

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur  
et de la Recherche Scientifique  
Université Mohammed Seddik Ben Yahia Jijel



Faculté des Sciences Exactes et Informatique  
Département de mathématiques  
Mémoire fin de cycle pour l'obtention du diplôme de **Master**  
**Filière** : Mathématiques  
**Option** : Probabilités et Statistique

***Estimation Bayésienne des Paramètres  
des Lois des Valeurs Extrêmes  
–Application Météorologique–***

Réalisé par:

Labeni Fahima  
Souyad Hind

Le 04/07/2019

Soutenu devant le jury :

Gherda Mebrouk	M.A.A	Président
Cheraitia Hassen	M.C.B	Encadreur
Sellami Nawel	M.A.A	Examinatrice
Ghouil Djowayda	M.A.A	Invitée

Promotion : 2018-2019

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# Remerciements

En tout premier lieu, nous remercions Dieu le tout puissant, de nous avoir donné la force, la santé pour mener bien notre travail avec volonté.

Un spécial remerciement à notre encadreur **Dr. Cheraitia Hassen** pour l'intérêt qu'il a porté à notre travail et pour la subtilité de ses orientations, ces précieux conseils, sa rigueur scientifique, ces corrections attentives et ses discussions fructueuses.

**M. Cheraitia** merci également pour votre présence continue et pour tous les efforts et progrès que nous avons accomplis. Ce travail est un témoignage de notre gratitude envers vous. Nous nous souviendrons de votre soutien indéfectible et de votre patience inaltérable. Merci encore une fois.

Nous remercions chaleureusement notre cher enseignant, monsieur **Gherda Mebrouk** pour son aide inestimable, sa disponibilité, ces conseils avisés, ses compétences, sa bienveillance et sa sympathie.

**M. Gherda** nous vous remercions sincèrement pour votre soutien et votre gentillesse, nous gardons d'excellents souvenirs avec vous, et nous avons l'honneur que vous allez participer au jury de notre mémoire de fin d'étude comme président et examinateur.

Merci également à notre enseignante **Sellami Nawal** d'avoir accepté l'évaluation de ce mémoire.

Nous tenons à remercier également les membres de jury qui vont lire ce mémoire et de juger sa valeur.

Nous remercions du fond du cœur Mme **Laoudj Farida** pour ses conseils attentionnés et ses encouragements.

Nous remercions Mme **Ghouil Djoweyda** et Mr **Menigher Hammoud**, pour leurs aides.

Un sincère et honnête merci à nos parents, nos familles et nos proches qui nous ont soutenus et encouragés tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

# Dédicace

Je dédie Ce travail À :

*Mon père, en signe d'amour, de reconnaissance et de gratitude pour tous les soutiens et les sacrifices dont il a fait preuve à mon égard.*

*À la fleur de ma vie, **Ma mère**, ma raison d'être et de vivre, la lanterne qui éclaire mon chemin.*

*À mes chers enseignants **Mebrouk Gherda et Cheraitia Hassen** Pour leurs hautes qualités humaines et le temps précieux qu'ils m'ont accordé.*

*À tous mes enseignants depuis le primaire jusqu'à maintenant.*

*À la mémoire de ma perte, mon chère grand-père **Mahmoud** que dieu l'accueille dans son faste Paradis.*

*À mes très chers frères **Abd Elfateh et Abd Elkahar**. Vous avez toujours été présentes pour moi. Je vous souhaite un avenir plein de joie, de réussite et de sérénité.*

*À mes chères sœurs **Imene, Hadjer et Bouchra**. Sans oublier ma grande sœur **Khadija** et son mari **Abd Elwahab** et le petit poussin de la famille **Med Elamine**.*

*À toute ma famille, mes oncles, mes tantes et leurs enfants chaque- un son nom.*

*À mon binôme **Fahima**, et sa famille pour sa entente et sa sympathie.*

*À mes chères Amies, **Hayet, Rofaida, Mofida, Meriem, Rahma, Samah, Amina, Amel** et **Karima**.*

*À tous qui m'aiment et que j'aime.*

*Hind*



# Dédicace

*Je dédiece travail À :*

*Mon père, en signe d'amour, de reconnaissance et de gratitude pour tous les soutiens et les sacrifices dont il a fait preuve à mon égard.*

*À la fleur de ma vie, Ma mère, ma raison d'être et de vivre, la lanterne qui éclaire mon chemin.*

*À mes chers enseignants **Mebrouk Gherda et Cheraitia Hassen** Pour leur Hautes qualités humaines et le temps précieux qu'ils m'ont accordé.*

*À la mémoire de ma perte, mon chère frère **Wahid** que dieu l'accueille dans son faste Paradis.*

*À mes chères sœurs **Nahla, Wissam et Fatima***

*À mon très chère frère **Chaouki** que j'aime beaucoup.*

*À ma grande mère qui m'a souhaité le succès dans mes études.*

*À toute ma famille, mes oncles, mes tantes et leurs enfants chaque- un son nom, on particulier mon oncle **Azou** et son époux **Widad**.*

*À mes meilleurs enseignantes **Souadek Rachida et Chouaba Amina**.*

*À mon binôme **Hind**, vraiment je passe des bons moments avec toi.*

*À mes chères Amies **Fadila, Nadia, Wafa, Afaf, Noura, Bouchra, Rahma, Amel, Selma, Ahlam, Azza et Ines***

*À tous mes proches que j'aime et qui m'aime.*

**Fahima**



## Résumé :

Dans cette étude, une série chronologique des températures mensuelles (1988-2018) de la station météorologique du Jijel a été analysée. En premier lieu, la distribution des valeurs extrêmes généralisées (**Fréchet**, **Gumbel** ou **Weibull**), dont les paramètres sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode M-H a été utilisée pour modéliser les températures maximales annuelles de notre station. La distribution GEV a aussi été modifiée pour explorer la tendance temporelle linéaire dans les températures maximales. Les résultats ont montré que notre stations n'est pas affectée d'une tendance linéaire significative. En deuxième lieu, on considère plusieurs grandes statistiques d'ordre au lieu seulement la plus grande ; on retient toutes les valeurs qui dépassent un seuil donné. La GPD non stationnaire avec saisonnalité ajuste mieux notre série de température au dessus d'un seuil bien déterminé de 18 C°. L'estimation des paramètres par la méthode de maximum de vraisemblance et méthode bayésienne M-H est discutée. Des niveaux de retour des températures maximales pour certaines périodes du retour du 2 ans, 20 ans, que 100 ans sont calculées pour les deux distributions.

**Mots-clés** : Distribution des valeurs extrêmes généralisée (GEV), Distribution de Pareto Généralisée (GPD), température mensuelle, température maximale, seuil, maximum de vraisemblance, Métropolis-Hastings (M-H).

## Abstract :

In this study, a time serie of monthly temperatures from 1988-2018 at the station of Jijel-Algeria was analyzed. Firstly, the generalized extreme value (**Fréchet**, **Gumbel** or **Weibull**) whose parameters are estimated either by maximum Likelihood and M-H algorithm was used to model the annual maximums of our station. The GEV distribution was also modified to explore the linear temporal trend in the extreme temperatures. The results showed that our station has not a significant linear trend. Secondly, we consider a set of the largest order statistics instead of just the largest one ; that is considering all values larger than a given threshold. The non-stationary GPD with seasonality fits well our temperature series - above a -defined threshold of 18 C ° . Maximum likelihood (ML) and bayesian estimations of the parameters is discussed. A levels of extreme rainfall events in a certain return periods 2 years, 20 years, 100 years are calculated for both distributions.

**Key Words** : Generalized Extreme Value Distribution (GEV), Generalized Pareto Distribution (GPD), threshold, monthly temperature, maximale temerature, Metropolis-Hastings (M-H), maximum likelihood.

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	iv
<b>Liste des tableaux</b>	vi
<b>Table des figures</b>	viii
<b>Notations et abréviations</b>	ix
<b>Introduction générale</b>	xi
<b>1 Fondements théorique des valeurs extrêmes</b>	1
<b>1.1 Méthode en blocs</b> . . . . .	1
<b>1.1.1 Théorème de Fisher-Tippet</b> . . . . .	1
<b>1.1.2 Distribution des extrêmes généralisé (GEV)</b> . . . . .	4
<b>1.1.3 Domaine d'attraction maximum et coefficients de normalisation</b> . . . . .	5
<b>1.1.4 Estimation par Maximum de vraisemblance des paramètre de la distribution GEV</b> . . . . .	12
<b>1.1.5 Niveau et période de retour</b> . . . . .	13

---

1.2	Méthode des excès au-delà d'un seuil(POT)	16
1.2.1	Distribution des excès	16
1.2.2	Distribution par maximum de vraisemblance des paramètre de Pareto Généralisée(GPD)	17
1.2.3	Théorème de Balkema-De Haan-Pickands	18
1.2.4	Estimation des paramètres de la GPD	22
1.2.5	Niveaux et périodes de retour	24
1.3	Modèle GEV non stationnaire	25
1.3.1	Présentation	25
1.3.2	Estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance	26
<b>2</b>	<b>Inférence bayésienne sur les paramètres des lois des valeurs extrêmes</b>	<b>28</b>
2.1	Principe de l'approche Bayésienne	28
2.1.1	Information a priori	29
2.1.2	Loi a priori	29
2.1.3	Distribution a posteriori	29
2.1.4	Théorème de Bayes	29
2.2	Difficulté du choix d'une loi a priori	30
2.2.1	Lois a priori non informatives	30
2.2.2	Lois a priori informatives	34
2.3	Chaines de MARKOV	37
2.3.1	Chaines de Markov discrètes	37
2.3.2	Matrice de transition	38
2.3.3	Propriétés fondamentales	38
2.4	Méthodes de Monte Carlo par Chaîne de Markov	41
2.4.1	Metropolis-Hastings Généralisée	41



2.4.2	Metropolis-Hastings - Marche Aléatoire	41
2.4.3	Inférence bayésien sur les paramètres d'un modèle GEV	42
2.4.4	Inférence bayésien sur les paramètres d'un modèle GPD	43
2.4.5	Inférence bayésien d'un modèle GEV non stationnaire	45
<b>3</b>	<b>Modélisation de la température moyenne maximale à la wilaya de JIJEL</b>	<b>46</b>
3.1	Description des données	46
3.2	Modélisation via la distribution GEV	46
3.2.1	Analyse descriptive de la série	46
3.2.2	Estimation du modèle stationnaire GEV0 par la méthode MV	47
3.2.3	Estimation du modèle non stationnaire GEV1 la tendance en moyenne par MV	48
3.2.4	Choix entre les deux modèles (M0(GEV0) et M1(GEV 1))	49
3.2.5	Validation du modèle choisit	50
3.2.6	Niveaux de retour	51
3.2.7	Estimation de modèle GEV stationnaire par l'algorithme de Metropolis-Hastings	51
3.2.8	Comparaison entre les deux estimateurs (EMV ET MCMC)	54
3.3	Modélisation via la Distribution de Pareto Généralisée (GPD)	54
3.3.1	Détermination d'un seuil optimal	54
3.3.2	Analyse descriptive des données	56
3.3.3	Estimation de la loi GPD stationnaire par la méthode de maximum de vraisemblance	57
3.3.4	Estimation de la loi GPD non stationnaire par la méthode de maximum de vraisemblance (EMV)	58
3.3.5	Choix entre les deux modèles (M0 (GPD stationnaire)) et (M1 (GPD non stationnaire))	59
3.3.6	Validation du modèle choisit	60

3.3.7 Niveaux de retour . . . . .	61
3.4 Estimation de la loi de Pareto généralisé (GPD) non stationnaire par la l'algo- rithme de Metropolis-Hastings . . . . .	62
<b>Conclusion générale</b>	<b>64</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>66</b>
<b>Annexe</b>	<b>70</b>

# Liste des tableaux

1.1 Quelques lois qui appartiennent au MDA	11
2.1 Exemples de quelques lois conjuguée	35
3.1 Statistiques descriptives	46
3.2 Estimation des paramètres des valeurs extrêmes par la méthode de " MV " pour La GEV stationnaire et niveaux de retour.	48
3.3 Estimation de modèle GEV1 non Stationnaire	49
3.4 Test de Ratio de vraisemblance	49
3.5 Les entrées de l'algorithme de Metropolis-hastings	52
3.6 Estimateurs MCMC des paramètres de la loi GEV	52
3.7 Comparaison entre les deux estimations.	54
3.8 Statistiques descriptives	56
3.9 Statistiques descriptives	57
3.10 Estimation MV des paramètres de la loi GPD stationnaire	58
3.11 Estimation MV des paramètres de la loi GPD non stationnaire	59
3.12 Test de Ratio de vraisemblance	59

3.13 Estimation bayésien des paramètres de la loi GPD non stationnaire . . . . .	62
3.14 Estimation des paramètres des valeurs extrêmes par la méthode de "MV" pour La GEV stationnaire utilisant type Gumbel . . . . .	70
3.15 Estimation MCMC(modèle GEV1)non stationnaire . . . . .	71
3.16 GPD stationnaire type -Exponential- . . . . .	72
3.17 Estimation MCMC (modèle GP) . . . . .	73

# Table des figures

1.1 Queues des 3 lois extrêmes . . . . .	3
1.2 Les données $x_1, x_2, \dots, x_n$ et leurs $K$ excès au-delà du seuil correspondants $y_1, y_2, \dots, y_k (k \leq n)$ . . . . .	16
3.1 Maximums annuels des températures pour la station de Jijel . . . . .	47
3.2 QQ plot . . . . .	50
3.3 Les niveaux de retour entre $26^\circ$ et $36^\circ$ . . . . .	51
3.4 Les réalisations (MCMC, Burn-in=500) des paramètres de la GEV dans un cadre Bayésien . . . . .	53
3.5 Densités marginales a posteriori des trois paramètres estimés de la loi GEV . . . . .	53
3.6 la FME . . . . .	55
3.7 La stabilité des paramètres . . . . .	56
3.8 Données mensuelles de température qui dépassent le seuil choisi . . . . .	57
3.9 QQ plot . . . . .	60
3.10 Niveau de retour de la GPD . . . . .	61
3.11 Les réalisations (MCMC, Burn-in=500) des paramètres de la GPD non stationnaire dans un cadre bayésien . . . . .	63

3.12 Densités marginales a posteriori des 04 paramètres estimés de la loi GPD . . . . .	63
3.13 les Réalisations des paramètres de la GEV type (Gumbel) . . . . .	71
3.14 les Réalisations des paramètres de la GEV1 (non stationnaire ) . . . . .	72
3.15 Réalisations des paramètres de la GPD stationnaire (Type-Exponential-) . . . . .	73
3.16 MCMC (mdèle GP) . . . . .	74
3.17 Modèle GPD stationnaire (Rp) . . . . .	74
3.18 GPD non stationnaire . . . . .	76

# Notations et abréviations

## Abréviations

**TCL** : Théorème central limite.

**TVE** : Théorie des valeurs extrêmes.

**i.i.d** : Indépendant et identiquement distribué.

**GEV** : Distribution des Valeurs Extrêmes Généralisée.

**EMV** : Estimation de Maximum du Vraisemblance.

**GPD** : Distribution de Pareto Généralisée.

**POT** : Peaks Over Threshold.

**BM** : Block Maxima.

**V.A** : Variable Aléatoire.

**MDA** : Max-Domain d'Attraction.

**V.E** : Valeur Extrême.

**MCMC** : Monté Carlo par Chaîne de Markov.

**MH** : Métropolis-Hasting.

**PGCD** : Plus Grand Commun Diviseur.

**FME** : Fonction moyenne des excès

**IPCC** : The Intergovernmental Panel on Climate Change

**BM** : Bloque Maximum

## Notations

**F** : Fonction de distribution.

$F^{\leftarrow}$  : Inverse généralisé de la fonction de répartition.

$F^{-1}$  : Inverse de la fonction de répartition.

$x_F$  : Point terminal de la distribution  $F$ .

**B**() : la loi binomiale

$\beta(\cdot)$  : la loi beta



# Introduction générale

Depuis quelques années, la théorie des valeurs extrêmes (TVE) a reçu beaucoup d'attention et un intérêt croissant pour ses applications à la modélisation des événements extrêmes, grâce à l'importance de leurs impacts économiques et sociaux. Etudier en occurrence. Les événements extrêmes tels que les catastrophes naturelles est de première importance pour les assureurs ( McNeil et al, 1997 ; Rootzen et Tajvidi, 1997), ou les crises boursières pour les financiers (Embrechts et al, 1997 ; Danielsson et de Vries, 1997 ; McNeil, 1998 ; Longin, 1998, 2000 ; Embrechts, 1999 ; Gençay et Selçuk, 2004), En météorologie [Coles et Walshaw, 1994 ; Smith, 2001 ; Klajnmic, 2003. Par exemple l'étude de la vitesse du vent ], en Hydrologie [la prévision des crues par exemple Davison et Smith, 1990 ; Katz, 2002]. Ou les précipitations maximales, par exemple, pour les météorologistes, ou encore, les épidémies pour un zone.

Ce sont des événements imprévus aux conséquences désastreuses, c'est pourquoi il est important de prévoir l'occurrence de tels évènements.

La théorie classique des valeurs extrêmes (TVE) est apparue entre 1920 et 1940, due à M. Fréchet, R.A. Fisher 1927 et L. H. C. Tippett 1928, E. J. Gumbel 1958 et B. V. Gnedenko 1943.

Lorsqu'on modélise le maximum d'un ensemble de variables aléatoires. Alors, sous certaines conditions, la limite de distribution ne peut appartenir qu'à l'une des trois lois classes suivantes : Weibull (à support borné), Gumbel et Fréchet (à support non borné).

Une autre méthode pour modéliser les valeurs extrêmes est la méthode de dépassement du seuil (POT), cette dernière technique a été développée par Pickand.J 1975, et Davison A. C et Smith R. L 1990, Smith 1987, Coles and Tawn 1994, Embrechets 1999, Reiss et Thomas 2001.

Le problème principal est le choix du seuil et les méthodes proposées ne sont pas facile à mettre en oeuvre.

On peut utiliser différentes méthodes pour estimer les paramètres des lois extrêmes, comme la méthode de maximum de vraisemblance (Coles 2001, Smith, 1987), Ces méthodes ne sont pas les seuls techniques pour estimer les paramètres des lois extrêmes.

L'approche bayésienne offre une autre méthodologie d'estimation. Cette méthode est basé sur le traitement des paramètres inconnus comme des variables aléatoires et obtenir par la suite des estimateurs appropriés en utilisant les méthodes MONTE CARLO par CHAINES DE MARKOV (MCMC) (Coles et Powell 1996, Coles et tawn 1996, Smith 1999, Smith et Goodman 2000, Coles et Pericchi 2001), en utilisant la méthode traditionnelle de Metropolis - Hastings (Hastings, 1970 ; Metropolis et al, 1953). Nous avons structuré notre mémoire comme suit :

Le premier chapitre Fondements théorique des valeurs extrêmes est un rappel de différents aspects probabiliste des valeurs extrêmes univariées, à savoir les deux approches GEV et GPD avec une présentation de la méthode d'estimation des paramètres méthode de maximum de vraisemblance.

Le deuxième chapitre Inférence bayésienne sur les paramètres des lois des valeurs extrêmes qui est réservé à l'exposition d'une approche bayésienne d'estimation des lois des valeurs extrêmes à savoir la méthode de **Metropolis - Hastings**.

Le troisième chapitre Modélisation de la température moyenne maximale dans la wilaya de Jijel est consacré à la modélisation stationnaire et non stationnaire de la température maximale au niveau de la wilaya de JIJEL par Bloc annuels (GEV) et par la méthode de dépassement de seuil élevé (GPD) en utilisant les deux méthodes d'estimation MV et M-H.

Nous visons au cours de ce dernier chapitre à obtenir l'information et de comprendre le comportement de la température moyenne maximale dans la wilaya de Jijel, et d'essayer par la suite d'établir un modèle adéquat de prévisions à fin de mettre en service un support d'aide pour les météorologistes, les assureurs, les autorités de bien comprendre ces événements exceptionnels et donc prévenir les risques climatiques.

# 1

# Fondements théorique des valeurs extrêmes

## Introduction

La théorie des valeurs extrêmes permet d'évaluer les événements rares et les pertes associées à leur apparition. Elle se base sur l'approximation asymptotique des lois des extrema convenablement normalisés. Cette théorie a été développée essentiellement pour l'estimation de la probabilité d'occurrence d'évènements extrêmes.

Deux théorèmes sont essentiels à savoir le célèbre théorème de **Fisher–Tippet** et celui de **Balkema–De Haan Pichands**.

## 1.1 Méthode en blocs

### 1.1.1 Théorème de Fisher-Tippet

Ce théorème permet de caractériser la loi de distribution des extrêmes : soit  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid) et de même loi de distribution  $F$ . S'il existe deux constantes  $a_n > 0$  et  $b_n \in \mathbb{R}$ , et une distribution limite non dégénérée  $G$  telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left( \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n x + b_n)^n = G(x)$$

avec,  $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$  alors  $G$  appartient à l'un des trois types :

**Gumbel, Fréchet et Weibull.**

**Type I : Gumbel( $\Lambda$ )**

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \exp(-x - e^{-x}) \quad , G(x) = \exp(-e^{-x})$$

$$R(x) = 1 - G(x) = 1 - \exp(-e^{-x})$$

**Type II : Fréchet( $\phi_\alpha$ )**

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \alpha x^{-(1+\alpha)} \exp(-x^{-\alpha}) & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad , \alpha > 0$$

$$G(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad , \alpha > 0$$

$$R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \exp(-x^{-\alpha}) & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad , \alpha > 0$$

**Type III : Weibull( $\psi_\alpha$ )**

$$g(x) = \begin{cases} \alpha(-x)^{\alpha-1} \exp(-(-x)^\alpha) & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad , \alpha > 0$$

$$G(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha) & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad , \alpha > 0$$

$$R(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-(-x)^\alpha) & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad , \alpha > 0$$

**Définition 1.1.**

les types de distribution de **Fréchet**, de **Weibull** et de **Gumbel** sont dits extrêmes, les fonctions de distribution  $\phi_\alpha$ ,  $\psi_\alpha$  et  $\Lambda$  sont appelées : les distributions des valeurs extrêmes standards, et les v.a  $X$  correspondantes sont extrémales.

## Forme de queue des trois types

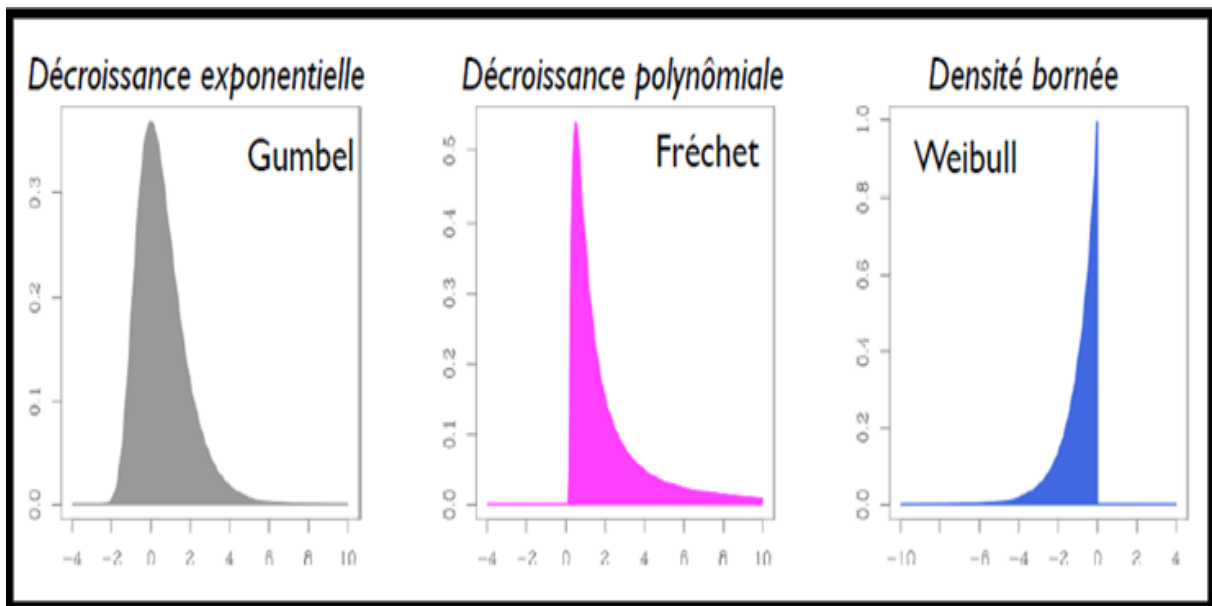


FIGURE 1.1 – Queues des 3 lois extrêmes

Le théorème de **Fisher-Tippett** fournit en quelque sorte, la contrepartie du théorème centrale limite (**TCL**).

**Théorème 1.1.** (*Théorème Central Limite*)

soient  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a (iid), dont l'espérance est  $\mu < \infty$  et la variance est  $0 < \sigma^2 < \infty$

.

si nous notons par  $\bar{X}_n$  la moyenne des  $n$  premières observations :

$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n X_i$ , alors nous avons la convergence en distribution suivante, lorsque  $n$  tend vers l'infini :

$$\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n]}{\sqrt{\text{var}[\bar{X}_n]}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{D} Y$$

où  $Y$  est distribué selon la loi de distribution gaussienne standard :  $Y \sim N(0, 1)$  .

### Ressemblance et différence entre la loi asymptotique des extrema et le Théorème Centrale Limite

- ✓ les points commun entre eux : les deux sont des distributions asymptotiques et stables, de plus ils sont basées sur les suites de normalisation.
- ✓ La différence est : dans le TCL la distribution limite est la même quelque soit  $F$  (la loi normal) par contre, dans le cas des extrêmes, trois limites sont possibles(**Gumbel**, **Fréchet**, **Weibul**).

### 1.1.2 Distribution des extrêmes généralisé (GEV)

Nous pouvons caractériser les trois types de distribution précédentes par une distribution unique. **Von Mises**(1954) et **Jenkinson**(1955) ont proposé la distribution GEV qui a pour fonction de répartition

$$G_{\xi,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\} & \text{si } 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) > 0, \xi \neq 0 \\ \exp \left\{ - \exp \left[ - \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\} & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Où

- ✓  $\mu$  est un paramètre de localisation, il est directement lié à la valeur la plus probable de la loi, il indique donc approximativement où se trouve le coeur de la distribution.
- ✓  $\sigma$  est un paramètre de dispersion, il indique l'étalement des extrêmes.
- ✓  $\xi$  est le paramètre de forme ou de queue.

**La GEV rassemble trois distributions :**

$\xi > 0$ , c'est la distribution de **Fréchet**.

$\xi < 0$ , c'est la distribution de **Weibull**.

$\xi = 0$ , c'est la distribution de **Gumbel**.

**Le lien entre  $\xi$  et  $\alpha$  :**

1- si  $\xi = \alpha^{-1} > 0$ , on obtient la distribution de **Fréchet**.

2- si  $\xi = -\alpha^{-1} < 0$ , on obtient distribution de **Weibull**.

3- si  $\xi = 0$ , on obtient distribution de **Gumbel**.

**Propriétés de la GEV**

**A.Densité :**

**Proposition 1.1.**

$G_{\xi,\mu,\sigma}(\xi \in \mathbb{R})$  est une fonction de répartition absolument continue de densité  $g_{\xi,\mu,\sigma}(x)$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$g_{\xi,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} \left( 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \exp \left\{ - \left( 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1/\xi} \right\} \mathbb{1}_{\{1+\xi x > 0\}}(x) & \text{si } \xi \neq 0 \\ \exp \left\{ - \frac{1}{\sigma} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) + \exp \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\} & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

**B.Moments :****Proposition 1.2.**

Soit  $X$  la v.a associée à  $G_{\xi,\mu,\sigma}$ , i.e  $G_{\xi,\mu,\sigma}$  est la fonction de répartition de  $X$ , alors l'espérance et la variance de  $X$  sont données comme suit :

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \gamma & \text{si } \xi = 0 \\ \frac{\Gamma(1-\xi)}{\xi} & \text{si } \xi < 1 \\ \infty & \text{si } \xi > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \begin{cases} \pi^2/6 & \text{si } \xi = 0 \\ \frac{\Gamma(1-2\xi) - \Gamma^2(1-\xi)}{\xi^2} & \text{si } \xi < 1/2 \\ \infty & \text{si } \xi > 1/2 \end{cases}$$

**Remarque 1.1.**

Dans le cadre de la proposition ci-dessus,  $\Gamma$  est la fonction Gamma, et  $\gamma$  est la constante d'Euler.

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

**C.Quantiles :****Proposition 1.3.**

Soient  $p \in ]0, 1[$  et  $X$  la v.a associée à la distribution des valeurs extrêmes généralisée  $G_{\xi}(\xi \in \mathbb{R})$ . Alors le  $p$ -quantile  $x_p$  de  $X$  est donnée par :

$$x_p = \begin{cases} \frac{(-\ln p)^{-\xi} - 1}{\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ -\ln(-\ln p) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

**Remarque 1.2.**

Dans le cadre de la proposition ci-dessus, on voit bien que le quantile  $x_p$  est fortement influencé par le paramètre  $\xi \in \mathbb{R}$ , plus  $\xi$  est grand plus le quantile  $x_p$  est élevé.

En applications, cela veut dire que plus  $\xi$  est grand plus la probabilité qu'un évènement extrême se produise est importante.

Après avoir caractérisé les lois limites. Il nous reste à déterminer les domaines d'attraction.

### 1.1.3 Domaine d'attraction maximum et coefficients de normalisation

On dit qu'une distribution  $F$  appartient au max-domaine d'attraction de  $G$ , et on note  $F \in MDA(G)$ , si la distribution du maximum normalisée converge vers  $G$ .

**Problématique :**

Sachant la distribution  $F$ , nous voudrions connaître à quel max-domaine d'attraction elle appartient et quelles sont les constantes de normalisation ?.

**Domaine d'attraction de la loi Fréchet :****Théorème 1.2.**

La distribution  $F$  appartient au domaine d'attraction de la loi de Fréchet  $\phi_\alpha(\alpha > 0)$ . si et seulement si  $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}l(x)$ , pour une fonction à variations lentes  $l$ .

Nous pouvons alors choisir

$$b_n = 0 \text{ et } a_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1})$$

$$\text{Où } F^{\leftarrow}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}$$

**Proposition 1.4.**

Si  $F(x) \in MDA(\Phi_\alpha(x))$  alors les constantes de normalisations  $a_n > 0$  et  $b_n \in \mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n x + b_n)^n = \Phi_\alpha(x)$$

peuvent être choisies de la manière suivante :

$$a_n = U(n) \text{ et } b_n = 0$$

où  $U$  est la fonction quantile de queue de la variable aléatoire  $X$ .

**Exemple 1.1.**

On suppose  $X_1$  suit la loi de Cauchy (de paramètre  $\alpha = 1$ ), de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

on prend :  $a_n = \frac{n}{\pi}$

On note  $F_n$  la fonction de répartition de  $\frac{\pi M_n}{n}$ , on a alors :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \Pr\left(\frac{\pi M_n}{n} \leq x\right) = \Pr\left(M_n \leq \frac{nx}{\pi}\right) \\ &= \Pr\left(X \leq \frac{nx}{\pi}\right)^n \\ &= \left(1 - \int_{\frac{nx}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+y^2)} dy\right)^n \end{aligned}$$



pour  $x > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{nx}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+y^2)} dy &= \int_{\frac{nx}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{\pi(y^2)} dy + \int_{\frac{nx}{\pi}}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\pi(1+y^2)} - \frac{1}{\pi y^2} \right] dy \\ &= \frac{1}{nx} + O\left((nx)^{-3}\right) \end{aligned}$$

On a alors, pour  $x \geq 0$  :

$$F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{nx} + O((nx)^{-3})\right)^n$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = e^{-\frac{1}{x}}, x > 0$$

Alors la distribution de Cauchy appartient au max-domaine d'attraction de **Fréchet**.

### Définition 1.2.

Considérons une v.a absolument continue et notons  $f$  sa densité. On peut définir la fonction de hasard par :

$$h(x) = \frac{1 - F(x)}{f(x)} \quad \text{pour } x_F < x < x^F$$

où  $x_F$  et  $x^F$  sont les valeurs qui définissent le support de la v.a.

### Remarque 1.3.

on définit :

- ✓  $b_n$  comme le quantile d'ordre  $1 - 1/n$ , i.e.  $1 - F(b_n) = 1/n$ .
- ✓  $a_n = h(b_n)$ , i.e. la transformée de  $b_n$  par l'inverse de la fonction de hasard  $a_n = h(b_n)$

### Exemple 1.2.

(Distributions de type Pareto)

Les distributions de type Pareto sont définies par :

$$1 - F(x) \sim c/x^\alpha \quad \text{quand } x \rightarrow \infty$$

pour  $c > 0$  et  $\alpha > 0$ . Si la densité existe, alors

$$f(x) \sim \alpha c x^{-\alpha-1}, \quad h(x) \sim \alpha^{-1} x$$

et

$$h'(x) \sim \alpha^{-1} \quad \text{quand } x \rightarrow \infty.$$

par conséquent

$$\xi = \alpha^{-1}, b_n = (cn)^{\frac{1}{\alpha}} \text{ et } a_n = \alpha^{-1}(cn)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

La loi de **Fréchet** ( $\phi_\alpha$ ) est donc obtenue comme limite.

**Remarque 1.4.**

$$R(x) = 1 - F(x) = 1 - e^{-x^{-\alpha}} \simeq x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$$

Dans le max-domaine d'attraction de la distribution **Fréchet**, nous trouvons la queue supérieure de la distribution décroît de façon polynomiale .

### Domaine d'attraction de la loi de Gumbel :

**Théorème 1.3.**

La distribution  $F$  appartient au domaine d'attraction de la loi de **Gumbel**( $\Lambda$ ) ssi, il existe une fonction positive  $g$  telle que :

$$\lim_{x \rightarrow x_F} \frac{\bar{F}(x + tg(x))}{\bar{F}(x)} = e^{-t}, t \in \mathbb{R}$$

Un choix possible pour la fonction  $g$  est :

$$g(x) = \frac{\int_x^{x_F} \bar{F}(t) dt}{\bar{F}(x)} = \mathbf{E}(X - x | X > x)$$

Les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  ont alors la forme suivante :

$$b_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1}), a_n = g(a_n)$$

**Exemple 1.3.**

Supposons données  $n$  v.a ( $X_1, X_2, \dots, X_n$ ) iid, de la fonction de répartition commune  $F$ .

Supposons  $F$  suit une loi exponentielle de paramètre 1, c'est à dire :

$$F(x) = 1 - e^{-x}.$$

Soit  $F_Y$  la fonction de répartition de la variable  $Y$  avec  $Y = M_n - \log(n)$ , alors

$$\begin{aligned}
 F_Y(x) &= Pr \left[ M_n - \log(n) \leq x \right] \\
 &= \left( Pr \left[ x \leq x + \log(n) \right] \right)^n \\
 &= \left( 1 - \exp(-x - \log(n)) \right)^n \\
 &= \left( 1 - \frac{1}{n} \exp(-x) \right)^n \\
 &= \exp \left( n \log \left( 1 - \frac{1}{n} \exp(-x) \right) \right) \\
 &\simeq \exp \left( - \exp(-x) \right) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty \\
 &= \Lambda(x)
 \end{aligned}$$

Prenons :

$a_n = 1$  et  $b_n = \log(n)$ , alors  $\left( \frac{M_n - b_n}{a_n} \right)$  tend asymptotiquement vers la loi de **Gumbel**.

**Exemple 1.4.** (Distribution normale)

Pour des grands valeurs de  $x$  :

$$1 - \Phi(x) \simeq (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2) (x^{-1} - x^{-3} + 3x^{-5} + \dots)$$

par conséquent

$$h(x) = x^{-1} - x^{-3} + \dots$$

et

$$h'(x) = -x^{-2} + 3x^{-4} + \dots$$

Donc :  $\xi = 0$ ,  $a_n$  et  $b_n$  peuvent être caractérisés analytiquement par :

$$b_n = \left( 2 \log n \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left( 2 \log n \right)^{-\frac{1}{2}} \left[ \log(\log n) + \log(4\pi) \right]$$

et

$$a_n = \left( 2 \log n \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Remarquons que, puisque  $a_n \rightarrow 0$ , alors  $M_n \sim b_n$ , i.e  $M_n \sim (2 \log n)^{\frac{1}{2}}$ .

Alors la distribution normale appartient au domaine d'attraction de la loi de **Gumbel**.

**Remarque 1.5.**

$$\begin{aligned} R(x) = 1 - F(x) &= 1 - e^{-e^{-x}} \simeq \exp\{-x\} \\ &= \frac{1}{e^x}. \end{aligned}$$

Dans le max-domaine d'attraction de la distribution **Gumbel**, nous trouvons des distributions dont, la fonction de survie décroît vers zéro à une vitesse exponentielle.

**Domaine d'attraction de la loi de Weibull :**

**Théorème 1.4.**

La distribution  $F$  appartient au domaine d'attraction de la loi de **Weibull**( $\psi_\alpha$ ), si et seulement si  $x^F < \infty$  et  $\bar{F}(x^F - x^{-1}) = x^{-\alpha}l(x)$ , pour une fonction à variation lentes  $l$ .

Les constantes de normalisation peuvent être choisies de la manière suivante :

$$b_n = F^{\leftarrow}(1), \quad a_n = F^{\leftarrow}(1) - F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

**Exemple 1.5.**

On suppose que  $x$  suit la loi uniforme  $U([0, 1])$ , c-à-d :

$$\forall x \in \mathbb{R}; F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On pose  $a_n = \frac{1}{n}$  et  $b_n = 1$ .

Alors ;  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \Pr\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) &= \left(F\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)^n \\ &= \begin{cases} 0 & \text{Si } 1 + \frac{x}{n} < 0 \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{Si } 0 \leq 1 + \frac{x}{n} \leq 1 \\ 1 & \text{Si } 1 + \frac{x}{n} > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{Si } x < -n \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{Si } -n \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{Si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, \lim \Pr \left( \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right) = \begin{cases} e^x & \text{Si } x \leq 0 \\ 1 & \text{Si } x > 0 \end{cases}$$

$$= \psi_1(x)$$

**Remarque 1.6.**

Dans le max-domaine d'attraction de la distribution **Weibull**, nous trouvons des distributions dont le point terminal est fini.

• **Exemple de distribution qui n'appartiennent pas à un domaine d'attraction :**

Des exemples de distribution qui n'appartiennent pas à un domaine d'attraction sont :

1-  $F(x) = 1 - \frac{1}{\log x}$  pour  $x > e$

2-  $F(x) = 1 - \frac{1}{\log(\log x)}$  pour  $x < e^e$

pour le premier exemple

$$f(x) = \frac{1}{x(\log x)^2}$$

$$h(x) = x \log x \text{ et } h'(x) = 1 + \log x$$

$$\text{ainsi } h'(x) \rightarrow \infty \text{ quand } x \rightarrow \infty$$

ce qui ne satisfait pas le condition de convergence.

La queue de distribution est trop epaisse. Dans ce cas, il faut envisager une normalisation non linéaire.

Soit  $Y = \log X$  alors ;  $F_Y(y) = F_X(e^y) = 1 - \frac{1}{y}$ .

Ainsi pour  $Y$  :  $h(y) = y$  et  $h'(y) = 1 = \xi$ , et le domaine d'attraction est celui de la loi **Fréchet** de paramètre  $\alpha = 1$ .

Voici un classement de quelque lois par domaine d'attraction dans le tableau 1.1.

MDA		
Fréchet ( $\xi > 0$ )	Gumbel ( $\xi = 0$ )	Weibul ( $\xi < 0$ )
Pareto	Normale	Uniforme
Student	Exponentielle	Beta
Burr	Log-normale	Revese Burr
Chi-deux	Gamma	
Log-gamma	Weibull	
Log-logistique	Gumbel	
Cauchy	logistique	

TABLE 1.1 – Quelques lois qui appartiennent au MDA

**Proposition 1.5.**

La relation entre les trois distributions des valeurs extrêmes est donnée par :

$$X \sim \text{Fréchet} \Rightarrow Y = \ln X \sim \text{Gumbel} .$$

$$X \sim \text{Weibull} \Rightarrow Y = \frac{1}{X} \sim \text{Fréchet} .$$

$$X \sim \text{Weibull} \Rightarrow Y = \ln\left(\frac{1}{X}\right) \sim \text{Gumbel} .$$

### 1.1.4 Estimation par Maximum de vraisemblance des paramètre de la distribution GEV

Cet estimation est le plus classique des estimateurs, donne des résultats asymptotiques efficaces, et les estimations obtenus convergent vers les vraie valeurs des paramètres.

Sous l'hypothèse que les  $X_i$  sont (iid),  $i = 1, \dots, n$  et ayant la même loi de la distribution GEV, avec une densité  $g(x)$  (g a trois paramètres sont  $\mu, \sigma, \xi$ ).

La fonction de vraisemblance s'écrit comme suit :

$$L(\mu, \sigma, \xi) = \prod_{i=1}^n g(x_i, \mu, \sigma, \xi)$$

Pour faciliter les calculs, on travaille avec logarithme des vraisemblance ;

$$\begin{aligned} \log L(\mu, \sigma, \xi) &= \log \prod_{i=1}^n g(x_i, \mu, \sigma, \xi) \\ &= \sum_{i=1}^n \log g(x_i, \mu, \sigma, \xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log L(\mu, \sigma, \xi) &= -n \log \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n \log \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{\frac{-1}{\xi}} \end{aligned}$$

Le vecteur  $\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi})$  est solution de système suivant :

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \frac{\partial \log L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu} = 0 \\ \frac{\partial^2 \log L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu^2} \leq 0 \end{cases}$$

$$\hat{\sigma} = \begin{cases} \frac{\partial \log L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma} = 0 \\ \frac{\partial^2 \log L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma^2} \leq 0 \end{cases}$$

$$\hat{\xi} = \begin{cases} \frac{\partial \log L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \xi} = 0 \\ \frac{\partial^2 \log L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \xi^2} \leq 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système est relativement difficile et n'admet pas en général des solutions explicites. Dans ce cas, on fait appel à des méthodes d'optimisation numériques (L'algorithme de Newton - Raphson) ou bien à l'aide de langage R .

### 1.1.5 Niveau et période de retour

#### Fonction quantile :

La fonction quantile d'une v.a (ou d'une loi de probabilité) est l'inverse de sa fonction de répartition.

Quand cette fonction de répartition est strictement croissante, son inverse est définie sans ambiguïté . Mais une fonction de répartition reste constante sur tout intervalle dans lequel la v.a ne peut pas prendre des valeurs. C'est pourquoi on introduit la définition suivante.

#### Définition 1.3.

Soit  $X$  une v.a à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et  $F_X$  sa fonction de répartition.

On appelle fonction quantile de  $X$  la fonction, notée  $Q_X$ , de  $]0,1[$  dans  $\mathbb{R}$ , qui à  $u \in ]0,1[$  associe :

$$Q_X(u) = \inf \{ x \text{ tq } F_X(x) \geq u \}$$

Par convention, on peut décider que  $Q_X(0)$  est la plus petit des valeurs possibles pour  $X$  et  $Q_X(1)$  est la plus grand (elle sont éventuellement infinies).

**Quantile d'ordre P :**

**Définition 1.4.**

On appelle quantile ou fractile d'ordre  $p$ , le nombre  $x_p$  défini par :

$$x_p = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}, \text{ avec } p \in [0, 1].$$

**Remarque 1.7.**

Si  $F$  est strictement croissante et continue, alors  $x_p$  est l'unique nombre réel, tel que :

$$F(x_p) = p$$

**Fonction quantile de queue :**

**Définition 1.5.**

La fonction quantile de queue est définie par :

$$U(t) = F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{t}\right) \text{ avec } 1 < t < \infty.$$

$F^{\leftarrow}$  étant l'inverse généralisé de  $F$ .

**Quantile extrêmes :**

**Définition 1.6.**

On appelle quantile extrême, le quantile d'ordre  $(1 - p)$ , défini par :

$$\begin{aligned} x_p &= \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\} \\ &= F^{-1}(1 - p). \end{aligned}$$

où  $p$  proche de zéro.

**Notion de niveau et période de retour :**

**Définition 1.7.**

Période de retour pour un niveau  $x$  est : le temps d'attente moyen pour que le niveau  $x$  soit à nouveau dépassé.

**Définition 1.8.**

Niveau de retour de période  $T$  est : le niveau pour lequel le temps d'attente moyen de dépassement est de  $T$  années.

**Remarque 1.8.**

la période de retour n'a rien à voir avec un phénomène périodique.



**Estimation du niveau de retour pour la distribution GEV**

Le niveau de retour de période  $\frac{1}{p}$  est le quantile d'ordre  $1 - p$  de la distribution GEV pour  $0 < p < 1$ .

Nous pouvons ensuite calculer les quantiles de la lois GEV :

$$x_p = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi} [1 - (-\log(1-p))^{-\xi}], & \xi \neq 0 \\ \mu - \sigma \log(-\log(1-p)), & \xi = 0 \end{cases}$$

où la valeur  $x_p$  est le  $(1-p)$  quantile de la loi **GEV** :

$$G(x_p) = 1 - p.$$

Nous estimons les niveaux de retour pour une valeur fixée  $p$ , en remplaçant dans la formule précédente les estimations des paramètres par le maximum de vraisemblance, nous obtenons donc les formules suivantes :

$$\hat{x}_p = \begin{cases} \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} [1 - (-\log(1-p))^{-\hat{\xi}}] & \hat{\xi} \neq 0 \\ \hat{\mu} - \hat{\sigma} \log(-\log(1-p)) & \hat{\xi} = 0 \end{cases}$$

On a : le nombre de dépassements d'un seuil

$$N_T = \sum_{t=1}^T \mathbf{1}_{\{X_t > x_T\}}$$

niveau de retour  $x_T$  associé à une période de retour  $T$  : pendant une période  $T$ , on dépasse en moyenne une fois le niveau  $x_T$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_T) &= 1 \\ \mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^T \mathbf{1}_{\{X_t > x_T\}}\right) &= 1 \\ \sum_{t=1}^T E\left(\mathbf{1}_{\{X_t > x_T\}}\right) &= 1 \implies \sum_{t=1}^T P(X_t > x_T) = 1 \end{aligned}$$

Dans un cas equidistribué simple

$$\mathbb{P}(X_t > x_T) = \frac{1}{T}$$

Dans un cas equidistribué simple (ou stationnaire), un niveau de retour  $x_T$  est l'équivalent d'un quantile.

### Critiques de la GEV

L'approche basée sur la GEV à été critiquée dans la mesure ou l'utilisation d'un seul maxima conduit à une perte d'information contenue dans les autres grands valeurs de l'échantillon.

Pour pallier ce problème, la méthode POT ou méthode des excès au-delà d'un seuil élevé à été introduite par **Pickands** [1975].

## 1.2 Méthode des excès au-delà d'un seuil(POT)

### 1.2.1 Distribution des excès

#### Définition 1.9.

On appelle excès de v.a  $X$  au-delà d'un seuil  $u < x_F$  la variable aléatoire  $Y$  qui prend ses valeurs sur  $]0, x_F - u[$  définie par :

$$Y = X - u | X > u, u < x_F$$

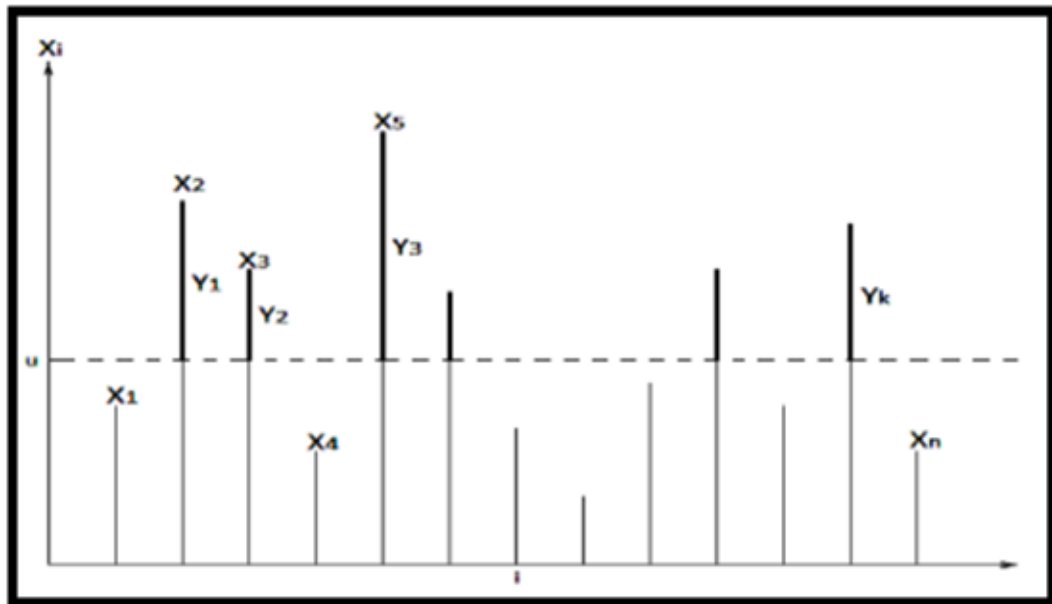


FIGURE 1.2 – Les données  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et leurs  $K$  excès au-delà du seuil correspondants  $y_1, y_2, \dots, y_k (k \leq n)$

**Théorème 1.5.** (*Distribution des excès*)

On appelle **distribution des excès** de la v.a  $X$ , par rapport à un seuil  $u < x_F$ , la loi de probabilité de la v.a  $Y$ , donnée par sa fonction de répartition des excès  $F_u$  :

$\forall y \in \mathbb{R}$ ,

$$F_u(y) = \Pr (X - u \leq y \mid X > u) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - \frac{1 - F(u + y)}{1 - F(u)} & 0 < y < x_F - u \\ 1 & y \geq x_F - u \end{cases} \quad (1.3)$$

### 1.2.2 Distribution par maximum de vraisemblance des paramètre de Pareto Généralisée(GPD)

La distribution de Pareto généralisée, joue un rôle essentiel dans la modélisation des excès.

**Définition 1.10.**

Une distribution  $H_{\xi, \beta(u)}$  est dite de Pareto généralisée de paramètre  $\xi \in \mathbb{R}$  et  $\beta(u) > 0$  si elle s'écrit :

$$H_{\xi, \beta(u)}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\beta(u)}x\right)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta(u)}\right), & \xi = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Cette distribution est définie pour :

$$\begin{cases} x > 0 & \text{si } \xi \geq 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{-\beta(u)}{\xi} & \text{si } \xi < 0 \end{cases}$$

Le paramètre  $\xi$  est le même d'une GEV, le  $\beta(u)$  est lié à  $\sigma$  par :

$$\beta(u) = \sigma + \xi(u - \mu)$$

$\xi$  : paramètre de forme ou de queue.

$\beta(u)$  : paramètre d'échelle.

cas particulier, lorsque

$$\begin{cases} \xi = 0 \text{ c'est la loi } \exp(\lambda) \text{ avec } \lambda = \frac{1}{\beta(u)} \\ \xi = -1 \text{ c'est la loi } U_{[0, \beta(u)]} \end{cases}$$

Le théorème suivant fait le lien entre le comportement asymptotique de la distribution des excès et la loi pareto généralisée.

### 1.2.3 Théorème de Balkema-De Haan-Pickands

#### Théorème 1.6.

Soit  $F_u$  la distribution des excès, lorsque le seuil  $u$  tend vers le point terminal  $x_F$ , on a :

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{0 \leq x \leq x_F - u} |F_u(x) - H_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0.$$

où  $\beta(u)$  une fonction positive mesurable.

#### Exemple 1.6.

Soit La loi exponentielle de paramètre 1

$$F(x) = (1 - e^{-x}) \mathbf{1}_{\{x > 0\}}(x)$$

et

$$p[X > u + y | X > u] = \frac{1 - F(u + y)}{1 - F(u)} = \frac{e^{-(u+y)}}{e^{-u}} = e^{-y}, y > 0.$$

On retrouve la loi exponentielle qui est également la loi GPD de paramètre  $\xi = 0$  et  $\beta(u) = 1$ .

### Propriétés de la GPD

#### 1) La densité

La densité de  $H_{\xi, \beta(u)}$  est donnée par :  $\forall x > 0$ ,

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(u)} \left[ 1 + \xi \left( \frac{x}{\beta(u)} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi} - 1} & \text{si } \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\beta(u)} e^{-\frac{x}{\beta(u)}} & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

#### 2) Les moments

La moyenne et la variance de la GPD sont respectivement :

$$E(X) = \frac{\beta(u)}{1 - \xi}, (\xi > 0)$$

et

$$V(X) = \frac{\beta^2(u)}{(1 - \xi)^2(1 - 2\xi)}, (\xi < \frac{1}{2})$$

#### 3) Quantiles

Soit  $p \in ]0, 1[$  et  $X$  la variable aléatoire associée à la distribution de paréto généralisée  $H_{\xi, \beta(u)}$   
 $\xi \in \mathbb{R}$  et  $\beta(u) > 0$ .

Alors le p quantile  $x_p$  de X est donnée par :

$$x_p = \begin{cases} \frac{\beta(u) \left[ (1-p)^{-\xi} - 1 \right]}{\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ -\beta(u) \ln(1-p) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

4) Si  $\xi < 0$  c'est la loi de paréto de **Type II**.

5) Si  $\xi = 0$ , la distribution  $H_{0,\beta(u)}(x)$  est une distribution exponentielle.

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} H_{\xi,\beta(u)}(x) &= \lim_{\xi \rightarrow 0} 1 - \left( 1 + \frac{\xi}{\beta(u)} x \right)^{-\frac{1}{\xi}} \\ &= 1 - \exp\left( - \lim_{\xi \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{x}{\beta(u)}}{1 + (\xi x)\beta(u)} \right) \right) \\ &= 1 - \lim_{\xi \rightarrow 0} \exp\left( - \frac{1}{\xi} \log\left( 1 + \frac{\xi}{\beta(u)} x \right) \right) \\ &= 1 - \exp\left[ - \lim_{\xi \rightarrow 0} \left( \frac{\log\left( 1 + \frac{\xi}{\beta(u)} x \right)}{\xi} \right) \right] \\ &= 1 - \exp\left( \frac{-x}{\beta(u)} \right) = H_{0,\beta(u)}(x) \end{aligned}$$

6) Si  $\xi = -1$ ,  $H_{-1,\beta(u)}$  est la loi uniforme sur  $[0, \beta(u)]$ .

7)  $H_{\xi,\beta(u)} \in \text{MDA}(G_\xi)$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ .

Soit  $\xi > 0$ , on sait que si  $F \in \text{MDA}(H_\xi)$  alors  $\bar{F} = x^{-1/\xi} L(x)$ .

Où  $L(x)$  est une fonction à variation régulière, on montre que

$$\bar{H}_{\xi,\beta(u)}(x) = x^{-1/\xi} L(x).$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\xi,\beta(u)}(x) &= 1 - H_{\xi,\beta(u)}(x) \\ &= 1 - \left( 1 - \left( 1 + \frac{\xi}{\beta(u)} x \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) \\ &= \left( 1 + \frac{\xi}{\beta(u)} x \right)^{-\frac{1}{\xi}} \\ &= x^{-\frac{1}{\xi}} \left( \frac{x^{-1}\beta(u) + \xi}{\beta(u)} \right)^{-\frac{1}{\xi}} = x^{-\frac{1}{\xi}} \left( \frac{\xi}{\beta(u)} + \frac{1}{x} \right) = x^{-\frac{1}{\xi}} L(x) \end{aligned}$$

$$\text{Où } L(x) = \frac{\xi}{\beta(u)} + \frac{1}{x}.$$

8) **Stabilité par seuillage :**

$$\bar{H}_{\sigma,\xi,\mu}(y) = \left[ 1 + \frac{\xi y}{\sigma + \xi(u - \mu)} \right]^{-\frac{1}{\xi}}$$

**Démonstration**

On a :

$$\begin{aligned} F_u(y) &= 1 - \left( \frac{1 - F(u + y)}{1 - F(u)} \right) \\ &= \frac{F(u + y) - F(u)}{1 - F(u)} \end{aligned}$$

Supposons que l'approximation de la distribution du maximum par une distribution GEV soit satisfaisante :

$$\Pr(M_n \leq x) \simeq G(x)$$

Alors pour u assez grand  $F_u(y)$  est approximativement

$$H(y) = 1 - \left( 1 + \frac{\xi y}{\beta(u)} \right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

Cette distribution est définie sur

$$\Delta = \{y : 1 + \xi\beta(u)^{-1}y > 0\} \text{ avec } \beta(u) = \sigma + \xi(u - \mu)$$

c'est en fait une distribution de Paréto généralisée

$$H(x) = 1 - \left( 1 + \frac{\xi x}{\beta(u)} \right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

Nous avons donc une certaine dualité entre les distributions GPD et GEV, pour établir ce résultat, nous remarquons que :

$$F^n(x) \simeq \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\}$$

Nous en déduisons que

$$n \ln F(x) \simeq - \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \text{ Où } \ln F(x) \simeq -(1 - F(x))$$

pour  $x$  grand. Nous avons donc

$$1 - F(x) \simeq \frac{1}{n} \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}}$$

Nous obtenons le résultat final

$$\begin{aligned} P_r \left\{ X > u + y / X > u \right\} &= \frac{1 - F(u + y)}{1 - F(u)} \\ &\simeq \frac{n^{-1} \left[ 1 + \xi(u + y - \mu) / \sigma \right]^{-\frac{1}{\xi}}}{n^{-1} \left[ 1 + \xi(u - \mu) / \sigma \right]^{-\frac{1}{\xi}}} \\ &= \left[ \frac{1 + \xi(u + y - \mu) / \sigma}{1 + \xi(u - \mu) / \sigma} \right]^{-\frac{1}{\xi}} \\ &= \left[ 1 + \frac{\xi / \sigma}{1 + \xi(u - \mu) / \sigma} y \right]^{-\frac{1}{\xi}} \\ &= \left[ 1 + \frac{\xi}{\sigma + \xi(u - \mu)} y \right]^{-\frac{1}{\xi}} \end{aligned}$$

Il est courant de noter

$$\beta(u) = \sigma + \xi(u - \mu)$$

Ainsi, la distribution limite est la suivante :

$$H(x) = 1 - \left( 1 + \frac{\xi x}{\beta(u)} \right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

**Remarque 1.9.**

La loi des excès au-delà d'un seuil converge vers une loi GPD .

**Définition 1.11.**

Loi de paréto généralisée (GPD)

$$\begin{aligned} H_{\xi, \sigma}(x) &= 1 + \log G_{\xi, \sigma}(x) (0 < x < x^*) \\ &= 1 - \left( 1 + \xi \frac{x}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \end{aligned}$$

avec :  $G_{\xi,\sigma}$  une GEV,  $x^*$  la borne supérieur de son support.  
 $x^* = \infty$  si  $\xi \geq 0$ , sinon  $x^* = \frac{-\sigma}{\xi}$

### 1.2.4 Estimation des paramètres de la GPD

#### Choix du seuil

Le choix du seuil revient simplement à faire un compromis entre biais et variance. En effet, un seuil trop bas conduit à mal approximer la loi limite ce qui a pour conséquence d'augmenter le biais. Au contraire, un seuil trop haut provoque une pénurie des valeurs extrême et donc la variance s'en voit augmentée.

Il y a deux méthodes pour choisir le seuil.

#### •Première méthode La fonction moyen des excès

C'est une méthode expérimental qui repose sur la moyenne de la distribution de paréto : étant donné une v.a  $Y$  qui suit une distribution de paréto avec paramètre  $\sigma$  et  $\xi$ , sa moyenne est donnée par l'expression suivante :

$$E[Y] = \begin{cases} \frac{\sigma}{1-\xi}, & \xi < 1 \\ +\infty, & \xi \geq 1 \end{cases}$$

Maintenant supposons que la distribution de paréto est un modèle valide pour les observations qui excèdent un certain seuil  $u_0$ , provenant d'une suite de v.a  $X_1, \dots, X_n$ , alors

$$E[X - u_0/X > u_0] = \begin{cases} \frac{\tilde{\beta} u_0}{1-\xi}, & \xi < 1 \\ +\infty, & \xi \geq 1 \end{cases}$$

Où on adopte la notation  $\beta(u) = \sigma + \xi(u_0 - u)$ .

Mais alors, si la distribution de Paréto est une bonne approximation en choisissant tout seuil  $u$  supérieur à  $u_0(u > u_0)$ . Ainsi, nous avons également

$$\mathbb{E}[X - u/X > u] = \frac{\sigma}{1-\xi} = \frac{\beta_{u_0} + \xi (u - u_0)}{1-\xi}$$

pour autant que  $\xi < 1, u > u_0$ .

Nous voyons donc que  $\mathbb{E}[X - u/X > u]$  est une fonction linéaire du  $u$ .



•Deuxième méthode La stabilité des paramètres

La deuxième méthode, complémentaire à la première.

Il faut avoir que l'estimation du paramètre de la forme  $\xi$ , ne dépend pas du choix du seuil  $u$  et donc que sa valeur devrait rester constante quelque soit le seuil choix.

Par contre, l'estimation du paramètre d'échelle  $\tilde{\beta}(u)$  est influencée par le seuil choisi.

En effet, nous avons vu que  $\tilde{\beta}(u)$  et  $u$  sont liés par la relation suivante :

$$\tilde{\beta}(u) = \tilde{\beta}_{u_0} + \xi(u - u_0)$$

Ainsi,  $\tilde{\beta}(u)$  change de manière linéaire en fonction du seuil  $u$  (à moins que  $\xi = 0$  )

pour  $y$  remédier, nous pouvons définir un paramètre d'échelle reparamétrisé  $\beta^*$  (échelle modifiée), constant avec  $u$  .

$$\beta^* = \tilde{\beta}(u) - \xi u$$

Avec cette définition, et comme  $\xi$  est constant en fonction de  $u$  , l'estimation de  $\beta^*$  devrait également être constante.

On va estimer les paramètres de la GPD, on utilisons la méthode de MV.

La densité de la distribution GPD s'écrit :

$$h_{\xi, \beta(u)}(x) = \begin{cases} \beta(u)^{\frac{1}{\xi}} (\beta(u) + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}-1} & \text{si } \xi \neq 0 \\ \beta(u)^{-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta(u)}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

La fonction de vraisemblance est donnée par :

$$l(\xi, \beta(u), x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n h_{\xi, \beta(u)}(x_i)$$

Ce qui implique :

$$\log l(\xi, \beta(u), x_1, \dots, x_n) = -n \log \beta(u) - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \frac{\xi}{\beta(u)} x_i\right)$$

En pose que  $T = \frac{\xi}{\beta(u)}$ , l'annulation des dérivées partielles des logarithmes de la fonction de

vraisemblance conduit au système :

$$\begin{cases} \widehat{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(1 + Tx_i) = \widehat{\xi}(T) \\ \frac{1}{T} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + Tx_i} \end{cases}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance de  $(\xi, T)$  est  $(\widehat{\xi} = \widehat{\xi}(\widehat{T}), \widehat{T})$ , où  $\widehat{T}$  est solution de :

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + Tx_i}$$

Lorsque  $\xi > -\frac{1}{2}$ , **Hosking** et **Wallis** ont montré la normalité asymptotique des estimateurs du maximum de vraisemblance :

$$n^{\frac{1}{2}} \left( \widehat{\xi} - \xi, \frac{\widehat{\beta}(u)}{\beta(u)} - 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N(0, M^{-1}) \text{ où } M^{-1} = (1 + \xi) \begin{pmatrix} 1 + \xi & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ce résultat permet en particulier de calculer les erreurs approximatives d'estimation commises par les estimateurs du maximum de vraisemblance.

On peut aussi remarquer que la fonction quantile a une expression explicite, lorsque  $\xi > 0$  :

$$x_p = H_{\xi, \beta(u)}^{-1}(p) = \frac{\beta(u)}{\xi} \left( (1 - p)^{-\xi} - 1 \right)$$

### 1.2.5 Niveaux et périodes de retour

Comme pour les modèles GEV, il est souvent plus pratique d'interpréter un modèle, où les V.E en terme de niveaux de retour et de périodes de retour.

Supposons qu'une distribution généralisée de paréto de paramètre  $\sigma$  et  $\xi \neq 0$  est un modèle adéquat pour les excès d'un certain seuil  $u$ , issus d'une v.a X. Alors, pour  $x > u$ , nous avons :

$$\begin{aligned} p(X > x \mid x > u) &= \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - u}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \\ \frac{p(X > x)}{p(X > u)} &= \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - u}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \\ p(X > x) &= p(X > u) \cdot \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - u}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \\ p(X > x) &= \gamma_u \cdot \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - u}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \end{aligned}$$

Où  $\gamma_u = p(X > u)$  est un paramètre à estimer.

Le niveau  $x_p$  qui est excédé toutes les  $p$  observations de la v.a X satisfait donc l'équation

suivante :

$$\frac{1}{p} = \gamma_u \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_p - u}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}}$$

Nous trouvons donc que le niveau de retour  $x_p$  associé à la période de retour  $p$  est donné par la formule :

$$x_p = u + \frac{\sigma}{\xi} \left[ \left( p\gamma_u \right)^\xi - 1 \right],$$

L'estimateur naturel pour  $\gamma_u$  est le suivant :  $\tilde{\gamma}_u = \frac{k_u}{n}$

Où  $k_u$  représente le nombre d'excès de seuil  $u$  parmi les  $n$  observations de  $X$ .

Cet estimateur est une variable binomiale  $B(n, \frac{k_u}{n})$  et donc la variance est donnée par  $\text{var}(\gamma_u = \tilde{\gamma}_u(1 - \tilde{\gamma}_u)/n)$ .

## 1.3 Modèle GEV non stationnaire

### 1.3.1 Présentation

Le modèle GEV non stationnaire a été introduit dans le cas d'une tendance au niveau du paramètre de position par **SCARF (1992)**, qui a présenté la méthode du M.V pour l'estimation des paramètres du modèle GEV à quatre paramètres, qui ne sont pas des constantes mais dépendent du temps ou d'autre covariables.

Dans ce cas trois modèles sont considérés :

- $GEV_0$  : Le modèle stationnaire.
- $GEV_1$  : Le cas où le paramètre de position est une fonction linéaire de la covariable.

$$\mu(t) = \mu_0 + \mu_1 t$$

- $GEV_2$  : Le cas d'une dépendance quadratique.

$$\mu(t) = \mu + \mu_1 t + \mu_2 t^2$$

### 1.3.2 Estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance

Soit  $X = (X_1, \dots, X_n)$ , le vecteur des observations de la variable  $X$  et  $\theta$  le vecteur des paramètres à estimer. Dans notre cas :

$$\theta = (\mu, \sigma, \xi) \text{ pour le modèle } GEV_0.$$

$$\theta = (\mu_0, \mu_1, \sigma, \xi) \text{ pour le modèle } GEV_1.$$

$$\theta = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \sigma, \xi) \text{ pour le modèle } GEV_2.$$

La méthode du maximum de vraisemblance s'écrit d'une manière générale :

$$\begin{aligned} L_n(X \setminus \mu_t, \sigma_t, \xi_t) &= \prod_{t=1}^{n_1} \frac{1}{\sigma_t} \exp \left\{ - \left[ 1 - \xi_t \left( \frac{X_t - \mu_t}{\sigma_t} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi_t}} \right\} \\ &* \left[ 1 - \xi_t \left( \frac{X_t - \mu_t}{\sigma_t} \right) \right]^{-(1-\frac{1}{\xi_t})} \\ &* \prod_{t=n_1+1}^n \frac{1}{\sigma_t} \exp \left\{ - \left( \frac{X_t - \mu_t}{\sigma_t} \right) \right\} * \exp \left\{ - \exp \left[ - \left( \frac{X_t - \mu_t}{\sigma_t} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$n_1$  est le nombre d'observations telles que  $\xi_t \neq 0$  pour les modèles étudiés dans ce travail, la non stationnarité est liée au paramètre de position. Dans ce cas, et pour tous les modèles considérées,  $\sigma_t = \sigma$  et  $\xi_t = \xi$  sont constants. Lorsque  $\xi \neq 0$  et  $n_1 = n$ , la fonction log-vraisemblance est :

$$\begin{aligned} L_n(x, \mu_t, \sigma, \xi) &= -n \log(\sigma) - \sum_{t=1}^n \left[ 1 - \xi \left( \frac{x_t - \mu_t}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{\xi}} \\ &\sum_{t=1}^n \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \log \left[ 1 - \xi \left( \frac{x_t - \mu_t}{\sigma} \right) \right] \end{aligned}$$

Les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètre  $(\mu_0, \mu_1, \sigma, \xi)$  sont des solutions du système d'équation :

$$\sum_{t=1}^n \frac{1 - \xi - z_t^{\frac{1}{\xi}}}{z_t} = 0.$$

$$\sum_{t=1}^n t \frac{1 - \xi - z_t^{\frac{1}{\xi}}}{z_t} = 0$$

$$-n + \sum_{t=1}^n \left[ \frac{1 - \xi - z_t^{\frac{1}{\xi}}}{z_t} \left( \frac{X_t - \mu_t}{\sigma} \right) \right] = 0. \quad (1.5)$$

$$\sum_{t=1}^n \left\{ \ln(z_t) \left[ 1 - \xi - z_t^{\frac{1}{\xi}} \right] + \frac{1 - \xi - z_t^{\frac{1}{\xi}}}{z_t} \xi \left( \frac{x_t - \mu_t}{\sigma} \right) \right\} = 0.$$

$$\text{où } z_t = \left[ 1 - \frac{\xi}{\sigma} (x_t - \mu_t) \right].$$

La résolution de ce système peut se faire d'une manière numérique en utilisant la méthode de Newton-Raphson.

De la même façon, on obtient un système équivalent a (1.5) pour le modèle  $GEV_2$ , avec une cinquième équation correspondant au paramètre  $\mu_2$ .

# 2

## Inférence bayésienne sur les paramètres des lois des valeurs extrêmes

### Introduction

Le point le plus critiqué de l'analyse Bayésienne est le choix de la loi a priori qui représente la clé de voute de l'inférence Bayésienne, et sa détermination est donc l'étape la plus importante dans la mise en œuvre de cette inférence. Elle part d'hypothèse a priori, servant à définir la probabilité subjective, supposée être un concept personnalisé dépendant à la fois des connaissances disponibles a priori de l'expert (degré d'incertitude) ou d'un retour d'expérience déjà disponible, portés sur la valeur de la quantité inconnue  $\theta$ , et des informations objectives, (i.e. observations nouvelles recueillies) exprimées par l'information a priori, qui va confirmer, infirmer ou réactualiser cette connaissance a priori.

### 2.1 Principe de l'approche Bayésienne

le principe de l'analyse statistique bayésienne est de modéliser des paramètres inconnus de la distribution d'échantillonnage à travers une structure probabiliste. Elle vise à exploiter le plus efficacement possible l'information apportée par  $X$  sur le paramètre  $\theta$ , pour ensuite construire des procédures d'inférence sur ce paramètre.

### 2.1.1 Information a priori

On appelle information a priori sur le paramètre  $\theta$ , toute information disponible sur  $\theta$  en dehors de celle apportée par les observations. Cette information est entachée d'incertitude ( si ce n'était pas le cas, le paramètre  $\theta$  serait connu avec certitude et on n'aurait pas à l'estimer). Il est naturel de modéliser cette information à travers une loi de probabilité appelée loi a priori.

### 2.1.2 Loi a priori

On considère que l'incertitude sur le paramètre  $\theta$  d'un modèle peut être décrite par une distribution de probabilité  $\Pi(\theta)$  sur  $\theta$ .

L'appellation a priori exprime le fait qu'elle a été établie préalablement à l'observation des données.

### 2.1.3 Distribution a posteriori

La distribution a posteriori de  $\theta$ , notée  $\Pi(\theta \setminus x)$  représente la distribution conditionnelle de  $\theta$  sachant les observations  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Elle donne l'information dont on dispose sur  $\theta$ , après observation, et elle représente un compromis entre l'information a priori (donnée par la fonction  $\Pi(\theta)$ ) et l'information tirée de l'échantillon (donnée par la fonction  $L(\theta, x) = f(x \setminus \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i \setminus \theta)$ ).

### 2.1.4 Théorème de Bayes

Le théorème de bayes permet de déterminer les valeurs prédictives d'un test. la formule générale du théorème de bayes peut être retrouvée à partir de la loi des probabilité conditionnelles :

$$p(A \setminus B) = Kp(A)p(B \setminus A)$$

Bayes utilise la version continue de ce théorème qui encore que, pour une loi (dite a priori)  $\Pi$  sur la paramètre  $\theta$  est une observation  $x$  de densité  $f(x \setminus \theta)$  .

La distribution de  $\theta$  conditionnellement à  $x$  a pour densité.

$$\Pi(\theta \setminus x) = \frac{f(x \setminus \theta)\Pi(\theta)}{\int f(x \setminus \theta)\pi(\theta)d\theta}$$

La loi de  $\theta$  conditionnellement à  $x$  est proportionnelle à la loi de  $x$  conditionnellement à  $\theta$  multiple par la loi marginal de  $\theta$ .

## 2.2 Difficulté du choix d'une loi a priori

- Comment choisir la loi a priori ?

La loi a priori est la clé de voute de l'inférence Bayésienne et sa détermination et donc l'étape la plus importante dans la mise en oeuvre de cette inférence.

Les différents choix possible peuvent être motivés par différents points de vue :

- ✓ Choix basé sur des expérience du passé ou sur une intuition du statisticien.
- ✓ Choix basé sur la faisabilité de calcule.

### 2.2.1 Lois a priori non informatives

La loi a priori non informatives représente une ignorance sur le problème considéré, mais ne signifie pas que l'on sache absolument rien sur la distribution statistique du paramètre  $\theta$ .

En effet, on connaît au moins son domaine de variation. C'est lois doivent être particulièrement construites à partir de la distribution de l'échantillonnage puisque c'est la seule information disponible, à cet égard, les lois a priori non informatives peuvent être considérées comme des lois de références, aux quelles chacun pourrait voir recours quand toute information a priori sur  $\theta$  est absente.

Nous décrivons, dans ce qui suit, quelques unes des techniques les plus populaires dans la construction des lois a priori non informatives.

#### Loi a priori de laplace

Historiquement, la place fut le premier à utiliser les techniques non informatives puisque, bien que ne disposant pas d'information sur le nombre de boules blanches dans l'urne ou sur la proposition de naissance mâles.

Le raisonnement de **laplace** se fondait sur l'équiprobabilité des événements élémentaires, et donc de mener la loi uniforme à priori du paramètre.

**Exemple 2.1.** (Bayes, 1763)

une boule de billard  $W$  roule sur une ligne de longueur un, avec une probabilité uniforme de s'arrêter n'importe où. Supposons qu'elle s'arrête on  $p$ . Une deuxième boule  $O$  roule alors  $n$  fois dans les mêmes conditions, et on note  $X$  le nombre de fois que la boule  $O$  s'arrête à gauche de  $W$  connaissant  $X$ . Quelle inférence pouvons nous mener sur  $P$  ?.

Dans la terminologie moderne, le problème est de déterminer la distance a posteriori de  $p$



conditionnellement à X, quand la distance a priori de p est uniforme sur [0, 1] et  $X \sim B(n, p)$ , v.a binomiale, comme

$$p(X = x \setminus p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$p(a < p < b \text{ et } X = x) = \int_a^b \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} dp$$

et

$$p(X = x) = \int_0^1 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} dp,$$

Nous trouvons que :

$$p(a < p < b \setminus X = x) = \frac{\int_a^b \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} dp}{\int_0^1 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} dp}$$

$$= \frac{\int_a^b p^x (1-p)^{n-x} dp}{B(x+1, n-x+1)}$$

Donc la distance de p conditionnellement à  $X = x$  est une distribution bêta,  $\beta(x+1, n-x+1)$ .

### Loi a priori de Jeffrey

**Jeffreys** (1961) propose une méthode permet de fabriquer des lois a priori non informative, en utilisant l'information de **Fisher**  $I(\theta)$  qui représente une mesure de la quantité d'information sur  $\theta$  obtenue par les observations.

#### Définition 2.1.

Soit  $\theta$  un paramètre réel. On appelle une loi a priori non informative de **Jeffreys** la loi de densité :

$$\pi_j(\theta) \propto [I(\theta)]^{\frac{1}{2}} 1_{\theta}(\theta)$$

où  $I(\theta)$ , est l'information de **Fisher** apportée par  $X = (x_1, \dots, x_n)$  sur  $\theta$ , définie par :

$$I(\theta) = -E \left[ \left( \frac{\partial^2 \log f(x/\theta)}{\partial \theta^2} \right) \right]$$

#### Exemple 2.2.

Soit  $f(x/\lambda) = \lambda \exp\{-\lambda x\} 1_{[0, +\infty[}(x)$ .

On calcule l'information de **Fisher** :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log f(x/\lambda) = \frac{1}{\lambda} - x, \quad \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \log f(x/\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}$$

d'où

$$\pi(\lambda) \propto \frac{1}{\lambda}$$

**Exemple 2.3.**

Si  $x \sim B(n, p)$ ,  $f(x \setminus p) = C_x^n p^x (1-p)^{n-x}$

$$\frac{\partial^2 \log f(x \setminus p)}{\partial p^2} = \frac{x}{p^2} + \frac{n-x}{(1-p)^2},$$

$$I(p) = n \left[ \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} \right] = \frac{n}{p(1-p)}$$

d'où  $\pi_j(p) = [p(1-p)]^{-\frac{1}{2}}$  et alors propre, car il s'agit de la distribution Beta  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Dans le cas multidimensionnel  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}^k$ , la loi a priori non informative de **Jeffrey** s'écrit :

$$\pi_j(\theta) \propto [\det(I(\theta))]^{\frac{1}{2}}.$$

où  $I(\theta)$  : la matrice d'information de Fisher, donnée par les éléments

$$\pi_{ij}(\theta) = -E \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log f(x/\theta) \right] \quad (i, j = 1, \dots, k)$$

Remarquons que dans le cadre de la théorie du maximum de vraisemblance, le déterminant de cette quantité représente ce qu'on appelle la variance généralisée.

**Exemple 2.4.**

Dans le cas de la loi de Gauss de paramètres  $(\theta, \sigma^2)$ ,

$$f(x, \sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

On a :  $\log f(x/\theta, \sigma^2) \propto -\frac{1}{2}\log\sigma^2 - \frac{(x - \theta)^2}{2\sigma^2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x \setminus \theta, \sigma^2) &= \frac{(x - \theta)}{\sigma^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x \setminus \theta, \sigma^2) &= -\frac{1}{\sigma^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\sigma}\log f(x \setminus \theta, \sigma^2) &= -\frac{(x - \theta)}{2(\sigma^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\log f(x \setminus \theta, \sigma^2) &= -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(x - \theta)^2}{2(\sigma^2)^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2}\log f(x \setminus \theta, \sigma^2) &= \frac{1}{2(\sigma^2)^2} - \frac{(x - \theta)^2}{(\sigma^2)^3} \end{aligned}$$

La matrice d'information de Fisher s'obtient en calculant, l'espérance mathématique de dérivées secondes.

$E(x - \theta) = 0$  et  $E[(x - \theta)^2] = \sigma^2$

On a donc :

$$\begin{aligned} I(\theta, \sigma^2) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\sigma^2)^2} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \det[\theta, \sigma^2] &= \frac{1}{2\sigma^6} \end{aligned}$$

d'où la loi a priori de Jeffreys est :

$$\pi_j(\theta) \propto \frac{1}{\sigma^3}, \sigma > 0, \theta \in \mathbb{R}$$

**Lois de référence**

La théorie a priori de référence est introduite par **Bernardo** (1979), est un mode générale de spécification d'un loi a priori contenant aussi peu d'information que possible. Cette règle d'assignation repose sur la notion de quantité d'information d'un modèle bayésien Quand :

$$x \sim f(x/\theta) \text{ et } \theta = (\theta_1, \theta_2)$$

- ✓  $\theta_1$  est le paramètre d'intérêt,
- ✓  $\theta_2$  est le paramètre de nuisance,

la loi de référence est obtenue, en définition d'abord  $\pi(\theta_2/\theta_1)$  comme la loi de Jeffreys associée à  $f(x/\theta)$  pour  $\theta_1$  fixé, puis en calculant la loi marginale.

$$\bar{f}(x/\theta_1) = \int f(x/\theta_1, \theta_2) \pi(\theta_2, \theta_1) d\theta_2$$

et la loi de Jeffreys  $\pi(\theta_1)$  associée à  $\bar{f}(x/\theta_1)$ .

Le principe sous-jacent à la loi de référence est donc d'éliminer le paramètre de nuisance en

utilisant la loi de Jeffreys correspondant au cas où le paramètre d'intérêt reste fixé.

**Exemple 2.5.** ( Berger et Bernardo, 1992)

Soit un modèle d'analyse de la variance :

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \xi_{ij}, i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, n, \text{ avec}$$

$$\alpha_i \sim N(0, \tau^2), \xi_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

Pour différents ordres des paramètre,  $\mu, \tau^2, \sigma^2$ , nous obtenons les lois de référence suivantes :

$$\pi_1(\mu, \sigma^2, \tau^2) \propto \sigma^{-2}(n\tau^2 + \sigma^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\pi_2(\mu, \sigma^2, \tau^2) \propto \tau^{-c_n} \sigma^2 [(n-1) + (1 + n\tau^2/\sigma^2)^{-2}]^{\frac{1}{2}}$$

$$\pi_3(\mu, (\sigma^2, \tau^2)) \propto \sigma^{-2}(n\tau^2 + \sigma^2)^{-1}$$

$$\pi_4((\mu, \sigma^2), \tau^2) \propto \sigma^{-\frac{5}{2}}(n\tau^2 + \sigma^2)^{-1}$$

$$\text{avec } :c_n = \{1 - \sqrt{n-1}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{-3}\}.$$

## 2.2.2 Lois a priori informatives

Une loi a priori informative peut se construire le plus objectivement possible sur la base des données historiques ou bien en introduisant une part de subjectivité. C'est-à-dire, proposer un modèle statistique cohérent combinant l'avis d'un ou plusieurs expertes et construire une loi a priori.

### Loi a priori conjuguée

Une des difficultés de l'approche bayésienne est le calcul de la loi a posteriori. Ce calcul est facilité lorsque loi a priori est loi a posteriori ont la même forme.

Dans ce cas, on parle de la loi a priori conjuguée.

### Définition 2.2.

Une famille  $\mathfrak{F}$  de distributions de probabilité sur  $\theta$  est dite conjuguée ( ou fermée par échantillonnage ) par une fonction de vraisemblance  $f(x \setminus \theta)$  si, pour tout  $\pi \in \mathfrak{F}$ , la distribution a posteriori  $\pi(\cdot \setminus x)$  appartient également à  $\mathfrak{F}$ .

### Remarque 2.1.

Dans le cas de la famille conjuguée, le praticien induit directement la forme de son estimateur dès qu'il a choisi sa loi a priori.

$f(x \setminus \theta)$	$\pi(\theta)$	$\pi(\theta \setminus x)$
$N(\theta, \sigma^2)$	$N(N, \tau^2)$	$N(x/\sigma^2 + \mu/\tau^2, [1/\sigma^2 + 1/\tau^2]^{-1})$
$G(n, \theta)$	$G(\alpha, \beta)$	$G(\alpha + n, \beta + x)$
$B(n, \theta)$	$\beta(\alpha, \beta)$	$\beta(\alpha + n, \beta + x)$
$P(\theta)$	$G(\alpha, \beta)$	$G(\alpha + n, \beta + 1)$
$N(\mu, \frac{1}{\theta})$	$G(\alpha, \beta)$	$G(\alpha + 0.5, \beta + (\mu - x)^2/2)$
$N_{eg}(m, \theta)$	$\beta(\alpha, \beta)$	$\beta(\alpha + m, \beta + x)$
$M(\theta_1, \dots, \theta_k)$	$D(a_1, \dots, a_k)$	$D(a_1 + x_1, \dots, a_k + x_k)$

TABLE 2.1 – Exemples de quelques lois conjuguée

Une loi conjuguée peut être déterminée en considérant la forme de la vraisemblance  $f(x \setminus \theta)$  et en prenant une loi a priori de la même forme que cette dernière vue comme une fonction du paramètre.

Les lois a priori conjuguées obtenues par ce procédé sont dites rationnelles.

**Exemple 2.6.**

Considérons une loi pareto de paramètres  $(\alpha, a)$

$$f(x \setminus \theta, a) = \frac{\theta a^\theta}{x^{\theta+1}} 1_{[a, +\infty[}$$

Supposons  $a$  connu,  $f(x \setminus \theta) \propto \theta e^{\theta \log(a/x)}$ , on pourrait donc prendre une loi a priori de type gamma.

Dans le cas d'une loi binomiale négative de paramètre  $(n, p)$ ,

$$p(X = x \setminus p) = C_{n+x-1}^x p^x (1-p)^n, \quad 0 < p < 1, x \in \mathbb{N}$$

on voit clairement qu'une loi naturelle conjuguée sera une bêta puisque :

$$p(X = x \setminus p) \propto p^x (1-p)^n$$

**Lois conjuguée des familles exponentielle**

**Définition 2.3.**

On appelle famille exponentielle à  $s$ -paramètres, densité a la forme suivante :

$$f(x \setminus \theta) = \exp \left[ \sum_{i=1}^s \eta_i(\theta) \tau_i(x) - B(\theta) \right] h(x) \text{ où } \eta_i(\cdot) \text{ et } B(\cdot) \text{ sont des fonctions du paramètre } \theta \text{ et } \tau_i(\cdot) \text{ sont des statistiques.}$$

**Exemple 2.7.**

- Loi exceptionnelle :

$$\begin{aligned} f(x \setminus \theta) &= \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} 1_{[0, +\infty[}(x) \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{\theta}x - \log\theta\right\} 1_{[0, +\infty[}(x) \end{aligned}$$

Ici,  $s$  vaut 1,  $\eta_1(\theta) = 1/\theta$ ,  $\tau_1(x) = x$ ,  $B(\theta) = \log\theta$  et  $h(x) = 1_{[0, +\infty[}(x)$

- Loi binomiale :

$$\begin{aligned} p(X = x \setminus \theta) &= C_n^x \theta^x (1 - \theta)^{n-x} \\ &= C_n^x \exp\{x \log\theta + (n - x) \log(1 - \theta)\} \\ &= C_n^x \exp\{x \log[\theta/(1 - \theta)] + n \log(1 - \theta)\} \end{aligned}$$

On a  $s = 1$ ,  $\eta_1(\theta) = \log(\theta/(1 - \theta))$ ,  $\tau_1(x) = x$ ,  $B(\theta) = n \log(1 - \theta)$  et  $h(x) = C_n^x$ .

**La forme canonique :**

**Définition 2.4.**

Un modèle exponentiel peut être écrit sous la forme, dite canonique en reparamétrisant :

$$\eta_i(\theta) = \theta_i$$

Dans ce cas :

$$f(x/\theta) = \exp\left[\sum_{u=1}^s \theta_u \tau_u(x) - A(\theta)\right] h(x) \text{ où } A(\cdot) \text{ est une fonction du paramètre } \theta.$$

On a le résultat suivant qui donne la forme des lois naturelles conjuguées dans le cas de modèle exponentiel.

**Proposition 2.1.**

*Soit  $f(x \setminus \theta)$  appartenant à une famille exponentielle. Alors une famille de loi a priori conjugué pour  $f(x \setminus \theta)$  est donnée par :*

$$\pi(\theta \setminus \mu, \lambda) = K(\mu, \lambda) \exp(\theta\mu - \lambda A(\theta))$$

où  $K(\mu, \lambda)$  est une constante de normalisation et la loi a posteriori est de la forme :

$$\pi(\theta \setminus x) \propto \exp((\mu + x)\theta - (\lambda + 1)A(\theta))$$

**Exemple 2.8.**

Considérons le modèle :

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{(\theta - \beta)x}}{1 - e^\theta - \beta}, x \in \{0, 1\}$$

Il s'agit d'une loi logistique. Elle appartient bien à la famille exponentielle.

On a :  $p(X = x) = \exp\left[(\theta - \beta)x - \log(1 + e^{\theta - \beta})\right]$

$h(x) = 1, \theta = [\theta \ \beta]', \tau(x) = [x \ -x]'$  et  $A(\theta, \beta) = \log(1 + e^{\theta - \beta})$ .

En appliquant le théorème, on obtient une loi a priori de la forme :

$$\pi(\theta, \beta / \mu_1, \mu_2, \lambda) \propto \exp\left\{[\theta \ \beta][\mu_1 \ \mu_2]' - \lambda A(\theta, \beta)\right\} = \frac{e^{\mu_1 \theta + \mu_2 \beta}}{(1 + e^{\theta - \beta})^\lambda}$$

On remarquera que cette loi est impropre. La loi a posteriori aura la forme suivante :

$$\pi(\theta, \beta / x) = \frac{e^{(\mu_1 + x)\theta + (\mu_2 + x)\beta}}{(1 + e^{\theta - \beta})^\lambda + 1}$$

## 2.3 Chaines de MARKOV

Dans cette partie, on aborde le cas des chaines de Markov définies dans un espace des états  $E$ . Certains chaines de Markov sont à espace d'états continu, mais nous n'aborderons pas leur étude ici. Nous nous intéressons uniquement aux chaines à espace d'états fini ou dénombrable.

Dans toute la suite  $E$  sera donc un ensemble fini ou dénombrable ( $\mathbb{N}$  ou un sous-ensemble), que l'on munira de la tribu de toutes ses parties.

### 2.3.1 Chaines de Markov discrètes

Une Chaine de Markov à temps discrète est un processus stochastique  $\{x_n, n = 0, 1, \dots\}$  à temps discret, défini sur un espace d'états  $E$  dénombrable et vérifiant la propriété de Markov.

$$p[x_n = i \mid x_0, \dots, x_{n-1}] = p[x_n = i \mid x_{n-1}]$$

pour tout  $i \in E$  et quelque soit  $n \geq 1$ .

Une chaine de Markov à temps discret est **homogène**(dans le temps), si pour tout  $(i, j) \in E^2$  est tout instant  $n$

$$p[x_n = j \mid x_{n-1} = i] = p[x_{n+k} = j \mid x_{n+k-1} = i]$$

quelque soit  $k \geq 0$ .

### 2.3.2 Matrice de transition

#### Définition 2.5.

On appelle probabilité de transition pour aller de l'état  $i$  à l'état  $j$  la probabilité

$$p_{i,j} = p(X_{k+1} = j \mid X_k = i) = p(x_1 = j \mid X_0 = i)$$

### 2.3.3 Propriétés fondamentales

#### L'irréductibilité :

##### Définition 2.6.

On dit que l'état  $j$  est accessible à partir de l'état  $i$ , s'il existe un entier  $n \geq 0$  tel que  $p_{i,j}^{(n)} > 0$ .

On note  $i \rightsquigarrow j$ .

Sur le graphe, si  $i \neq j$ ,  $i \rightsquigarrow j$  s'il existe un chemin (orienté) du sommet  $i$  vers le sommet  $j$ .

##### Définition 2.7.

On dit que les états  $i$  et  $j$  communiquent et on écrit  $i \longleftrightarrow j$  si on a à la fois  $i \rightsquigarrow j$  et  $j \rightsquigarrow i$ .

##### Définition 2.8.

S'il n'y a qu'une seule classe pour la relation de communication, autrement dit, si tous les états communiquent entre eux, la chaîne est dite **irréductible**.

#### La périodicité :

Il s'agit d'étudier dans quelles conditions le temps qui sépare deux retours au même état  $j$  est ou n'est pas multiple d'un temps minimum. Pour ce faire, on introduit la notion de période.

##### Définition 2.9.

Soit  $i \in E$ , On appelle période de  $i$ , et on note  $d(i)$ , le PGCD de tous les entiers  $n \geq 1$  pour lesquels  $p_{i,i}^{(n)} > 0$  (par convention,  $\text{PGCD}(\emptyset) = +\infty$ )  $d(i) = \text{PGCD}(n \geq 1, p_{i,i}^{(n)} > 0)$ .

Si  $d(i) = d \geq 2$ , on dit que  $j$  est périodique de période  $d$ .

Si  $d(i) = 1$ , on dit que  $i$  est apériodique.

Une chaîne apériodique est une chaîne de dont tous les états sont apériodiques.

En particulier, si  $p_{i,i} > 0$  (le graphe possède alors une boucle),  $i$  est apériodique.



**La récurrence :**

Pour tout état  $j$ , désignons par  $\Gamma_j$  le temps d'atteinte de l'état  $j$  à partir de l'instant 1 ; autrement dit  $\Gamma_j = \inf\{n \geq 1, x_n = j\}$ .

Ce temps d'atteinte est un temps d'arrêt de la chaîne.

On notera également  $N_j = \sum_{n \geq 0} 1_{x_n = j}$  le nombre de passages en  $j$  (en comptant le point de départ). On a en particulier  $\mathbb{P}^j(\Gamma_j < \infty) = \mathbb{P}^j(N_j > 1)$ .

**Définition 2.10.**

On dit que l'état  $j$  est récurrent si, partant de l'état  $j$ , la probabilité que la chaîne de Markov retourne à l'état  $j$  en un temps fini est égale à 1, i.e. Si  $\mathbb{P}^j(\Gamma_j < +\infty) = \mathbb{P}(\Gamma_j < +\infty \mid x_0 = j) = 1$ . Sinon, lorsque  $\mathbb{P}(\Gamma_j < +\infty \mid x_0 = j) < 1$ , l'état  $j$  est transitoire.

**Corollaire :**

- ✓  $j$  est récurrent ssi  $\sum_{n \geq 0} P_{j,j}^{(n)}$  diverge.
- ✓  $j$  est transitoire ssi  $\sum_{n \geq 0} P_{j,j}^{(n)}$  converge.

De plus :

si  $j$  est transitoire,  $P_{i,j}^{(n)} \rightarrow 0, \forall i$ .

**Exemple 2.9.**

On considère la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$ , avec  $P = \frac{1}{2}$ . On va vérifier que 0 est récurrent. En effet, on voit facilement que si  $n$  est impaire,  $P_{0,0}^{(n)} = 0$ , et si  $n = 2m$  est pair,  $P_{0,0}^{(2m)} = \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}}$ . Par la formule de Stirling, on obtient  $P_{0,0}^{2m} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$ . On en déduit que la série diverge, et donc que 0 est récurrent. Par contre si  $p > 1/2$ , la loi forte des grands nombres implique que  $x_n$  tend p.s vers  $+\infty$  : par conséquent p.s après un temps fini, la suite partant de 0 ne passe plus par 0 : 0 est donc transitoire.

On peut également faire explicitement le calcul de  $P_{0,0}(n)$  dans le cas de la marche aléatoire non biaisée en dimension 2 : on trouve que 0 est encore récurrent en dimension supérieure ou égale à 3, 0 devient transitoire.

L'état est absorbant si et seulement si  $p_{ii} = 1$ .

**Stationnarité :****Distribution des états d'une chaîne**

La distribution des états d'une CM après  $n$  transitions est notée  $\Pi^{(n)}$ . Cette distribution est un vecteur de probabilités contenant la loi de la variable aléatoire  $X_n$ .

$$\Pi^{(n)} = P[X_n = i], \forall i \in E$$

**Remarque 2.2.**

Si l'état initial est connu avec certitude et est égale à  $i$ , on a simplement

$$\Pi_i^{(0)} = 1 \text{ et } \Pi_j^{(0)} = 0 \text{ pour tout } j \neq i.$$

**Théorème 2.1.**

Soit  $P$  la matrice de transition d'une Chaîne de Markov et  $\Pi^{(0)}$  la distribution de son état initial. pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$\Pi^{(n)} = \Pi^{(n-1)}p \text{ et } \Pi^{(n)} = \Pi^{(0)}p^{(n)}.$$

**Proposition 2.2.**

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi^{(n)}$  existe, alors la limite est une distribution invariante.

Une Chaîne de Markov est ergodique si et seulement si elle est irréductible et apériodique .

**Réversibilité :**

Soit une Chaîne de Markov ergodique ayant une matrice de transition  $P$  et une densité de probabilité à l'état stationnaire  $\Pi$ .

$$\begin{aligned} P(x_{n-1} = j \mid x_n = i, x_{n+1} = i_1, \dots, x_{n+k} = i_k) &= \frac{\pi_j p_{ji} p_{i i_1}, \dots, p_{i_{k-1} i_k}}{\pi_j p_{i i_1}, \dots, p_{i_{k-1} i_k}} \\ &= \frac{\pi_j \pi_{ji}}{\pi_i} \\ &= p(X_{n-1} = j \mid X_n = i) = q_{ij} \end{aligned}$$

**Observation**

- ✓ Le processus à l'envers est également Markovien ;
- ✓ Les probabilités d'état stationnaires sont identiques ;
- ✓ On déduit que  $\forall i, j \in E, \pi_i q_{ij} = \pi_j p_{ji}$ .

## 2.4 Méthodes de Monte Carlo par Chaîne de Markov

Cependant, les techniques traditionnelles d'estimation ont basé sur la vraisemblance ne donnent pas toute l'information intéressante utile pour traiter les phénomènes extrêmes, pour cela qu'on va entamer par la suite une estimation des paramètres par une approche bayésienne, l'algorithme M-H (MCMC) nous a offert une méthodologie alternative d'estimation plus efficace que les méthodes classiques d'estimation.

### 2.4.1 Metropolis-Hastings Généralisée

De toutes les familles de méthodes MCMC, la plus générale est sans doute l'algorithme Metropolis-Hastings, dans le sens qu'il impose le moins de conditions sur la densité cible. Cet algorithme fut d'abord publié sous une première forme par Metropolis et al. (1953), puis généralisé par Hastings (1970). À partir de la densité cible  $\pi(x)$  (possiblement en grandes dimensions), on choisit une densité instrumentale conditionnelle  $q(x, y) = q(y \setminus x)$  :

- À partir de laquelle il est assez facile de simuler.
- Il doit approcher la loi intrêt  $\pi$ .
- Le support de  $q$  doit couvrir le support de  $\pi$ .

Commençant avec une valeur (possiblement vectorielle)  $x_0$ , l'algorithme passe au travers des étapes suivantes à chaque itération. Sachant que la chaîne est à l'état  $x_t$  à la  $t^{\text{ème}}$  itération,

1. Générer  $y_{t+1} \sim q(x_t, \cdot)$ .
2. Calculer la probabilité d'acceptation

$$\alpha(x_t, y_{t+1}) = \min \left[ \frac{\pi(y_{t+1})q(y_{t+1}, x_t)}{\pi(x_t)q(x_t, y_{t+1})}, 1 \right]$$

3. Simuler  $u_t \sim \bigcup_{[0,1]}$ . La valeur obtenue est notée  $u_t$ .

Si  $u_t < \alpha(x_t \setminus y_{t+1})$  alors  $x_{t+1} = y_{t+1}$  sinon  $x_{t+1} = x_t$ .

### 2.4.2 Metropolis-Hastings - Marche Aléatoire

La loi de proposition  $q$  est telle que

$$y_t = \theta^{(t)} + \varepsilon_t$$

Où  $\varepsilon_t$  indépendant de  $\theta^{(t)}$ , i.e.  $q(y \setminus \theta) = q(y - \theta)$ . Si  $q$  est symétrique, on obtient l'algorithme suivant :

Étant donné  $\theta^{(t)}$ ,

1. Générer  $y_t \sim q(y - \theta^{(t)})$ .
2. Acceptation-Rejet

$$\theta^{(t+1)} = \begin{cases} y_t \text{ avec prob. } \min \left[ \frac{\pi(y_t)}{\pi(\theta^{(t)})}, 1 \right], \\ \theta^{(t)} \text{ sinon} \end{cases}$$

### 2.4.3 Inférence bayésien sur les paramètres d'un modèle GEV

**Exemple 2.10.**

On a le modèle GEV : (voir l'équation (1.1) chapitre 1)

$$G(x \setminus \mu, \rho_0, \beta_0) = \exp \left[ - (1 - \beta_0(z - \mu))^{\frac{\rho_0}{\beta_0}} \right] \quad (2.1)$$

est caractérisé par le paramètre  $\theta = (\beta_0, \mu, \rho_0)$  est sa densité de probabilité s'écrit

$$[x/\theta] = \rho_0 (1 - \beta_0(z - \mu))^{\frac{\rho_0}{\beta_0} - 1} G(x \setminus \theta)$$

La densité de maxima de vraisemblance d'un k échantillon :

$$[x_1, \dots, x_k \setminus \theta] = \rho_0^k \prod_{i=1}^k [1 - \beta_0(x_i - \mu)]^{\frac{\rho_0}{\beta_0} - 1} G(x \setminus \theta)$$

Pour la loi a priori, On postulera l'indépendance des composantes du vecteur :

$\theta (\beta_0 \perp \mu \perp \rho_0)$  telle que :

$$\beta_0 \sim U_{[a,b]}$$

$$\mu \sim U_{[a,b]}$$

$$\rho_0 \sim \text{Gamma}(a, b)$$

dont les paramètres tendent vers zéro.

$$[\rho_0 \setminus a, b] \propto \rho_0^{a-1} \exp(-b\rho_0) \mapsto \frac{1}{\rho_0}$$

Donc : la loi a priori s'écrit de la forme suivante :

$$[\theta] = [\beta_0][\mu][\rho_0] \propto \frac{1}{\rho_0}$$

La loi a posteriori non normalisé est donnée par :

$$[\theta \setminus x_1, \dots, x_k] \propto \rho_0^{k-1} \prod_{i=1}^k [1 - \beta_0(x_i - \mu)]^{\frac{\rho_0}{\beta_0} - 1} G(x_i \setminus \theta)$$

**Exemple 2.11.**

On suppose la loi a priori suivante :

$$\pi(\mu) \sim N(0, 10000)$$

$$\pi(\sigma) \sim N(0, 10000)$$

$$\pi(\xi) \sim N(0, 100)$$

Nous utilisons l'algorithme MH, après avoir défini les valeur initiales pour  $\theta$  [ $\theta_0 = (\mu_0, \sigma_0, \xi_0)$ ]. On utilise la règle d'acceptation rejets, et on utilise une procédure marche aléatoires pour générer des valeurs candidates ( $y_t$ ).

c-à-d :

$$\begin{array}{ll} \mu' = \mu_i + \varepsilon_\mu & \varepsilon_\mu \sim N(0, \delta_\mu) \\ \sigma' = \sigma_i + \varepsilon_\sigma & \text{tell que } \varepsilon_\sigma \sim N(0, \delta_\sigma) \\ \xi' = \xi_i + \varepsilon_\xi & \varepsilon_\xi \sim N(0, \delta_\xi) \end{array}$$

### 2.4.4 Inférence bayésien sur les paramètres d'un modèle GPD

**Exemple 2.12.**

Supposons deux paramètres indépendants  $\alpha$  et  $\lambda$  suivent la distribution a priori gamma .  
tell que :

la densité a priori de  $\alpha$  et  $\lambda$  peut être écrit comme :

$$g_1(\alpha) \propto \alpha^{a_1-1} \exp(-b_1\alpha), \quad a_1 > 0, b_1 > 0, \alpha > 0$$

$$g_2(\lambda) \propto \lambda^{a_2-1} \exp(-b_2\lambda), \quad \lambda > 0, a_2 > 0, b_2 > 0$$

donc ; la densité a priori conjointe de  $\alpha$  et  $\lambda$  est :

$$g(\alpha, \lambda) \propto \alpha^{a_1-1} \lambda^{a_2-1} \exp - (b_1\alpha + b_2\lambda)$$

On a la fonction de vraisemblance :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_m \setminus \alpha, \lambda) = K \alpha^m \lambda^m \prod_{i=1}^m (1 + \lambda x_i)^{-[\alpha+1]}$$

Alors ; la densité a posteriori conjointe de  $\alpha$  et  $\lambda$  est donnée par :

$$g(\alpha, \lambda \setminus x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{L((x_1, x_2, \dots, x_m \setminus \alpha, \lambda)g(\alpha, \lambda)}{\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} L((x_1, x_2, \dots, x_m \setminus \alpha, \lambda)g(\alpha, \lambda)}$$

$$\propto \alpha^{a_1+m-1} \lambda^{a_2+m-1} \exp(-(b_1\alpha + b_2\lambda)) \prod_{i=1}^m (1 + \lambda x_i)^{-\alpha+1}$$

**Exemple 2.13.**

**1/ pour  $k < 0$  , la GPD est donnée par :**

$$F(x \setminus k, \tau) = 1 - (1 + \tau k x)^{\frac{1}{k}}, x > 0$$

où  $k = -\xi$ ,  $\tau = \frac{1}{\sigma}$  et  $\sigma > 0$

On suppose l'indépendance des paramètres  $k$  et  $\tau$  et on choisit un a priori pour les deux paramètres.

$$\xi = \text{pareto}I(\alpha, c), \alpha > 0, c > 0,$$

$$\sigma = \text{Gamma}(a_1, b_1), a_1 > 0, b_1 > 0$$

Où la distribution de **pareto I** utilisé pour la densité a priori suivante

$$p(\xi/\alpha, c) = \alpha c^\alpha \xi^{-(\alpha+1)}, \xi > c$$

On a la fonction de vraisemblance :

$$L(\xi, \sigma, x) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n \exp\left[-\left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{\xi}{\sigma} x_i\right)\right]$$

Donc la densité a posteriori est :

$$\begin{aligned} p(\xi/\alpha, c) &= \frac{L(x/\xi, \sigma)p(\xi)p(\sigma)}{\int \int L(x/\xi, \sigma)p(\xi)p(\sigma)} d\xi d\sigma \\ &\propto L(x/\xi, \sigma)p(\xi)p(\sigma) \end{aligned}$$

donc :

$$p(\xi, \sigma/x) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{n+k-1} \xi^{-(\alpha+1)} \exp\left[-\left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{\xi}{\sigma} x_i\right) - b_1 \frac{1}{\sigma}\right], I(\sigma > 0)I(\xi > \sigma)$$

**2/ pour  $k > 0$  , la GPD est donnée par :**

$$F(x/k, \sigma) = 1 - (1 - x/\delta)^{\frac{1}{k}}, 0 < x < \sigma$$

Où  $\delta = \frac{\sigma}{k}$  pour  $\sigma > 0$ .

On choisit un a priori pour les paramètres  $k$  et  $\sigma$

$$k \sim \Gamma(a_2, b_2), a_2 > 0, b_2 > 0.$$

$$\sigma \sim \Gamma(a_3, b_3), a_3 > 0, b_3 > 0.$$

Alors, la densité a posteriori est donnée par :

$$p(k, \delta/x) \propto k^{-n+a_3-1} \exp\left[-b_2 k - b_3 \delta \sum_{i=1}^n \ln\left(1 - \frac{\xi}{\delta}\right)\right]$$

### 2.4.5 Inférence bayésien d'un modèle GEV non stationnaire

#### Exemple 2.14.

Le théorème de bayes est peut être écrire dans le cas d'une GEV non stationnaire comme suit :

$$p(\theta \setminus y, x) \propto p(y \setminus \theta, x)$$

Tel que :

$\theta = (\mu_0, \mu_1, \sigma, \xi) = (\mu(t), \sigma, \xi)$  : vecteur des paramètres à estimer et  $\mu(t) = \mu_0 + \mu_1 t$

$x$  : la covariable (dans notre cas est le temps  $t$ ).

$p(y \setminus \theta, x) = \prod_{i=1}^N p(y_i \setminus \theta, x_i) = \prod_{i=1}^N p(y_i \setminus \mu(t), \sigma, \xi)$  : représente la vraisemblance

$p(\theta \setminus x)$  : représente la loi à priori qui est une loi normale multivariée indépendantes ( $P(\mu)$  II

$p(\sigma)p(\xi)$ )

$$\mu \sim N(m_\mu, \delta_\mu)$$

$$\sigma \sim N(m_\sigma, \delta_\sigma)$$

$$\xi \sim N(m_\xi, \delta_\xi)$$

Niveau de retour

$$x_p = \frac{\sigma}{\xi} \left( \left( -\frac{1}{\ln p} \right) - 1 \right) + \mu(t), \quad \xi \neq 0$$

# 3

## Modélisation de la température moyenne maximale à la wilaya de JIJEL

### 3.1 Description des données

Nous possédons des données des températures mensuelles provenant de la station d'ACH-WAT de Jijel sur lesquelles nous souhaitons ajuster un modèle adéquat. Les données que nous possédons révèlent toutes les mesures des températures moyennes faites chaque mois durant la période entre 1988 et 2018.

### 3.2 Modélisation via la distribution GEV

Pour commencer, nous allons tenter d'ajuster un modèle GEV aux données. Pour cela, il faut donc grouper les données par blocs annuels, et y extraire chaque maximum, puis ajuster le modèle GEV aux maxima des blocs (les maximums annuels).

#### 3.2.1 Analyse descriptive de la série

On commence par l'analyse descriptive des données :

n	Min	1st Qu	Median	Mean	3rd Qu	Max
31	24.9	25.70	26.10	26.35	26.75	28.60

TABLE 3.1 – Statistiques descriptives



Nous possédons 31 maxima annuels de la période allant de 1988 jusqu'à 2018, nous commençons par le graphe de la série des maxima :

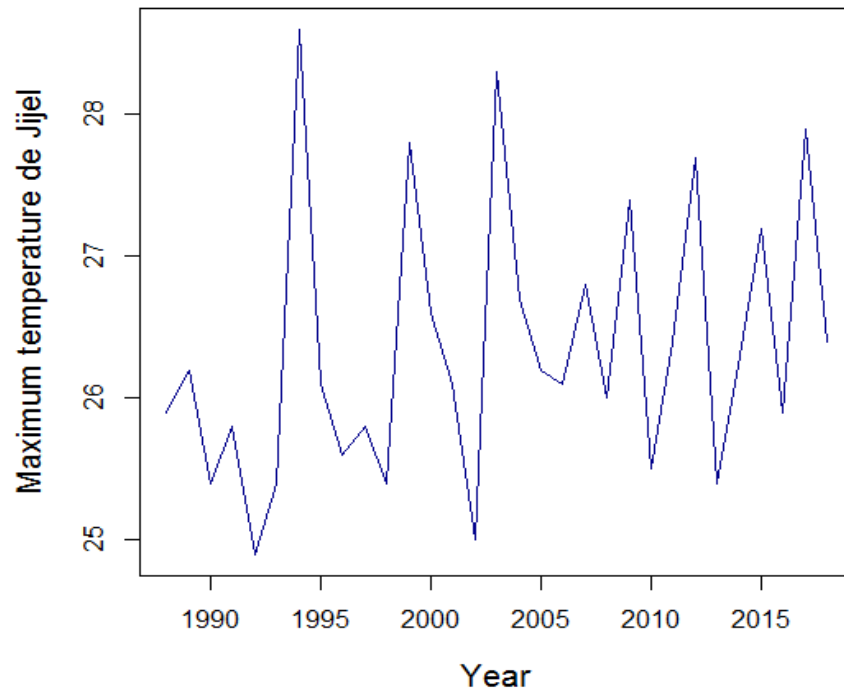


FIGURE 3.1 – Maximums annuels des températures pour la station de Jijel

D'après le graphe, il semble que la série des maxima pour la station de Jijel n'est pas affectée d'une tendance, la série apparaît stationnaire.

#### 3.2.2 Estimation du modèle stationnaire GEV0 par la méthode MV

On se basant sur la méthode de maximum de vraisemblance MLE estimation pour estimer les trois paramètres du modèle GEV : de position, d'échelle et de la forme. Le tableau suivant résume les paramètres estimés, leurs écarts types, leurs intervalles de confiances et les niveaux de retour :

	Location	Scale	Shape
Estimates	25.90	0.73	0.024
Std.err	0.15	0.11	0.16
CI	(25.60, 26.20)	(0.5, 0.95)	(-0.29,0.33)
Estimated paramètre cova- riance matrix			
Location	0.02	0.0074	-0.0096
Scale		0.0126	-0.0061
Shape			0.0251
NLL	39.76		
AIC	85.51		
BIC	89.81		
Estimated return levels	CI		
2-year	26.17(25.84,26.51)		
20-year	28.15(27.10,29.20)		
50-year	28.89(27.17,30.61)		
100-year	29.45(27.07,31.84)		

TABLE 3.2 – Estimation des paramètres des valeurs extrêmes par la méthode de " MV " pour La GEV stationnaire et niveaux de retour.

On remarque que le paramètre de la forme  $\xi = 0.024$  est de signe positif, ce qui implique que la distribution GEV est de type **Fréchet**.

### 3.2.3 Estimation du modèle non stationnaire GEV1 la tendance en moyenne par MV

Nous avons utilisé la méthode de maximum de vraisemblance MLE estimation pour estimer les 04 paramètres du modèle GEV : La moyenne  $\mu$  dépend du temps :

$$\mu_t = \mu_0 + \mu_1 t.$$

	$\mu_0$	$\mu_1$	Scale	Shape
Estimates	25.49	0.03	0.68	0.04
Std.err	0.25	0.01	0.1	0.15
CI	(24.99,25.98)	(0.0004, 0.05)	(0.48,0.89)	(-0.25,0.34)
Estimated paramètre covariance matrix				
$\mu_0$	0.06	-0.003	0.005	-0.004
$\mu_1$		0.0002	0.001	-0.0003
scale			0.01	-0.005
shape				0.02
NLL	37.88			
AIC	83.77			
BIC	89.50			
Estimated return levels	t=8	t=17	t=24	t=31
2-year	25.95	26.20	26.39	26.58
20-year	27.86	28.10	28.30	28.49
50-year	28.60	28.85	29.03	29.23
100-year	29.17	29.39	29.61	29.80

TABLE 3.3 – Estimation de modèle GEV1 non Stationnaire

On remarque que le paramètre de la forme  $\xi = 0.04$  est de signe positif ce qui implique que la distribution GEV est de type **Fréchet**.

### 3.2.4 Choix entre les deux modèles (M0(GEV0 ) et M1(GEV 1))

	$M_0 - M_1$
Ratio de vraisemblance	$3.74 < 3.84$
Décision	le meilleur modèle est la GEV stationnaire

TABLE 3.4 – Test de Ratio de vraisemblance

D'après le test mentionné dans le tableau 3.4, on peut constater que le meilleur modèle est la distribution GEV sans tendance .

### 3.2.5 Validation du modèle choisi

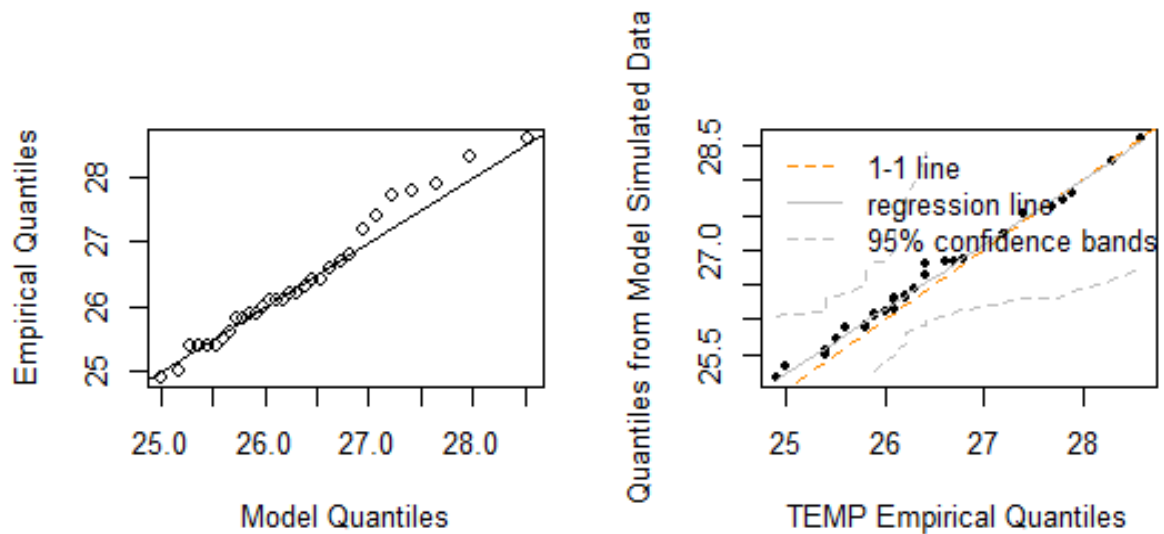


FIGURE 3.2 – QQ plot

On remarque que tous les points représentés pour les deux graphes en haut sont alignés, c.à.d. ils ont formé un nuage de forme linéaire, alors les maxima annuels des températures pour la station de Jijel sont bien ajustés par la distribution GEV sans tendance.

### 3.2.6 Niveaux de retour

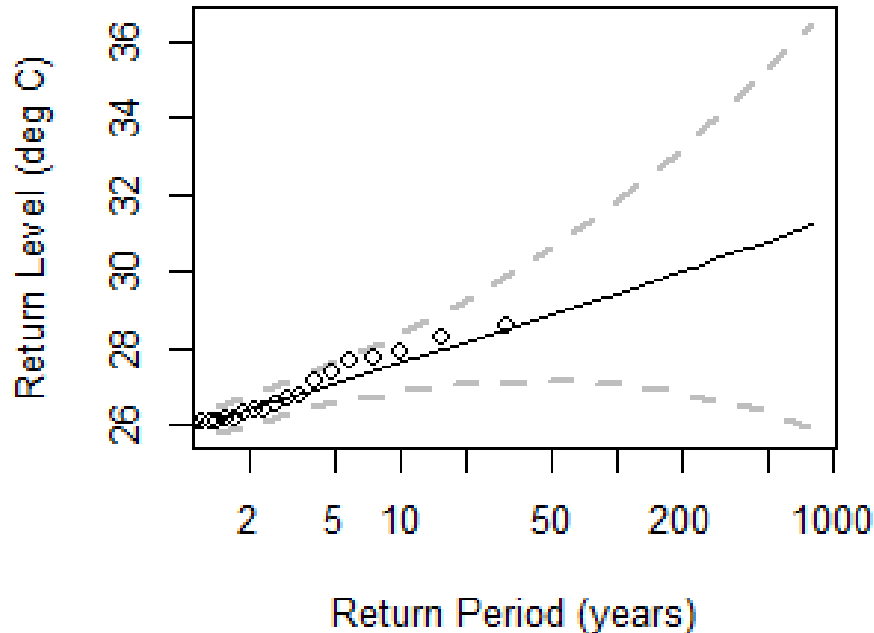


FIGURE 3.3 – Les niveaux de retour entre 26° et 36°

Nous remarquons que les niveaux de retour estimés (tableau 3.2) de GEV augmentent pour des périodes de retour élevées et l'intervalle de confiance s'élargie plus pour les niveaux de retour élevés. A titre d'exemple, on peut conclure : nous devons attendre environ 100 ans pour observer un niveau de températures mensuel de 29.45 C°.

### 3.2.7 Estimation de modèle GEV stationnaire par l'algorithme de Metropolis-Hastings

L'objectif de cette application est d'estimer les paramètres de la distribution GEV stationnaire dans un univers bayésien en utilisant la méthode de Monté Carlo par chaînes de Markov (MCMC), la méthode proposée est l'algorithme de Métropolis-hastings (M-H) marche au hasard. Les informations nécessaires pour calculer la distribution a posteriori via la méthode MCMC (M-H) sont résumées dans le tableau suivant :

La loi apriori	Distribution normale multivariée $(\mu, \log\sigma, \xi)$
n	10000
$\mu_0$	25.90
$\sigma_0$	0.73
$\xi_0$	0.02
cov	(10000,10000,100)
moyennes	(0,0,0)
SD	(0.02,0.1,0.1)
burn-in	500

TABLE 3.5 – Les entrées de l’algorithme de Metropolis-hastings

Les résultats de l’estimation sont résumés dans le tableau suivant :

	Location	Scale	Shape
Estimates	25.92	0.82	0.05
Std.err	0.20	1.01	0.20
CI	(25.55, 26.33)	(0.55, 1.18)	(-0.31,0.50)
Estimated paramètre cova- riance matrix			
	Location	Log.scale	Shape
Location	0.040	0.013	-0.014
Log.scale		0.026	-0.007
Shape			0.042
DIC	247.79		
Estimated return levels			
2-year	26.22(25.83,26.70)		
20-year	28.74(27.50,32.20)		
50-year	29.94(27.94,36.77)		
100-year	31.02(28.20,41.95)		

TABLE 3.6 – Estimateurs MCMC des paramètres de la loi GEV

La figure 3.4 montre les valeurs générées par les 10000 itérations de la chaîne, avec les valeurs initiales  $(\mu_0, \sigma_0, \xi_0)$ , la valeur de  $\sigma$  est transformé par la relation suivante :

$$\sigma = \exp(\log\sigma)$$

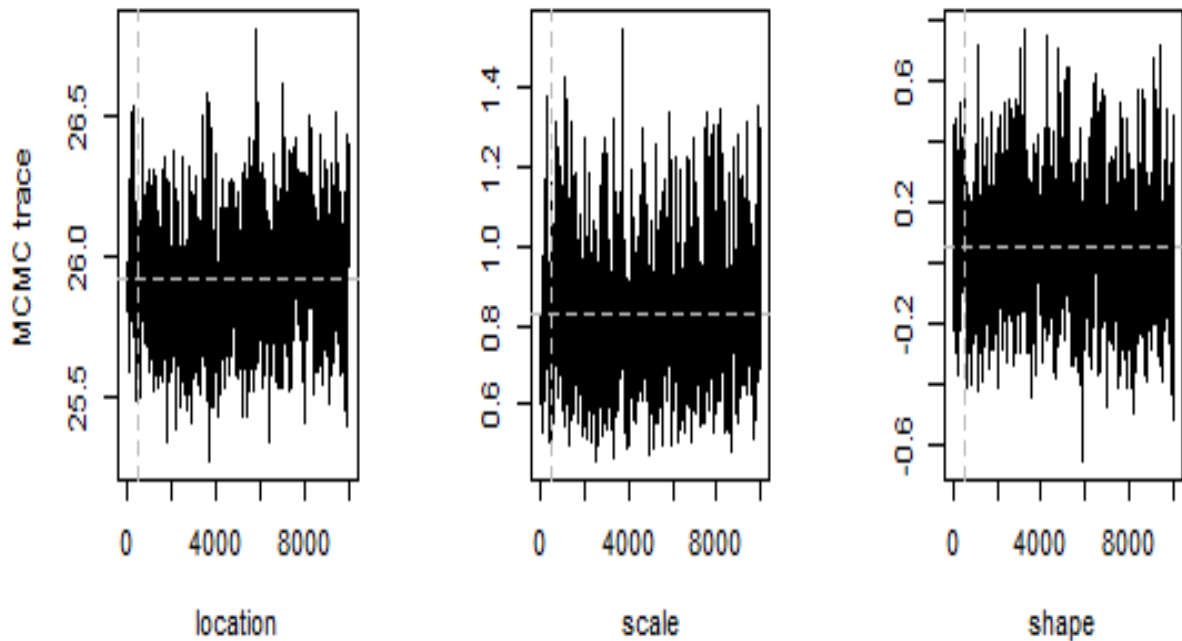


FIGURE 3.4 – Les réalisations (MCMC, Burn-in=500) des paramètres de la GEV dans un cadre Bayésien

La figure suivante montre les densités marginales a posteriori de chaque paramètre estimé

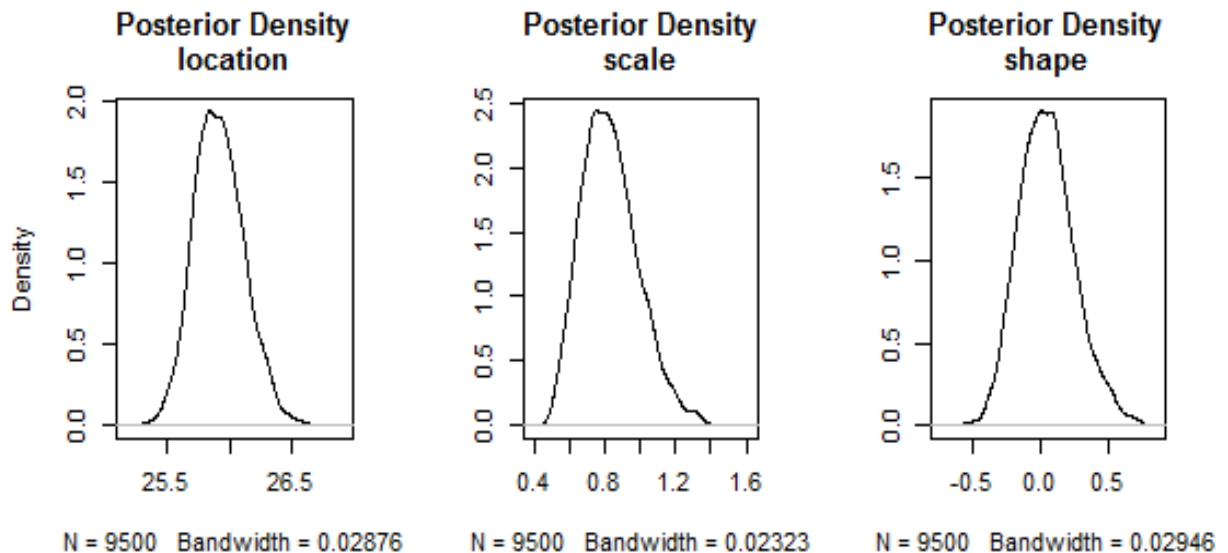


FIGURE 3.5 – Densités marginales a posteriori des trois paramètres estimés de la loi GEV

### Niveaux de retour

D'après le tableau 3.6, on peut conclure qu'on a une probabilité de 0.01, pour avoir une température maximale de 31.02 C°.

### 3.2.8 Comparaison entre les deux estimateurs (EMV ET MCMC)

Le tableau suivant regroupe les estimateurs de MV et les estimateurs MCMC

	EstimationMCMC	Estimation MV
$\mu$	25.92 (0.20)	25.90 (0.15)
$\sigma$	0.82 (1.01)	0.73 (0.11)
$\xi$	0.05 (0.20)	0.02 (0.16)

TABLE 3.7 – Comparaison entre les deux estimations.

( ) :l'écart type

D'après ce tableau, on constate que :

- les deux résultats sont proches, le priori non informatif a donné des estimateurs proches que ceux résultent de maximum de vraisemblance.
- Nous remarquons que le paramètre de forme est strictement supérieure à zéro donc la série des températures suit une loi **Fréchet** (à queues lourdes).

## 3.3 Modélisation via la Distribution de Pareto Généralisée (GPD)

La première étape de cette démarche consiste à déterminer un seuil optimal pour cette distribution.

### 3.3.1 Détermination d'un seuil optimal

Si on se base sur la définition de IPCC, nous prenons un seuil qui correspond à 10 % pour les évènements extrêmes, mais puisque le risque est très grand, dans la qualité de modèle à faire



un travail qui repose sur des informations subjectives, nous sommes obligés donc à chercher une méthode rationnelle, plus consistante et adéquate dans l'espace et dans le temps.

#### Méthode 01 : le graphe de la fonction moyenne des Excès

L'interprétation du graphe de la fonction moyenne des excès n'est pas toujours facile en pratique, l'idée est de trouver le seuil le plus bas où le graphe devient approximativement linéaire.

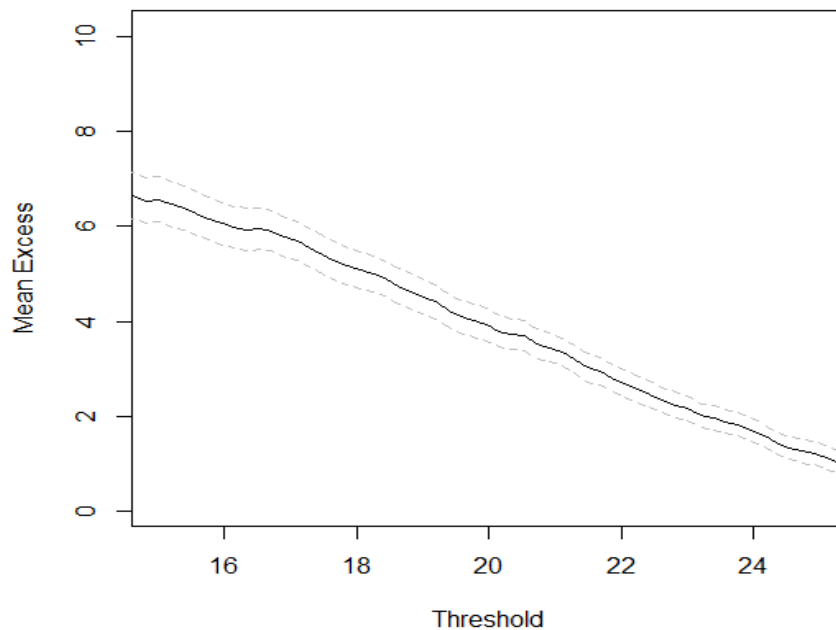


FIGURE 3.6 – la FME

Le graphique apparaît incurvé entre 15 et 25 environ, puis il semble linéaire à partir de seuil 18 jusqu'à le seuil 20 environ. Ça nous permet de considérer le seuil 18 comme un seuil optimal.

#### Méthode 02 : la stabilité des paramètres de la GPD

Afin d'affiner la pertinence de notre choix, qui s'avère être primordial dans la qualité du modèle, nous allons utiliser en parallèle la seconde méthode pour le choix du seuil. Pour cela, il faut estimer le modèle GPD pour une série de seuils (allant de 15 à 25), et évaluer  $\xi$  (le paramètre de la forme) et (le paramètre d'échelle modifié). Nous obtenons les graphiques suivants :

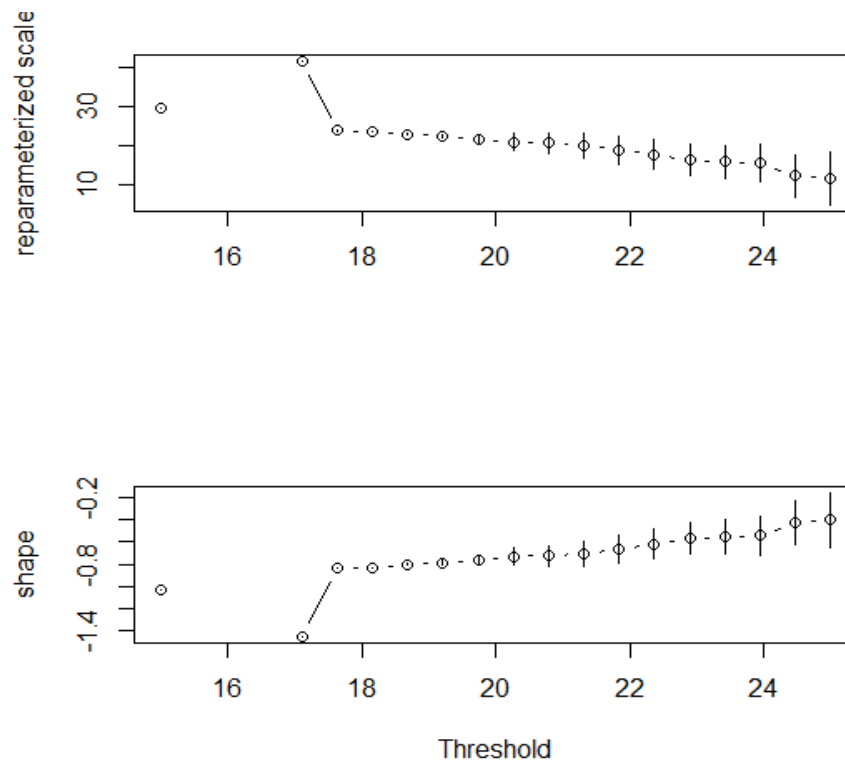


FIGURE 3.7 – La stabilité des paramètres

L'idée est de trouver l'intervalle des seuils où le graphique des points de stabilité des deux paramètres est approximativement linéaire et stable. Sur ces graphiques, il apparaît que les deux paramètres d'échelle et de forme demeurent relativement constant au-delà d'un seuil de 18.

Cela nous conduit à choisir un seuil de 18, car cela correspond à un modèle GPD qui réduit au maximum la variance des estimateurs. Ce qui confirme la validité de seuil déjà retenu par la méthode FME.

### 3.3.2 Analyse descriptive des données

n	Min	1st Qu	Median	Mean	3rd Qu	Max
179	18.10	20.93	23.45	23.17	25.38	28.60

TABLE 3.8 – Statistiques descriptives

Nous considérons 31 ans de données mensuelle de température enregistrées à la wilaya de Jijel (soit 372 observations), on retient les données qui dépassent le seuil choisi (soit 179 observations) pour entamer une modélisation de type GPD.

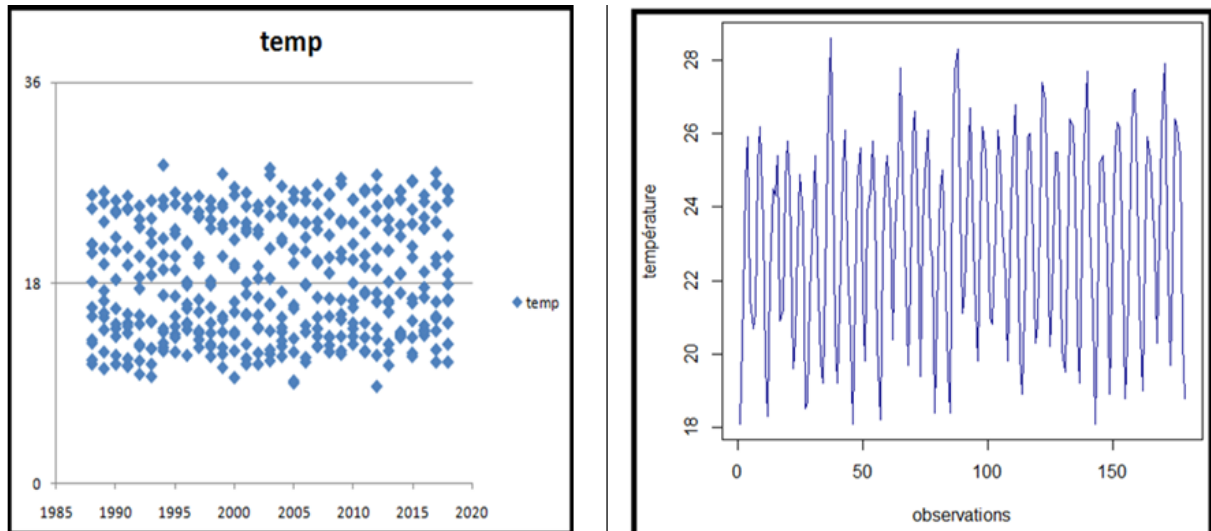


FIGURE 3.8 – Données mensuelles de température qui dépassent le seuil choisi

Nous avons obtenus le tableau suivant (après avoir choisi le seuil) :

n	Min	1st Qu	Median	Mean	3rd Qu	Max
179	18.10	20.90	23.40	23.14	25.35	28.60

TABLE 3.9 – Statistiques descriptives

### 3.3.3 Estimation de la loi GPD stationnaire par la méthode de maximum de vraisemblance

En se basant sur la méthode EMV, nous avons obtenu les résultats suivants :

	Scale	Shape
Estimates	8.83	-0.83
Std.err	0.03470738	0.00000002
CI	(8.75, 8.89)	(-0.83,-0.81)
Estimated paramètre covariance matrix		
scale	$1.20 \times 10^{-3}$	$-7.67 \times 10^{-15}$
shape		$4.00 \times 10^{-16}$
NLL	420.03	
AIC	844.06	
BIC	850.43	
Estimated return levels		
2-year	27.22(20.11,34.34)	
20-year	28.41(-19.80,76.62)	
50-year	28.52(-74.73,131.77)	
100-year	28.56(-155.13,212.25)	

TABLE 3.10 – Estimation MV des paramètres de la loi GPD stationnaire

Nous remarquons que le paramètre de forme est strictement inférieur à zéro donc la série des Températures maximales suit une loi Pareto de **Type II**.

On remarque que le zéro n'appartient pas à l'intervalle de confiance du paramètre de la forme, ce qui implique que le choix d'une distribution exponentielle est exclu.

### 3.3.4 Estimation de la loi GPD non stationnaire par la méthode de maximum de vraisemblance (EMV)

On suppose la présence d'une saisonnalité dans le paramètre de dispersion qui s'écrit comme suit :

$$\sigma(t) = \exp(\phi_0 + \phi_1 \cos(2\pi.t/365.25) + \phi_2 \sin(2\pi.t/365.25)), \quad t=1,2,\dots,365$$

En se basant sur la méthode EMV, nous avons obtenu les résultats suivants :

### 3.3. Modélisation via la Distribution de Pareto Généralisée (GPD)

	$\phi_0$	$\phi_1$	$\phi_2$	Shape
Estimates	2.32	-0.01	0.04	-0.99
Std.err	$1.70 \times 10^{-1}$	$1.41 \times 10^{-8}$	$1.41 \times 10^{-8}$	$1.70 \times 10^{-1}$
CI	(1.99,2.65)	(-0.01, -0.02)	(0.04,0.05)	(-1.33,-0.66)
Estimated paramètre co- variance matrix				
$\phi_0$	$2.89 \times 10^{-2}$	$5.22 \times 10^{-15}$	$-1.16 \times 10^{-15}$	$-2.89 \times 10^{-2}$
$\phi_1$		$2.00 \times 10^{-16}$	$-2.09 \times 10^{-8}$	$-5.22 \times 10^{-15}$
$\phi_2$			$2.00 \times 10^{-16}$	$1.16 \times 10^{-15}$
shape				$2.89 \times 10^{-2}$
NLL	415.07			
AIC	838.14			
BIC	850.89			
Estimated return levels	t=1	t=10	t=20	t=60
2-year	27.99	28.06	28.14	28.46
20-year	28.01	28.09	28.17	28.48
100-year	28.02	28.09	28.17	28.48

TABLE 3.11 – Estimation MV des paramètres de la loi GPD non stationnaire

#### 3.3.5 Choix entre les deux modèles (M0 (GPD stationnaire)) et (M1 (GPD non stationnaire))

	$M_0 - M_1$
Ratio de vraisemblance	$9.76 > 5.99$
Décision	le meilleur modèle est la GPD non stationnaire

TABLE 3.12 – Test de Ratio de vraisemblance

D'après le test mentionné dans le tableau 3.12, on peut constater que le meilleur modèle est la distribution GPD non stationnaire.

## 3.3.6 Validation du modèle choisi

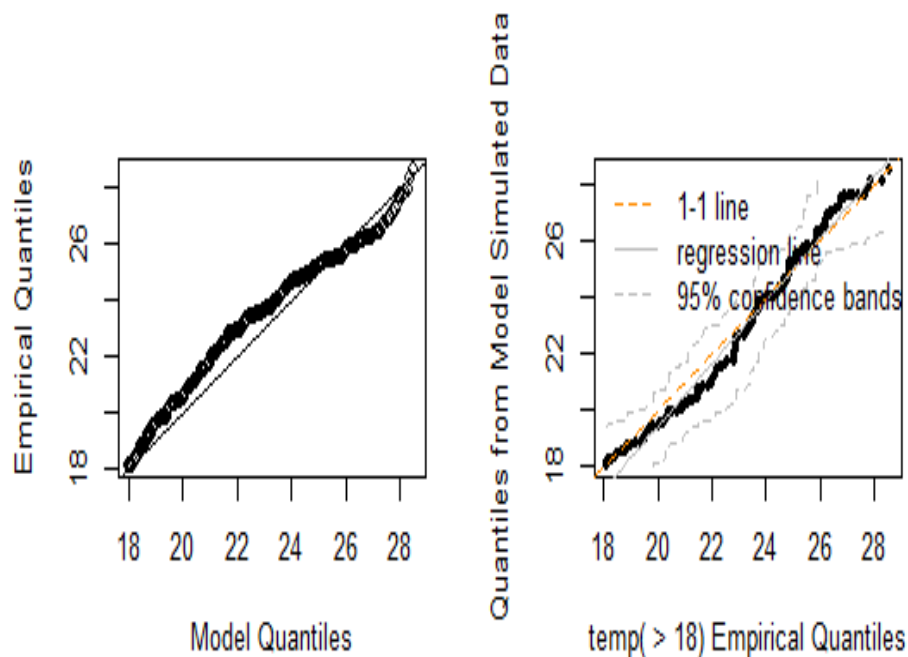


FIGURE 3.9 – QQ plot

Les deux graphes ont pour but d'examiner la droite de Henry et les écarts des observations à cette droite, et nous permettent de donner des représentations visuellement très instructives de la répartition de nos observations par rapport à la distribution du référence GPD, nous voyons que tous les points sont autour de la droite, ce qui nous permet de dire que nos données sont bien ajustées par la GPD non stationnaire.

### 3.3.7 Niveaux de retour

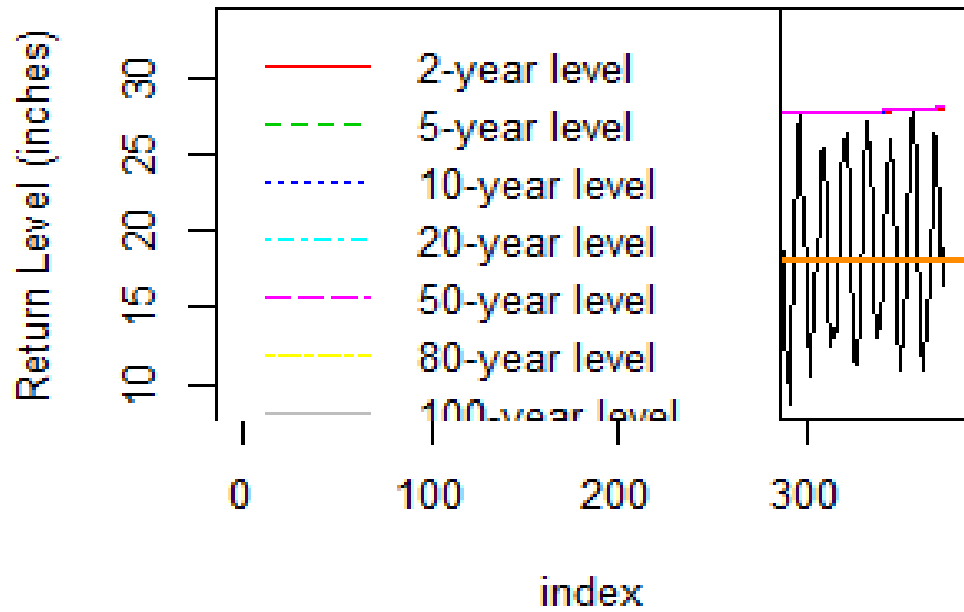


FIGURE 3.10 – Niveau de retour de la GPD

D'après le tableau TABLE 3.11 et la FIGURE 3.9, on peut conclure :  
Nous devons attendre environ 20 ans pour observer une température mensuelle maximale de de 28.48 C°

### 3.4 Estimation de la loi de Pareto généralisé (GPD) non stationnaire par la l’algorithme de Metropolis-Hastings

Les résultats de l’estimation sont résumés dans le tableau suivant :

	$\phi_0$	$\phi_1$	$\phi_2$	Shape
Estimates	2.92	-0.02	0.04	-0.95
Std.err	0.08	0.02	0.02	0.08
CI	(2.11,2.43)	(-0.06, 0.02)	(0.01,0.08)	(-1.10,-0.08)
Estimated paramètre covariance matrix				
$\phi_0$	$6.94 \times 10^{-3}$	$-9.27 \times 10^{-5}$	$6.80 \times 10^{-5}$	$-2.82 \times 10^{-3}$
$\phi_1$		$3.40 \times 10^{-4}$	$-2.75 \times 10^{-7}$	$9.30 \times 10^{-5}$
$\phi_2$			$2.74 \times 10^{-4}$	$-1.00 \times 10^{-4}$
shape				$6.92 \times 10^{-3}$
DIC	415.07			
Estimated return levels	t=1	t=10	t=20	t=60
2-year	17.29	17.28	17.27	17.25
10-year	32.83	32.93	33.01	33.49
20-year	34.90	35.02	35.15	35.66
50-year	36.20	36.32	36.46	37.01
100-year	36.65	36.77	36.92	37.48

TABLE 3.13 – Estimation bayesien des paramètres de la loi GPD non stationnaire



3.4. Estimation de la loi de Pareto généralisé (GPD) non stationnaire par la l'algorithme de Metropolis-Hastings

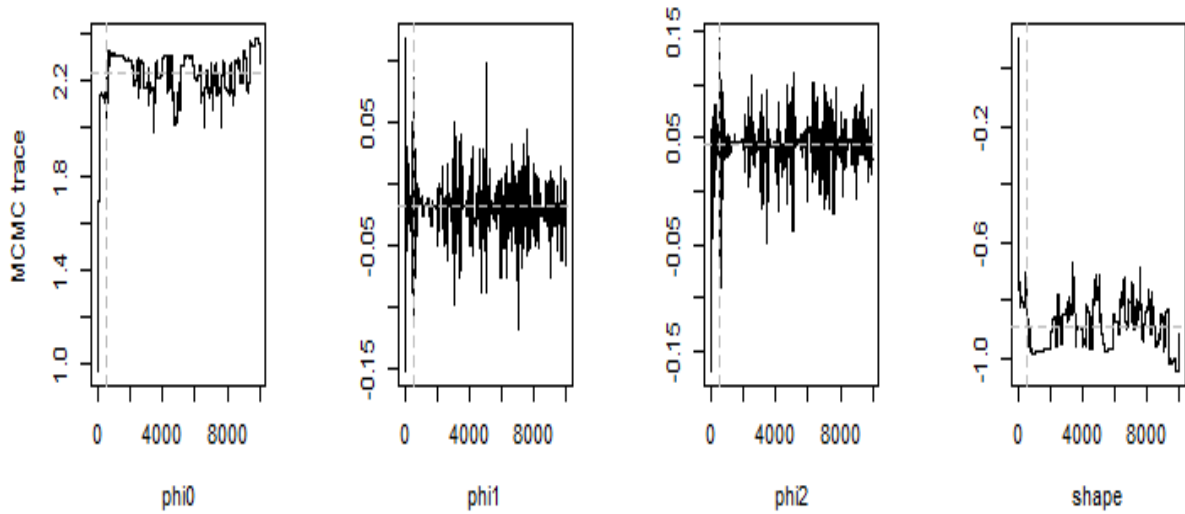


FIGURE 3.11 – Les réalisations (MCMC, Burn-in=500) des paramètres de la GPD non stationnaire dans un cadre bayésien

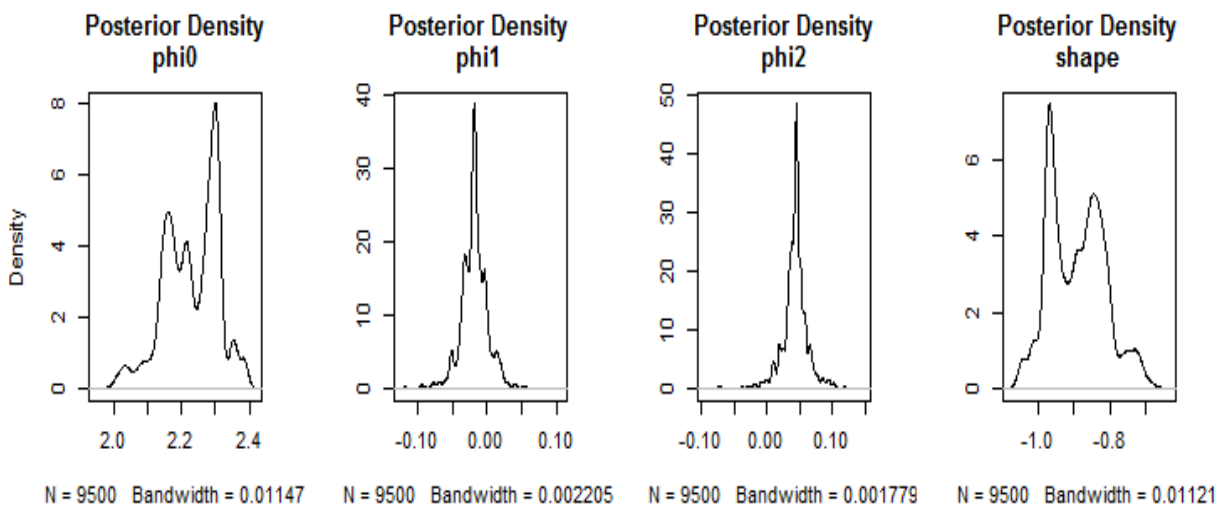


FIGURE 3.12 – Densités marginales a posteriori des 04 paramètres estimés de la loi GPD

## Conclusion générale

Au long de la partie théorique de notre mémoire, on s'est basé sur les différentes approches de la théorie des valeurs extrêmes, à savoir l'approche en blocs et l'approche POT, en exposant leurs modèles et faire apparaître leurs caractéristiques passant par le calcul des quantiles extrêmes. Nous avons présenté deux méthodes statistiques d'estimation des paramètres des modèles probabilistes l'une classique (MV) et l'autre Bayésienne (M-H). Nous avons ouvert une fenêtre sur les modèles des valeurs extrêmes non stationnaire (présence de la tendance et de la saisonnalité) .

l'étude pratique est effectué en deux étapes :

A la première étape, on a procédé à une modélisation de la température maximale à la wilaya de Jijel, sous l'hypothèse de l'indépendance des observations (cas : iid) à fin de déterminer le meilleur modèle qui l'ajuste mieux, nous avons tenté de modélisé notre série météorologique par les deux approches cités auparavant GEV et GPD. Pour l'estimation de leurs paramètres, on s'est basé sur la méthode de maximum de vraisemblance (EMV). On a modélisé la série retenue par des modèles stationnaire et non stationnaire, le meilleur modèle sur lequel nous avons calculé les niveaux de retour pour des périodes de retour différentes : 10 ans, 20 ans, 50 ans et 100 ans a été choisi. Les résultats d'estimation par la méthode de maximum de vraisemblance sont les suivants :

Pour la GEV, le modèle de Fréchet ( $\xi = 0.024$ ) stationnaire est le meilleur modèle d'ajustement pour la température maximale. Pendant les 100 ans prochains (avec une probabilité de 0.01), on va enregistrer une fois -en moyenne- une température maximale estimer de  $29.45c^{\circ}$  .

Pour la GPD, le modèle de pareto de **Type II** à queues finis ( $\xi = -0.99$ ) non stationnaire (présence de la saisonnalité) est le meilleur modèle d'ajustement de température maximale au dessus de seuil retenu ( $u = 18$ ).

Pour le calcul des niveaux de retour du température maximale, nous citons à titre d'exemple, il faut attendre 100 ans, pour observer une température du  $28.02\ c^\circ$ .

En deuxième étape, on a entamé une estimation des paramètres par une approche bayésienne, l'algorithme M-H nous a offert une méthodologie alternative d'estimation plus efficace que les méthodes classiques d'estimation, dans notre cas, on a utilisé comme distribution à priori la distribution normale multivariées.

pour l'approche BM (via la distribution GEV), le modèle choisi est toujours loi de **Fréchet** ( $\xi = 0.05$ ), Pour le calcul des niveaux de retour, nous citons à titre d'exemple, il faut attendre 100 ans, pour observer une température maximale de  $31.02\ c^\circ$ .

pour l'approche POT (via la distribution GPD), le modèle choisi est toujours loi de Pareto type II ( $\xi = -0.95$ ), Pour le calcul des niveaux de retour, nous citons à titre d'exemple, il faut attendre 10 ans, pour observer une température maximale de  $32.83\ c^\circ$ .

# Bibliographie

- [1] Ait Yala Nabil.M. **Modélisation des extrêmes spatiaux et application**, Mémoire de magistère, Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, Année universitaire 2012-2013.
- [2] Aghaba.S.**Extremal Dependency, the GARCH(1.1) Model and an Agent Based Model**, Linaneus University, 2013.
- [3] Antoine.B, Ashkan.N.**La théorie des extrêmes et la gestion des risques de marché**, groupe de travail ENSAE, Mai 2000.
- [4] Benlagha. N, Grun-Rehomme. M. **Application de la théorie des valeurs extrêmes en assurance automobile**, université Paris 2, France, 2002.
- [5] Betrlant.J. Geogebur. **Staistics of Extremes**, Jhon Wiley and Sons, England, 2004.
- [6] Bezat. A et Nikeghbalt. A. **la théorie des valeurs extrêmes et la gestion des risques**, ENSAE, France, 2000.
- [7] Bouderbala.I. **Estimation Bayésienne des modèles Autorégressifs à changement de régimes Markoviens : modélisation du Cycle des Affaires Algérien** mémoire de Magister en Statistique Appliquée, ENSSEA, ALGER 2012.
- [8] Borchani.A. **Statistiques des valeurs extrêmes dans le cas de lois discrètes**, Research center. ESSEC working paper 10009, Décembre 2009.
- [9] Borchant. A. **Statistique des Valeurs Extrêmes dans le Cas des lois Discrètes**, école supérieure de la statistique et de l'analyse de l'information, Tunis(2010).
- [10] Bremaud. P. **Markov chains Gibbs fields, Monte Carlo Simulation and queues**, Springer, 1998.
- [11] BrockwellL.P.J and Davis, R.A. **Time series : Theory and Methods**, Springer, 2nd edition, 2009.

- 
- [12] Castillo.E, **Extreme value theory in Engineering**, ACDEMIC PRESS, INC, 1988.
- [13] Castillo.E et autres. **Extreme Value and related models with Applications in Engineering and sciences**, Wiley inter science, 2004.
- [14] Celint et autres. **livre blanc :pétrole et gaz**, Nexans, 2014.
- [15] Christian.P.R. **Le choix bayésien**, deuxième édition, Springer, France, 2007.
- [16] Coles. S.G et Pericchi. **Anticipating catastrophes through extreme value modeling**, department of mathematics, Bristol University,UK, Springer, New York, 2001.
- [17] Coles. S.G et Powell E.A. **Bayesian methods in extreme value modelling : a review and new developments**, International Statistical Review 64, 119-36, 1996.
- [18] Coles S.G et Tawn J.A. **Bayesian analysis of extreme rainfall data** . Applied Statistics 45, p 463-78, 1996.
- [19] Coles S.G et Walshaw.D. **Directional modeling of extreme wind speeds**, Appl. Statist.43, p 139-157, 1994.
- [20] Clauss.P. **Atelier De Théorie Des Valeurs Extrêmes :Appliction en finance quantitative**, Filière génie statistique de France.
- [21] Danielsson.J et autres, **Tail index estimation with very high frequency data**, journal of Empirical Finance 4, p 241-257, 1997.
- [22] Davison et Smith. **Models for exceedances over high thresholds**, Journal of Royal Statistic Society Ser, B 52, p 393-442, 1990.
- [23] De Haan.L et Ferreira. A .**Extreme value theory : an introduction**, Springer, New York, 2006.
- [24] Embrechts. P et autres. **Modelling EXtremal Events for insurance and Finance**, Springer, New York, 1997.
- [25] Embrechts. P et autre. **Extreme value theory as a risk management tool**.North American Actuarial Journal 26, 1999.
- [26] Fisher et Tippett. **Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample**, Lamb. Philos. Soc, N°24, 180-190, 1928.
- [27] Finkenstadt. B et Rootéz. H. **Extreme values in Finance and the Environment**, Chapman & hall/CRC, 2004.
- [28] Fréchet.M, **la loi de probabilité de l'écart maximum Annales de la Société Polonaise de Mathematique**, Vol. 6, N°3, pp. 93-116, 1927.
- [29] Frédéric.P. Utilisation de la théorie des valeurs extrêmes, ISFA, Janvier 2013.
- [30] Galambos. J et autres. **Extreme Value Theory and Applications**, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1994.

- 
- 
- [31] Gnedenko.V. **La distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire**, Ann. Math. N°44, p 423-453, 1943.
- [32] Gumbel.E.J, **Les valeurs extrêmes des distributions statistiques**, Annales de l'I.H.P, tome 5, N°2, France, 1935.
- [33] Gumbel.E.J. **Statistics of Extremes**, Columbia University Press, New York, 1958.
- [34] Gençayr.R et autres, **Extreme value theory and value-at-risk : Relative performance in emerging markets**, International Journal of Forecasting 20, p 287-303, 2004.
- [35] Hasting.W. **Monte Carlo sampling methods using Markov Chains and heir applications**, Biometrika, 57. 97-109, 1970.
- [36] Jean Jaque.B et Eric.P. **Pratique de Calcule Bayésien** Springer, Paris(2010).
- [37] Jouchi.N et autres. **Generalized Extreme Value Distribution with Time-Dependence Using the AR and MA Models in State Space Form**, JAPAN, 2009.
- [38] Katz R.W et autres .**Extreme value theory as a risk management tool**.Statistics of extremes in hydrology, 2002.
- [39] Kotz.S et Nadarajah. S.**Extreme value distributions : theory and applications**. Imperial College Press, London, 2000.
- [40] Klajnmic H. **Niveaux de retour pour les vitesses extrêmes des vents . XXXVes Journées de Statistique**, Lyon, 2003.
- [41] Laurens de Haan et A. Ferreira, **Extreme value theory . An introduction**, Springer, New York, 2006. Springer, New York.
- [42] Longinf. M. **From value at risk to stress testing : The extreme value approach**, Journal of Banking and Finance 24, p 1097-1130, 2000.
- [43] Madsen.H. **Time Series Analysis**, Chapman & hall/CRC, 1958.
- [44] Mcneil.A. **Calculating quantile risk measures for financial time series using extreme value theory**, Department of Mathematics, ETH,Swiss Federal Technical University E-Collection, 1998.
- [45] Mcneil.A et autres. **Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series An extreme value approach**, Journal of Empirical Finance 7, p 271-300, 1997.
- [46] Métropolis.N.A et autres. **Equations of state calculations by fast computing machines**, J.Chem. Phys, 21.p 1087-1092, 1953.
- [47] Nakajima.N et autres, **Generalized extreme value distribution with time-dependence using the AR and MA models in state space form**, Japon, 2009.
- [48] Parent.E et autres. **Statistical and bayesian methods in hydrological sciences**, documents techniques en hydrologie. N°20. UNESCO, Paris, 1998.

- [49] Pickands.J. **Statistical inference using extreme order statistics**, Ann. Statist.3, 119-131, 1975.
- [50] Reisse.D et Thomas.M .**Statiscal analysis of extremes values with applications in ansurance, finance, hydrology and other fields**, Third edition, Birkhauser, Germany, 2007.
- [51] Reggad.B. **Fondements de la théorie des valeurs extrêmes, ses principales appli-cation et son apport à la gestion des risques du marché pétrolier**, Math. Sci. Hum, Mathematics and social sciences, 47<sup>ème</sup> Année, N° 186. (2009), p 29-63.
- [52] Resnick S.I. **Extreme values, Regular variation, and Point Processes**, Applied Pro-bability Trust, Springer-Verlag. New York, 1987.
- [53] Robert.C.Y. **Théorie des valeurs extrêmes**, ISFA-Université de Lyon 1, 2016.
- [54] Roncalli. T. **Théorie des valeurs extrêmes**, groupe de recherche opérationnelle, Paris, 2002.
- [55] Rootzen.T. **Extreme value statistics and wind storm losses : a case study**, Scan-dinavian Actuarial Journal, p 70-94,1997.
- [56] Sabourin.A. **Introduction à la Théorie des valeurs extrêmes**, institut camille Jorda, Lyon1, 2012.
- [57] Smith.R. L.**Extreme value statistics in meteorology and the environment. In environmental Statistics**, Chapter 8, NSF-CBMS conference notes, p 300-357, 2001.
- [58] Smith.R.L et Goodman. D.J.**Bayesian risk analysis**, risk books, London, 235-251, 2000.
- [59] Taha B.M.J.et autres. **Comparaison des méthodes d'estimation des paramètres du modèle GEV non stationnaire**, Journal of Water Science, vol. 21, n° 1, 2008.
- [60] Vanessa.B.L. **L'Algorithme Metropolis-Hastings, Projet de recherche CRSNG**, Université de Montréal, 2010.

# Annexe

Modèle **GEV** :

	Location	Scale
Estimates	25.91	0.74
Std.err	0.14	0.11
CI	(25.94, 26.19)	(0.53, 0.94)
Estimated paramètre covariance matrix		
Location	0.019	0.004
Scale		0.011
NLL	39.77	
AIC	83.54	
BIC	86.40	
Estimated return levels	CI	
2-year	26.18(25.88,26.49)	
20-year	28.10(27.36,20.85)	
50-year	28.79(27.86,29.71)	
100-year	29.30(28.24,30.37)	

TABLE 3.14 – Estimation des paramètres des valeurs extrêmes par la méthode de "MV" pour La GEV stationnaire utilisant type Gumbel



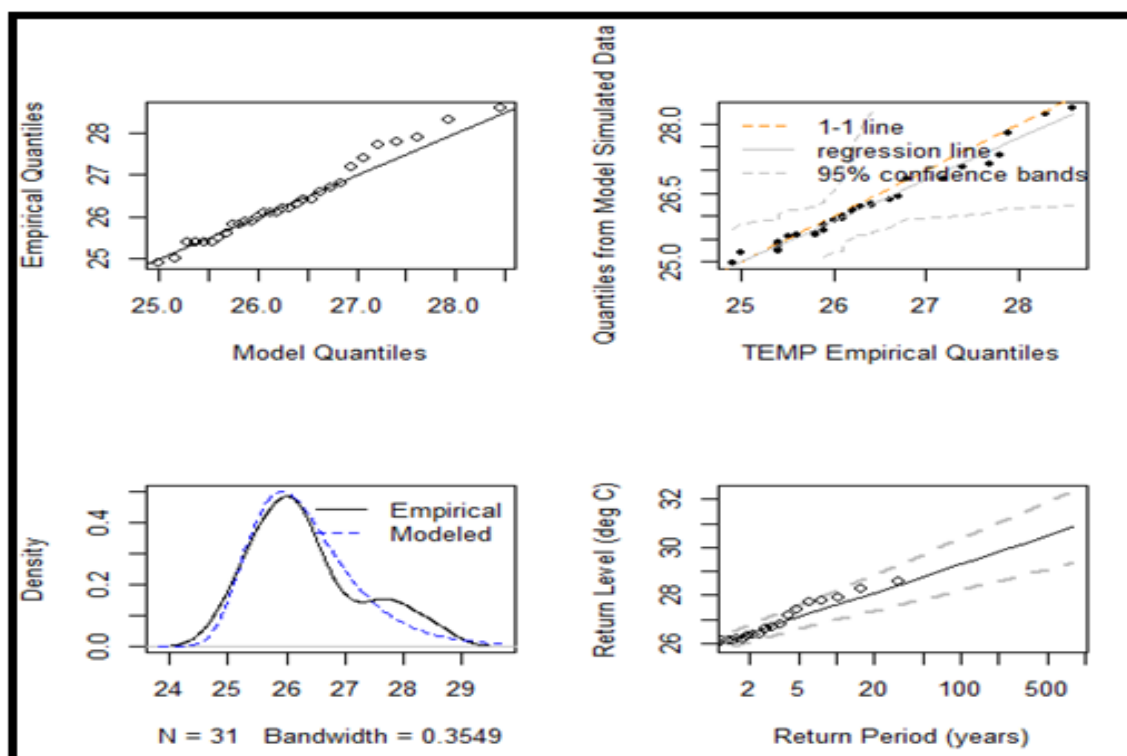


FIGURE 3.13 – les Réalisations des paramètres de la GEV type (Gumbel)

	$\mu_0$	$\mu_1$	scale	Shape
Estimates	25.49	0.03	0.80	0.06
Std.err	0.41	0.02	0.17	0.20
CI	(24.49,26.19)	(-0.01, 0.08)	(0.54,1.20)	(-0.25,0.54)
Estimated paramètre covariance matrix				
$\mu_0$	0.1666	-0.0076	0.0079	-0.0046
$\mu_1$		0.0005	0.0002	-0.0017
scale			0.0297	-0.0021
shape				0.0404
DIC	241.69			
Estimated return levels	t=4	t=19	t=26	t=30
2-year	25.93	26.28	26.44	26.53
20-year	28.23	28.58	28.74	28.84
50-year	29.19	29.54	29.70	29.79
100-year	29.96	30.31	30.47	30.56

TABLE 3.15 – Estimation MCMC(modèle GEV1)non stationnaire

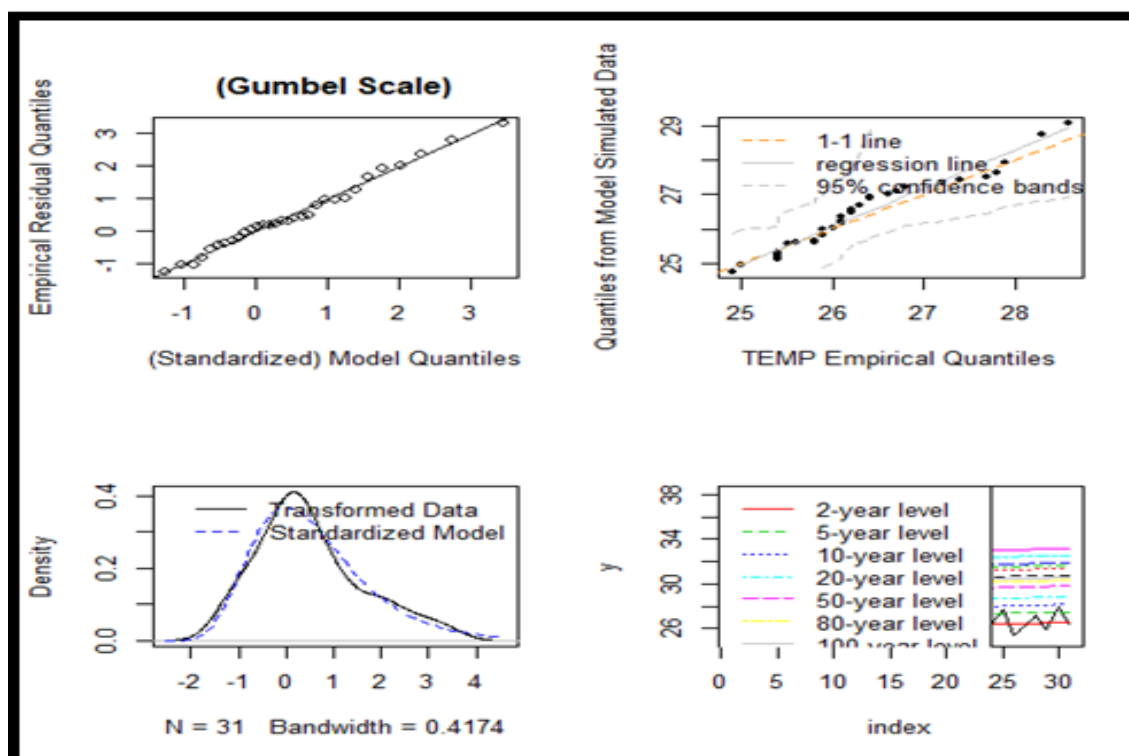


FIGURE 3.14 – les Réalisations des paramètres de la GEV1 (non stationnaire )

## Modèle GPD

	Scale
Estimates	5.14
Std.err	0.38
CI	(4.39,5.89)
Estimated paramètre covariance matrix	
scale	0.15
NLL	471.98
AIC	945.96
BIC	94.15
Estimated return levels	
2-year	30.57(258.32,41)
20-year	42.40(38.83,45.98)
50-year	47.11(42.85,51.38)
100-year	50.67(45.89,55.46)

TABLE 3.16 – GPD stationnaire type -Exponential-

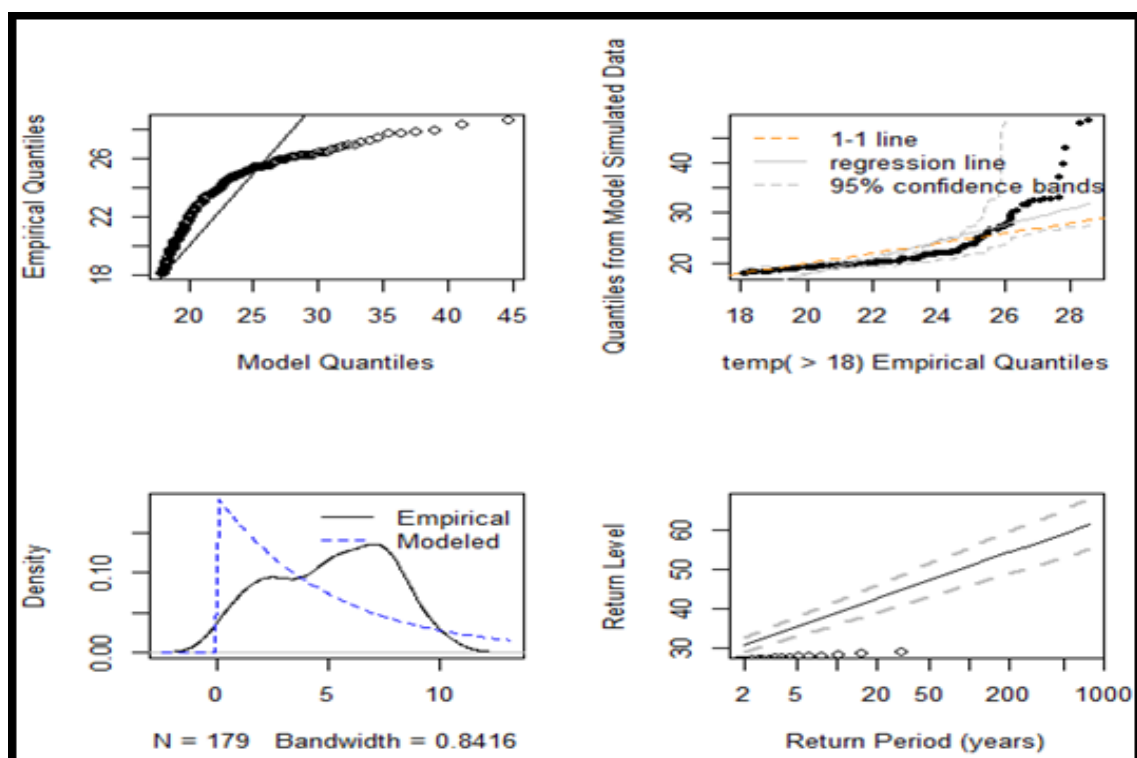


FIGURE 3.15 – Réalisations des paramètres de la GPD stationnaire (Type-Exponential-)

	$\phi_0$	$\phi_1$	$\phi_2$	Shape
Estimates	2.32	-0.01	0.04	-0.99
Std.err	$1.70 \times 10^{-1}$	$1.41 \times 10^{-8}$	$1.41 \times 10^{-8}$	$1.70 \times 10^{-1}$
CI	(1.99,2.65)	(-0.01, -0.02)	(0.04,0.05)	(-1.33,-0.66)
Estimated paramètre covariance matrix				
$\phi_0$	$2.89 \times 10^{-2}$	$5.22 \times 10^{-15}$	$-1.16 \times 10^{-15}$	$-2.89 \times 10^{-2}$
$\phi_1$		$2.00 \times 10^{-16}$	$-2.09 \times 10^{-8}$	$-5.22 \times 10^{-15}$
$\phi_2$			$2.00 \times 10^{-16}$	$1.16 \times 10^{-15}$
shape				$2.89 \times 10^{-2}$
NLL	415.07			
AIC	838.14			
BIC	850.89			
Estimated return levels	t=1	t=10	t=20	t=60
2-year	27.99	28.06	28.14	28.46
20-year	28.01	28.09	28.17	28.48
100-year	28.02	28.09	28.17	28.48

TABLE 3.17 – Estimation MCMC (modèle GP)

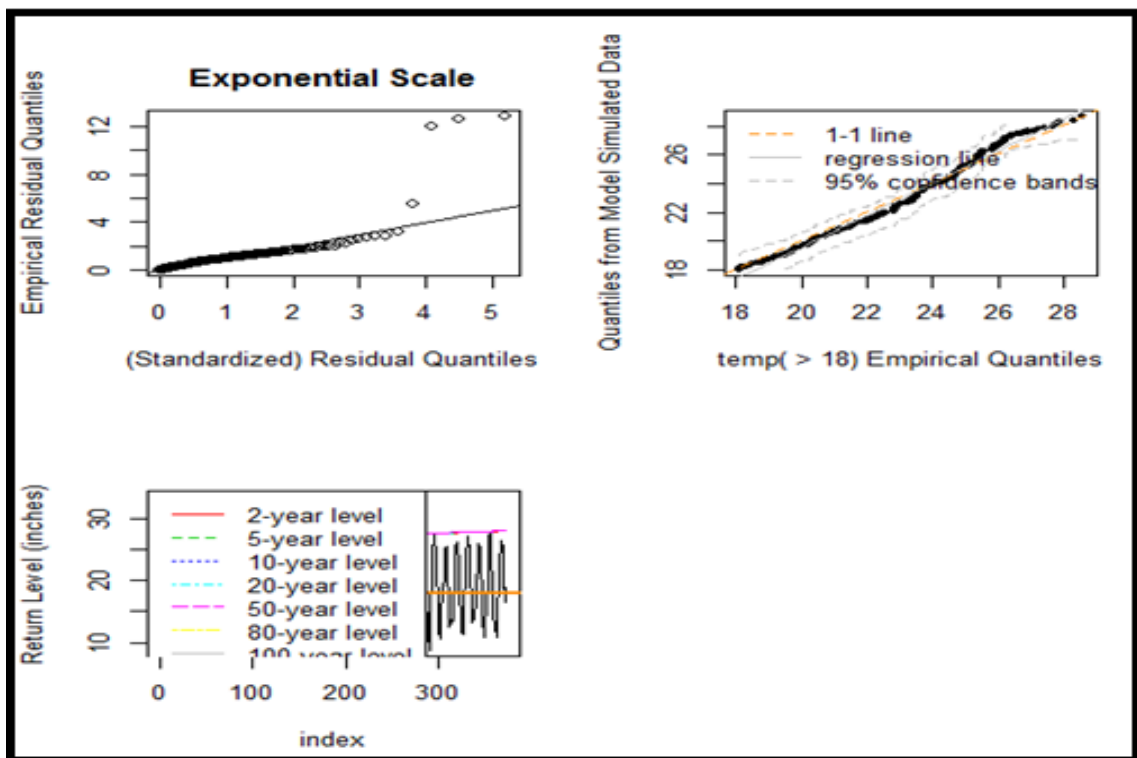


FIGURE 3.16 – MCMC (modèle GP)

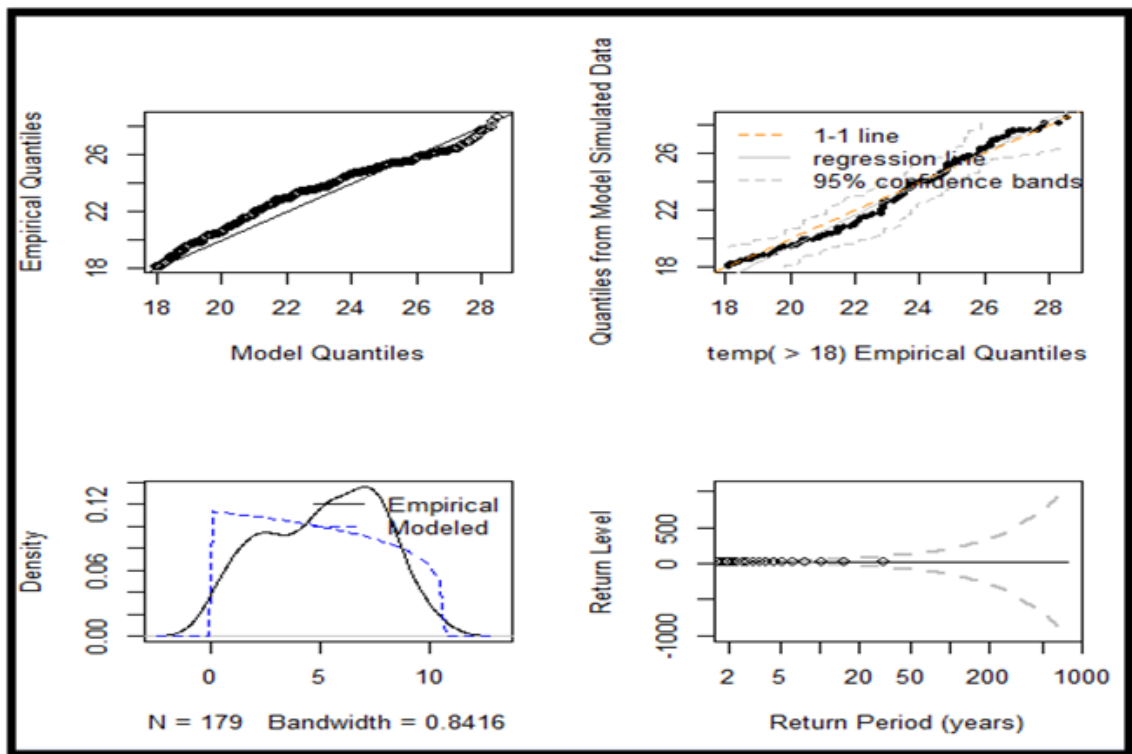
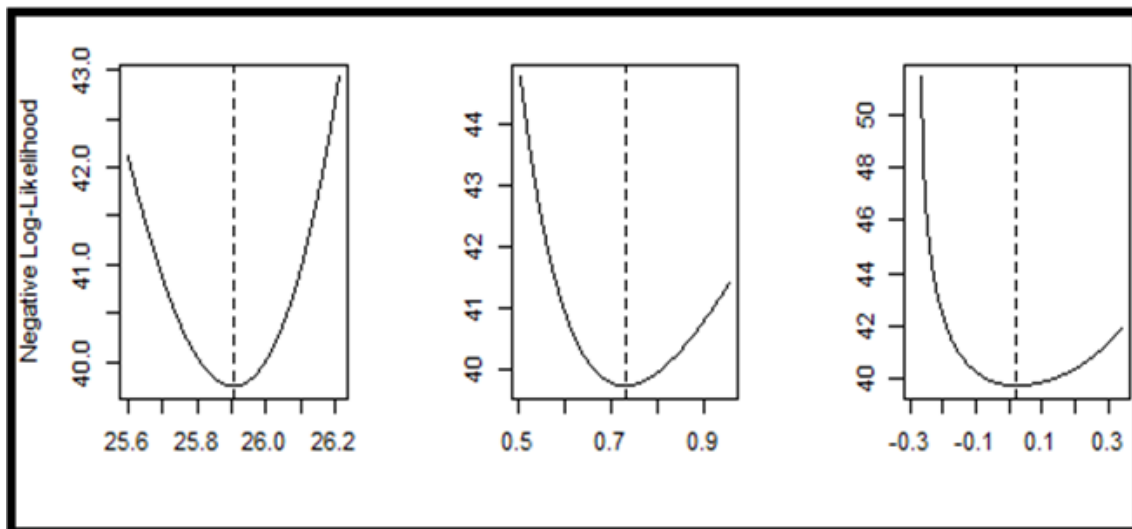
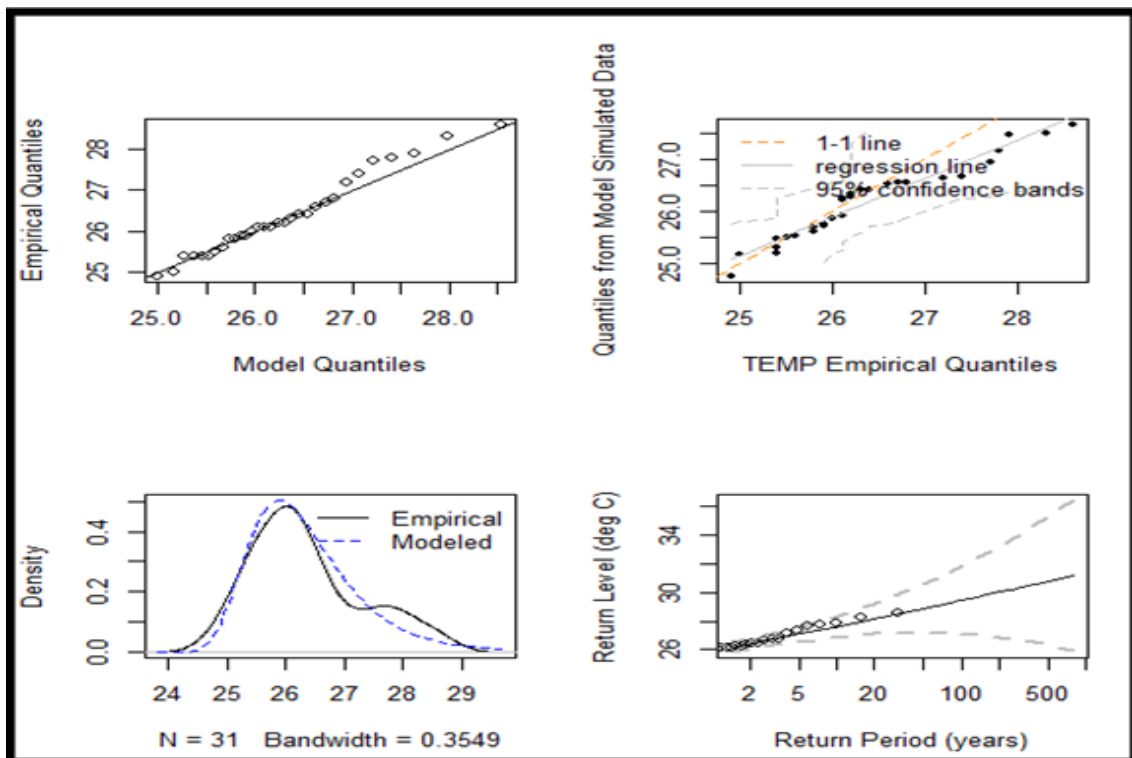


FIGURE 3.17 – Modèle GPD stationnaire (Rp)



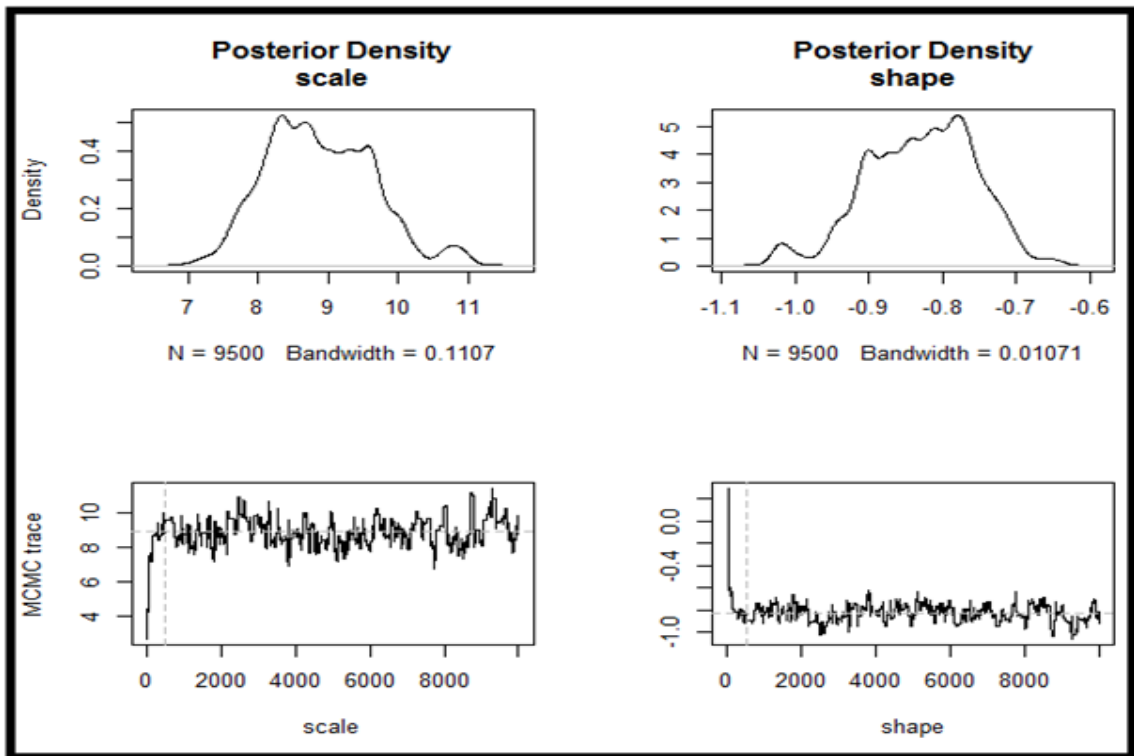


FIGURE 3.18 – GPD non stationnaire