
TABLE DES MATIÈRES

Introduction	3
1 Généralités sur les suites combinatoires	5
1.1 Outils de base de combinatoire	5
1.1.1 Factorielle, factorielles montante et descendante	5
1.1.2 Le coefficient binomial	6
1.1.3 Arrangement	8
1.1.4 Permutation	8
1.1.5 Partition et partition en listes	9
1.1.6 Fonction ou série génératrice	10
1.2 Les nombres de Stirling	11
1.2.1 Les nombres de Stirling de première espèce	11
1.2.2 Les nombres de Stirling de deuxième espèce	17
1.3 Autres suites et polynômes remarquables	21
1.3.1 Les nombres de Delannoy	21
1.3.2 Les nombres et les polynômes Eulérien	22
1.3.3 Les nombres de Catalan	23
1.3.4 Les nombres de Schröder	24
1.3.5 Les polynômes de Gauss ou coefficients q -binomiaux	24
1.3.6 Les Nombres et les polynômes de Bell	26

1.3.7	Les Nombres et les polynômes de Narayana	27
2	Généralités sur la log-convexité et les suites des moments de Stieltjes	28
2.1	La matrice de Hankel et la matrice de Toeplitz	28
2.1.1	Généralité sur les matrices	28
2.1.2	Opération sur les matrices	29
2.1.3	Quelques types de matrices	31
2.1.4	Matrices définie positive et totalement positive	33
2.1.5	La matrice composée	34
2.2	Préliminaires sur les suites log-convexes et les moments de Stieltjes	34
2.3	Les suites des moments de Stieltjes et de Hamburger	36
3	La log-convexité infinie et les suites des moments de Stieltjes	38
3.1	Préliminaire sur la log-convexité infinie	38
3.2	Suites infiniment log-convexes	40
3.2.1	Le lien entre les suites des moments et la log-convexité infinie	40
3.2.2	Les suites des moments associées aux nombres de Catalan-like	42
3.2.3	Les polynômes des moments associés aux q -nombres de Catalan-like	46
	Conclusion	49
	Bibliographie	52

INTRODUCTION

Le thème principal de ce mémoire s'inscrit dans le domaine de la combinatoire.

La combinatoire est un domaine classique de recherche très intéressant et elle sera prometteuse, via ses techniques et outils pratiques, afin de prouver en générale, des propriétés combinatoires.

Les suites log-convexes et log-concaves jouent un rôle de plus en plus important dans la combinatoire, les probabilités, l'optimisation, l'économétrie et les mathématiques appliquées, voir Butler [8] et Stanley [26]. En vue de ces développements, des propriétés combinatoires associées à la log-convexité ont été établies.

Un grand nombre de suites sont log-convexes ou log-concaves, voir Brenti [6]. Il s'agit de propriétés difficiles à montrer et non conservées par des transformations linéaires en général. Parmi les applications combinatoires, nous citerons à titre non exhaustif, la coloration des graphes et la complexité algorithmique.

Le problème des moments de Stieltjes est l'un des problèmes des moments classiques et apparus naturellement dans plusieurs branches de mathématiques comme la théorie des probabilités, voir [27, 29].

Notre objectif est l'étude des moments de Stieltjes et la log-convexité infinie de certaines

suites combinatoire connues ainsi le lien entre eux en utilisant la positivité totale de certaines type de matrice associée qui s'appelle matrice de Hankel.

Notre mémoire est composé de trois chapitres et une conclusion.

Dans le premier chapitre, nous regroupons essentiellement les notions et les outils de base de la combinatoire nécessaires à la compréhension des chapitres suivants. Nous abordons aussi les suites et les suites des polynômes combinatoires étudiées dans ce mémoire : nombres de Stirling, nombres de Catalan, nombres de Bell, nombres de Narayana, nombres de Delannoy, nombres de Schröder, polynôme de Bell, polynôme de Narayana ...etc

Le deuxième chapitre contient trois sections. Dans la première section, afin d'introduire des généralités sur les matrices nous présentons les définitions de : la matrice de Hankel, la matrice de Toeplitz et la matrice composée ainsi la positivité totale et la positivité définie de ces matrices. Dans les deux dernières sections, nous développons des concepts et outils qui permettent d'assurer la log-convexité infinie des suites. Une propriété qui a été introduit par Chen et Xia [9]. Pour ce faire, on introduira le concept de : la log-convexité, les moments de Stieltjes et les moments de Hamburger qui ont été proposés par Wang et Zhu [28].

Au dernier chapitre, nous commençons par des préliminaires sur la log-convexité infinie et la q -log-convexité infinie des suites et des polynômes respectivement. Ainsi, nous montrons que les deux propriétés sont assurées dans le cas où les suites et les polynômes sont des moments de Stieltjes et des moments q -Stieltjes respectivement. Ensuite, afin d'introduire les nombres de Catalan-like et les q -nombres de Catalan-like avec leurs suites et leurs polynômes associés respectivement, nous fournissons la condition sur laquelle ces nombres et ces polyômes forment des suites des moments de Stieltjes et des moments q -Stieltjes respectivement. Et donc ces suites et ces polynômes sont infiniment log-convexes et infiniment q -log-convexes respectivement. Comme exemples, plusieurs suites et polynômes combinatoires sont infiniment log-convexes, incluant les nombres de Stirling, nombres de Bell, nombres de Catalan, polynômes de Bell, polynômes de Narayana...etc

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES COMBINATOIRES

Dans ce chapitre, nous abordons les outils combinatoires nécessaires à la compréhension des chapitres suivants.

1.1 Outils de base de combinatoire

Cette partie est largement puisées de la référence [5].

1.1.1 Factorielle, factorielles montante et descendante

Définition 1.1.1. Soient x un nombre réel et n un entier positif, la factorielle montante de x d'ordre n est définie par :

$$x^{\bar{n}} = \begin{cases} x(x+1)\dots(x+n-1), & \text{si } n > 0, \\ 1, & \text{si } n = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Aussi, on appelle factorielle montante de x de coefficient α ($\alpha \in \mathbb{N}$) et d'ordre n le polynôme

$$(x | \alpha)^{\bar{n}} = \begin{cases} x(x+\alpha)\dots(x+(n-1)\alpha), & \text{si } n > 0, \\ 1, & \text{si } n = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Définition 1.1.2. La factorielle descendante de x d'ordre n est définie par :

$$x^{\underline{n}} = \begin{cases} x(x-1)\dots(x-n+1), & \text{si } n > 0, \\ 1, & \text{si } n = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

et de coefficient α par :

$$(x | \alpha)^{\underline{n}} = \begin{cases} x(x-\alpha)\dots(x-(n-1)\alpha), & \text{si } n > 0, \\ 1, & \text{si } n = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Remarque 1.1.1. A noter que, pour $x = 1$ dans l'équation (1.1) ou pour $x = n$ dans l'équation (1.3), on obtient la fonction factorielle (classique)

$$1^{\underline{n}} = n^{\underline{n}} = n!.$$

1.1.2 Le coefficient binomial

Ayant un groupe de n personnes (il est convenu implicitement qu'ils sont discernables), le nombre de façons de choisir un sous-groupe de k individus est compté par le coefficient binomial qui est défini pour tout nombre réel n et tout entier $k \geq 0$ par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}.$$

Ces coefficients apparaissent dans le développement de $(a+b)^n$ appelés relation du binôme de Newton, où a et b sont des nombres réels ou complexes

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad (1.5)$$

Proposition 1.1.1. Les coefficients binomiaux satisfont une relation de récurrence d'ordre deux

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad (1.6)$$

Démonstration. La preuve se démontre combinatoirement en discutant le cas de la $n^{\text{ème}}$ personne : si elle est sélectionnée, il reste à choisir $k-1$ autres personnes depuis les $n-1$ personnes restantes. Ainsi, nous avons $\binom{n-1}{k-1}$ façons de le faire. Sinon, elle n'est pas sélectionnée et donc on choisit k individus parmi les $n-1$ restants. Ce qui se fait de $\binom{n-1}{k}$ façons. \square

A partir de la relation de récurrence (1.6) nous pouvons construire le triangle de Pascal (voir Figure 1.1).

				1						
				1	1					
			1	2	1					
		1	3	3	1					
	1	4	6	4	1					
	1	5	10	10	5	1				
	1	6	15	20	15	6	1			
	1	7	21	35	35	21	7	1		
	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

FIGURE 1.1 – Triangle de Pascal.

Ce triangle satisfait plusieurs propriétés qui s’interprètent facilement avec des raisonnements combinatoires.

Proposition 1.1.2. *On remarque que les lignes du triangle sont symétriques, i.e.*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{1.7}$$

Démonstration. En effet, le fait choisir k personnes parmi n est équivalent à ne pas choisir $n - k$ personnes. □

Proposition 1.1.3. *On a aussi la convolution de Vandermonde (ou Chu-Vandermonde, ou encore binomiale)*

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}. \tag{1.8}$$

Démonstration. Soit E un ensemble à $n + m$ personnes séparé en deux parties disjointes E_1 et E_2 de cardinaux n et m . Il y a exactement $\binom{n+m}{k}$ parties à k personnes dans E . Or pour former une partie à k personnes de E , on peut pour chaque $j \in \{0, \dots, k\}$ commencer par choisir j personnes dans E_1 avant d’en choisir $k - j$ dans E_2 . Il y a $\binom{n}{j} \binom{m}{k-j}$ possibilités pour chaque $j \in \{0, \dots, k\}$, puis au total $\sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}$ possibilités, d’où l’identité. □

1.1.3 Arrangement

Définition 1.1.3. Soit $[n] := \{1, \dots, n\}$, on appelle arrangement de k éléments, toute suite de k éléments distincts de $[n]$.

Exemple 1.1.1. Soit $[6] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $(2, 6, 5, 3)$ est un arrangement de quatre éléments.
- $(1, 3, 4, 3, 2)$ n'est pas un arrangement.

Propriété 1.1.1. Le nombre d'arrangements de $[k]$ dans $[n]$ est compté par la factorielle descendante.

$$n^{\underline{k}}.$$

1.1.4 Permutation

Définition 1.1.4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle permutation toute bijection σ de $[n]$ dans $[n]$. Une permutation σ_n peut être représentée par la forme matricielle

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Le nombre de permutations de l'ensemble $[n]$ est $n!$.

Définition 1.1.5. Un élément ι de $[n]$ est appelé point fixe si son image par la permutation σ est lui-même, c'est à dire $\sigma(\iota) = \iota$. Aussi, une orbite de ι notée O_ι , est l'ensemble des images de ι obtenues en appliquant successivement la permutation σ sur l'élément ι , $O_\iota = \{\sigma^p(\iota), p \in \mathbb{N}\}$.

Exemple 1.1.2. Soit la permutation σ_8

$$\sigma_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

L'élément 7 est un point fixe. Dans cet exemple l'orbite de l'élément 1 est $O_1 = \{1, \sigma(1) = 3, \sigma^2(1) = 4\}$. Remarquez que $O_1 = O_3 = O_4$. Ces éléments $\{1, 3, 4\}$ pris dans cet ordre, forment un cycle noté $(1, 3, 4)$ où chaque élément est l'image du précédent par σ (1 est l'image de 4, 3 est l'image de 1 etc).

Définition 1.1.6. A partir d'une orbite à p éléments, on peut constituer $(p-1)!$ cycles. On peut alors écrire une permutation σ comme un produit de cycles.

Exemple 1.1.3. Pour l'exemple précédent on a :

$$\sigma_8 = (1, 3, 4)(2, 8, 5, 6)(7).$$

Cette représentation est appelée : **écriture en cycles** . Nous conviendrons d'appeler k -permutation toute permutation ayant k cycles.

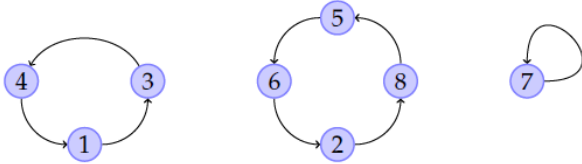


FIGURE 1.2 – Une 3-permutation de [8].

Remarque 1.1.2. Compter le nombre d'injections de $[k]$ dans $[n]$ peut se réduire à considérer tous les sous-ensembles S de cardinal k de $[n]$ et on a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles, puis à considérer toutes les permutations (bijections) de $[k]$ dans S et on a $k!$ permutations. D'où

$$(n)^k = \binom{n}{k} k!.$$

1.1.5 Partition et partition en listes

Définition 1.1.7. Une part P de $[n]$ est un sous-ensemble non vide de $[n]$. Une partition π de $[n]$ est une famille de parts P_1, \dots, P_k disjointes deux à deux, telles que $\bigcup_{i=1}^k P_i = [n]$.

Exemple 1.1.4. Les 3 – partitions de [4] sont :

$$\begin{aligned} & \{\{1,4\}\{2\}\{3\}\} \quad \{\{1\}\{2,4\}\{3\}\} \quad \{\{1\}\{2\}\{3,4\}\} \\ & \{\{1,3\}\{2\}\{4\}\} \quad \{\{1\}\{2,3\}\{4\}\} \quad \{\{1,2\}\{3\}\{4\}\} \end{aligned}$$

Notez qu'une k -permutation peut être considérée comme un partitionnement de $[n]$ en k cycles.

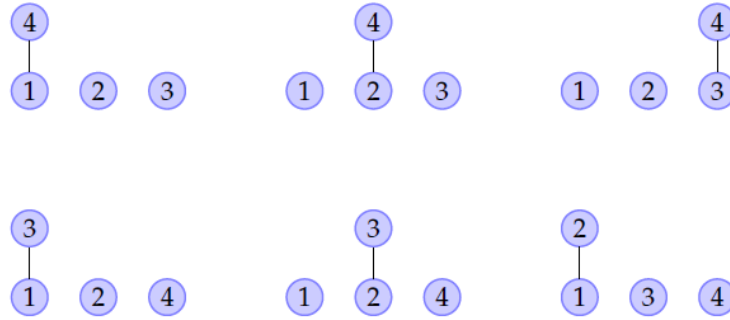


FIGURE 1.3 – 3-partition de [4].

1.1.6 Fonction ou série génératrice

Définition 1.1.8. Soient $(a_n)_n$ une suite et f_n une fonction. On appelle fonction génératrice ou série génératrice de la suite $(a_n)_n$ la série formelle

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_n.$$

On dit qu'une fonction génératrice est de type ordinaire (série génératrice ordinaire) si la fonction f_n est de la forme $f_n(x) = x^n$.

De même, une fonction génératrice est dite exponentielle si la fonction f_n est de la forme $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.

Proposition 1.1.4. Deux fonctions génératrices ordinaires (ou exponentielles) $A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$\left(A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \right)$ et $B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ $\left(B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{x^n}{n!} \right)$ sont égaux si et seulement si $a_n = b_n$, pour tout $n \geq 0$.

Définition 1.1.9. Le produit de convolution de deux séries génératrices ordinaires $A(x)$ et $B(x)$ est une série génératrice ordinaire $C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, où $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$, $n \geq 0$. De même, le produit de deux séries génératrices exponentielles, appelé produit de convolution binomial, est une série génératrice $C(x) = A(x)B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{x^n}{n!}$, où $c_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$, $n \geq 0$.

1.2 Les nombres de Stirling

Les nombres de Stirling des deux espèces furent introduits par Stirling [24] et nommés par Nielsen [23] en l'honneur de ce premier. Ces nombres se manifestent dans de nombreux problèmes de combinatoire et sont reliés à pleins d'autres nombres tels que les nombres de Bernoulli, nombres Eulérien, etc. Nous les trouvons sous différentes notations, les plus courantes sont $s(n, k)$ pour les nombres de Stirling signés et $S(n, k)$ pour la deuxième espèce. Pour notre part, nous utiliserons la notation $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ pour les nombres de Stirling de première espèce non-signés où \square représente des cycles; Et $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ pour les nombres de Stirling de deuxième espèce où $\{ \}$ désigne des parts. Cette notation a été proposée par Karamata [17] et appuyée par Graham et al. [15] où ces derniers donnent un commentaire sur les notations et exposent les maints avantages de cette dernière.

1.2.1 Les nombres de Stirling de première espèce

Définition 1.2.1. *Les nombres de Stirling de première espèce (non-signés) $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ comptent le nombre de k -permutations de $[n]$, et apparaissent comme coefficients du développement de la factorielle montante $(x)^{\overline{n}}$*

$$(x)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] x^k, \quad (1.9)$$

notez que les nombres de Stirling de première espèce signés $s(n, k)$ sont liés au développement de la factorielle descendante $(x)^{\underline{n}}$

$$(x)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k, \quad (1.10)$$

de ce fait

$$s(n, k) = (-1)^{n-k} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]. \quad (1.11)$$

Propriété 1.2.1. 1. *Les nombres de Stirling de première espèce ont une relation de récurrence triangulaire d'ordre deux,*

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] + (n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right], \quad (1.12)$$

avec $\left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = \delta_{n,0}$, où δ est le symbole de Kronecker, et $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = 0$, lorsque $n \neq 0$, $k \notin [n]$.

2. Ils satisfont aussi une relation de récurrence verticale

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = \sum_{i=k}^n \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \binom{i}{k}. \quad (1.13)$$

Démonstration. 1. La récurrence est vérifiée par le partitionnement des permutations $[n]$ qui a k cycles en deux types. Le premier type contient toutes les permutations dans lesquelles le nombre n est un cycle lui même, et les autres $n-1$ nombres sont partitionnés en $k-1$ cycles, alors il y a

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

cas pour le premier type.

Dans le deuxième type, le nombre n n'est pas une cycle lui même, et les autres $n-1$ nombres sont partitionnées en k cycles, et alors le n est inséré immédiatement après certain nombre j dans l'une de ces k cycles. En total, on a

$$(n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

cas pour le deuxième type. La somme de nombres des cas dans ces deux types est le nombre total des partitions de $[n]$ en k cycles.

2. On va montrer par récurrence.

On a pour $k > n$ les deux cotés de l'équation (1.13) sont égaux à 0 donc on a $k \leq n$.

Pour $n = 0$, alors $k = 0$,

$$\binom{0}{0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Supposons pour tout $n \geq 1$ et pour tout k que

$$\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} = \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i}{k} \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix},$$

alors pour tout $k \leq n$, et d'après la récurrence de Stirling (1.12), on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{i}{k} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} &= \sum_{i=0}^n \binom{i}{k} \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix} \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{i}{k} \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix} + (n-1) \sum_{i=0}^n \binom{i}{k} \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{i}{k} \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

D'après la récurrence de Pascale (1.6), on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{i}{k} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} &= \sum_{i=0}^n \left(\binom{i-1}{k-1} + \binom{i-1}{k} \right) \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{i-1}{k-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^n \binom{i-1}{k} \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

par hypothèse :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{i}{k} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Par la récurrence de Stirling (1.12), on trouve

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}.$$

□

Propriété 1.2.2. *On a les relations suivantes :*

1. $\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!$;
2. $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$;
3. $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$;
4. $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}$.

Démonstration. 1. On montre par induction en n . Pour $n = 0$ trivial ($\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 = 0!$). On suppose que la propriété est vraie pour n , c'est à dire $\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!$, et on va la montrer pour $n+1$.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right] &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\left[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right] + n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right] + n \sum_{k=0}^{n+1} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right] + n \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] + n \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \\
&= n! + n(n)! \\
&= (n+1)!.
\end{aligned}$$

2. Pour permuter un ensemble $\{1,2,\dots,n\}$ en un seul cycle, on a $n!$ méthodes, et puisque nous avons commencées par l'un des valeurs dans un cycle donnée, nous avons surestimé le total d'un facteur de n , alors

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = (n-1)!.$$

3. Trivial.

4. Pour compter ces permutations, nous avons seulement besoin de choisir les 2 éléments dans $\{1,2,\dots,n\}$, vont partager un cycle tandis que les autres sont représenté par un cycle singleton. Ainsi

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \binom{n}{2}.$$

□

Par la relation de récurrence (1.12), on obtient le tableau des nombres de Stirling de première espèce :

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

TABLE 1.1 – Les nombres de Stirling de première espèce.

De plus, leurs fonctions génératrices sont comme suit :

Proposition 1.2.1. 1. La fonction génératrice exponentielle double des nombres de Stirling de première espèce est

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^n}{n!} y^k = \frac{1}{(1-x)^y}. \quad (1.14)$$

2. La fonction génératrice exponentielle des nombres de Stirling de première espèce est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^n}{n!} = \frac{(-1)^k}{k!} \ln^k(1-x). \quad (1.15)$$

Démonstration. 1. D'après (1.11) on a :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (-1)^{n-k} s(n, k),$$

alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} y^k \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} s(n, k) y^k \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n s(n, k) (-y)^k \frac{(-x)^n}{n!}. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après le binôme de Newton (1.5), on a :

$$\begin{aligned}
 (1+x)^y &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{y}{n} x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y!}{(y-n)!n!} x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} y(y-1)(y-2)\dots(y-n+1) \frac{x^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (y)_n \frac{x^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n s(n,k) y^k \frac{x^n}{n!},
 \end{aligned}$$

alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n s(n,k) (-y)^k \frac{(-x)^n}{n!} = (1-x)^{-y} = \frac{1}{(1-x)^y}.$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} y^k \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{(1-x)^y}.$$

2. De la relation (1.14), on obtient

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^n}{n!} y^k &= \frac{1}{(1-x)^y} \\
 &= (1-x)^{-y} \\
 &= \exp((-y)\ln(1-x)) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{((-y)\ln(1-x))^k}{k!} \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln^k(1-x)}{k!} y^k.
 \end{aligned}$$

On aura donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^n}{n!} = \frac{(-1)^k \ln^k(1-x)}{k!}.$$

□

Remarque 1.2.1. La relation (1.9) est une série génératrice ordinaire des nombres de Stirling de première espèce.

1.2.2 Les nombres de Stirling de deuxième espèce

Définition 1.2.2. Les nombres de Stirling de deuxième espèce $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ comptent le nombre de k -partitions de $[n]$. Ils apparaissent lors de l'expression du monôme x^n dans la base des moments factoriels décroissants $(x)^{\underline{k}}$

$$x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{k}}. \quad (1.16)$$

Proposition 1.2.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

1. $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 0$, $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1$.
2. $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$.
3. $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$.

Démonstration. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, d'après (1.16) on a :

$$x^n = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} x + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} x(x-1) + \cdots + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} x(x-1) \cdots (x-n+1) \quad (1.17)$$

1. En prenant $x = 0$ dans (1.17), on obtient immédiatement :

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 0.$$

Par suite, en substituant $S(n, 0)$ dans (1.17), puis en divisant par x , on obtient :

$$x^{n-1} = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} (x-1) + \cdots + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} (x-1)(x-2) \cdots (x-n+1).$$

En prenant dans cette dernière $x = 1$, on obtient :

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1.$$

Enfin, l'identification des coefficients dominants des polynômes du membre de gauche et du membre de droite de (1.17) donne directement :

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1.$$

2. En substituant $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}$ et $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$ par leurs valeurs dans (1.17), on obtient :

$$x^n = x + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} x(x-1) + \cdots + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} x(x-1) \cdots (x-n+1).$$

En prenant $x = 2$ dans cette dernière, on obtient :

$$2^n = 2 + 2 \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}.$$

D'où l'on tire :

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 2^{n-1} - 1.$$

3. L'identification des coefficients de x^{n-1} dans les deux membres de l'identité (1.17) donne :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} (1 + 2 + \dots + (n-1)) = 0.$$

Puisque $\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1$ (déjà démontrée), il en résulte que :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

□

Ils ont aussi les relations de récurrence suivantes.

Propriété 1.2.3. 1. La relation de récurrence triangulaire d'ordre deux :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}, \quad (1.18)$$

avec $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = \delta_{n,0}$, et $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0$ lorsque $k \notin [n]$ et $n \neq 0$.

2. La relation de récurrence verticale :

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\}. \quad (1.19)$$

Démonstration. 1. La récurrence est vérifiée par le partitionnement des partitions $[n]$ à deux types. Le premier contient toutes les partitions dans lesquelles l'entier n est une part lui-même, et les autres $n-1$ nombres sont partitionnés à $k-1$ parts, alors il y a

$$\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$$

cas dans ce type.

Dans le deuxième type, dans lequel le nombre n n'est pas une part lui-même, les autres $n-1$ nombres sont partitionnés en $k-1$ part, et alors il y a

$$k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$$

cas possibilité.

Donc, la somme des deux types est le nombre total des partitions de $[n]$ en k parts.

2. En partitionnant les partitions $[n+1]$ à $k+1$ parts, il y a

$$\binom{n}{i}$$

méthodes pour choisir les $n - i$ nombres pour être dans la même part que le nombre $n + 1$, et alors il y a aussi

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\}$$

méthodes pour partitionner les i nombres restent à k parts supplémentaires.

□

De la relation de récurrence (1.18), on obtient le tableau des nombres de Stirling de deuxième espèce suivant :

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

TABLE 1.2 – Les nombres de Stirling de deuxième espèce.

Les nombres de Stirling de deuxième espèce possèdent aussi la forme explicite suivante.

Proposition 1.2.3. *Pour $0 \leq k \leq n$, on a*

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k-i}}{k!} \binom{k}{i} i^n. \tag{1.20}$$

De plus, leurs séries génératrices sont comme suit.

Proposition 1.2.4. *1. La série génératrice ordinaire associée aux nombres de Stirling de deuxième espèce est donnée par*

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n = \frac{x^k}{(1 - x|x)^k}. \tag{1.21}$$

2. La fonction génératrice exponentielle des nombres de Stirling de deuxième espèce est donnée par

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}. \quad (1.22)$$

3. La fonction génératrice exponentielle double des nombres de Stirling de deuxième espèce est donnée par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} y^k = \exp(y(e^x - 1)). \quad (1.23)$$

Démonstration. 1. Posons

$$f_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n.$$

De la relation de récurrence (1.18), on trouve

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \left(\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} \right) x^n \\ &= x \sum_{n=k}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} x^{n-1} + kx \sum_{n=k-1}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} x^{n-1} \\ &= x \sum_{n=k-1}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\} x^n + kx \sum_{n=k}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n \\ &= x f_{k-1}(x) + kx f_k(x). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$f_k(x) = \frac{x}{1 - kx} f_{k-1}(x). \quad (1.24)$$

Alors si on procède la relation (1.24) sur k , on aura

$$f_k(x) = \frac{x}{1 - kx} \times \frac{x}{1 - (k-1)x} \times \cdots \times \frac{x}{1 - x} f_0(x),$$

où $f_0(x) = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} x^0 = 1$. D'où le résultat.

2.

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=k}^{+\infty} S(n, k) \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} S(n, k) \frac{x^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \right) \frac{x^n}{n!} \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \frac{x^n}{n!} \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((k-i)x)^n}{n!} \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} e^{(k-i)x} \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (e^x)^{k-i} \\
 &= \frac{(e^x - 1)^k}{k!}.
 \end{aligned}$$

3. D'après (1.22), on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} y^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^x - 1)^k}{k!} y^k \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \exp(y(e^x - 1)).
 \end{aligned}$$

□

1.3 Autres suites et polynômes remarquables

1.3.1 Les nombres de Delannoy

Définition 1.3.1. *Le nombre de Delannoy, noté par $D(m, n)$, $m, n \in \mathbb{N}$, compte le nombre de chemins allant du coin sud-ouest $(0, 0)$ d'une grille rectangulaire au coin nord-est (m, n) , en utilisant uniquement les marches nord, nord-est ou est, et qui défini par la relation de récurrence suivante :*

$$D(m, n) = D(m-1, n) + D(m-1, n-1) + D(m, n-1) \quad \text{pour } m, n \neq 0, \quad (1.25)$$

avec $D(0, 0) = 1$.

La forme explicite de ces nombres est :

$$D(m, n) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{m+n-k}{m}.$$

La fonction génératrice ordinaire double est donnée par :

$$\sum_{m, n \geq 0} D(m, n) x^m y^n = \frac{1}{1 - x - y - xy}.$$

Si $n = m$, $D(n, n)$ s'appelle le nombre central de Delannoy noté aussi par D_n et qui satisfait les relations suivantes :

$$D_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+k}{k},$$

$$D_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{n-k} \binom{2k}{k}.$$

Pour plus de détails voir la référence [10].

1.3.2 Les nombres et les polynômes Eulérien

Définition 1.3.2. Le nombre Eulérien, noté par $A(n, k)$, $0 \leq k \leq n - 1$, compte le nombre de permutations de $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ avec exactement k descentes. Il est défini par la relation de récurrence suivante :

$$A(n, k) = kA(n - 1, k) + (n - k + 1)A(n - 1, k - 1), \quad (1.26)$$

avec $A(n, 1) = 1$, $n \neq 0$.

La forme explicite est donnée par

$$A(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j)^n.$$

Exemple 1.3.1. $n = 3$

$$[3] = \{1, 2, 3\}.$$

Les permutation $[3]$ qui ont une descente sont :

$$(1, \mathbf{3}, 2), (2, 1, \mathbf{3}), (2, \mathbf{3}, 1), (3, 1, \mathbf{2}).$$

Définition 1.3.3. Le polynôme Eulerien est défini par :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^n A(n, k)x^k = x \sum_{k=0}^n k!S(n, k)(x-1)^{n-k},$$

avec $A_0(x) = A_1(x) = 1$.

Qui satisfait aussi la récurrence suivante :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_k(x)(x-1)^{n-k-1} \quad n \geq 1. \tag{1.27}$$

De la relation de récurrence (1.26), nous obtenons quelques valeurs du triangle des coefficients Eulériens :

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1								
2	1	1							
3	1	4	1						
4	1	11	11	1					
5	1	26	66	26	1				
6	1	57	302	302	57	1			
7	1	120	1191	2416	1191	120	1		
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1	
9	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1

TABLE 1.3 – Quelques valeurs des nombres Eulerien.

1.3.3 Les nombres de Catalan

Définition 1.3.4. Les nombres de Catalan notés par C_n , définis par :

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Ils satisfont la relation de récurrence :

$$C_0 = 1, \quad C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} \quad (n \geq 1).$$

Ainsi la relation de récurrence :

$$C_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} C_{n-1}.$$

La série génératrice des nombres de Catalan est définie par :

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Les nombres de Catalan peuvent être interprétés de différentes façons dont voici quelques exemples :

- 1- Le nombre de façons différentes de placer des parenthèses autour de $n+1$ facteurs, pour préciser une expression faisant intervenir n fois une loi de composition intérieur non associative.
- 2- Le nombre de façons de découper en triangle un polygone convexe à $n+2$ côtés en reliant certaines de ses sommets par des segments de droite.

1.3.4 Les nombres de Schröder

Définition 1.3.5. Les nombres de Schröder notés par r_n compte le nombre de chemins de longueur $2n$ allant de $(0,0)$ à $(2n,0)$, formées des pas unitaires nord-est et sud-est (c'est à dire $(1,1)$ ou $(1,-1)$) ou de pas horizontaux doubles (c'est à dire $(2,0)$), et qui de plus sont toujours au-dessous de l'axe des X . ils satisfont la relation de récurrence suivante :

$$r_n = r_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} r_k r_{n-1-k}.$$

Sa fonction génératrice :

$$r(z) = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 6z + z^2}}{2z}.$$

Ils vérifient aussi la formule :

$$r_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{n-k} \binom{2k}{k}.$$

1.3.5 Les polynômes de Gauss ou coefficients q -binomiaux

Définition 1.3.6. Le q -analogue du coefficient binomial ou le polynôme de Gauss est défini pour $0 \leq k \leq n$ par :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!},$$

où

$$[n]_q! = [1]_q [2]_q \cdots [n]_q!,$$

avec

$$[n]_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}.$$

Le coefficient q -binomial s'écrit aussi pour $0 \leq k \leq n$ par :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{[n-i]_q}{[i+1]_q}.$$

Pour $q = 1$, le coefficient q -binomial est le coefficient binomial classique. Le coefficient q -binomial est donné aussi par :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)(1-q^2)\cdots(1-q^{n-k})} = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j q^j.$$

Remarque 1.3.1. Ce coefficient a plusieurs propriétés, par exemple il est symétrique et polynomial en q avec des coefficients $\{a_k\}_{k \geq 0}$.

Remarque 1.3.2. Comme les coefficients binomiaux, les coefficients q -binomiaux sont symétriques, c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q,$$

il s'ensuit

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_q = \sum_{i=0}^{n-1} q^i.$$

Nous présentons quelques valeurs du triangle des coefficients q -binomiaux ci-dessous :

n/k	0	1	2	3
0	1			
1	1	1		
2	1	$1+q$	1	
3	1	$1+q+q^2$	$1+q+q^2$	1
4	1	$1+q+q^2+q^3$	$1+q+2q^2+q^3+q^4$	$1+q+q^2+q^3$

TABLE 1.4 – Table des valeurs de $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.

Les coefficients q -binomiaux satisfont la relation de récurrence suivante :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q, \text{ pour tout } 1 \leq k \leq n.$$

-Cette équation est l'analogie de l'identité de Pascal pour le cas classique.

-Il ya aussi l'analogie de la formule de binôme de Newton pour les coefficient q -binomiaux :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 + q^k x) = \sum_{k=0}^n q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k.$$

1.3.6 Les Nombres et les polynômes de Bell

Définition 1.3.7. *Les nombres*

$$B_n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\},$$

s'appellent les nombres de Bell, B_n est le nombre total de partition de l'ensemble $[n]$, les premières valeurs sont données dans le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B_n	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975	678570	4213597	27644437

TABLE 1.5 – Quelques valeurs des nombres de Bell.

Proposition 1.3.1. *Les nombres de Bell vérifient les relations suivantes :*

$$B_{n+1} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j, \text{ la relation de récurrence,}$$

$$\sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!} = \exp(e^x - 1), \text{ la fonction génératrice,}$$

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!}, \text{ formule explicite.}$$

Définition 1.3.8. *Le polynôme associé au nombre de Bell est défini par :*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k,$$

où $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ est le nombre de Stirling de deuxième espèce.

1.3.7 Les Nombres et les polynômes de Narayana

Définition 1.3.9. *Le nombre de Narayana est*

$$N(n, k) = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k+1}.$$

Ce nombre compte le nombre de parenthésages correctes en n paires de parenthèses et qui contiennent k occurrences de la paire '()' . La somme de ces nombres de est un nombre de Catalan :

$$\sum_{k=1}^n N(n, k) = C_n.$$

Proposition 1.3.2. *La serie génératrice des nombres de Narayana est donnée par :*

$$\sum_{n>0, k>0} N(n, k) x^n y^n = \frac{1}{2x} (1 - x(1+y) - \sqrt{(1-x(1+y))^2 - 4yx^2}).$$

Le polynôme de Narayana est

$$N(x) = \sum_{k=0}^n N(n, k) x^k.$$

Ces polynômes vérifient la relation de récurrence suivante :

$$(n+1)N_n(x) = (2n-1)(1+x)N_{n-1}(x) - (n-2)(x-1)^2 N_{n-2}(x),$$

avec $N_1(x) = x$ et $N_2(x) = x + x^2$.

Le polynôme de Narayana de type B est aussi défini par :

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 x^k.$$

CHAPITRE 2

GÉNÉRALITÉS SUR LA LOG-CONVEXITÉ ET LES SUITES DES MOMENTS DE STIELTJES

2.1 La matrice de Hankel et la matrice de Toeplitz

2.1.1 Généralité sur les matrices

Définition 2.1.1. Une matrice A de taille (ou de dimension) $n \times p$ est un tableau de nombres formé de n lignes et p colonnes. Ces nombres sont appelés **coefficients** de matrice.

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des matrices à coefficients dans \mathbb{K} possèdent n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (ou parfois $\mathcal{M}(n, p, \mathbb{K})$). Lorsque $p = n$ on note plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 2.1.1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice carré d'ordre 3, $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Définition 2.1.2. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- On dit que A est une **matrice-ligne** si et seulement si $n = 1$.
- On dit que A est une **matrice-colonne** si et seulement si $p = 1$.
- On dit que A est une **matrice carrée** d'ordre n si et seulement si $n = p$.

Définition 2.1.3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ tels que $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. On dit que A et B sont égaux et on note $A = B$ si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\} : a_{i,j} = b_{i,j}.$$

2.1.2 Opération sur les matrices

Définition 2.1.4 (La somme). Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ deux matrices, la somme de A et B est la matrice C notée $C = A + B$ dont les coefficients $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ situé a la même ligne et a la même colonne.

Exemple 2.1.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$ alors $C = A + B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$.

Propriété 2.1.1. Soit A, B et C trois matrices de même dimension.

- $A + B = B + A$; on dit que l'addition est commutative;
- $(A + B) + C = A + (B + C)$; on dit que l'addition est associative.

Définition 2.1.5 (Multiplication par un scalaire). On appelle multiplication par un scalaire de la loi externe '.', définie par :

$$\forall k \in \mathbb{K}, \forall (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) : k.(a_{i,j})_{i,j} = (k.a_{i,j})_{i,j}.$$

Exemple 2.1.3. $4 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Proposition 2.1.1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, soient $k, k' \in \mathbb{K}$, on a :

- $k.(A + B) = k.A + k.B$;
- $(kk')A = k.(k'.A)$;
- $(k + k')A = k.A + k'.A$.

Définition 2.1.6 (Le produit). Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{j,k})_{j,k} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle produit de A par B , et on noté $A \times B$ ou par AB , la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définit par : $AB = (c_{i,k})_{i,k}$ où : $\forall (i, k) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, q\} : c_{i,k} = \sum_{j=1}^p a_{i,j}b_{j,k}$.

Exemple 2.1.4. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ alors :

$$A \times B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}.$$

Propriété 2.1.2.

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}) : (AB)C = A(BC).$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall C, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) : A(B + C) = AB + AC.$
- $\forall k \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) : (kA)B = k(AB) = A(kB).$

Remarque 2.1.1. En général la multiplication des matrices n'est pas commutative : $AB \neq BA$.

Définition 2.1.7 (La transposée). Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle transposée de A la matrice notée A^t de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, définie par :

$$A^t = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{p,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.1.5. $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, donc : $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

Proposition 2.1.2.

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) : (A^t)^t = A;$
- $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{K})^2, \forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2 : (\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t;$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) : (AB)^t = B^t A^t.$

Définition 2.1.8 (L'inverse). Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible si et seulement s'il existe $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AA' = A'A = I_n$.

Si A est inversible, alors A' est unique et appelée inverse de A , et on notée A^{-1} .

Proposition 2.1.3. Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices inversibles. Alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Définition 2.1.9. Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de A noté par $\det(A)$ est l'élément de \mathbb{K} défini par la façon suivante :

1. Si $n = 1$, alors $\det(A) = a_{1,1}$;

2. Si $n \geq 2$, alors :

$$\det(A) = a_{1,1}\Delta_{1,1} - a_{2,1}\Delta_{2,1} + \cdots + (-1)^{n-1}a_{n,1}\Delta_{n,1},$$

où $\Delta_{i,1}$ est le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en enlevant à A la ligne i et la première colonne.

Exemple 2.1.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$, alors $\det(A) = 1 \times 9 - 2 \times 3 = 3$.

2.1.3 Quelques types de matrices

Définition 2.1.10 (La matrice symétrique). On dit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice symétrique si et seulement si : $A^t = A$.

Exemple 2.1.7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Définition 2.1.11 (Matrices triangulaires supérieurs). Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est une matrice triangulaire supérieurs si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 : i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

Exemple 2.1.8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieur de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Définition 2.1.12 (Matrices triangulaires inférieurs). Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est une matrice triangulaire inférieure si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 : i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

Exemple 2.1.9. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Définition 2.1.13 (Matrice diagonale). Une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 : i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

Exemple 2.1.10. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ sont des matrices diagonales.

Définition 2.1.14 (Matrice de Hankel). On appelle matrice de **Hankel** une matrice dont les coefficients sont constants sur les diagonales orthogonale à diagonal principale. Autrement dit, une matrice de Hankel d'ordre n s'écrit :

$$H(\alpha) = (a_{i+j})_{i,j \geq 0} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.1.11. La matrice de Hankel de la suite $\alpha = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ est :

$$H(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Définition 2.1.15 (Matrice de Toeplitz). On appelle matrice de **Toeplitz** une matrice dont les coefficients sur une diagonale descendante de gauche à droite sont les mêmes. Autrement dit, une matrice de Toeplitz d'ordre n s'écrit :

$$T(\alpha) = (a_{i-j})_{i,j \geq 0} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.1.12. La matrice de Toeplitz de la suite $\alpha = \{1, 2, 3, 4\}$ est :

$$H(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1.4 Matrices définie positive et totalement positive

Définition 2.1.16 (Matrice définie positive). Soit A une matrice symétrique d'ordre n . Elle est dite définie positive si pour tout vecteur $X(n, 1)$, Le produit $X^tAX > 0$.

Définition 2.1.17 (Matrice semi-définie positive). A est semi-définie positive si pour tout vecteur $X(n, 1)$, Le produit $X^tAX \geq 0$.

Propriété 2.1.3. On a les propriétés suivantes :

1. La matrice inverse d'une matrice définie positive (resp. semi-définie positive) est définie positive (resp. semi-définie positive).
2. Si M est définie positive (resp. semi-définie positive) et si α est un réel strictement positif alors αM est définie positive (resp. semi-définie positive).
3. Si M et N sont définies positives (resp. semi-définies positives) et l'une des deux est inversible, alors $M + N$ est définie positive (resp. semi-définie positive).

Exemple 2.1.13. Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} X^tAX &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Alors, A est semi-définie positive.

Définition 2.1.18 (Matrice totalement positive). Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \geq 0}$ une matrice finie ou infinie de nombres réel. A est dite totalement positive (TP) si tout ses mineurs sont positifs.

Définition 2.1.19. A est totalement positive d'ordre r (TP_r) si tout ses mineurs d'ordre inférieur ou égal à r sont positifs.

Exemple 2.1.14. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

Les mineurs possibles sont :

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_7 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_8 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_9 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{10} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Alors A est totalement positive.

2.1.5 La matrice composée

Définition 2.1.20 (La matrice composée). Soit $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$ une matrice d'ordre n . On appelle matrice composée $C(A)$ de A la matrice d'ordre $\binom{n}{2} \times \binom{n}{2}$, dont tous les éléments sont des mineurs d'ordre 2 de A et arrangés d'une manière lexicographique sur les indices des lignes et des colonnes des mineurs.

Propriété 2.1.4. L'opération composée vérifiant les propriétés suivantes :

- $C(A^t) = C^t(A)$;
- $C(AB) = C(A)C(B)$;
- Si A est inversible, alors $C(A)$ est inversible.

Pour la positivité définie, les matrices composées vérifient le résultat suivant, voir [16, 18].

Proposition 2.1.4. Si A est une matrice définie positive, alors $C(A)$ l'est aussi.

2.2 Préliminaires sur les suites log-convexes et les moments de Stieltjes

Les suites log-convexes et log concaves apparaissent dans beaucoup de domaines mathématiques, principalement en combinatoire, en algèbre, en géométrie, en informatique, en probabilité et en statistique. Il existe un nombre considérable de recherches consacrées à ces sujets. Voir [26] et [7] pour plus d'information.

Définition 2.2.1. Soit $\{x_k\}_{k \geq 0}$ une suite de nombres réels positifs. On dit qu'elle est log-convexe (LX) si pour tout entier $k > 0$, $x_{k-1}x_{k+1} \geq x_k^2$.

Ainsi, une suite de nombres réels $\{x_k\}_{k \geq 0}$, strictement positifs, est log-convexe si et seulement si la suite $\{x_k/x_{k-1}\}_k$ est croissante.

Théorème 2.2.1. [6, Brenti] Soit $\{x_k\}_{k \geq 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs, la suite $\{x_k\}_{k \geq 0}$ est log-convexe si et seulement si $x_{i-1}x_{j+1} \geq x_i x_j$ pour tout $j \geq i \geq 1$.

Ci-dessous des exemples de suites log-convexes.

- Exemple 2.2.1.**
1. La coefficient binomial central $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$;
 2. Les nombres de Bell [14, 4] : $B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)$;
 3. Les nombres de Catalan [21] : $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$;
 4. Les nombres de Motzkin [21, 12] : $M_n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k} C_k$;
 5. Les nombres centraux de la suite de Delannoy [13] : $D_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 2^k$.

Définition 2.2.2. Soit $\{x_k\}_{k \geq 0}$ une suite de nombres réels positifs. On dit qu'elle est log-concave (LC) si pour tout entier $k > 0$, $x_{k-1}x_{k+1} \leq x_k^2$.

Comme analogue au Théorème 2.2.1, nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.2.2. Soit $\{x_k\}_{k \geq 0}$ une suite des nombres réels strictement positifs la suite $\{x_k\}_{k \geq 0}$ est log-concave si et seulement si $x_{i-1}x_{j+1} \leq x_i x_j$ pour tout $j \geq i \geq 1$.

Exemple 2.2.2. Quelques suites log-concaves :

1. Les suites de coefficients binomiaux $\{\binom{n}{k}\}_{k \geq 0}$;
2. Les nombres de Stirling (non signés) de première espèce $\{s(n, k)\}_k$;
3. Les nombres de stirling de second espèce $\{S(n, k)\}_k$;
4. Les nombres Eulériens $\{A(n, k)\}_k$;
5. La suite des coefficients q -binomiaux $\{\binom{n}{k}_q\}_{k \geq 0}$ est log-concave pour $q \geq 1$.

Remarque 2.2.1. La log-converité d'une suite de nombres positifs $\{x_k\}_{k \geq 0}$ est équivalente à la log-concavité de sa suite inverses $\{\frac{1}{x_k}\}_k$. Ce pendant, la log-concavité est préservée par la convolution ordinaire et la convolution binomial, alors que, la convolution ordinaire de deux suites log-convexes n'est pas nécessairement log-convexe.

2.3 Les suites des moments de Stieltjes et de Hamburger

Étant donnée une suite infinie $\mathbf{m} = (m_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels.

Définition 2.3.1. La suite $\mathbf{m} = (m_n)_{n \geq 0}$ est dite suite des moments de Stieltjes si elle a la forme :

$$m_n = \int_0^{\infty} x^n d\mu(x),$$

où μ est une mesure positive sur $[0, \infty[$.

Le lien entre les matrices définies positives et les suites des moments de Stieltjes est donné comme suit

Proposition 2.3.1. $\mathbf{m} = (m_n)_{n \geq 0}$ est une suite des moments de Stieltjes si et seulement si $\det(m_{i+j})_{0 \leq i, j \leq n} \geq 0$ et $\det(m_{i+j+1})_{0 \leq i, j \leq n} \geq 0$, pour $n \geq 0$, où $(m_{i+j})_{i, j \geq 0}$ est la matrice de Hankel $H(\mathbf{m})$.

Ainsi pour le lien entre les matrices totalement positives et les suites des moments de Stieltjes.

Proposition 2.3.2. $\mathbf{m} = (m_n)_{n \geq 0}$ est une suite des moments de Stieltjes si et seulement si la matrice de Hankel $H(\mathbf{m})$ est totalement positive.

Ci-dessous des exemples de suites des moments de Stieltjes [20].

Exemple 2.3.1. 1. Le factoriel $n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$;

2. Les nombres de Bell : $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!}$;

3. Les nombres centraux de Delannoy D_n ;

4. Les nombres de Catalan :

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \text{ tel que } \det(c_{i+j})_{0 \leq i, j \leq n} = \det(c_{i+j+1})_{0 \leq i, j \leq n} = 1, \text{ pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

Définition 2.3.2. La suite $\mathbf{m} = (m_n)_{n \geq 0}$ est dite suite des moments de Hamburger si elle a la forme :

$$m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n d\mu(x),$$

où μ est une mesure réel sur \mathbb{R} .

Ci-dessous des exemples de suites des moments de Hamburger :

- Exemple 2.3.2.**
1. Nombre de Fibonacci défini par : $F_0 = F_1 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$;
 2. Le factoriel $n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$;
 3. Les nombres de Bell : $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!}$;
 4. Les nombres centraux de Delannoy D_n ;
 5. Les nombres de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.
- Pour plus de détail voir l'article [19].

Le lien entre les matrices définies positives et les suites des moments de Hamburger est donné comme suit [27, Théorème 1.2].

Proposition 2.3.3. *La suite $\mathbf{m} = (m_n)_{n \geq 0}$ est une suite des moments de Hamburger si et seulement si La matrice de Hankel $H(\mathbf{m})$ est semi-définie positive, i.e ;*

$$\sum_{i,j \geq 0} m_{i+j} x_i x_j \geq 0 \quad (\text{ou } X^t m X \geq 0),$$

ou équivalent, tout les déterminants de Hankel $H_n(\mathbf{m})$ sont positifs.

Ainsi, les suites des moments de Stieltjes vérifient le résultat suivant [27, Théorème 1.3].

Théorème 2.3.4. *$\mathbf{m} = (m_n)_{n \geq 0}$ est une suite des moments de Stieltjes si et seulement si $\mathbf{m} = (m_n)_{n \geq 0}$ et $\bar{\mathbf{m}} = (m_{n+1})_{n \geq 0}$ sont des suites des moments de Hamburger.*

Corollaire 2.3.5. *$\mathbf{m} = (m_n)_{n \geq 0}$ est une suite des moments de Stieltjes si et seulement si les $H(\mathbf{m})$ et $H(\bar{\mathbf{m}})$ sont semi-définies positive.*

Remarque 2.3.1. *Si la matrice de Hankel $H(\mathbf{m})$ de la suite $\mathbf{m} = (m_n)_{n \geq 0}$ est semi-définie positive, la suite \mathbf{m} est dite aussi semi-définie positive de plus \mathbf{m} est une suite de Hamburger.*

CHAPITRE 3

LA LOG-CONVEXITÉ INFINIE ET LES SUITES DES MOMENTS DE STIELTJES

Dans ce chapitre, on va étudier la log-convexité infinie des suites et des polynômes combinatoires. Ce concept a été introduit par Chen et Xia [9]. Pour faire ça on va utiliser l'approche des suites des moments de Stieltjes et de Hamburger qui ont été proposés par Wang et Zhu [28].

Les résultats établis dans ce chapitre sont dus à Wang-Zhu [28] et Liang-Wang [20].

3.1 Préliminaire sur la log-convexité infinie

Définition 3.1.1. Soit q une variable, f un polynôme dans $\mathbb{R}[q]$. On dit que f est q -positif si f a des coefficients positifs.

Définition 3.1.2. Soient f et g deux polynômes dans $\mathbb{R}[q]$, $f(q) \geq_q g(q)$ si $f(q) - g(q)$ est q -positif.

Définition 3.1.3. Soit $A(q) = (a_{n,k}(q))_{n,k \geq 0}$ une matrice des coefficients dans $\mathbb{R}[q]$, on dit que $A(q)$ est totalement q -positive (q -TP) si tous les mineurs sont q -positifs.

Définition 3.1.4. Soit $\alpha(q) = (a_n(q))_{n \geq 0}$ une suite des polynômes dans $\mathbb{R}[q]$, on dit que la suite des polynômes est q -log-convexe (q -LCX) si :

$$a_{n+1}(q)a_{n-1}(q) \geq_q (a_n(q))^2, \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Ci dessous des exemples de suites des polynômes q -log-convexes (q -LCX) [30].

Exemple 3.1.1. • Le polynôme Eulérien $A_n(q) = \sum_{k=0}^n A(n, k)q^k$;

• Le polynôme de Narayana de type B : $W_n(q) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 q^k$;

• Le polynôme de Bell $B_n(q) = \sum_{k=0}^n \{n \atop k\} q^k$;

• Les nombres centraux de la suite de Delannoy $D_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 2^k$.

Étant donné une suite $\alpha = (a_k)_{k \geq 0}$ des nombres positifs et \mathcal{L} un opérateur défini par :

$$\mathcal{L}(\alpha) = (C_k)_{k \geq 0} \quad \text{avec } C_k = a_k a_{k+2} - a_{k+1}^2.$$

Définition 3.1.5. On dit que la suite $\alpha = (a_k)_{k \geq 0}$ est r -log-convexe si $\mathcal{L}^i(\alpha)$ est positive pour $1 \leq i \leq r$.

Exemple 3.1.2. Les nombres factoriels $a_n = n!$ sont 2-log-convexes car :

$$\begin{aligned} C_n &= a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = n!(n+2)! - [(n+1)!]^2 \\ &= n!(n+1)![(n+2) - (n+1)] = n!(n+1)! \geq 0. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} C_n C_{n+2} - C_{n+1}^2 &= n!(n+1)!(n+2)!(n+3)! - [(n+1)!]^2 [(n+2)!]^2 \\ &= (n+1)!(n+2)! [n!(n+3)! - (n+1)!(n+2)!] \\ &= (n+1)!(n+2)! [n!(n+3)! - n!(n+1)(n+2)!] \\ &= n!(n+1)!(n+2)! [(n+3)! - (n+1)(n+2)!] \\ &= n!(n+1)!(n+2)! [(n+3) - (n+1)] \\ &= 2n!(n+1)!(n+2)! \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, d'autres suites 2-log-convexes [11] :

Exemple 3.1.3. • Les nombres d'Apéry $A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$

- Les nombres d'Apéry de type B $B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}$, $n = 0, 1, 2, \dots$
- Les nombres de Schröder $r_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n+k}{n-k} \binom{2k}{k}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Définition 3.1.6. On dit que la suite $\alpha = (a_k)_{k \geq 0}$ est infiniment log-convexe si $\mathcal{L}^i(\alpha)$ est positive, pour tout $i \geq 1$.

Définition 3.1.7. On dit que la suite des polynômes $\alpha(q) = (a_k(q))_{k \geq 0}$ est r - q -log-convexe si $\mathcal{L}^i(\alpha(q))$ est q -positive pour $1 \leq i \leq r$.

Exemple 3.1.4. Les q -factoriels $a_n(q) = [n]_q!$ sont 2- q -log-convexes car :

$$\begin{aligned} C_n(q) &= a_n(q)a_{n+2}(q) - (a_{n+1}(q))^2 = [n]_q![n+2]_q! - ([n+1]_q!)^2 \\ &= [n]_q![n+1]_q![n+2]_q! - [n+1]_q! = q^{n+1}[n]_q![n+1]_q! \geq_q 0. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} C_n(q)C_{n+2}(q) - (C_{n+1}(q))^2 &= q^{2n+4} ([n]_q![n+1]_q![n+2]_q![n+3]_q! - ([n+1]_q!)^2([n+2]_q!)^2) \\ &= q^{2n+4} [n+1]_q![n+2]_q! ([n]_q![n+3]_q! - [n+1]_q![n+2]_q!) \\ &= q^{2n+4} [n]_q![n+1]_q![n+2]_q! ([n+3]_q! - [n+1]_q[n+2]_q!) \\ &= q^{2n+4} [n]_q![n+1]_q!([n+2]_q!)^2 ([n+3]_q - [n+1]_q) \\ &= [n]_q![n+1]_q!([n+2]_q!)^2 (q^{n+1} + q^{n+2}) \geq_q 0. \end{aligned}$$

Définition 3.1.8. On dit que la suite des polynômes $\alpha(q) = (a_k(q))_{k \geq 0}$ est infiniment q -log-convexe si $\mathcal{L}^i(\alpha(q))$ est q -positive, pour tout $i \geq 1$.

Comme analogue de la Remarque 2.3.1, on a.

Remarque 3.1.1. Si la matrice de Hankel $H(\alpha(q))$ de la suite des polynômes $\alpha(q) = (a_k(q))_{k \geq 0}$ est semi-définie q -positive, alors $\alpha(q)$ l'est aussi et donc $\alpha(q)$ est une suite des polynômes q -Hamburger.

3.2 Suites infiniment log-convexes

3.2.1 Le lien entre les suites des moments et la log-convexité infinie

Dans cette sous-section, nous montrons que les suites des moments de Stieltjes sont infiniment log-convexes.

Commençant tout d'abord par le résultat intéressant suivant.

Lemme 3.2.1. $\alpha = (\alpha_n)_{n \geq 0}$ est une suite des moments de Stieltjes, alors $\mathcal{L}(\alpha)$ est positive.

Démonstration. Soit α une suite des moments de Stieltjes, alors par le Corollaire 2.3.5 $H(\alpha)$ et $H(\bar{\alpha})$ sont des matrices semi-définies positive, implique que leur mineurs principaux d'ordre 2 sont positifs, alors :

$$a_{2k}a_{2k+2} - a_{2k+1}^2 = \begin{vmatrix} a_{2k} & a_{2k+1} \\ a_{2k+1} & a_{2k+2} \end{vmatrix} > 0$$

et

$$a_{2k-1}a_{2k+1} - a_{2k}^2 = \begin{vmatrix} a_{2k-1} & a_{2k} \\ a_{2k} & a_{2k+1} \end{vmatrix} > 0.$$

Alors, la suite est strictement log-convexe, i.e :

$$a_k a_{k+2} - a_{k+1}^2 > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Donc, $\mathcal{L}(\alpha)$ est positive. □

Le lien entre la log-convexité infinie et les suites des moments de Stieltjes est donné comme suit.

Théorème 3.2.2. L'opérateur \mathcal{L} conserve la propriété des moments de Stieltjes pour toute suite $\alpha = (\alpha_n)_{n \geq 0}$ des nombres positifs. De plus, si α est une suite des moments de Stieltjes, alors elle est infiniment log-convexe.

Démonstration. Premièrement on va montrer que l'opérateur \mathcal{L} préserve la propriété de la semi-positivité définie, c'est à dire : si $\alpha = (\alpha_n)_{n \geq 0}$ est semi-définie positive alors $\mathcal{L}(\alpha)$ l'est aussi.

Posons $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ une suite semi-définie positive, alors par la Remarque 2.3.1, $H_n(\alpha)$ l'est aussi. Donc, nous avons besoin de montrer que $H_n(\mathcal{L}(\alpha))$ est aussi semi-définie positive. D'après la Proposition 2.1.4, $C(H_n(\alpha))$ est semi-définie positive, et comme $H_{n-1}(\mathcal{L}(\alpha))$ est une sous-matrice principal de $C(H_n(\alpha))$ par symétrie, alors $H_{n-1}(\mathcal{L}(\alpha))$ est aussi semi-définie positive.

Par exemple pour $n = 2$, on a :

$$H_2(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}, \quad C(H_2(\alpha)) = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c|c} \alpha_0 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_3 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c|c} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c|c} \alpha_0 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_4 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c|c} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_4 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c|c} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_4 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c|c} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{array} \right] \end{bmatrix}.$$

$$H_1(H_1(\mathcal{L}(\alpha))) = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c|c} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{array} \right] \end{bmatrix}.$$

Donc par hypothèse d'induction $H(\mathcal{L}(\alpha))$ est une matrice semi-définie positive. Autrement dit si α est semi-défini positive cela implique que $\mathcal{L}(\alpha)$ l'est aussi.

On sait que α est une suite des moments de Stieltjes. Alors par le Corollaire 2.3.5 et la Remarque 2.3.1 α et $\bar{\alpha}$ sont des suites semi-définies positives, ainsi $\mathcal{L}(\alpha)$ et $\mathcal{L}(\bar{\alpha})$ sont aussi semi définies positive. Notons que $\bar{\mathcal{L}}(\alpha) = \mathcal{L}(\bar{\alpha})$. Donc par le Corollaire 2.3.5 on a $\mathcal{L}(\alpha)$ est une suite des moments de Stieltjes c'est à dire préserve la propriété des moments de Stieltjes pour les suites.

D'autre coté, $\mathcal{L}(\alpha)$ est positive par le Lemme 3.2.1, alors la suite α est infiniment log-convexe. \square

3.2.2 Les suites des moments associées aux nombres de Catalan-like

Définition 3.2.1. Soit $\sigma = (s_k)_{k \geq 0}$ et $\tau = (t_k)_{k \geq 1}$ deux suites des nombres positifs. Les nombres de **Catalan-like** correspondant au couple (σ, τ) sont les éléments de la 0-ème colonne de la matrice triangulaire inférieure infinie définie par :

$$R := R^{\sigma, \tau} = [r_{n,k}]_{n,k \geq 0}$$

et la relation de récurrence :

$$r_{n+1,k} = r_{n,k-1} + s_k r_{n,k} + t_{k+1} r_{n,k+1}, \quad (3.1)$$

avec $r_{0,0} = 1$ et $r_{n,k} = 0$ sauf si $n \geq k \geq 0$.

Ces nombre sont notés par $\mathbf{r}_{\mathbf{n},0}$ et $R^{\sigma, \tau}$ s'appelle la **matrice récursive**. Pour plus d'information, voir [3].

Comme exemples des nombres de Catalan-like $\mathbf{r}_{\mathbf{n},\mathbf{0}}$, on a les suites suivantes :

- Exemple 3.2.1.**
- Les nombres de Catalan C_n si $\sigma = (1, 2, 2, \dots)$ et $\tau = (1, 1, 1, \dots)$;
 - Les coefficients binomiaux centraux $\binom{2n}{n}$ si $\sigma = (2, 2, 2, \dots)$ et $\tau = (2, 1, 1, \dots)$;
 - Les nombres centraux de Delannoy D_n si $\sigma = (3, 3, 3, \dots)$ et $\tau = (4, 2, 2, \dots)$;
 - Les nombres de Bell B_n si $\sigma = \tau = (1, 2, 3, 4, \dots)$;
 - Les nombres factoriels $n!$ si $\sigma = (1, 3, 5, 7, \dots)$ et $\tau = (1, 4, 9, 16, \dots)$;
 - Les nombres de Schröder r_n si $\sigma = (2, 3, 3, \dots)$ et $\tau = (2, 2, 2, \dots)$.

La relation (3.1) s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} r_{1,0} & r_{1,1} & & & \\ r_{2,0} & r_{2,1} & r_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{0,0} & & & & \\ r_{1,0} & r_{1,1} & & & \\ r_{2,0} & r_{2,1} & r_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 & 1 & & & \\ t_1 & s_1 & 1 & & \\ & t_2 & s_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \end{bmatrix},$$

ou brièvement par

$$\bar{R} = R \times J,$$

où \bar{R} est obtenu à partir de R en supprimant la 0-ème ligne et J est la matrice triangulaire

$$J := J^{\sigma, \tau} = \begin{bmatrix} s_0 & 1 & & & \\ t_1 & s_1 & 1 & & \\ & t_2 & s_2 & 1 & \\ & & t_3 & s_3 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Les coefficients de matrice J vérifiant la relation (3.1).

Ci dessous, nous allons énoncer un théorème principale du mémoire.

Théorème 3.2.3. *Si la matrice des coefficients $J^{\sigma, \tau}$ est totalement positif, alors les nombres de Catalan-like correspondant au (σ, τ) forment une suite des moments de Stieltjes.*

Démonstration. Soit $H = (r_{n+k,0})_{n,k \geq 0}$ la matrice de Hankel des nombres de Catalan-like $(r_{n,0})_{n \geq 0}$. Par la Proposition 2.3.2, il suffit de montrer que la matrice de Hankel H est totalement positive. On fait ça en deux étapes.

Lemme 3.2.4. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \geq 0}$ une matrice tridiagonale positive irréductible, A est totalement positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont positifs.

Exemple 3.2.2. Pour les nombres de Catalan-like $n!$, on a $s_k = 2k + 1$ et $t_k = k^2$. Il est facile de montrer que le n -ème mineur principal de la matrice des coefficients J est égale $n!$. Donc, J est totalement positif, et alors les nombres $n!$ forment une suite des moments de Stieltjes.

Par le critère de H. Minc la matrice des coefficients J des nombres de Catalan-like vérifie le résultat suivant.

Proposition 3.2.5. Si $s_0 \geq 1$ et $s_k \geq t_k + 1$ pour $k \geq 1$, alors la matrice tridiagonale $J^{\sigma,\tau}$ est totalement positive.

Démonstration. D'après le Lemme 3.2.4, il suffit de montrer que les mineurs principaux de la matrice des coefficients $J^{\sigma,\tau}$ associée aux nombres de Catalan-like sont positifs, car cette matrice est tridiagonale positive irréductible.

Soit D_n le n -ème mineur principal de la matrice $J^{\sigma,\tau}$. Alors, on va montrer par induction que ces mineurs sont positifs.

Comme $s_0 \geq 1$ et $s_k \geq t_k + 1$ pour $k \geq 1$, alors $D_0 \geq 1$ et $D_1 = s_0 s_1 - T_1 \geq s_0 = D_0 \geq 1$. Supposons que l'hypothèse est vraie pour $n - 1$ c'est à dire $D_{n-1} \geq D_{n-2} \geq 1$. Et on montre qu'elle reste vraie pour n . Si on développe le déterminant D_n le long de la dernière ligne ou colonne, on obtient :

$$D_n = s_n D_{n-1} - t_n D_{n-2} \geq (s_n - t_n) D_{n-1} \geq D_{n-1} \geq 1.$$

pour $s_n \geq t_{n+1}$. Donc l'hypothèse d'induction est vérifiée. □

Comme conséquence du Théorème 3.2.3 et de la Proposition 3.2.5, on a le résultat intéressant suivant.

Corollaire 3.2.6. Si $s_0 \geq 1$ et $s_k \geq t_k + 1$ pour $k \geq 1$, alors les nombres de Catalan-like correspondant au (σ, τ) forment une suite des moments de Stieltjes.

En utilisant le Théorème 3.2.2, on obtient notre résultat fondamental.

Corollaire 3.2.7. Si $s_0 \geq 1$ et $s_k \geq t_k + 1$ pour $k \geq 1$, alors les nombres de Catalan-like correspondant au (σ, τ) forment une suite infiniment log-convexe.

Les suites suivantes sont infiniment log-convexes.

- Exemple 3.2.3.** 1. Les nombres factoriels $n!$;
 2. Les coefficients binomiaux centraux $\binom{2n}{n}$;
 3. Les nombres de Catalan C_n ;
 4. Les nombres centraux de Delannoy D_n ;
 5. Les nombres de Schröder r_n ;
 6. Les nombres de Bell B_n .

3.2.3 Les polynômes des moments associés aux q -nombres de Catalan-like

Définition 3.2.2. Soit $\sigma = (s_k(q))_{k \geq 0}$ et $\tau = (t_k(q))_{k \geq 1}$ deux suites des polynômes q -positifs. Les q -nombres de **Catalan-like** correspondant au couple (σ, τ) sont les éléments de la 0-ème colonne de la matrice triangulaire inférieure infinie définie par :

$$R(q) := R^{\sigma, \tau}(q) = [r_{n,k}(q)]_{n,k \geq 0}$$

et la relation de récurrence :

$$r_{n+1,k}(q) = r_{n,k-1}(q) + s_k(q)r_{n,k}(q) + t_{k+1}(q)r_{n,k+1}(q), \quad (3.2)$$

avec $r_{0,0}(q) = 1$ et $r_{n,k}(q) = 0$ sauf si $n \geq k \geq 0$.

Ces q -nombres sont notés par $\mathbf{r}_{n,0}(\mathbf{q})$ et $R^{\sigma, \tau}(q)$ s'appelle la **matrice q -récursive**.

Remarque 3.2.1. La matrice triangulaire définie par :

$$J(q) = J^{\sigma, \tau}(q) = \begin{bmatrix} s_0(q) & 1 & & & \\ t_1(q) & s_1(q) & 1 & & \\ & t_2(q) & s_2(q) & 1 & \\ & & t_3(q) & s_3(q) & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

s'appelle la matrice des coefficients ou matrice de Jacobi vérifiant la relation de récurrence (3.2).

Ci-dessous des exemples des q -nombres de Catalan-like :

- Exemple 3.2.4.**
- Le polynôme de Bell : $B_n(q) = \sum_{k=0}^n s(n, k)q^k$ avec $s_k(q) = k + q$ et $t_k(q) = kq$;
 - Le polynôme Eulerien : $A_n(q) = \sum_{k=0}^n A(n, k)q^k$ avec $s_k(q) = (k + 1)q + k$ et $t_k(q) = k^2q$;
 - Les q -nombres de Schröder : $r_n(q) = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{n-k} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} q^k$ avec $s_0(q) = 1+q$, $s_k(q) = 1+2q$ et $t_k(q) = q(1+q)$;
 - Les q -nombres centraux de la suite de Delonnoy : $D_n(q) = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{n-k} \binom{2k}{k} q^k$ avec $s_k(q) = 1+2q$, $t_1(q) = 2q(1+q)$ et $t_k(q) = q(1+q)$;
 - Le polynôme de Narayana : $N_n(q) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1} q^k$ avec $s_0(q) = q$, $s_k(q) = 1+q$ et $t_k(q) = q$;
 - Le polynôme de Narayana de type B : $W_n(q) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^k$ avec $s_k(q) = 1+q$ et $t_k(q) = q$ pour $k > 1$.

La méthode utilisée dans la preuve de Théorème 3.2.3 reste la même dans le cas analogue. Alors pour breveté, on enlève les détails de la preuve du théorème suivant.

Théorème 3.2.8. *Si la matrice des coefficients $J^{\sigma,\tau}(q)$ est totalement q -positif (q -TP), alors les q -nombres de Catalan-like forment une suite des polynômes des moments q -Stieltjes (q -SM).*

Comme application, on a le résultat fort utile suivant :

Corollaire 3.2.9. *Si la matrice des coefficients est de la forme*

$$J^{b,c}(q) = \begin{bmatrix} b_1(q) + c_1(q) & 1 & & & \\ b_2(q)c_1(q) & b_2(q) + c_2(q) & 1 & & \\ & b_3(q)c_2(q) & b_3(q) + c_3(q) & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

avec $b_n(q)$ et $c_n(q)$ deux suites des polynômes q -positifs, alors les q -nombres de Catalan-like associés sont des polynômes des moments q -Stieltjes.

Démonstration. Par le Théorème 3.2.8, il suffit de montrer que $J^{b,c}(q)$ est totalement q -positive.

On a la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}
 J^{b,c}(q) &= \begin{bmatrix} b_1(q) + c_1(q) & 1 & & & \\ b_2(q)c_1(q) & b_2(q) + c_2(q) & 1 & & \\ & b_3(q)c_2(q) & b_3(q) + c_3(q) & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} b_1(q) & 1 & & & \\ & b_2(q) & 1 & & \\ & & b_3(q) & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ c_1(q) & 1 & & & \\ & c_2(q) & 1 & & \\ & & c_3(q) & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Il est connu qu'une matrice bidiagonale contient des éléments q -positives est totalement q -positive, ainsi le produit de deux matrices totalement q -positives est une matrice totalement q -positive. D'où le résultat. \square

Exemple 3.2.5. Par le Corollaire 3.2.9 et le Théorème 3.2.8, les suites des polyômes données dans Exemple 3.2.4 sont des polynômes des moments q -Stieltjes :

1. Les polynômes de Bell, $b_k(q) = k - 1$ et $c_k(q) = q$, pour $k \geq 1$;
2. Les polynômes Eulérien, $b_k(q) = (k - 1)q$ et $c_k(q) = k$, pour $k \geq 1$;
3. Les q -nombres de Schröder, $b_1(q) = 0$, $b_{k+1}(q) = q$ et $c_k(q) = q + 1$ pour $k \geq 1$;
4. Les q -nombres centraux de Delonnoy : $b_1(q) = 1$, $b_{k+1}(q) = q + 1$ et $c_1(q) = 2q$, $c_{k+1}(q) = q$;
5. Les polynômes de Narayana : $b_k(q) = 1$ et $c_k(q) = q$ pour $k \geq 1$;
6. Les polynômes de Narayana de type B.

CONCLUSION

Dans ce document, nous avons étudié le problème des moments de Stieltjes et la log-convexité infinie de certaines suites et polynômes combinatoires connus.

Nous avons constaté que certaines suites et polynômes sont des moments de Stieltjes et des moments q -Stieltjes respectivement s'ils sont des cas particuliers des nombres de Catalan-like et des q -nombres de Catalan-like respectivement. Ainsi la log-convexité infinie des suites et des polynômes est difficile à établir d'une manière analytique en générale, ce qui nous amène à utiliser la propriété des moments de Stieltjes comme clé fort utile pour répondre à la question.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **M. Ahmia**, *Log-concavité, log-convexité et unimodalité de suites numériques*, Thèse de doctorat, USTHB (2015).
- [2] **M. Aigner**, *Catalan-like numbers and determinants*, J. Combin. Theory Ser. A 87 (1999) 33–51.
- [3] **M. Aigner**, *Catalan and other numbers : a recurrent theme*, in : *H. Crapo, D. Senato (Eds.)*, Algebraic Combinatorics and Computer Science, Springer, Berlin, 2001, 347–390.
- [4] **E. A. Bender, E. R. Canfield**, *Log-concavity and related properties of the cycle index polynomials*, J. Combin. Theory Ser. A 74 (1996) 57–70.
- [5] **I. Bousbaa**, *Combinatoire des suites de Stirling généralisées*, Thèse de doctorat, USTHB (2017).
- [6] **F. Brenti**, *Unimodal, log-concave and Pólya frequency sequences in combinatorics*, Mem. Amer. Math. Soc. no. 413 (1989).
- [7] **F. Brenti**, *Log-concave and unimodal sequence in algebra, combinatorics and geometry : an update*, Elec. Contemp. Math. 178 (1994,1997), 71–84.
- [8] **L. M. Butler**, *The q -log-concavity of q -binomial coefficient*, IMA Preprint Séries 418. (April 1988).
- [9] **W. Y. C. Chen, E. X. W. Xia**, *The 2-log-convexity of the Apéry numbers*, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011) 391–400.
- [10] **L. Comtet**, *Advanced Combinatorics*, D. Reidel Pub. Company : Boston, MA, USA, 1974.

-
- [11] **W.Y.C. Chen, E.X.W. Xia**, *The 2-log-convexity of the Apéry numbers*, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011) 391–400.
- [12] **T. Došlić**, *Log-balanced combinatorial sequences*, Published electronically at <http://arxiv.org/pdf/math/0603403.pdf>.
- [13] **T. Došlić, D. Veljan**, *Logarithmic behavior of some combinatorial sequences*, Discrete Math., 308 : 2182-2212, 2008.
- [14] **K. Engel**, *On the average rank of an element in a filter of the partition lattice*, J. Combin. Theory Ser. A 65 (1994) 67-78.
- [15] **R. L. Graham, D. E. Knuth and Oren Patashnik**, *Concrete mathematics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, second edition, 1994. A foundation for computer science. (Cité pages 1 et 13).
- [16] **R. A. Horn, C. R. Johnson**, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.(cité page 21).
- [17] **J. Karamata**, *Théoremes sur la sommabilité exponentielle et d'autres sommabilités s'y rattachant*, 1935. (Cité page 13).
- [18] **S. Karlin**, *Total Positivity*, Vol.I, Stanford University Press, Stanford, 1968.(cité page 1).
- [19] **H. Y. L. Liang, Y. WANG and S. ZHENG**, *Hamburger Moment Sequences in Combinatorics*, Acta Mathematica Sinica, English Series Jul., (2018), Vol. 34, No. 7, pp. 1101–1109.
- [20] **H. Y. L. Liang, L.-L. Mu, Y. Wang**, *Catalan-like numbers and Stieltjes moment sequences*, Discrete Math. 339 (2016) 484–488.
- [21] **L. L. Liu, Y. Wang**, *On the log-convexity of combinatorial sequences*, Advances in Applied Mathematics vol.39, Issue. 4, 453-476 (2007).
- [22] **H. Minc**, *Nonnegative Matrices*, John Wiley and Sons, New York, 1988.
- [23] **N. Nielsen**, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Teubner, 1906. (Cité pages 13 et 36).
- [24] **J. Stirling**, *Methodus differentialis*, london, 1730. English translation, The Differential Method, 1749. (Cité page 13).
- [25] **J.A. Shohat, J.D. Tamarkin**, *The Problem of Moments*, Amer. Math. Soc., New York, 1943.

- [26] **R. P. Stanley**, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry*, Ann. New York Acad. Sci. 576 (1989) 500–534.
- [27] **Shohat, J. A., Tamarkin, J. D.**, *The Problem of Moments*, American Mathematical Society, New York, (1943).
- [28] **Wang, Y, Zhu, B. X.**, *Log-convex and Stieltjes moment sequences*, Adv. in Appl. Math., 82, (2016) 115–127.
- [29] **D.V. Widder**, *The Laplace Transform*, Princeton University Press, Princeton, 1946.
- [30] **B.-X. Zhu**, *Log-convexity and strong q -log-convexity for some triangular arrays*, Adv. in Appl. Math. 50 (2013) 595–606.