الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة محمد الصديق بن يحي –جيجل-

كلية العلوم الدقيقة و الإعلام الآلي

قسم الرياضيات

مذكرة التخرج لنيل شهادة ماستر رياضيات أساسية و متقطعة

الدوال المولدة لجداءات أعداد ثريبوناتشي وبعض الأعداد الشهيرة

إعداد الطالبتين:

بوروينة فادية

لبيض إيمان

لجـــنة المناقشـــــة:

أ. علي بوسعيود	جامعة جيجل	رئيسا
أ. مراد شلغام	جامعة جيجل	مشرفا
أ. موسى احمية	جامعة جيجل	ممتحنة

السنة الجامعية: 2019/2018

بسم الله الرحمن الرحيم

شكــــر

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين سيدنا محمَّد وعلى آله وصحبه ومن تبعهم بإحسان إلى يوم الدين، وبعد ..

فإننا نشكر الله تعالى على فضله حيث أتاح لنا إنجاز هذا العمل بفضله، فله الحمد أولاً وأخرا .

إلى من ربياني صغيرا.

كما أتقدم بالشكر الجزيل إلى من شرفنا بإشرافه على مذكرة البحث الأستاذ ***شلغام مراد*** *الذي لم يدَّخر جهداً في مساعدتنا .وتقديم النصائح وصبره الدائم علينا والتي ساهمت في إنجاز هذا البحث*

والشكر الموصول إلى أعضاء لجنة المناقشة والمتمثلة في الأستاذين الكريمين " ***بوسعيود علي*** *و* ***أحمية موسى****".*

كما لا أنسى شكر الزميلة الفاضلة ***هند مرزوق****.*

إليكم جميعا الشكر والتقدير و الاحترام

مقدمة

تعتبرأعداد ثريبوناتشي $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و ثريبوناتشي لوكاس $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تعميما لأعداد فيبوناتشي $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و لوكاس $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و لقد تم دراستها من طرف العديد من الباحيثين لفترة طويلة مما أدى إلى التوصل لعدة متطابقات ونتائج مهمة. أول من تناول أعداد ثريبوناتشي هوالرياضي M.Feinerg في[24] وذلك عام 1963م، كما درسها الكثيرمن الرياضين في[28.27.20.11]

أما أعداد ثريبوناتشي لوكاس فقد تناولها كل من Yilmaz في [37] و Elia في [23].

نعلم أن نسبة جذرين متتاليين في أعداد فيبوناتشي أو لوكاس تتقارب نحو العدد الذهبي $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$، أما النسبتان (T_{n+1}/T_n) و (K_{n+1}/K_n) في أعداد ثريبوناتشي و ثريبوناتشي لوكاس فتتقاربان نحو العدد الذي يرمز له tri-ϕ حيث tri-ϕ= 1,839286755 المسمى العدد الفضي.

في 1993 قام الباحثان عبد الرزاق و أستاذه لاسكو بالحصول على عدة نتائج كلاسيكية في الرياضيات باستعمال تقنية التوابع التناظرية (symetric functions)

كما استطاع كل من بوسعيود و عبد الرزاق و أخرون من استعمال هذه التقنية للحصول على نتائج جديدة و خاصة **الدوال المولدة لجداءات الأعداد ولكثيرات الحدود المتعامدة.**

نهتم في هذه المذكرة بدراسة التوابع التناظرية و ذلك باستعمال المؤثر $\delta^k_{p_1p_2}$ على السلسلة القابلة للقلب $\sum_{n=0}^{+\infty} S_j(-A)\,p_1^n t^n$ و هذا بهدف التوصل إلى نتائج بإستعمال التطبيقات على التوابع التناظرية والمتمثلة في الدوال المولدة **لجداءات أعداد ثريبوناتشي، ثريبوناتشي لوكاس مع بعض الأعداد الشهيرة و** بعض **كثيرات الحدود المتعامدة.**

تم تقسيم هذه المذكرة إلى أربعة فصول:

نتطرق في الفصل الأول إلى بعض المفاهيم العامة حول السلاسل الشكلية، العلاقات التراجعية، الدوال المولدة لبعض الأعداد الشهيرة k-فيبوناتشي، k-لوكاس، k-بال، k-بال لوكاس و أعداد مارسان، ثريبوناتشي، ثريبوناتشي لوكاس بالإضافة إلى بعض كثيرات الحدود المتعامدة .

في الفصل الثاني يتم التذكيرببعض المفاهيم الأساسية و خصائص حول التوابع التناظرية

اعتمدنا في الفصل الثالث على النظرية الأساسية 1.3 للتوابع التناظرية باستعمال المؤثرالتناظري $\delta_{p_1 p_2}^{k}$ وذلك من أجل الحصول على الدوال المولدة لبعض الأعداد وكثيرات الحدود الشهيرة.

وأما في الفصل الرابع والأخير و باستعمال نفس النظرية نتحصل على الدوال المولدة لجداءات أعداد ثريبوناتشي و ثريبوناتشي لوكاس مع أعداد k-فيبوناتشي، k-لوكاس، k-بال، k-بال-لوكاس وأعداد مارسان وكذا مع بعض كثيرات الحدود المتعامدة الشهيرة ككثيرات حدود تشيبيتشاف من النوع الأول والثاني، الثالث و الرابع و كثيرات الحدود المرفقة لبعض الأعداد السالفة الذكر.

الفصل الأول مفاهيم عامة

سنتطرق في هذا الفصل إلى بعض المفاهيم العامة التي يتم استعمالها في الفصول اللاحقة، حيث نستهله بتقديم تعاريف للسلاسل الشكلية و بعض خصائصها، العلاقات التراجعية لأعداد k-فيبوناتشي، k-لوكاس، k-بال، k-بال لوكاس، أعداد مارسان، أعداد ثريبوناتشي و ثريبوناتشي لوكاس، ثم نقوم بتعريف كثيرات الحدود المتعامدة لكل من تشيبيتشاف من النوع الأول، الثاني، الثالث، الرابع، فيبوناتشي، لوكاس، بال و بال لوكاس، وننهي الفصل بإعطاء مفهوم للتوابع المولدة العادية، ثم كيفية ايجاد الدوال المولدة لأعداد وكثيرات الحدود المتعامدة سالفة الذكر.

1.1 السلاسل الشكلية

1.1.1 حلقة السلاسل الشكلية

لتكن $(\mathrm{A},+,.)$ حلقة تبديلية تامة (قد تكون A حقلا K حيث $K=\mathbb{R}$ أو $\mathrm{K}=\mathbb{C}$).

تعريف 1.1:

نسمي سلسلة شكلية على A كل متتالية $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ من عناصر A. تسمي العناصر a_i بمعاملات هذه السلسلة و يسمى المعامل a_0 بالمعامل الثابت.

ترميز. يرمز لمجموعة السلاسل الشكلية بـ $\mathrm{A}[\![X]\!]$ حيث $X=(0,1,0,0.....)$ يسمى باللامتغير

إذا كانت $a=(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ سلسلة من $\mathrm{A}[\![X]\!]$ تكتب بـ $a=\sum_{i=0}^{+\infty}a_iX^i$.

تعريف - خاصية2.1:

ليكن $a=\sum_{i\geq0}a_iX^i$ و $b=\sum_{i\geq0}b_iX^i$ سلسلتين شكليتين على A. نعرف مجموعهما و جداؤهما كالتالي:

$$a+b=\sum_{i\geq0}(a_i+b_i)X^i$$

$$a.b=\sum_{i\geq0}\sum_{k=0}^{i}a_kb_{i-k}X^i$$

و حيث $(\mathrm{A}[\![X]\!],+,.)$ حلقة تبديلية تامة .

2.1.1 عمليات على السلاسل الشكلية

لتكن $a=\sum_{i\in\mathbb{N}}a_iX^i$ سلسلة شكلية من $\mathrm{K}[\![X]\!]$.

1) الضرب بسلمي.

$$\forall \lambda \in \mathrm{A}; \quad \lambda.\sum_{i\geq 0} a_i X^i = \sum_{i\geq 0} \lambda a_i X^i$$

2) الاشتقاق.

المشتق الشكلي للسلسلة $a=\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i$ هي السلسلة $a'=\sum_{i\in\mathbb{N}}(i+1)a_{i+1}X^i$.

3) المكاملة.

نسمي السلسلة الشكلية $h=\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{a_i}{i+1}X^{i+1}$ بتكامل (أو تابع مكاملة) السلسلة $a=\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i$.

4) القسمة.

لتكن السلسلتين $a=\sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$ و $b=\sum_{i=0}^{+\infty} b_i X^i$ حيث $b\neq 0$. نقول أن السلسلة b تقسم السلسلة a و نكتب b/a إذا و فقط إذا وجدت سلسلة شكلية $c=\sum_{i=0}^{+\infty} c_i X^i$ حيث $a=b.c$.

2.1 السلاسل القابلة للقلب

تعريف 1.2 :

لتكن $a=\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i$ سلسلة شكلية غير معدومة. نقول عن السلسلة a أنها قابلة للقلب إذا وجدت سلسلة شكلية غير معدومة $b=\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i$ حيث: $a.b=1$. نسمي b مقلوب السلسلة a ويرمز لها a^{-1}.

خاصية 1.2 :

لتكن $a=\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i$ سلسلة شكلية على A .

السلسلة الشكلية $a=\sum_{i\in\mathrm{N}} a_i X^i$ قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان a_0 قابل للقلب في A .

البرهان

- نفرض السلسلة $a=\sum_{i\in\mathrm{N}} a_i X^i$ قابلة للقلب في $A[\![X]\!]$ إذا وفقط إذا وجد $b=\sum_{i\geq 0} b_i X^i$ في $A[\![X]\!]$ بحيث $a.\mathrm{b}=1$.

هذا معنـــــــاه:

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1 & (1) \\ \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} = 0 \ ; i \geq 1 & (2) \end{cases}$$

من (1) فإن a_0 قابل للقلب في الحلقة A.

- نفرض a_0 قابل للقلب.

$$(a.\mathrm{b} = 1) \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0 \\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0 \\ \vdots \\ a_i b_0 + a_{i-1} b_1 + \ldots + a_0 b_i = 0 \ ; \forall i \geq 0 \end{cases} \qquad (*)$$

لدينا $\mathrm{A_i}$ المصفوفة المرفقة بالجملة $(*)$

$$\mathrm{A}_i = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_i & a_{i-1} & a_{i-2} & a_{i-3} & a_{i-4}\ldots & a_0 \end{pmatrix}$$

ذات محدد $\det(A_i) = a_0^{i+1} \neq 0$ إذن الجملة $(*)$ تملك حلًا وحيداً $b = \sum_{i\geq 0} b_i X^i$.

أمثلـــة.

1) السلسلة $\sum_{i\geq 0} x^i = \frac{1}{1-x} = u$ قابلة للقلب و مقلوبها $u^{-1} = 1 - x$.

2) السلسة $\sum_{i\geq 0} (-1)^i x^i = \frac{1}{1+x} = u$ قابلة للقلب ومقلوبها $u^{-1} = 1 + x$.

3.1 العلاقات التراجعية الخطية المتجانسة

تعريف 1.3:

نسمي علاقة تراجعية خطية متجانسة من الرتبة k ذات معاملات ثابتة كل علاقة من الشكل:

$$u_n + d_1 u_{n-1} + d_2 u_{n-2} + \cdots + d_k u_{n-k} = 0 \ ; \quad n \geq k \qquad (1.1)$$

حيث $n \in IN$، $d_1, d_2, ..., d_k$ معاملات ثابتة من الحقل K مع $d_k \neq 0$.

ملاحظة 1.3:

نكتفي بعبارة العلاقة من الرتبة k للدلالة على العلاقة التراجعية الخطية المتجانسة من الرتبة k ذات معاملات ثابتة .

1.3.1 الحل العام لعلاقة تراجعية متجانسة

- من الواضح أنّ $u_n = 0$ هو حل للمعادلة (1.1) ويسمي الحل الصفري (التافه).
- إذا كان $u_n = \alpha^n$ مع $\alpha \neq 0$ حلاً غير تافه للمعادلة (1.1) فإنه يحقق :

$$\alpha^n + d_1 \alpha^{n-1} + d_2 \alpha^{n-2} + \cdots + d_k \alpha^{n-k} = 0$$

بما أن :

$$\forall n \geq k \ ; \alpha^{n-k} \neq 0$$

فإن :

$$\alpha^{n-k} (\alpha^k + d_1 \alpha^{k-1} + \cdots + d_k) = 0 \quad \Rightarrow \alpha^k + d_1 \alpha^{k-1} + \cdots + d_k = 0$$

أي أن α تعتبر حلاً للمعادلة $x^k + d_1 x^{k-1} + \cdots + d_k = 0$

تعريف 2.3: (كثير الحدود المميز)

يسمي كثير الحدود

$$P(X) = X^k + d_1 X^{k-1} + d_2 X^{k-2} + \cdots + d_k \quad . \qquad (1.2)$$

بكثير الحدود المميز المرفق بالعلاقة التراجعية (1.1).

ملاحظة 2.3 :

تدعى المعادلة $P(x) = 0$ بالمعادلة المميزة المرفقة للعلاقة التراجعية (1.1)، وتسمى حلولها بالجذور المميزة.

نظرية 1.3:

لتكن $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_k$ الجذور المميزة لكثير الحدود المميز (1.2) للعلاقة التراجعية (1.1). إذا كانت هذه الجذور مختلفة مثنى مثنى، فان الحل العام للعلاقة (1.1) يعطى بـ:

$$u_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \cdots + c_k\alpha_k^n \quad . \qquad (1.3)$$

حيث $c_1,c_2,c_3,\ldots,c_k$ ثوابت من K

نظرية 2.3: *[1]*

يوجد حل وحيد للعلاقة التراجعية $\forall n \geq k\ ;\ u_n + d_1u_{n-1} + d_2u_{n-2} + \ldots + d_ku_{n-k} = 0$.

من أجل الشروط الابتدائية: $u_0 = b_0\ ,\ u_1 = b_1, \ldots,\ u_{k-1} = b_{k-1}$ من الحقل K.

4.1 العلاقات التراجعية لبعض الأعداد الشهيرة

نعرف في هذه الفقرة بعض العلاقات التراجعية الشهيرة [3]

تعريف 1.4:

من أجل كل عدد طبيعي k ، تعرف أعداد k-فيبوناتشي (k- Fibonacci numbers) بالعلاقة التراجعية من الرتبة الثانية التالية:

$$\begin{cases} F_{k,n} = kF_{k,n-1} + F_{k,n-2}\ ;\quad n \geq 2 \\ F_{k,0} = 1,\quad F_{k,1} = k \end{cases} \qquad (1.4)$$

ملاحظة 1.4:

بوضع k=1 في العلاقة (1.4) نتحصل عل العلاقة التراجعية لأعداد فيبونـاتشي.

تعريف 2.4:

من أجل كل عدد طبيعي k ، تعرف أعداد k -لوكاس (k- Lucas numbers) بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} L_{k,n} = kL_{k,n-1} + L_{k,n-2};\quad n \geq 2 \\ L_{k,0} = 2,\quad L_{k,1} = k \end{cases} \qquad (1.5)$$

ملاحظة 2.4:

بوضع $k=1$ في العلاقة (1.5) نتحصل على العلاقة التراجعية لأعداد لوكاس.

تعريف 3.4:

من أجل كل عدد طبيعي k ، تعرف أعداد k -بال (k- Pell numbers) بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} P_{k,n} = kP_{k,n-1} + P_{k,n-2} \ ; \ \ n \geq 2 \\ P_{k,0} = 0, \ \ P_{k,1} = 1 \end{cases} \qquad (1.6)$$

ملاحظة 3.4:

بوضع $k=1$ في العلاقة (1.6) نتحصل على العلاقة التراجعية لأعداد بال.

تعريف 4.4:

من أجل كل عدد طبيعي k ، تعرف أعداد k–بال لوكاس (k- Pell Lucas numbers) بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} Q_{k,n} = 2Q_{k,n-1} + kQ_{k,n-2} \ ; \ \ n \geq 2 \\ Q_{k,0} = 2, \ \ Q_{k,1} = 2 \end{cases} \qquad (1.7)$$

ملاحظة 4.4:

بوضع $k=1$ في العلاقة (1.7) نتحصل على العلاقة التراجعية لأعداد بال لوكاس.

تعريف 5.4:

نعرف أعداد مارسان بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} M_n = 3M_{n-1} - 2M_{n-2}; \ \ n \geq 2 \\ M_0 = 0, \ \ M_1 = 1 \end{cases} \qquad (1.8)$$

تعريف 6.4:

نعرف أعداد ثريبوناتشي (Tribonacci numbers) بالعلاقة التراجعية من الرتبة الثالثة التالية:

$$\begin{cases} T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} \ ; \ \ n \geq 3 \\ T_0 = 1, \ \ T_1 = 1 \ \ T_3 = 2 \end{cases} \qquad (1.9)$$

تعريف 7.4 :

نعرف أعداد ثريبوناتشي لوكاس (Tribonacci Lucas numbers) بالعلاقة التراجعية من الرتبة الثالثة التالية:

$$\begin{cases} K_n = K_{n-1} + K_{n-2} + K_{n-3} \ ; \quad n \geq 3 \\ K_0 = 3, \quad K_1 = 1 \quad K_3 = 3 \end{cases} \qquad (1.10)$$

- **الحل العام لكل من علاقتي ثريبوناتشي وثريبوناتشي لوكاس.**

الحلان العامان لعلاقتي ثريبوناتشي و ثريبوناتشي لوكاس هما على الترتيب:

$$T_n = -\frac{(r_2+r_3-r_2r_3-2)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)} r_1^n + \frac{(r_1+r_3-r_1r_3-2)}{(r_1-r_2)(r_2-r_3)} r_2^n + \frac{(r_1+r_2-r_1r_2-2)}{(r_1-r_3)(r_2-r_3)} r_3^n$$

$$K_n = r_1^n + r_2^n + r_3^n$$

حيث r_1, r_2, r_3 هي حلول المعادلة المميزة المرفقة لهما.

مع

$$r_1 = \frac{1}{3}\left[1 + \sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}\right] = 1.8393$$
$$r_2 = \frac{1}{3}\left[1 + \omega\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + \omega^2\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}\right] = -0.41964 + 0.60629i$$
$$r_3 = \frac{1}{3}\left[1 + \omega^2\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + \omega\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}\right] = -0.41964 - 0.60629i$$

حيث $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

5.1 بعض كثيرات الحدود المتعامدة ذات علاقة تراجعية من الرتبة الثانية.

تعريف 1.5:

لتكن $(\mathrm{P}_n(x))_{n\in IN}$ متتالية كثيرات حدود نظامية أي :

$$\mathrm{P}_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots \qquad (1.11)$$

تكون $(\mathrm{P}_n(x))_{n\in IN}$ عبارة عن متتالية **كثيرات حدود نظامية متعامدة** اذا وفقط اذا وجدت متتاليتين عقديتين (من $\mathbb{C}$) $(\alpha_n)_n$ و $(\beta_n)_n$ تحقق العلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} P_{n+1}(x) = (x-\alpha_n)P_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x); \quad \forall\ n \geq 0 \\ \qquad P_{-1}(x) = 0, \ P_0(x) = 1 \end{cases} \qquad (1.12)$$

توطئة 1.5 *[21]*

كل متتالية كثيرات الحدود $(\mathrm{P}_n(x))_{n\in IN}$ ذات علاقة تراجعية متجانسة من الرتبة الثانية هي عبارة عن متتالية كثيرات حدود متعامدة.

نعرف فيما يلي بعض كثيرات الحدود المشهورة.*[3]*

تعريف 2.5

تعرف كثيرات الحدود تشيبتشاف من النوع الأول $(T_n(x))_{n\in IN}$ بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x); \;\; n \geq 0 \\ T_0(x) = 1, \;\; T_1(x) = x \end{cases} \qquad (1.13)$$

تعريف 3.5:

تعرف كثيرات الحدود تشيبتشاف من النوع الثاني $(U_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} U_{n+2}(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_n(x); \;\; n \geq 0 \\ U_0(x) = 1, \;\; U_1(x) = 2x \end{cases} \qquad (1.14)$$

تعريف 4.5:

تعرف كثيرات الحدود تشيبتشاف من النوع الثالث $(V_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} V_{n+1}(x) = 2xV_n(x) - V_{n-1}(x); \;\; n \geq 0 \\ V_0(x) = 1, \;\; V_1(x) = 2x - 1 \end{cases} \qquad (1.15)$$

تعريف 5.5:

تعرف كثيرات الحدود تشيبتشاف من النوع الرابع $(W_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} W_{n+1}(x) = 2xW_n(x) - W_{n-1}(x); \;\; n \geq 0 \\ W_0(x) = 1, \;\; W_1(x) = 2x + 1 \end{cases} \qquad (1.16)$$

تعريف 6.5:

نعرف كثيرات الحدود فيبوناتشي $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x); \quad \forall n \geq 2 \\ F_0(x) = 1,\ F_1(x) = x \end{cases} \qquad (1.17)$$

تعريف 7.5:

نعرف كثيرات الحدود للوكـاس $(L_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x); \quad \forall\, n \geq 2 \\ L_0(x) = 2,\ L_1(x) = x \end{cases} \qquad (1.18)$$

تعريف 8.5:

نعرف كثيرات الحدود لبـال $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x); \quad \forall\, n \geq 2 \\ P_0(x) = 0,\ P_1(x) = 1 \end{cases} \qquad (1.19)$$

تعريف 9.5:

نعرف كثيرات الحدود لبـال لوكـاس $(Q_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x); \quad \forall\, n \geq 2 \\ Q_0(x) = 2,\ Q_1(x) = 2x \end{cases} \qquad (1.20)$$

6.1 التوابع المولدة

1.6.1 التوابع المولدة العادية

تعريف 1.6 :

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية نسمي التابع المولد العادي (السلسلة المولدة العادية (SGO)) للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ التابع $g(x)$ المعرف بـ :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \qquad (1.21)$$

خاصية 1.6 : *[1]*

إذا كانت $g(x)$ دالة مولدة للمتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $h(x)$ دالة مولدة لـ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$، يكون لدينا:

1. $c_1g(x)+c_2h(x)$ دالة مولدة للمتتالية $\left(c_1a_n+c_2b_n\right)$ بحيث c_2, c_1 ثابتان.
2. $\dfrac{g(x)}{1-x}$ دالة مولدة للمتتالية $(\mathrm{s}_n)=\left(a_0+a_1+\cdots+a_n\right)$.
3. $x.g'(x)$ دالة مولدة للمتتالية $\left(na_n\right)$ حيث g' هي الدالة المشتق للدالة g
4. $g(x)h(x)$ دالة مولدة لمتتالية الالتفاف $(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)$.

2.6.1 الدوال المولدة المرفقة لبعض الأعداد الشهيرة

نظرية 1.6 :

لتكن $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعمة لفيبوناتشي معرفة بالعلاقة تراجعية من الرتبة الثانية التالية:

$$\begin{cases} u_n=au_{n-1}+bu_{n-2}\ ;\ \ n\geq 2 \\ u_0=\alpha, u_1=\beta \end{cases}$$
$$\beta,\alpha,a,b\in\mathbb{Z}$$

الدالة المولدة المرفقة للمتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ هي:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_nt^n=\frac{a+\left(\beta-\alpha a\right)t}{1-at-bt^2} \qquad (1.22)$$

البرهان.

لدينــــــــــــــــا:

$$\begin{aligned} g(\mathrm{t}) &= \sum_{n=0}^{+\infty}u_nt^n \\ &= u_0+u_1t+\sum_{n=2}^{+\infty}(\mathrm{a}\,u_{n-1}+bu_{n-2})\,\mathrm{t}^n \\ &= \alpha+\beta t+at\sum_{n=1}^{+\infty}u_nt^n+bz^2\sum_{n=0}^{+\infty}u_nt^n \\ &= \alpha+\beta t+at\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_nt^n-\alpha\right)+bt^2\sum_{n=0}^{+\infty}u_nt^n \\ &= \alpha+\left(\beta-\alpha a\right)t+\left(at+bt^2\right)\sum_{n=0}^{+\infty}u_nt^n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\left(1-at-bt^2\right)g\left(x\right)=\alpha+\left(\beta-\alpha a\right)t$$

ومنه ينتج لنا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n = \frac{a+(\beta-\alpha a)t}{1-at-bt^2}$$

وهو المطلوب.

بتطبيق النظرية (1.6) نجد الدوال المولدة لبعض الأعداد الشهيرة.

نتائج

1. الدالة المولدة لأعداد k-فيبوناتشي تعطى بالعلاقة:

$$g(\mathrm{t}) = \frac{1}{1-kt-t^2} \quad .$$

2. الدالة المولدة لأعداد k-لوكاس تعطى بالعلاقة:

$$g(\mathrm{t}) = \frac{2-kt}{1-kt-t^2} \quad .$$

3. الدالة المولدة لأعداد k-بال تعطى بالعلاقة:

$$g(\mathrm{t}) = \frac{kt}{1-2t-kt^2} \quad .$$

4. الدالة المولدة لأعداد k-بال لوكاس تعطى بالعلاقة:

$$g(\mathrm{t}) = \frac{2-2t}{1-2t-kt^2} \quad .$$

5. الدالة المولدة لأعداد مارسان تعطى بالعلاقة التالية:

$$g(\mathrm{t}) = \frac{t}{1-3t+2t^2} \quad .$$

نظرية 2.6 :

لتكن $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية معرفة بالعلاقة تراجعية من الرتبة الثالثة التالية:

$$\begin{cases} w_n = aw_{n-1} + bw_{n-2} + cw_{n-3}\,; \;\; n \geq 3 \\ w_0 = \alpha, w_1 = \beta, w_2 = \gamma \end{cases}$$

الدالة المولدة المرفقة للمتتالية $(w_n)_{n\in IN}$ هي:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n t^n = \frac{a+(\beta-\alpha a)t+(\gamma-\alpha b-\beta a)t^2}{1-at-bt^2-ct^3} \qquad (23.1)$$

البرهان.

لدينـــــــــــــا:

$$\begin{aligned}
g(\mathrm{t}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n t^n \\
&= w_0 + w_1 t + w_2 t^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} (\mathrm{a}\, w_n + b w_n + c w_n)\, \mathrm{t}^n \\
&= \alpha + \beta t + \gamma t^2 + at\sum_{n=2}^{+\infty} w_n t^n + bt^2 \sum_{n=1}^{+\infty} w_n t^n + ct^3 \sum_{n=0}^{+\infty} w_n t^n \\
&= \alpha + \beta t + \gamma t^2 + at\left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n t^n - \alpha - \beta t\right) + bt^2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n t^n - \alpha\right) + ct^3\left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n t^n\right) \\
&= \alpha + (\beta - \alpha a)t + (\gamma - \beta a - b\alpha)t^2 + \left(at + bt^2 + ct^3\right)\sum_{n=0}^{+\infty} w_n t^n
\end{aligned}$$

$$\left(1-at-bt^2-ct^3\right) g(\mathrm{t}) = \alpha + (\beta-\alpha a)t + (\gamma-\beta a-b\alpha)t^2$$

ومنه ينتج لنا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n t^n = \frac{a+(\beta-\alpha a)t+(\gamma-\alpha b-\beta a)t^2}{1-at-bt^2-ct^3} \quad .$$

وهو المطلوب.

بتطبيق النظرية (2.6) نجد الدوال المولدة لكل من أعداد ثريبوناتشي و ثريبوناتشي لوكاس.

نتيجة 1.6 :

الدالة المولدة لأعداد ثريبوناتشي تعطى بالعلاقة التالية:

$$g(\mathrm{t}) = \frac{t}{1-t-t^2-t^3} \quad .$$

نتيجة 2.6 :

الدالة المولدة لأعداد ثريبوناتشي لوكاس تعطى بالعلاقة التالية:

$$g(\mathrm{t}) = \frac{3-2t-t^2}{1-t-t^2-t^3} \quad .$$

3.6.1 الدوال المولدة المرفقة ببعض كثيرات الحدود المتعامدة

نظرية 3.6:

لتكن $\left(P_n\left(x\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كثيرات الحدود معرفة بالعلاقة تراجعية التالية:

$$\begin{cases} P_n\left(x\right)=pxP_{n-1}\left(x\right)+qP_{n-2}\left(x\right);\ n\geq 2 \\ P_0\left(x\right)=\alpha, P_1\left(x\right)=\beta x \end{cases}$$

الدالة المولدة المرفقة للمتتالية $\left(P_n\left(x\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ هي:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n\left(x\right)t^n=\frac{a+\left(\beta x-\alpha p\right)t}{1-pxt-qt^2}\quad . \qquad (1.24)$$

البرهان

لدينـــــــــــــــا:

$$\begin{aligned} g(\mathrm{t}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\,\mathrm{t}^n \\ &= P_0(x)+P_1(x)\,\mathrm{t}+\sum_{n=2}^{+\infty}(pxP_{n-1}(x)+qP_{n-2}(x))\,\mathrm{t}^n \\ &= \alpha+\beta xt+pxt\sum_{n=1}^{+\infty}P_n(x)\,\mathrm{t}^n+qt^2\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)\,\mathrm{t}^n \\ &= \alpha+\beta xt+pxt\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)\,\mathrm{t}^n-\alpha\right)+qt^2\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)\,\mathrm{t}^n \\ &= \alpha+\beta xt-p\alpha xt+pxt\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)\,\mathrm{t}^n+qt^2\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)\,\mathrm{t}^n \\ &= \alpha+\left(\beta x-\alpha p\right)t+pxtg(\mathrm{t})+qt^2g(\mathrm{t}) \end{aligned}$$

ومنه ينتج لنا:

$$g(\mathrm{t})=\frac{\alpha+\left(\beta x-\alpha p\right)t}{1-pxt-qt^2}$$

وهو المطلوب .

بتطبيق النظرية (3.6) نجد الدوال المولدة لكثيرات الحدود السالفة الذكر.

نتائج

1. الدالة المولدة لكثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوع الأول تعطى بالعلاقة التالية:

$$g(\mathrm{t}) = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} \ .$$

2. الدالة المولدة لكثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوع الثاني تعطى بالعلاقة التالية:

$$g(\mathrm{t}) = \frac{1}{1 - 2xt + t^2} \ .$$

3. الدالة المولدة لكثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث تعطى بالعلاقة التالية:

$$g(\mathrm{t}) = \frac{1 - t}{1 - 2xt + t^2} \ .$$

4. الدالة المولدة لكثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع تعطى بالعلاقة التالية:

$$g(\mathrm{t}) = \frac{1 + t}{1 - 2xt + t^2} \ .$$

5. الدالة المولدة لكثيرات الحدود فيبوناتشي تعطى بالعلاقة التالية:

$$g(\mathrm{t}) = \frac{1}{1 - xt - t^2} \ .$$

6. الدالة المولدة لكثيرات الحدود لوكاس تعطى بالعلاقة التالية:

$$g(\mathrm{t}) = \frac{2 - xt}{1 - xt - t^2} \ .$$

7. الدالة المولدة لكثيرات الحدود بال تعطى بالعلاقة التالية:

$$g(\mathrm{t}) = \frac{t}{1 - 2xt - t^2} \ .$$

8. الدالة المولدة لكثيرات الحدود بال لوكاس تعطى بالعلاقة التالية:

$$g(\mathrm{t}) = \frac{2 - 2xt}{1 - 2xt - t^2} \ .$$

الفصل الثانـي التوابع التنـاظرية

نتطرق في هذا الفصل إلى بعض المفاهيم حول التوابع التناظرية الأولية و التامة و العلاقة الموجودة بينهما.

1.2 التوابع التناظرية

تعريف 1.2:

نعتبر $K=\mathbb{C}$ نقول عن التابع f المعرف على K^n أنه متناظر إذا كان من أجل كل تبديلة σ من S_n العلاقة التالية محققة :

$$\forall x=(x_1,x_2,\dots x_n)\in\mathbb{C}^n:\ \ f(x_1,x_2,\dots x_n)=f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\dots x_{\sigma(n)})\quad .$$

1.1.2 التوابع التناظرية الأولية

تعريف 2.2 :*[4]*

نسمي التابع التناظري الأولي من الرتبة k التابع e_k المعرف على K^n بـ:

$$e_k(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)=\sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\dots\lambda_n^{i_n}\quad .$$

مع $i_1,i_2,i_3,\dots,i_n=0\vee 1$ و $e_k(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ معدومة من أجل $k<0$ أو $k>n$.

أمثلـــــــــة.

من أجل معادلة من الدرجة الثانية ($n=2$، الجذور λ_1,λ_2) لدينا:

$$\begin{cases}e_0(\lambda_1,\lambda_2)=1\\ e_1(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_1+\lambda_2\\ e_2(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_1\lambda_2\end{cases}$$

من أجل معادلة من الدرجة الثالثة ($n=3$، الجذور $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$) لدينا:

$$\begin{cases}e_0(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=1\\ e_1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\\ e_2(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3\\ e_3(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\end{cases}.$$

قضية 1.2 :

التوابع التناظرية الأولية هي معاملات النشر في السلسلة:

$$E(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}e_k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)t^n=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i t) \quad .$$

2.1.2التوابع التناظرية التامة

تعريف3.2: *[4]*

نعرف التابع التناظري التام من الرتبة k التابع h_k المعرف على K^n بالعلاقة التالية:

$$h_k(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}$$

مع $i_1,i_2,i_3,\ldots,i_n\geq 0$ و $h_k(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ معدومة من أجل $k<0$.

أمثلـــــــــــــة.

1. من أجل معادلة من الدرجة الثانية ($n=2$)،الجذور λ_2,λ_1) لدينا:

$$\begin{cases} h_0(\lambda_1,\lambda_2)=1 \\ h_1(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_1+\lambda_2 \\ h_2(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_1\lambda_2 \\ h_3(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_1^2\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2 \\ \qquad\vdots \end{cases}$$

2. من أجل معادلة من الدرجة الثالثة ($n=3$)،الجذور $\lambda_3,\lambda_2,\lambda_1$)لدينا:

$$\begin{cases} h_0(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=1 \\ h_1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \\ h_2(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3 \\ h_3(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3+\lambda_1^2\lambda_2+\lambda_1^2\lambda_3+\lambda_1\lambda^2{}_2+\lambda_2^2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3^2+\lambda_2\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ \qquad\vdots \end{cases}$$

قضية 4.2:

التوابع التناظرية التامة من الرتبة k هي معاملات النشر في السلسلة:

$$H(\mathrm{t})=\sum_{k=0}^{+\infty} h_k(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)t^n=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda_i\,\mathrm{t})}\quad .$$

خاصية 1.2:*[4]*

العلاقة بين التوابع التناظرية الأولية و التامة تعطى بالعلاقة التالية:

$$H(\mathrm{t})E(-t)=1 \quad \text{أو} \quad H(-t)E(\mathrm{t})=1$$

تعريف 3.2: *[9]*

نعتبر الأبجدية $P_2=\{p_1,p_2\}$. نعرف التابع المتناظر المرفق بالأبجدية P_2 بـ:

$$S_j(\mathrm{P}_2)=S_j(p_1+p_2)=\frac{p_1^{j+1}-p_2^{j+1}}{p_1-p_2},\ \ j\in\mathbb{N} \qquad (1.2)$$

مع:

$$\begin{aligned}
S_0(\mathrm{P}_2)&=h_0(p_1,p_2)=1\\
S_1(\mathrm{P}_2)&=h_1(p_1,p_2)=p_1+p_2\\
S_2(\mathrm{P}_2)&=h_2(p_1,p_2)=p_1^{\,2}+p_2^{\,2}+p_1p_2\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

و $S_j(\mathrm{P}_2)=0$ من أجل $j<0$.

تعريف 4.2: *[9]*

لتكن A و B أبجديتين نرمز بـ: $S_j(A-B)$ لمعاملات السلسلة المعرفة بـ:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(A-B)\mathrm{t}^j=\frac{\prod_{b\in B}(1-bt)}{\prod_{a\in A}(1-at)}\quad . \qquad (2.2)$$

مع: $S_j(A-B)=0,\forall j<0$.

نتيجة 2.2:

بوضع $A=\varnothing$ في العلاقة (2.2) نتحصل على:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(-B)\,\mathrm{t}^j=\prod_{b\in B}(1-bt)\quad . \qquad (2.3)$$

خاصية 2.2: *[5]*

إذا كان $A=\varnothing$ أو $B=\varnothing$ فإنه ينتج لنا:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(A-B)\,\mathrm{t}^j=\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(A)\,\mathrm{t}^j\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(-B)\,\mathrm{t}^j\quad . \qquad (2.4)$$

ملاحظة 1.2:

إذا كان $A=B$ من العلاقتين (2.4) و (2.3) نتحصل على:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(A)\,\mathrm{t}^j\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(-A)\,\mathrm{t}^j=1\quad . \qquad (2.5)$$

أي:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(-A)\,\mathrm{t}^j=\frac{1}{\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(A)\,\mathrm{t}^j}\quad . \qquad (2.6)$$

توطئة 1.2: *[6]*

نعتبر الأبجديتين A و B حيث $A=\{x\}$ لدينا:

$$S_{j+k}(x-B)=x^k S_j(x-B),\ \ \forall k\in\mathbb{N}\quad . \qquad (2.7)$$

خاصية 3.2:

لتكن A أبجدية ذات عنصر وحيد $A=\{x\}$ لدينا:

$$\frac{\prod_{b\in B}(1-bt)}{\prod_{a\in A}(1-at)}=1+\cdots+S_{j-1}(x-B)\,\mathrm{t}^{j-1}+\frac{S_j(x-B)}{1-xt}t^j\quad . \qquad (2.8)$$

البرهان

بالإعتماد على التوطئة 1.2 لدينـــــــــــا :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(x-B)\mathrm{t}^j &= 1+S_1(x-B)+\cdots+S_j(x-B)\mathrm{t}^j+S_{j+1}(x-B)\mathrm{t}^{j+1}+\cdots \\ &= 1+S_1(x-B)+\cdots+S_j(x-B)\mathrm{t}^j+S_{j+1}(x-B)\mathrm{t}^{j+1}+\cdots \\ &= 1+S_1(x-B)+\cdots+S_j(x-B)\mathrm{t}^j+xS_j(x-B)\mathrm{t}^{j+1}+x^2S_j(x-B)\mathrm{t}^{j+2}+\cdots \\ &= 1+S_1(x-B)+\cdots+S_{j-1}(x-B)\mathrm{t}^{j-1}+S_j(x-B)(1+xt+x^2t^2+\cdots)\mathrm{t}^j \\ &= 1+S_1(x-B)+\cdots+S_{j-1}(x-B)\mathrm{t}^{j-1}+S_j(x-B)\frac{1}{1-xt}t^j \\ &= 1+S_1(x-B)+\cdots+S_{j-1}(x-B)\mathrm{t}^{j-1}+\frac{S_j(x-B)}{1-xt}t^j\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

3.1.2 الفروق المقسومة.

تعريف 5.2 [4]

ليكن f تابع معرف على $\mathbb{R}^n$. نعرف الفرق المقسوم المؤثر ∂ للتابع f بين القيمتين x_i, x_{i+1} بـ:

$$\partial_{x_i x_{i+1}}(f) = \frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_{i+1}, x_i, \cdots, x_n)}{x_i - x_{i+1}} \quad .$$

الفصل الثالث   التوابع المولدة لأعداد ثريبوناتشي و بعض الأعداد الشهيرة

في هذا الفصل نعتمد على النظرية الأساسية 1.3 للتوابع التناظرية، التي تسمح لنا بالحصول على الدوال المولدة لكل من أعداد k-فيبوناتشي، k-لوكاس، k-بال، k-بال لوكاس، مارسان، ثريبوناتشي، ثريبوناتشي لوكاس وكثيرات الحدود المتعامدة لكل من تشيبتشاف من النوع الأول، الثاني، الثالث، الرابع، فيبوناتشي، لوكاس، بال و بال لوكاس.

1.3 نتائج أساسية

تعريف 1.3 :*[9]*

لتكن الأبجدية $P=\{p_1,p_2\}$ نعرف المؤثر التناظري $\delta_{p_1p_2}^{k}$ بالعلاقة التالية :

$$\delta_{p_1p_2}^{k} f(p_1)=\frac{p_1{}^{k} f(p_1)-p_2{}^{k} f(p_2)}{p_1-p_2},\quad k\in\mathbb{N} \quad . \qquad (3.1)$$

حيث f تابع معرف على $\mathbb{C}$

ملاحظة 1.3:

إذا كان $f(p_1)=p_1$ المؤثر (3.1) يعطى بالعلاقة:

$$\delta_{p_1p_2}^{k} p_1=S_k(p_1+p_2) \qquad . \quad (3.2)$$

نتطرق للنظرية الأساسية*[19]* التي تسح لنا بالحصول على الدوال المولدة لأعداد وكثيرات الحدود المتعامدة.

نظرية 1.3 :

لتكن $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $P=\{p_1,p_2\}$ أبجديتين لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)S_{n+k-1}(P)\,\mathrm{t}^n=\frac{\sum_{n=0}^{k-1} S_n(-A)p_1^n p_2^n S_{k-n-1}(P)\,\mathrm{t}^n-p_1^k p_2^k t^{k+1}\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+k+1}(-A)S_n(P)\,\mathrm{t}^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)p_1^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)p_2^n t^n\right)} \quad . \quad (3.3)$$

البرهان.

بإدخال المؤثر $\delta_{p_1p_2}^k$ على السلسلة $f(p_1)=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A)p_1^nt^n$ الطرف الأيسر للعلاقة(3.3). يكتب على الشكل :

$$\begin{aligned}\delta_{p_1p_2}^k f(p_1) &= \delta_{p_1p_2}^k\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A)p_1^nt^n\right)\\ &= \frac{p_1^k\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A)p_1^nt^n - p_2^k\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A)p_2^nt^n}{p_1-p_2}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A)\left(\frac{p_1^{n+k}-p_2^{n+k}}{p_1-p_2}\right)t^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A)S_{n+k-1}(P)t^n\end{aligned}$$

بإدخال المؤثر $\delta_{p_1p_2}^k$ على السلسلة $f(p_1)=\frac{1}{\prod_{a\in A}(1-ap_1t)}$ الطرف الايمن للعلاقة (3.3) تكتب على الشكل :

$$\begin{aligned}\delta_{p_1p_2}^k f(p_1) &= \frac{p_1^k\frac{1}{\prod_{a\in A}(1-ap_1t)} - p_2^k\frac{1}{\prod_{a\in A}(1-ap_2t)}}{p_1-p_2}\\ &= \frac{p_1^k\prod_{a\in A}(1-ap_2t) - p_2^k\prod_{a\in A}(1-ap_1t)}{(p_1-p_2)\prod_{a\in A}(1-ap_1t)\prod_{a\in A}(1-ap_2t)}\\ &= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^kp_2^nt^n - \sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_2^kp_1^nt^n}{(p_1-p_2)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^nt^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_2^nt^n\right)}\end{aligned}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^n p_2^n\left(\frac{p_1^{\,k-n}-p_2^{\,k-n}}{p_1-p_2}\right)t^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_2^n t^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{k-1}S_n(-A)p_1^n p_2^n S_{k-n-1}(\mathrm{P})t^n+S_k(-A)p_1^k p_2^k S_{-1}(\mathrm{P})+\sum_{n=k+1}^{+\infty}S_n(-A)p_1^n p_2^n S_{k-n-1}(\mathrm{P})t^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_2^n t^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{k-1}S_n(-A)p_1^n p_2^n S_{n-k-1}(\mathrm{P})t^n+\sum_{n=k+1}^{+\infty}S_n(-A)p_1^k p_2^k\left(\frac{p_2^{\,n-k}-p_1^{\,n-k}}{p_1-p_2}\right)t^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_2^n t^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{k-1}S_n(-A)p_1^n p_2^n S_{k-n-1}(\mathrm{P})t^n-\sum_{n=k+1}^{+\infty}S_n(-A)p_1^k p_2^k S_{n-k-1}(\mathrm{P})t^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_2^n t^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{k-1}S_n(-A)p_1^n p_2^n S_{k-n-1}(\mathrm{P})t^n-p_1^k p_2^k t^{k+1}\sum_{n=k+1}^{+\infty}S_{n+k+1}(A)S_n(\mathrm{P})t^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_2^n t^n\right)}$$

ومنه تنتج لنا المساواة:

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n(A)S_{n+k-1}(P)\,\mathrm{t}^n=\frac{\sum_{n=0}^{k-1}S_n(-A)p_1^n p_2^n S_{k-n-1}(P)\,\mathrm{t}^n-p_1^k p_2^k t^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty}S_{n+k+1}(-A)S_n(P)\,\mathrm{t}^n}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)p_1^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)p_2^n t^n\right)}\ .$$

و هو المطلوب.

2.3 تطبيقات

الحالة 01 $A=\{1\}$ و $P=\{p_1,p_2\}$

بوضع $k=1$ في العلاقة (3.3) نتحصل على النتيجة التالية :

نتيجة 1.3:

من اجل الأبجدية $P=\{p_1,p_2\}$ لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(p_1+p_2)\mathrm{t}^n = \frac{1}{(1-p_1\mathrm{t})(1-p_2\mathrm{t})} \quad . \qquad (3.4)$$

من العلاقة (3.4) نتحصل على النتيجة التالية :

نتيجة 2.3:

من اجل الأبجدية $P=\{p_1,p_2\}$ لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(p_1+p_2)\mathrm{t}^n = \frac{t}{(1-p_1\mathrm{t})(1-p_2\mathrm{t})} \quad . \qquad (3.5)$$

بوضع $k=2$ في العلاقة (3.3) نتحصل على النتيجة التالية:

نتيجة 3.3:

من اجل الأبجدية $P=\{p_1,p_2\}$، لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+1}(p_1+p_2)\mathrm{t}^n = \frac{(p_1+p_2)-p_1p_2t}{(1-p_1\mathrm{t})(1-p_2\mathrm{t})} \quad . \qquad (3.6)$$

الحالة2 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $P=\{1\}$

نتيجة 4.3:

من اجل الأبجدية $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ لدينا:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)t^n = \frac{1}{(1-a_1t)(1-a_2t)(1-a_3t)} \quad . \qquad (3.7)$$

بضرب العلاقة (3.7) في t نتحصل على العبارة التالية :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)t^n = \frac{t}{(1-a_1t)(1-a_2t)(1-a_3t)} \quad . \qquad (3.8)$$

بضرب العلاقة (3.8) في t نتحصل على العبارة التالية :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A)t^n = \frac{t^2}{(1-a_1t)(1-a_2t)(1-a_3t)} \quad . \qquad (3.9)$$

الحالة 03 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ **و** $P=\{p_1,p_2\}$

❖ بوضع $k=0$ في العلاقة (3.3) نتحصل على النتيجة التالية :

نتيجة 5.3:

من اجل الأبجديتين $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $P=\{p_1,p_2\}$ لدينا:

$$\sum_{n\geq 0} S_n(A)S_{n-1}(P)t^n=\frac{(a_1+a_2+a_3)t-(p_1+p_2)(a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3)t^2+\left((p_1+p_2)^2-p_1p_2\right)a_1a_2a_3t^3}{\prod_{a\in A}(1-ap_1t)\prod_{a\in A}(1-ap_2t)} \quad (3.10)$$

من العلاقة (3.10) نتحصل على العلاقة التالية:

$$\sum_{n\geq 0} S_{n-1}(A)S_{n-2}(P)t^n=\frac{(a_1+a_2+a_3)t^2-(p_1+p_2)(a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3)t^3+\left((p_1+p_2)^2-p_1p_2\right)a_1a_2a_3t^4}{\prod_{a\in A}(1-ap_1t)\prod_{a\in A}(1-ap_2t)} \quad (3.11)$$

❖ بوضع $k=1$ في العلاقة (3.3) نتحصل على النتيجة التالية:

نتيجة 6.3:

من اجل الأبجديتين $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $P=\{p_1,p_2\}$ لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)S_n(\mathrm{P})t^n=\frac{1-p_1p_2(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)\,\mathrm{t}^2+p_1p_2(p_1+p_2)a_1a_2a_3t^3}{\prod_{a\in A}(1-ap_1t)\prod_{a\in A}(1-ap_2t)} \quad . \quad (3.12)$$

❖ بوضع $k=2$ في العلاقة (3.3) نتحصل على النتيجة التالية:

نتيجة 7.3:

من اجل الأبجديتين $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $P=\{p_1,p_2\}$ لدينا:

$$\sum_{n\geq 0} S_n(A)S_{n+1}(P)t^n=\frac{(p_1+p_2)-p_1p_2(a_1+a_2+a_3)\,\mathrm{t}+p_1^2p_2^2a_1a_2a_3t^3}{\prod_{a\in A}(1-ap_1t)\prod_{a\in A}(1-ap_2t)} \quad . \quad (3.13)$$

من العلاقة (3.13) نتحصل على العلاقة التالية :

$$\sum_{n\geq 0} S_{n-1}(A)S_n(P)t^n = \frac{(p_1+p_2)\,t + p_1p_2(a_1+a_2+a_3)\,t^2 + p_1^2p_2^2a_1a_2a_3t^4}{\prod_{a\in A}(1-ap_1t)\prod_{a\in A}(1-ap_2t)} \quad . \tag{3.14}$$

❖ بوضع $k=3$ في العلاقة (3.3) نتحصل على النتيجة التالية :

نتيجة 8.3:

من اجل الأبجديتين $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $P=\{p_1,p_2\}$ لدينا:

$$\sum_{n\geq 0} S_n(A)S_{n+2}(P)t^n = \frac{((p_1+p_2)^2-p_1p_2)-p_1p_2(p_1+p_2)(a_1+a_2+a_3)\,t + p_1^2p_2^2(a_1a_2+a_1a_3+a_3a_2)t^2}{\prod_{a\in A}(1-ap_1t)\prod_{a\in A}(1-ap_2t)} \tag{3.15}$$

من العلاقة (3.15) نتحصل على العلاقة التالية:

$$\sum_{n\geq 0} S_{n-2}(A)S_n(P)t^n = \frac{((p_1+p_2)^2-p_1p_2)\,t^2 - p_1p_2(p_1+p_2)(a_1+a_2+a_3)\,t^3 + p_1^2p_2^2(a_1a_2+a_1a_3+a_3a_2)t^4}{\prod_{a\in A}(1-ap_1t)\prod_{a\in A}(1-ap_2t)} \quad . \tag{3.16}$$

❖ بوضع $k=4$ في العلاقة (3.3) نتحصل على النتيجة التالية:

نتيجة 9.3:

من اجل الأبجديتين $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $P=\{p_1,p_2\}$ لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)S_{n+3}(P)t^n =$$

$$\frac{-(a_1+a_2+a_3)((p_1+p_2)^2-p_1p_2)p_1p_2t + (a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)(p_1+p_2)p^2{}_1p^2{}_2\,t^2 - a_1a_2a_3p^3{}_1p^3{}_2t^3}{\prod_{a\in A}(1-ap_1t)\prod_{a\in A}(1-ap_2t)} \tag{3.17}$$

3.3 إيجاد الدوال المولدة باستعمال التوابع التناظرية

1.3.3 الدوال المولدة لبعض الأعداد الشهيرة

1.الدالة المولدة لأعداد مارسان

- باستبدال p_2 بـ $(-p_2)$ في العلاقة (3.5) نتحصل على العلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)t^n=\frac{t}{1-(p_1-p_2)\mathrm{t}-p_1p_2t^2} \quad . \qquad (3.18)$$

بوضع : $\begin{cases} p_1-p_2=3 \\ p_1p_2=-2 \end{cases}$ في العلاقة (3.18) نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)t^n=\frac{t}{1-3t+2t^2}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty} M_n t^n \quad .$$

وهي الدالة المولدة لأعداد مارسان.

أي: $M_n=S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right) \quad .$

2. الدالة المولدة لأعداد k-فيبوناتشي و k-لوكاس

- بإستبدال p_2 بـ $(-p_2)$ في العلاقة (3.4) نتحصل على العلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(p_1+[-p_2]\right)t^n=\frac{1}{1-(p_1-p_2)\mathrm{t}-p_1p_2t^2} \quad . \qquad (3.19)$$

بوضع $\begin{cases} p_1-p_2=k \\ p_1p_2=1 \end{cases}$ في العلاقتين (3.18) و (3.19) نتحصل على العلاقتين التاليتين:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(p_1+[-p_2]\right)t^n=\frac{1}{1-kt-t^2}=\sum_{n=0}^{+\infty} F_{k,n}t^n \quad . \qquad (3.20)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)t^n=\frac{t}{1-kt-t^2} \quad . \qquad (3.21)$$

العلاقة (3.20) تمثل الدالة المولدة لأعداد k-فيبوناتشي أي:

$$F_{k,n}=S_n\left(p_1+[-p_2]\right) \quad .$$

ملاحظة 1.3:

بوضع $k=1$ في العلاقة (3.20) نتحصل على الدالة المولدة لأعداد فيبوناتشي.

- بضرب العلاقة (3.20) بالعدد 2 وجمعها مع العلاقة (3.21) المضروبة بالعدد $(-k)$ نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2S_n\left(p_1+[-p_2]\right)-kS_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)t^n=\frac{2-kt}{1-kt-t^2}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty} L_{k,n}t^n \quad . \qquad (3.22)$$

وهي الدالة المولدة لأعداد k-لوكاس أي:

$$L_{k,n}=2S_n\left(p_1+[-p_2]\right)-kS_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right) \quad .$$

ملاحظة 2.3:

بوضع $k=1$ في العلاقة (3.22) نتحصل على الدالة المولدة لأعداد لوكاس.

3. الدالة المولدة لأعداد k-بال و k-بال لوكاس

بوضع $\begin{cases} p_1-p_2=2 \\ p_1p_2=k \end{cases}$ في العلاقتين (3.18) و (3.19) نتحصل على العلاقتين التاليتين :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)t^n=\frac{t}{1-2t-kt^2} \quad . \qquad (3.23)$$

باستبدال p_2 بـ $(-p_2)$ في العلاقة (3.6) وبوضع $\begin{cases} p_1-p_2=2 \\ p_1p_2=k \end{cases}$ نتحصل على العلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+1}\left(p_1+[-p_2]\right)t^n=\frac{2+kt}{1-2t-kt^2} \quad . \qquad (3.24)$$

بضرب العلاقة (3.23) بالعدد $(-2-k)$ وجمعها مع العلاقة (3.24) نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(S_{n+1}\left(p_1+[-p_2]\right)-(2+k)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\right)t^n=\frac{2-2t}{1-2t-kt^2}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty} Q_{k,n}t^n \quad . \qquad (3.25)$$

وهي الدالة المولدة لأعداد k-بال لوكاس أي:

$$Q_{k,n}=S_{n+1}\left(p_1+[-p_2]\right)-(2+k)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right) \quad .$$

ملاحظة 3.3 :

بوضع $k=1$ في العلاقة (3.25) نتحصل على الدالة المولدة لأعداد بال لوكاس.

4. الدالة المولدة لأعداد ثريبوناتشي وثريبوناتشي لوكاس

- بوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ في العلاقة (3.7) نتحصل على العلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)t^n = \frac{1}{1-t-t^2-t^3} \quad . \qquad (3.26)$$

وهي تمثل الدالة المولدة لأعداد ثريبوناتشي أي :

$$T_n = S_n\left(a_1+a_2+a_3\right) \quad .$$

- بوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ في العلاقتين (3.8) و (3.9) نتحصل على العلاقتين التاليتين :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)t^n = \frac{t}{1-t-t^2-t^3} \quad . \qquad (3.27)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A)t^n = \frac{t^2}{1-t-t^2-t^3} \quad . \qquad (3.28)$$

بضرب العلاقة (3.26) بالعدد 3 وجمعها مع العلاقة (3.27) المضروبة بالعدد (-2) و طرح العلاقة (3.28) نتحصل على الدالة المولدة التالية :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3S_n(A)-2S_{n-1}(A)-S_{n-2}(A))t^n = \frac{3-t-t^2}{1-t-t^2-t^3} \quad . \qquad (3.29)$$

وهي عبارة عن الدالة المولدة لأعداد ثريبوناتشي لوكاس أي:

$$K_n = 3S_n(A)-2S_{n-1}(A)-S_{n-2}(A) \quad .$$

2.3.3 الدوال المولدة لبعض كثيرات الحدود المتعامدة

1. الدالة المولدة لكثيرات الحدود فيبوناتشي و لوكاس

بوضع: $\begin{cases} p_1 - p_2 = x \\ p_1 p_2 = 1 \end{cases}$ في العلاقتين (3.18) و (3.19) نتحصل على العلاقتين التاليتين:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(p_1+[-p_2]\right)t^n = \frac{1}{1-xt-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(x)t^n \quad . \qquad (3.32)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)t^n = \frac{t}{1-xt-t^2} \quad . \qquad (3.33)$$

العلاقة (3.32) تمثل الدالة المولدة لكثيرات حدود فيبوناتشي أي: $F_n(x) = S_n\left(p_1+[-p_2]\right)$.

- بضرب العلاقة (3.32) في 2 وجمعها مع العلاقة (3.33) المضروبة في $(-x)$ نتحصل على الدالة المولدة التالية:

وهي الدالة المولدة لكثيرات الحدود لوكاس أي:

$$L_n(x) = 2S_n\left(p_1+[-p_2]\right) - xS_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right) .$$

2.الدالة المولدة لكثيرات حدود بال وبال-لوكاس.

بوضع $\begin{cases} p_1 - p_2 = 2x \\ p_1 p_2 = 1 \end{cases}$ في العلاقتين (3.18) و (3.19) نتحصل على العلاقتين التاليتين:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(p_1+[-p_2]\right)t^n = \frac{1}{1-2xt-t^2} \quad . \qquad (3.34)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)t^n = \frac{t}{1-2xt-t^2} \quad . \qquad (3.35)$$

العلاقة (3.35) تمثل الدالة المولدة لكثيرات حدود بال أي:

$$P_n(x) = S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right) \quad .$$

بضرب العلاقة (3.34) بالعدد 2 وجمعها مع العلاقة (3.35) المضروبة بالعدد $(-2x)$ نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2S_n\left(p_1+[-p_2]\right)-2xS_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\right)t^n=\frac{2-2xt}{1-2xt-t^2}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}Q_n(x)\,\mathrm{t}^n \quad . \qquad (3.36)$$

وهي الدالة المولدة لكثيرات حدود بال لوكاس أي:

$$Q_n(x)=2S_n\left(p_1+[-p_2]\right)-2xS_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right) \ .$$

3.الدالة المولدة لكثيرات حدود تشيبتشاف من النوع الأول و الثاني، الثالث والرابع

باستبدال p_1 بـ $\left(2p_1\right)$ و p_2 بـ $\left(-2p_2\right)$ في العلاقتين (3.4) و (3.5) نتحصل على العلاقتين التاليتين:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)t^n=\frac{1}{1-2(p_1-p_2)\mathrm{t}-4p_1p_2t^2} \quad . \qquad (3.38)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)t^n=\frac{t}{1-2(p_1-p_2)\mathrm{t}-4p_1p_2t^2} \quad . \qquad (3.39)$$

بوضع $\begin{cases} p_1-p_2=x \\ 4p_1p_2=-1 \end{cases}$ في العلاقتين (3.38) و (3.39) نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)t^n=\frac{1}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}U_n(x)\,\mathrm{t}^n \quad . \qquad (3.40)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)t^n=\frac{t}{1-2xt+t^2} \quad . \qquad (3.41)$$

العلاقة (3.40) تمثل الدالة المولدة لكثيرات حدود تشيبتشاف من النوع الثاني أي:

$$U_n(x)=S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right) \ .$$

بضرب العلاقة (3.41) في $(-x)$ وجمعها مع العلاقة (3.40) نتحصل على الدالة المولدة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)-xS_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right)t^n=\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}T_n(x)\mathrm{t}^n \quad . \qquad (3.42)$$

وهي الدالة المولدة لكثيرات حدود تشيبتشاف من النوع الأول أي:

$$T_n(x)=S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)-xS_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right) .$$

بضرب العلاقة (3.41) بالعدد (-1) وجمعها مع العلاقة (3.40) نتحصل على العلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)-S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right)t^n=\frac{1-t}{1-2xt+t^2}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}V_n(x)\mathrm{t}^n \quad . \qquad (3.43)$$

وهي الدالة المولدة لكثيرات حدود تشيبيشاف من النوع الثالث أي:

$$V_n(x)=S_n(2p_1+[-2p_2])-S_{n-1}(2p_1+[-2p_2]) .$$

بجمع العلاقتين (3.40) و (3.41) نتحصل على العلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right)t^n=\frac{1+t}{1-2xt+t^2}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}W_n(x)\mathrm{t}^n \quad . \qquad (3.44)$$

وهي الدالة المولدة لكثيرات حدود تشيبيشاف من النوع الرابع أي :

$$W_n(x)=S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right) .$$

الفصل الرابع الدوال المولدة لجداءات أعداد ثريبوناتشي و ثريبوناتشي لوكاس

في هذا الفصل سنقوم بحساب بعض الدوال الجديدة وذلك بالاعتماد على النظرية 1.3من الفصل السابق، والتي تسمح لنا بالحصول على الدوال المولدة لجداءات أعداد ثريبوناتشي ،ثريبوناتشي لوكاس وبعض الدوال الشهيرة بالإضافة إلى بعض كثيرات الحدود المتعامدة.

1.4 الدوال المولدة لجداءات أعداد ثريبوناتشي وبعض الأعداد الشهيرة

- باستبدال p_2 بـ $(-p_2)$ في العلاقة (3.12) وبوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=k \\ p_1p_2=1 \end{cases}$

نتحصل الدالة المولدة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(\mathrm{p}_1+[-p_2])S_n(a_1+a_2+a_3)t^n=\frac{1-t^2-kt^3}{1-kt-(\mathrm{k}^2+3)t^2-(\mathrm{k}^3+4k)t^3-(\mathrm{k}^2+1)t^4+kt^5-t^6}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty} F_{n,k}T_nt^n \quad . \qquad (4.1)$$

وهي الدالة المولدة لجداءات أعداد k-فيبوناتشي وأعداد ثريبوناشي أي:

$$T_nF_{k,n}=S_n(a_1+a_2+a_3)S_n(p_1+[-p_2]) \quad .$$

مــع:

$$\begin{aligned}
\prod_{a\in A}(1-ap_1t)\prod_{a\in A}(1+ap_2t) &= 1-(\mathrm{p}_1-p_2)(a_1+a_2+a_3)t \\
&+\left[(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)(\mathrm{p}_1-p_2)^2-p_1p_2((a_1+a_2+a_3)^2-2(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3))\right]t^2 \\
&-\left[a_1a_2a_3(\mathrm{p}_1-p_2)^3-p_1p_2(\mathrm{p}_1-p_2)((a_1+a_2+a_3)(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)-3a_1a_2a_3)\right]t^3 \\
&+(-p_1p_2(\mathrm{p}_1-p_2)^2a_1a_2a_3(a_1+a_2+a_3)+p_1^2p_2^2((a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)^2 \\
&-2a_1a_2a_3(a_1+a_2+a_3)))t^4-p_1^2p_2^2a_1a_2a_3(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)(\mathrm{p}_1-p_2)t^5-a_1^2a_2^2a_3^2p_1^3p_2^3t^6
\end{aligned}$$

ملاحظة 1.4

بوضع $k=1$ في العلاقة (4.1) نتحصل على الدالة المولدة لجداءات أعداد فيبوناتشي وأعداد ثريبوناتشي

- باستبدال p_2 بـ $(-p_2)$ في العلاقة (3.10) و بوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=k \\ p_1p_2=1 \end{cases}$

نتحصل على العلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+a_2+a_3)S_{n-1}(p_1+[-p_2])t = \frac{t+kt^2+\left(k^2+1\right)t^3}{1-kt-(k^2+3)t^2-(k^3+4k)t^3-(k^2+1)t^4+kt^5-t^6} \quad . (4.2)$$

بضرب العلاقة (4.1) بالعدد 2 وجمعها مع العلاقة (4.2) المضروبة بالعدد $(-k)$ نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+a_2+a_3)(2S_n(p_1+[-p_2])-kS_{n-1}(p_1+[-p_2]))t^n \\
&\qquad = 2\sum_{n=0}^{+\infty} F_{n,k}T_n\, t^n - k\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+a_2+a_3)S_{n-1}(p_1+[-p_2])\, t^n \\
&\qquad = \frac{2-kt-(k^2+2)t^2-k(k^2+3)t^3}{1-kt-(k^2+3)t^2-(k^3+4k)t^3-(k^2+1)t^4+kt^5-t^6} \\
&\qquad = \sum_{n=0}^{+\infty} T_nL_{k,n}t^n \quad . \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

وهي الدالة المولدة لجداءات أعداد k-لوكاس وأعداد ثريبوناتشي أي:

$$T_nL_{k,n} = S_n(a_1+a_2+a_3)\left(2S_n(p_1+[-p_2])-kS_{n-1}(p_1+[-p_2])\right) \quad .$$

ملاحظة 2.4

بوضع $k=1$ في العلاقة (4.3) نتحصل على الدالة المولدة لجداء أعداد لوكاس مع أعداد ثريبوناتشي .

- باستبدال p_2 بـ $(-p_2)$ في العلاقة (3.10) و بوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=2 \\ p_1p_2=k \end{cases}$

نتحصل على العلاقة التالية:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(p_1+[-p_2])S_n(a_1+a_2+a_3)t^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+a_2+a_3)S_{n-1}(p_1+[-p_2])t^n \\
&= \frac{t+2t^2+(k+4)t^3}{1-2t-(3k+4)t^2-8(k+1)t^3-(k^2+4k)t^4+2k^2t^5-k^3t^6} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} T_nP_{k,n}t^n \quad . \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

وهي الدالة المولدة لجداءات أعداد k-بال وأعداد ثريبوناتشي أي:

$$T_nP_{k,n} = S_n(a_1+a_2+a_3)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right) \quad .$$

ملاحظة 3.4

بوضع $k=1$ في العلاقة (4.4) نتحصل على الدالة المولدة لجداءات أعداد بال وأعداد ثريبوناتشي

- بإستبدال p_2 بـ $(-p_2)$ في العلاقة (3.13) نتحصل على العلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+a_2+a_3)S_{n+1}(p_1+[-p_2])\,t = \frac{(p_1-p_2)+(a_1+a_2+a_3)p_1p_2t+p_1^2p_2^2a_1a_2a_3t^3}{\prod_{a\in A}(1-ap_1t)\prod_{a\in A}(1+ap_2t)} \qquad (4.5)$$

- بجمع العلاقة (4.5) المضروبة بالعدد (-1) و العلاقة (4.1) المضروبة بالعدد $(k+2)$

وبوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=2 \\ p_1p_2=k \end{cases}$ نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+a_2+a_3)\big(S_{n+1}(p_1+[-p_2])-(k+2)S_n(p_1+[-p_2])\big)t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+a_2+a_3)S_{n+1}(p_1+[-p_2])t^n-(k+2)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+a_2+a_3)S_n(p_1+[-p_2])t^n \\
&= \frac{2-2t-2(2+\mathrm{k})t^2-2(4+3\mathrm{k})t^3}{1-2t-(3k+4)t^2-8(k+1)t^3-(k^2+4k)t^4+2k^2t^5-k^3t^6} = \sum_{n=0}^{+\infty} T_nQ_{k,n}t^n \quad . \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

وهي الدالة المولدة لجداءات أعداد ثريبوناتشي وأعداد k-بال لوكاس أي:

$$T_nQ_{k,n} = S_n(a_1+a_2+a_3)\big(S_{n+1}(p_1+[-p_2])-(k+2)S_n(p_1+[-p_2])\big) \quad .$$

ملاحظة 4.4

بوضع $k=1$ في العلاقة (4.6) نتحصل على الدالة المولدة لجداءات أعداد بال لوكاس وأعداد ثريبوناتشي

- باستبدال p_2 بـ $(-p_2)$ في العلاقة (3.10) و بوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=3 \\ p_1p_2=-2 \end{cases}$

نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+a_2+a_3)S_{n-1}(p_1+[-p_2])t^n &= \frac{t+3t^2+7t^3}{1-3t-3t^2-3t^3+14t^4+12t^5+8t^6} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} T_nM_nt^n \quad .
\end{aligned}$$

وهي الدالة المولدة لجداءات أعداد ثريبوناتشي وأعداد مارسان أي :

$$T_nM_n = S_n(a_1+a_2+a_3)S_{n-1}(p_1+[-p_2]) \quad .$$

2.4 الدوال المولدة لجداءات أعداد ثريبونتاشي لوكاس وبعض الأعداد الشهيرة

- باستبدال p_2 بـ $(-p_2)$ في العلاقات (12.3)، (14.3) و (16.3) وبوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=k \\ p_1p_2=1 \end{cases}$ نتحصل على الدالة المولدة التالية :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}F_{n,k}K_nt^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(p_1+[-p_2]\right)\left(3S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)-2S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)-S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)\right)t^n\\ &=3\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(p_1+[-p_2]\right)S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)t^n-2\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(p_1+[-p_2]\right)S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)_nt^n\\ &-\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(p_1+[-p_2]\right)S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)t^n\\ &=\frac{3-2kt-\left(k^2+6\right)t^2-4kt^3-t^4}{1-kt-\left(k^2+3\right)t^2-\left(k^3+4k\right)t^3-\left(k^2+1\right)t^4+kt^5-t^6}\ .\end{aligned}$$

وهي الدالة المولدة لجداءات أعداد k-فيبوناتشي و أعداد ثريبوناشي لوكاس أي:

$$F_{n,k}K_n=S_n\left(p_1+[-p_2]\right)\left(3S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)-2S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)-S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)\right)\ .$$

- باستبدال p_2 بـ $(-p_2)$ في العلاقات (3.10)،(3.12)و(3.14) وبوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=2 \\ p_1p_2=k \end{cases}$ نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}P_{n,k}K_nt^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\left(3S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)-2S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)-S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)\right)t^n\\ &=3\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)t^n-2\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)t^n\\ &-\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)t^n\\ &=\frac{t+4t^2+\left(12+4k\right)t^3+4kt^4-k^2t^5}{1-2t-\left(3k+4\right)t^2-\left(8+8k\right)t^3-\left(k^2+4k\right)t^4+2k^2t^5-k^3t^6}\ .\end{aligned}$$

وه ي الدالة المولدة لجداءات أعداد k-بال وأعداد ثريبوناتشي لوكاس أي:

$$P_{n,k}K_n=S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\left(3S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)-2S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)-S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)\right)\ .$$

- باستبدال p_2 بـ $(-p_2)$ في العلاقة (3.10)،(3.12)،(3.13)،(3.14)،(3.15)و(3.17) و بوضع

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$$ و $$\begin{cases} p_1-p_2=2 \\ p_1p_2=k \end{cases}$$ نتحصل الدالة المولدة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(S_{n+1}\big(p_1+[-p_2]\big)-(2+k)S_{n-1}\big(p_1+[-p_2]\big)\Big)\Big(3S_n(a_1+a_2+a_3)-2S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)-S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)\Big)t^n$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n+1}\big(p_1+[-p_2]\big)S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)t^n-2\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n+1}\big(p_1+[-p_2]\big)S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)t^n$$
$$-\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n+1}\big(p_1+[-p_2]\big)S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)t^n-3(2+k)\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\big(p_1+[-p_2]\big)S_n(a_1+a_2+a_3)t^n$$
$$+2(2+k)\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\big(p_1+[-p_2]\big)S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)t^n+(2+k)\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\big(p_1+[-p_2]\big)S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)t^n$$
$$=\frac{6-10t-8(1+k)t^2-24(1+k)t^3-2k(4+k)t^4+2k^2t^5}{1-2t-(3k+4)t^2-(8+8k)t^3-(k^2+4k)t^4+2k^2t^5-k^3t^6}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}Q_{n,k}K_nt^n \quad .$$

وهي الدالة المولدة لجداءات أعداد بال لوكاس وأعداد ثريبوناتشي لوكاس أي :

$$Q_{k,n}K_n=\Big(S_{n+1}\big(p_1+[-p_2]\big)-(k+2)S_n\big(p_1+[-p_2]\big)\Big)\Big(3S_n(a_1+a_2+a_3)-2S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)-S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)\Big) \quad .$$

- باستبدال p_2 بـ $(-p_2)$في العلاقات (3.10)،(3.12)، (14.3) و (3.16) وبوضع

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$$ و $$\begin{cases} p_1-p_2=k \\ p_1p_2=1 \end{cases}$$ نتحصل على الدالة المولدة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}L_{n,k}K_nt^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(2S_n\big(p_1+[-p_2]\big)-kS_{n-1}\big(p_1+[-p_2]\big)\Big)\Big(3S_n(a_1+a_2+a_3)-2S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)-S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)\Big)t^n$$
$$=6\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\big(p_1+[-p_2]\big)S_n(a_1+a_2+a_3)t^n-4\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\big(p_1+[-p_2]\big)S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)t^n$$
$$-2\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\big(p_1+[-p_2]\big)S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)t^n-k3\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\big(p_1+[-p_2]\big)S_n(a_1+a_2+a_3)t^n$$
$$+2k\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\big(p_1+[-p_2]\big)S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)t^n+k\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\big(p_1+[-p_2]\big)S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)t^n$$
$$=\frac{6-5kt-4(k^2+3)t^2-4k(k+3)t^3-2(k^2+1)t^4-kt^5}{1-kt-(k^2+3)t^2-(k^3+4k)t^3-(k^2+1)t^4+kt^5-t^6} \quad .$$

وهي الدالة المولدة لجداءات أعداد k-لوكاس وأعداد ثريبوناشي-لوكاس أي:

$$L_{n,k}K_n=\Big(2S_n\big(p_1+[-p_2]\big)-kS_{n-1}\big(p_1+[-p_2]\big)\Big)\Big(3S_n(a_1+a_2+a_3)-2S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)-S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)\Big) \quad .$$

- باستبدال p_2 بـ $(-p_2)$ في العلاقات (3.10)،(3.12)و(3.14) وبوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و

$\begin{cases} p_1-p_2=3 \\ p_1p_2=-2 \end{cases}$ نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M_nK_nt^n=\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\left(3S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)-2S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)-S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)\right)t^n$$
$$=3\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)t^n-2\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)t^n$$
$$-\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)t^n$$
$$=\frac{t+6t^2+19t^3-12t^4-4t^5}{1-3t+3t^2-3t^3+14t^4+12t^5+8t^6}\ .$$

وهي الدالة المولدة لجداءات أعداد مارسان وأعداد ثريبوناتشي لوكاس أي:

$$M_nK_n=S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\left(3S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)-2S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)-S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)\right).$$

3.4 الدوال المولدة لجداءات أعداد ثريبوناتشي مع بعض كثيرات الحدود المتعامدة.

- باستبدال p_2 بـ $(-p_2)$ في العلاقة (3.12) وبوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=x \\ p_1p_2=1 \end{cases}$

نتحصل على الدالة المولدة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T_nF_n(x)\,t^n=\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(p_1+[-p_2])S_n(a_1+a_2+a_1)t^n$$
$$=\frac{1-t^2-xt^3}{1-xt-(x^2+3)t^2-(x^3+4x)t^3-(x^2+1)t^4+xt^5-t^6}\ .$$

وهي الدالة المولدة لجداءات كثيرات الحدود فيبوناتشي وأعداد ثريبوناتشي أي:

$$T_nF_n(x)=S_n(a_1+a_2+a_3)S_n(p_1+[-p_2]).$$

- باستبدال p_2 بـ $(-p_2)$ في العلاقتين (3.10)،(3.12) و بوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و

$\begin{cases} p_1-p_2=x \\ p_1p_2=1 \end{cases}$ نتحصل على العلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)T_nt^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2S_n(p_2+[-p_2])-xS_{n-1}(p_2+[-p_2])\right)S_n(a_1+a_2+a_3)t^n$$
$$=2\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(\mathrm{p}_1+[-p_2])S_n(a_1+a_2+a_3)_nt^n-x\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}(\mathrm{p}_1+[-p_2])S_n(a_1+a_2+a_3)t^n$$
$$=\frac{2-xt-(x^2+2)t^2-(x^3+3x)t^3}{1-xt-(x^2+3)t^2-(x^3+4x)t^3-(x^2+1)t^4+xt^5-t^6}.$$

وهي الدالة المولدة لجداءات كثيرات حدود لوكاس وأعداد ثريبوناتشي أي:

$$T_nL_n(x)=S_n(a_1+a_2+a_3)\left(2S_n(p_1+[-p_2])-xS_{n+1}(p_1+[-p_2])\right).$$

- باستبدال p_2 بـ $(-p_2)$ في العلاقة (3.10) و بوضع $\begin{cases}a_1+a_2+a_3=1\\a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1\\a_1a_2a_3=1\end{cases}$ و $\begin{cases}p_1-p_2=2x\\p_1p_2=1\end{cases}$

نتحصل على العلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)T_nt^n=\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}(\mathrm{p}_1+[-p_2])S_n(a_1+a_2+a_1)t^n$$
$$=\frac{t+2xt^2+(4x^2+1)t^3}{1-2xt-(4x^2+3)t^2-(8x^3+8x)t^3-(4x^2+1)t^4+2xt^5-t^6}.$$

وهي الدالة المولدة لجداءات كثيرات حدود بال وأعداد ثريبوناتشي أي:

$$T_nP_n(x)=S_n(a_1+a_2+a_3)\mathrm{S}_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right).$$

- باستبدال p_2 بـ $(-p_2)$ في العلاقتين (3.10)،(3.12) و بوضع $\begin{cases}a_1+a_2+a_3=1\\a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1\\a_1a_2a_3=1\end{cases}$ و $\begin{cases}p_1-p_2=2x\\p_1p_2=1\end{cases}$ نتحصل على العلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}Q_n(x)T_nt^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2S_n(\mathrm{p}_1+[-p_2])-2xS_{n-1}(\mathrm{p}_1+[-p_2])\right)S_n(a_1+a_2+a_1)t^n$$
$$=2\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(\mathrm{p}_1+[-p_2])S_n(a_1+a_2+a_1)t^n-2x\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}(\mathrm{p}_1+[-p_2])S_n(a_1+a_2+a_1)t^n$$
$$=\frac{2-2xt-(4x^2+2)t^2-(8x^3+6x)t^3}{1-2xt-(4x^2+3)t^2-(8x^3+8x)t^3-(4x^2+1)t^4+2xt^5-t^6}.$$

وهي الدالة المولدة لجداءات كثيرات حدود بال-لوكاس وأعداد ثريبوناتشي أي:

$$Q_n(x)T_n=\left(2S_n(\mathrm{p}_1+[-p_2])-2xS_{n-1}(\mathrm{p}_1+[-p_2])\right)S_n(a_1+a_2+a_1).$$

- باستبدال p_1 بـ $(2p_1)$ و $(-p_2)$ بـ $(-2p_2)$ في العلاقة (3.12) وبوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=x \\ 4p_1p_2=-1 \end{cases}$ نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(2p_1+[-2p_2])S_n(a_1+a_2+a_3)t^n = \frac{1+t^2+2xt^3}{1-2xt-(4x^2-3)t^2-8x(x^2-1)t^3+(4x^2-1)t^4+2xt^5+t^6}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)T_nt^n \ .$$

مــــــع:

$$\prod_{a\in E}(1-2ap_1t)\prod_{a\in E}(1+2ap_2t) = 1-2(p_1-p_2)(a_1+a_2+a_3)t$$
$$+\left[4(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)(p_1-p_2)^2-4p_1p_2((a_1+a_2+a_3)^2-2(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3))\right]t^2$$
$$-\left[8a_1a_2a_3(p_1-p_2)^3-8p_1p_2(p_1-p_2)((a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)(a_1+a_2+a_3)-3a_1a_2a_3)\right]t^3$$
$$+\left[-16p_1p_2(p_1-p_2)^2a_1a_2a_3(a_1+a_2+a_3)+16p_1^2p_2^2((a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)^2-2a_1a_2a_3(a_1+a_2+a_3))\right]t^4$$
$$-32p_1^2p_2^2a_1a_2a_3(p_1-p_2)(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)t^5-64a_1^2a_2^2a_3^2p_1^3p_2^3t^6$$

وهي الدالة المولدة لجداءات أعداد ثريبوناتشي وكثيرات حدود تشبيتشاف من النوع الثاني أي:

$$T_nU_n(x) = S_n(a_1+a_2+a_3)S_n(2p_1+[-2p_2]).$$

- باستبدال p_1 بـ $(2p_1)$ و (p_2) بـ $(-2p_2)$ في العلاقتين (3.10) و(3.12) وبوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=x \\ 4p_1p_2=-1 \end{cases}$ نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(S_n(2p_1+[-2p_2])-xS_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right)S_n(a_1+a_2+a_3)t^n$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(2p_1+[-2p_2])S_n(a_1+a_2+a_3)t^n - x\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])S_n(a_1+a_2+a_3)t^n$$
$$= \frac{1-xt-(2x^2-1)t^2-(4x^3-3x)t^3}{1-2xt-(4x^2-3)t^2-8x(x^2-1)t^3+(4x^2-1)t^4+2xt^5+t^6}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)T_nt^n \ .$$

وهي الدالة المولدة لجداءات كثيرات حدود تشيبتشاف من النوع الأول وأعداد ثريبوناتشي أي:

$$T_n(x)T_n = \left(S_n(2p_1+[-2p_2])-xS_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right)S_n(a_1+a_2+a_3).$$

- باستبدال p_1 بـ $(2p_1)$ و (p_2) بـ $(-2p_2)$ في العلاقتين (3.10) و(3.12) وبوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=x \\ 4p_1p_2=-1 \end{cases}$ نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{+\infty}\left(S_n(2p_1+[-2p_2])-S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right)S_n(a_1+a_2+a_3)t^n \\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(2p_1+[-2p_2])S_n(a_1+a_2+a_3)t^n-\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])S_n(a_1+a_2+a_3)t^n \\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}U_n(x)T_nt^n-\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])S_n(a_1+a_2+a_3)t^n \\
&=\frac{1-t-(2x^2-1)t^2-(4x^3-2x-1)t^3}{1-2xt-(4x^2-3)t^2-8x(x^2-1)t^3+(4x^2-1)t^4+2xt^5+t^6}=\sum_{n=0}^{+\infty}V_n(x)T_nt^n \quad .
\end{aligned}$$

وهي الدالة المولدة لجداءات أعداد ثريبوناتشي وكثيرات حدود تشبيتشاف من النوع الثالث أي:

$$V_n(x)T_n=\left(S_n(2p_1+[-2p_2])-S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right)S_n(a_1+a_2+a_3).$$

- باستبدال p_1 بـ $(2p_1)$ و (p_2) بـ $(-2p_2)$ في العلاقتين (3.10) و(3.12) وبوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=x \\ 4p_1p_2=-1 \end{cases}$ نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{+\infty}\left(S_n(2p_1+[-2p_2])+S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right)S_n(a_1+a_2+a_3)t^n \\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(2p_1+[-2p_2])S_n(a_1+a_2+a_3)t^n+\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])S_n(a_1+a_2+a_3)t^n \\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}U_n(x)T_nt^n+\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])S_n(a_1+a_2+a_3)t^n \\
&=\frac{1+t+(2x^2+1)t^2+(4x^3+2x-1)t^3}{1-2xt-(4x^2-3)t^2-8x(x^2-1)t^3+(4x^2-1)t^4+2xt^5+t^6} \\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}W_n(x)T_nt^n \quad .
\end{aligned}$$

وهي الدالة المولدة لجداءات كثيرات حدود تشيبتشاف من النوع الرابع وأعداد ثريبوناتشي أي:

$$W_n(x)T_n=\left(S_n(2p_1+[-2p_2])+S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right)S_n(a_1+a_2+a_3).$$

4.4 الدوال المولدة لجداءات أعداد تريبوناتشي لوكاس مع بعض كثيرات الحدود المتعامدة

- باستبدال p_2 بـ $(-p_2)$ في العلاقات (12.3)، (14.3) و (16.3) وبوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=x \\ p_1p_2=1 \end{cases}$ نتحصل على الدالة المولدة التالية :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} F_n(x)K_nt^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(p_1+[-p_2]\right)\left(3S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)-2S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)-S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)\right)t^n \\
&= 3\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(p_1+[-p_2]\right)S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)t^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(p_1+[-p_2]\right)S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)t^n \\
&- \sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(p_1+[-p_2]\right)S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)t^n \\
&= \frac{3-2xt-\left(6+x^2\right)t^2-4xt^3-t^4}{1-xt-(x^2+3)t^2-(x^3+4x)t^3-(x^2+1)t^4+xt^5-t^6} \ .
\end{aligned}$$

وهي الدالة المولدة لجداءات كثيرات الحدود فيبوناتشي وأعداد تريبوناشي-لوكاس أي:

$$K_nF_n(x)=\left(3S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)-2S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)-S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right).$$

- باستبدال p_2 بـ $(-p_2)$ في العلاقات (3.10)،(3.12)، (14.3) و (3.16) وبوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=x \\ p_1p_2=1 \end{cases}$ نتحصل على الدالة المولدة التالية :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)K_nt^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} (2S_n(p_1+[-p_2])-xS_{n-1}(p_1+[-p_2]))\left(3S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)-2S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)-S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)\right) \\
&= 6\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(p_1+[-p_2])S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)t^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(p_1+[-p_2])S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)t^n \\
&- 2\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(p_1+[-p_2])S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)t^n - 3x\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(p_1+[-p_2])S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)t^n \\
&+ 2x\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(p_1+[-p_2])S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)t^n + x\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(p_1+[-p_2])S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)t^n \\
&= \frac{6-5xt-(12+4x^2)t^2-(12x+3x^3)t^3-(2+2x^2)t^4+xt^5}{1-xt-(x^2+3)t^2-(x^3+4x)t^3-(x^2+1)t^4+xt^5-t^6} \ .
\end{aligned}$$

وهي الدالة المولدة لجداءات كثيرات حدود لوكاس وأعداد تريبوناتشي لوكاس أي:

$$L_n(x)\mathrm{K}_n=\left(2S_n(p_1+[-p_2])-xS_{n-1}(p_1+[-p_2])\right)\left(3S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)-2S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)-S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)\right) \ .$$

- باستبدال p_2 بـ $(-p_2)$ في العلاقات (3.10)،(3.12)و(3.14) وبوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=2x \\ p_1p_2=1 \end{cases}$ نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\mathrm{K}_n t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(p_1+[-p_2])\left(3S_n(a_1+a_2+a_3)-2S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)-S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)\right)t^n \\ &= 3\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(p_1+[-p_2])S_n(a_1+a_2+a_3)t^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(p_1+[-p_2])S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)t^n \\ &\quad -\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(p_1+[-p_2])S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)t^n \\ &= \frac{t+4xt^2+\left(4+12x^2\right)t^3+4xt^4-t^5}{1-2xt-(4x^2+3)t^2-(8x^3+8x)t^3-(4x^2+1)t^4+2xt^5-t^6} \ .\end{aligned}$$

وهي الدالة المولدة لجداءات كثيرات حدود بال وأعداد ثريبوناتشي لوكاس أي:

$$P_n(x)\mathrm{K}_n = S_{n-1}(p_1+[-p_2])\left(3S_n(a_1+a_2+a_3)-2S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)-S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)\right) \ .$$

- باستبدال p_2 بـ $(-p_2)$في العلاقات (3.10)،(3.12)، (14.3) و (3.16) وبوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=2x \\ p_1p_2=1 \end{cases}$ نتحصل على الدالة المولدة التالية :

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2S_n(p_1+[-p_2])-2xS_{n-1}(p_1+[-p_2])\right)\left(3S_n(a_1+a_2+a_3)-2S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)-S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)\right)t^n \\ &= 6\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(p_1+[-p_2])S_n(a_1+a_2+a_3)t^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(p_1+[-p_2])S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)t^n \\ &\quad -2\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(p_1+[-p_2])S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)t^n - 6x\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(p_1+[-p_2])S_n(a_1+a_2+a_3)t^n \\ &\quad +4x\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(p_1+[-p_2])S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)t^n + 2x\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(p_1+[-p_2])S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)t^n \\ &= \frac{6-10xt-\left(8+16x^2\right)t^2-\left(4+20x+8x^3\right)t^3-\left(2+8x^2\right)t^4+2xt^5}{1-2xt-(4x^2+3)t^2-(8x^3+8x)t^3-(4x^2+1)t^4+2xt^5-t^6} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n(x)K_n t^n \ .\end{aligned}$$

وهي الدالة المولدة لجداءات كثيرات حدود بال-لوكاس وأعداد ثريبوناتشي لوكاس أي:

$$Q_n(x)K_n = \left(2S_n(p_1+[-p_2])-2xS_{n-1}(p_1+[-p_2])\right)\left(3S_n(a_1+a_2+a_3)-2S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)-S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)\right) \ .$$

- باستبدال p_1 بـ $(2p_1)$ و (p_2) بـ$(-2p_2)$ في العلاقات (3.14) ،(3.12)و(3.16) وبوضع

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$$ و $$\begin{cases} p_1-p_2=x \\ 4p_1p_2=-1 \end{cases}$$ نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(2p_1+[-2p_2])\left(3S_n(a_1+a_2+a_3)-2S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)-S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)\right)t^n \\
&=3\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(2p_1+[-2p_2])S_n(a_1+a_2+a_3)t^n-2\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(2p_1+[-2p_2])S_{n-1}(a_1+a_2+a_3) \\
&-\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(2p_1+[-2p_2])S_{n-2}(a_1+a_2+a_3) \\
&=3\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\mathrm{T}_n t^n-2\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(2p_1+[-2p_2])S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)-\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(2p_1+[-2p_2])S_{n-2}(a_1+a_2+a_3) \\
&=\frac{3-4xt+\left(6-4x^2\right)t^2+8xt^3-t^4}{1-2xt-(4x^2-3)t^2-8x(x^2-1)t^3+(4x^2-1)t^4+2xt^5+t^6} \\
&=\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\mathrm{K}_n t^n \quad .
\end{aligned}$$

وهي الدالة المولدة لجداءات كثيرات حدود تشيبتشاف من النوع الثاني وأعداد ثريبوناتشي لوكاس أي:

$$U_n(x)\mathrm{K}_n=S_n(2p_1+[-2p_2])\left(3S_n(a_1+a_2+a_3)-2S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)-S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)\right) \quad .$$

- باستبدال p_1 بـ $(2p_1)$ و (p_2) بـ$(-2p_2)$ في العلاقات(3.10)،(3.12)،(3.14)و(3.16) وبوضع

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$$ و $$\begin{cases} p_1-p_2=x \\ 4p_1p_2=-1 \end{cases}$$ نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{+\infty}\left(S_n(2p_1+[-2p_2])-xS_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right)\left(3S_n(a_1+a_2+a_3)-2S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)-S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)\right)t^n \\
&=\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(2p_1+[-2p_2])\left(3S_n(a_1+a_2+a_3)-2S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)-S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)\right)t^n \\
&-x\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\left(3S_n(a_1+a_2+a_3)-2S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)-S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)\right)t^n \\
&=\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)\mathrm{K}_n t^n-x\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\mathrm{K}_n t^n \\
&=\frac{3-5xt+\left(6-8x^2\right)t^2+\left(12x-12x^3\right)t^3-\left(1-4x^2\right)t^4+xt^5}{1-2xt-4x^2t^2-4x(2x^2+1)t^3+(4x^2-1)t^4+2xt^5+t^6} \\
&=\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\mathrm{K}_n t^n \quad .
\end{aligned}$$

وهي الدالة المولدة لجداءات أعداد ثريبوناتشي لوكاس وكثيرات حدود تشبيتشاف من النوع الاول أي:

$$T_n(x)\mathrm{K}_n=\left(S_n(2p_1+[-2p_2])-xS_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right)\left(3S_n(a_1+a_2+a_3)-2S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)-S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)\right)$$

- باستبدال p_1 بـ $(2p_1)$ و (p_2) بـ $(-2p_2)$ في العلاقات(3.10)،(3.12)،(3.14)و(3.16) وبوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=x \\ 4p_1p_2=-1 \end{cases}$ نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(S_n(2p_1+[-2p_2])-S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right)\left(3S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)-2S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)-S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)\right)t^n$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(2p_1+[-2p_2])\mathrm{K}_n t^n-\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\mathrm{K}_n t^n$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}U_n(x)\mathrm{K}_n t^n-\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\mathrm{K}_n t^n$$
$$=\frac{3-(4x+1)t+(6-4x-4x^2)t^2+\left(4+8x-12x^2\right)t^3-\left(1-4x\right)t^4+t^5}{1-2xt-(4x^2-3)t^2-8x(x^2-1)t^3+(4x^2-1)t^4+2xt^5+t^6}.$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}V_n(x)\mathrm{K}_n t^n\quad .$$

وهي الدالة المولدة لجداءات أعداد ثريبوناتشي لوكاس وكثيرات حدود تشبيتشاف من النوع الثالث أي:

$$V_n(x)\mathrm{K}_n=\left(S_n(2p_1+[-2p_2])-S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right)\left(3S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)-2S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)-S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)\right).$$

- باستبدال p_1 بـ $(2p_1)$ و (p_2) بـ $(-2p_2)$ في العلاقات(3.10)،(3.12)،(3.14)و(3.16) وبوضع $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=x \\ 4p_1p_2=-1 \end{cases}$ نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(S_n(2p_1+[-2p_2])+S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right)\left(3S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)-2S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)-S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)\right)t^n$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(2p_1+[-2p_2])\mathrm{K}_n t^n+\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\mathrm{K}_n t^n$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}U_n(x)\mathrm{K}_n t^n+\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\mathrm{K}_n t^n$$
$$=\frac{1+t+(2x^2+1)t^2+(4x^3+2x-1)t^3}{1-2xt-(4x^2-3)t^2-8x(x^2-1)t^3+(4x^2-1)t^4+2xt^5+t^6}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}W_n(x)\mathrm{K}_n t^n\quad .$$

وهي الدالة المولدة لجداءات كثيرات حدود تشبيتشاف من النوع الثاني وأعداد ثريبوناتشي لوكاس أي:

$$W_n(x)\mathrm{K}_n=\left(S_n(2p_1+[-2p_2])+S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right)\left(3S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)-2S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)-S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)\right).$$

الخاتمة

ختاما قمنا من خلال هذه المذكرة بحساب الدوال المولدة باستعمال التوابع التناظرية، و ذلك بالإعتماد على نظرية أساسية 1.3 في الفصل الثالث التي سمحت لنا بالحصول على الدوال المولدة لبعض الأعداد الشهيرة و أعداد ثريبوناتشي و كذلك لبعض كثيرات الحدود المتعامدة، بالإضافة إلى جداءات أعداد ثريبوناتشي وثريبوناتشي لوكاس مع الأعداد الشهيرة و كثيرات الحدود.

مقترحات

نقترح التوسع في الأبجدية P من $P=\{p_1,p_2\}$ إلى $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ ووضع نظرية جديدة تعمم النظرية 1.3 التي تسمح لنا بالحصول على الدوال المولدة لجداءات الأعداد من الرتبة الثالثة ونخص بالذكر كل من جداءات أعداد ثريبوناتشي وأعداد ثريبوناتشي لوكاس (المربعات ،الجداءات المتوالية والغير متوالية ،...)

إضافة الى ايجاد الدوال المولدة لأعداد ثريبوناتشي وأعداد ثريبوناتشي لوكاس ذات الدليل السالب وجداءاتها .

المراجع باللغة العربية:

[1] أ **.حميد شراري، م .عبد العزيز الزهيري.** "مقدمة في نظرية التركيبات ". مطبوعات جامعة سعود المملكة العربية السعودية .2010 .

[2] **ح .عدالة، أ .نوايرية، ع .العياضي.** "تطبيقات على التوابع التناظرية ". مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ تعليم ثانوي-رياضيات-. المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي سكيكدة.2015.

[3] **س .بوغابة.** **"**كثيرات الحدود المتعامدة و التوابع التناظرية". مذكرة تخرج لنيل شهادة ماستر - .جامعة جيجل.2017

[4] **ه .مرزوق** . "إيجاد الدوال المولدة باستعمال تقنية التوابع التناظرية ".مذكرة التخرج لنيل شهادة ماستر - ..جامعة جيجل .2018

المراجع باللغة الأجنبية

[5] A. Abderrezzak, *Généralisation d' identitès de Carlitz, Howard et Lehmer* , A equationes Math. –- Vol. 49, (1995), 36-46

[6]A. Abderrazzak, *Généralisation de la Transformation d' Euler d' une série formelle* , Adv. Math. - 1994. - Vol. 103, (1994), 180-195.

[7] A. Boussayoud, S. Boughaba, M. Kerada, M. Acikgoz, S. Araci , et *Generating functions of binary products of k-Fibonacci and orthogonal polynomials*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat , Ser. A Mat., RACSAM. DOI: 10.1007/s13398-019-00641-4, (2019), 12page.

[8] A. Boussayoud ,A. Abderrezzak and P.B. Zhang, *Symmetric functions for families of generating functions, Neural, Parallel and Scienti.c Computations.* 26, (2018), 53-64.

[9] A. Boussayoud, M. Chelgham and S. Boughaba, *On some identities and generating functions for Mersenne numbers and polynomials*, Turkish Journal of Analysis and Number Theory. 6(3),(2018), 93-97.

[10] A. Boussayoud , A. Abderrezzak and S. Araci et A new symmetric endomorphism operator for some generalizations of certain generating functions, Notes Number Theory Discrete Math.24 ,(2018), 4 5-58.

[11] A. Boussayoud, M. Kerada and N. Harrouche , *On the k-Lucas numbers and Lucas Polynomials*, Turkish Journal of Analysis and Number.5(3) , (2017),121-125.

[12] A. Boussayoud , M. Boulyer and M. Kerada, *On some identities and symmetric functions for Lucas and Pell numbers*, Electron. J. Math. Analysis Appl. 5(1), (2017),202-207.

[13] A. Boussayoud, On *some identities and generating functions for Pell-Lucas numbers*, Online.J. Anal. Comb.(2017), 12 1-10.

[14] A. Boussayoud , M. Boulyer and M. Kerada, *A simple and accurate method for determination of some generalized sequence of numbers*, Int. J. Pure Appl. Math.108, (2016),503-511.

[15] A. Boussayoud and N. Harrouche, *Complete symmetric functions and k- .bonacci numbers*, Commun. Appl. Anal. 20, (2016),457-467.

[16] A. Boussayoud, A. Abderrezzak and M. Kerada, *Some applications of symmetric functions*, Integers. 15, A#48, (2015), 1-7.

[17] A. Boussayoud and M. Kerada, *Symmetric and generating functions*, Int. Electron. J. Pure Appl. Math. 7, (2014),195.203.

[18] A. Boussayoud, M. Kerada, R. Sahali and W. Rouibah , *Some applications on generating functions*, J. Concr. Appl. Math. 12, (2014),321-330.

[19] A. Boussayoud , A. Abderrezzak, and M. kerada, *A Generalization of some orthogonal polynomials*, Springer Proc Math Stat. Vol. 41,(2013), 235-241.

[20] H. Campos, P. Catarino and P. Vasco, *On the Mersenne sequence*, Ann. Math. Inform.46, (2016), 37- 53.

[21] T.S.Chihara, *An introduction to orthogonal polynomails*, Gordon Breach, Science Pub lishers, Inc, (1978).

[22] A. Dil and I. Mezo, *A symmetric algorithm for hyperharmonic and Fibonacci numbers*, Appl. Math. Comput. 206, (2008), 942-951.

[23] M. Elia, Derived sequences, *the Tribonacci recurrence and cubic forms*, Fibonacci Q. 39(2), (2001), 107-109.

[24] M. Feinberg, *Fibonacci-Tribonacci*, Fibonacci Q. 1(3) , (1963),70-74.

[25] P. Filipponi, *Incomplete Fibonacci and Lucas numbers*, Rend. Circ. Mat. Palermo (Serie II). 45, (1996), 37-56.

[26] H.H. Gulec, N. Taskara et K. Uslu, *On the properties of Lucas numbers with binomial coe¢ cients*, Appl. Math. Lett. 23, (2010), 68-72.

[27] V. E. Hoggatt, *Fibonacci and Lucas numbers, A publication of the Fibonacci Association. University of Santa Clara, Santa Clara*, Houghton Mi- in Company,1969.

[28] E. Kilic, *Tribonacci sequences with certain indices and their sums*, Ars Comb. 86, (2008),13-22.

[29] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, John Wileyand Sons Inc, NY, (2001).

[30] T. Koshy et Z. Gao, *Catalan numbers with Mersenne subscripts*, Math. Sci. 38, (2013), 86.91.

[31] M. Merca, *A generalization of the symmetry between complete and elementary symmetric functions*, Indian J.Pure Appl. Math.45, (2014), 75-89.

[32] A.A. Muwa and A.N. Philippou , *Waiting for the Kth consecutive success and the Fibonacci sequence of order K*, Fibonacci Q. 20(1), (1982),28-32.

[33] A. Pinter and H.M. Srivastava, *Generating functions of the incomplete Fibonacci and Lucas numbers*, Rend. Circ. Mat. Palermo (Serie II).48, (1999), 591-596.

[34] J.S. Ramirez and V.F. Sirvent, *Incomplete Tribonacci numbers and polynomials*, J. Integer Seq. 17, article 14.4.2, (2014), 14 .

[35] W.R. Spickerman, *Binet.s formula for the Tribonacci se*quence, Fibonacci Q. 20(2), (1982), 118-120.

[36] N. Taskara, Y.Yazlik , *A note on generalized k-Horadam sequence*, Comput. Math. Appl. 63(1), (2012), 36-41.

[37] N. Taskara et N. Yilmaz, *Tribonacci and Tribonacci-Lucas numbers via the determinants of special matrices*, Appl. Math. Sci. 8(39), (2014),(1947-1955).

[38] N.N. Vorobiov, *Numeros de Fibonacci*, Editora MIR, URSS, 1974.