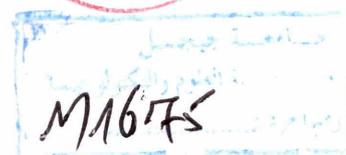


La République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Jijel

Faculté des Sciences et de la technologie
Département d'Electrotechnique



Mémoire de Fin d'Etude
pour l'Obtention du Diplôme de Master en Electrotechnique

Option : machines Electriques

Thème :

Approche Analytique Pour La Modélisation D'une Machine
Asynchrone

Encadré par :

M^r AOMAR Lyes

Présenté par :

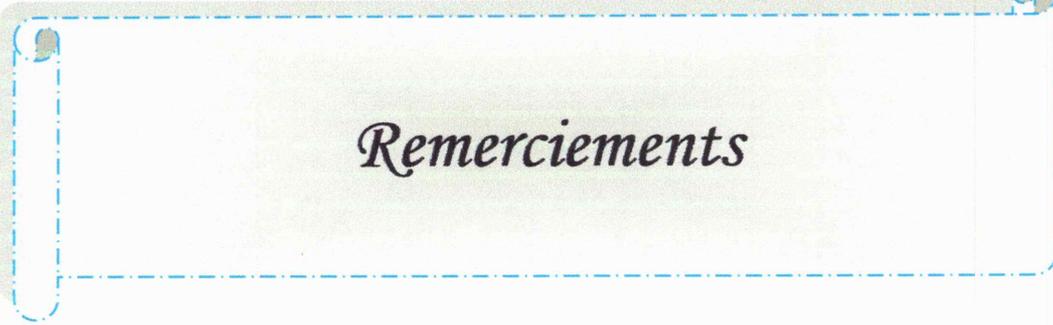
BOUMIMEZ Adil

Année universitaire : 2013/2014

Dédicaces

Je dédie ce travail à :
Ma mère,
La mémoire de Mon père,
Mes frères et mes sœurs,
Tous mes amis sans exception.

Adil



Remerciements

Remerciements

Avant tout, je tiens à remercier Dieu, le tout puissant, de m'avoir appris ce que j'ignorais, qui m'a donné le courage, la volonté, la patience et la santé durant toutes ces années d'études et de recherche et que grâce à lui ce travail a pu être réalisé.

J'ai eu la chance d'évoluer parmi les personnes qui m'ont toujours assuré de leur soutien, je tiens à remercier très sincèrement :

Mon encadreur, Monsieur Lyes AOMAR, qui a guidé mes premiers pas sur cette voie royale de la recherche dans le domaine de la modélisation des machines électriques par ses corrections et conseils durant les mois de recherches.

Je suis aussi redevable à tout les enseignants et personnel du Département d'Électrotechnique de l'Université de Jijel, et je témoigne aussi ma reconnaissance à toute personne m'ayant aidé de près ou de loin pour accomplir ce modeste travail.

Je ne saurais terminer ces remerciements sans mentionner tous mes collègues de l'Université de Jijel sans oublier également les membres de jury qui ont acceptés de juger ce travail malgré les empêchements qui les accablent.



Sommaire

Sommaire

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre I

Généralités

I.1 Introduction	3
I.2 Aperçu sur les différentes sources d'énergies.....	3
I.2.1 Les sources d'énergies fossiles.....	3
I.2.2 Les sources d'énergies terrestres.....	3
I.2.3 Les sources d'énergies nucléaires.....	4
I.2.4 Les sources d'énergies renouvelables.....	4
I.2.4.1 L'énergie hydraulique.....	4
I.2.4.2 L'énergie verte.....	4
I.2.4.3 Les pompes à chaleur.....	4
I.2.4.4 Le solaire.....	4
I.2.4.5 Les éoliennes.....	5
I.3 Différentes machines à courant alternatif.....	5
I. 3. 1. Machines synchrones.....	5
I. 3. 2. Machine asynchrone.....	6
I. 3. 2. 1. Historique sur la machine asynchrone.....	6
I. 3. 2. 2. Construction	7
I. 3. 2. 3. Constitution	8
I. 3. 2. 3. 1. Le stator	8
I. 3. 2. 3. 2. Le rotor	9
I. 3. 2. 3. 3. Bobinage	10
I. 3. 2. 4. Principe de fonctionnement d'une machine asynchrone.....	11
I. 3. 2. 5. Types des machines asynchrones.....	12
I. 3. 2. 5. 1. Machine asynchrone à rotor bobiné.....	12
I. 3. 2. 5. 2. Machine asynchrone à cage.....	13
I. 4. Conclusion.....	13

Chapitre II

Rappel sur le calcul du champ électromagnétique

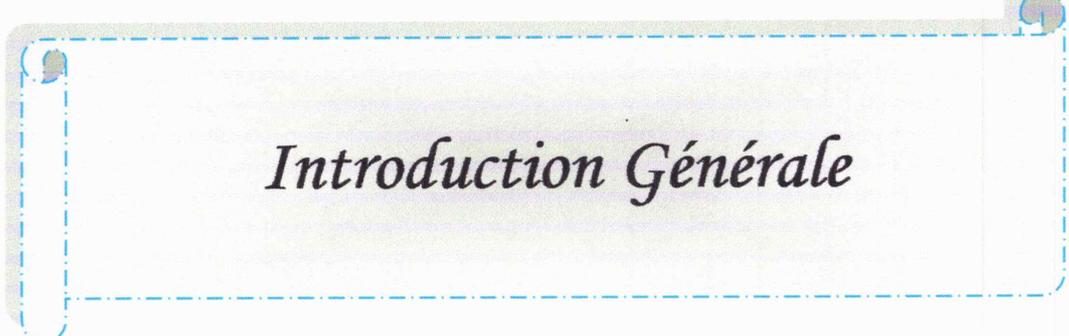
II. 1. Introduction.....	14
II. 2. Généralités sur le calcul du champ électromagnétique.....	14
II. 2. 1. Equations de maxwell et lois de comportement des milieux.....	14
II. 2. 1. 1. Equations de Maxwell.....	15
II. 2. 1. 2. Lois constitutives des milieux.....	16
II. 2. 1. 3. Conditions de passage entre deux milieux.....	17
II. 3. Approximation des régimes quasi stationnaires.....	18
II. 4. Modèles électromagnétiques.....	20
II. 5. Méthodes de résolution des EDP.....	22
II. 6. 1. Méthodes analytiques.....	23
II. 6. 2. Méthodes semi analytiques.....	23
II. 6. 2. 1. Méthode des circuits électriques couplés	23
II. 6. 2. 2. Méthode des intégrales de frontières.....	24
II. 6. 3. Méthodes numériques.....	25
II. 6. 3. 1. Méthodes des différences finies.....	25
II. 6. 3. 2. Méthodes des éléments finis.....	25
II. 6. Conclusion	27

Chapitre III

Modélisation analytique d'une machines asynchrone

III. 1. Introduction.....	28
III. 2. Description de la machine étudiée.....	28
III. 3. Densité de courant équivalente à une encoche.....	29
III. 4. Hypothèse simplificatrice.....	29
III. 5. Induction Magnétique Créée par une Nappe de Courant.....	29
III. 5. 1. Modèle géométrique de la machine	30
III. 5. 2. Mise en équations.....	31

III. 5. 3. Calcul du LAPLACIEN par Méthode de séparation des variables en Coordonnées cylindriques (expression du potentiel vecteur magnétique).....	31
III. 5. 4. Grandeurs électromagnétiques créés par une nappe de courant.....	33
III. 5. 4. 1. Induction magnétique.....	33
III. 5. 4. 2. Energie Magnétique stockée.....	34
III. 5. 4. 3. Couple électromagnétique crée par une nappe de courant.....	35
III. 6. Induction Magnétique Créée par Deux Nappes de Courant.....	35
III. 6. 1. Expression du potentiel vecteur magnétique	36
III. 6. 2. Grandeurs électromagnétiques créés par deux nappes de courant.....	37
III. 6. 2. 1. Induction magnétique.....	37
III. 6. 2. 2. Energie Magnétique stockée.....	39
III. 6. 2. 3. Couple engendré par les deux nappes de courant.....	40
III. 6. 2. 4. Autre manière de calculer le couple engendré par les deux nappes de courant	40
III. 6. 2. 5. Approximation du couple	41
III. 7. Induction Magnétique Créée par une alimentation alternative.....	41
III. 7. 1. Expression du potentiel vecteur magnétique en coordonnées cylindriques par la méthode de séparation des variables.....	45
III. 7. 2. Grandeurs électromagnétiques.....	46
III. 7. 2. 1. Induction magnétique.....	46
III. 7. 2. 2. Couple électromagnétique	48
III. 8. Conclusion.....	49
Conclusion générale.....	50
Annexe.....	52
Références.....	53



Introduction Générale

Introduction générale

Les machines asynchrones spécialement les moteurs asynchrones jouent un rôle important dans le domaine de la conversion de l'énergie électromécanique. Du fait de sa simplicité de construction, d'utilisation et d'entretien, de sa robustesse et sont faible coût d'achat de fabrication. Mais les machines subissent de plus en plus de perturbation auxquelles sont sensibles. [4]

Dans ces dernières années, l'industrie a connu une grande révolution concernant l'analyse et la simulation des dispositifs, à l'aide de l'utilisation des ordinateurs très puissants, ceci a permis de modéliser de façon assez précise des actionneurs électromagnétiques de plus en plus complexes.

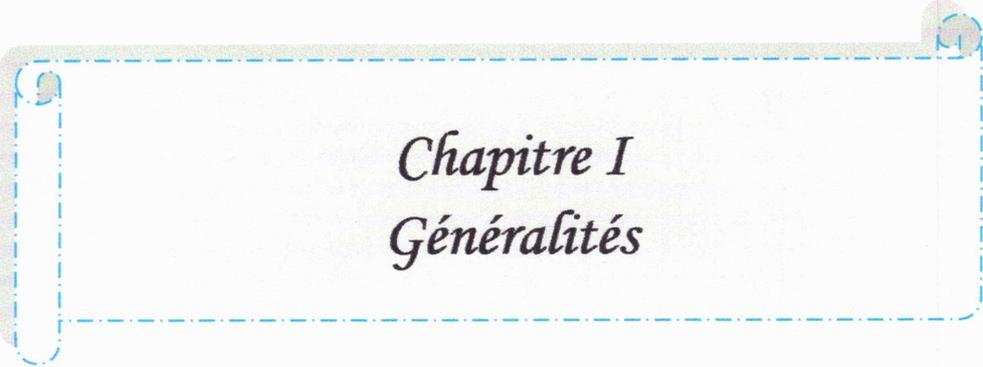
La modélisation des machines électriques est une tâche difficile dans le sens où la géométrie de ceux-ci est complexe, le nombre des variables mise en jeu est important, et leurs modèles sont non linéaires à cause la diversité de nature des phénomènes physiques (électromagnétiques, mécaniques, thermiques, aérauliques, ...etc.) qui les régissent. De plus, les caractéristiques et les performances requises doivent être optimisées, tout en respectant un ensemble de contraintes (techniques et/ou économiques) exigé par le cahier des charges.

Le premier chapitre de ce mémoire sera consacré à l'étude des composantes et du fonctionnement de la machine asynchrones. Après une brève introduction sur la consommation de l'énergie électrique. On présentera un aperçu sur les différentes sources d'énergie ainsi les différentes machines à courant alternatif, en particulier les machines asynchrones. On présentera une brève constitution de la machine et leurs principes de fonctionnement. On présentera aussi les différents types des machines asynchrones.

Le deuxième chapitre de ce mémoire sera consacré aux modèle électromagnétique des dispositifs étudié dans la modélisation. Pour ça on va définir les équations de maxwell et les conditions de passage caractérisant le dispositif étudient. On citera les différentes méthodes de résolution des EDP pour les différents modèles électromagnétiques avec leurs avantages et inconvénients. On terminera le deuxième chapitre par quelque définition des différentes méthodes de résolution des EDP citées.

Le troisième chapitre de ce mémoire sera consacré à la modélisation analytique de notre machine asynchrone. Cette modélisation basée sur la résolution analytique des équations du champ magnétique dans les différents milieux de la machine pour déterminer les différentes grandeurs électromagnétiques caractérisant la machine étudiée.

Notre travail sera achevé par une conclusion générale qui résume les résultats de nos investigations et des perspectives pour ce travail.



Chapitre I
Généralités

I. 1 Introduction

L'énergie électrique est l'un des facteurs primordiaux dans la vie quotidienne de l'être humain, ainsi, la consommation mondiale ne cesse d'augmenter par la multiplicité des domaines d'activités et des besoins journaliers faisant appel à l'électricité. Une grande partie de cette énergie provient des énergies fossiles causant ainsi des problèmes environnementaux.

A partir de cet état de fait et suite à la recherche d'un développement durable, la maîtrise et le développement des énergies renouvelables sont devenus l'un des importants sujets débattus et véhiculés au sein des congrès, conférences et des laboratoires de recherche etc., en particulier l'énergie éolienne qui a énormément évolué ces deux dernières décennies.

Dans ce chapitre, on va faire un aperçu sur les différentes sources d'énergie, les différentes machines électriques en commençant par les machines synchrones puis on fait un rappel sur les machines asynchrones telle que leurs constructions et constitution, son principe de fonctionnement et leurs types.

I. 2. Aperçu sur les différentes sources d'énergies [1]

I. 2. 1. Les sources d'énergies fossiles

Les énergies fossiles sont nommées ainsi car elles résultent d'une accumulation d'énergie solaire captée par des êtres vivants durant des milliers d'années. Leur combustion dégage d'énormes quantités de gaz nocifs. Elles sont d'un point de vue économique un capital et non pas un revenu. Parmi ces dernières, on peut citer :

- Le pétrole.
- Le charbon.
- Le gaz naturel.

I. 2. 2. Les sources d'énergies terrestres

Elles sont classées comme étant des sources d'énergie renouvelables. Mais, contrairement aux autres sources d'énergie, elles ne sont pas d'origine solaire, car elles sont plutôt le fruit du reste d'énergie que possède la terre depuis sa formation. Celles-ci sont :

- L'énergie marémotrice : Les marées sont produites de l'attraction de la lune et aussi du soleil ; sa force provient de la rotation de la terre.
- La géothermie : Source d'eau chaude provenant de la terre.

I. 2. 3. Les sources d'énergies nucléaires

L'énergie nucléaire est indépendante du soleil. Elle est tirée de la destruction ou de réassemblage des noyaux des atomes. Elles se classent en deux catégories :

- La fission : Utilise pratiquement de l'uranium (gros atomes).
- La fusion : Elle permet de combiner deux petits noyaux pour en faire un plus gros (hydrogène, deutérium, hélium).

La fusion est une énergie propre (ne produit aucun déchet radioactif) et elle est très abondante sur terre (hydrogène), contrairement à la fission. Mais, la fusion reste encore au stade des recherches.

I. 2. 4. Les sources d'énergies renouvelables

Elles proviennent directement ou indirectement du soleil, et elles ne sont donc pas limitées dans le temps, par contre, elles sont limitées en puissance disponible.

I. 2. 4. 1. L'énergie hydraulique

On distingue deux types d'installations utilisant la force hydraulique :

- Les centrales à accumulation : Elles permettent de créer de l'électricité à volonté, en ouvrant et fermant les turbines, car l'énergie hydraulique est stockée dans le lac.
- Les centrales au fil de l'eau : Elles exploitent le débit de grosses rivières sur des chutes de quelques mètres.

I. 2. 4. 2. L'énergie verte

Cette énergie est composée de toutes les matières produites naturellement, de manière renouvelable. On distingue deux types :

- La biomasse : L'énergie du bois et des végétaux.
- Le biogaz : La fermentation de déchets ménagers ou de purin de vache dégage un gaz, très proche du gaz naturel.

I. 2. 4. 3. Les pompes à chaleur

Les pompes à chaleur permettent d'inverser le rendement de Carnot (thermodynamique) et d'utiliser de l'électricité pour pomper de la chaleur d'une source froide vers une autre chaude.

I. 2. 4. 4. Le solaire

C'est l'utilisation directe de l'énergie reçue du soleil dans des capteurs soit électriques, soit thermiques.

– Photovoltaïque : Les photons de la lumière viennent frapper une surface photosensible qui libère alors des électrons. C'est le principe du photovoltaïque qui permet de convertir directement l'énergie solaire en énergie électrique.

– Solaire thermique : Les capteurs thermiques sont de simples corps noirs, utilisant l'énergie solaire pour chauffer de l'eau sanitaire ou des locaux.

I. 2. 4. 5. Les éoliennes

On peut récolter l'énergie cinétique des vents, provenant des différences de température entre les différents endroits sur terre, à base d'éoliennes. Plus de détails seront donnés dans les sections suivantes.

I. 3. Différentes machines à courant alternatif

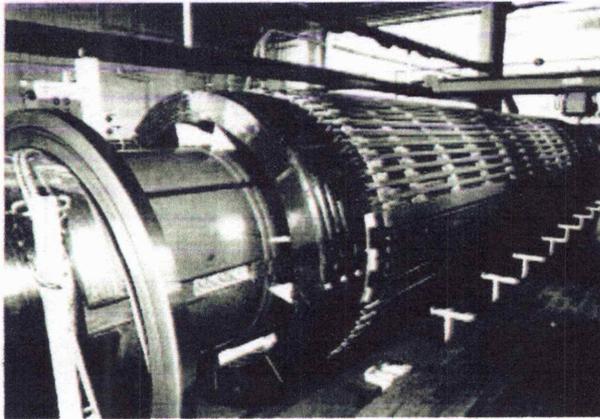
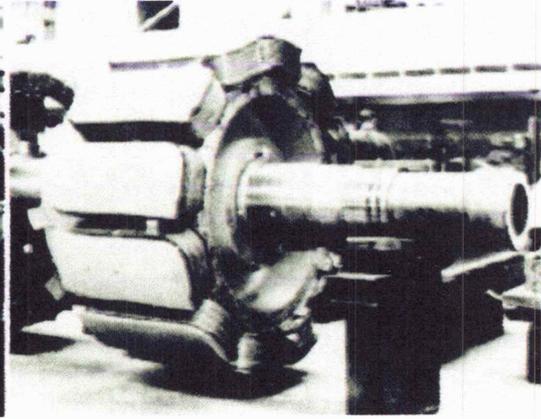
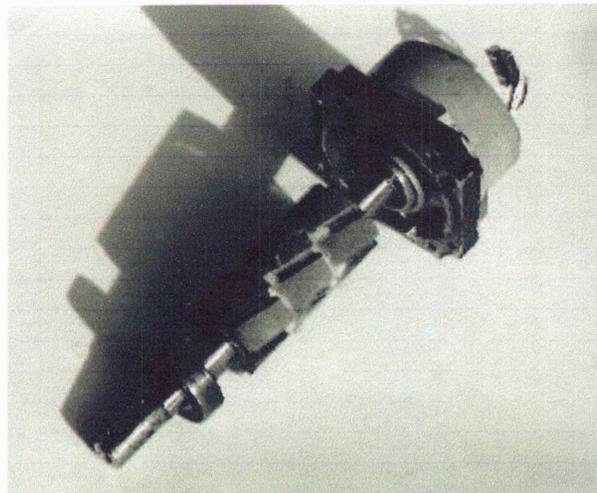
I. 3. 1. Machines synchrones

Le terme de machine synchrone regroupe toutes les machines dont la vitesse de rotation de l'arbre de sortie est égale à la vitesse de rotation du champ tournant. Pour obtenir un tel fonctionnement, le champ magnétique rotorique est généré soit par des aimants, soit par un circuit d'excitation. La position du champ magnétique rotorique est alors fixe par rapport au rotor, ce qui impose en fonctionnement normal une vitesse de rotation identique entre le rotor et le champ tournant statorique.

Cette famille des machines regroupe en fait plusieurs sous familles, qui vont de l'alternateur de plusieurs centaines de mégawatts au moteur de quelques watts, en passant par les moteurs pas à pas. Néanmoins, la structure de toutes ces machines est relativement proche. Le stator est généralement constitué de trois enroulements triphasés répartis, tel que les forces électromotrices générées par la rotation du champ rotorique soient sinusoïdales ou trapézoïdales. Les stators, notamment en forte puissance, sont identiques à ceux d'une machine asynchrone (voir ci-dessous).

Il existe trois grandes familles de rotor, ayant pour rôle de générer le champ d'induction rotorique :

- Les rotors bobinés à pôles lisses, figure I. 1. (a).
- Les rotors bobinés à pôles saillants, figure I. 1. (b)
- Les rotors à aimants, figure I. 1. (c)

**Figure I.1.a.** Rotor à pôles lisses**Figure I.1.b.** Rotor à pôles saillants**Figure I.1.c.** Rotor à aimants

I. 3. 2. Machines asynchrones

La machine asynchrone est une machine à courant alternatif qui ne possède pas de connexion entre le stator et le rotor. Le terme asynchrone provient du fait que la vitesse du rotor est différente de la pulsation des courants du stator.

I. 3. 2. 1. Historique sur les machines asynchrones

La machine asynchrone a vu son premier jour en 1887 par Nicolas Tesla [18], à l'année suivante Ferraris Galileo développa la théorie des machines tournantes, l'année d'après a connu la construction du premier moteur à cage d'écureuil par Michail Ossipowitsch et Doliwo-Dobrowolski [19]. En 1912, Paul Boucherot découvrit le rotor à encoches profondes et le stator à double cages afin de résoudre le problème d'appel de courant et celui du couple de démarrage. À cette époque ; la machine asynchrone était rarement utilisée, car la faiblesse

de cette dernière est son auto-excitation, l'amorçage de la génératrice nécessite de l'énergie réactive. Deux méthodes seulement peuvent fournir cette énergie, soit :

- La technique passive qui se base sur un banc de capacités.
- La technique active qui nécessite la présence d'un dispositif (circuit électronique de puissance) pour contrôler la génératrice.

Pour la première méthode, elle a été développée par plusieurs chercheurs ; en 1935 Basset [22] avait travaillé sur les capacités d'excitation des génératrices asynchrone, quatre ans après Wagner [23] a continué sur le même travail, mais malgré ça, la génératrice asynchrone restait un produit non commercialisé jusqu'aux années cinquante.

جامعة جيجل

مكتبة كلية الهندسة

بطاقة استعارة المذكرات

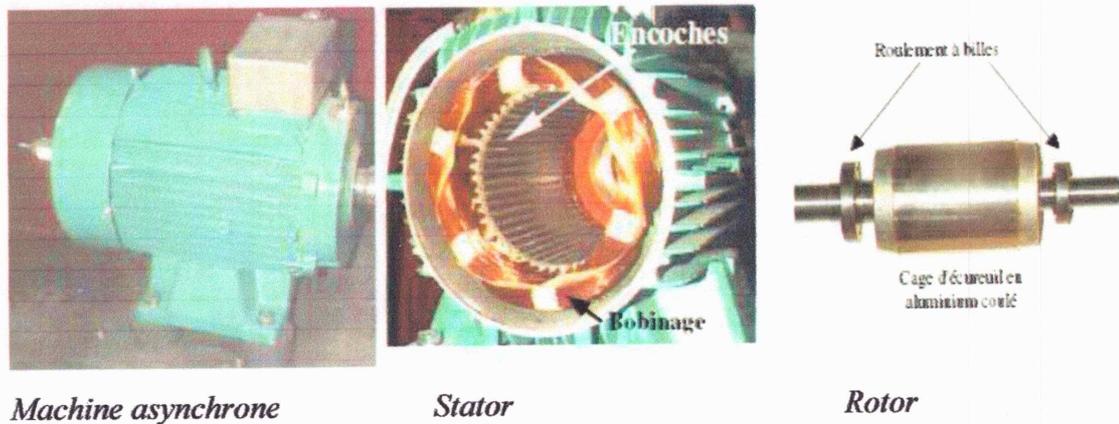
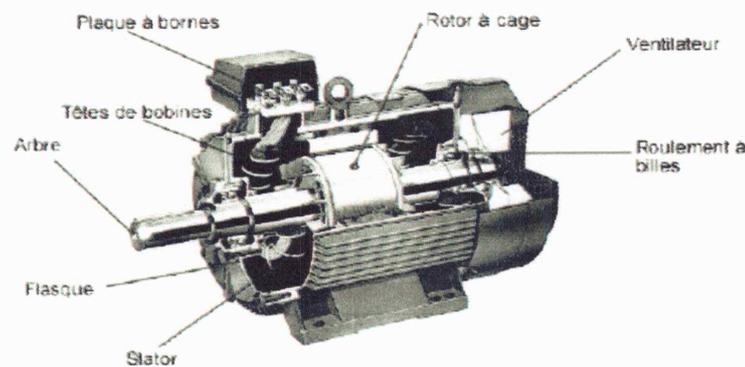
بطاقة رقم : 09/3033575
 الاسم واللقب :
 الرقم التسلسلي للكتاب : 09/2014
 عنوان الكتاب :
 اسم المؤلف :
 رقم النسخة : 02/02
 تاريخ الاستعارة : 10/05/2015
 تاريخ الاسترجاع : 17/05/2015
 الامضاء،

I. 3. 2. 2. Construction

La machine asynchrone comporte une partie fixe constituée d'une carcasse à l'intérieur de laquelle sont logés le circuit magnétique et le bobinage du stator d'une part, et une partie mobile appelée rotor d'autre part.

La carcasse nervurée à ailettes longitudinales est un monobloc en fonte ou en acier.

Les circuits magnétiques sont fabriqués avec des tôles magnétiques au silicium, à faibles pertes (par exemple : 1.7 W/kg, à un Tesla et à 60Hz) et isolée double face ; elle est découpée à la presse, encochée puis simplifiée. [26]

*Machine asynchrone**Stator**Rotor**Figure I.2 : photo d'une machine asynchrone avec le Stator et le Rotor qui la constituent**Figure I.3 : Machine asynchrone*

I. 3. 2. 3. Constitution

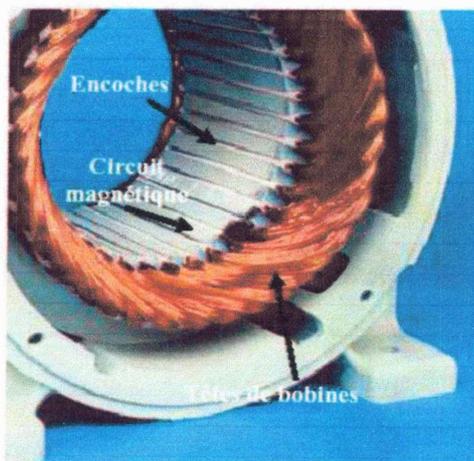
I. 3. 2. 3. 1. Le stator

Le stator de la machine asynchrone est constitué de tôles d'acier dans lesquelles sont placés les bobinages statorique. Ces tôles sont pour les petites machines, découpées en une seule pièce alors qu'elles sont pour les machines de puissance plus importante, découpées par sections. Elles sont habituellement recouvertes de vernis pour limiter l'effet des courants de Foucault. Au final, elles sont assemblées les unes aux autres à l'aide de boulons ou de soudures pour former le circuit magnétique statorique.

Une fois cette étape d'assemblage terminée, les enroulements statoriques sont placés dans les encoches prévues à cet effet. Ces enroulements peuvent être insérés de manière imbriqués, ondulés ou encore concentriques. L'enroulement concentrique est très souvent utilisé lorsque le bobinage de la machine asynchrone est effectué mécaniquement. Pour les grosses machines, les enroulements sont faits de méplats de cuivre de différentes sections insérés directement dans les encoches. L'isolation entre les enroulements électriques et les tôles d'acier s'effectue à l'aide de matériaux isolants qui peuvent être de différents types suivant l'utilisation de la machine asynchrone.

Le stator d'une machine asynchrone est aussi pourvu d'une boîte à bornes à laquelle est reliée l'alimentation électrique. La figure (I.4) représente la constitution du stator d'une machine asynchrone.

La figure montre la présence d'ailettes de ventilation assurant le refroidissement de la machine lorsque celle-ci fonctionne en charge [27-28].



Stator d'une machine asynchrone



*Stator d'une machine asynchrone
basse tension*

Figure I.4 : Photo du stator d'une machine asynchrone

I. 3. 2. 3. 2. Le rotor

Tout comme le stator, le circuit magnétique rotorique est constitué de tôles d'acier qui sont, en général, de même origine que celles utilisées pour la construction du stator. Les rotors des machines asynchrones peuvent être de deux types : bobinés ou à cage d'écureuil.

Les rotors bobinés (figure I.5.b) sont construits de la même manière que le bobinage statorique (insertion des enroulements dans les encoches rotorique). Les phases rotorique sont alors disponibles grâce à un système de bagues-balais positionné sur l'arbre de la machine. En ce qui concerne les rotors à cage d'écureuil (figure I.5.a), les enroulements sont constitués de barres de cuivre pour les gros moteurs ou d'aluminium pour les petits. Ces barres sont court-circuitées à chaque extrémité par deux anneaux dit "de court-circuit", eux aussi fabriqués en cuivre ou en aluminium.

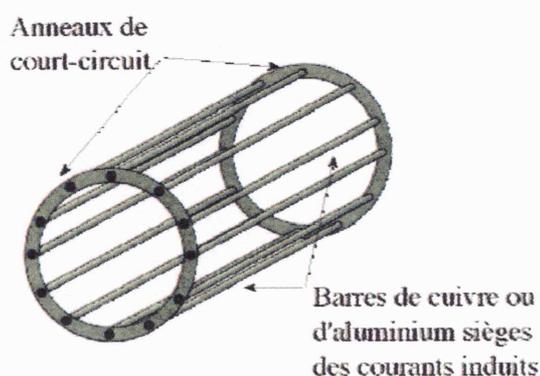


Figure I.5. (a) : Rotor à cage d'écureuil

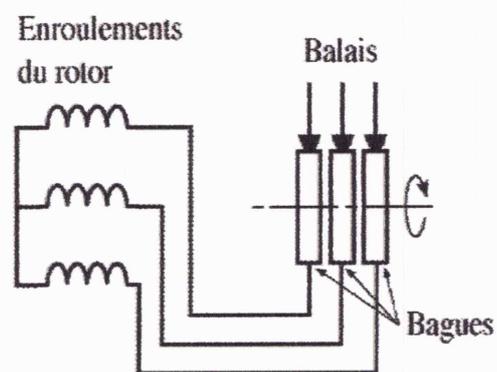


Figure I.5. (b) : Rotor bobiné

I. 3. 2. 3. 3. Bobinage [7]

On peut effectuer le bobinage d'une machine asynchrone de plusieurs façons, mais on utilise habituellement trois types d'enroulements :

- **L'enroulement imbriqué** s'emploie généralement pour le bobinage des stators de moteurs de quelques dizaines de kilowatts et plus.
- **L'enroulement concentrique** utilisé dans le cas des petits moteurs asynchrones, particulièrement lorsque le bobinage est mécanisé.
- **L'enroulement ondulé** est idéal pour les rotors des moteurs asynchrones à bagues.

L'enroulement concentrique est un bobinage obligatoirement à couche unique, de telle sorte que chaque encoche contient un seul côté de bobine. L'enroulement imbriqué et l'enroulement ondulé peuvent être des bobinages à simple couche, mais sont plus souvent à double couche. Si tel est le cas, chaque encoche contient deux côtés de bobine et le nombre de conducteurs par encoche doit nécessairement être un nombre pair.

Il est possible de relier en série toutes les bobines de l'enroulement pour une même phase ; on obtient alors un moteur qui ne peut opérer que sous une seule tension. Par contre, on peut répartir les bobines en un certain nombre de groupes à l'intérieur desquels elles sont connectées en série. Les groupes ainsi formés peuvent se relier en série ou en parallèle et permettre d'utiliser le moteur sous plusieurs tensions.

Lorsque les bobines sont faites de fils carrés ou rectangulaires d'assez forte section, elles sont formées sur des gabarits et insérées globalement dans des encoches ouvertes.

Dans le cas d'encoches de type semi-ouvert, on utilise habituellement plusieurs fils ronds, vernis et de faible section pour former les conducteurs des bobines. Comme les bobines faites de fils carrés, elles sont généralement formées sur des gabarits, mais introduites fil par filou quelques fils à la fois dans les encoches.

I. 3. 2. 4. Principe de fonctionnement d'une machine asynchrone

Le fonctionnement d'une machine asynchrone est basé sur le principe de l'interaction électromagnétique du champ tournant créé par le courant triphasé fourni à l'enroulement statorique par le réseau, et des courants induits dans l'enroulement rotorique lorsque les conducteurs de ce dernier sont coupés par le champ tournant. De cette façon le fonctionnement d'une machine asynchrone est analogue à celui d'un transformateur : le stator étant comparable à l'enroulement primaire et le rotor à l'enroulement secondaire qui, dans le cas général, peut tourner à la vitesse de rotation donnée par le rapport suivant :

$$n_1 = \frac{f}{p} \quad (I.1)$$

L'interaction électromagnétique des deux parties d'une machine asynchrone (sans collecteur) n'est possible que lorsque la vitesse du champ tournant (n_1) diffère de celle du rotor (n), c'est-à-dire, lorsque $n \neq n_1$, car dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque $n = n_1$, le champ serait immobile par rapport au rotor et aucun courant ne serait induit dans l'enroulement rotorique.

Le rapport :

$$g = \frac{n_1 - n}{n_1} \quad (I.2)$$

Est appelé glissement d'une machine asynchrone.

I. 3. 2. 5. Types des machines asynchrones

On peut citer deux types de machines asynchrones selon leurs formes de son rotor :

I. 3. 2. 5. 1. Machine asynchrone à rotor bobiné :

Les enroulements rotorique sont localisés dans les encoches situées à la périphérie du rotor. Ces enroulements sont bobinés de manière à obtenir un enroulement triphasé à « p » paires de pôle. Les bobinages rotorique sont toujours couplés en étoile, et les trois bornes accessibles sont reliées à la carcasse du stator à l'aide d'un système constitué de trois bagues tournants et de trois balais fixes.

La figure I.6 représente le rotor d'une machine asynchrone à rotor bobiné.

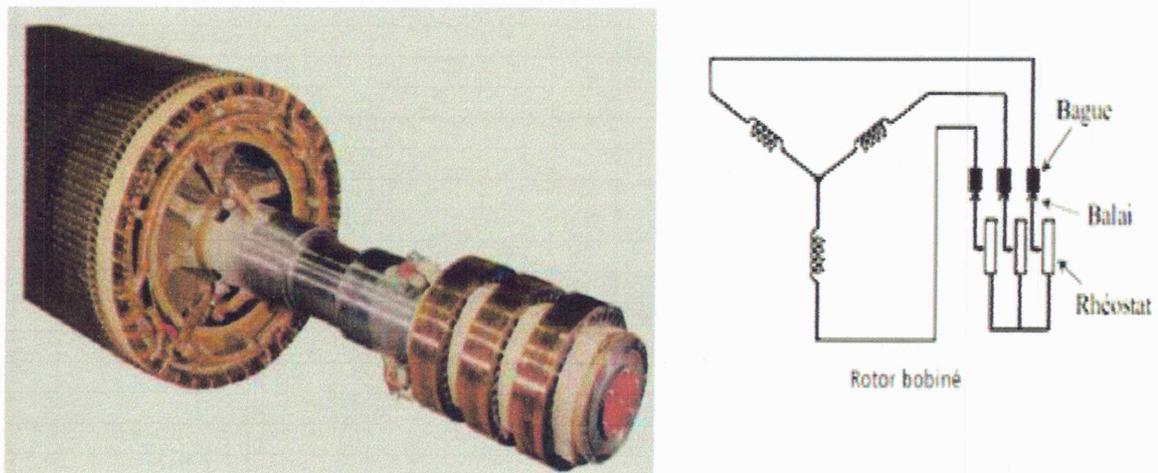


Figure I.6 : le rotor d'une MAS à rotor bobiné

I. 3. 2. 5. 2. Machine asynchrone à cage :

La grande majorité des moteurs sont à cages. Dans chaque encoche rotorique est placée une barre. Ces barres sont en cuivre pour les moteurs de forte puissance, et en alliage d'aluminium pour les machines de faible et moyenne puissance. Elles sont réunies à chaque extrémité du rotor par des anneaux réalisant le court-circuit. L'enroulement rotorique ainsi réalisé n'est pas accessible à partir du stator [4]. Comme il est présenté sur la figure I. 7

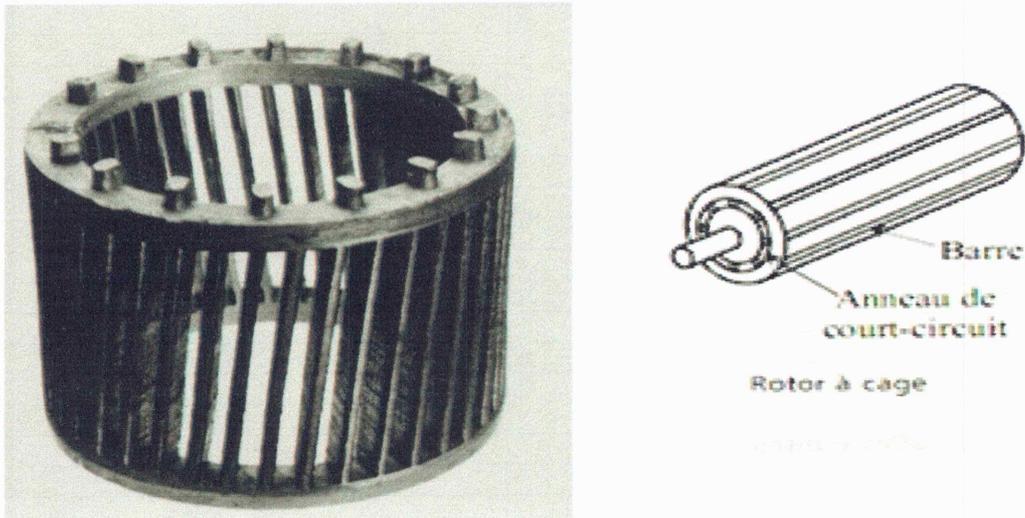


Figure I.7 : le rotor d'une MAS à cage d'écureuil

I. 4. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté un aperçu sur les différentes sources d'énergie. Aussi nous avons présenté un aperçu sur les différentes machines à courant alternatif mais précisément les machines asynchrones. Nous avons présenté l'historique, le principe de fonctionnement et nous avons terminés ce chapitre par les différents types des machines asynchrones.

Puisque le but principal de notre travail est la modélisation des machines asynchrones par les méthodes analytique, nous allons donner des notions générales sur la modélisation dans le chapitre suivant.

Chapitre II
Rappel sur le calcul du champ
électromagnétique

II. 1. Introduction

Ce deuxième chapitre est consacré à un rappel sur le calcul du champ électromagnétique pour les différentes modélisations.

La modélisation de tous dispositifs électromagnétiques avec n'importe quelle méthodes nécessite une parfaite connaissance des outils de modélisation basée sur les équations de Maxwell.

On termine ce chapitre par une présentation des différentes méthodes de modélisation en particulier la méthode analytique.

II. 2. Généralités sur les lois du champ électromagnétique

II. 2. 1. Equations de maxwell et lois de comportement des milieux

Les différents domaines physiques susceptibles d'être rencontrés dans un dispositif électromagnétique réel, peuvent être représentés schématiquement comme suit [8] :

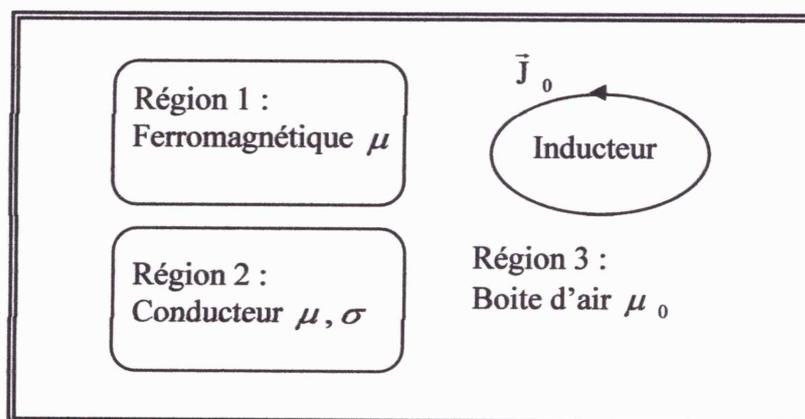


Figure II. 1 : Schéma général d'un dispositif électromagnétique

- Bobines conductrices dans lesquelles circulent des courants électriques.
- Région 1 pour canaliser les lignes du champ magnétique.
- Région 2 dans laquelle circulent les courants induits.
- Une boîte d'air englobant toutes les régions précédentes.

II. 2. 1. 1. Equations de Maxwell

Le comportement des phénomènes électromagnétiques traités dans le domaine de la physique est résumé par l'emploi des équations de Maxwell, appelées aussi équations générales de l'électromagnétisme. Ces équations s'écrivent sous leurs formes différentielles comme suit :

- Equation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (\text{II. 1})$$

- Equation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II. 2})$$

- Equation de conservation du flux magnétique :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{II. 3})$$

- Equation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{II. 4})$$

\vec{E} : Champ électrique [V/m].

\vec{D} : Vecteur de déplacement [A. S / m²].

\vec{H} : Champ magnétique [A/m].

\vec{B} : Induction magnétique [T]

ρ : Densité de charge volumique [C/m³].

\vec{J} : Densité de courant [A/m²] ; dans le cas générale elle est donnée par :

$$\vec{J} = \vec{J}_C + \vec{J}_D + \vec{J}_M \quad (\text{II. 5})$$

\vec{J}_C : Exprime la densité de courant de conduction électrique induit et inducteur donnée

par :

$$\vec{J}_C = \vec{J}_{ex} + \vec{J}_{ind} \quad (\text{II. 6})$$

\vec{J}_{ex} : Densité de courant de source (courants d'excitations)

\vec{J}_{ind} : Densité de courant résultant du phénomène induit

\vec{J}_D : Représente la densité de courant de déplacement dont l'expression est la suivante :

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II. 7})$$

Les quatre équations (I. 1), (I. 2), (I. 3), et (I. 4) sont des équations différentielles aux dérivées partielles, linéaires et du premier ordre par rapport au temps et aux coordonnées spatiales. Le choix d'un système de coordonnées est dicté par la symétrie inhérente au problème particulier sous considération.

On rajoute aux équations précédentes les lois de comportement des milieux ainsi que la loi d'Ohm.

II. 2. 1. 2. Lois constitutives des milieux

Les cinq champs vectoriels précédents ne sont pas aussi indépendants les uns des autres, leurs liaisons sont fonction du milieu où ils règnent.

a. Relations du milieu :

- Relation magnétique

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r \quad (\text{II. 8})$$

- Relation électrique

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (\text{II. 9})$$

b. Loi d'Ohm :

- Au repos

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{II. 10})$$

- En mouvement

$$\vec{J} = \sigma \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \quad (\text{II. 11})$$

\vec{B}_r : Induction magnétique rémanente.

\vec{v} : Vitesse du point considéré.

σ, μ et ϵ : Sont les caractéristiques du milieu considéré et représentent respectivement : les tenseurs de conductivité électrique, de la perméabilité magnétique et de la permittivité électrique.

Dans le cas où les milieux considérés sont linéaires, homogènes et isotropes σ, μ et ϵ se ramènent à des scalaires.

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

μ_0 : Perméabilité du vide égale à $4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} [H / m]$.

μ_r : Perméabilité relative.

ϵ_0 : Permittivité du vide, elle vaut à $10^{-9} / (36 \cdot \pi) [F / m]$.

ϵ_r : Permittivité relative.

II.2. 1. 3. Conditions de passage entre deux milieux

Jusqu'ici, toutes les relations sources–champ et électrique–magnétique caractérisant un milieu quelconque, ont été définies. Il reste à déterminer les relations entre les grandeurs de deux milieux différents magnétiquement et électriquement (figure II. 2). On intègre les équations de Maxwell entre deux points très voisins de part et d'autre d'une surface séparant ces deux milieux, le résultat nous permet de déduire les constatations suivantes [26] :

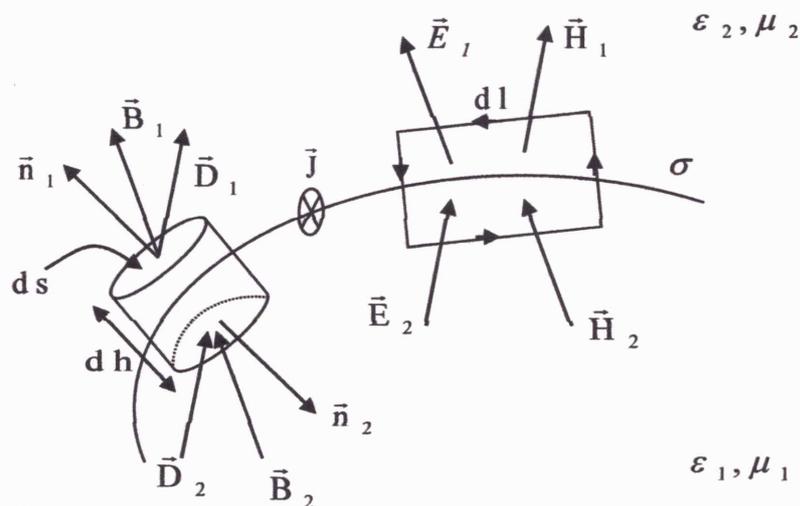


Figure II. 2 : Conditions de passage à l'interface entre deux milieux différents

- pour les grandeurs magnétiques

➤ Conservation de la composante normale de l'induction magnétique \vec{B} .

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{II. 12})$$

➤ Discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique \vec{H} due aux courants surfaciques \vec{J}_s .

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \wedge \vec{n} = \vec{J}_s \quad (\text{II. 13})$$

- Pour les grandeurs électriques

➤ Conservation de la composante tangentielle du champ électrique \vec{E}

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \wedge \vec{n} = 0 \quad (\text{II. 14})$$

➤ Discontinuité de la composante normale de l'induction électrique \vec{D} due aux charges surfaciques Q_s

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = Q_s \quad (\text{II. 15})$$

\vec{n} : La normale à la surface de séparation entre les milieux.

II. 3. Approximation des régimes quasi stationnaires

Dans le domaine électromagnétique, l'approximation des régimes quasi stationnaires consiste à considérer comme négligeable de temps de propagation des ondes électromagnétiques devant la période du signal.

Ainsi pour une onde électromagnétique sinusoïdale de période temporelle T , de vitesse c et de longueur d'onde λ , telle que $\lambda = c.T$, et pour un observateur situé à une distance D d'un point quelconque du circuit, on est dans le cadre de l'ARQS si $D \ll \lambda$: on choisit une distance limite égale à $\lambda/6$.

Rappelons l'équation de maxwell-ampère :

$$\overrightarrow{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (\text{II. 16})$$

En prenant la divergence de cette expression, on obtient

$$div \vec{J} + div \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{II. 17})$$

On considère les matériaux ayant la permittivité relative de 1.

En combinant avec les équations :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (\text{II. 18})$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{II. 19})$$

On a donc

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} div D + \frac{\partial (div D)}{\partial t} = 0 \quad (\text{II. 20})$$

En utilisant de l'expression ($div \mathbf{D} = \rho$), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{II. 21})$$

La résolution de cette équation différentielle :

$$\rho(t) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{\sigma}{\epsilon_0} t} \quad (\text{II. 22})$$

Lorsque l'on réalise l'application numérique avec du cuivre afin de connaître la constante de temps τ du système, on obtient :

$$\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma_{cuivre}} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12}}{59,6 \cdot 10^6} = 1,5 \cdot 10^{-19} s \quad (\text{II. 23})$$

Dans la gamme de basse fréquence qui nous intéresse (jusqu'à quelque 10^{aine} de MHz), la valeur de constante de temps est très inférieure aux périodes rencontrées ($T=10^{-7}$ s avec $f=10$ MHz). Etant donnée la vitesse d'établissement des charges dans le cuivre, il est possible de

négliger le terme $\frac{\partial D}{\partial t}$ dans l'expression (II. 16). Par conséquent, l'équation de Maxwell-

Ampère devient :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{II. 24})$$

II. 4. Modèles électromagnétiques

Pour étudier l'évolution des grandeurs électromagnétiques, on doit résoudre les équations de Maxwell (de l'équation (II. 21) à l'équation (II. 24) associées aux conditions de passage. Ces équations sont souvent transformées avant d'être appliquées au problème physique à résoudre, cette transformation consiste en l'emploi de différents potentiels : Vecteur ou Scalaire, Magnétique ou Electrique afin de réduire le nombre d'inconnues et le nombre d'équations à résoudre.

Suivant les dispositifs que l'on étudie, certains phénomènes deviennent négligeables, les équations se découplent alors, donnant naissance à des modèles plus simples, représentés par le tableau (II. 1).

Modèles	Méthodes	Equations	variables
Electrostatique	Potentiel scalaire électrique	$div(\epsilon \overrightarrow{grad} V) + \rho = 0$	V
électrocinétiques	Potentiel scalaire électrique	$div(\sigma \overrightarrow{grad} V) = 0$	V
	Potentiel vecteur électrique	$\overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\sigma} \overrightarrow{rot} \vec{T}\right) = 0$	\vec{T}
Magnétostatiques	Potentiel scalaire magnétique total	$div(\mu \overrightarrow{grad} \phi) = 0$	ϕ
	Potentiel scalaire magnétique réduit	$div(\mu \overrightarrow{grad} \phi^*) = div(\mu \vec{H}_0)$	ϕ^*
	Potentiel vecteur magnétique	$\overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{rot} \vec{A}\right) = \vec{J}$	\vec{A}
Magnétodynamiques	Champ magnétique	$\overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\sigma} \overrightarrow{rot} \vec{H}\right) + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{0}$	\vec{H}
	Potentiel vecteur magnétique modifié	$\overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{rot} \vec{A}^*\right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}^*}{\partial t} = \vec{0}$	\vec{A}^*
	Potentiel vecteur magnétique potentiel scalaire électrique	$\overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{rot} \vec{A}\right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \overrightarrow{grad} V = \vec{J}_{ex}$ $div(\epsilon \overrightarrow{grad} V) + div\left(\epsilon \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\rho$	$\vec{A} - V$
	Potentiel vecteur électrique Potentiel scalaire magnétique	$r\overrightarrow{ot}\left(\frac{1}{\sigma} r\overrightarrow{ot} \vec{T}\right) + \mu \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} - \mu \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{grad} \Omega) = 0$ $Div \mu \cdot (\vec{T} - \overrightarrow{Grad} \Omega) = 0$	$\vec{T} - \Omega$

Tableau II. 1. : Modèles électromagnétiques

II. 5. Méthodes de résolution des EDP

Comme nous l'avons déjà montré dans les paragraphes précédents, les phénomènes électromagnétiques se traduisent par des équations différentielles aux dérivées partielles (EDP), dont la solution peut être trouvée par différentes méthodes.

On distingue trois types de méthodes :

- Analytiques
- Semi analytiques
- numériques

La différence entre ces trois types des méthodes est illustrée dans le tableau (II.2)

TYPES	Méthodes analytiques	Méthodes semi analytiques	Méthodes numériques
Avantages	Simple et faciles à programmer	Simple est faciles à programmer	Applicables aux géométries complexes
	Résultats exacts et précis		
	Temps de calcul et espace mémoire très Réduits	Temps de calcul réduit	Applicables aux systèmes non linéaires
Inconvénients	Nécessitent un développement délicat	Utilisent des approximations	Utilisent des approximations
	Se limitent à des géométries simples	Nécessitent la discrétisation du Domaine d'étude	Nécessitent la discrétisation du Domaine d'étude
		Applicables uniquement aux systèmes linéaires	Se limitent à des géométries simples
			Applicables uniquement aux systèmes linéaires

Tableau II.2. : Comparaison entre les différents types des méthodes de résolutions des EDP

II. 5. 1. Méthodes analytiques

La méthode analytique couramment utilisée pour la résolution des EDP de manière analytique, est la méthode de séparation de variables. Le principe de cette dernière consiste à mettre l'inconnue sous forme d'un produit des fonctions, dont chacune ne dépend que d'une seule variable.

Soit en coordonnées cartésiennes, l'inconnue $V(x, y, z)$ qui écrit comme suit :

$$V(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \quad (\text{II. 25})$$

Avec :

$V(x, y, z)$: représente la solution de l'EDP de sorte que :

$X(x)$: est une fonction dépendant seulement de la variable x .

$Y(y)$: est une fonction dépendant seulement de la variable y .

$Z(z)$: est une fonction dépendant seulement de la variable z .

La méthode de séparation de variables étant une partie intéressante, elle sera présentée durant le troisième chapitre.

II. 5. 2. Méthodes semi analytiques

Ces méthodes ne résolvent pas directement l'EDP. Elles font usage de l'expression analytique du potentiel vecteur magnétique donnée par la formule de Biot et Savart. On présente la méthode des circuits électriques couplés et la méthode des intégrales de frontières.

II. 5. 2. 1. Méthode des circuits électriques couplés

Le principe de cette méthode est basé sur la résolution de l'équation de Poisson définissant la liaison entre le champ magnétique \vec{H} et sa source (la densité de courant J) et la combinaison de la solution obtenue avec l'équation de l'induction (équation de Maxwell Faraday équation (II. 2)) où ce même champ est à son tour source de cette densité.

Soit un conducteur composé de N_s spires principales dont chacune d'elles est subdivisée en spires élémentaires. D'où le schéma électrique équivalent (figure II. 3)

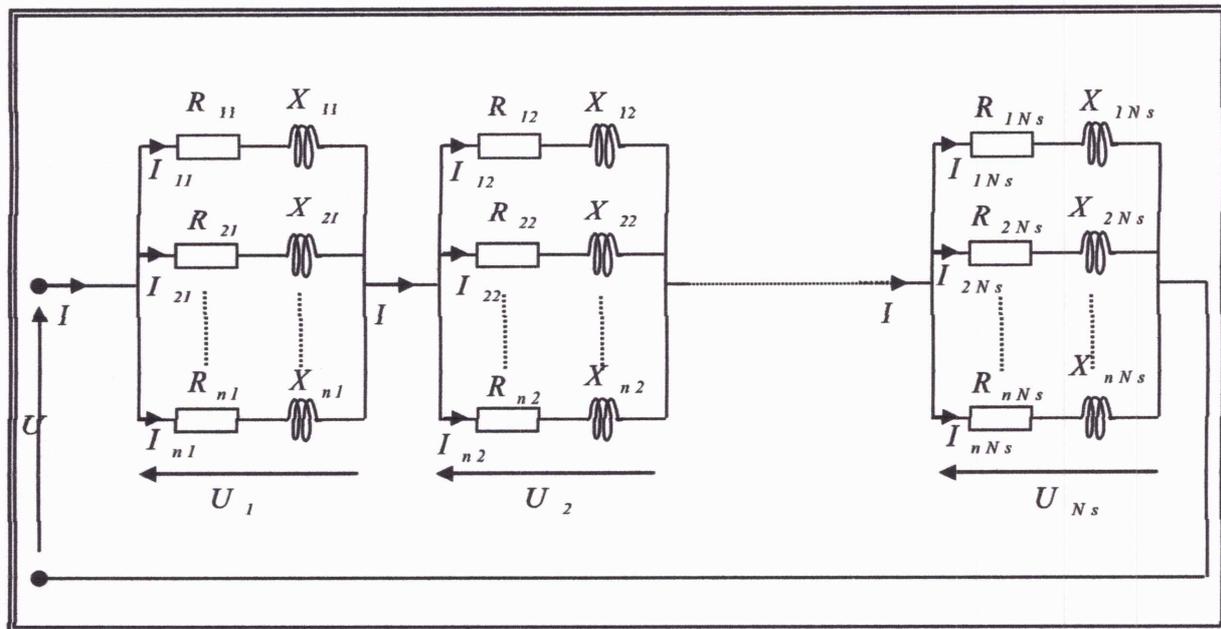


Figure II. 3 : Schéma électrique équivalent de l'inducteur

On supposera les grandeurs électromagnétiques uniformément réparties à l'intérieur de chacune de spires élémentaires.

La méthode consiste à formuler les équations de Maxwell et la loi d'ohm pour chaque spire élémentaire, de façon à obtenir une équation faisant intervenir les chutes de tension résistives et inductives correspondantes.

II. 5. 2. 2. Méthode des intégrales de frontières

La méthode des intégrales de frontières a été d'abord utilisée dans le domaine de la résolution des équations de Maxwell par C. W. Trowbridje et son groupe, puis par Wexler.

Elle permet la détermination des grandeurs inconnues sur les frontières du domaine qui sont maillées à l'aide d'un maillage de type élément fini et les inconnues résultantes sont calculées en construisant un système linéaire.

En fait, la connaissance de la variable inconnue sur les frontières du domaine suffit pour connaître la solution en tout point.

II. 5. 3. Méthodes numériques

II. 5. 3. 1. Méthodes des différences finies

C'est une méthode basée sur le théorème de Taylor où on remplace l'opérateur différentiel par un opérateur aux différences.

Les démarches de cette méthode sont les suivantes :

- Discrétisation du domaine d'étude
- Approximation des dérivées
- Résolution du système d'équations



II. 5. 3. 2. Méthodes des éléments finis

Elle utilise une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.

Cette méthode se base principalement sur les quatre démarches suivantes :

- Discrétisation géométrique du domaine d'étude en éléments finis.
- Approximation des dérivées partielles sur chaque élément.
- Assemblage et calcul des matrices élémentaires.
- Résolution de l'équation matricielle après la prise en compte des conditions aux limites.

On cherche donc tout d'abord à exprimer à partir du model local, constitué des équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites, une formulation qui porte sur le domaine de résolution. Cette présentation intégrale peut se faire à partir de l'une des deux méthodes de formulation variationnelle (méthode de Ritz) ou la méthode des résidus pondérés (méthode de Galerkin). La première concerne les milieux pour lesquels on peut exprimer l'énergie du système tandis que la seconde procédure est plus générale et ne nécessite pas la connaissance de l'expression de cette énergie.

Soit par exemple l'équation de Poisson suivante :

$$\Delta U = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \phi_c = 0 \quad (\text{II. 26})$$

Le principe des résidus pondérés consiste à remplacer cette équation aux dérivées partielles par l'intégrale W telle que :

$$W = \int_V \psi(x, y, z) [L[\phi(x, y, z)] - \phi_C(x, y, z)] dV = 0 \quad (\text{II. 27})$$

Où $\psi(x, y, z)$ est une fonction de pondération et L représente l'opérateur différentiel.

Après intégration par partie

$$W = \iint_{(\Omega)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy - \iint_{(\Omega)} \psi \phi_C d\Omega + \oint_{(s)} \psi \frac{\partial U}{d\eta} ds = 0 \quad (\text{II. 28})$$

L'approximation de la fonction ϕ est une approximation par sous domaines ϕ^e qui sont appelés éléments. Les fonctions approchées $\phi^e(x, y)$ sur chaque élément sont construites de manière à être continues sur l'élément ϕ^e et satisfait les conditions de continuités entre les différents éléments.

$$\phi^e(x, y) = \sum_j N_j(x, y) \cdot \phi_j \quad (\text{II. 29})$$

N_j : Représente la fonction d'interpolation, qui d'ailleurs peut être choisie en utilisant la méthode de Galerkinge qui consiste à mettre la fonction de pondération égale à la fonction d'interpolation.

A partir de l'intégrale W , après discrétisation et approximation de la fonction inconnue sur chaque élément, et après intégration par partie, nous obtenons le système matriciel suivant :

$$W = \sum_{e=1}^{N_e} ([K]^e \cdot [\phi_m]^e - [\phi_C]^e) = 0 \quad (\text{II. 30})$$

II. 6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les équations de Maxwell associées aux structures constituant les milieux considérés.

La résolution des différents modèles qui régissent le dispositif étudié peut se faire par plusieurs méthodes notamment les méthodes analytiques, méthodes semi analytiques, et les méthodes numériques.

La modélisation des machines n'est complète que si l'on peut déterminer les grandeurs électromagnétiques locales à partir de leurs sources, cela s'effectue grâce aux équations de Maxwell associées avec les relations constituant les milieux considérés.

Nous avons terminé ce chapitre par les méthodes de résolution des problèmes rencontrés dans l'électromagnétisme, telle que présentée à la fin de ce chapitre.

Chapitre III
Modélisation analytique des Machines
asynchrones

III. 1. Introduction

La modélisation des machines électriques fait appel à des équations en général très complexes. En effet, la répartition des enroulements et la géométrie propre de la machine asynchrone rendent son modèle difficile à mettre en œuvre. Cependant, l'adoption de certaines hypothèses simplificatrices permet de contourner cette difficulté.

Dans ce chapitre, nous allons présenter une méthode analytique qui nous permettra de calculer les grandeurs électromagnétiques, identifiant le comportement de la structure de notre machine asynchrone.

Dans ce troisième chapitre nous allons définir les différentes grandeurs électromagnétiques de la machine asynchrone à partir de l'équation du champ magnétique dans trois cas :

- 1^{er} cas : cas d'une seule densité de courant superficielle dans le stator,
- 2^{ème} cas : existant de deux densités de courants, l'une au stator et l'autre au rotor.
- 3^{ème} cas : c'est le deuxième cas mais en existant de l'effet temporelle.

III. 2. Description de la machine étudiée

Le calcul du champ magnétique réel dans l'entrefer d'une machine asynchrone est analytiquement ardu. Si nous faisons néanmoins un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, on peut calculer le champ dans une machine à entrefer constant. La machine est dite « à pôles lisses ».

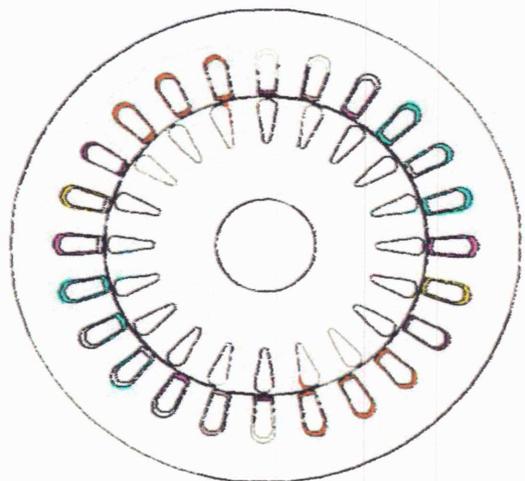


Figure III. 1 : Schéma d'une machine asynchrone

III. 3. Densité de courant équivalente à une encoche

Chaque encoche peut être remplacée par une densité de courant équivalente, placée au droit de l'isthme d'encoche. L'intérêt de ce processus est de ramener des sources extérieures à des sources localisées. Comme il est présenté sur la figure III. 2.

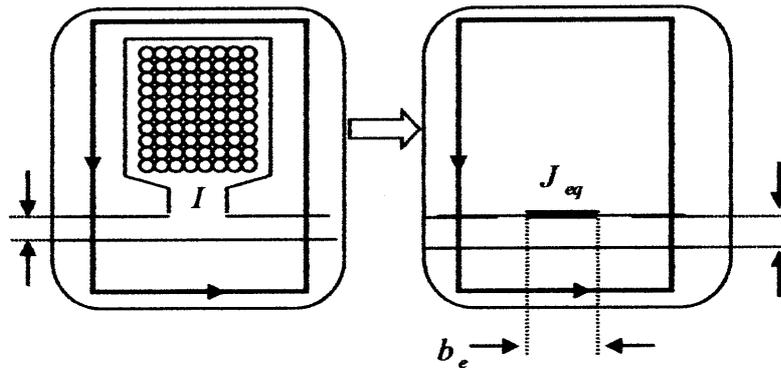


Figure III. 2 : Définition de la densité de courant superficielle équivalente à une encoche

III. 4. Hypothèses

Pour l'objectif souhaité, on pose les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Nous ne prendrons pas en compte les phénomènes d'hystérésis.
- Le milieu est linéaire et isotrope.

III. 5. Induction Magnétique créée par une Nappe de Courant

Ici dans le but de démontrer et simplifier la compréhension de notre développement analytique, nous allons commencer notre modélisation par une machine fictive constituée d'un stator et d'un rotor en tôles magnétique de perméabilité magnétique relative supposée infinie figure III.3 ; Sur la surface interne du stator on dispose une densité de courant $J(\theta)$.

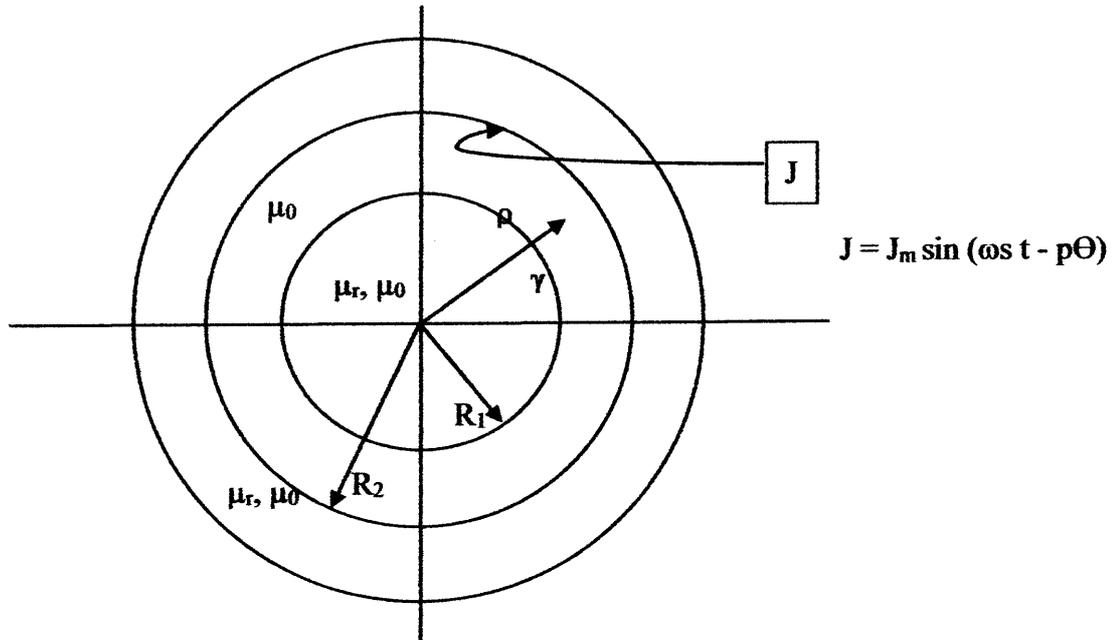


Figure III.3 : la machine étudiée avec une nappe de courant

III. 5. 1. Modèle géométrique de la machine

Dans un système de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) dont l'axe $(\vec{o z})$ est confondu avec l'axe de la machine, et à partir des hypothèses simplificatrices précédentes notre domaine d'étude devient tel que le présenté sur la figure (III. 4).

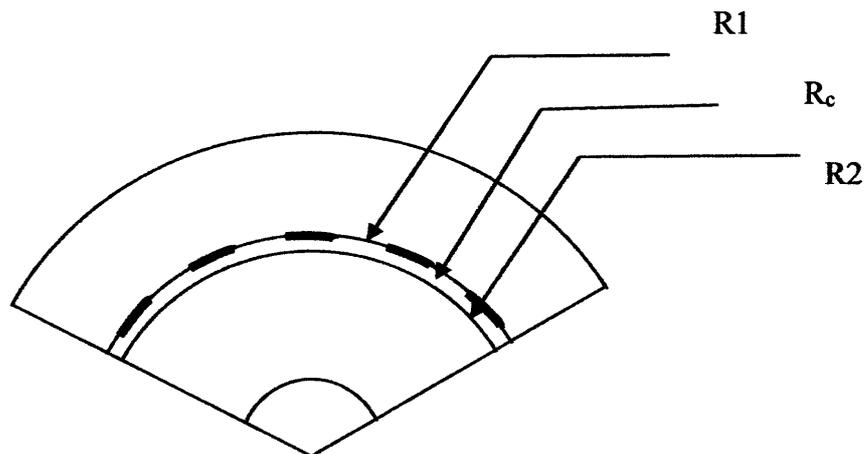


Figure III. 4 : Domaine d'étude de la machine

III. 5. 2. Mise en équations

Nous utilisons le modèle magnétostatique, plus précisément le modèle bidimensionnel, le plus adapté à la nature et aux caractéristiques de notre machine, dont la forme générale de l'équation à résoudre est présentée au niveau du deuxième chapitre.

À partir de nos hypothèses simplificatrices, l'équation qui régit le modèle magnétostatique est donnée par :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right) = \vec{J} \quad (\text{III. 1})$$

Le potentiel vecteur \vec{A} n'a plus qu'une seule composante non nulle A_z située dans la direction (oz) . Dans cette condition, les équations vectorielles ci-dessus se réduisent aux équations scalaires.

$$-\frac{1}{\mu} \Delta A(\rho, \theta) = J(\theta) \quad (\text{III. 2})$$

Connaissant les conditions de passages entre les différentes zones de la machine, nous pouvons y déterminer les expressions du potentiel vecteur magnétique.

III. 5. 3. Calcul du LAPLACIEN par méthode de séparation des variables en coordonnées cylindriques (expression du potentiel vecteur magnétique)

Le potentiel vecteur magnétique a une seule composante suivant l'axe (oz) , il dépend seulement des deux variables spatiales ρ et θ .

$$A(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(\rho, \theta) \quad (\text{III. 3})$$

$$A_n(\rho, \theta) = F_n(\rho) \cdot G_n(\theta) \quad (\text{III. 4})$$

Dans un système de coordonnées cylindrique l'équation de Laplace devient :

$$\frac{\partial^2 A_z(\rho, \theta)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z(\rho, \theta)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_z(\rho, \theta)}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{III. 5})$$

D'où la solution générale :

$$A(\rho, \theta) = \sum_{m=1}^{+\infty} |\alpha_m \cos(m\theta) + \beta_m \sin(m\theta)| \cdot |\gamma_m \rho^m + \lambda_m \rho^{-m}| \quad (\text{III. 6})$$

Les quatre constantes d'intégration $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m$ et λ_m sont obtenues en appliquant les conditions de passage sur les valeurs du champ magnétique tangentiel en $\rho = R_1$ et $\rho = R_2$

A $\rho = R_1$ on a:

$$-\frac{1}{\mu_0} \sum_{m=1}^{+\infty} |\alpha_m \cos(m\theta) + \beta_m \sin(m\theta)| \cdot m |\gamma_m R_1^{m-1} - \lambda_m R_1^{-m-1}| = 0 \quad (\text{III. 7})$$

A $\rho = R_2$ on a:

$$\frac{1}{\mu_0} \sum_{m=1}^{+\infty} |\alpha_m \cos(m\theta) + \beta_m \sin(m\theta)| \cdot m |\gamma_m R_2^{m-1} - \lambda_m R_2^{-m-1}| = J_{\max} \cos(P\theta) \quad (\text{III. 8})$$

En remplaçant dans ces dernières équations le potentiel vecteur par ses expressions correspondantes, nous obtenons les valeurs des constantes :

$$\begin{cases} \alpha_m = 1 \\ \beta_m = 0 \\ \gamma_m = \frac{\mu_0 J_{\max}}{P} \frac{1}{(1-x^{2p})} \frac{1}{R_2^{p-1}} \\ \lambda_m = \frac{\mu_0 J_{\max}}{P} \frac{1}{(1-x^{2p})} x^{2p} R_2^{p+1} \end{cases} \quad (\text{III. 9})$$

Avec :

$$x = \frac{R_1}{R_2} \quad (\text{III. 10})$$

D'où l'expression du potentiel vecteur dû à la nappe de courant est

$$A_J(\rho, \theta) = \sum_{p=1}^{+\infty} \cos(p\theta) \frac{\mu_0 J_{\max}}{P} \frac{1}{(1-x^{2p})} \left(\frac{\rho^p}{R_2^{p-1}} + x^{2p} R_2^{p+1} \rho^{-p} \right) \quad (\text{III. 11})$$

La structure électromagnétique est parfaitement décrite par la connaissance du potentiel vecteur magnétique, puisque toutes les autres grandeurs électromagnétiques caractéristiques de la machine peuvent s'en déduire.

III. 5. 4. Grandeurs électromagnétiques créées par une nappe de courant

A partir des relations de l'électromagnétisme, nous pouvons trouver les expressions des différentes grandeurs créées par une nappe de courant.

III. 5. 4. 1. Induction magnétique

Les composantes radiale et tangentielle de l'induction magnétique, due à la nappe de courant, sont données, à partir de la connaissance du potentiel vecteur par :

$$\begin{cases} B_r(\rho, \theta) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A(\rho, \theta)}{\partial \theta} \\ B_\theta(\rho, \theta) = -\frac{\partial A(\rho, \theta)}{\partial \rho} \end{cases} \quad (\text{III. 12})$$

En remplaçant le potentiel vecteur par son expression, nous obtenons les expressions de :

- Induction magnétique radiale

$$B_{J,r}(\rho, \theta) = \sum_{p=1}^{+\infty} -\frac{\mu_0 J_{\max}}{(1-x^{2p})} \left(\left(\frac{\rho}{R_2} \right)^{p-1} + \left(\frac{R_2}{\rho} \right)^{p+1} \right) \sin(p\theta) \quad (\text{III. 13})$$

- Induction magnétique tangentielle

$$B_{J,\theta}(\rho, \theta) = \sum_{p=1}^{+\infty} -\frac{\mu_0 J_{\max}}{(1-x^{2p})} \left(\left(\frac{\rho}{R_2} \right)^{p-1} + \left(\frac{R_2}{\rho} \right)^{p+1} x^{2p} \right) \cos(p\theta) \quad (\text{III. 14})$$

14)

La variation angulaire des inductions, créée au milieu de l'entrefer de la machine, sont représentées par les figures suivantes :

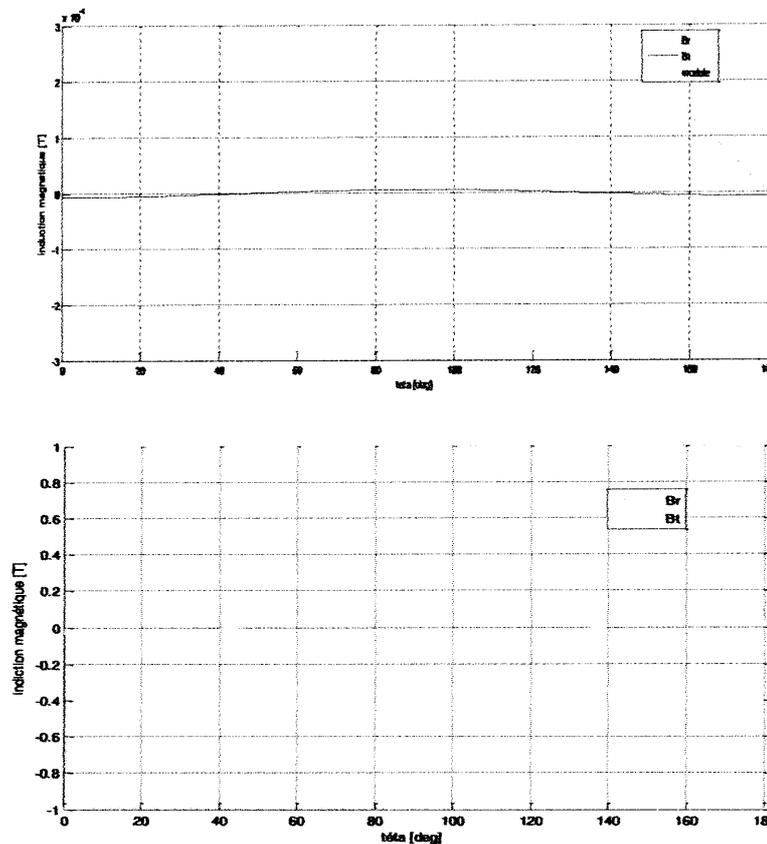


Figure III.5 : La variation angulaire des inductions crée par une nappe de courant

Sur le premier des graphes ci-dessus, nous avons tracé la variation des composantes radiale et tangentielle de l'induction magnétique, ainsi que la valeur du module de l'induction, en fonction de l'angle Θ .

Nous pouvons constater que la valeur de la composante tangentielle est faible par rapport à la composante radiale. Cela se confirme sur le deuxième graphe où nous avons tracé les rapports de chaque composante de l'induction et de son module

III. 5. 4. 2. Energie Magnétique stockée

L'énergie magnétique s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \vec{A} \cdot \vec{j} \cdot d\tau \tag{III. 15}$$

$$d\tau = \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \cdot dz \tag{III. 16}$$

L'intégration en z est la longueur utile L de la machine. Il reste donc à intégrer en ρ et en θ .

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (A_J)_{(r=R_2)} [J(\theta)] R_2 d\theta \quad (\text{III. 17})$$

Pour $\rho=R_2$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 J_m^2}{p} \frac{1}{(1-x^{2p})} R_2^2 [x^{2p} + 1] \cos^2(p\theta) d\theta \quad (\text{III. 18})$$

Donc

$$W = \frac{\mu_0 \pi}{2 p (1-x^{2p})} J_{max}^2 R_2^2 (1+x^{2p}) \quad (\text{III. 19})$$

Nous constatons que cette énergie est constante. Elle ne dépend que des paramètres constructifs de la machine.

III. 5. 4. 3. Couple électromagnétique créée par une nappe de courant

Si nous appliquons le théorème du déplacement virtuel, en dérivant cette énergie trouvée par un déplacement quelconque, nous trouvons un résultat nul :

$$C_e = \frac{dW}{\partial \text{déplacement virtuel}} = 0 \quad (\text{III. 20})$$

III. 6. Induction Magnétique Créée par Deux Nappes de Courant

Comme une seule nappe de courant ne peut fournir le couple, nous sommes amenés à introduire une deuxième densité de courant. Nous disposons une densité de courant $K(\theta)$ sur la surface du rotor et une densité de courant $J(\theta)$ sur la surface interne du stator. Le schéma de cette machine est donné par la figure III.6

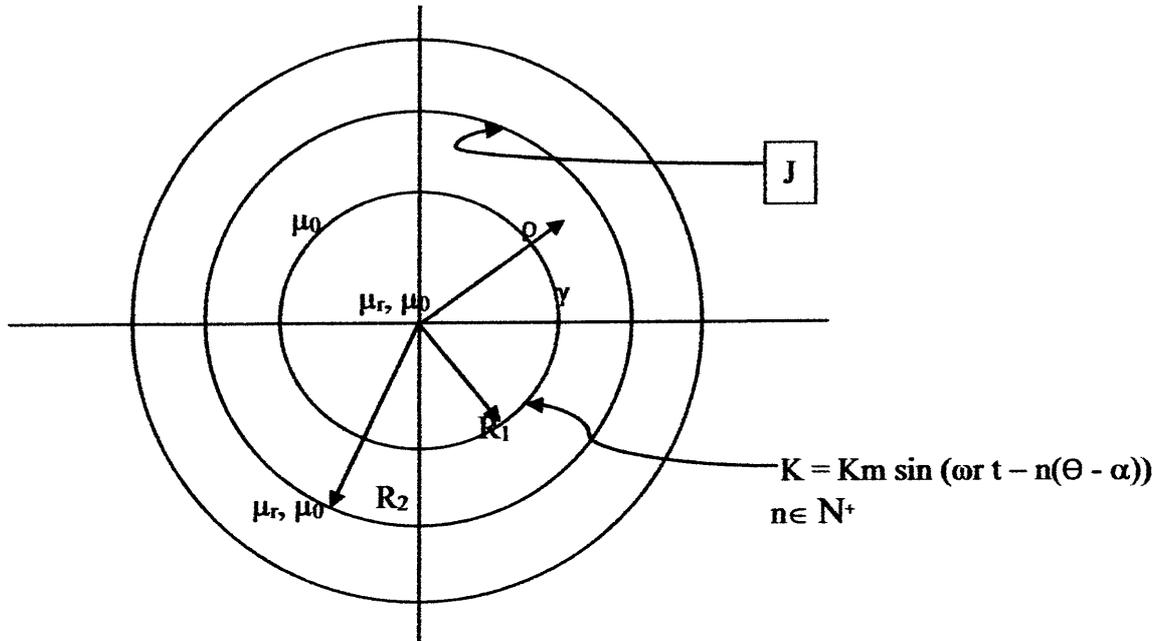


Figure III.6 : la machine étudiée avec deux nappes de courant

III. 6. 1. Expression du potentiel vecteur magnétique

Le problème peut être traité par superposition c'est-à-dire que le potentiel vecteur dans l'entrefer est la somme du potentiel vecteur magnétique dû à la nappe de courant J et de celui dû à la nappe de courant K.

$$A(\rho, \theta) = A_J(\rho, \theta) + A_K(\rho, \theta) \tag{III. 21}$$

Nous utilisons la méthode de séparation des variables pour trouver l'expression du potentiel vecteur créée par chaque nappe :

Nappe J :

$$A_J(\rho, \theta) = \sum_{p=1}^{+\infty} \cos(p\theta) \frac{\mu_0 J_{\max}}{p} \frac{1}{(1-x^{2p})} \left(\frac{\rho^p}{R_2^{p-1}} + x^{2p} R_2^{p+1} \rho^{-p} \right) \tag{III. 22}$$

Nappe K :

$$A_K(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos n(\theta - \alpha) \frac{\mu_0 K_{\max}}{n} \frac{1}{(1-x^{2n})} \left(\frac{\rho^n}{R_1^{n-1}} x^{2n} + \frac{R_1^{n+1}}{\rho^n} \right) \tag{III. 23}$$

Avec : $x = \frac{R_1}{R_2}$

La valeur du potentiel dans l'entrefer est donc la somme des deux potentiels A_J et A_K

$$A(\rho, \theta) = \sum_{p=1}^{+\infty} \cos(p\theta) \frac{\mu_0 J_{\max}}{p} \frac{1}{(1-x^{2p})} \left(\frac{\rho^p}{R_2^{p-1}} + x^{2p} R_2^{p+1} \rho^{-p} \right) + \cos n(\theta - a) \frac{\mu_0 K_{\max}}{n} \frac{1}{(1-x^{2n})} \left(\frac{\rho^n}{R_1^{n-1}} x^{2n} + \frac{R_1^{n+1}}{\rho^n} \right) \quad (\text{III. 24})$$

III. 6. 2. Grandeurs électromagnétiques créées par deux nappes de courant

D'après les lois fondamentales de l'électrotechnique nous pouvons trouver l'expression des autres grandeurs

III. 6. 2. 1. Induction magnétique

Les composantes de l'induction magnétique due à la nappe de courant J s'écrivent :

- Induction magnétique radiale

$$B_{J,r}(\rho, \theta) = \sum_{p=1}^{+\infty} -\frac{\mu_0 J_{\max}}{(1-x^{2p})} \left(\left(\frac{\rho}{R_2} \right)^{p-1} + \left(\frac{R_2}{\rho} \right)^{p+1} \right) \sin(p\theta) \quad (\text{III. 25})$$

- Induction magnétique tangentielle

$$B_{J,\theta}(\rho, \theta) = \sum_{p=1}^{+\infty} -\frac{\mu_0 J_{\max}}{(1-x^{2p})} \left(\left(\frac{\rho}{R_2} \right)^{p-1} - \left(\frac{R_2}{\rho} \right)^{p+1} x^{2p} \right) \cos(p\theta) \quad (\text{III. 26})$$

26)

Les composantes de l'induction magnétique due à la nappe de courant K s'écrivent :

- Induction magnétique radiale

$$B_{K,r}(\rho, \theta) = \sum_{p=1}^{+\infty} -\frac{\mu_0 K_{\max}}{(1-x^{2n})} \left(\left(\frac{\rho}{R_1} \right)^{n-1} x^{2n} + \left(\frac{R_1}{\rho} \right)^{n+1} \right) \sin n(\theta - a) \quad (\text{III. 27})$$

- Induction magnétique tangentielle

$$B_{K,\theta}(\rho, \theta) = \sum_{p=1}^{+\infty} -\frac{\mu_0 K_{\max}}{(1-x^{2n})} \left(\left(\frac{\rho}{R_1} \right)^{n-1} x^{2n} + \left(\frac{R_1}{\rho} \right)^{n+1} \right) \cos n(\theta - a) \quad (\text{III. 28})$$

Donc les composantes de l'induction magnétique due aux deux nappes de courant J et K est les suivantes :

• Induction magnétique radiale

$$B_r(\rho, \theta) = \sum_{p=1}^{+\infty} -\frac{\mu_0 J_{\max}}{(1-x^{2p})} \left(\left(\frac{\rho}{R_2} \right)^{p-1} + \left(\frac{R_2}{\rho} \right)^{p+1} \right) \sin(p\theta) + \sum_{p=1}^{+\infty} -\frac{\mu_0 K_{\max}}{(1-x^{2n})} \left(\left(\frac{\rho}{R_1} \right)^{n-1} x^{2n} + \left(\frac{R_1}{\rho} \right)^{n+1} \right) \sin n(\theta - a) \quad (\text{III. 29})$$

• Induction magnétique tangentielle

$$B_t(\rho, \theta) = \sum_{p=1}^{+\infty} -\frac{\mu_0 J_{\max}}{(1-x^{2p})} \left(\left(\frac{\rho}{R_2} \right)^{p-1} - \left(\frac{R_2}{\rho} \right)^{p+1} x^{2p} \right) \cos(p\theta) + \sum_{p=1}^{+\infty} -\frac{\mu_0 K_{\max}}{(1-x^{2n})} \left(\left(\frac{\rho}{R_1} \right)^{n-1} x^{2n} + \left(\frac{R_1}{\rho} \right)^{n+1} \right) \cos n(\theta - a) \quad (\text{III. 30})$$

La variation angulaire des inductions, créées par les deux nappes de courant au milieu de l'entrefer, sont représentées par les figures suivantes.

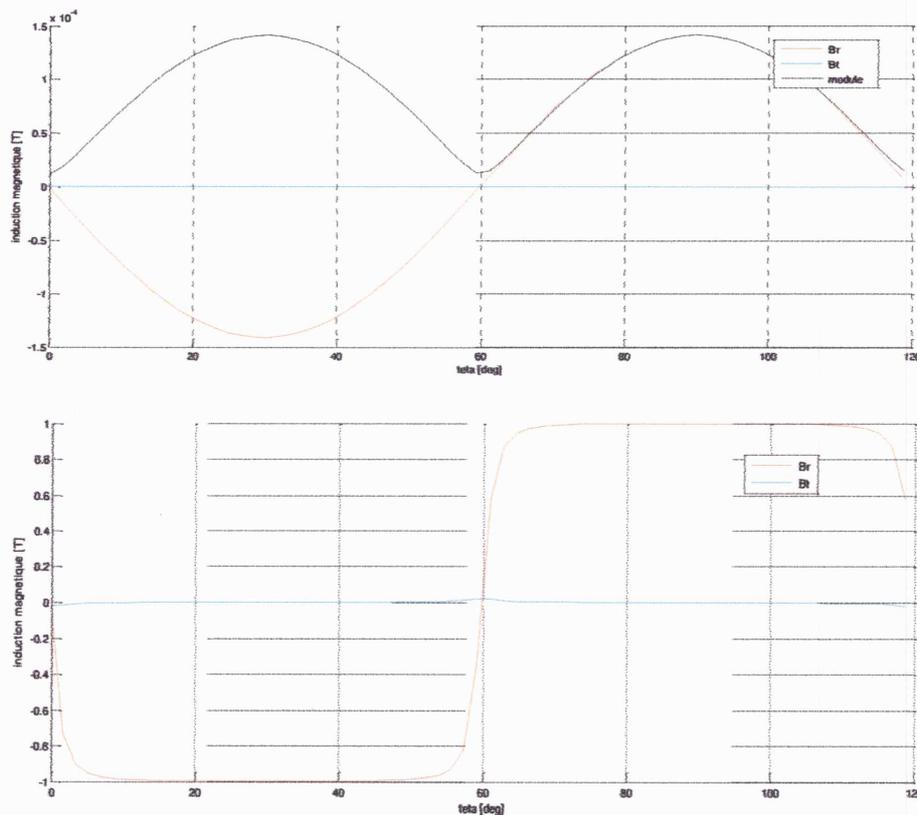


Figure III.7 : La variation angulaire des inductions créée par deux nappes de courant

III. 6. 2. 2. Energie Magnétique stockée

L'énergie magnétique s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \vec{A} \cdot \vec{j} \cdot d\tau \quad (\text{III. 31})$$

$$d\tau = \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \cdot dz \quad (\text{III. 32})$$

L'intégration en z est la longueur utile L de la machine. Il nous reste donc à intégrer en ρ et en θ

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[(A_K)_{(\rho=R_1)} + (A_J)_{(\rho=R_1)} \right] [K(\theta)] R_1 \cdot d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[(A_K)_{(\rho=R_2)} + (A_J)_{(\rho=R_2)} \right] [J(\theta)] R_2 \cdot d\theta \quad (\text{III. 33})$$

Soit donc :

$$(A_K)_{\rho=R_1} = \frac{\mu_0 K_m}{n} \frac{1}{(1-x^{2n})} R_1 [x^{2n} + 1] \cos n(\theta - \alpha) \quad (\text{III. 34})$$

$$(A_J)_{\rho=R_1} = \frac{\mu_0 J_m}{p} \frac{1}{(1-x^{2p})} R_2 2x^p \cos(p\theta) \quad (\text{III. 35})$$

$$(A_K)_{\rho=R_2} = \frac{\mu_0 K_m}{n} \frac{1}{(1-x^{2n})} R_1 2x^n \cos n(\theta - \alpha) \quad (\text{III. 36})$$

$$(A_J)_{\rho=R_2} = \frac{\mu_0 J_m}{p} \frac{1}{(1-x^{2p})} R_2 [x^{2p} + 1] \cos(p\theta) \quad (\text{III. 37})$$

Nous calculerons l'énergie dans le cas où $n = p$.

Cette énergie s'écrit :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 K_m^2}{p} \frac{1}{(1-x^{2p})} R_1^2 [x^{2p} + 1] \cos^2 p(\theta - \alpha) d\theta \\ &+ \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 K_m J_m}{p} \frac{1}{(1-x^{2p})} R_1 R_2 2x^p \cos p\theta \cos p(\theta - \alpha) d\theta \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 J_m^2}{p} \frac{1}{(1-x^{2p})} R_2^2 [x^{2p} + 1] \cos^2 p\theta d\theta \end{aligned} \quad (\text{III. 38})$$

La valeur finale de l'énergie s'écrit :

$$W = \frac{\mu_0 \pi}{2p(1-x^{2p})} \left\{ (K_m^2 R_1^2 + J_m^2 R_2^2) (1+x^{2p}) + 2R_1 R_2 K_m J_m (2x^p) \cos p\alpha \right\} \quad (\text{III. 39})$$

III. 6. 2. 3. Couple engendré par les deux nappes de courant

Nous appliquons le théorème du déplacement virtuel. Dans ce cas l'élément de déplacement est l'angle (α) de décalage angulaire entre les deux nappes de courant.

Donc le couple s'écrit :

$$\Gamma = -\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{-\mu_0 \pi}{p(1-x^{2p})} \left[R_1 R_2 K_m J_m (2x^p) \frac{\partial \cos p\alpha}{\partial \alpha} \right] \quad (\text{III. 40})$$

Soit donc :

$$\Gamma = \frac{\mu_0 \pi}{(1-x^{2p})} \left[R_1 R_2 K_m J_m (2x^p) \sin p\alpha \right] \quad (\text{III. 41})$$

III. 6. 2. 4. Autre manière de calculer le couple engendré par les deux nappes de courant

La loi de Laplace s'écrit :

$$d\vec{F} = di \vec{I} \wedge \vec{B} \Rightarrow dF = di I B_\rho \quad (\text{III. 42})$$

L'élément de couple se calcule donc :

$$d\Gamma = R_2 di B_r \quad (\text{III. 43})$$

Le courant di est donné par la relation :

$$di = J(\theta) R_2 d\theta = R_2 J_m \cos p\theta d\theta \quad (\text{III. 44})$$

Et donc l'élément de couple vaut :

$$d\Gamma = R_2^2 J_m B_{r(\rho=R_2)} \cos p\theta d\theta \quad (\text{III. 45})$$

Le couple total se déduit par intégration :

$$\Gamma = -\frac{\mu_0 K_m^2 J_m^2}{(1-x^{2p})} (1-x^{2p}) \int_0^{2\pi} \sin p\theta \cos p\theta d\theta - \frac{\mu_0 K_m J_m R_2^2}{(1-x^{2p})} (2x^{p+1}) \int_0^{2\pi} \cos p\theta \sin p(\theta - \alpha) d\theta \quad (\text{III. 46})$$

La première intégrale étant nulle, nous avons donc la valeur du couple par unité de longueur de la machine

$$\Gamma = \frac{\mu_0 \pi}{(1-x^{2p})} [R_1 R_2 K_m J_m (2.x^p) \sin p\alpha] \quad (\text{III. 47})$$

III. 6. 2. 5. Approximation du couple : [2]

En écrivant $x=1-\varepsilon$ et donc $x^{2n} \approx 1-2n\varepsilon$ et en négligeant ε quand cela est possible :

$$\Gamma = \frac{\mu_0 \pi}{p\varepsilon} [R_1 R_2 K_m J_m \sin p\alpha] \quad (\text{III. 48})$$

III. 7. Induction Magnétique créée par une alimentation alternative

Dans le but de se rapprocher de la réalité, c'est-à-dire que la machine étudiée est une machine asynchrone bobinée en fonctionnement moteur, nous allons alimenter le stator et le rotor par un système de tension triphasée.

On considère que la machine met en œuvre :

- Un enroulement concentré à pas total (diamétral τ_c).
- L'induit a un nombre entier N_e d'encoche/pole/phase, dans lesquelles sont disposées les Q phases identiques (dans notre machine $N_e = 1$).
- Chaque encoche ne contenir que des conducteurs d'une même phase en une seule couche.

Sur la figure (III. 8) sont représentés les conducteurs de la première phase, d'un tel induit.

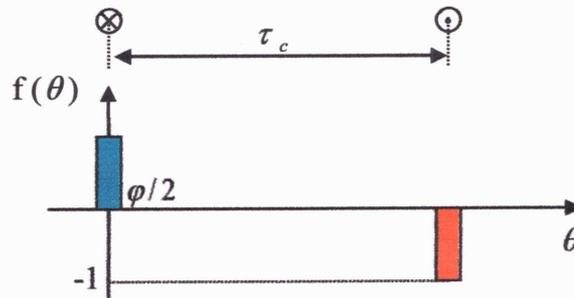


Figure III. 8 : répartition spatiale des conducteurs d'une phase

La densité linéique du courant de la première phase est donnée en fonction de la densité linéique de conducteurs de la première phase, et du courant qui la parcourt, comme suit :

$$J_1(\theta, t) = C_1(\theta) I_1(t) \quad (\text{III. 49})$$

$$C_1(\theta) = f_1(\theta) \frac{N_{CE}}{R_2 \varphi} \quad (\text{III. 50})$$

φ : Angle d'ouverture d'encoche.

De la figure (III. 8), nous constatons que la fonction $f_1(\theta)$ est égale :

$$f_1(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{Pour } \theta \in [-\varphi/2, \varphi/2] \\ -1 & \text{Pour } \theta \in [\tau_c - \varphi/2, \tau_c + \varphi/2] \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases} \quad (\text{III. 51})$$

En vertu de l'origine choisie au référentiel statorique (l'axe de la première phase) la fonction $f_1(\theta)$ est paire. De plus elle est alternée (anti-périodicité entre aller et retour) sa décomposition ne fait donc pas intervenir les termes d'ordre pair.

La décomposition de la fonction $f_1(\theta)$ en séries de Fourier (sous sa forme complexe) est :

$$f_1(\theta) = \text{reel} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{1n} e^{jn p \theta} \right) \quad (\text{III. 52})$$

$$f_{1n} = \frac{4}{\pi n} \sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)$$

(III. 53)

La densité linéique de conducteurs de la première phase est donnée par :

$$C_1(\theta) = \text{reel}\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} e^{jn p \theta}\right) \quad (\text{III. 54})$$

$$C_{1n} = \frac{2 \cdot N_{CE}}{\pi R_c} \left(\frac{\sin(n(\varphi/2))}{n(\varphi/2)}\right) \quad (\text{III. 55})$$

Pour déterminer la densité linéique des conducteurs de la $q^{\text{ième}}$ phase, à partir de la densité linéique des conducteurs de la première phase, il suffit de faire une rotation angulaire telle que :

$$C_q(\theta) = C_1\left(\theta - \left[(q-1)\frac{2\pi}{3}\right]\right) \quad (\text{III. 56})$$

Nous alimentons cette machine par un courant triphasé équilibré. Les trois densités du courant équivalent aux trois courants d'alimentation de la machine peuvent s'écrire de la manière suivante :

Phase 1:

$$J_1(\theta, t) = \text{reel}\left(\sum_{n=1}^{\infty} J_{1n} e^{jn p \theta}\right) \quad (\text{III. 57})$$

$$J_{1n} = \frac{2 \cdot N_{CE}}{\pi R_c} I_1(t) \left(\frac{\sin(n(\varphi/2))}{n(\varphi/2)}\right) \quad (\text{III. 58})$$

Phase 2:

$$J_2(\theta, t) = \text{reel}\left(\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} e^{jn p \theta}\right) \quad (\text{III. 59})$$

$$J_{2n} = \frac{2 \cdot N_{CE}}{\pi R_c} I_2(t) \left(\frac{\sin(n(\varphi/2))}{n(\varphi/2)}\right) e^{-jn\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \quad (\text{III. 60})$$

Phase 3 :

$$J_3(\theta, t) = \text{reel} \left(\sum_{n=1}^{\infty} J_{3n} e^{jn p \theta} \right) \quad (\text{III. 61})$$

$$J_{3n} = \frac{2 \cdot N_{CE}}{\pi R_c} I_3(t) \left(\frac{\sin(n(\varphi/2))}{n(\varphi/2)} \right) e^{-jn \left(\frac{4\pi}{3} \right)} \quad (\text{III. 62})$$

Calculons maintenant la densité du courant résultante de ces trois densités du courant :

$$J_{eq}(\theta, t) = \text{reel} \left(\sum_{n=1}^{\infty} J_{eqn} e^{jn p \theta} \right) \quad (\text{III. 63})$$

$$J_{eqn} = \frac{2 \cdot N_{CE}}{\pi R_c} \left(\frac{\sin(n(\varphi/2))}{n(\varphi/2)} \right) \left(I_1(t) + I_2(t) e^{-jn \left(\frac{2\pi}{3} \right)} + I_3(t) e^{-jn \left(\frac{4\pi}{3} \right)} \right) \quad (\text{III. 64})$$

La figure (III. 9) illustre la répartition spatiale de la densité du courant linéique équivalente, de notre machine asynchrone :

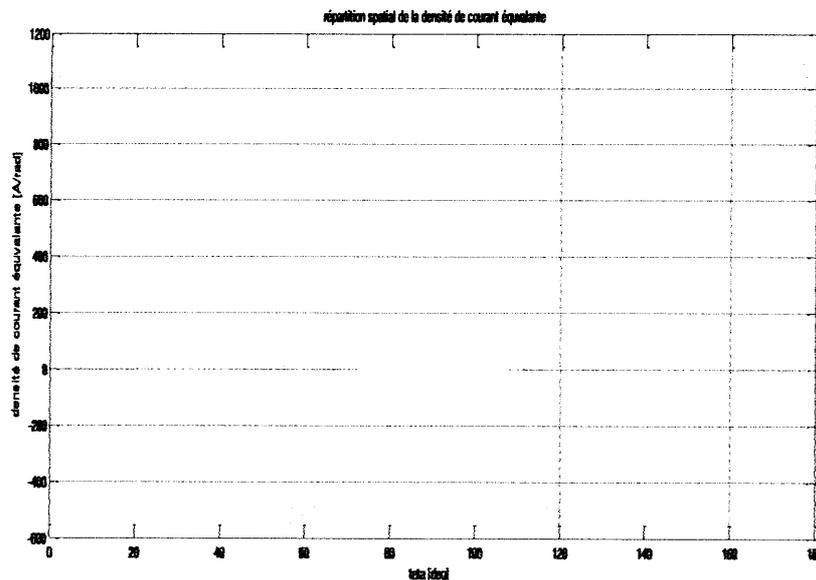


Figure III. 9 : répartition spatiale de la densité de courant équivalente

III.7.1. Expression du potentiel vecteur magnétique en coordonnées cylindriques par la méthode de séparation des variables

Le potentiel vecteur magnétique a une seule composante suivant l'axe (oz), il dépend seulement des deux variables spatiales ρ et θ , et de la variable temporelle t .

$$A(\rho, \theta, t) = A(\rho, \theta) \cdot A(t) \quad (\text{III. 65})$$

Nous pouvons montrer facilement que l'expression de $A_z(\rho, \theta, t)$ est la suivante :

$$A(\rho, \theta, t) = \text{real} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A(\rho, \theta) e^{j n t} \right) \quad (\text{III. 66})$$

D'après le développement fait précédemment, le calcul du potentiel vecteur magnétique créée par deux nappes de courant, se fait comme suit :

$$A(\rho, \theta, t) = A_J(\rho, \theta, t) + A_K(\rho, \theta, t) \quad (\text{III. 67})$$

Sachant que :

$$A_J(\rho, \theta, t) = A_J(\rho, \theta) e^{j \omega_s t} \quad (\text{III. 68})$$

$$A_K(\rho, \theta, t) = A_K(\rho, \theta) e^{j \omega_r t} \quad (\text{III. 69})$$

Avec :

ω_s C'est la pulsation du courant statorique.

ω_r C'est la pulsation du courant rotorique.

Le glissement de la machine est :

$$g = \frac{\omega_s - \omega_r}{\omega_s} \quad (\text{III. 70})$$

$$\omega_r = \omega_s - \omega_s \cdot g \quad (\text{III. 71})$$

$$A_K(\rho, \theta, t) = A_K(\rho, \theta) e^{j \omega_s t} \cdot e^{-j \omega_s g t} \quad (\text{III. 72})$$

Donc l'expression du potentiel vecteur due aux deux nappes de courant est :

$$A(\rho, \theta, t) = (A_J(\rho, \theta, t) + A_K(\rho, \theta, t)e^{-jw_s g t})e^{jw_s t} \quad (\text{III. 73})$$

III. 7. 2. Grandeurs électromagnétiques

A partir des relations de l'électromagnétisme, nous pouvons trouver les expressions des différentes grandeurs qui identifient le comportement de notre machine.

III. 7. 2. 1. Induction magnétique

Les composantes radiale et tangentielle de l'induction magnétique sont données, à partir de la connaissance du potentiel vecteur par :

$$\begin{cases} B_r(\rho, \theta, t) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z(\rho, \theta, t)}{\partial \theta} \\ B_\theta(\rho, \theta, t) = -\frac{\partial A_z(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} \end{cases} \quad (\text{III. 74})$$



En remplaçant le potentiel vecteur magnétique par son expression dans l'entrefer, on obtient l'expression de :

• Induction magnétique radiale

Au stator :

$$B_{J,r}(\rho, \theta, t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(-\frac{\mu_0 J_{\max}}{(1-x^{2p})} \left(\left(\frac{\rho}{R_2} \right)^{p-1} + \left(\frac{R_2}{\rho} \right)^{p+1} \right) \sin(p\theta) \right) e^{jw_s t} \quad (\text{III. 75})$$

Au rotor :

$$B_{K,r}(\rho, \theta, t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(-\frac{\mu_0 K_{\max}}{(1-x^{2n})} \left(\left(\frac{\rho}{R_1} \right)^{n-1} x^{2n} + \left(\frac{R_1}{\rho} \right)^{n+1} \right) \sin n(\theta - a) \right) e^{jw_s t} \quad (\text{III. 76})$$

$$B_{K,r}(\rho, \theta, t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(-\frac{\mu_0 K_{\max}}{(1-x^{2n})} \left(\left(\frac{\rho}{R_1} \right)^{n-1} x^{2n} + \left(\frac{R_1}{\rho} \right)^{n+1} \right) \sin n(\theta - a) \right) e^{jw_s t} e^{jw_s g t} \quad (\text{III. 77})$$

A l'entrefer :

$$B_r(\rho, \theta, t) = \left(\begin{array}{l} \sum_{p=1}^{+\infty} \left(-\frac{\mu_0 J_{\max}}{(1-x^{2p})} \left(\left(\frac{\rho}{R_2} \right)^{p-1} + \left(\frac{R_2}{\rho} \right)^{p+1} \right) \sin(p\theta) \right) + \\ \sum_{p=1}^{+\infty} \left(-\frac{\mu_0 K_{\max}}{(1-x^{2n})} \left(\left(\frac{\rho}{R_1} \right)^{n-1} x^{2n} + \left(\frac{R_1}{\rho} \right)^{n+1} \right) \sin n(\theta-a) \right) e^{j\omega_s t} \end{array} \right) e^{j\omega_r t} \quad (\text{III. 78})$$

• Induction magnétique tangentielle

Au stator

$$B_{J,\theta}(\rho, \theta, t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(-\frac{\mu_0 J_{\max}}{(1-x^{2p})} \left(\left(\frac{\rho}{R_2} \right)^{p-1} - \left(\frac{R_2}{\rho} \right)^{p+1} x^{2p} \right) \cos(p\theta) \right) e^{j\omega_s t} \quad (\text{III. 79})$$

Au rotor

$$B_{K,\theta}(\rho, \theta, t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(-\frac{\mu_0 K_{\max}}{(1-x^{2n})} \left(\left(\frac{\rho}{R_1} \right)^{n-1} x^{2n} + \left(\frac{R_1}{\rho} \right)^{n+1} \right) \cos n(\theta-a) \right) e^{j\omega_s t} \quad (\text{III. 80})$$

$$B_{K,\theta}(\rho, \theta, t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(-\frac{\mu_0 K_{\max}}{(1-x^{2n})} \left(\left(\frac{\rho}{R_1} \right)^{n-1} x^{2n} + \left(\frac{R_1}{\rho} \right)^{n+1} \right) \cos n(\theta-a) \right) e^{j\omega_s t} e^{j\omega_r t} \quad (\text{III. 81})$$

A l'entrefer :

$$B_\theta(\rho, \theta, t) = \left(\begin{array}{l} \sum_{p=1}^{+\infty} \left(-\frac{\mu_0 J_{\max}}{(1-x^{2p})} \left(\left(\frac{\rho}{R_2} \right)^{p-1} - \left(\frac{R_2}{\rho} \right)^{p+1} x^{2p} \right) \cos(p\theta) \right) + \\ \sum_{p=1}^{+\infty} \left(-\frac{\mu_0 K_{\max}}{(1-x^{2n})} \left(\left(\frac{\rho}{R_1} \right)^{n-1} x^{2n} + \left(\frac{R_1}{\rho} \right)^{n+1} \right) \cos n(\theta-a) \right) e^{j\omega_s t} \end{array} \right) e^{j\omega_r t} \quad (\text{III. 82})$$

L'évolution temporelle des inductions, crée au milieu de l'entrefer de la machine considérée, sont représentées par les figures suivantes :

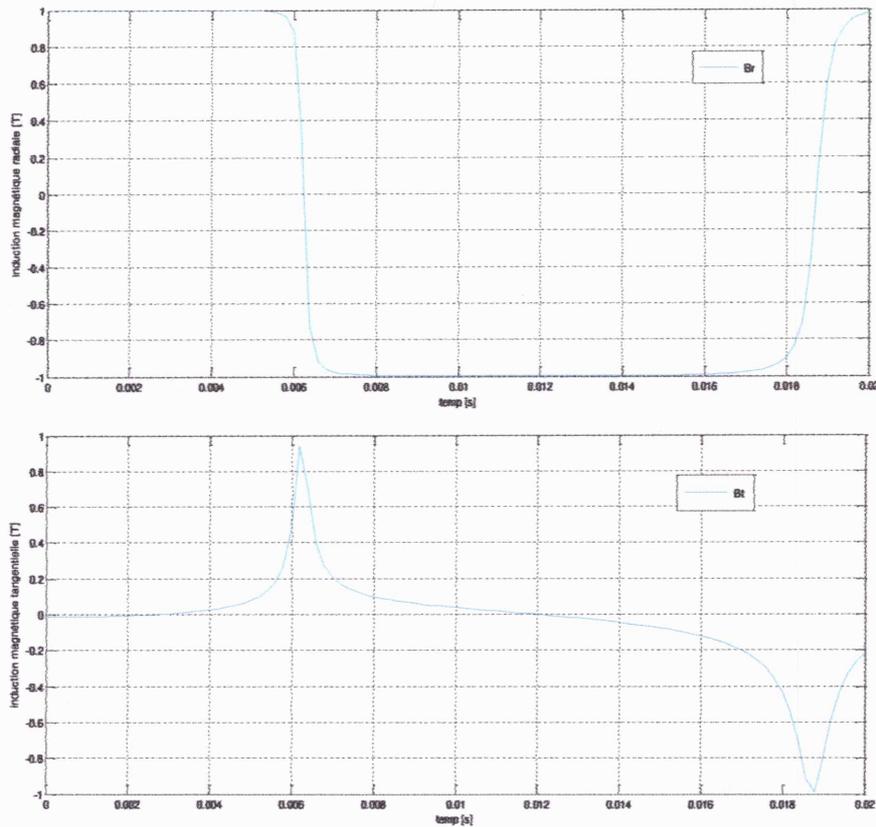


Figure III. 10 : Evolution temporelle des inductions au milieu de l'entrefer

III.7. 2. 2. Couple électromagnétique

L'expression du couple électromagnétique, calculé par la méthode du tenseur de Maxwell [11] sur une surface traversant l'entrefer, en fonction du potentiel vecteur magnétique est :

$$d\Gamma = R^2 \cdot (Km \cdot \sin(w_r t - n(\theta - \alpha))) \cdot [B_{m,J} \cdot \cos(w_s t - p\theta) + B_{m,K} \cdot \cos(w_r t - n(\theta - \alpha))] \cdot d\theta \cdot dL \quad (III. 83)$$

Donc :

$$\Gamma = R^2 \cdot B_{m,J} \cdot Km \iint \sin(w_r t - n(\theta - \alpha)) \cdot \cos(w_s t - p\theta) \cdot dL \cdot d\theta + R^2 \cdot B_{m,K} \cdot Km \iint \sin(w_r t - n(\theta - \alpha)) \cdot \cos(w_r t - n(\theta - \alpha)) \cdot dL \cdot d\theta \quad (III. 84)$$

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \sin(n\theta + b) \cdot \cos(n\theta + b) \cdot d\theta = 0 \quad \text{car } n \in N^+ \quad (III. 85)$$

Donc l'expression du couple électromagnétique devient :

$$\Gamma = R^2 . B_{m,j} Km \iint \sin(w_r t - n(\theta - \alpha)) . \cos(w_s t - p\theta) dL . d\theta \quad (\text{III. 86})$$

Cette intégrale est différente de **ZERO** si et seulement si $n = p$. Le couple s'écrit alors :

$$\Gamma = \pi . L . R^2 . B_{m,j} Km (\sin((w_r - w_s)t - p\alpha)) \quad (\text{III. 87})$$

L'évolution temporelle du couple électromagnétique est représentée par la figure suivante :

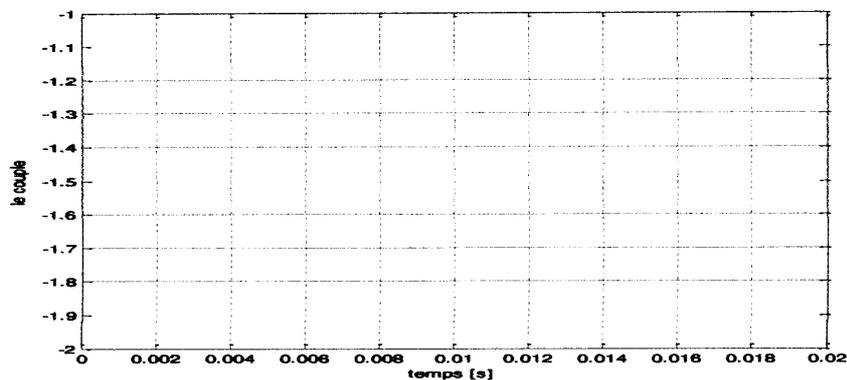


Figure III. 11 : Evolution temporelle du couple

II. 8. Conclusion

Dans ce chapitre, une modélisation par calcul analytique du champ en deux dimensions, d'une machine asynchrone bobinée a été développée. Cette méthode conduit à la détermination précise des différentes grandeurs électromagnétiques en fonction des dimensions et caractéristiques de notre machine.

L'application de cette méthode nécessite une simplification de la structure de l'induit de l'inducteur, par l'introduction d'une transformation des encoches, qui ne permet pas en particulier de prendre en compte la géométrie de l'encoche dans le calcul analytique du champ.

Conclusion Générale

Conclusion générale

La modélisation permet de guider les développements par la quantification des phénomènes. En outre, elle est d'un apport précieux en permettant d'une part de relever une image de ce que l'on peut observer expérimentalement, et d'autre part de prévoir les comportements de la machine et les variations mieux de l'observation expérimentale.

Le premier chapitre rappelle les différentes sources d'énergies existantes, en particulier l'énergie renouvelable. Puis les différentes machines à courants alternatifs, en particulier les machines asynchrones. Cependant nous avons fait un bref historique sur les machines asynchrones avec leurs constitutions et son principe de fonctionnement et on a terminé le premier chapitre par la citation de différents types de machines asynchrones.

Afin de mieux modéliser la machine, le second chapitre montre une vue générale sur l'électromagnétisme. Tel que les équations de Maxwell et les différentes structures d'un dispositif électromagnétique. On montre aussi les différents modèles qu'on peut les utiliser lorsqu'on veut modéliser un dispositif ou une machine et aussi les différentes méthodes de modélisation des machines électriques telle que les méthodes de résolution des équations différentielle aux dérivés partiels.

Parmi les différentes méthodes de modélisation des machines électriques, on trouve les méthodes analytiques, précisément la méthode de séparation des variables qu'elle est utilisée dans ce mémoire ; le développement détaillé de cette méthode est donné au niveau du troisième chapitre.

Malgré les hypothèses simplificatrices utilisées, qui nous éloignent un petit peu de la réalité, et les efforts utilisés lors de développement analytique du modèle de la machine asynchrone, qui nécessite un socle mathématique considérable, les résultats obtenus montrent l'efficacité de notre approche car elle nous a permis de :

- Donner l'expression analytique de toutes les grandeurs électromagnétiques régissant le comportement de la machine.

- Dépasser le paradoxe du temps de calcul qui représente le point faible des méthodes numériques.

Comme perspectives à ce mémoire on peut proposer :

- Un calcul supplémentaire qui tient compte de l'effet des encoches ou de l'effet de tête de bobines.

- Faire la conception ou le dimensionnement, à base de notre calcul analytique, de la machine asynchrone.

- Tenir compte des autres phénomènes tels que le thermique, les vibrations...

Annexe

Annexe

$$I=10 ;$$

$$J_m=10 ;$$

$$K_m=10 ;$$

$$\varphi = \pi / 24 ;$$

$$P=2 \text{ et } P=3 ;$$

$$R1=103 \cdot 10^{-3} ;$$

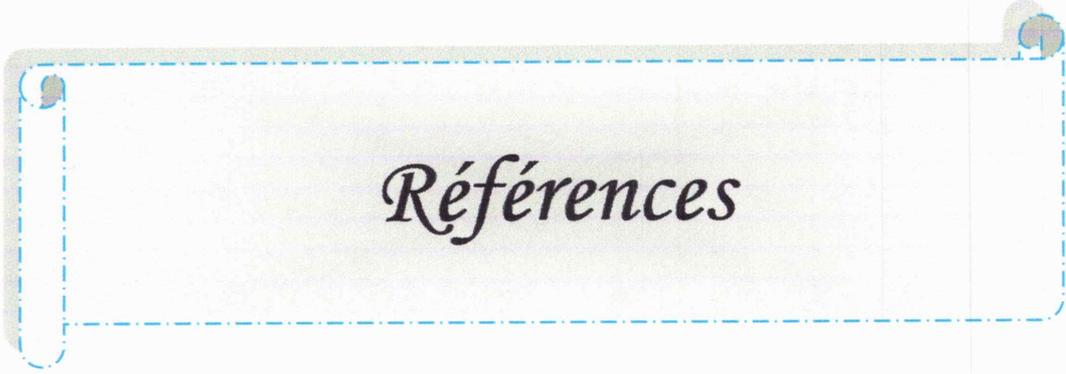
$$R2=100 \cdot 10^{-3} ;$$

$$Rc=101.5 \cdot 10^{-3} ;$$

$$\alpha = \pi / 18 ;$$

$$L=200 \cdot 10^{-3} ;$$

$$F=50 ;$$



Références

Références

- [1]. AMIMEUR. Hocine : “ Contribution à la Commande d’une Machine Asynchrone Double Etoile par Mode de Glissement”, mémoire de magister, université El Hadj Lakhdar de Batna, juin 2008.
- [2]. CARON. Jean-Paul : “modélisation des machines électriques par le calcul analytique du champ”, I.N.P.L. – E.N.S.E.M. – G.R.E.E.N.
- [3]. Oubidar. Mouad, Bendaoud. Sedik : ” Machine synchrone/asynchrone”, projet de fin d’étude en ingénierie dans le cadre du programme en génie électromécanique, université du Québec en Abitibi-Témiscamingue. 30 Avril 2010.
- [4]. BOUSSEKSOU. Radouane :” Modélisation analytique des machines Asynchrone application au diagnostic”, mémoire de magister, Université Mentouri Constantine, 2007.
- [5]. Vaillancourt. Rémi :”Mathématiques de l’ingénieur “, Département de mathématiques, Université d’Ottawa, Ottawa, ON, Canada, K1N 6N5.
- [6]. N. O. Matthew, Ph. D. Sadiku :”Numerical Technics in Electromagnetic”, seconde édition, Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, QC760 .S24 2000.
- [7]. REBBAH. Redjem, “ Calcul et Conception Assistée par Ordinateur des Machines Electriques Application aux moteurs asynchrones”, mémoire de magister, Université Mentouri Constantine, 2006.
- [8]. F. Poitiers,” Etude et commande de génératrices asynchrones pour l’utilisation de l’énergie éolienne”, Thèse de Doctorat de l’Université de Nantes, France, Décembre 2003.
- [9]. L. Abdelhamid, R. Abdessemed, H. Amimeur, E. Merabet, “Etude des performances des génératrices utilisées dans les systèmes éoliens,” International Conférence on Renewable Energy ICRE’07, Université de Bejaia, pp. 1–6 (CDROM), 25–27 Novembre 2007.

- [10]. A. Lewis, "The Advanced Induction Motor", Power Engineering Society Summer Meeting, 2002 IEEE, Vol.1, 21-25 July 2002, pp. 250–253.
- [11]. R. Lateb, N. Takorabet, F. Meibody-Tabar, A. Mirzaian, J. Enon, A. Sarribouette, "Performances Comparison of Induction Motors and Surface Mounted PM motor for POD Marine Propulsion", 41th IAS Annual Meeting.
- [12]. R. Bojoi, A. Tenconi, G. Griva, F. Profumo, "Vector control of dual-three-phase induction-motor drives two current sensors," IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 42, No. 5, pp. 1284–1292, September/October 2006.
- [12]. B. Multon, "Historique des machines électromagnétiques et plus particulièrement des machines à réluctance variable," Revue 3E.I, No. 3, pp. 3–8, Juin 1995.
- [13]. Z. Q. Zhu, D. Howe, and C. C. Chan, "Improved Analytical Model for Predicting the Magnetic Field Distribution in Brushless Permanent-Magnet Machines ", IEEE Transactions on Magnetic, VOL. 38, NO. 1, January 2002
- [14]. R. Cordon, R. Slemon and X. Liu " Modeling and design Optimisation of Permanent magnet Motor", Electrical machine and Power System 1992.
- [15]. A. Mireki, "Etude comparative de chaînes de conversion d'énergie dédiées à une éolienne de petite puissance", Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, France, Avril 2005.
- [16]. P. Vidal, "Commande non-linéaire d'une machine asynchrone à double alimentation", Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, France, Décembre 2004.
- [17]. R. Abdessemed, M. Kadjoudj, "Modélisation des machines électriques", Presses de l'Université de Batna, Algérie, 1997.
- [18]. P. L. Alger, R. E. Arnold, "The history of induction motors in America," Proceedings of the IEEE, Vol. 64, No. 9, pp. 1380–1383, September 1976.

- [19]. B. Multon, "Historique des machines électromagnétiques et plus particulièrement des machines à réductance variable," *Revue 3E.I*, No. 3, pp. 3–8, Juin 1995.
- [Kat01] S. Kato, N. Hoshi, K. Oguchi, "A low cost system of variable-speed cascaded induction generators for small hydroelectricity," *Conference Record of the IEEE Industrial Applications Conference*, pp. 1419–1425, 2001.
- [Kat02] S. Kato, N. Hoshi, K. Oguchi, "Analysis of power electronics systems including cascaded induction machines with modified nodal analysis," *IEEE PCC-Osaka*, pp. 282–287, 2002.
- [22] (Basset, 1935), Basset E.D., Potter F.M., «Capacitive Excitation of Induction generators», *Electrical Engineering*, 1935.
- [23] Wagner C. F. (1939), *Self Excitation of Induction Motors*, *AIEE Transaction*
- [24] Shridhar L., Singh Bhim, Jha C. S. (1993), A Step Torwards in the Characteristic of self Excited Induction Generator, *IEEE Transaction of Energy Conversion*, Vol. 8, N. 1
- [25] Wang Li, Su Jian-Yi (1997), Effect of Lung-Shunt and Short-Shunt Connection on Voltage Variation of a Self-Excited Induction Generator, *IEEE Transaction of Energy Conversion*, Vol. 12, N. 4
- [26] BENOIT ROBYNS, BRUNO FRANÇOIS, PHILIPPE DEGOBERT, JEAN-PAUL HAUTIER (2007) *Commande vectorielle de la machine asynchrone : désensibilisation et optimisation par la logique floue*
- [27] I. Boldea, S. A. Nasar. "The Induction Machine Handbook", *CRC Press LLC, Chapter 1*, 2002.
- [28] G. Didier. "Modélisation et Diagnostic de la Machine Asynchrone en présence de Défaillances", *Thèse de Doctorat en Génie Electrique, Université Henri Poincaré, Nancy I*. Oct 2004.