informations, les temps de transferts des matières ou encore les temps de mesures. Alors dans

le but de se rapprocher du processus réel, une meilleure modélisation consiste à concevoir "les systèmes à retard" où interviennent des équations différentielles dont l'évolution, contrairement aux systèmes ordinaires, dépend non seulement de la valeur courante de leurs variables d'état à l'instant présent 't', mais aussi d'une partie de leurs valeurs passées.

D'autre part, la prise en compte des limitations de fonctionnement des actionneurs lors de la conception de lois de commande suscite l'intérêt de nombreux automaticiens. L'intérêt porté à ce type de problème est motivé par les conséquences indésirables de la présence de saturation sur les performances du système. La saturation d'actionneur peut dégrader les performances du système en boucle fermée et parfois déstabilise un système bouclé stable. Afin d'assurer la stabilisation de modèle de T-S avec retard en présence de saturation, on réalise la synthèse d'une loi de commande adéquate. Plusieurs lois de commande ont été proposées dans la littérature. Les plus répandues se basent sur des lois de commande de type compensation parallèle distribuée (PDC, *Parallel Distributed Compensation*) [Wang et al., 1996][Tanaka et al., 1998]. Cette dernière correspond à un retour d'état non linéaire qui prend en compte les mêmes fonctions d'activation des modèles de T-S.

Dans ce mémoire, nous exposons les conditions de la stabilité et de stabilisation des modèles de T-S avec retard en présence de saturation d'actionneur. L'étude de la stabilité et stabilisation de ces types de modèles fait appel, dans la grande majorité des cas, à la méthode de Lyapunov-Krasovskii. Celle-ci permettant écrire facilement des conditions sous la forme de contraintes LMI.

Ce travail se décompose en trois chapitres organisés comme suite :

Dans le premier chapitre, nous exposons le problème de retard. Par la suite, nous présentons les modèles de T-S avec retard.

Le deuxième chapitre est dédié à la stabilité et la stabilisation des modèles de T-S avec retard. Dans ce cas, des conditions de stabilité et stabilisation se basant sur la méthode de Lyapunov-Krasovskii et la formulation LMI sont issues.

Le troisième chapitre est consacré à la stabilité et stabilisation des modèles de T-S avec retard en présence de saturation d'actionneur via la commande PDC.



## *Chapitre 1*

### *Modèle de Takagi-Sugeno avec retard*

#### **Sommaire**

1.1 Introduction.....	4
1.2 Systèmes linéaires.....	4
1.3 Systèmes non linéaires.....	5
1.4 Systèmes à retard.....	5
1.5 Types de retard.....	6
1.5.1 Retards constants .....	6
1.5.2 Retards variables majorés .....	6
1.6 Problèmes systèmes avec le retard.....	7
1.7 Modèle de Takagi-Sugeno.....	8
1.8 Obtention des modèles de type Takagi-Sugeno.....	9
1.8.1 Par identification.....	9
1.8.2 Par linéarisation.....	9
1.8.3 Approche par secteur non linéaire.....	10
1.9 Modèle de Takagi-Sugeno avec retard.....	12
1.10 Exemple.....	12
1.11 Conclusion.....	13

## 1.1 Introduction

Les sciences de l'ingénieur font largement appel aux modèles non linéaires pour décrire les comportements dynamiques des systèmes physiques réels. Si les modèles non linéaires sont en mesure de décrire correctement les comportements non linéaires d'un système, ils peuvent néanmoins s'avérer, en fonction de leur complexité mathématique, difficilement exploitables dans un contexte de synthèse d'une loi de commande. Une hypothèse contraignante, mais largement utilisée, consiste à supposer que le système évolue autour d'un point de fonctionnement. Il est alors possible d'envisager une étape de linéarisation du modèle non linéaire afin de réduire sa complexité mathématique et permettre l'emploi des outils d'analyse de systèmes linéaires. En pratique, cependant, cette hypothèse de linéarité n'est pas toujours respectée et par conséquent le modèle linéarisé n'est pas complètement représentatif du comportement global du système. Une amélioration consiste, lorsque le point de fonctionnement change, à réactualiser le modèle linéarisé.

Dans ce qui suit, on préfère rechercher un modèle apte à donner une bonne caractérisation globale du comportement dynamique du procédé, tout en permettant au concepteur une utilisation aisée, par exemple au moyen de techniques d'analyse de systèmes linéaires.

Afin de répondre à ces attentes, de nouvelles techniques de modélisation ont vu le jour. Nous proposons, dans ce chapitre, une procédure d'identification des systèmes non linéaires avec retard par un modèle de Takagi-Sugeno (T-S).

Plus généralement, les modèles de Takagi-Sugeno (T-S) à retards sont des systèmes dont la dynamique ne dépend plus uniquement de la valeur du vecteur  $x$  exprimée à l'instant présent  $t$ , mais aussi des valeurs passées de  $x(t)$ . Les équations différentielles "décrivant" l'évolution du système dépendent de  $x(t-\tau)$ . Dans ce cas, l'état à l'instant  $t$  est décrit par une fonction définie sur l'intervalle  $[-\tau, 0]$ .

## 1.2 Systèmes linéaires

Commençons par rappeler la définition d'un système linéaire. Au sens des mathématiques, un système est linéaire si on peut y appliquer le principe de superposition. D'un point de vue physique, la définition, plus restrictive, est la suivante.

**Définition 1.1** Un système est linéaire, s'il est décrit par des équations différentielles linéaires d'ordre fini à coefficients constants.

Lorsque cette définition s'applique, on peut associer au système, à l'aide de la transformée de Laplace, En automatique, on complète fréquemment la définition de linéarité avec la transmittance associée au retard pur, c'est-à-dire un terme de la forme  $\exp(-\tau_p)$  où  $\tau$  est une constante de temps.

Les méthodes d'étude des systèmes linéaires sont très puissantes en raison des outils disponibles (algèbre linéaire, équations différentielles et systèmes différentiels linéaires, etc.).

Malgré tout, se cantonner aux systèmes linéaires présente plusieurs limitations :

- Aucun système physique n'est complètement linéaire. Les méthodes linéaires ne sont donc applicables que dans un domaine de fonctionnement restreint.
- Certains systèmes sont impossibles à modéliser à des systèmes linéaires.
- Certains phénomènes ne peuvent pas être décrits par des modèles et méthodes linéaires.

### 1.3 Systèmes non linéaires

Un système non linéaire est un système qui n'est pas linéaire, c'est-à-dire (au sens physique) qui ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Cette définition, ou plutôt cette non-définition explique la complexité et la diversité des systèmes non linéaires et des méthodes qui s'y appliquent. Il n'y a pas une théorie générale pour ces systèmes, mais plusieurs méthodes adaptées à certaines classes de systèmes non linéaires.

Les lois dynamiques définissant un tel système doivent être les plus complètes possibles et représenter tous les modes de fonctionnement et toutes les interactions entre les différentes grandeurs. Afin de pallier la complexité de cette tâche, la tendance a été d'utiliser des modèles de Takagi-Sugeno, qui nous intéresse dans ce travail, ce type de modèle flou s'avère utile pour la représentation des systèmes non linéaires tels que les systèmes électriques, chaotiques, etc.

### 1.4 Systèmes à retard

De nombreux systèmes dynamiques pratiques présentent des retards, mais qui sont souvent négligés par simplicité. Cependant, la présence des retards peut induire des mauvaises performances et des instabilités dans les systèmes de commande, il est donc important de les prendre en compte.

Les systèmes à retard forment une classe de systèmes de dimension infinie largement utilisée pour la modélisation et l'analyse de phénomènes de transport et propagation (de matière, d'énergie ou d'information). Ils apparaissent naturellement dans la modélisation de processus

rencontrés en physique, mécanique, économie, chimie, biologie, dynamique des populations, écologie, physiologie, etc.

Par ailleurs, même si le procédé lui-même ne contient pas de retard, le système en boucle fermée peut engendrer des retards non négligeables (avec les capteurs, les actionneurs et le temps de calcul).

On physique le retard est un terme de la forme  $\exp(-\tau_p)$ , où  $\tau$  est une constante de temps.

Généralement les systèmes avec retard représenté par des équations de la forme :

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad \text{ou } \tau > 0 \quad (1.1)$$

$\tau$  est une constante de temps représente le retard

## 1.5 Types de retard

### 1.5.1 Retards constants :

Les exemples de retard constant sont peut-être les plus faciles à trouver. La dynamite, inventée par ALFRED NOBEL, dispose d'un dispositif pour retarder le déclenchement de son explosion ; son utilisation serait difficile sans cet artifice... Cet exemple nous semble convenir parfaitement à notre entrée en matière ; car contrairement à ce que l'on pourrait penser de prime abord, un retard peut s'avérer utile ! Il peut même parfois être absolument nécessaire comme dans le cas de la dynamite.

$$\tau(t) = cte \quad (1.2)$$

### 1.5.2 Retards variables majorés :

Comme la constance du retard est une hypothèse rarement vérifiée dans la réalité [Lopez et al. 2006], le cas des retards variable sont aussi l'objet de nombreuses recherches. On définit les retards majorés pour lesquels il existe un réel connu  $\tau_2 > 0$  [J.Hale et al. 1997], tel que :

$$0 \leq \tau(t) \leq \tau_2 \quad (1.3)$$

## 1.6 Problèmes systèmes avec le retard

Au cours de ces dernières années, on a pu constater un intérêt croissant des chercheurs pour l'étude des systèmes à retard ; ceci s'explique par le fait que ce sujet concerne aussi bien la recherche théorique qu'appliquée. En effet, d'une part, le problème du retard est un problème théorique très important dans la mesure où les systèmes à retard font partie des systèmes de dimension infinie sur lesquels beaucoup de travaux restent ouverts ; de plus, la prise en compte d'un retard dans la description dynamique d'un système peut entraîner des comportements nécessitant une approche totalement différente dans l'étude et l'analyse des systèmes physiques. D'autre part, le problème du retard a un aspect appliqué dans la mesure où les systèmes physiques et les boucles de commande présentent des retards de façon intrinsèque. La présence du retard peut être la cause d'instabilité des systèmes et de perte de performances (la rapidité, la précision....etc).

### Exemple

Soit le système :

$$\dot{x}(t) = -x(t - \tau) \quad (1.4)$$

La réponse de ce système est :

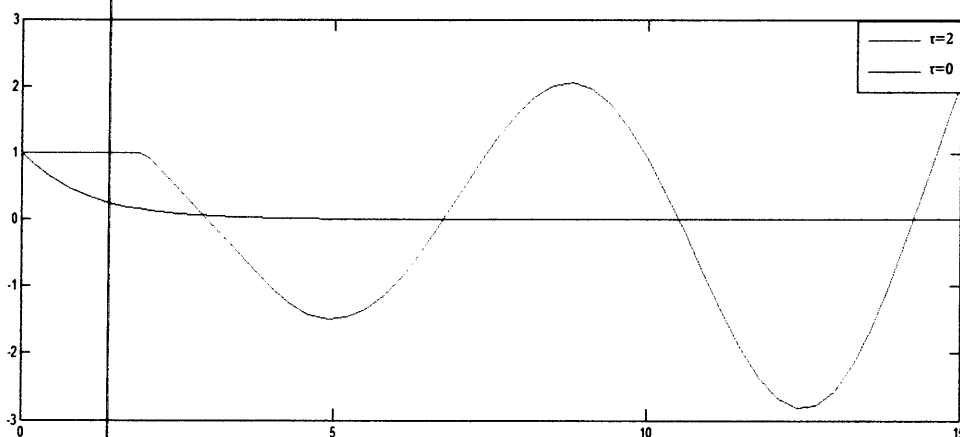


Figure 1.1 Réponse du système sans et avec retard

La figure 1.1 illustre l'influence de retard sur la stabilité, c'est-à-dire le système présente une instabilité, un temps de réponse trop lent avec un retard important.

## 1.7 Modèle de Takagi-Sugeno

Les systèmes industriels étant de plus en plus complexes, il est très souvent difficile (voir impossible) d'en avoir un modèle mathématique afin de mettre en œuvre sa commande.

En général, pour commander un système, on s'appuie sur un modèle obtenu à partir de connaissances a priori comme les lois physiques. Ces modèles peuvent être construits comme un ensemble d'équations différentielles linéaires ou non linéaires reliant les entrées, les états et les sorties. Ces équations différentielles sont parfois très difficiles à trouver, une solution à ce problème peut être envisagée à partir d'une représentation du comportement du procédé non linéaire par un modèle de Takagi-Sugeno où les relations entre les entrées, les sorties et les états sont exprimées par des règles Si-Alors.

Le modèle dynamique de Takagi-Sugeno en temps continue établi une relation entre les valeurs des entrées et sorties de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\varepsilon(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r (C_i x(t)) \end{cases} \quad (1.5)$$

Où

$x(t) = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$ ,  $u(t) = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$  et  $y(t) \in R^p$  sont respectivement le vecteur d'état et le vecteur de commande et le vecteur de sortie,  $A_i$  et  $B_i$  sont deux matrices de dimensions appropriées et  $r$  le nombre de règles.

$\mu_i$  est la fonction d'activation correspondant au  $i^{\text{ème}}$  modèle local et qui dépend de la variable de décision  $\varepsilon$  et vérifie la propriété de convexité:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r \mu_i = 1 \\ 0 \leq \mu_i \leq 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

## 1.8 Obtention des modèles de type Takagi-Sugeno

Dans la littérature, il existe trois approches permettant le passage d'un modèle non linéaire affine en la commande à un modèle T-S. Ces approches visent à représenter les systèmes non linéaires complexes sur un large domaine de fonctionnement. Ces différentes approches sont :

### 1.8.1 Par identification

Les mesures acquises sur les entrées et les sorties du système permettent l'identification des paramètres des modèles locaux autour des différents points de fonctionnement préalablement définis. Dans ce cas, le problème d'identification du modèle non linéaire se réduit à l'identification des modèles locaux (sous-modèles) LTI. Notons que, cette méthode est souvent utilisée dans le cas des systèmes dotés d'une dynamique difficile à décrire à l'aide d'un modèle analytique [Chadli 2002, Bouarar. 2009].

### 1.8.2 Par linéarisation

Le principe de cette méthode consiste à linéariser le système non linéaire autour d'un ensemble fini de points de fonctionnement judicieusement choisis, conduisant à un nombre défini de modèles LTI. L'obtention d'un représentant T-S dans ce cas, est réalisé par l'interconnexion de ces modèles LTI à l'aide des fonctions d'appartenance non linéaires judicieusement choisies (gaussiennes, triangulaires, trapézoïdales, etc.) [Chadli 2002]. Considérons le système non linéaire suivant

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1.7)$$

avec  $f(\cdot) \in C^1$ . La linéarisation du système (1.7) autour d'un point de fonctionnement arbitraire  $(x_i, u_i) \in R^p \times R^m$  est :

$$\dot{x}(t) = A_i(x(t) - x_i) + B_i(u(t) - u_i) + f(x_i, u_i) \quad (1.8)$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + d_i$$

avec

$$A_i = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, \quad B_i = \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, \quad d_i = f(x_i, u_i) - A_i x_i - B_i u_i \quad (1.9)$$

En supposant que les modèles locaux sont issus d'une linéarisation autour de  $n$  points de fonctionnement  $(x_i, u_i)$ , la formulation T-S aboutit à :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\varepsilon(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + d_i) \quad (1.10)$$

où  $\mu_i(\varepsilon(t))$ ,  $i \in I$ , sont les fonctions d'activations et  $\varepsilon(t)$  est le vecteur des variables de décision dépendant des variables d'état mesurables et éventuellement de la commande  $u(t)$  [Chadli 2002].

### 1.8.3 Approche par secteur non linéaire

Cette méthode garantit la construction d'un modèle T-S représentant exactement un modèle non linéaire sur un espace compact des variables d'état. Notons que l'approche par secteur non linéaire permet d'associer une infinité de modèles T-S pour un système non linéaire. Une approche systématique repose sur le lemme suivant:

**Lemme 1.1** [Morère 2001] :

Soit  $f(x(t)) : R \rightarrow R$  une fonction bornée, il existe toujours deux fonctions  $w_1(x(t))$  et  $w_2(x(t))$  ainsi que, deux scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$f(x(t)) = \alpha \times w_1(x(t)) + \beta \times w_2(x(t)) \quad (1.11)$$

avec :

$$w_1(x(t)) + w_2(x(t)) = 1, \quad w_1(x(t)) \geq 0 \quad \text{et} \quad w_2(x(t)) \geq 0 \quad (1.12)$$

#### Preuve

Sous l'hypothèse que la fonction  $f(x(t))$  est bornée telle que  $\alpha \leq f(x(t)) \leq \beta$ , il est possible d'écrire :

$$f(x(t)) = \alpha \times w_1(x(t)) + \beta \times w_2(x(t)) \quad (1.13)$$



avec

$$\alpha = \max(f(x(t))), \quad \beta = \min(f(x(t))), \quad w_1(x(t)) = \frac{f(x(t)) - \beta}{\alpha - \beta},$$

$$w_2(x(t)) = \frac{\alpha - f(x(t))}{\alpha - \beta}$$

**Exemple :** Considérons le modèle non linéaire au temps continu

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x(t))x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.14)$$

avec

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad A(x(t)) = \begin{bmatrix} -1 & \sin(x_2(t)) \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 2]$$

La méthode de transformation proposée est basée sur la bornitude des termes continus non linéaires.

$f(x_2(t)) = \sin(x_2(t))$  représente le terme non linéaire borné pour tout  $x(t)$  par

$$-1 \leq f(x_2(t)) \leq 1$$

d'après le lemme 1.1, on peut écrire :

$$f(x_2(t)) = \underbrace{(1)}_{\alpha} \times w_1(x_2(t)) + \underbrace{(-1)}_{\beta} \times w_2(x_2(t)) \quad (1.15)$$

où

$$w_1(x_2(t)) + w_2(x_2(t)) = 1$$

Ce qui permet d'obtenir

$$w_1(x_2(t)) = \frac{1 + \sin(x_2(t))}{2} \quad (1.16)$$

$$w_2(x_2(t)) = \frac{1 - \sin(x_2(t))}{2} \quad (1.17)$$

Par conséquent

$$A(x(t)) = w_1(x_2(t))A_1 + w_2(x_2(t))A_2 \quad (1.18)$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ +2 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ +2 & -3 \end{bmatrix}$$

En effet, la représentation équivalente au modèle de T-S, est

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\varepsilon(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (1.19)$$

### 1.9 Modèle de Takagi-Sugeno avec retard

Dans de nombreuses applications, un traitement ou une transmission d'information est nécessaire pour prendre des décisions, déterminer la localisation ou percevoir l'environnement. Ces traitements peuvent introduire des retards plus ou moins importants.

Un modèle de type Takagi-Sugeno qui n'a pas de retard intrinsèque peut en avoir on boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\varepsilon(t))(A_{1i}x(t) + A_{2i}x(t-\tau) + B_{1i}u(t) + B_{2i}u(t-\tau)) \quad (1.20)$$

Où  $\tau$  c'est le retard

Ce retard est une propriété naturelle des processus dynamiques. Pour cette raison, des efforts considérables sont appliqués pour des différents aspects de systèmes linéaires avec retard. Cependant, il est bien connu qu'un modèle linéaire n'est valide qu'autour d'un point de fonctionnement et ces résultats ne garantissent qu'une stabilité locale des systèmes non linéaires.

### 1.10 Exemple

Soit le système non linéaire donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^2(t) + x_2(t) + x_3(t - \tau) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - 3x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (1.21)$$

$x_1^2(t)$  représente le terme non linéaire borné pour tout  $x(t)$  par

$$x_{1\min} \leq x_1(t) \leq x_{1\max} \quad (1.22)$$

Ce qui permet d'obtenir

$$\mu_1(x_1(t)) = \frac{x_{1\max} - x_1}{x_{1\max} - x_{1\min}}, \quad (1.23)$$

$$\mu_2(x_1(t)) = \frac{x_1 - x_{1\max}}{x_{1\max} - x_{1\min}} \quad (1.24)$$

Le modèle de T-S équivalente au modèle non linéaire (1.21), peut être écrit comme suit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(x(t)) (A_{1i}x(t) + A_{2i}x(t - \tau) + B_{1i}u(t)) \quad (1.25)$$

avec

$$A_{11} = \begin{bmatrix} x_{1\max}(t) & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} x_{1\min}(t) & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$B_{11} = B_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 1.11 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème de retard qui apparaît dans la majeure partie des systèmes de commande, comme on a vu, leur présence peut conduire à la dégradation des performances du système voire même à son instabilité.

Le problème de la modélisation des systèmes non linéaire avec retard a été traité par une représentation polytopique dite modèle de T-S.

**Chapitre 2**  
**Stabilité et stabilisation de modèle**  
**de Takagi-Sugeno avec retard**

**Sommaire**

2.1 Introduction .....	15
2.2 Notions fondamentales de la stabilité.....	15
2.3 Stabilité au sens de Lyapunov.....	16
2.4 Fonction quadratique de Lyapunov.....	16
2.5 Problèmes classiques d'inégalité matricielle linéaire (LMI).....	17
2.6 Complément de Schur.....	17
2.7 Stabilité des modèles T-S.....	18
2.8 Stabilisation des modèles T-S.....	19
2.8.1 Lois de commande PDC.....	19
2.9 Stabilité et stabilisation des modèles T-S avec retard.....	20
2.9.1 Approche de Lyapunov-Krasovskii.....	20
2.9.2 Stabilité des modèles T-S avec retard.....	21
2.9.3 Stabilisation des modèles T-S avec retard.....	22
2.10 Application numérique.....	24
2.11 Conclusion.....	27

## 2.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de présenter certains travaux sur la modélisation, la stabilité, et la stabilisation des modèles de type (T-S) avec ou sans retard. Nous présentons d'abord, les notions de stabilité et de stabilisation de ce type de modèles. Ainsi, nous avons exposé des conditions suffisantes de stabilité des modèles T-S avec ou sans retard basées sur des fonctions quadratiques de Lyapunov et Lyapunov-Krasovskii en terme LMI. Ces conditions LMI peuvent être mises en œuvre et résolues efficacement par des outils numériques. Les conditions de stabilisation du modèle T-S avec ou sans retard sont souvent obtenues en se basant sur la loi de commande PDC (Parallel Distributed Compensation).

## 2.2 Notions fondamentales de la stabilité

On considère un système non linéaire de la forme suivante :

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \quad (2.1)$$

avec  $f: \mathcal{R} \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  est une fonction continue en  $t$ . Le paragraphe suivant est dédié à la définition de quelques concepts fondamentaux de stabilité.

**Définition 2.1** (Point d'équilibre). On dit que  $x_0$  est un point d'équilibre de système (2.1), si

$$f(x_0) = 0, \quad \forall t > 0 \quad (2.2)$$

**Définition 2.2** (Attractivité). On dit que l'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre attractif, s'il existe un voisinage de l'origine  $\mathcal{E}(0)$ , tel que :

$$\forall x_0 \in \mathcal{E}(0), \lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0 \quad (2.3)$$

un point d'équilibre globalement attractif si :

$$\forall x_0 \in \mathcal{R}^n, \lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0 \quad (2.4)$$

**Définition 2.3** (Stabilité asymptotique). On dit que l'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable, s'il est stable et attractif.

### 2.3 Stabilité au sens de Lyapunov

Le principe de stabilité selon Lyapunov repose sur le comportement du système dynamique du point de vue de son énergie totale. Cette énergie est représentée généralement par une fonction  $V(x(t))$  de l'état  $x$  du système. Le signe de cette fonction et sa dérivée temporelle dans un certain voisinage du point d'équilibre donne une information sur la stabilité du système. Le principal résultat de la théorie de stabilité de Lyapunov montre que pour un système autonome à temps continu  $\dot{x} = f(x)$ , l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable, s'il existe une fonction positive vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} i) V(x(t)) > 0, \forall x \neq 0 \\ ii) \dot{V}(x(t)) < 0, \forall x(t) \in R^n \text{ et } x \neq 0 \\ iii) V(0) = 0 \text{ et } \|x\| \rightarrow \infty, V(x) \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.5)$$

### 2.4 Fonction quadratique de Lyapunov

Dans le cas général, il n'existe pas de méthode pour trouver les fonctions candidates de Lyapunov. Des lors, la théorie de Lyapunov conduit à des conditions suffisantes de stabilité dont le pessimisme dépend de la forme particulière imposée à la fonction  $V(x(t))$  et de la structure du système. Cependant, il existe des familles de fonctions de Lyapunov souvent utilisées et dont l'adoption dépend de la nature du système à étudier, le choix le plus classique à utiliser une forme quadratique :

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t), \quad P > 0 \quad (2.6)$$

L'étude de la stabilité à l'aide de ce type de fonction a constitué la base de très nombreux travaux jusqu'à maintenant (par exemple : [Gar,1997][Boy,1994]). Dans le cas des systèmes incertains, c'est pratiquement la seule méthode possible. Ce type de fonction, adoptée pour étudier la stabilité des systèmes linéaires.

## 2.5 Problèmes classiques d'inégalité matricielle linéaire (LMI)

Depuis quelques années, de nombreux travaux ayant pour principal but de réduire une grande variété de problèmes de synthèse ou d'analyse à des problèmes d'optimisation convexe impliquant des LMI ont vu le jour. Parallèlement, des méthodes efficaces de résolution des problèmes d'optimisation convexe ont été développées. Parmi les raisons qui ont fait de cette approche une des plus appliquées dans le domaine de la commande, on peut citer : l'existence de méthodes de résolution numérique efficaces pour résoudre un problème LMI. Il n'existe pas une solution local, la solution obtenue correspond à une solution global.

**Définition 2.4** (ensemble convexe) Soit un ensemble  $E \subset R^n$ ,  $E$  est un ensemble convexe si et seulement si

$$\forall \lambda \in [0,1] \subset R, \forall (x_1, x_2) \in E^2, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in E$$

**Définition 2.5** (fonction convexe) Soit une fonction  $f \subset R^n \rightarrow R$ , avec  $E$  est un ensemble convexe, alors  $f$  est convexe si et seulement si

$$\forall \lambda \in [0,1] \subset R, \forall (x_1, x_2) \in E^2, f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

**Définition 2.6** (LMI) étant donnée une famille de matrices symétriques  $P_0$  et  $P_i, i \in I_n$  de  $R^{p \times p}$  et un vecteur  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$  une LMI stricte en  $x_i, i \in I_n$  s'écrit sous la forme :

$$F(x) = P_0 + \sum_{i=1}^n x_i P_i \succ 0 \quad (2.7)$$

Remarquons que l'ensemble  $E$  défini par  $E = \{x \in R^n : F(x) \succ 0\}$  est convexe, ce qui nous amène à considérer une contrainte LMI comme une contrainte convexe.

## 2.6 Complément de Schur

Les théorèmes issus des techniques de Lyapunov conduisent généralement à des contraintes non linéaires. Les difficultés rencontrées proviennent de la transformation de ces contraintes non linéaires en LMIs. On cite alors la formulation basée sur le complément de Schur comme étant la méthode la plus simple et la plus utilisée.

**Théorème 2.1** soient trois matrices  $R(x) = R(x)^T$ ,  $Q(x) = Q(x)^T$  et  $S(x)$  affines par rapport à la variable  $x$ . Les LMI suivantes sont équivalentes :

$$i) \begin{pmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{pmatrix} \succ 0 \quad (2.8)$$

$$ii) R(x) \succ 0, Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T \succ 0 \quad (2.9)$$

## 2.7 Stabilité des modèles T-S

L'étude de la stabilité d'un modèle de T-S permet d'établir si sa dynamique est stable lorsqu'il n'est soumis à aucune excitation externe ( $u(t) = 0$ ). Dans cette section, afin de permettre au lecteur d'appréhender les résultats proposés dans la suite de ce manuscrit, on présente les résultats significatifs, à l'origine des nombreux travaux sur la stabilité des modèles T-S. Ceux-ci sont donnés sous forme d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI). Le résultat suivant traite de la stabilité des modèles T-S décrits en temps continu :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\varepsilon(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.10)$$

**Théorème 2.2** L'équilibre du modèle T-S est asymptotiquement stable, s'il existe une matrice  $P = P^T \succ 0$ , telle que les LMI suivantes sont vérifiées pour  $i = 1, \dots, r$  :

$$A_i^T P + P A_i \prec 0, \quad \forall i \in I_r \quad (2.11)$$

**Preuve :**

En considérant la fonction candidate quadratique de Lyapunov suivante :

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t) \quad (2.12)$$

la dérivée de la fonction de Lyapunov quadratique (2.12) est

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) \quad (2.13)$$



C'est-à-dire si :

$$\dot{V}(x(t)) = x^T(t) \left[ \sum_{i=1}^r \mu_i(\varepsilon(t)) (A_i^T P + P A_i) \right] x(t) \quad (2.14)$$

Donc

$$\text{Si } \left[ \sum_{i=1}^r \mu_i(\varepsilon(t)) (A_i^T P + P A_i) \right] < 0 \text{ alors } \dot{V}(x(t)) < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.15)$$

**Fin de preuve.**

## 2.8 Stabilisation des modèles T-S

Parmi les premières lois de commande envisageables à stabiliser les modèles T-S est la de commande par retour d'état linéaire  $u(t) = K_i x(t)$ . Afin de prendre en compte les non linéarités des modèles T-S, cette loi a vite été complétée par une loi de commande, dite PDC (Parallel Distributed Compensation) [Wong et al. 1996].

### 2.8.1 Lois de commande PDC

La loi de commande PDC a l'avantage de considérer les mêmes prémisses que les règles contenues dans le modèle T-S à stabiliser. De ce fait, cela revient à considérer que, à chaque modèle local correspond une commande par retour d'état linéaire que l'on peut interpoler par les mêmes fonctions d'activation  $\mu_i(\varepsilon(t))$  que celles du modèle T-S. Notons que dans ce cas, lorsque le modèle obtenu est exact, alors cette loi de commande est valable sur tout l'espace compact des variables d'état. Ainsi, cette loi de commande est donnée par :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \mu_i(\varepsilon(t)) K_i x(t) \quad (2.16)$$

Dans cette loi, la conception du contrôleur revient à déterminer la matrice des gains de retour d'état  $K_i \in R^{m \times n}$ .

Les modèles T-S en boucle fermée avec la loi de commande PDC sont donnés par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\varepsilon(t)) \mu_j(\varepsilon(t)) G_{ij} x(t) \quad (2.17)$$

avec

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j \quad (2.18)$$

Ou encore sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i^2(\varepsilon(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i=1}^r \mu_i(\varepsilon(t)) \mu_j(\varepsilon(t)) \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x(t) \quad (2.19)$$

Les conditions de stabilisation du modèle T-S en boucle fermée (2.19) sont données par [Tanaka et al. 1998] comme suit :

**Théorème 2.3** L'équilibre du modèle T-S (2.19) est asymptotiquement stable, s'il existe des matrices  $P = P^T > 0$  et  $K_i$  telles que :

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0, \quad \forall i \in I_r \quad (2.20)$$

$$\left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \leq 0, \quad i < j \quad (2.21)$$

**Preuve :** ce théorème découle directement de l'application du théorème (2.2) sur le système (2.19)

## 2.9 Stabilité et stabilisation des modèles T-S avec retard

Dans le cas des modèles de T-S avec retard, La théorie de Lyapunov- Krasovskii ou est principalement utilisée. La difficulté majeure (comme dans le cas non retardé) réside dans la construction des fonctions de Lyapunov.

### 2.9.1 L'approche de Lyapunov-Krasovskii

Cette technique est une extension des fonctions quadratiques de Lyapunov, cette fonction est appelée candidate de Lyapunov-Krasovskii et généralisent la deuxième méthode de Lyapunov aux systèmes de type retardé :

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t) + \frac{1}{1-\beta} \int_{t-\tau}^t x^T(\alpha) S(\alpha) d\alpha \quad (2.22)$$

L'approche de Lyapunov-Krasovskii est très souvent utilisée pour analyser la stabilité d'un modèle de T-S retardé (1.20) (voir chapitre 1).

### 2.9.2 Stabilité des modèles T-S avec retard

Le théorème suivant donne une formulation LMI du problème de stabilité des modèles de T-S avec retard (1.20) (voir chapitre 1).

**Théorème 2.4** L'équilibre du modèle T-S avec retard (1.20) (voir chapitre 1), est asymptotiquement stable, s'il existe deux matrices  $P \succ 0, S \succ 0$  telles que :

$$A_{1i}^T P + P A_{1i} + P A_{2i} S^{-1} A_{2i}^T + \frac{1}{1+\beta} S \prec 0 \quad i=1, \dots, r \quad (2.23)$$

#### Preuve

Considérons le candidate de Lyapunov-Krasovskii (2.22) et  $P \succ 0, S \succ 0$  doit être déterminé, dans ce qui suite, nous exposons les conditions LMI de stabilisation du modèle T-S avec retard.

Le dérivé de la candidate de Lyapunov-krasovskii (2.22), nous donne :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\varepsilon(t)) \left[ x^T(t) (A_{1i}^T P + P A_{1i}) x(t) + 2x^T(t) P A_{2i} x(t-\tau) \right] \\ &\quad + \frac{1}{1-\beta} x^T(t) S x(t) - \frac{1-\tau}{1-\beta} x^T(t-\tau) S x(t-\tau) \\ &\leq \sum_{i=1}^r \mu_i(\varepsilon(t)) \left[ x^T(t) (A_{1i}^T P + P A_{1i} + P A_{2i} S^{-1} A_{2i}^T P) x(t) + x^T(t-\tau) S x(t-\tau) \right] \\ &\quad + \frac{1}{1-\beta} x^T(t) S x(t) - x^T(t-\tau) S x(t-\tau) \end{aligned} \quad (2.24)$$

On a  $\sum_{i=1}^r \mu_i(\varepsilon(t)) = 1$

$$\dot{V}(x(t)) \leq \sum_{i=1}^r \mu_i(\varepsilon(t)) \left[ x^T(t) \left( A_{1i}^T P + P A_{1i} + P A_{2i} S^{-1} A_{2i}^T P + \frac{1}{1-\beta} S \right) x(t) \right] \quad (2.25)$$

Donc

$$\text{Si } \left( A_{1i}^T P + P A_{1i} + P A_{2i} S^{-1} A_{2i}^T P + \frac{1}{1-\beta} S \right) \prec 0 \text{ alors } \dot{V}(x(t)) \prec 0 \quad (2.26)$$

**Fin de preuve**

En utilisons le complément de Schur (Théorème 2.1). Linégalité (2.23) peut être écrites sous forme LMI suivante :

$$\begin{bmatrix} A_{1i}^T P + P A_{1i} + \frac{1}{1-\beta} S & P A_{2i} \\ A_{2i}^T & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (2.27)$$

Ou

$$\begin{bmatrix} X A_{1i}^T + A_{1i} X + \frac{1}{1-\beta} Q & A_{2i} X \\ X A_{2i}^T & -Q \end{bmatrix} < 0 \quad (2.28)$$

Avec  $X = P^{-1}$ ,  $Q = X S X$   $i = 1, \dots, r$

### 2.9.3 Stabilisation des modèles T-S avec retard

La conception d'une loi de commande PDC (2.16) stabilisante pour le model de T-S avec retard (1.20) (voire chapitre I) consiste à déterminer le gain par retour d'état du système en boucle fermet.

Le système en boucle fermet composé par (1.20) (voire chapitre I) et (2.16) est :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\varepsilon(t)) \mu_j(\varepsilon(t)) [(A_{1i} - B_i K_j) x(t) + A_{2i} x(t-\tau)] \\ &= \sum_{i=1}^r \mu_i^2(\varepsilon(t)) [G_{ii} x(t) + A_{2i} x(t-\tau)] \\ &\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\varepsilon(t)) \mu_j(\varepsilon(t)) [(G_{ij} + G_{ji}) x(t) + (A_{2i} + A_{2j}) x(t-\tau)], \quad i < j \end{aligned} \quad (2.29)$$

Avec  $G_{ij} = A_{1i} - B_i K_j$  (2.30)

**Théorème 2.5** L'équilibre du modèle T-S avec retard en boucle fermée est asymptotiquement stable s'il existe les matrices  $X > 0$ ,  $Q > 0$  et  $Y_i$  satisfaisant les LMIS suivant :

$$\begin{bmatrix} X A_{1i}^T + A_{1i} X - B_i Y_i - Y_i^T B_i^T + \frac{1}{1-\beta} Q & A_{2i} X \\ X A_{2i}^T & -Q \end{bmatrix} < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (2.31)$$

Où

$$\begin{bmatrix} \Delta_{ij} + \frac{2}{1-\beta} Q & (A_{2i} + A_{2j})X \\ X(A_{2i} + A_{2j})^T & -2Q \end{bmatrix} \leq 0 \quad i < j \quad (2.32)$$

$$\text{avec } \Delta_{ij} = XA_{1i}^T + A_{1i}X + XA_{1j}^T + A_{1j}X - B_i Y_j - Y_j^T B_i^T - B_j Y_i - Y_i^T B_j^T \quad (2.33)$$

### Preuve

La dérivée de la fonction de Lyapunov (2.22) associée au système (2.29) est :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r u_i(\varepsilon(t)) u_j(\varepsilon(t)) \left[ x^T(t) (G_{ij}^T P + P G_{ij}) x(t) + 2x^T(t) P A_{2i} x(t-\tau) \right] \\ &\quad + \frac{1}{1-\beta} x^T(t-\tau) S x(t-\tau) \\ &\leq \sum_{i=1}^r u_i^2(\varepsilon(t)) x^T(t) \Theta_{ii} x(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r u_i(\varepsilon(t)) u_j(\varepsilon(t)) x^T(t) \Theta_{ij} x(t) \quad i < j \quad (2.34) \end{aligned}$$

Où  $P = X^{-1} \succ 0$  et  $S = PQP$

avec

$$\begin{aligned} \Theta_{ii} &= G_{ii}^T P + P G_{ii} + P A_{2i} S^{-1} A_{2i}^T P \\ \Theta_{ij} &= (G_{ij} + G_{ji})^T P + P (G_{ij} + G_{ji}) + \frac{2}{1-\beta} S \\ &\quad + P (A_{2i} + A_{2j}) (2S)^{-1} (A_{2i} + A_{2j})^T P + \frac{1}{1-\beta} S, \quad i \neq j, \quad P = X^{-1} \succ 0 \text{ et } S = PQP \end{aligned}$$

**Fin de preuve**

## 2.10 Application numérique

Nous considérons, le système non linéaire a retard suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{-aq\bar{t}}{L} x_1(t) - \frac{(1-a)q\bar{t}}{L} x_1(t-\tau) + \frac{10q\bar{t}}{l} u(t) \\ \dot{x}_2 = \frac{aq\bar{t}}{L} x_1(t) + \frac{(1-a)q\bar{t}}{L} x_1(t-\tau) \\ \dot{x}_3 = t_0^{-1} q\bar{t} \sin \left[ x_2(t) + \frac{aq\bar{t}}{2L} x_1(t) + \frac{(1-a)q\bar{t}}{2L} x_1(t-\tau) \right] \end{cases} \quad (2.35)$$

avec

$$a=0.7, q=-1.0, \bar{t}=2.0, t_0=0.5, L=5.5, l=2.8, \beta=0.1, \tau=1, d=10t_0/\pi$$

alors, le modèle de T-S équivalente au modèle non linéaire a retard (2.35), est

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\varepsilon(t)) (A_{1i}x(t) + A_{2i}x(t-\tau) + B_{1i}u(t)) \quad (2.36)$$

avec

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -a \frac{q\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ a \frac{q\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ -a \frac{q^2\bar{t}^2}{Lt_0} & \frac{dq\bar{t}}{t_0} & 0 \end{bmatrix}; \quad A_{21} = \begin{bmatrix} -(1-a) \frac{q\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-a) \frac{q\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-a) \frac{q^2\bar{t}^2}{2Lt_0} & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} -a \frac{q\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ a \frac{q\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ -a \frac{dq^2\bar{t}^2}{2Lt_0} & \frac{dq\bar{t}}{t_0} & 0 \end{bmatrix}; \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -a \frac{q\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ a \frac{q\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ -a \frac{dq^2\bar{t}^2}{2Lt_0} & \frac{dq\bar{t}}{t_0} & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} \frac{10q\bar{t}}{lt_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

et

$$\mu_1 = \left( 1 - \frac{1}{1 + \exp(-3(\theta(t) - 0.5\pi))} \right) \times \left( \frac{1}{1 + \exp(-3(\theta(t) - 0.5\pi))} \right)$$

$$\mu_2 = 1 - \mu_1$$

avec 
$$\theta(t) = x_2(t) + \frac{aq\bar{t}}{2L} x_1(t) + \frac{(1-a)(q\bar{t})}{2L} x_1(t-\tau)$$

la résolution des conditions LMI (2.31) et (2.32), nous donne les résultats suivants:

$$X = \begin{bmatrix} 160.9848 & 36.0872 & -58.7081 \\ 36.872 & 11.4658 & 12.9549 \\ -58.7081 & 12.9549 & 325.2738 \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} 172.6573 & 17.3754 & -27.7067 \\ 17.3754 & 15.1788 & 4.4983 \\ -27.7067 & 4.4983 & 92.6209 \end{bmatrix};$$

$$K1 = [-1.7087 \quad 6.3097 \quad -0.5350]; \quad K2 = [-1.6770 \quad 6.1940 \quad -0.5181]$$

Les figures suivantes montrent les réponses du système non linéaire a retard représenté par le modèle de T-S avec retard en boucle fermée (1.20) (voir chapitre 1) avec la commande PDC pour les conditions initiales  $x(0) = [1 \quad 0.5 \quad -1]$ .

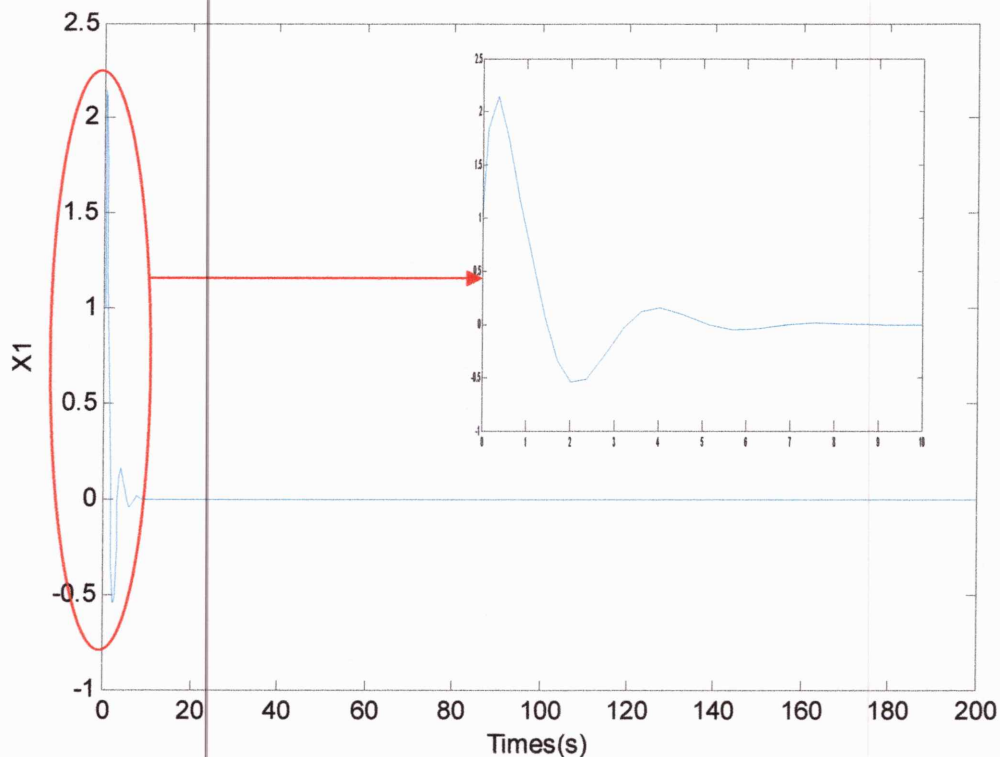


Figure 2.1 : Trajectoire de la variable d'état  $x_1$

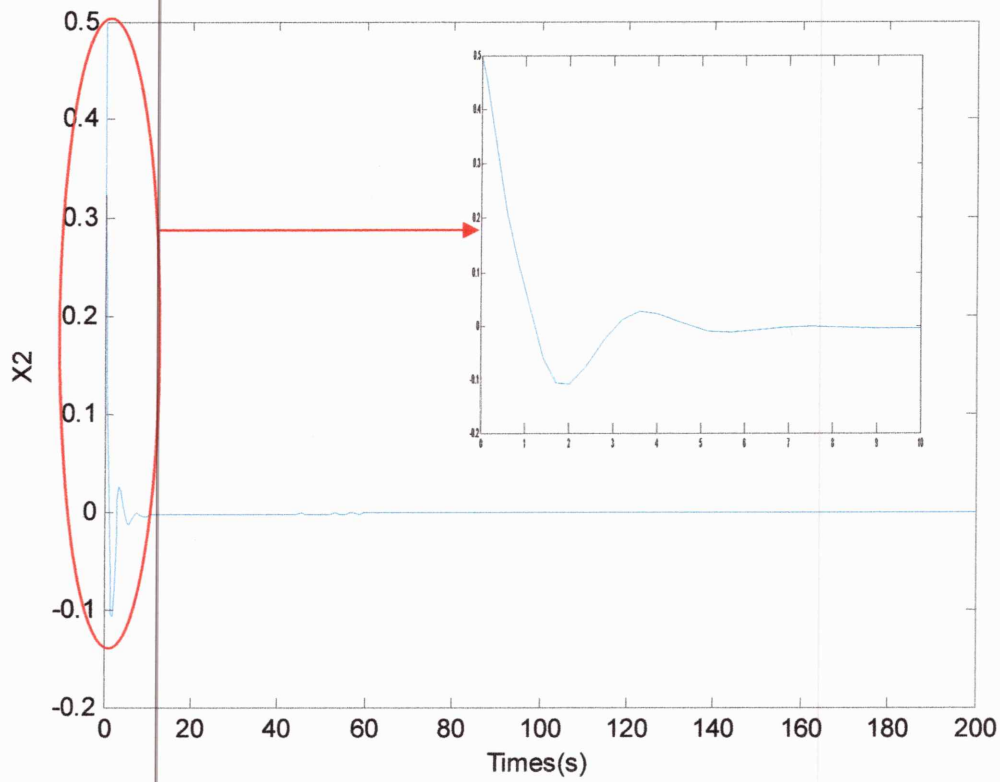


Figure 2.2 : Trajectoire de la variable d'état  $x_2$

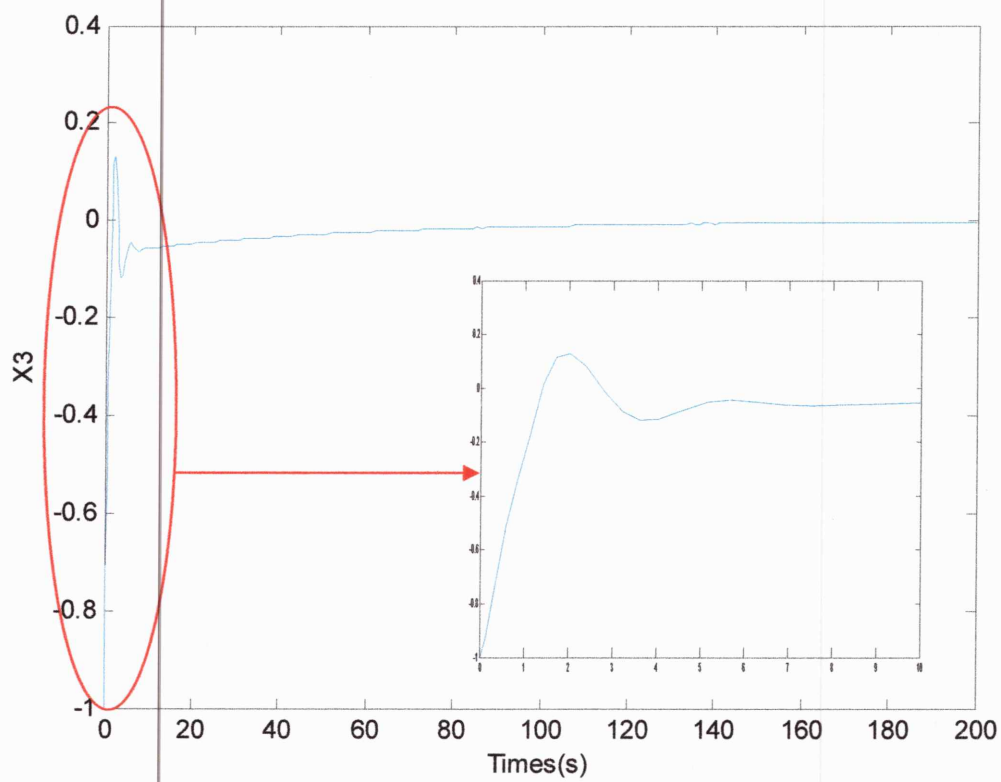
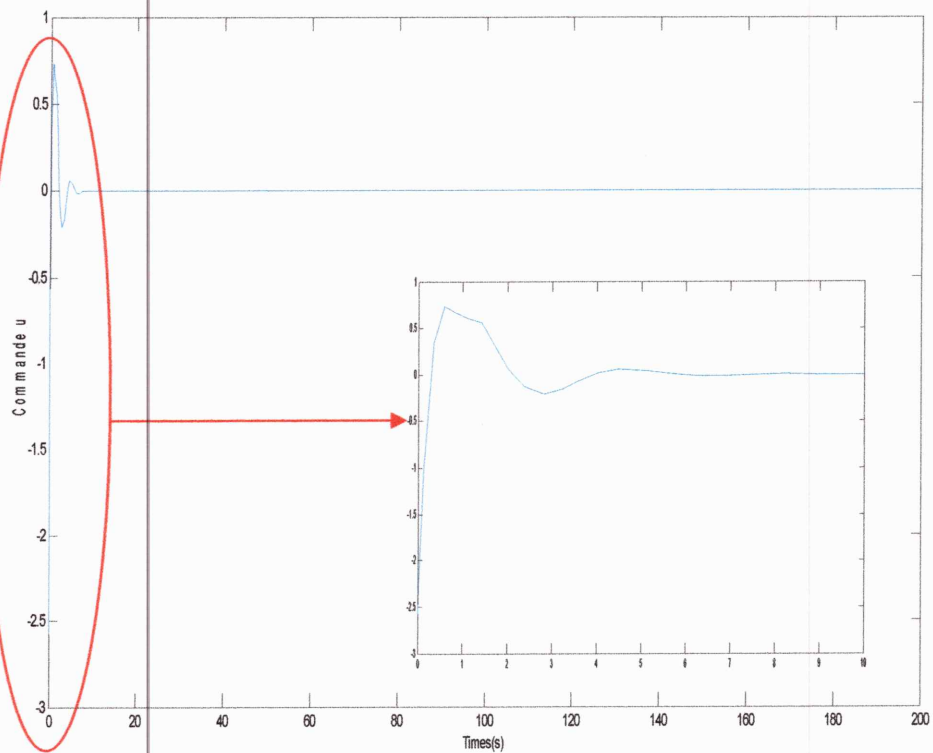


Figure 2.3 : Trajectoire de la variable d'état  $x_3$





**Figure 2.4 :** Trajectoire de la commande  $u$

Les résultats de simulation montrent que la commande obtenue arrive à stabiliser le système en présence de retard.

## 2.11 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé les conditions de stabilisation des modèles de T-S avec retard via la commande PDC. Les conditions sont dérivées en utilisant la fonction de Lyapunov-Krasovski. Les résultats de simulations obtenus montrent l'efficacité de la méthode proposée.

## Chapitre 3

# *Modèle de Takagi-Sugeno avec retard en présence de saturation d'actionneur*

## Sommaire

3.1 Introduction.....	29
3.2 Problème de saturation.....	29
3.3 Saturation d'actionneur.....	30
3.3.1 Définition de la saturation.....	30
3.3.2 Analyse de stabilité des modèles T-S avec saturations d'actionneurs.....	32
3.3.3 La commande PDC saturante.....	32
3.3.4 Stabilisation de modèle de T-S avec retard en présence de saturation.....	34
3.4 Application numérique.....	36
3.5 Conclusion.....	39



### 3.1 Introduction

Durant les dernières années, l'étude des systèmes présentant des retards a reçu une attention particulière de la part des chercheurs de la communauté de la commande. Cet intérêt découle du fait que les retards apparaissent dans la majeure partie des systèmes de commande. Leur présence peut conduire à la dégradation des performances du système voire même à son instabilité.

D'autre part, dans la plupart des systèmes dynamiques, l'amplitude du signal délivré par l'actionneur est limitée pour des raisons physiques, technologiques ou sécuritaires. Ne pas tenir compte de ces limitations peut, là aussi, être la source d'une dégradation importante des performances ou même déstabiliser le système bouclé. C'est la raison pour laquelle un nombre important de travaux traitent de l'analyse de la stabilité ou de la synthèse de contrôleur pour des systèmes soumis à la saturation de l'actionneur.

La saturation, qui peut affecter les états ou les commandes, est un phénomène non linéaire [Henrion, 1999], dans ce chapitre la modélisation de la saturation est réalisée via un modèle polytopique. [Henrion 1999, Cao *et al.* 2003, Zheng et Wu F 2008, Saifia *et al.* 2010a, Saifia *et al.* 2010a-b, Saifia *et al.* Saifia *et al.* 2011a-b, Saifia *et al.* 2012].

Les méthodes d'analyse de stabilité et la stabilisation sont basées essentiellement sur les fonctions de Lyapunov-Krasovskii et l'approche LMI, dans le cas des systèmes non linéaires avec retard, les notions de stabilité et de performance se révèlent très complexes en présence de saturation compte tenu de la nature non linéaire du signal de commande accompagné d'une non-linéarité du système lui même.

Ce chapitre a pour objectif de rappeler quelques résultats sur l'analyse de la stabilité et de la stabilisation des systèmes non linéaire avec retard en présence des saturations des actionneurs. La synthèse des lois de commande est basée essentiellement sur les fonctions de Lyapunov-Krasovskii et l'approche LMI.

### 3.2 Problème de saturation

Considérons le système suivant :

$$\dot{x} = f_c(x(t), \sigma(t)) \quad (3.1)$$

$x(t) \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur d'état,  $\sigma(t) \in \mathcal{R}^m$  est le vecteur de sortie d'actionneur.

Dans les approches de commande conventionnelles, le signal de commande est supposé sans contraintes avec

$$\sigma(t) = u(t) \quad (3.2)$$

où  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande élaboré par le contrôleur.

L'application de ces lois de commande conçues sans prise en compte de cette contrainte de saturation peut avoir des conséquences indésirables ou même néfastes sur le comportement du système en boucle fermée [Gomes da Silva 1997, Henrion 1999, Cao *et al.* 2003].

En conséquence, la présence de saturation d'actionneur peut dégrader les performances du système en boucle fermée (points d'équilibre parasites, instabilité, etc.). L'application de lois de commande conçues sans prise en compte de cette contrainte de saturation peut avoir des conséquences indésirables ou même néfaste sur le comportement du système en boucle fermée. Par la suite, notre objectif est de rappeler quelques résultats sur l'analyse de stabilité des systèmes soumis à une saturation d'actionneur, autrement dit :

$$\sigma(t) = \text{sat}(u(t)) \quad (3.3)$$

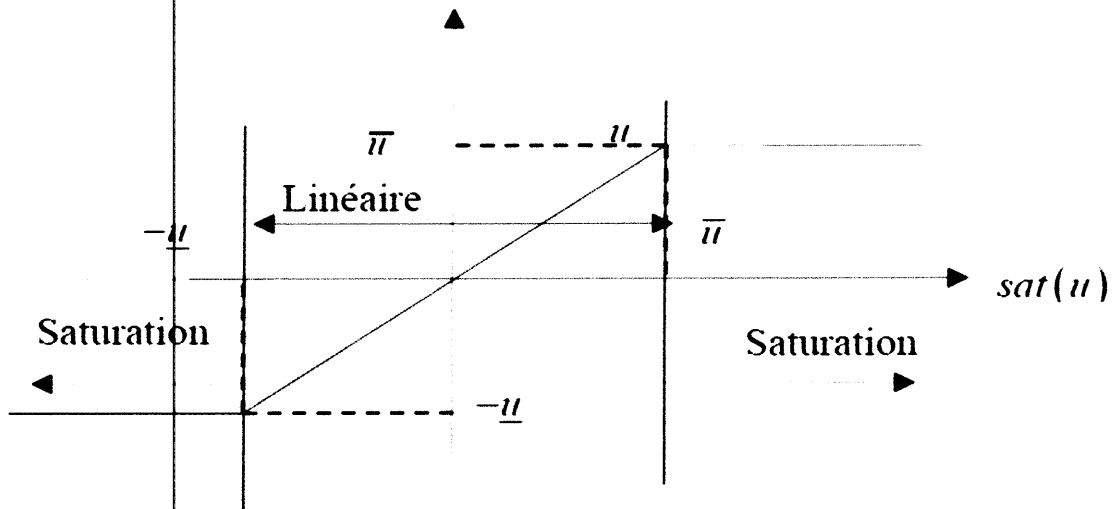
### 3.3 Saturation d'actionneur

#### 3.3.1 Définition de la saturation

La saturation a été toujours un problème important pour les systèmes de commande, du fait que tous les actionneurs seaturent à un certain niveau. Lorsqu'un actionneur atteint ces limites, on dit qu'il est saturé et aucune tentative visant à accroître le signal de commande peut donner un résultat.

Lorsque la conception est réalisée de telle sorte que les amplitudes des variables manipulées sont petites et n'atteignent pas les limites, l'actionneur n'est pas pleinement exploité et, mais, par conséquence, la réponse de contrôle devient plus lente. D'autre part, lorsque les limites sont dépassées pour une période de temps raisonnable, le comportement indésirable de contrôle peut être traduit par une dégradation significative des performances souhaitées.

Les limites sont décrites par un élément de la saturation, comme le montre la figure suivante :



**Figure 3.1** Fonction de saturation

Une fonction de saturation, associée à un vecteur de commande  $u$  de  $m$  composantes, est un vecteur de commande saturée :

$$sat(u) = \begin{bmatrix} sat(u_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ sat(u_m) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

La fonction de saturation  $sat(u(t))$  que nous considérons est décrite par la courbe montrée dans la figure 3.1. Chaque composante est une fonction monovariante non-linéaire définie comme suit :

$$sat(u_i) = \begin{cases} \bar{u}(i) & \text{si } u_i > \bar{u}(i) \\ u_i & \text{si } \underline{u}(i) < u_i < \bar{u}(i) \\ -\bar{u}(i) & \text{si } u_i < \underline{u}(i) \end{cases} \quad (3.5)$$

où  $\underline{u}(i) = u_{\min}(i)$  et  $\bar{u}(i) = u_{\max}(i)$  sont des scalaires positifs donnés.

### 3.3.2 Analyse de stabilité des modèles T-S avec saturations d'actionneurs

Dans le cas des systèmes non linéaires, la notion de stabilité et des performances deviennent très complexe avec l'effet de saturation accompagnée des non-linéarités du système lui-même. Le modèle T-S (voir chapitre 1) peut fournir une représentation efficace du système non linéaire sous forme d'interpolation de multiple modèles LTI. L'utilisation de cette approche, a permis de réduire la complexité de certains systèmes non linéaires et d'exploiter les résultats obtenus pour les systèmes linéaires. Dans ce contexte, le problème de saturation a été traité soit par une commande contrainte [Cao et al., 2003, Han 2007, Saifia et al. 2010b, Saifia et al. 2011, Saifia et al. 2012] ou bien par une commande saturante [Cao et al. 2003, Zheng et Wu 2009, Zhang et al. 2009, Saifia et al. 2010a-b, Saifia et al., Saifia et al. 2012]. L'effet de saturation est modélisé par un modèle polytopique dans [Cao et al. 2003, Zheng et Wu 2009], et a été convertie en zone morte dans [Zhang et al. 2009]. Dans ces travaux, les problèmes d'analyse et de synthèse pour un système avec limitation en amplitude du signal de commande sont basés sur l'utilisation de deux types d'ensembles : les polyèdres et les ellipsoïdes. Tous deux définissent des ensembles contractifs de stabilité asymptotique locale.

### 3.3.3 La commande PDC saturante

La loi de commande est conçue de telle sorte que la commande du système peut saturer. Donc, la sortie d'actionneur  $\sigma(t)$  est une fonction non linéaire en fonction de son entrée :

$$\sigma(t) = \text{sat}(u(t)) \quad (3.6)$$

**Lemme 3.1** : [Cao et al. 2003 et Kim et al. 2009] soit  $E$  un ensemble de  $m \times m$  matrices diagonales dont les éléments diagonaux sont 1 ou 0. Supposons que  $|v_i| \leq \bar{u}_i$  pour tout  $i \in I_m$ , où  $v_i$  et  $u_i$  désignent respectivement, l' $i^{\text{ième}}$  élément de  $v \in \mathfrak{R}^m$  et de  $u \in \mathfrak{R}^m$ , Si  $x \in \bigcap_{j=1}^r \mathfrak{Z}(H_j)$  pour  $x \in \mathfrak{R}^n$ , alors :

$$\begin{cases} \text{sat}(u, \bar{u}) = \sum_{s=1}^{2^m} \alpha_s (E_s u + \bar{E}_s v) \\ \sum_{i=1}^{2^m} \alpha_s = 1, & 0 \leq \alpha_s \leq 1 \\ v = \sum_{j=1}^r u_j(\varepsilon) H_j x \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\mathfrak{Z}(H_j) = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid |h_j^i x| \leq \bar{u}_i\} \quad (3.8)$$

$E_s$  désigne un élément de  $E$ ,  $\bar{E}_s = I - E_s$ ,  $H_j$  est une matrice de dimension  $m \times n$  et  $h_j^i$  est l' $i$ ème colonne de la matrice  $H_j$ .

La propriété suivante sera utilisée dans ce chapitre.

**Propriétés géométriques:** Un polyèdre  $\theta$  est défini comme étant l'intersection d'une famille finie de demi-plans. Etant donnée un ensemble de vecteurs colonnes  $m_i$  et de scalaires  $\eta_i$ , nous pouvons écrire :

$$\theta = \{x \mid m_i^T x \leq \eta_i\}, i \in I_m \quad (3.9)$$

Notons que si on choisit la fonction quadratique de Lyapunov, l'ensemble  $\theta(x)$  est un ellipsoïde défini par :

$$\varepsilon(p, \sigma) = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid x^T P x \leq \sigma\} \quad (3.10)$$

Le lemme suivant sera utilisé par la suite [Henrion 1999].

**Lemme 3.2 :** Soit l'ellipsoïde  $\varepsilon(p, \sigma)$  défini par (3.10) L'ellipsoïde  $\varepsilon(p, \sigma)$  est inclus dans le polyèdre  $\theta = \{x \mid m_i^T x \leq \eta_i\}, i \in I_m$  si et seulement si :

$$(m_i)^T \left( \frac{P}{\sigma} \right)^{-1} m_i \leq \eta_i^2 \quad (3.11)$$

a partir de la représentation (3.7), la commande PDC (2.16) (voir chapitre 2) avec saturation peut être écrite sous la forme suivante :

$$\sigma \left( \sum_{l=1}^r u_l F_l x \right) = \sum_{s=1}^{2^m} \eta_s \left( \sum_{l=1}^r \mu_l (E_s F_l + E_s^- H_l) x \right)$$

$$= \sum_{s=1}^{2^m} \sum_{l=1}^r \eta_s \mu_l (E_s F_l + E_s^- H_l) x \quad (3.12)$$

avec  $x(t) \in \bigcap_{j=1}^r \mathfrak{S}(H_j)$

D'après le lemme (3.2), l'ellipsoïde  $\varepsilon(p, \sigma)$  est inclus dans  $\bigcap_{j=1}^r \mathfrak{S}(K_j)$  si et seulement si :

$$(k_i^j) \left( \frac{P}{\sigma} \right)^{-1} k_i^j \leq \bar{u}_i^2 \quad (3.13)$$

### 3.3.4 Stabilisation de modèle de T-S avec retard en présence de saturation

Cette section présente quelques résultats relatifs à la stabilité des modèles T-S au sens de Lyapunov-Krasovskii, via la commande PDC (2.16) (voir chapitre 2), en présence du retard et la saturation :

Le lemme suivant sera utilisé pour la suite.

**Lemme 3.3 :** pour tout  $x, y \in R^n$  et quelque soit la matrice définie positif  $S \in R^{n \times n}$ , l'inégalité suivante est vérifiée:

$$2x^T y = x^T y + y^T x \leq x^T S^{-1} x + y^T S y \quad (3.14)$$

en remplace l'équation (3.12) dans l'équation (1.20) (voir chapitre I), on trouve

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^{2^m} \mu_i \mu_j \eta_s \left[ A_{1i} x(t) + A_{2i} x(t-\tau) + B_i (E_s F_j + E_s^- H_j) x(t) \right] \\ &= \sum_{s=1}^{2^m} \eta_s \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i^2 \left[ A_{1i} x(t) + A_{2i} x(t-\tau) + B_i (E_s F_i + E_s^- H_i) x(t) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i < j} u_i u_j \left[ A_{1i} x(t) + A_{2i} x(t-\tau) + B_i (E_s F_j + E_s^- H_j) x(t) \right] \right. \\ &\quad \left. + A_{1j} x(t) + A_{2j} x(t-\tau) + B_j (E_s F_i + E_s^- H_i) x(t) \right\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\dot{x} = \sum_{s=1}^{2^m} \eta_s \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i^2 \left[ G_{iis} x(t) + A_{2i} x(t-\tau) \right] + \sum_{i < j} \mu_i \mu_j \left[ (G_{ijs} + G_{jis}) x(t) + (A_{2i} + A_{2j}) x(t-\tau) \right] \right\} \quad (3.16)$$

avec  $G_{ijs} = A_{1i} + B_i (E_s F_j + E_s^- H_j)$



Le théorème suivant donne une formulation LMI du problème de stabilisation des systèmes (3.16) sous la contrainte (3.13) [Cao et Lin 2003, Han 2007].

**Théorème 3.1 :** Pour le système en boucle fermée (3.16), l'ellipsoïde  $\varepsilon(p,\sigma)$  est un ensemble contractif invariant, s'il existe deux matrices symétriques définies positives  $P, S$ , et les matrices  $H_i, i = 1, \dots, r$ , solution du problème d'optimisation suivant :

$$G_{iis}^T P + P G_{iis} + P A_{2i} S^{-1} A_{2i}^T P + \frac{S}{1-\beta} < 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad 1 \leq s \leq 2^m \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} & \left( G_{ijs} P + P G_{jis} \right)^T P + P \left( G_{ijs} P + P G_{jis} \right) + P \left( A_{2i} + A_{2j} \right) (2S)^{-1} \left( A_{2i} + A_{2j} \right)^T P \\ & + \frac{2S}{1-\beta} < 0, \quad 1 \leq i < j \leq r, \quad 1 \leq s \leq 2^m \end{aligned} \quad (3.18)$$

**Preuve :**

À partir de l'approche de Lyapunov-Krasovskii (2.22) (voir chapitre 2), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x^T P \dot{x} + x^T \frac{(t-\tau) S x(t-\tau)}{1-\beta} \\ &\leq 2x^T P \dot{x} + x^T \frac{S x}{1-\beta} - x^T (t-\tau) S x(t-\tau) \end{aligned} \quad (3.19)$$

On remplace l'équation (3.16) dans l'équation (3.19), on trouve :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq \sum_{s=1}^{2^m} \eta_s \left[ \sum_{i=1}^r \mu_i^2 \left( G_{iis}^T P + P G_{iis} + \frac{S}{1-\beta} \right) x \right. \\ &+ \sum_{i < j}^r \mu_i \mu_j x^T \left( \left( G_{ijs} + G_{jis} \right)^T P + P \left( G_{ijs} + G_{jis} \right) \right. \\ &\left. \left. + \sum_{i < j}^r \mu_i \mu_j 2x^T P \left( A_{2i} + A_{2j} \right) x(t-\tau) \right] - x^T (t-\tau) S x(t-\tau) \end{aligned} \quad (3.20)$$

En utilisant l'équation (3.3), on obtient :

$$\begin{aligned} 2x^T P A_{2i} x(t-\tau) &\leq x^T P A_{2i} S^{-1} A_{2i}^T P x + x^T (t-\tau) S x(t-\tau) \\ 2x^T P \left( A_{2i} + A_{2j} \right) (2S)^{-1} \left( A_{2i} + A_{2j} \right)^T P x &+ x^T (t-\tau) 2S x(t-\tau) \end{aligned} \quad (3.21)$$

alors

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) \leq & \sum_{s=1}^{2^m} \eta_s \left[ \sum_{i=1}^r \mu_i^2 x^T \left( G_{iis}^T P + P G_{iis} + P A_{2i} S^{-1} A_{2i}^T P + \frac{S}{1-\beta} \right) x \right. \\ & + \sum_{i < j}^r \mu_i \mu_j x^T \left( (G_{ijs} + G_{jis})^T P + P (G_{ijs} + G_{jis}) + \frac{2S}{1-\beta} \right. \\ & \left. \left. + P (A_{2i} + A_{2j}) (2S)^{-1} (A_{2i} + A_{2j})^T P \right) x \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\text{si } G_{iis}^T P + P G_{iis} + P A_{2i} S^{-1} A_{2i}^T P + \frac{S}{1-\beta} < 0$$

$$\text{et } (G_{ijs}^T P + P G_{jis})^T P + P (G_{ijs} P + P G_{jis}) + P (A_{2i} + A_{2j}) (2S)^{-1} (A_{2i} + A_{2j})^T P + \frac{2S}{1-\beta} < 0$$

alors  $\dot{V}(x) < 0$

**Fin de preuve.**

En utilisons le complément de Schur (voir théorème 2.1) (Chapitre II), l'inégalité (3.17) et (3.18) peut être écrites sous forme LMI suivante :

$$\begin{bmatrix} T_{ii} & X \\ * & -(1-\beta)W \end{bmatrix} < 1, \quad 1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq s \leq 2^m \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} T_{ij} & X \\ * & -\frac{1}{2}(1-\beta)W \end{bmatrix} < 1, \quad 1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq s \leq 2^m \quad (3.24)$$

avec

$$\begin{aligned} T_i &= X A_{1i}^T + A_{1i} X + M_i^T E_s B_i^T + B_i E_s M_i + N_i^T E_s^- B_i^T + B_i E_s^- N_i + A_{2i} W A_{2i} \\ T_j &= X A_{1i}^T + A_{1i} X + M_j^T E_s B_i^T + B_i E_s M_j + N_j^T E_s^- B_i^T + B_i E_s^- N_j + X A_{1j}^T + A_{1j} X \\ &+ M_i^T E_s B_j^T + B_j E_s M_i + N_i^T E_s^- B_j^T + B_j E_s^- N_i + \frac{(A_{2i} + A_{2j}) W (A_{2i} + A_{2j})^T}{2} \end{aligned}$$

$$\text{et } X = P^{-1}, \quad M_i = F_i X, \quad N_i = H_i X, \quad W = X^{-1}$$

La condition que l'ellipsoïde  $\varepsilon(p, \sigma)$  appartient à  $\bigcap_{j=1}^r \mathfrak{S}(K_j)$  peut être représenté comme suite :

$$\begin{bmatrix} X & N_j^T \\ * & \sigma u^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad 1 \leq j \leq r \quad (3.25)$$

### 3.4 Application numérique

Nous considérons, le modèle T-S (2.36) (chapitre 1), la résolution des conditions LMI (3.23), (2.24) et (3.25) avec  $\bar{u} = 1$ , nous donne les résultats suivants:

$$X = \begin{bmatrix} 1.4309 & 0.2542 & -0.2344 \\ 0.2542 & 0.0887 & 0.1069 \\ -0.2344 & 0.1069 & 0.9125 \end{bmatrix}; \quad W = \begin{bmatrix} 3.2348 & 0.2541 & -0.2994 \\ 0.2541 & 2.4957 & 0.0615 \\ -0.2994 & 0.0615 & 3.0741 \end{bmatrix};$$

$$F1 = [0.7400 \quad -3.1796 \quad 0.5270]; \quad H1 = [0.7277 \quad -3.1233 \quad 0.5172];$$

$$F2 = [0.7161 \quad -3.0733 \quad 0.4979]; \quad H2 = [0.7053 \quad -3.0240 \quad 0.4895];$$

Les figures suivantes montrent les réponses du système en boucle fermée (1.20) (voir chapitre 1) en présence de la saturation avec la commande PDC pour les conditions initiales  $x(0) = [0.25 \quad 0.5 \quad -0.25]$ .

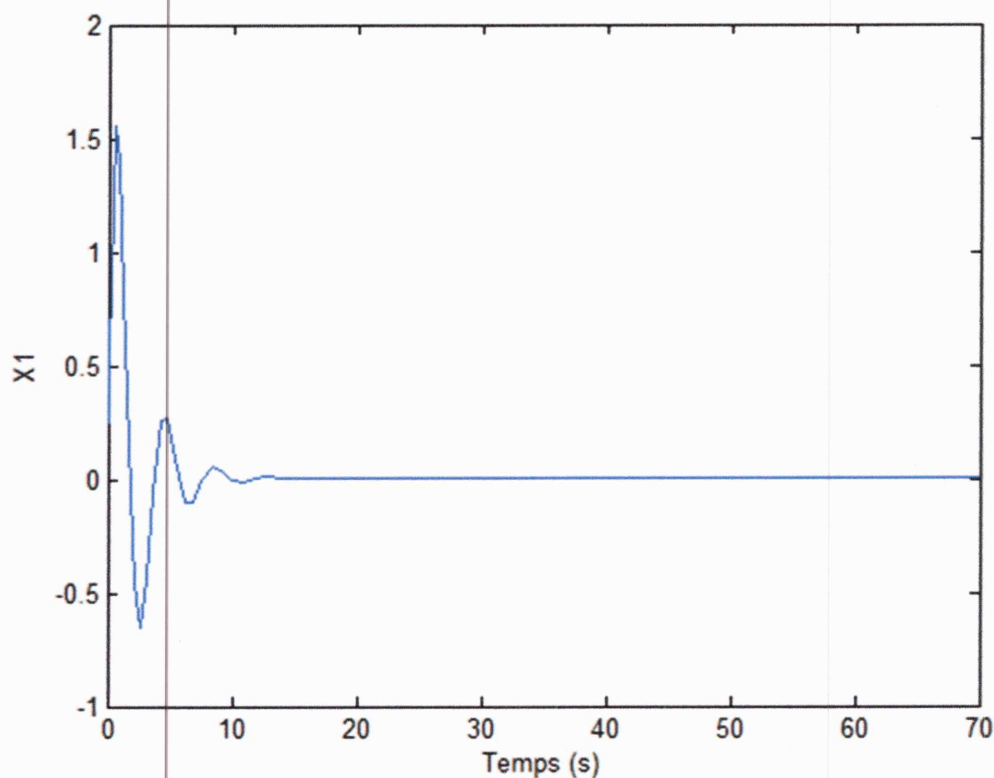
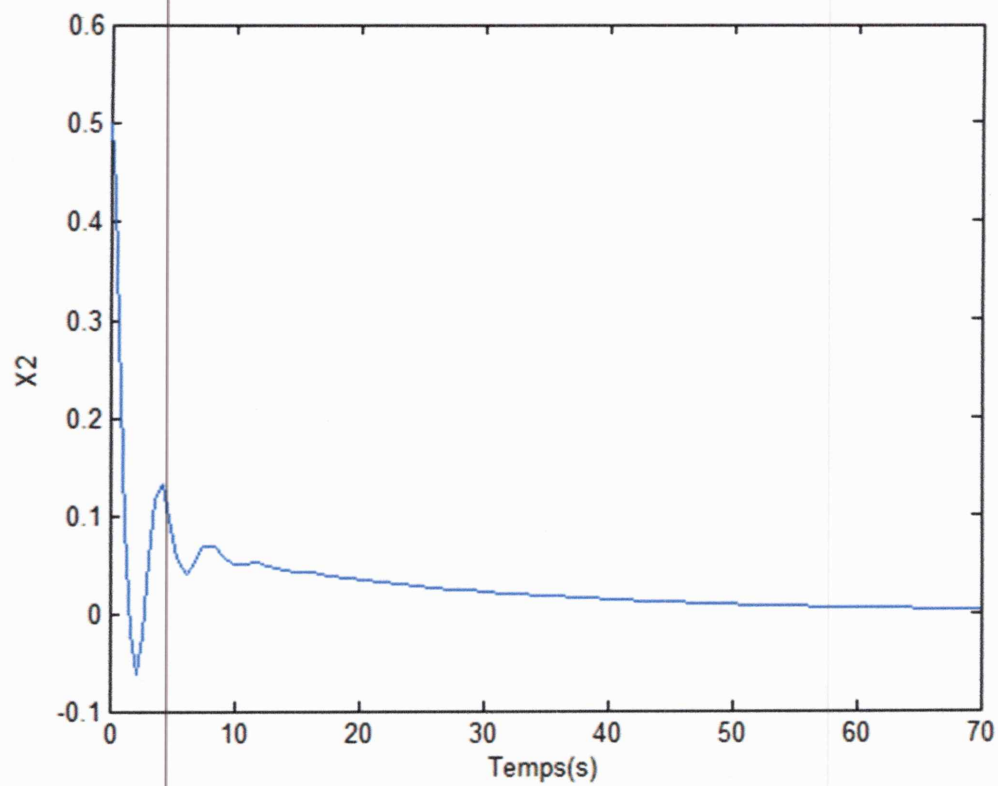
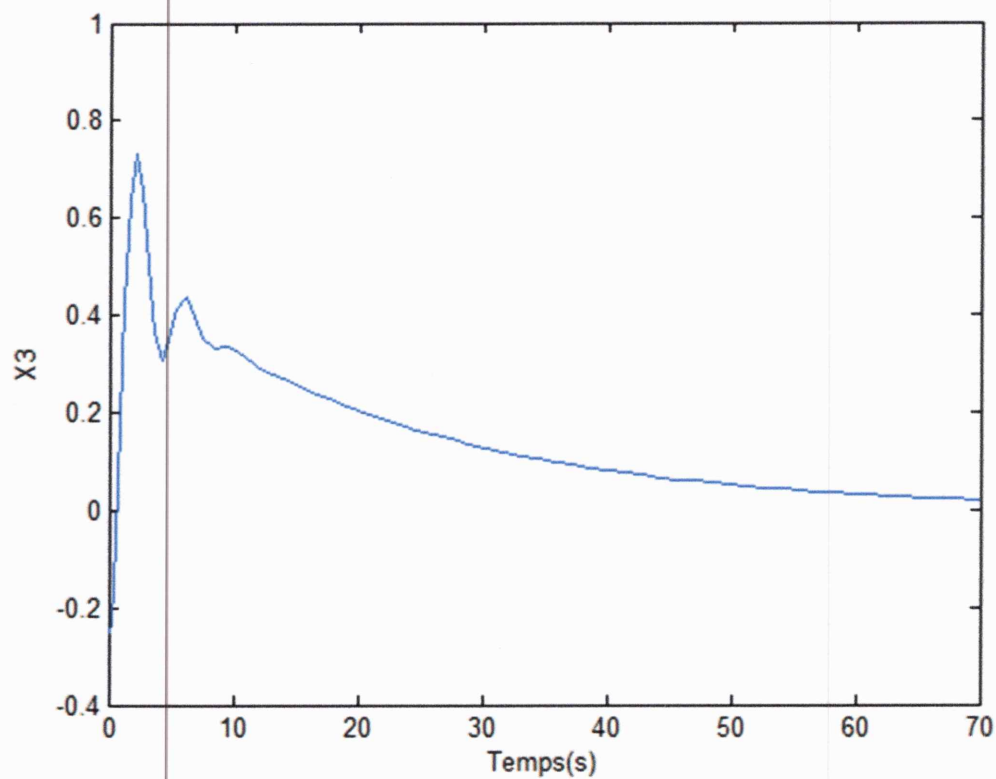


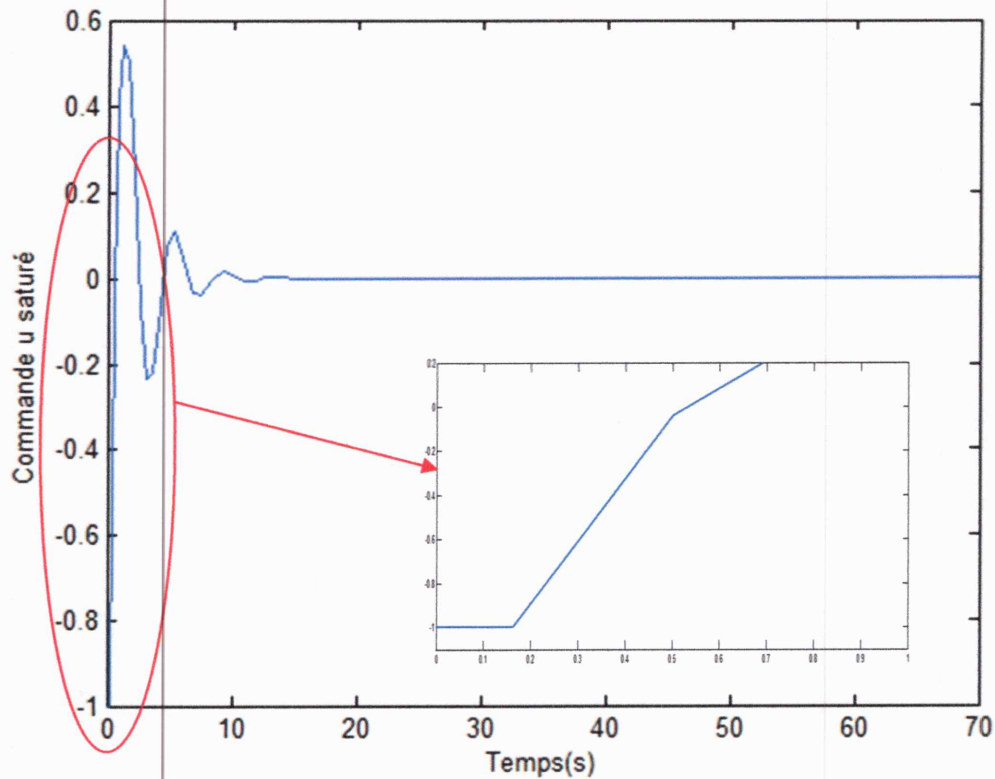
Figure 3.2 : Trajectoire de la variable d'état  $x_1$



**Figure 3.3 :** Trajectoire de la variable d'état  $x_2$



**Figure 3.4 :** Trajectoire de la variable d'état  $x_3$



**Figure 3.5 :** Trajectoire de la commande  $u$  saturée

Donc les résultats de simulation montrent que la commande saturante obtenue arrive à stabiliser le système à retard en présence de saturation d'actionneur.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué un bref rappel sur l'analyse de stabilité et stabilisation des systèmes non linéaires avec retard en présence de saturation d'actionneur est exposée.

Finalement, la synthèse d'une loi de commande stabilisante des modèles T-S en présence de retard avec saturation d'actionneur est donnée. Les théorèmes présentés permettent d'établir des conditions de stabilisation LMI des systèmes non linéaires avec retard décrit par les modèles de T-S avec saturation d'actionneur. Le principe de la synthèse est de concevoir une loi de commande PDC capable de stabiliser, au sens de Lyapunov et en termes de LMIs, le système en boucle fermée.

## Conclusion général

La présence de la saturation sur les commandes est une caractéristique systématique des problèmes d'automatique moderne. Cependant, la plupart des méthodes de commande de systèmes non linéaires avec retard ne prennent pas en compte les limitations en amplitude sur les commandes. Les méthodes proposées dans ce mémoire sont dédiés à l'analyse et la synthèse de lois de commande pour les systèmes non linéaires avec retard représentés par des modèles de T-S en présence de saturation d'actionneurs. Leur développement est basé essentiellement sur la deuxième fonction de Lyapunov-Krasovskii, les outils LMIs et la représentation polytopique de l'effet de saturation.

Dans le cadre de ce travail, au premier lieu, nous avons fait une recherche bibliographique sur les systèmes linéaires et non linéaires avec retard. Puis, nous avons exposé les différentes méthodes pour l'obtention des modèles de T-S et sa représentation en présence de retard.

En deuxième lieu, en se basant la fonction de Lyapunov-Krasovskii et la commande PDC, Les conditions obtenues sont exprimées sous forme LMI.

En troisième lieu, la stabilité et la stabilisation des modèles de T-S avec retard en présence de saturation de l'actionneur sont abordées. En utilisant la fonction de Lyapunov-Krasovskii et la commande PDC, des conditions suffisantes de stabilité sont proposées. Les conditions obtenues sont exprimées sous forme LMI. Les résultats de simulations obtenus montrent que les lois de commande saturante avec retard arrivent à réduire l'effet de saturation et l'effet de retard sur le système en boucle fermée et améliorent ses performances.

De nombreuses perspectives relatives à la commande des systèmes non linéaires représentés par des modèles de T-S en présence de retard et saturation sont envisagées. Nous pouvons citer :

- l'exploitation d'autres types de fonctions de Lyapunov non quadratiques.
- l'extension des résultats obtenus au cas de la limitation en vitesse de l'actionneur.
- la prise en considération de variables de décisions non mesurables.

## Bibliographie

- Bouarar T. (2009)**, Contribution à la synthèse de lois de commande pour les descripteurs de type Takagi-Sugeno incertains et perturbés. Thèse de Doctorat. *Université de Reims*.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V. (1994)**, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory', *Philadelphia, PA : SIAM*.
- Cao Y Y., Z. Lin (2003) a**, Stability analysis of discrete-time systems with actuator saturation by a saturation-dependent Lyapunov function. *Automatica*, vol. 39, pp.1235 – 1241.
- Chadli M. (2002)**, Stabilité et commande de systèmes décrit par des multimodèles, thèse de doctorat, *Institut Nationale polytechnique de lorraine, dept.de formation doctoral en automatique*, 2002.
- Fang C.H., F., Liu, Y.S., Kau, S.W., Hong, L.H., Lee, C.H., (2006)**, A new LMI-Based approach to relaxed quadratic stabilization of T–S fuzzy control systems', *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, no.14, pp.386-397.
- Ichalal D. (2009)**, estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno. *Institut Nationale polytechnique de lorraine, dept.de formation doctoral en automatique*.
- Guerra T.M., Vermeiren L., (2004)**, LMI-based relaxed non-quadratic stabilization conditions for nonlinear systems in Takagi-Sugeno's form, *Automatica*, vol.40, no.5, pp. 823-829.
- Guechi El-hadi. (2010)**, Suivi de trajectoires d'un robot mobile non holonome : approche par modèle flou de Takagi-Sugeno et prise en compte des retards, *thèse de doctorat l'université d'Annaba*.
- Kruszewski Alexandre. (2006)**, Lois de commande pour une classe de modèles non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno: Mise sous forme LMI, *thèse de doctorat l'université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis*.
- Li Y., Ji Z., (2008)**, Modeling, Simulation and Control of the Buck onverter (2008), *5th Inter. Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*, Schandong, China, pp. 663- 667.
- Morère Yann (2001)**, mise en œuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno, *thèse de doctorat l'université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis*.
- Murray-Smith, R., Johansen, T. A., (1997)**, Multiple model approaches to modeling and control'. *Taylor & Francis*.

**Saifia D. (2013)**, Commande des systèmes non linéaires avec contraintes sur l'entrée, *thèse de doctorat l'université de Jijel*.

**Takagi T., Sugeno M., (1985)**, Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control', *IEEE Transaction on Systems, Man, Cybernetics*, vol.15, pp.116-132.

**Tanaka, K., Ikeda, T., Wang, H. O. (1998)b**, A unified approach to controlling chaos via LMI-based fuzzy control system design. *IEEE Transactions on Circuits Systems*, vol.45, pp.1021–1040.

**Yeganefer Nima (2006)**, Définition et analyse de stabilités pour les systèmes à retard non linéaire, *thèse de doctorat l'école centrale de Lille*.

**Yoneyama H., (2007)**, 'Robust stability and stabilization for uncertain Takagi–Sugeno fuzzy time-delay systems', *Fuzzy Sets and Systems*, vol.55, pp. 115-134.

**Wong H.O., Tanaka, K., Griffin, M.F. (1996)**, An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design', *IEEE Trans. on Fuzzy System*, vol.4, pp.14-23.