



Faculté des Sciences Exacte et Informatique
Département de Mathématique

N° d'ordre :

N° de séries :

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Probabilités et Statistique.

Thème

Estimation Bayésienne de paramètre et des
caractéristiques de la loi de Rayleigh sous
différentes fonctions de perte

Présenté par :

★ *Bezaz Moufida*

★ *Mechaar Mounira*

Devant le jury :

Président : Djeridi Zahra M.A.A Université de Jijel

Encadreur : Boudjerda Khawla M.C.B Université de Jijel

Examineur : Abdi Zeyneb M.A.A Université de Jijel

※ Remerciements ※

Quelques mots en préambule de cette étude, qui met un point d'orgue à une année riche et intense

*Tout d'abord, nous remercions **Allah** le tout puissant pour son aide et pour nous avoir guidé pour mener à bien ce travail*

La première personne que nous tenons à remercier est notre encadreur Mme

**** Boudjerda khawla ****

pour l'orientation, la confiance, la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port

*Un grand merci également aux membres du jury, Mme la présidente **Djeridi Zahra** ainsi que l'examinatrice Mme **Abdi Zeyneb** pour l'honneur qu'elles nous ont fait en acceptant de juger notre mémoire*

Nos vifs remerciements vont à tous les enseignants qui nous ont suivis nos cinq années d'études à l'université

Enfin, nous remercions toutes les personnes qui auraient contribué d'une manière ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

♡ **Mounira-Moufida** ♡



Dédicace

*Un grand merci au bon Dieu, le seigneur pour le courage et la force qui nous a offert
pour terminer ce mémoire.*

Je dédie ce modeste travail :

À celle qui m'a
aidé par ses sincères prières et
douaa à la plus chère personne de ma vie
ma mère. À celui qui a bien travaillé pour
m'apprendre c'est qu'ou le combat et
qui m'a fait ce que je suis **mon**
chère père que Dieu le pro-
tegè pour nous.



♡ **À mes frères : Mouhammed, Bilal, Ibrahim, Said** Je vous dédie ce travail et
veuillez trouver dans ce mémoire l'expression de mon respect

À ma sœur : Rokiya Meilleurs vœux de sucées dans tes études et bonheur dans ta vie.

À ma collègue Mounira : Que Dieu réunisse nos chemins pour un long commun serein
et que ce travail soit témoignage de ma profonde reconnaissance et de mon amour sincère
et fidèle.

À mon Amour : Je dédie ce modeste travail à la personne plus précieux de mon cœur
Yassine, à savoir la longueur de l'achèvement de ce travail.

À mes chères amies : Une dédicace particulier est sincère pour mes amies **Imen,**
Mounira Je vos souhaite une vie pleine de joie et de prospérité.

À la fin, je prie le bon Dieux de faire ce travail très utile pour les autres candidats de
cette spécialité ♡.

♡ **Moufida** ♡

Dédicace

*Un grand merci au bon Dieu, le seigneur pour le courage et la force qui nous a offert
pour terminer ce mémoire.*

Je dédie ce modeste travail :

À celle qui m'a
aidé par ses sincères prières et
douaa à la plus chère personne de ma vie
ma mère. À celui qui a bien travaillé pour
m'apprendre c'est qu'ou le combat et
qui m'a fait ce que je suis **mon**
chère père que Dieu le pro-
tegè pour nous.



♡ **À mes frères : Mourad, Riad, Hakim, Hamza** Je vous dédie ce travail et veuillez
trouver dans ce mémoire l'expression de mon respect.

À ma sœur : Ratiba Meilleurs vœux de sucées dans tes études et bonheur dans ta vie.

À ma collègue Moufida : Que Dieu réunisse nos chemins pour un long commun serein
et que ce travail soit témoignage de ma profonde reconnaissance et de mon amour sincère
et fidèle.

À mon Amour : Je dédie ce modeste travail à la personne plus précieux de mon cœur
Yacoub, à savoir la longueur de l'achèvement de ce travail.

À mes chères amies : Une dédicace particulier est sincère pour mes amies **Yassmin, Moufida,**
Imen, Meryem, Leila, Soumia.

À la fin, je prie le bon Dieux de faire ce travail très utile pour les autres candidats de
cette spécialité ♡.

♡ **Mounira** ♡

Table des matières

Notations	ix
Introduction	xiv
1 Outils mathématiques	1
1.1 Les cinq définitions équivalentes en fiabilité	1
1.2 Modèles de survie usuels	2
1.3 Méthodes d'estimation ponctuelle	5
1.3.1 La méthode des moments	5
1.3.2 La méthode des moindres carrés	6
1.3.3 La méthode du maximum de vraisemblance	6
1.4 Méthodes numériques utiles dans le cadre d'estimation ponctuelle	9
1.4.1 L'algorithme EM (Expectation-Maximisation)	9
1.4.2 La méthode de Newton-Raphson	9
1.4.3 Quelques packages du R utiles dans l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance	10
2 Analyse statistique bayésienne	12
2.1 Introduction	12
2.2 Comment choisir la loi a priori?	13

2.2.1	Approche partiellement informative	13
2.2.2	Loi a priori non informative	14
2.3	Les fonctions de perte	15
2.3.1	Les fonctions de perte symétrique	15
2.3.2	Les fonctions de perte asymétrique :	16
2.4	Les risques de Bayes	17
2.5	Estimation bayésienne	18
2.6	Méthodes numériques utiles dans le cadre bayésien	18
2.6.1	La méthode d'approximation de Lindley	19
2.6.2	La méthode de Tierney-Kadane	19
2.6.3	Les méthodes de Monte-Carlo	20
2.6.4	Les méthodes MCMC	21
2.6.5	L'algorithme de Metropolis-Hastings	22
2.6.6	L'échantillonnage de Gibbs	24
3	Application sur la loi de Rayleigh	27
3.1	Introduction	27
3.2	Le modèle	28
3.3	Estimation classique avec la méthode du maximum de vraisemblance	30
3.4	Estimation bayésienne avec une loi a priori vague	32
3.4.1	Sous la fonction de perte quadratique	32
3.4.2	Sous la fonction de perte Linex	34
3.5	Estimation bayésienne avec une loi a priori conjuguée naturelle	35
3.5.1	Sous une fonction de perte quadratique	36
3.5.2	Sous la de perte Linex	38

3.6	Simulation	39
3.7	Application avec des données réelles	45
	Annexe	48

Liste des tableaux

3.1	Estimation de σ , $S(x; \sigma)$ et $h(x; \sigma)$ par la méthode du maximum de vraisemblance.	40
3.2	Estimation bayésienne de σ , $S(x; \sigma)$ et $h(x; \sigma)$ avec une loi a priori vague. .	41
3.3	Estimation bayésienne de σ , $S(x; \sigma)$ et $h(x; \sigma)$ avec une loi a priori conjuguée.	42
3.4	Valeurs de probabilité de Pitman avec une loi a priori vague.	43
3.5	Valeurs de probabilité de Pitman avec une loi a priori conjuguée naturelle.	43
3.6	L'estimateurs bayésiens avec une loi a priori vague (données réelles de Lawless).	46
3.7	L'estimateurs bayésiens avec une loi a priori conjuguée naturelle (données réelles de Lawless).	46

Notations

- σ : Le paramètre.
- $\mathbf{S}(\mathbf{x}; \sigma)$: La fonction de fiabilité.
- $\mathbf{h}(\mathbf{x}; \sigma)$: La fonction de taux de panne.
- $\hat{\sigma}_{MLE}$: L'estimateur du maximum de vraisemblance de paramètre σ .
- $\hat{S}_{MLE}(\cdot; \cdot)$: L'estimateur du maximum de vraisemblance de la fonction de fiabilité.
- $\hat{h}_{MLE}(\cdot; \cdot)$: L'estimateur du maximum de vraisemblance de la fonction de taux de panne.
- EQ** : L'erreur quadratique.
- $\pi_1(\sigma)$: La loi a priori vague.
- $\pi_1(\sigma|x)$: La loi a posteriori.
- $\hat{\sigma}_{VQ}$: L'estimateur de paramètre sous une fonction de perte quadratique avec une loi a priori vague.
- $\hat{S}_{VQ}(\cdot; \cdot)$: L'estimateur de la fonction de fiabilité sous une fonction de perte quadratique avec une loi a priori vague.
- $\hat{h}_{VQ}(\cdot; \cdot)$: L'estimateur de la fonction de taux de panne sous une fonction de perte quadratique avec une loi a priori vague.
- $\hat{\sigma}_{VL}$: L'estimateur de paramètre sous une fonction de perte Linex avec une loi a priori vague.
- $\hat{S}_{VL}(\cdot; \cdot)$: L'estimateur de la fonction de fiabilité sous une fonction de perte Linex avec une loi a priori vague.
- $\hat{h}_{VL}(\cdot; \cdot)$: L'estimateur de la fonction de taux de panne sous une fonction de perte Linex avec une loi a priori vague.
- R(.)** : Le risque a posteriori.
- $\pi_2(\sigma)$: La loi a priori conjuguée naturelle.
- $\pi_2(\sigma|x)$: La loi a posteriori.
- $\hat{\sigma}_{CQ}$: L'estimateur de paramètre sous une fonction de perte quadratique avec une loi a priori conjuguée naturelle.
- $\hat{S}_{CQ}(\cdot; \cdot)$: L'estimateur de la fonction de fiabilité sous une fonction de perte quadratique

avec une loi a priori conjuguée naturelle.

$\hat{h}_{CQ}(\cdot; \cdot)$: L'estimateur de la fonction de taux de panne sous une fonction de perte quadratique avec une loi a priori conjuguée naturelle.

$\hat{\sigma}_{CL}$: L'estimateur de paramètre sous une fonction de perte Linex avec une loi a priori conjuguée naturelle.

$\hat{S}_{CL}(\cdot; \cdot)$: L'estimateur de la fonction de fiabilité sous une fonction de perte Linex avec une loi a priori conjuguée naturelle.

$\hat{h}_{CL}(\cdot; \cdot)$: L'estimateur de la fonction de taux de panne sous une fonction de perte Linex avec une loi a priori conjuguée naturelle.

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons au modèle de Rayleigh. La distribution de Rayleigh trouve son application dans de nombreuses domaines et en particulier en épidémiologie. Premièrement on utilise une approche classique celle du maximum de vraisemblance et on a trouvé les estimations MLE de paramètre, de la fonction de fiabilité et de la fonction de taux de panne avec leur erreur quadratique.

Après on s'intéresse à l'estimation du paramètre et des caractéristiques de la loi de Rayleigh on utilisant une approche bayésienne sous différentes fonctions de perte (la fonction de perte quadratique et la fonction de perte Linex), avec des données complètes. La loi a priori sur le paramètre est d'abord considérée comme non informative, puis nous considérons le cas d'une loi a priori conjuguée naturelle.

Les estimateurs bayésiens de σ , $S(x; \sigma)$ et $h(x; \sigma)$ ont été obtenus avec leurs expressions analytiques exactes. Les risques a posteriori sont calculés dans chaque cas.

Une étude par simulation et une analyse des données réelles ont été réalisées afin de comparer les estimateurs bayésiens à partir de leurs risques a posteriori et finalement de comparer les meilleurs estimateurs bayésiens avec leurs estimateurs du maximum de vraisemblance à l'aide de critère de Pitman .

Abstract

in this work, we are interested to the Rayleigh model. The Rayleigh distribution finds its applications in many fields and particularly in epidemiology.

Firstly, we used the maximum likelihood method and we found the MLE estimators of the parameter, the reliability function and the failure rate function with their squared errors.

After, we have used the Bayesian approach under different loss functions (the squared and Linex loss functions), with complete data. The prior distribution of the parameter is considered as a non-informative law, then we have also used a natural conjugated law.

The σ , $S(x, \sigma)$ and $h(x, \sigma)$ are obtained with their exact analytical expressions. The posterior risks are calculated in each case.

A simulation study was carried out as well as real data analysis in order to compare between the different estimators through the consideration of their posterior risks. Finally we compared between the MLE estimators and the best Bayesian estimators with Pitman's criterion.

Introduction

La fiabilité est un vaste domaine contribuant à la compréhension, à la modélisation et à la prédiction des mécanismes de dégradation et de vieillissement susceptible de conduire le composant à la défaillance et le système à la panne. La connaissance des relations entre les limites physiques, les défauts intrinsèques, les imperfections technologiques et les contraintes environnementales et internes constitue la substance même de cette activité vaste et complexe. La conservation de la fiabilité concerne la maintenabilité, un autre aspect important des performances du système. Elle s'accupe de ce qu'il faut faire pour qu'un produit soit ramené dans des conditions aussi proches que possible de celles prévues au début de son fonctionnement.

Le but de la fiabilité et de la maintenabilité est de garantir un usage prévu du produit au coût total minimal pendant la période de spécifiée, dans des conditions d'entretien et de réparation précises.

D'une manière générale, l'analyse de la fiabilité constitue une phase indispensable dans toute étude de sûreté de fonctionnement. L'analyse de la fiabilité est appliquée pour évaluer la performance d'une structure (systèmes ou composants), ou pour optimiser la géométrie d'une structure en respectant un certain niveau de fiabilité ou de coût espéré. De plus, la fiabilité des structures est un outil d'aide à la décision pour établir un plan de maintenance et d'inspection.

Les modèles classiques les plus utilisés en fiabilité sont les modèles exponentiel et les modèles de Weibull, cependant, ces dernières années, plusieurs nouveaux modèles applicables dans les problèmes de durée de survie ont été définis ; on peut citer parmi les plus récents : Bertholon, Kumarasuanu, Lindley ...

Dans ce travail, on se propose d'étudier le problème de l'estimation de paramètre et des caractéristiques (la fonction de fiabilité et la fonction de taux de panne) à l'aide d'une approche bayésienne, dans un plan d'expérience complet.

Pour le choix de la loi a priori ; les estimateurs bayésiens dépendant du choix de la fonction de perte qui souvent est une fonction de perte quadratique de la forme symétrique. On considère, dans ce travail une fonction de perte symétrique et une autre asymétrique.

Le manuscrit est organisé de la manière suivante :

Au chapitre 1, on donne quelques définitions et propriétés des principaux outils mathématiques utilisés dans ce travail. En particulier la notion de fiabilité et ses caractéristiques, avec un rappel des modèles usuels dans les durées de survie. Et on termine le chapitre par donner des méthodes numériques utiles dans le cadre d'estimation avec la méthode du maximum de vraisemblance.

Le chapitre 2, est consacré au méthode d'estimation bayésienne. Au chapitre 3, on a étudié le modèle de Rayleigh, on donne les estimateurs de son paramètre, de sa fonction de fiabilité et de son taux de panne à l'aide d'une approche classique du maximum de vraisemblance, puis à l'aide d'une approche bayésienne, dans un plan d'expérience complet. Dans cette dernière approche, on a utilisé différentes fonctions de perte. Une étude par simulation est une analyse des données ont été réalisées. On termine par une étude comparative des estimateurs obtenus à l'aide du critère de proximité de Pitman, le manuscrit s'achève par un annexe contenant l'implémentation dans R des différents algorithmes utilisés.

Chapitre 1

Outils mathématiques

Dans ce chapitre, on donne quelques notions de base qu'on a utilisés dans notre travail, on commence par des définitions de fiabilité en donnant quelques distributions de probabilités utiles dans le domaine de la fiabilité, puis on a cité quelques méthodes d'estimations ponctuelle et on termine par des méthodes numériques et des packages R utiles dans l'estimation soit qui donnent directement l'estimateur, ou bien qui permet de résoudre les équations non-linéaires ou les systèmes d'équations non-linéaires .

1.1 Les cinq définitions équivalentes en fiabilité

La fiabilité est la caractéristique d'un dispositif exprimée par la probabilité que ce dispositif accomplisse une fonction requise dans des conditions d'utilisation et pour une période déterminée.

Supposons que la durée de survie T soit une variable positive ou nulle, et absolument continue, alors sa loi de probabilité peut être définie par l'une des cinq fonctions équivalentes suivantes (chacune des fonctions ci-dessus peut être obtenue à partir de l'une des autres fonctions) :

La fonction de survie S (La fonction de fiabilité)

La fonction de survie S pour t fixé est la probabilité de survivre jusqu'à l'instant t , c'est -à - dire :

$$S(t) = P(T \geq t); t \geq 0.$$

La fonction de répartition F

La fonction de répartition ou c.d.f pour "cumulative distribution function" représente, pour t fixé, la probabilité de mourir avant l'instant t , c'est-à-dire :

$$F(t) = P(T < t) = 1 - S(t).$$

La fonction de densité de probabilité f

La fonction de densité de probabilité (p.d.f en anglais "probability density function") c'est une fonction $f(t) \geq 0$; telle que pour tout $t \geq 0$:

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds.$$

Si la fonction de répartition a une dérivée au point t alors :

$$f(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + dt)}{dt} = F'(t) = -S'(t).$$

Pour t fixé, la densité de probabilité caractérise la probabilité de mourir dans un petit intervalle de temps après l'instant t .

La fonction de taux de panne h (taux de hasard)

Le risque instantané ou la fonction de taux de panne, pour t fixé caractérise la probabilité de mourir dans un petit intervalle de temps après t , conditionnellement au fait d'avoir survécu jusqu'au le temps t (c'est-à-dire le risque de mort instantané pour ceux qui ont survécu); sa formule est :

$$h(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + dt | T > t)}{dt} = \frac{f(t)}{S(t)}.$$

Le taux de hasard cumulé H

C'est l'intégrale de taux de hasard h (la fonction de taux de panne) :

$$H(t) = \int_0^t h(u) du = -\ln(S(t)).$$

1.2 Modèles de survie usuels

On reprend ci-après que les modèles les plus courants; d'une manière générale, toutes les distributions utilisées pour modéliser des variables positives (log-normale, Pareto, lo-

gistique, etc...) peuvent être utilisées dans des modèles de survie, la distribution de base des modèles paramétriques de durée est la distribution exponentielle .

Le choix du modèle détermine en particulier la forme de la fonction de hasard on distinguera notamment des modèles à fonction de hasard monotone, des modèles permettant d'obtenir des fonctions de hasard en forme de baignoire ...

Modèle exponentiel

La loi exponentielle est la plus utilisée dans les études de fiabilité pour sa facilité d'emploi et son interprétation très simple. Elle représente la distribution de la durée de vie moyenne T d'un système, dont le taux de défaillance h est constant avec le temps .

La spécification la plus simple consiste à poser $h(t) = \lambda$, avec $\lambda > 0$.

On en déduit immédiatement que : $S(t) = \exp(-\lambda t)$.

Le modèle de Weibull

La forme générale de la fonction de fiabilité est désignée par $S(t)$ représentant la probabilité de bon fonctionnement à l'instant t :

$$S(t) = \exp\left(-\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta.$$

β : paramètre de forme ($\beta > 0$)

η : paramètre d'échelle ($\eta > 0$)

γ : paramètre de position ($\gamma \in \mathbb{R}$)

La fonction de taux de hasard est :

$$h(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}.$$

Le modèle gamma

Le modèle gamma est une autre généralisation naturelle du modèle exponentielle : Supposons que la durée T_r soit la durée d'attente de la réalisation d'un service dans une file d'attente et que la file d'attente soit composée de r serveurs indépendants et identiques qui traitent chacun une partie du service (ils sont donc montés en série). On fait l'hypothèse que la durée de réalisation du traitement de chacun des serveurs est une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Alors la durée globale de service est la somme de r variables exponentielles de même paramètre; on en déduit que la durée de service est distribuée selon une loi gamma de paramètre (r, λ) :

$$S_{r,\lambda}(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\lambda^r u^{r-1}}{(r-1)!} \exp(-\lambda u) du.$$

La fonction de taux de hasard, est : $h(t) = \frac{t^{r-1} \exp(-\lambda t)}{\int_t^{+\infty} x^{r-1} \exp(-\lambda x) dx}$.

La loi log-normale

Une variable continue et positive T est distribuée selon une loi log-normale si son logarithme népérien est distribué suivant une loi normale. Cette distribution est largement utilisée pour modéliser des données de vie, en particulier les défaillances par fatigue en mécanique.

La densité de probabilité d'une loi log-normale de paramètres positives μ et σ est :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\log(t) - \mu}{\sigma}\right)^2\right), t > 0.$$

La fonction de fiabilité est :

$$S(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\log(t) - \mu}{\sigma}\right);$$

où :

Φ : fonction de répartition de la loi normale centrée réduite : $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\nu^2) d\nu$

Le taux de panne est de la forme :

$$h(t) = \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\log(t) - \mu}{\sigma}\right)}.$$

Avec la distribution log-normale, la fonction $h(t)$ est croissante puis décroissante avec $h(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$.

Comme la fonction de risque décroît pour de grande valeurs de t , la distribution ne paraît pas plausible comme modèle de survie dans la plus part des situations.

Malgré cela, ce modèle peut être intéressant lorsque de très grande valeurs de t ne sont pas d'un intérêt particulier.

1.3 Méthodes d'estimation ponctuelle

Soit (x_1, x_2, \dots, x_n) un n -échantillon d'une variable aléatoire X de loi P^θ . On note θ le paramètre inconnu, le problème traité est celui de l'estimation du paramètre θ . Donc, il s'agit de donner, au vu des observations x_1, x_2, \dots, x_n une approximation ou une évaluation de θ qu'on espère la plus proche possible de la vraie valeur inconnue.

Il existe de nombreuses méthodes pour estimer le paramètre θ . Dans cette section, nous ne intéressons qu'aux trois méthodes d'estimation les plus usuelles, la méthode des moments, la méthode des moindres carrés et la méthode du maximum de vraisemblance.

Mais il faut d'abord définir précisément ce que sont une estimation et surtout un estimateur.

Définition 1.1. *Un estimateur d'un paramètre θ est une statistique T_n fonction des variables X_i à valeurs dans l'ensemble des valeurs possibles de θ . Une estimation de θ est une réalisation t_n de l'estimateur T_n .*

1.3.1 La méthode des moments

C'est la méthode la plus naturelle, l'idée de base est d'estimer une espérance mathématique par une moyenne empirique, une variance par une variance empirique, etc.... Si le paramètre à estimer est l'espérance de la loi X_i , alors on peut l'estimer par la moyenne empirique de l'échantillon. Autrement dit, si $\theta = E(X)$, alors l'estimateur de θ par la méthode des moments est : $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

Plus généralement, pour $\theta \in \mathbb{R}$, si $E(X) = \varphi(\theta)$, où φ est une fonction inversible, alors l'estimateur de θ par la méthode des moments est $\hat{\theta}_n = \varphi^{-1}(\bar{X}_n)$. De la même manière, on estime la variance de la loi des X_i par la variance empirique de l'échantillon :

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2.$$

Plus généralement, si la loi des X_i à deux paramètres θ_1 et θ_2 tels que :

$(E(X), \text{var}(X)) = \varphi(\theta_1, \theta_2)$, où φ est une fonction inversible, alors les estimateurs de θ_1 et θ_2 par la méthode des moments sont $(\hat{\theta}_{1n}, \hat{\theta}_{2n}) = \varphi^{-1}(\bar{X}_n, S_n^2)$.

Ce principe peut naturellement se généraliser aux moments de tous ordres centrés ou non centrés : $E[(X - E(X))^k]$ et $E(X^k)$, $k \geq 1$.

1.3.2 La méthode des moindres carrés

Définition 1.2. (*Estimateur des MC*)

On appelle estimateur des moindres carrés (MC) de β_1 et β_2 les estimateurs $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$ obtenus en minimisant la quantité :

$$S(\beta_1, \beta_2) = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i)^2 = \|Y - \beta_1 \mathbf{1} - \beta_2 X\|^2;$$

où : $\mathbf{1}$ est le vecteur de \mathbb{R}^n dont tous les coefficients valent 1. Les estimateurs peuvent également s'écrire sous la forme suivante :

$$(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \arg \min_{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}} S(\beta_1, \beta_2).$$

Calcul des estimateurs de β_j

La fonction $S(\beta_1, \beta_2)$ est strictement convexe. Si elle admet un point singulier, celui-ci correspond à l'unique minimum. Annulons les dérivées partielles, nous obtenons un système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial S(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_i) = 0. \\ \frac{\partial S(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}{\partial \beta_2} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_i) = 0. \end{cases}$$

La première équation donne :

$$\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x}.$$

La seconde équation donne :

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

1.3.3 La méthode du maximum de vraisemblance

Soient x_1, x_2, \dots, x_n , n observations indépendantes et de même loi, la fonction du maximum de vraisemblance est calculée comme suit :

$$L(\theta; \underline{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) ; \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Pour n quelconque, il est logique de dire que la valeur la plus vraisemblable de θ est la valeur pour laquelle la probabilité d'observer x_1, \dots, x_n est la plus forte possible. Cela revient à faire comme s'était l'éventualité la plus probable qui s'était produite au cours de l'expérience.

Définition 1.3. *L'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est la valeur $\hat{\theta}_n$ de θ qui rend maximale la fonction de vraisemblance $L(\theta; \underline{x})$. L'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE) de θ est la variable aléatoire correspondante.*

Dans la plupart des cas, la fonction de vraisemblance s'exprime comme un produit. Donc $\hat{\theta}_n$ sera en générale calculé en maximisant la log-vraisemblance :

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta} \ln(L(\theta; \underline{x})) \quad (1.1)$$

Quand $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d) \in \mathbb{R}^d$ et que toutes les dérivées partielles ci-dessous existent, $\hat{\theta}_n$ est la solution du système d'équations appelée équations de vraisemblance :

$$\forall j \in \{1, \dots, d\}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln L(\theta; \underline{x}) = 0 \quad (1.2)$$

A priori, une solution de ce système d'équations pourrait être un minimum de la vraisemblance. Mais on peut montrer que la nature d'une fonction de vraisemblance fait que c'est bien un maximum que l'on obtient (1.1).

L'estimation du maximum de vraisemblance a l'avantage de simplicité et rapidité de son calcul si l'équation (1.2) est simple à résoudre comme par exemple dans le cas des familles exponentielles. Le principe du maximum de vraisemblance fournit une approche d'estimation bien comme dans le cas de distributions normales et plusieurs autres problèmes.

Toute fois, dans le cas des problèmes complexes, un estimateur du maximum de vraisemblance peut devenir inapproprié ou peut même ne pas exister. En effet, dans le cas où l'équation(1.2) ne peut pas être analytiquement résolue, il faut avoir recours à des méthodes itératives comme la méthode de Newton-Raphson, la méthode de Fisher-Scoring ou encore l'algorithme EM (Expectation-Maximisation), et aussi, on utilise les packages du R.

Estimateur sans biais et de variance minimale (ESBVM)

Un estimateur T_n de θ sera un bon estimateur s'il est suffisamment proche, en un certain sens de θ . Il faut donc définir une mesure de l'écart entre θ et T_n . On appelle cette mesure le risque de l'estimateur. On a intérêt à ce que le risque d'un estimateur soit le plus petit possible.

Par exemple, les risques $T_n - \theta$, $|T_n - \theta|$, $(T_n - \theta)^2$ expriment bien un écart entre T_n et θ . Mais comme il est plus facile d'utiliser des quantités déterministes que des quantités aléatoires, on s'intéresse en priorité aux espérances des quantités précédentes. En particulier :

Définition 1.4. On appelle biais d'un estimateur T_n , la quantité :

$$b_n(T_n) = E(T_n) - \theta.$$

Définition 1.5. On appelle erreur quadratique moyenne de T_n , la quantité :

$$EQM(T_n) = var(T_n) + b_n^2(T_n).$$

-L'erreur quadratique moyenne s'écrit :

$$\begin{aligned} EQM(T_n) &= E[(T_n - \theta)^2] = E[(T_n - E(T_n) + E(T_n) - \theta)^2] \\ &= E[(T_n - E(T_n))^2] + 2E[T_n - E(T_n)]E[E(T_n) - \theta] + E[(E(T_n) - \theta)^2] \\ &= var(T_n) + [E(T_n) - \theta]^2 \\ &= \text{variance de l'estimateur} + \text{carré de sans biais.} \end{aligned}$$

Si T_n est un estimateur sans biais, $EQM(T_n) = var(T_n)$. On a donc intérêt à ce qu'un estimateur soit sans biais et de faible variance. Par ailleurs, on en déduit immédiatement que de deux estimateurs sans biais, le meilleur est celui à la plus petite variance.

La variance d'un estimateur mesure sa variabilité. Si l'estimateur est sans biais, cette variabilité est autour de θ . Si on veut estimer correctement θ , il ne faut pas que cette variabilité soit trop forte.

1.4 Méthodes numériques utiles dans le cadre d'estimation ponctuelle

1.4.1 L'algorithme EM (Expectation-Maximisation)

L'algorithme EM (Expectation-Maximisation) est un outil très puissant et utile pour l'analyse des données incomplètes pour une discussion détaillée sur cette méthode, l'algorithme consiste de deux étapes :

1. Étape E (Expectation)

Sachant la valeur courante du paramètre $\theta^{[t]}$ à l'itération $[t]$ l'étape **E** consiste à la détermination de la fonction :

$$Q(\theta, \theta^{[t]}) = E_c^{[t]}[L(\theta, X)].$$

Avec $X = (y', z)'$, $Q(\theta, \theta^{[t]})$ est l'espérance conditionnelle de la log-vraisemblance des données complètes par rapport à la distribution des données manquantes z sachant les données incomplètes y .

Étape M (Maximisation)

On actualise la valeur courante du paramètre en maximisant la fonction obtenue à l'étape **E** par rapport à θ , soit :

$$\theta^{[t+1]} = \arg \max_{\theta} Q(\theta, \theta^{[t]}).$$

1.4.2 La méthode de Newton-Raphson

L'itération de Newton-Raphson est fréquemment utilisée dans la statistique dans l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance. Soit θ est le paramètre ; $l(\theta; x)$ est le log de la fonction de vraisemblance. On suppose que $l(\theta; x)$ est deux fois dérivable par rapport à θ .

On définit la fonction score :

$$U(\theta; x) = \frac{\partial l(\theta; x)}{\partial \theta}.$$

L'information observée est :

$$I(\theta; x) = -\frac{\partial^2 l(\theta; x)}{\partial^2 \theta}.$$

L'information attendue est :

$$J(\theta) = E[I(\theta; x)].$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ est la valeur de θ qui minimise $l(\theta; x)$. On suppose que la vraisemblance n'a pas un maximum global unique. Pour trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance, on résout l'équation :

$$U(\theta; x) = 0.$$

Par rapport à θ , on suppose que la solution est $\hat{\theta}$. Si $I(\theta) > 0$, alors $\hat{\theta}$ est le maximum. Si on sait que $l(\theta; x)$ a un seul maximum, donc $\hat{\theta}$ doit être ce maximum, autrement $\hat{\theta}$ peut être un maximum local.

L'itération de Newton-Raphson pour résoudre $U(\theta) = 0$ est :

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \frac{U(\theta_k; x)}{I(\theta_k; x)}.$$

Où θ_0 est la valeur initiale de θ .

Il est souvent le cas que $J(\theta)$ est beaucoup plus facile à évaluer que $I(\theta; x)$. Pour cette raison l'itération est modifiée pour l'utiliser $J(\theta)$ au lieu de $I(\theta; x)$ comme suit :

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \frac{U(\theta_k; x)}{J(\theta_k)}.$$

Cette méthode est appelée la méthode de Fisher-Scoring.

1.4.3 Quelques packages du R utiles dans l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Dans cette partie, on donne quelques fonctions et packages R utiles dans l'estimation du maximum de vraisemblance ; comme le package "maxLik" qui permet de donner et d'afficher directement les estimateurs MLE, la fonction "Optim" qui permet de résoudre

les équations non-linéaires et le package "BBsolve" qui permet de résoudre un système d'équations non-linéaires.

maxLiK

C'est un ensemble des fonctions et d'outils permettant d'effectuer une estimation par la méthode du maximum de vraisemblance ; son code R est comme suit :

$$\begin{aligned}
 f &= \text{function}(par)\{mu = par[1] \\
 &\quad \sigma = par[2] \\
 &\quad \text{Expression de la fonction}\} \\
 mle &= \text{maxLiK}(f, start = c(mu, sigma))
 \end{aligned}$$

optim

La fonction "optim" est un outil d'optimisation tout usage de R. À ce titre, la fonction est souvent utilisée par d'autres fonctions. Elle permet de choisir parmi plusieurs algorithmes d'optimisation différents et selon l'algorithme choisi, de fixer des seuils minimum ou maximum aux paramètres à optimiser.

$$\text{optim}(fct, interval = intervalle);$$

où : *fct* est la fonction à maximiser (dans notre cas c'est la fonction du maximum de vraisemblance).

interval : est l'intervalle sur lequel on effectue la recherche.

BBsolve

C'est un package présente des performances très élevées pour les systèmes d'équations non-linéaires, son code R est :

$$mle = \text{BBsolve}(par = value, fn = g)\$par;$$

où :

value : est l'ensemble des valeurs initiales.

g : présente les dérivées premières de la fonction du maximum de vraisemblance .

Chapitre 2

Analyse statistique bayésienne

2.1 Introduction

L'analyse bayésienne des problèmes statistiques propose d'introduire dans la démarche d'inférence, l'information dont dispose a priori le praticien. Dans le cadre de la statistique paramétrique, ceci se traduira par le choix d'une loi sur le paramètre d'intérêt. Dans l'approche classique, le modèle paramétrique est $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P_\theta, \theta \in \Theta)$.

On dispose d'une information a priori sur le paramètre inconnu θ . Cette information prend la forme d'une loi sur l'espace des paramètres Θ notée π qui s'appelle la loi a priori. Le paramètre θ devient une v.a et on note $\theta \sim \pi$. Ainsi la notion de probabilité ou densité de probabilité paramétré par θ n'a plus vraiment de sens. Des notions de l'approche fréquentiste sont remplacées par des notions de probabilités, d'indépendances et de densité de probabilité conditionnelle à θ (lorsque l'on se place d'un cadre uniquement bayésien, on se permettra de ne pas mentionner ce caractère conditionnel).

Définition 2.1. *(La loi a priori)*

Soit $(f_\theta)_{\theta \in \Theta}$ une famille de densité de probabilité à paramètre dans Θ . Une loi a priori π est une loi de probabilité (densité de probabilité) sur Θ .

Définition 2.2. *(Modèle bayésien)*

Un modèle bayésien est la donnée, pour une v.a (ou une suite de v.a) d'une loi conditionnelle et d'une loi a priori

$$x \sim f(x|\theta)$$

$$\theta \sim \pi(\theta).$$

A partir d'un modèle bayésien, on peut calculer une loi a posteriori sur θ , cette loi n'est rien d'autre que la loi de θ conditionnellement aux observations x .

Définition 2.3. (La loi a posteriori)

C'est la loi conditionnelle de θ sachant x . Sa densité est notée $\pi(\theta|x)$ est donnée par la formule :

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta} ;$$

$h(\theta, x)$ est la loi du couple (θ, x) , sa densité est :

$$h(\theta, x) = f(x|\theta)\pi(\theta).$$

$m(x)$ est la loi marginale de x , sa formule est :

$$m(x) = \int_{\Theta} f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta.$$

2.2 Comment choisir la loi a priori ?

Le choix des lois a priori est une étape fondamentale en statistique bayésienne et constitue une différence notable avec la statistique fréquentiste. Les différents choix possibles peuvent être motivés par différents points de vue :

- Choix basé sur des expériences du passé ou sur une intuition du statisticien.
- Choix basé sur la faisabilité des calculs.
- Choix basé sur la volonté de n'apporter aucune information nouvelle pouvant biaiser l'estimation.

2.2.1 Approche partiellement informative

Notions des lois conjuguées :

Définition 2.4. Une famille \mathcal{F} de distribution sur θ est dite conjuguée pour la loi $f(x|\theta)$ si pour tout $\pi \in \mathcal{F}$; la distribution a posteriori $\pi(\cdot|x)$ appartient à \mathcal{F} .

L'avantage des familles conjuguées est avant tout est de simplifier les calculs. Avant le développement des outils de calcul numérique, ces familles étaient pratiquement les seuls qui permettaient de faire obtenir des calculs. Un autre intérêt est que la mise à jour de la loi se fait à travers les paramètres de la loi et donc l'interprétation est souvent bien plus facile.

Quelques exemples des lois conjuguées :

$f(x \theta)$	$\pi(\theta)$	$\pi(\theta x)$
Normale $N(\theta, \sigma^2)$	Normale $N(\mu, \tau^2)$	$N(\rho(\sigma^2\mu + \tau^2x), \rho\sigma^2\tau^2)$ $\rho^{-1} = \sigma^2 + \tau^2$
Poisson $P(\theta)$	Gamma $G(\alpha, \beta)$	$G(\alpha + x, \beta + 1)$
Binomiale $B(n, \theta)$	Bêta $Be(\alpha, \beta)$	$Be(\alpha + x, \beta + n - x)$
Gamma $G(\nu, \theta)$	Gamma $G(\alpha, \beta)$	$G(\alpha + \nu, \beta + x)$
Binomiale Négative $Neg(m, \theta)$	Bêta $Be(\alpha, \beta)$	$Be(\alpha + m, \beta + x)$
Normale $N(\mu, \frac{1}{\theta})$	Gamma $G_a(\alpha, \beta)$	$G(\alpha + 0.5, \beta + (\mu - x)^2/2)$

2.2.2 Loi a priori non informative

Dans le cas où on dispose que peu d'information sur θ , on peut choisir des lois a priori dite peu ou non informatives. On souhaite que l'a priori intervienne de façon minimale dans la loi a posteriori, i.e que les données parlent d'elles même.

Loi a priori de Jeffreys :

Intuitivement, si l'on ne veut pas d'un a priori informatif, on rappelle la définition de l'information de Fisher.

$$I(\theta) = E\left[\left|\frac{\partial}{\partial\theta} \log(f(x|\theta))\right|^2\right].$$

qui, sous certaines conditions de régularité, peut se réécrire :

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \log(f(x|\theta))\right].$$

Définition 2.5. *La loi a priori de Jeffreys est donnée par :*

$$\pi(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)}.$$

2.3 Les fonctions de perte

2.3.1 Les fonctions de perte symétrique

La fonction de perte quadratique :

Introduite par Legendre (1805) et Gauss (1810), cette perte est sans aucun conteste le critère d'évaluation le plus commun ; donnée par la formule :

$$L(\theta, d) = (\theta - d)^2.$$

Dans son article de 1810, Gauss a déjà reconnu le caractère aléatoire de la perte quadratique et le défendait pour des raisons de simplicité, de telles critiques restent valides aujourd'hui. Mais cette perte n'en demeure pas moins utilisée car elle donne en général des solutions bayésiennes acceptables, i.e, celle fournies par une inférence non-décisionnelle fondée sur la densité a posteriori.

La fonction de perte quadratique générale :

La fonction de perte quadratique générale est de la forme :

$$L(\theta, d) = \mathcal{T}(\theta)(\theta - d)^2.$$

Où \mathcal{T} est une fonction de paramètre θ ; par exemple $\mathcal{T}(\theta) = t^\theta$.

2.3.2 Les fonctions de perte asymétrique :

La fonction de perte Linex :

Une fonction de perte asymétrique très pratiques est la fonction de perte Linex (Linear-Exponential). Elle a été introduite par Varian (1975). Cette fonction croît presque exponentiellement d'un coté de zéro et approximativement linéaire de l'autre cotés : Sous l'hypothèse que la perte minimale est obtenue pour $\hat{\theta} - \theta$, la fonction de perte Linex pour θ , soit s'exprime par :

$$L(\Delta) \propto \exp(a\Delta) - a\Delta - 1; a \neq 0;$$

Où : $\Delta = (\hat{\theta} - \theta)$ et $\hat{\theta}$ est un estimateur de θ . Le signe de a représente respectivement la direction et le degré de symétrique ($a > 0$: La surestimation est plus grave que la sous-estimation et vise versa). Pour a proche de zéro, la perte Linex est approximativement la fonction de perte quadratique :

$$E_{\theta}(L(\Delta)) = \exp(a\hat{\theta})E_{\theta}(\exp(-a\theta)) + aE_{\theta}(\theta) - a\hat{\theta} - 1; \quad (2.1)$$

où : $E_{\theta}(\cdot)$ représente l'espérance a posteriori relative à la densité a posteriori du θ .

Pour trouver l'estimateur, nous dérivons l'équation (2.1) par rapport à $\hat{\theta}$ et nous obtenons :

$$\frac{d}{d\hat{\theta}}(E_{\hat{\theta}}(L(\Delta))) = a(\exp(a\hat{\theta}))E_{\theta}(\exp(-a\theta)) - a = 0,$$

d'ou :

$$\begin{aligned} a(\exp(a\hat{\theta}))E_{\theta}(\exp(-a\theta)) &= a \\ \exp(a\hat{\theta})E_{\theta}(\exp(-a\theta)) &= 1, \end{aligned}$$

en appliquant le logarithme, nous obtenons :

$$a\hat{\theta} = -\log(E_{\theta}(\exp(-a\theta)));$$

alors, l'estimateur de Bayes $\hat{\theta}_L$ de θ sous la fonction de perte Linex est :

$$\hat{\theta}_L = \frac{-1}{a} \log(E_{\theta}(\exp(-a\theta))), a \neq 0.$$

La fonction de perte Entropie :

Cette fonction de perte découle de la fonction de perte Linex, et a été proposé par Calabria et Pulcini (1994). Elle est définie par :

$$L_E(\theta, d) \propto \left(\frac{d}{\theta}\right)^p - p \ln\left(\frac{d}{\theta}\right) - 1,$$

qui a un minimum lorsque $d = \theta$.

L'estimateur de Bayes de paramètre θ sous cette fonction de perte est :

$$\hat{\theta}_E = (E_\theta(\theta)^{-p})^{-\frac{1}{p}}$$

- Lorsque $p = 1$, l'estimateur de Bayes coïncide avec l'estimateur de Bayes sous la fonction de perte quadratique pondéré $\frac{(d - \theta)^2}{\theta}$.
- Lorsque $p = -1$, l'estimateur de Bayes coïncide avec l'estimateur de Bayes sous la fonction de perte quadratique.

La fonction de perte de DeGroot :

Introduite par De-Groot (1970) et définie par :

$$L(\theta, d) = \left(\frac{\theta - d}{d}\right)^2.$$

Sous cette fonction de perte, l'estimateur de Bayes est :

$$\hat{\theta}_{DG} = \frac{E^\pi(\theta^2|x)}{E^\pi(\theta|x)}.$$

2.4 Les risques de Bayes

La recherche d'estimateurs de Bayes peut se faire dans le cadre de la théorie de décision. La démarche consiste alors à fixer de préférence entre estimateurs et à chercher un estimateur optimal au sens de cette règle de préférence.

Rappelons qu'en statistique classique la règle de préférence repose (le plus souvent) sur le risque quadratique, noté $R(\theta)$, est défini comme suit :

$$R(\hat{\theta}_B) = \text{var}(\hat{\theta}_B) + [\text{biais}(\hat{\theta}_B)]^2.$$

L'approche bayésienne fait reposer la règle de préférence sur le risque de Bayes. La densité a priori $\pi(\theta)$ étant fixée, le risque de Bayes de $\hat{\theta}_B$ est notée $r(\hat{\theta}_B)$. Il est défini comme suit :

$$r(\hat{\theta}_B) = E(R(\hat{\theta})) = \int_{\Theta} R(\hat{\theta}_B)\pi(\theta|x)d\theta.$$

On dira que $\hat{\theta}_1$ est meilleur que $\hat{\theta}_2$ au sens du risque de Bayes si :

$$r(\hat{\theta}_1) < r(\hat{\theta}_2).$$

Selon la fonction de perte choisie, l'estimateur de Bayes de θ est obtenu en minimisant l'espérance pour un paramètre θ .

2.5 Estimation bayésienne

Le tableau ci-dessus résume les expressions des estimateurs bayésiens et les risques a posteriori qui correspond sous différentes fonctions de perte :

Fonctions de perte	Estimateurs de Bayes	Risque a posteriori
quadratique générale	$\hat{\theta}_{GQ} = \frac{E_{\pi}(\tau(\theta)\theta)}{E_{\pi}(\tau(\theta))}$	$E_{\pi}(\tau(\theta)(\theta - \hat{\theta}_{GQ}))$
quadratique	$\hat{\theta}_Q = E_{\pi}(\theta x)$	$E_{\pi}(\theta(\theta - \theta_Q)^2)$
Linex	$\hat{\theta}_L = \frac{-1}{a} \ln(E_{\pi}(\exp(-a\theta)))$	$a(\hat{\theta}_Q - \hat{\theta}_L)$
Entropie	$\hat{\theta}_E = [E_{\pi}(\theta)^{-p}]^{\frac{-1}{p}}$	$p[E_{\pi}(\ln(\theta) - \ln(\hat{\theta}_E))]$
DeGroot	$\hat{\theta}_{DG} = \frac{E_{\pi}(\theta^2 x)}{E_{\pi}(\theta x)}$	$\frac{E_{\pi}((\theta - \theta_{DG})^2)}{E_{\pi}(\theta - \theta_{DG})}$

2.6 Méthodes numériques utiles dans le cadre bayésien

Dans cette section, on donne quelques méthodes numériques utiles dans l'estimation bayésienne (pour simplifier ou bien pour résoudre des intégrales).

2.6.1 La méthode d'approximation de Lindley

Lindley (1980) a développé la procédure d'approximation pour les intégrales de la forme :

$$\frac{\int \omega(\theta) \exp(L(\theta)) d\theta}{\int v(\theta) \exp(L(\theta)) d\theta} \quad (2.2)$$

avec $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$, $L(\theta) = \log(l(\theta|x))$ est le logarithme de la fonction de vraisemblance et $\omega(\theta), v(\theta)$ sont des fonctions arbitraires de θ

Si $v(\theta)$ est la densité a priori de θ et $\omega(\theta) = \Phi(\theta)v(\theta)$ l'équation (2.2) donne l'espérance a posteriori de $\Phi(\theta)$, telle que :

$$E(\Phi(\theta)|x) = \frac{\int \Phi(\theta) \exp(L(\theta) + p(\theta)) d\theta}{\int \exp(L(\theta) + p(\theta)) d\theta} = \frac{\int \Phi(\theta) \exp(\Lambda(\theta)) d\theta}{\int \exp(\Lambda(\theta)) d\theta}$$

avec $p(\theta) = \log(v(\theta))$ et $\Lambda(\theta) = \log(\pi(\theta|x)) = L(\theta) + p(\theta)$ est le logarithme de la distribution a posteriori de θ , il est évident que le maximum de $\Lambda(\theta) = \log(\pi(\theta|x))$ nous donne le mode a posteriori de θ . Lindley (1980) a obtenu l'expression requise pour $E(\phi(\theta|x))$. Pour illustrer ça, on donne un exemple, en posant que : $\phi(\theta) = S(t)$.

Donc, en utilisant l'approximation de Lindley, l'estimateur bayésien pour $S(t)$ est calculé à l'aide de l'expression suivante :

$$\hat{S}(t)_B = \phi(\hat{\theta}) + \frac{1}{2} \Sigma \Phi_{ij}(\hat{\theta}) \mathcal{T}_{ij} + \frac{1}{2} \Sigma \Lambda_{ijk}(\hat{\theta}) \mathcal{T}_{ij} \mathcal{T}_{kj}.$$

Où :

$$\Phi_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad \Lambda_{ijk} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k} \dots$$

Les \mathcal{T}_{ij} sont les (i, j) ^{ième} éléments de l'inverse de la matrice Hessienne au sens négative.

2.6.2 La méthode de Tierney-Kadane

Le rapprochement de Lindley exige l'évaluation des dérivées du tiers de la fonction de vraisemblance. Tierney et Kadane (1986) ont donné une méthode alternative d'évaluation du rapport des intégrales de la forme de l'équation (2.2).

Soient les deux expressions :

$$l = \frac{L(\theta|x) + \log(p(\theta))}{n}; \quad l^* = \frac{\log(\Phi(\theta)) + \log(v(\theta)) + L(\theta/x)}{n}$$

Donc l'équation (2.2) prend cette forme

$$E(\Phi(\theta)|x) = \frac{\int \exp(nl^*)d\theta}{\int \exp(nl)d\theta} \quad (2.3)$$

Tierney et Kadane (1986) ont développé chaque intégrale séparément sur le point qui maximise l'intégrale. Cette méthode ne nécessite que les dérivées premières et deuxièmes de la densité a posteriori. D'après Tierney et Kadane (1986), l'estimateur de Bayes dans l'équation (2.3), dans le cas multiparamétrique prend la forme :

$$\hat{E}(\Phi(\theta)|x) = \left(\frac{|\Sigma^*|}{|\Sigma|}\right)^{\frac{1}{2}} \exp[n(l^*(\hat{\theta}^*) - l(\hat{\theta}))]$$

Où $\hat{\theta}^*$ et $\hat{\theta}$ maximisent l^* et l respectivement, et Σ^* et Σ sont les inverses des Hessiennes le l^* et l au signe négative pour $\hat{\theta}^*$ et $\hat{\theta}$ respectivement.

2.6.3 Les méthodes de Monte-Carlo

Les Méthodes de Monte-Carlo sont des techniques d'échantillonnage aléatoire numériques visant à calculer des intégrales. Le problème classique est le suivant : Soit $h(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$ une fonction quelconque et $f(x)$ une fonction de densité de support $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m$.

On cherche à calculer :

$$I = E_f(h(x)) = \int_{A \in \mathcal{X}} h(x)f(x)dx.$$

Pour ce faire, on génère un certain nombre n de variables $x_i, i = 1, \dots, n$ i.i.d de densité f , avec les quelles on estime I par :

$$\bar{h}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n h(x_j).$$

Propriétés

1. Par la loi des grands nombres, avec probabilité 1

$$\bar{h}_n \longrightarrow E(h)$$

2. A la condition que $E_g(h^2)$ soit finie

$$V(\bar{h}_n) = \frac{1}{n}V(h(x)) = \frac{1}{n} \int h^2(x)f(x)dx - E_f^2(h(x)).$$

3. Sous la même condition, par le théorème de la limite centrale

$$\frac{\bar{h}_n - 1}{\sqrt{V(h(x))}} \longrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Ces techniques seront surtout utiles dans les problèmes en grandes dimension, où les méthodes numériques traditionnelles perdent de leur efficacité. La difficulté sera de trouver une façon de générer efficacement un échantillon de variables i.i.d de densité f .

2.6.4 Les méthodes MCMC

Les méthodes de Monte-Carlo par Chaîne de Markov permettent d'élargir grandement l'éventail des distributions pouvant être simulées numériquement. Elles sont relativement simples à implémenter et ne requièrent souvent que la connaissance de la fonction de densité cibles à une constante près, ce qui les rend intéressantes dans de nombreuses situations.

Cependant, une implémentation naïve peut mener à des temps de calcul très longs, puisque la convergence de ces méthodes est relativement lente lorsqu'elles ne sont pas bien calibrées à une situation donnée.

Nous verrons d'abord sommairement les justifications théoriques de ces méthodes, puis nous les illustrerons par la présentation de l'algorithme original de Metropolis-Hastings, pour ensuite voir les améliorations successives que l'on peut y apporter sur leurs particularités et leur validité théorique.

L'idée de base est de simuler une distribution de densité f en utilisant une chaîne de Markov ergodique (X_t) dont la distribution stationnaire est f . Le théorème ergodique garantit alors la convergence en loi de (X_t) vers une variable de densité f et par conséquent, pour presque toute valeur initiale X_0 :

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n h(X_t) \rightarrow E_f(h)$$

Nous appellerons MCMC toute méthode permettant de simuler une distribution en utilisant une chaîne de Markov ergodique ayant celle-ci comme distribution stationnaire. Pour construire un tel algorithme, il faut donc déterminer un ensemble de probabilités de

transition P approprié, c'est-à-dire irréductible, ergodique et ayant la bonne distribution stationnaire.

Nous aurons besoin pour la suite du résultats suivant : Soit une chaîne de Markov ayant comme probabilité de transition P et une distribution de probabilité $\pi(\cdot)$ définie sur le même espace d'états S . Si P possède la propriété de réversibilité par rapport à π :

$$\forall x, y \in S : \pi(x)P(x, y) = \pi(y)P(y, x).$$

alors la distribution stationnaire de la chaîne de Markov est π .

Démonstration

On aura stationnarité si : $\forall y \in S$

$$\int_S \pi(dx)P(x, y) = \pi(y).$$

Or, sous l'hypothèse de réversibilité :

$$\forall y : \int_S \pi(dx)P(x, y) = \int_S \pi(y)P(y, dx) = \pi(y) \int_S P(y, dx) = \pi(y).$$

On utilisera cette propriété pour construire les probabilités de transition appropriées.

2.6.5 L'algorithme de Metropolis-Hastings

L'algorithme ne nécessite qu'une valeur de départ X_0 et le choix d'une distribution conditionnelle de densité $q(x|y) = q(y|x)$. A une étape donnée t , les manipulations suivantes sont effectuées.

Algorithme MH

1. A partir de la valeur $X_t = x$, on génère $Y_{t+1} = y$ selon la distribution de densité $q(y|x)$.
2. On pose :
 - $X_{t+1} = Y_{t+1}$ avec la probabilité $\alpha(x, y)$.
 - $X_{t+1} = X_t$ avec probabilité $1 - \alpha(x, y)$.

Où : les seuils α doivent avoir la forme générale :

$$\alpha(x, y) = \frac{s(x, y)}{1 + r(x, y)}.$$

$r(x, y)$ est le ratio $\frac{\pi(x)q(x,y)}{\pi(y)q(y,x)}$, et la fonction s est choisie de façon à ce que $s(x, y) = s(y, x)$ et $0 \leq \alpha(x, y) \leq 1$. Habituellement on utilise exclusivement

$$\alpha(x, y) = \min\left\{1, \frac{\pi(y)q(x|y)}{\pi(x)q(y|x)}\right\}.$$

Qui correspond au choix $s(x, y) = \min\{1 + r(x, y), 1 + r(y, x)\}$. Si en plus la densité q est symétrique ($q(y|x) = q(x|y)$), le rapport devient tout simplement :

$$\alpha(x, y) = \min\left\{1, \frac{\pi(y)}{\pi(x)}\right\}.$$

On appelle q la densité de proportion des candidats, ou densité instrumentale, et α les probabilités d'acceptation de ces dernières. Voyons maintenant les propriétés théoriques de cette procédure.

Propriétés

L'algorithme tel que défini génère une chaîne de Markov dont les probabilités de transition sont données par :

$$P(x, y) = q(x, y)\alpha(x, y), \text{ si } x \neq y.$$

$$P(x, y) = 1 - \int P(x, y)dy, \text{ autrement.}$$

Pour prouver que la distribution stationnaire de cette chaîne est π , il suffit de montrer qu'elle est réversible par rapport à π . Or

$$\begin{aligned} \pi(x)P(x, y) &= \pi(x)q(x, y)\alpha(x, y) \\ &= \frac{\pi(x)q(x, y)s(x, y)}{1 + \frac{\pi(x)q(x,y)}{\pi(y)q(y,x)}} \\ &= \frac{\pi(x)\pi(y)q(x, y)q(y, x)s(x, y)}{\pi(y)q(y, x) + \pi(x)q(x, y)} \\ &= \frac{\pi(y)q(y, x)s(y, x)}{1 + \frac{\pi(y)q(y,x)}{\pi(x)q(x,y)}} \\ &= \pi(y)q(y, x)\alpha(y, x) = \pi(y)P(y, x). \end{aligned}$$

Maintenant, il faut s'assurer que la chaîne converge bien vers sa distribution stationnaire, c'est-à-dire qu'elle est ergodique. Or, ceci est facilement vérifié la plupart du temps.

Par exemple, si $q(x, y)$ est positive pour toute paire (x, y) appartenant au support de π , $P(x, y)$ aussi sera toujours positive. Ainsi, à partir d'une valeur X_t donnée, toute valeur X_{t+1} sera atteignable en une seule étape avec une probabilité positive. La chaîne est donc irréductible. La chaîne sera aussi apériodique des moments qu'il existe au moins une paire (x, y) tel que $\alpha(x, y) < 1$, car on aura alors $P(x, x) > 0$.

Cela sera pratiquement toujours vrai et on conclut donc que la chaîne est effectivement ergodique.

2.6.6 L'échantillonnage de Gibbs

Introduit par Geman (1984) dans le cadre de la restauration d'images. Le principe repose encore sur une décomposition du problème générale (simuler suivant une certaine loi) en une série des problèmes élémentaires (simuler suivant des lois conditionnelles). Considérons la densité $f(x, y_1, \dots, y_p)$. On s'intéresse à la loi marginale

$$f(x) = \int \dots \int f(x, y_1, \dots, y_p) dy_1 \dots dy_p.$$

En particulier, on souhaite obtenir son espérance mathématique et sa variance. On se place ici dans le cas où les intégrations impliquées dans le calcul de la marginale sont compliquées et difficiles à effectuer même numériquement. On supposera cependant que la densité conditionnelle est disponible.

L'échantillonneur de Gibbs va nous permettre de générer x suivant $f(x)$ sans utiliser directement son expression supposée difficile à manipuler, mais en utilisant les densités conditionnelles.

Ainsi fabriquant un échantillon (x_1, \dots, x_m) assez grand on pourra approximer la moyenne, la variance et autres caractéristiques en utilisant une loi de grands nombre

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g(x_i) = E(g(x)).$$

Principe de l'algorithme

Considérons le cas élémentaire $f(x, y)$. On suppose $f(x|y)$ et $f(y|x)$ disponibles. On peut alors générer ce qu'on appellera une séquence de Gibbs de la manière suivante : partant d'une valeur x_0 , on génère y_0 avec $\pi(\cdot|x_0)$, puis x_1 avec $\pi(\cdot|y_0)$ puis y_1 avec $\pi(\cdot|x_1)$ et ainsi de suite.

Après M itérations de ce schéma, on aura une séquence : $(x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_M, y_M)$. Pour M assez grand, x_M est une réalisation de X .

Dans le cadre Bayésien, l'algorithme de Gibbs va permettre d'obtenir une réalisation du paramètre $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ suivant la loi a posteriori $\pi(\theta|x)$ dès que l'on est capable d'exprimer les lois conditionnelles : $\pi(\theta_i|\theta_j; x)$; $j \neq i$; l'échantillonnage de Gibbs consiste à :

Partant d'un vecteur initial $\theta^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_m^{(0)})$,

à la $(p+1)$ ème étape, disposant du vecteur $\theta^{(p)} = (\theta_1^{(p)}, \dots, \theta_m^{(p)})$,

simuler

$$\theta_1^{(p+1)} = \pi(\theta_1|\theta_2^{(p)}, \theta_3^{(p)}, \dots, \theta_m^{(p)}; x)$$

$$\theta_2^{(p+1)} = \pi(\theta_2|\theta_1^{(p+1)}, \theta_3^{(p)}, \dots, \theta_m^{(p)}; x)$$

.

.

.

$$\theta_m^{(p+1)} = \pi(\theta_m|\theta_1^{(p+1)}, \theta_2^{(p+1)}, \dots, \theta_{m-1}^{(p+1)}; x)$$

Les itérations successives de cet algorithme génèrent successivement les états d'une chaîne de Markov $\theta^{(p)}$, $p > 0$ à valeur dans $\mathbb{N}^{\otimes m}$.

La probabilité de transition de θ' vers θ a pour expression :

$$K(\theta', \theta) = \pi(\theta_1|\theta_2', \dots, \theta_m') \times \pi(\theta_2|\theta_1, \theta_2', \dots, \theta_m')$$

$$\times \pi(\theta_3|\theta_1, \theta_2, \theta_4', \dots, \theta_m') \times \dots \times \pi(\theta_m|\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$$

On montre que cette chaîne admet une mesure invariante qui est la loi a posteriori. Pour un nombre d'itérations suffisamment grand, le vecteur θ obtenu peut donc être considéré comme étant une réalisation de loi a posteriori.

Soit f une densité de probabilité. Étant donné une densité g telle que :

$$\int_z g(x, z) dz = f(x).$$

et un entier $p > 1$ tel que les densités conditionnelles de

$$g(y) = g(y_1, \dots, g(y_p)), g_1(y_1|y_2, \dots, y_p), g_2(y_2|y_1, y_3, \dots, y_p), \dots, g_p(y_p|y_1, \dots, y_{p-1}),$$

soient simulables, l'algorithme de l'échantillonnage de Gibbs associé à cette décomposition est fourni par la transition $y^{(t)}$ à $y^{(t+1)}$ suivante :

Simuler

$$y_1^{(t+1)} \sim g_1(y_1|y_2^{(t)}, \dots, y_p^{(t)})$$

$$y_2^{(t+1)} \sim g_2(y_2|y_1^{(t)}, \dots, y_p^{(t)})$$

.

.

.

$$y_p^{(t+1)} \sim g_p(y_p|y_1^{(t+1)}, \dots, y_{p-1}^{(t+1)})$$

Lorsque la complétion de f en g n'est pas nécessaire, un choix relativement restreint consiste en la sélection du nombre p de composantes des sous vecteurs (y_1, y_2, \dots, y_p) (qui ne sont pas nécessairement scalaires). Le choix est cependant souvent limité pour des raisons pratiques de simulation, en particulier lorsque y est de petite dimension.

Chapitre 3

Application sur la loi de Rayleigh

3.1 Introduction

Lord Rayleigh (1880) a introduit la distribution de Rayleigh dans le cadre d'un problème dans le domaine d'acoustique. Depuis lors, d'importants travaux ont été liés à cette distribution dans les différents domaines des sciences et technologies. Cette distribution a des relations avec certaines distributions bien connues comme les distributions de Weibull, Chi-deux,...

La distribution de Rayleigh est un cas particulier de la distribution de Weibull à deux paramètres est constituée un modèle approprié pour les études d'essai de survie. Polovoko (1968), Dyer et Whisnand (1973) ont démontré l'importance de cette distribution dans l'électro des dispositifs et l'ingénierie de communication.

Plusieurs chercheurs ont travaillé sur la distribution de Rayleigh ; Howlader and Hos-sain (1995) ont étudié le problème d'estimation bayésienne de paramètre et de la fonction de fiabilité avec des données censurées et sous la fonction de perte quadratique, Dyer et Whisnand (1973) ont trouvé le meilleur estimateur sans biais de paramètre σ avec des données complètes. L'estimation bayésienne et le problème de prédiction de la loi de Rayleigh avec des données censurées de type *II* sont traités par Balakrishnan (1989), Fernandez (2000), Raqab et Madi (2011).

Aussi, Kim et Han (2009), Raqab et Madi (2011), et Dey (2014) ont trouvé l'estimateur bayésien du paramètre σ de la loi de Rayleigh avec des données progressivement censurées.

Dans ce chapitre, on s'intéresse dans un premier temps à l'estimation de paramètre,

de la fonction de fiabilité et de la fonction de taux de panne sous une fonction de perte symétrique (la fonction de perte quadratique) et sous une fonction de perte asymétrique (Linex) en présence d'un échantillon complet avec une loi a priori vague puis avec une loi a priori conjuguée naturelle.

3.2 Le modèle

La fonction de densité de la loi de Rayleigh à un seul paramètre σ est :

$$f(x; \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right); \quad x > 0, \sigma > 0$$

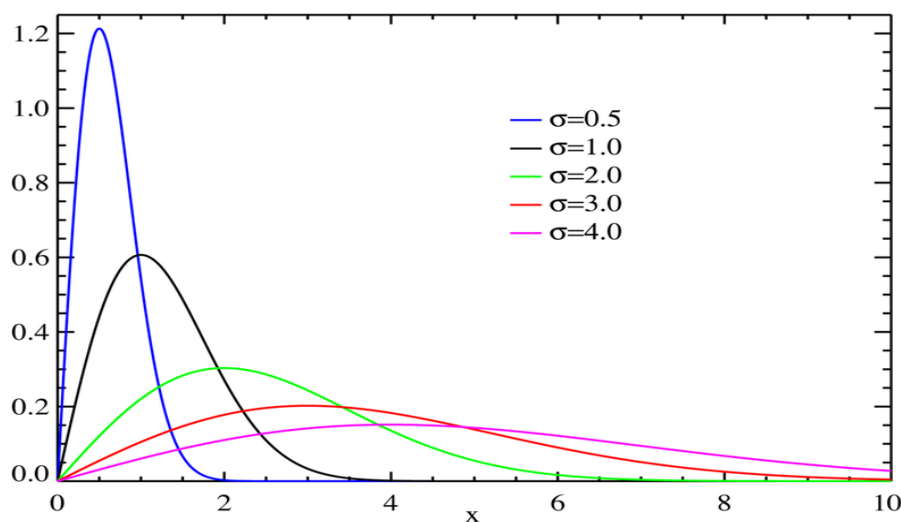


FIGURE 3.1 – Densité de probabilité de la loi de Rayleigh avec différentes valeurs de σ .

La fonction de répartition de la loi de Rayleigh est :

$$\begin{aligned} F(x; \sigma) &= \int_0^x f(t; \sigma) dt \\ &= \int_0^x \frac{t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

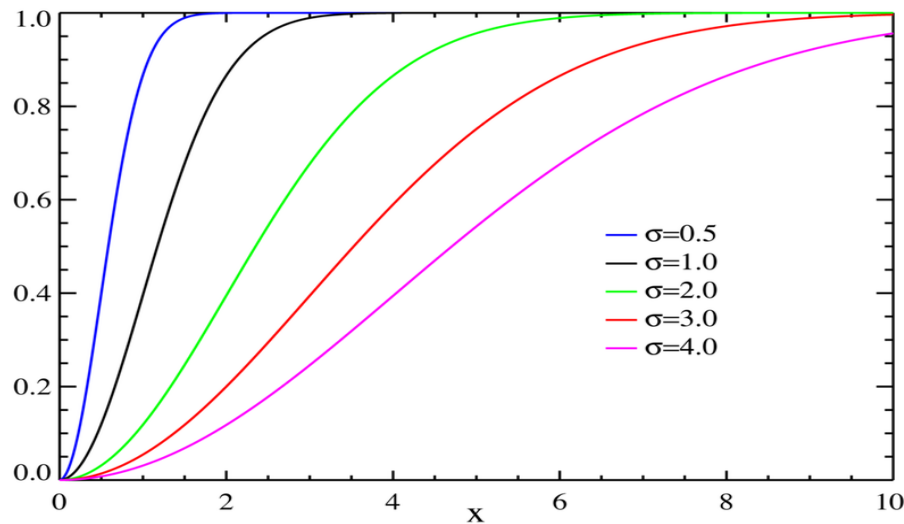


FIGURE 3.2 – Fonction de répartition de la loi de Rayleigh avec différentes valeurs de σ .

La fonction de fiabilité de la loi de Rayleigh est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} S(x; \sigma) &= 1 - F(x; \sigma) \\ &= 1 - \left(1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

La fonction de taux de panne (taux de hasard) est donnée par :

$$\begin{aligned} h(x; \sigma) &= \frac{f(x; \sigma)}{S(x; \sigma)} \\ &= \frac{\frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)} \\ &= \frac{x}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

Le moment d'ordre k de la loi de Rayleigh est donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} m_k &= E(X^k) = \int_0^{+\infty} x^k f(x; \sigma) dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^k \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \sigma^k 2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right), \text{ avec : } \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt \end{aligned}$$

Pour $k = 1$, on obtient ; l'espérance de la loi de Rayleigh est : $E(X) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

et

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Où :

$$E(X^2) = 2\sigma^2, \quad E(X) = \sigma^2 \frac{\pi}{2}$$

Donc :

$$\text{Var}(X) = \left(\frac{4 - \pi}{2} \right) \sigma^2.$$

3.3 Estimation classique avec la méthode du maximum de vraisemblance

Soit $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un n-échantillon de la loi de Rayleigh de paramètre σ donc, la fonction du maximum de vraisemblance est :

$$\begin{aligned} L(\underline{x}; \sigma) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

Donc :

$$L(\underline{x}; \sigma) = \frac{1}{\sigma^{2n}} \prod_{i=1}^n x_i \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

On prend le logarithme de la fonction de vraisemblance ; on obtient :

$$\begin{aligned} l(\underline{x}; \sigma) &= \ln(L(\underline{x}; \sigma)) = \ln\left(\frac{1}{\sigma^{2n}} \prod_{i=1}^n x_i \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right)\right) \\ &= -2n \ln \sigma + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{aligned}$$

On dérive par rapport à σ :

$$\frac{\partial l(\underline{x}; \sigma)}{\partial \sigma} = \frac{-2n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

On pose la notation suivante : $T_n = \sum_{i=1}^n x_i^2$

L'estimateur du maximum de vraisemblance noté $\hat{\sigma}_{mle}$ est obtenu par la solution de l'équation $\frac{\partial l(\underline{x}; \sigma)}{\partial \sigma} = 0$, donc :

$$\hat{\sigma}_{MLE} = \sqrt{\frac{T_n}{2n}}.$$

L'erreur quadratique de l'estimateur $\hat{\sigma}_{MLE}$ est donnée par : $EQ(\hat{\sigma}_{MLE}) = E((\hat{\sigma}_{MLE} - \sigma)^2)$.

Estimation de la fonction de fiabilité

Pour obtenir l'estimateur $\hat{S}_{MLE}(x; \sigma)$ de la fonction de fiabilité $S(x; \sigma)$, on remplace σ par $\hat{\sigma}_{MLE}$ dans l'expression de $S(x; \sigma)$; donc :

$$\begin{aligned}\hat{S}_{MLE}(x; \sigma) &= \exp\left(-\frac{x^2}{2\hat{\sigma}_{MLE}^2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{nx^2}{T_n}\right).\end{aligned}$$

L'erreur quadratique de la fonction de fiabilité est :

$$EQ(\hat{S}_{MLE}(x; \sigma)) = E\left(\left(\hat{S}_{MLE}(x; \sigma) - S(x; \sigma)\right)^2\right)$$

Estimation de la fonction de taux de panne

Pour obtenir l'estimateur $\hat{h}_{MLE}(x; \sigma)$ de la fonction de taux de panne $h(x; \sigma)$, on remplace σ par $\hat{\sigma}_{MLE}$ dans l'expression de $h(x; \sigma)$; donc :

$$\begin{aligned}\hat{h}_{MLE}(x; \sigma) &= \frac{x}{\hat{\sigma}_{MLE}^2} \\ &= \frac{2nx}{T_n}.\end{aligned}$$

L'erreur quadratique de la fonction de taux de panne est :

$$EQ(\hat{h}_{MLE}(x; \sigma)) = E\left(\left(\hat{h}_{MLE}(x; \sigma) - h(x; \sigma)\right)^2\right)$$

3.4 Estimation bayésienne avec une loi a priori vague

On choisit la loi a priori de Jeffrey définie par :

$$\pi_1(\sigma) = |I_1(\sigma)|^2 = \left| -E \frac{\partial^2 \ln f}{\partial \sigma^2} \right| \propto \frac{1}{\sigma}$$

La densité a posteriori est calculée à l'aide de la formule suivante :

$$\begin{aligned} \pi_1(\sigma|x) &= \frac{L(\underline{x}; \sigma) \pi_1(\sigma)}{\int_0^{+\infty} L(\underline{x}; \sigma) \pi_1(\sigma) d\sigma} \\ &= \frac{\frac{1}{\sigma^{2n}} \prod_{i=1}^n x_i \exp\left(-\frac{T_n}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sigma}}{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma^{2n}} \prod_{i=1}^n x_i \exp\left(-\frac{T_n}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sigma} d\sigma} \\ &= \frac{\sigma^{-2n-1} \exp\left(-\frac{T_n}{2\sigma^2}\right)}{\int_0^{+\infty} \sigma^{-2n-1} \exp\left(-\frac{T_n}{2\sigma^2}\right) d\sigma} \end{aligned}$$

Soit :

$$K = \int_0^{+\infty} \sigma^{-2n-1} \exp\left(-\frac{T_n}{2\sigma^2}\right) d\sigma ;$$

après les calculs, on obtient :

$$K = \frac{\Gamma(n)}{2^{1-n} (T_n)^n}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \pi_1(\sigma|x) &= K^{-1} \sigma^{-2n-1} \exp\left(-\frac{T_n}{2\sigma^2}\right) \\ &\propto \sigma^{-2n-1} \exp\left(-\frac{T_n}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

3.4.1 Sous la fonction de perte quadratique

Estimation du paramètre σ

Par rapport à une fonction de perte quadratique et une loi a priori vague, l'estimateur de σ noté $\hat{\sigma}_{VQ}$ est obtenu en calculant sa moyenne par rapport à la densité a posteriori :

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{VQ} &= E_{\pi_1}(\sigma|x) = \int_0^{+\infty} \sigma \pi_1(\sigma|x) d\sigma \\
&= \int_0^{+\infty} -\sigma \frac{(T_n)^n}{2^{n-1}\Gamma(n)} \sigma^{-2n-1} \exp\left(-\frac{T_n}{2\sigma^2}\right) d\sigma \\
&= \left(\frac{T_n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n)}.
\end{aligned}$$

Le risque a posteriori de σ est donné par :

$$\begin{aligned}
R(\hat{\sigma}_{VQ}) &= E_{\pi_1}((\sigma - \hat{\sigma}_{VQ})^2) = \int_0^{+\infty} (\sigma - \hat{\sigma}_{VQ})^2 \pi_1(\sigma|x) d\sigma \\
&= \int_0^{+\infty} \sigma^2 \pi_1(\sigma|x) d\sigma + \int_0^{+\infty} \hat{\sigma}_{VQ}^2 \pi_1(\sigma|x) d\sigma - 2 \int_0^{+\infty} \sigma \hat{\sigma}_{VQ} \pi_1(\sigma|x) d\sigma \\
&= \frac{T_n \Gamma(n-1)}{2 \Gamma(n)} + \frac{T_n \Gamma^2(n-\frac{1}{2})}{2 \Gamma^2(n)} - \frac{T_n \Gamma^2(n-\frac{1}{2})}{\Gamma^2(n)} \\
&= \frac{T_n}{2} \left(\frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)} - \frac{\Gamma^2(n-\frac{1}{2})}{\Gamma^2(n)} \right).
\end{aligned}$$

Estimation de la fonction de fiabilité

L'estimateur bayésien $S(x; \sigma)$ par rapport à la fonction de perte quadratique et une loi a priori vague est $\hat{S}_{VQ}(x; \sigma)$:

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{VQ}(x; \sigma) &= \int_0^{+\infty} S(x; \sigma) \pi_1(\sigma|x) d\sigma \\
&= \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \frac{-(T_n)^n}{2^{n-1}\Gamma(n)} \sigma^{-2n-1} \exp\left(-\frac{T_n}{2\sigma^2}\right) d\sigma
\end{aligned}$$

Après les calculs, on obtient :

$$\hat{S}_{VQ}(x; \sigma) = \left(\frac{T_n}{x^2 + T_n} \right)^n.$$

Le risque a posteriori de la fonction de fiabilité sous la fonction de perte quadratique est donné par :

$$\begin{aligned}
R(\hat{S}_{VQ}(x; \sigma)) &= E_{\pi_1}((S(x; \sigma) - \hat{S}_{VQ}(x; \sigma))^2) = \int_0^{+\infty} (S(x; \sigma) - \hat{S}_{VQ}(x; \sigma))^2 \pi_1(\sigma|x) d\sigma \\
&= \int_0^{+\infty} S^2(x; \sigma) \pi_1(\sigma|x) d\sigma + \int_0^{+\infty} \hat{S}_{VQ}^2(x; \sigma) \pi_1(\sigma|x) d\sigma \\
&\quad - 2 \int_0^{+\infty} S(x; \sigma) \hat{S}_{VQ}(x; \sigma) \pi_1(\sigma|x) d\sigma \\
&= \frac{T_n^n}{(2x^2 + T_n)^n} + \frac{T_n^{2n}}{(x^2 + T_n)^{2n}} - 2 \frac{T_n^{2n}}{(x^2 + T_n)^{2n}} \\
&= \left(\frac{T_n}{2x^2 + T_n} \right)^n - \left(\frac{T_n}{x^2 + T_n} \right)^{2n}.
\end{aligned}$$

Estimation de la fonction de taux de panne

L'estimateur bayésien $h(x; \sigma)$ par rapport à la fonction de perte quadratique et une loi a priori vague est $\hat{h}_{VQ}(x; \sigma)$:

$$\begin{aligned}\hat{h}_{VQ}(x; \sigma) &= \int_0^{+\infty} h(x; \sigma) \pi_1(\sigma|x) d\sigma \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sigma^2} \frac{-(T_n)^n}{2^{n-1} \Gamma(n)} \sigma^{-2n-1} \exp\left(-\frac{T_n}{2\sigma^2}\right) d\sigma \\ &= \frac{2n x}{T_n}.\end{aligned}$$

Le risque a posteriori de la fonction de taux de panne sous la fonction de perte quadratique est :

$$\begin{aligned}R(\hat{h}_{VQ}(x; \sigma)) &= E_{\pi_1}((h(x; \sigma) - \hat{h}_{VQ}(x; \sigma))^2) \\ &= \int_0^{+\infty} (h(x; \sigma) - \hat{h}_{VQ}(x; \sigma))^2 \pi_1(\sigma|x) d\sigma \\ &= \int_0^{+\infty} h^2(x; \sigma) \pi_1(\sigma|x) d\sigma + \int_0^{+\infty} \hat{h}_{VQ}^2(x; \sigma) \pi_1(\sigma|x) d\sigma \\ &\quad - 2 \int_0^{+\infty} h(x; \sigma) \hat{h}_{VQ}(x; \sigma) \pi_1(\sigma|x) d\sigma \\ &= \left(\frac{2}{T_n}\right)^2 \frac{x^2 \Gamma(n+2)}{\Gamma(n)} + \left(\frac{2nx}{T_n}\right)^2 - 2 \left(\frac{2nx}{T_n}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{T_n}\right)^2 \frac{x^2 \Gamma(n+2)}{\Gamma(n)} - \left(\frac{2nx}{T_n}\right)^2.\end{aligned}$$

3.4.2 Sous la fonction de perte Linex

Estimation du paramètre σ

Sous la fonction de perte Linex et avec une loi a priori vague, l'estimateur du paramètre σ est :

$$\hat{\sigma}_{VL} = \left[\frac{T_n}{2a} (1 - \exp(-\frac{a}{n+1}))\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Son risque a posteriori est :

$$R(\hat{\sigma}_{VL}) = a(\hat{\sigma}_{VQ} - \hat{\sigma}_{VL}).$$

Estimation de la fonction de fiabilité

L'estimateur bayésien de $S(x; \sigma)$ sous la fonction de perte Linex noté $S_{VL}(x; \sigma)$, pour le calculer on utilise le changement de variable suivant : $S(x; \sigma) = \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) = \gamma \Rightarrow \sigma = (-\frac{x^2}{2 \ln \gamma})^{\frac{1}{2}}$; on réécrit la densité a posteriori de γ :

$$\pi_1(\gamma|x) = \left(\frac{T_n}{x^2}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n)} (\gamma)^{\frac{T_n}{x^2}-1} (-\ln \gamma)^{n-1}; 0 \leq \gamma \leq 1.$$

$$\hat{S}_{VL} = -\frac{1}{a} \ln \left[\sum_{j=0}^k \frac{(-a)^j}{j!} \left(1 + j \frac{x^2}{T_n}\right)^{-n} \right].$$

Son risque a posteriori est :

$$R(\hat{S}_{VL}(x; \sigma)) = a(\hat{S}_{VQ}(x; \sigma) - \hat{S}_{VL}(x; \sigma)).$$

Estimation de la fonction de taux de panne

l'estimateur bayésien de $h(x; \sigma)$ sous la fonction de perte Linex noté $\hat{h}_{VL}(x; \sigma)$ est :

$$\hat{h}_{VL}(x; \sigma) = a \frac{2x}{T_n} \left[1 - \exp\left(-\frac{a}{n+1}\right)\right]^{-1}$$

Son risque a posteriori est :

$$R(\hat{h}_{VL}(x; \sigma)) = a(\hat{h}_{VQ}(x; \sigma) - \hat{h}_{VL}(x; \sigma)).$$

3.5 Estimation bayésienne avec une loi a priori conjuguée naturelle

La loi a priori conjuguée naturelle est définie par :

$$\pi_2(\sigma) \propto \frac{1}{\sigma^{\alpha+1}} \exp\left(-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right); \alpha, \beta > 0$$

La densité a posteriori est :

$$\begin{aligned} \pi_2(\sigma|x) &= \frac{L(\underline{x}; \sigma)\pi_2(\sigma)}{\int_0^{+\infty} L(\underline{x}; \sigma)\pi_2(\sigma)d\sigma} \\ &= \frac{\sigma^{-2n-\alpha-1} \exp\left(\frac{-T_n - \beta}{2\sigma^2}\right)}{\int_0^{+\infty} \sigma^{-2n-\alpha-1} \exp\left(\frac{-T_n - \beta}{2\sigma^2}\right)d\sigma} \end{aligned}$$

Où :

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{+\infty} \sigma^{-2n-\alpha-1} \exp\left(\frac{-T_n - \beta}{2\sigma^2}\right) d\sigma \\ &= \frac{-2^{n+\frac{\alpha}{2}-1}}{(T_n + \beta)^{n+\frac{\alpha}{2}}} \Gamma\left(n + \frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \pi_2(\sigma|x) &= K^{-1} \sigma^{-2n-\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(T_n + \beta)\right) \\ &\propto \sigma^{-2n-\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(T_n + \beta)\right). \end{aligned}$$

3.5.1 Sous une fonction de perte quadratique

Estimation bayésienne du paramètre σ

Toujours par rapport à une fonction de perte quadratique et une loi a priori conjuguée naturelle de σ , l'estimateur de σ noté $\hat{\sigma}_{CQ}$ est obtenu en calculant sa moyenne par rapport à la densité a posteriori :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{CQ} &= \int_0^{+\infty} \sigma \pi_2(\sigma|x) d\sigma \\ &= \int_0^{+\infty} \sigma \frac{-(T_n + \beta)^{n+\frac{\alpha}{2}}}{2^{n+\frac{\alpha}{2}-1} \Gamma(n + \frac{\alpha}{2})} \sigma^{-2n-\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(T_n + \beta)\right) d\sigma \\ &= \sqrt{\frac{T_n + \beta}{2}} \frac{\Gamma(n + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2})}{\Gamma(n + \frac{\alpha}{2})}. \end{aligned}$$

Le risque a posteriori de paramètre σ est donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} R(\hat{\sigma}_{CQ}) &= E_{\pi_2}((\sigma - \hat{\sigma}_{CQ})^2) = \int_0^{+\infty} (\sigma - \hat{\sigma}_{CQ})^2 \pi_2(\sigma|x) d\sigma \\ &= \int_0^{+\infty} \sigma^2 \pi_2(\sigma|x) d\sigma + \int_0^{+\infty} \hat{\sigma}_{CQ}^2 \pi_2(\sigma|x) d\sigma - 2 \int_0^{+\infty} \sigma \hat{\sigma}_{CQ} \pi_2(\sigma|x) d\sigma \\ &= \frac{(T_n + \beta) \Gamma(n + \frac{\alpha}{2} - 1)}{2 \Gamma(n + \frac{\alpha}{2})} + \frac{T_n + \beta}{2} \frac{\Gamma^2(n + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2})}{\Gamma^2(n + \frac{\alpha}{2})} - 2 \left(\frac{T_n + \beta}{2} \frac{\Gamma^2(n + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2})}{\Gamma^2(n + \frac{\alpha}{2})} \right) \\ &= \frac{T_n + \beta}{2} \left(\frac{\Gamma(n + \frac{\alpha}{2} - 1)}{\Gamma(n + \frac{\alpha}{2})} - \frac{\Gamma^2(n + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2})}{\Gamma^2(n + \frac{\alpha}{2})} \right). \end{aligned}$$

Estimation de la fonction de fiabilité

L'estimateur bayésien $\hat{S}_{CQ}(x; \sigma)$ de la fonction de fiabilité $S(x; \sigma)$ sous la fonction de perte quadratique et une loi a priori conjuguée naturelle est $\hat{S}_{CQ}(x; \sigma)$:

$$\begin{aligned}\hat{S}_{CQ}(x; \sigma) &= \int_0^{+\infty} S(x; \sigma) \pi_2(\sigma|x) d\sigma \\ &= \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \frac{-(T_n + \beta)^{n+\frac{\alpha}{2}}}{2^{n+\frac{\alpha}{2}-1} \Gamma(n + \frac{\alpha}{2})} \sigma^{-2n-\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(T_n + \beta)\right) d\sigma \\ &= \left(\frac{T_n + \beta}{T_n + \beta + x^2}\right)^{n+\frac{\alpha}{2}}.\end{aligned}$$

Le risque a posteriori de la fonction de fiabilité sous la fonction de perte quadratique est donné par :

$$\begin{aligned}R(\hat{S}_{CQ}(x; \sigma)) &= E_{\pi_2}((S(x; \sigma) - \hat{S}_{CQ}(x; \sigma))^2) = \int_0^{+\infty} (S(x; \sigma) - \hat{S}_{CQ}(x; \sigma))^2 \pi_2(\sigma|x) d\sigma \\ &= \int_0^{+\infty} S^2(x; \sigma) \pi_2(\sigma|x) d\sigma + \int_0^{+\infty} \hat{S}_{CQ}^2(x; \sigma) \pi_2(\sigma|x) d\sigma \\ &\quad - 2 \int_0^{+\infty} S(x; \sigma) \hat{S}_{CQ}(x; \sigma) \pi_2(\sigma|x) d\sigma \\ &= \left(\frac{T_n + \beta}{T_n + \beta + 2x^2}\right)^{n+\frac{\alpha}{2}} + \left(\frac{T_n + \beta}{T_n + \beta + x^2}\right)^{2n+\alpha} - 2 \left(\frac{T_n + \beta}{T_n + \beta + x^2}\right)^{2n+\alpha} \\ &= \left(\frac{T_n + \beta}{T_n + \beta + 2x^2}\right)^{n+\frac{\alpha}{2}} - \left(\frac{T_n + \beta}{T_n + \beta + x^2}\right)^{2n+\alpha}.\end{aligned}$$

Estimation de la fonction de taux de panne

L'estimateur bayésien de $h(x; \sigma)$ par rapport à la fonction de perte quadratique et une loi a priori conjuguée naturelle est $\hat{h}_{CQ}(x; \sigma)$:

$$\begin{aligned}\hat{h}_{CQ}(x; \sigma) &= \int_0^{+\infty} h(x; \sigma) \pi_2(\sigma|x) d\sigma \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sigma^2} \frac{-(T_n + \beta)^{n+\frac{\alpha}{2}}}{2^{n+\frac{\alpha}{2}-1} \Gamma(n + \frac{\alpha}{2})} \sigma^{-2n-\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(T_n + \beta)\right) d\sigma \\ &= \frac{2x(n + \frac{\alpha}{2})}{T_n + \beta}.\end{aligned}$$

Son risque a posteriori est :

$$\begin{aligned}
R(\hat{h}_{CQ}(x; \sigma)) &= E_{\pi_2}((h(x; \sigma) - \hat{h}_{CQ}(x; \sigma))^2) = \int_0^{+\infty} (h(x; \sigma) - \hat{h}_{CQ}(x; \sigma))^2 \pi_2(\sigma|x) d\sigma \\
&= \int_0^{+\infty} h^2(x; \sigma) \pi_2(\sigma|x) d\sigma + \int_0^{+\infty} \hat{h}_{CQ}^2(x; \sigma) \pi_2(\sigma|x) d\sigma \\
&\quad - 2 \int_0^{+\infty} h(x; \sigma) \hat{h}_{CQ}(x; \sigma) \pi_2(\sigma|x) d\sigma \\
&= \left(\frac{2x}{T_n + \beta} \right)^2 \frac{\Gamma(n + \frac{\alpha}{2} + 2)}{\Gamma(n + \frac{\alpha}{2})} + \left(\frac{2x(n + \frac{\alpha}{2})}{T_n + \beta} \right)^2 - 2 \left(\frac{2x(n + \frac{\alpha}{2})}{T_n + \beta} \right)^2 \\
&= \left(\frac{2x}{T_n + \beta} \right)^2 \frac{\Gamma(n + \frac{\alpha}{2} + 2)}{\Gamma(n + \frac{\alpha}{2})} - \hat{h}_{CQ}^2(x; \sigma).
\end{aligned}$$

3.5.2 Sous la de perte Linex

L'estimateur bayésien de paramètre σ sous la fonction de perte Linex $\hat{\sigma}_{CL}$ est la solution de l'équation suivante :

$$E_{\pi_2} \left[\frac{\hat{\sigma}_{CL}}{\sigma^2} \exp\left(a \left(\frac{\hat{\sigma}_{CL}^2}{\sigma^2} \right)\right) \right] = 2^{n+\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{CL} \left[\frac{\Gamma(n + \frac{\alpha}{2} + 1)}{(T_n + \beta - 2a\hat{\sigma}_{CL})^{n+\frac{\alpha}{2}+1}} \right]$$

$$\exp(a) E_{\pi_2} \left(\frac{\hat{\sigma}_{CL}}{\sigma^2} \right) = \hat{\sigma}_{CL} \exp\left(a \left(\frac{\Gamma(n + \frac{\alpha}{2} + 1)}{(T_n + \beta)^{n+\frac{\alpha}{2}+1}} \right)\right)$$

$$\hat{\sigma}_{CL} = \left[\frac{T_n + \beta}{2a} \left(1 - \exp\left(-\frac{a}{n + \frac{\alpha}{2} + 1}\right) \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Le risque a posteriori de paramètre σ sous la fonction de perte Linex est donné par :

$$R(\hat{\sigma}_{CL}) = a(\hat{\sigma}_{CQ} - \hat{\sigma}_{CL})$$

Avec une loi a priori conjuguée naturelle, l'estimateur bayésien par rapport à une fonction de perte Linex est noté $\hat{S}_{CL}(x; \sigma)$, pour le calculer, on fait le changement de variable suivant : $S(x; \sigma) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = \gamma \implies \sigma = \left(-\frac{x^2}{2 \ln \gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$; on réécrit la densité a posteriori donnée en fonction de γ

$$\begin{aligned}
\gamma_{CL} &= \frac{-1}{a} \ln E_{\pi_2}(\exp(-a\gamma)) \\
&= \frac{-1}{a} \ln \left[\frac{(T_n + \beta)^{n+\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(n + \frac{\alpha}{2})} \frac{1}{(x^2)^{n+\frac{\alpha}{2}}} \int_0^{+\infty} \exp(-a\gamma) (\gamma)^{\frac{T_n+\beta}{x^2}} (-\ln \gamma)^{n+\frac{\alpha}{2}-1} d\gamma \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{a} \ln \left[\sum_{j=0}^k \frac{(-a)^j}{j!} \left(1 + \frac{jx^2}{T_n + \beta} \right)^{\left(-n + \frac{\alpha}{2}\right)} \right].$$

Ce dernier résultat est obtenu en utilisant un développement limité de Taylor de $\exp(-a\gamma)$ à l'ordre k au voisinage de zéro et en faisant le changement de variable $u = (-\ln \gamma)$ pour le calcul de l'intégrale.

Le risque a posteriori de la fonction de fiabilité sous la fonction de perte Linex est donné par la formule suivante :

$$R(\hat{S}_{CL}(x; \sigma)) = a(\hat{S}_{CQ}(x; \sigma) - \hat{S}_{CL}(x; \sigma))$$

Sous la fonction de perte Linex, l'estimateur bayésien de la fonction de taux de panne est donné par la formule suivante :

$$\hat{h}_{CL}(x; \sigma) = a \frac{2x}{T_n + \beta} \left[1 - \exp\left(-\frac{a}{n + \frac{\alpha}{2}} + 1\right) \right]^{-1}$$

Le risque a posteriori de la fonction de taux de panne sous la fonction de perte Linex est calculé à l'aide de la formule suivante :

$$R(\hat{h}_{CL}(x; \sigma)) = a(\hat{h}_{CQ}(x; \sigma) - \hat{h}_{CL}(x; \sigma))$$

3.6 Simulation

Dans cette section, on propose de comparer les meilleurs estimateurs bayésiens sous différentes fonctions de perte de paramètre, de la fonction de fiabilité et de la fonction de taux de panne avec leurs estimateurs obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance.

Premièrement, on prend $(\alpha, \beta) = (1, 2)$ les paramètres de la loi a priori conjuguée naturelle donnée par l'expression $\pi_2(\sigma)$, et la valeur initial du paramètre σ est $\sigma_0 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1.7724$.

On génère $N = 10.000$ échantillons de la loi de Rayleigh de paramètre $\sigma = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ (en utilisant la méthode inverse de la loi uniforme)

On prend différentes tailles d'échantillon $n = (10, 20, 30, 50, 70, 100, 150)$ et différentes valeurs du temps t , et on conclut que ($t = 1$) donne les meilleurs estimateurs **MLE** pour $S(x; \sigma)$ et $h(x; \sigma)$.

Le tableau suivant présente les estimateurs du maximum de vraisemblance (avec les erreurs quadratiques) du paramètre σ , de la fonction de fiabilité $S(x; \sigma)$ et de la fonction de taux de panne $h(x; \sigma)$ avec différentes tailles d'échantillon n .

n	σ (EQ)	t=1		n	σ (EQ)	t=1	
		S_{MLE}	h_{MLE}			S_{MLE}	h_{MLE}
10	1.3719	0.6945	0.5312	70	1.9404	0.7728	0.2655
	(0.1604)	(0.0250)	(0.0453)		(0.0282)	(0.0064)	(0.0027)
20	1.9316	0.7719	0.2679	100	1.9983	0.7789	0.2504
	(0.0253)	(0.0065)	(0.0025)		(0.0510)	(0.0055)	(0.0046)
30	1.8170	0.7594	0.3028	150	1.7270	0.7486	0.3353
	(0.0019)	(0.0087)	(0.0002)		(0.0020)	(0.0108)	(0.0002)
50	1.7205	0.7478	0.3377				
	(0.0026)	(0.0110)	(0.0003)				

TABLE 3.1 – Estimation de σ , $S(x; \sigma)$ et $h(x; \sigma)$ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Les tableaux suivants présentent les estimateurs bayésiens (avec les risques a posteriori) de paramètre, de la fonction de fiabilité et de la fonction de taux de panne sous la fonction de perte quadratique puis sous la fonction de perte Linex (avec $a = -1, -0.5, 1$), avec différentes tailles d'échantillon en utilisant une loi a priori vague puis une loi a priori conjuguée naturelle.

n	ϕ	Q (R)	$L_1[a = -1]$ (R)	$L_2[a = -0.5]$ (R)	$L_3[a = 1]$ (R)
10	σ	1.6403(0.017)	1.5393(0.1010)	1.5217(0.059)	1.4709(0.1694)
	$S(x)$	0.8196(0.0011)	0.7686(0.0509)	0.8031(0.0082)	0.6586(0.1610)
	$h(x)$	0.4016(0.0069)	0.4220(0.020)	0.4318(0.0150)	0.4621(0.0605)
20	σ	2.1808(0.1667)	1.9104(0.0119)	1.9081(0.0071)	1.9010(0.0214)
	$S(x)$	0.8968(0.0019)	0.8124(0.0601)	0.8525(0.0100)	0.6769(0.1957)
	$h(x)$	0.2184(0.0099)	0.2739(0.0013)	0.2746(0.0010)	0.2766(0.0040)
30	σ	1.5662(0.0425)	1.5337(0.0324)	1.5275(0.0193)	1.5092(0.0570)
	$S(x)$	0.8119(0.0016)	0.7617(0.0501)	0.7955(0.0081)	0.6574(0.1544)
	$h(x)$	0.4180(0.0099)	0.4250(0.0070)	0.4285(0.0052)	0.439(0.0109)
50	σ	1.6831(0.0079)	1.6293(0.2931)	1.6253(0.1485)	1.6134(0.3090)
	$S(x)$	0.8362(0.0002)	0.7770(0.0956)	0.8126(0.0300)	0.6642(0.2084)
	$h(x)$	0.3583(0.0016)	0.3766(0.1040)	0.3785(0.0529)	0.3841(0.1115)
70	σ	1.7414(0.0009)	1.8941(0.0283)	1.8908(0.0158)	1.8808(0.0415)
	$S(x)$	0.8466($3.84 * 10^{-5}$)	0.8110(0.0616)	0.8509(0.0108)	0.6764(0.1962)
	$h(x)$	0.3333(0.0002)	0.2787(0.0061)	0.2796(0.0035)	0.2826(0.0100)
100	σ	1.9224(0.0225)	1.7065(0.2159)	1.7044(0.1090)	1.6981(0.2243)
	$S(x)$	0.2726(0.0020)	0.3433(0.0707)	0.3442(0.0358)	0.3467(0.0741)
	$h(x)$	0.2726(0.0020)	0.3433(0.0707)	0.3442(0.0358)	0.3467(0.0741)
150	σ	1.6158(0.0245)	1.6091(0.0067)	1.6077(0.0040)	1.6038(0.0120)
	$S(x)$	0.8250(0.0007)	0.7726(0.0524)	0.8077(0.0086)	0.6628(0.1621)
	$h(x)$	0.3849(0.0044)	0.3862(0.0012)	0.3868(0.0009)	0.3887(0.0038)

TABLE 3.2 – Estimation bayésienne de σ , $S(x; \sigma)$ et $h(x; \sigma)$ avec une loi a priori vague.

n	ϕ	Q (R)	$L_1[a = -1]$ (R)	$L_2[a = -0.5]$ (R)	$L_3[a = 1]$ (R)
10	σ	1.7467(0.0006)	1.6442(0.1025)	1.6262(0.0602)	1.5742(0.1724)
	$S(x)$	0.8394(0.0001)	0.7852(0.0542)	0.8216(0.0089)	0.6657(0.1737)
	$h(x)$	0.3528(0.0011)	0.3698(0.0170)	0.3781(0.0126)	0.4034(0.0506)
20	σ	1.6459(0.0160)	1.5961(0.0498)	1.5868(0.0295)	1.5594(0.0865)
	$S(x)$	0.82644(0.0006)	0.7740(0.0523)	0.8092(0.0085)	0.6622(0.1641)
	$h(x)$	0.3831(0.0041)	0.3925(0.0094)	0.3971(0.0070)	0.4112(0.0281)
30	σ	1.7115(0.0037)	1.6766(0.0349)	1.6700(0.0207)	1.6502(0.0613)
	$S(x)$	0.8399(0.0001)	0.7852(0.0546)	0.8718(0.0090)	0.6671(0.1727)
	$h(x)$	0.3499(0.0010)	0.3557(0.0057)	0.3585(0.0043)	0.3671(0.0172)
50	σ	1.7884(0.0002)	1.7663(0.0220)	1.7620(0.0131)	1.7492(0.0391)
	$S(x)$	0.8534($3.81 * 10^{-1}$)	0.7965(0.0569)	0.8345(0.0094)	0.6715(0.1819)
	$h(x)$	0.3173($9.03 * 10^{-7}$)	0.3205(0.0031)	0.3220(0.0023)	0.3267(0.0094)
70	σ	1.7598(0.0001)	1.7443(0.0155)	1.7412(0.0093)	1.7321(0.0277)
	$S(x)$	0.8496($1.06 * 10^{-5}$)	0.7932(0.0563)	0.8309(0.0093)	0.6705(0.1790)
	$h(x)$	0.3263($6.44 * 10^{-5}$)	0.3286(0.0023)	0.3298(0.0017)	0.3332(0.0069)
100	σ	1.6515(0.0146)	1.6413(0.0102)	1.6393(0.0061)	1.6332(0.0183)
	$S(x)$	0.8315(0.0004)	0.7781(0.0534)	0.8138(0.0088)	0.6649(0.1665)
	$h(x)$	0.3693(0.0026)	0.3711(0.0018)	0.3721(0.0013)	0.3748(0.0055)
150	σ	1.7695($8.17 * 10^{-6}$)	1.7622(0.0073)	1.7607(0.0043)	1.7564(0.0131)
	$S(x)$	0.8518($1.09 * 10^{-6}$)	0.7951(0.0567)	0.8329(0.0094)	0.6713(0.1805)
	$h(x)$	0.3209($6.90 * 10^{-6}$)	0.3200(0.0010)	0.3225(0.0007)	0.3241(0.0031)

TABLE 3.3 – Estimation bayésienne de σ , $S(x; \sigma)$ et $h(x; \sigma)$ avec une loi a priori conjuguée.

- Pour la fonction de perte Linex, $a = -0.5$ donne les meilleurs estimateurs bayésiens de paramètre et des caractéristique (qui ont les plus petits risques a posteriori).

Comparaison avec les estimateurs du maximum de vraisemblance

Dans cette section, on propose de comparer les estimateurs bayésiens sous la fonction de perte quadratique et les meilleurs estimateurs bayésiens sous la fonction de perte Linex ($a = -0.5$) avec les estimateurs du maximum de vraisemblance. Pour cela on propose d'utiliser le critère suivant : critère de Pitman (Pitman 1937, Fuller 1982 et Jozani 2012), définit comme suit :

Définition 3.1. Un estimateur $\hat{\theta}_1$ du paramètre θ domine au sens du critère de Pitman un autre estimateur $\hat{\theta}_2$, si pour tout $\theta \in \Theta$:

$$p_{\theta}[|\hat{\theta}_1 - \theta| < |\hat{\theta}_2 - \theta|] > 0.5$$

Le tableau suivant présente les valeurs de probabilité de Pitman :

n	ϕ	Q	$L[a = -0.5]$	n	ϕ	Q	$L[a = -0.5]$
10	σ	0.507	0.396	70	σ	0.497	0.461
	$S(x)$	0.761	0.735		$S(x)$	0.999	0.999
	$h(x)$	0.211	0.140		$h(x)$	0.943	0.926
20	σ	0.483	0.455	100	σ	0.491	0.479
	$S(x)$	0.987	0.986		$S(x)$	0.999	0.999
	$h(x)$	0.354	0.294		$h(x)$	0.508	0.554
30	σ	0.484	0.420	150	σ	0.477	0.506
	$S(x)$	0.998	0.992		$S(x)$	0.999	0.999
	$h(x)$	0.329	0.272		$h(x)$	0.709	0.689
50	σ	0.493	0.467				
	$S(x)$	0.998	0.998				
	$h(x)$	0.439	0.402				

TABLE 3.4 – Valeurs de probabilité de Pitman avec une loi a priori vague.

n	ϕ	Q	$L[a = -0.5]$	n	ϕ	Q	$L[a = -0.5]$
10	σ	0.387	0.410	70	σ	0.503	0.457
	$S(x)$	0.736	0.856		$S(x)$	0.999	0.999
	$h(x)$	0.123	0.040		$h(x)$	0.941	0.924
20	σ	0.491	0.446	100	σ	0.508	0.473
	$S(x)$	0.987	0.986		$S(x)$	0.999	0.999
	$h(x)$	0.337	0.279		$h(x)$	0.648	0.633
30	σ	0.492	0.414	150	σ	0.508	0.501
	$S(x)$	0.998	0.992		$S(x)$	0.999	0.999
	$h(x)$	0.310	0.254		$h(x)$	0.705	0.685
50	σ	0.504	0.463				
	$S(x)$	0.998	0.998				
	$h(x)$	0.430	0.395				

TABLE 3.5 – Valeurs de probabilité de Pitman avec une loi a priori conjuguée naturelle.

Conclusion

- Avec une loi a priori vague et sous la perte quadratique, on remarque que lorsque ($n \leq 10$) la probabilité de Pitman > 0.5 alors l'estimateur bayésien du paramètre est meilleur par rapport à son estimateur *MLE* et lorsque ($n > 20$) l'estimateur *MLE* est mieux.
- Sous la perte Linex ($a = -0.5$) lorsque ($n \leq 100$) l'estimateur *MLE* du paramètre est mieux que l'estimateur bayésien et lorsque ($n > 100$) l'estimateur bayésien est mieux.
- Avec une loi a priori vague et sous les deux fonctions de perte (quadratique et Linex ($a = -0.5$)) l'estimateur bayésien de la fonction de fiabilité est mieux que leur l'estimateur *MLE* pour tout les valeurs de n .
- Avec une loi a priori vague et sous les fonctions de perte quadratique et Linex ($a = -0.5$), on remarque que lorsque ($n \leq 50$) l'estimateur *MLE* de la fonction de taux de panne est le meilleur alors que lorsque ($n > 50$) l'estimateur bayésien est le meilleur.
- Avec une loi a priori conjuguée naturelle et sous la fonction de perte quadratique, on remarque que lorsque ($n \leq 30$) l'estimateur *MLE* du paramètre σ est meilleur que l'estimateur bayésien alors que lorsque ($n > 30$) l'estimateur bayésien est le meilleur parce que la probabilité de Pitman > 0.5 .
- Sous la fonction de perte Linex ($a = -0.5$) l'estimateur *MLE* du paramètre est le meilleur que l'estimateur bayésien lorsque ($n \leq 100$) et l'estimateur bayésien du paramètre est meilleur que l'estimateur *mle* lorsque ($n > 100$).
- Avec une loi conjuguée naturelle et sous les deux fonction de perte (quadratique et Linex ($a = -0.5$)) l'estimateur bayésien de la fonction de fiabilité est mieux que leur estimateur *MLE* pour tout les valeurs de n .
- Avec une loi conjuguée naturelle est sous les fonctions de perte quadratique et Linex ($a = -0.5$), on remarque que lorsque ($n \leq 50$) l'estimateur *MLE* de la fonction de taux de panne est le meilleur que le bayésien alors que lorsque ($n > 50$) l'estimateur bayésien est le meilleur parce que la probabilité de Pitman > 0.5 .

3.7 Application avec des données réelles

On propose ici d'appliquer les méthodes des données réelles qui sont présentées dans Lawless. Les données ont été soulevées dans l'essai sur l'endurance des paliers à rainures profondes et sont discutées par Leiblein et Zalen. Il s'agit du nombre de tours à l'échec de chacun de $n = 23$ paliers dans le test de vie. Raqab et Madi ont indiqué que la distribution de Rayleigh à un seul paramètre est acceptable pour ces données, les observations sont :

0.1788, 0.2892, 0.3300, 0.4152, 0.4212, 0.4560, 0.4848, 0.5184, 0.5196, 0.5412, 0.5556, 0.6780, 0.6864, 0.6864, 0.6888, 0.8412, 0.9312, 0.9864, 1.0512, 1.0584, 1.2772, 1.2804, 1.7304

L'estimateur du maximum de vraisemblance de σ est égale à $\hat{\sigma}_{MLE} = 0.8682$

Pour des différentes valeurs de t , $t = 0.25, 0.5, 0.75, 1$, on obtient les estimateurs du maximum de vraisemblance de la fonction de fiabilité qui sont : $\hat{S}_{MLE}(t) = 0.9646, 0.8659, 0.7233, 0.5622$

Les estimateurs de maximum de vraisemblance de la fonction de taux de panne pour différentes valeurs de t sont : $\hat{h}_{MLE}(t) = 0.3316, 0.6632, 0.9948, 1.3265$

Les estimateurs bayésiens de paramètre σ , de la fonction de fiabilité et de la fonction de taux de panne avec une loi a priori vague puis avec une loi a priori conjuguée naturelle sont données dans les tableaux suivants :

Résultats :

t	ϕ	Q (R)	$L_1[a = -1]$ (R)	$L_2[a = -0.5]$ (R)	$L_3[a = 1]$ (R)
0.25	σ	0.9025(0.7566)	0.8470(0.0555)	0.8373(0.0326)	0.8093(0.0932)
	$S(x)$	0.9594(0.0009)	0.8837(0.0757)	0.9335(0.0129)	0.6913(0.2681)
	$h(x)$	0.3316(0.1821)	0.3484(0.0168)	0.3565(0.0124)	0.3816(0.0499)
0.5	$S(x)$	0.8483(0.0126)	0.7926(0.0557)	0.8300(0.0091)	0.6685(0.1798)
	$h(x)$	0.6632(0.3321)	0.6969(0.0336)	0.7133(0.0249)	0.7632(0.0999)
0.75	$S(x)$	0.6932(0.0488)	0.6610(0.0322)	0.6836(0.0048)	0.5975(0.0957)
	$h(x)$	0.9948(0.8244)	1.0453(0.0504)	1.0696(0.0374)	1.1448(0.1499)
1	$S(x)$	0.5261(0.1067)	0.5128(0.0133)	0.5232(0.0014)	0.4816(0.0444)
	$h(x)$	1.3265(1.5366)	1.3938(0.0673)	1.4262(0.0498)	1.5265(0.1999)

TABLE 3.6 – L'estimateurs bayésiens avec une loi a priori vague (données réelles de Lawless).

t	ϕ	Q (R)	$L_1[a = -1]$ (R)	$L_2[a = -0.5]$ (R)	$L_3[a = 1]$ (R)
0.25	σ	0.9356(0.7002)	0.8807(0.0549)	0.8711(0.0322)	0.8432(0.0923)
	$S(x)$	0.9623(0.0007)	0.8860(0.3599)	0.9362(0.2050)	0.6916(0.1654)
	$h(x)$	0.3074(0.0486)	0.3222(0.0148)	0.3294(0.0110)	0.3515(0.0441)
0.5	$S(x)$	0.8584(0.0105)	0.8009(0.2748)	0.8394(0.1566)	0.6717(0.1455)
	$h(x)$	0.6148(0.2787)	0.6445(0.0297)	0.6588(0.0220)	0.7031(0.0882)
0.75	$S(x)$	0.7115(0.0411)	0.6767(0.1506)	0.7009(0.0874)	0.6082(0.0820)
	$h(x)$	0.9222(0.6978)	0.9668(0.0445)	0.9883(0.0330)	1.0546(0.1323)
1	$S(x)$	0.5501(0.0916)	0.5344(0.0082)	0.5463(0.0101)	0.5006(0.0254)
	$h(x)$	1.2297(1.3060)	1.2891(0.0594)	1.3177(0.0440)	1.4062(0.1765)

TABLE 3.7 – L'estimateurs bayésiens avec une loi a priori conjuguée naturelle (données réelles de Lawless).

Conclusion et perspectives

L'évaluation de la fiabilité ou de la durée de survie suivant le contexte dans lequel on se place indispensable pour concevoir des systèmes plus performants. Les méthodes d'estimation des paramètres du modèle ajustées au problème étudié sont nombreuses et peuvent donner des résultats fortement biaisés.

Dans ce travail, nous sommes intéressés à l'estimation du paramètre, de la fonction de fiabilité et de la fonction de taux de panne, à l'aide d'une approche bayésienne. L'approche bayésienne repose sur le choix d'une loi a priori qui résume l'information dont on dispose en aval et sur le choix d'une fonction de perte. La fonction de perte la plus utilisée est la fonction de perte quadratique, cependant, ces dernières années les fonctions de perte asymétrique de type Linex ont été utilisées dans les problèmes de l'inférence statistique bayésienne.

Pour le modèle de Rayleigh, nous sommes intéressés à l'estimation des caractéristiques cités ci-dessus, avec une étude comparative à partir des erreurs quartiques moyennes (pour l'approche du maximum de vraisemblance) et à partir de risque a posteriori pour l'approche bayésienne.

Une extension possible de ce travail est de considérer pour le modèle étudié des plans d'expériences accélérés.

Annexe

≠ La loi de Rayleigh

≠ Simulation

$N = 1000$

```
sigmamle = numeric(N); EQsigmamle = numeric(N); Smle = numeric(N);  
EQSmle = numeric(N); hmle = numeric(N); EQhmle = numeric(N);  
sigmaVQ = numeric(N); RsigmaVQ = numeric(N); SVQ = numeric(N);  
RSVQ = numeric(N); hVQ = numeric(N); RhVQ = numeric(N);  
sigmaVL = numeric(N); RsigmaVL = numeric(N); SVL = numeric(N);  
RSVL = numeric(N); hVL = numeric(N); RhVL = numeric(N);  
sigmaCQ = numeric(N); RsigmaCQ = numeric(N); SCQ = numeric(N);  
RSCQ = numeric(N); hCQ = numeric(N); RhCQ = numeric(N);  
sigmaCL = numeric(N); RsigmaCL = numeric(N); SCL = numeric(N);  
RSCL = numeric(N); hCL = numeric(N); RhCL = numeric(N);
```

```
num1 = 0; num2 = 0; num3 = 0
```

```
num4 = 0; num5 = 0; num6 = 0
```

```
num7 = 0; num8 = 0; num9 = 0
```

```
num10 = 0; num11 = 0; num12 = 0
```

```
n = 10; sigma = gamma(1/2); alpha = 1; beta = 2
```

```
for(i in 1 : N){
```

```
u = runif(n, 0, 1)
```

```
vec = sigma * sqrt(-2 * log(1 - u))
```

$$x = \text{sort}(\text{vec})$$

$$S = \exp(-(x \wedge 2)/(2 * (\text{sigma} \wedge 2)))$$

$$h = x/(\text{sigma} \wedge 2)$$

≠ **Estimation avec la méthode du maximum de vraisemblance**

$$Tn = \text{sum}(x \wedge 2)$$

≠ L'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre

$$\text{sigmamle}[i] = \text{sqr}t(Tn/(2 * n))$$

≠ L'erreur quadratique du paramètre

$$EQ\text{sigmamle}[i] = \text{mean}((\text{sigmamle} - \text{sigma}) \wedge 2)$$

≠ L'estimateur du maximum de vraisemblance de la fonction de fiabilité

$$x = 1$$

$$Smle[i] = \exp((-x \wedge 2)/(2 * \text{sigmamle}))$$

≠ L'erreur quadratique de la fonction de fiabilité

$$EQSmle[i] = \text{mean}((Smle - S) \wedge 2)$$

≠ L'estimateur du maximum de vraisemblance de la fonction de taux de panne

$$hmle[i] = x/(\text{sigmamle} \wedge 2)$$

≠ L'erreur quadratique de la fonction de taux de panne

$$EQhmle[i] = \text{mean}((hmle - h) \wedge 2)$$

≠ **Estimation bayésienne avec une loi a priori vague**

≠ Sous la perte quadratique

≠ Le paramètre

$$d = n - (1/2)$$

$$f = n - 1$$

$$\text{sigmaVQ}[i] = \text{sqr}t(Tn/2) * (\text{gamma}(d)/\text{gamma}(n))$$

$$RsigmaVQ[i] = mean((sigmaVQ - sigma) \wedge 2)$$

≠ La fonction de fiabilité

$$t = 1$$

$$SVQ[i] = (Tn / ((t \wedge 2) + Tn)) \wedge n$$

$$RSVQ[i] = mean((SVQ - S) \wedge 2)$$

≠ La fonction de taux de panne

$$hVQ[i] = (2 * n * t) / Tn$$

$$RhVQ[i] = mean((hVQ - h) \wedge 2)$$

≠ Sous la fonction de perte Linex

$$a = -0.5$$

≠ Le paramètre

$$sigmaVL[i] = sqrt((Tn / (2 * a)) * (1 - exp(-a / (n + 1))))$$

$$RsigmaVL[i] = a * (sigmaVQ - sigmaVL)$$

≠ La fonction de fiabilité

$$j = 0 : 2$$

$$z = sum(((-a) \wedge (j) / factorial(j)) * ((1 + (j * t \wedge 2) / Tn) \wedge (-n)))$$

$$SVL[i] = (-1 / a) * log(z)$$

$$RSVL[i] = a * (SVQ - SVL)$$

≠ La fonction de taux de panne

$$m = exp(-a / (n + 1))$$

$$h = 1 - m$$

$$y = (2 * t) / Tn$$

$$hVL[i] = a * y * (h \wedge (-1))$$

$$RhVL[i] = a * (hVQ - hVL)$$

≠ **Estimation bayésienne avec une loi a priori conjugué naturelle**

≠ Sous la perte quadratique

≠ Le paramètre

$$c = n + (\alpha/2) - (1/2)$$

$$d = n + (\alpha/2)$$

$$\sigma_{CQ}[i] = \text{sqr}t((Tn + \beta)/2) * (\text{gamma}(c)/\text{gamma}(d))$$

$$R\sigma_{CQ}[i] = \text{mean}((\sigma_{CQ} - \sigma) \wedge 2)$$

≠ La fonction de fiabilité

$$t = 1$$

$$SCQ[i] = ((Tn + \beta)/(Tn + \beta + (t \wedge 2))) \wedge d$$

$$RSCQ[i] = \text{mean}((SCQ - S) \wedge 2)$$

≠ La fonction de taux de panne

$$hCQ[i] = (2 * t * d)/(Tn + \beta)$$

$$RhCQ[i] = \text{mean}((hCQ - h) \wedge 2)$$

≠ Sous la perte Linex

≠ Le paramètre

$$m = a/(n + (\alpha/2) + 1)$$

$$\sigma_{CL}[i] = \text{sqr}t(((Tn + \beta)/(2 * a)) * (1 - \text{exp}(-m)))$$

$$R\sigma_{CL}[i] = a * (\sigma_{CQ} - \sigma_{CL})$$

≠ La fonction de fiabilité

$$j = 0 : 2$$

$$u = \text{sum}(((((-a) \wedge j)/\text{factorial}(j)) * ((1 + (j * t \wedge 2)/(Tn + \beta)) \wedge (-d))))$$

$$SCL[i] = -(1/a) * \log(u)$$

$$RSCL[i] = a * (SCQ - SCL)$$

≠ La fonction de taux de panne

$$hCL[i] = a * ((2 * t) / (Tn + beta)) * (1 - exp(-m)) \wedge (-1)$$

$$RhCL[i] = a * (hCQ - hCL)$$

≠ **Comparaison à l'aide du critère de Pitman**

≠ La loi a priori vague

≠ Sous la perte quadratique

$$if(abs(sigmaVQ[i] - sigma) < abs(sigmamle[i] - sigma))\{num1 = num1 + 1\}$$

$$if(abs(SVQ[i] - S) < abs(Smle[i] - S))\{num2 = num2 + 1\}$$

$$if(abs(hVQ[i] - h) < abs(hmle[i] - h))\{num3 = num3 + 1\}$$

≠ Sous la perte Linex

$$if(abs(sigmaVL[i] - sigma) < abs(sigmamle[i] - sigma))\{num4 = num4 + 1\}$$

$$if(abs(SVL[i] - S) < abs(Smle[i] - S))\{num5 = num5 + 1\}$$

$$if(abs(hVL[i] - h) < abs(hmle[i] - h))\{num6 = num6 + 1\}$$

≠ La loi a priori conjuguée naturelle

≠ Sous la perte quadratique

$$if(abs(sigmaCQ[i] - sigma) < abs(sigmamle[i] - sigma))\{num7 = num7 + 1\}$$

$$if(abs(SCQ[i] - S) < abs(Smle[i] - S))\{num8 = num8 + 1\}$$

$$if(abs(hCQ[i] - h) < abs(hmle[i] - h))\{num9 = num9 + 1\}$$

≠ Sous la perte Linex

$$if(abs(sigmaCL[i] - sigma) < abs(sigmamle[i] - sigma))\{num10 = num10 + 1\}$$

$$if(abs(hCL[i] - h) < abs(hmle[i] - h))\{num11 = num11 + 1\}$$

$$if(abs(hCL[i] - h) < abs(hmle[i] - h))\{num12 = num12 + 1\}$$

}

≠ Affichage des estimateurs du maximum de vraisemblance et leurs erreur quadratique

$mean(\sigma_{mle}); mean(EQ\sigma_{mle}); mean(S_{mle}); mean(EQ S_{mle}); mean(h_{mle});$

$mean(EQ h_{mle})$

≠ Affichage des estimateur bayésien avec une loi a priori vague

≠ Sous la perte quadratique

$mean(\sigma_{VQ}); mean(R\sigma_{VQ}); mean(S_{VQ}); mean(RS_{VQ}); mean(h_{VQ});$
 $mean(Rh_{VQ})$

≠ Sous la perte Linex

$mean(\sigma_{VL}); mean(R\sigma_{VL}); mean(S_{VL}); mean(RS_{VL}); mean(h_{VL}); mean(Rh_{VL})$

≠ Affichage des estimateurs bayésien avec une loi a priori conjuguée

≠ Sous la perte quadratique

$mean(\sigma_{CQ}); mean(R\sigma_{CQ}); mean(S_{CQ}); mean(RS_{CQ}); mean(h_{CQ});$
 $mean(Rh_{CQ})$

≠ Sous la perte Linex

$mean(\sigma_{CL}); mean(R\sigma_{CL}); mean(S_{CL}); mean(RS_{CL}); mean(h_{CL}); mean(Rh_{CL})$

≠ Les probabilités de Pitman

≠ La loi a priori vague

≠ Sous la perte quadratique

$p1 = num1/N$

$p2 = num2/N$

$p3 = num3/N$

$p1 ; p2 ; p3$

≠ Sous la perte Linex

$p4 = num4/N$

$p5 = num5/N$

$p6 = num6/N$

$p4;p5;p6$

≠ La loi a priori conjuguée

≠ Sous la perte quadratique

$p7 = num7/N$

$p8 = num8/N$

$p9 = num9/N$

$p7;p8;p9$

≠ Sous la perte Linex

$p10 = num10/N$

$p11 = num11/N$

$p12 = num12/N$

$p10;p11;p12$

Bibliographie

- [1] **Balakrishnan N (1989)** : Approximate MLE of the scale parameter of the Rayleigh distribution with censoring, *IEEE transation on realiability* **38** , 355-357.
- [2] **Bakker A, Roux J, Mostert P, A (2000)** : generalization of the coumpound Rayleigh distribution using a Bayesian methods on cases survival times, *Communications in statistics, Theory and methods* **29**, 1419-1433.
- [3] **Bosq, D et Lecoutre J.P** : Théorie de l'estimation, *Economirica, Paris* (1987).
- [4] **Calabria, Pulcini G (1994)** : An Engineering Approach to Bayes estimation for the Weibull distribution. *Micron Electron Reliab*,**34**, 789-802.
- [5] **Chansoo K, Keun L (2009)** : Estimation of the scale parameter of the Rayleigh distribution under general progressive censoring, *Journal of the Korean statistical societyn***28** , 239-246.
- [6] **DeGroot M.H (1970)** : Optimat Statistical Decisions. New-York, Mc-Graw-Hill.
- [7] **Dey, S. and Dey, T. (2014)** : Statistical inference for the Rayleigh distribution under progressively type *ii* censoring with binomial removal, *Applied Mathematical Modelling* 38 (3), 974-982.
- [8] **Dyer DD, Whisenand CW (1973)** : Best linear unbiased of the parameter of the Rayleigh distribution-Part *I* : Small sample theory for censored order statistics, *IEEE transation on realiability* **22**, 27-34.
- [9] **Fernandez, A. J. (2000)** : Bayesian inference from type *ii* doubly censored Rayleigh data, *Statistics & probability letters* **48** (4), 393-399.
- [10] **Hill C and All (2000)** : Analyse statistique des données de survie, *Collection statistique en biologie et médecine* .
- [11] **Howlader, H Hossain, A. (1995)** : On Bayesian estimation and predicion from Rayleigh bases on type *ii* censored data, *Communications in Statistics-Theory and Methods* **24** (9), 2551-2259.

- [12] **Gauss CF (1810)** : Least squares method for combinations of observations, *Mallet-Bacheleir paris*.
- [13] **James RC (2016)** : On a robustness property of the Rayleigh and buighan tests of uniformity, *statistics and probability letters*, 55-59.
- [14] **Jeffreys, A. J., Wilson, V., Thein, S.L.,al (1985)** :Hypervariableminisatellite regions in human dna, *Nature* **314(6006)**, 67-73.
- [15] **Kim, C and Han, K (2009)** : Estimation of the scale parameter of the Rayleigh distribution under general progressive censoring, *Journal of the Korean Statistical Society* **38**, 239-246.
- [16] **Kundu D, Raqab MZ (2005)** : Generalized Rayleigh distribution : differents methods of estimation, *Computational statistics and data analysis* **49**, 167-200.
- [17] **Lawless JF** : Statistics and methods for lifetime data, *Weiley New-York*.
- [18] **Legendre, A (1805)** : New Methods for the Determination of Orbits of Comets Courcier, Paris.
- [19] **Lindley, D.V (1980)** : Approximate Bayesian methods, *Trabajos Estadist. Investigacion Oper* **31**, 232-245.
- [20] **Mohamed Z, Raqab MZ, Madi MT (2011)** : Inference for the generalized Rayleigh distribution based on progressively censored data, *Journal of stastical planning and inference* **141**, 3313-3322.
- [21] **Mousa MA, AL Sagheer SA (2006)** : Statistical inference for the Rayleigh model based on progressively type II censored data, *Statistics* **40**, 149-157.
- [22] **Philipe saint Pierre (2015)** : Intoduction à l'analyse des données de survie. Université de Pièrre et Marie Curie.
- [23] **Pitman, E. J .G (1937)** : The closest estimates of statistical parametrs, *Proc. Cambridge Phil. Soc* **33**, 212-222.
- [24] **Raqab, M.Z. and Madi, M.T. (2011)** : Inference for the generalized Rayleigh distribution based on progressively censored data, *Journal of Statistical Planning and Inference* **141(10)**, 3313-3322.
- [25] **Robert. C (1992)** : L'analyse statistique Bayésienne, *Economica* .
- [26] **Sajid A (2015)** : Mixture of the inverse Rayleigh distribution properties and estimation in a Bayesian frame work, *Applied mathematical modelling* **39**, 515-530.

-
- [27] **Sanku D, Tanujit D (2014)** : Statistical inference for the Rayleigh distribution under progressively type *II* censoring with binomial removal, *Applied mathematical modeling* **38** , 974-982.
- [28] **Tierney, L, Kadane, J.B (1986)** : Accurate approximations for posterior moments and marginal densities, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **81**, 82-86.
- [29] **Varadhan, R and Gilbert, P. D (2009).BB** An R Package for Solving a Large System of Non linear Equations and Optimizing a High-Dimensional Non linear Objective Function, *Journal of Statistical Software*, Volume 32, Issue 4.
- [30] **Varian HR, A (1975)** : Bayesian approach to real estate assessment, *Amsterdam, North Holland*, 195-208.
- [31] **Wu SJ, Chen DH, Chec ST (2006)** : Bayesian inference for the Rayleigh distribution under progressive censored sample, *Applied stochastic models in business and industry* **22**, 269-279.