

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Université de Jijel**



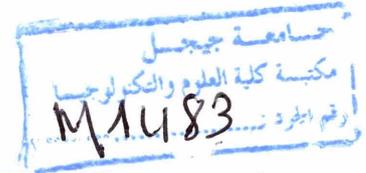
**Faculté des Sciences et de la Technologie**

**Département d'Automatique**

**Option : Automatique et Informatique Industrielle (AII)**

**Projet de fin d'Etudes pour l'obtention du Diplôme de**  
**Master en Automatique**

**Thème :**



**La commande CRONE :**  
**Étude et Application**

**Réalisé par :**

*Laieb Yassine*

**Membres de jury :**

<b><u>Président</u></b>	<i>Kihal Nassima</i>	MAA	Université de Jijel
<b><u>Examineur</u></b>	<i>Boubertakh Hamid</i>	MCA	Université de Jijel
<b><u>Encadreur</u></b>	<i>Bouden Toufik</i>	MCA	Université de Jijel

**Année universitaire : 2012 / 2013**

A red dashed rectangular border frames the central text area of the page. On the left side, there is a vertical strip of dark grey rectangular marks, and a pair of red scissors is positioned at the top left corner, indicating where to cut.

## Dédicaces

*Je dédie ce travail :*

*A mes parents.*

*A mes frères.*

*A Chaïma.*

*A tous mes amis.*

<b>Introduction Générale</b>	<b>01</b>
<b>Chapitre I : Calculs fractionnaires</b>	
<b>I.1 Introduction</b>	<b>05</b>
<b>I.2 Fonctions utilisées dans le calcul fractionnaire</b>	<b>06</b>
<i>I.2.1 La fonction Gamma</i>	<b>06</b>
<i>I.2.2 Fonction de Mittag-Leffler</i>	<b>07</b>
<b>I.3 Les calculs fractionnaires</b>	<b>07</b>
<i>I.3.1 Calcul des intégrations non entières</i>	<b>08</b>
<i>I.3.2 Calculs des dérivations non entières</i>	<b>09</b>
<i>I.3.2.1 Définition Grunwald-Letnikov(G.L)</i>	<b>09</b>
<i>I.3.2.2 Définition de Caputo</i>	<b>09</b>
<i>I.3.3 Dérivations non entières implicite et explicite</i>	<b>10</b>
<i>I.3.4 Quelques propriétés de la dérivation non entière</i>	<b>10</b>
<i>I.3.5 Transformée de Laplace</i>	<b>11</b>
<i>I.3.5.1 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire</i>	<b>11</b>
<i>I.3.5.2 Transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire</i>	<b>11</b>
<i>I.3.6 Exemples de calcul de dérivée d'ordre fractionnaire</i>	<b>12</b>
<i>I.3.6.1 Dérivation d'ordre fractionnaire d'un cosinus (ou d'un sinus)</i>	<b>12</b>
<i>I.3.6.2 Dérivation non entière d'une fonction sinusoïdale amortie</i>	<b>13</b>
<i>I.3.6.3 Dérivation non entière d'une exponentielle</i>	<b>13</b>
<b>I.4 Conclusion</b>	<b>14</b>

---

---

**Chapitre II : L'analyse de système d'ordre fractionnaire**

<b>II.1 Introduction</b>	<b>16</b>
<b>II.2 Représentation d'un système d'ordre fractionnaire</b>	<b>16</b>
II.2.1 Représentation par des équations différentielles	16
II.2.2 Représentation par fonction de transfert	16
II.2.2.1 Fonction de transfert d'ordre fractionnaire explicite	17
II.2.2.2 Fonction de transfert d'ordre fractionnaire implicite	17
II.2.3 Représentation d'état d'un système d'ordre fractionnaire	18
II.2.3.1 Commandabilité et observabilité d'un système d'ordre fractionnaire	21
II.2.3.2 Matrice de transition fractionnaire	22
<b>II.3 Stabilité des systèmes fractionnaires</b>	<b>23</b>
II.3.1 Condition de la stabilité	23
<b>II.4 Approximation des systèmes d'ordre fractionnaire</b>	<b>25</b>
II.4.1 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire (Approximation de Charef)	25
II.4.1.1 Exemple d'un intégrateur d'ordre fractionnaire	27
II.4.2 Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire (Approximation de Charef)	29
II.4.2.1 Exemple d'un dérivateur d'ordre fractionnaire	31
II.4.3 La méthode d'Oustaloup	33
II.4.4 La méthode de Matsuda	33
II.4.5 Comparaisons de réponses de quelques approximations d'un intégrateur d'ordre 0.6	34
<b>II.5 Approximation par Implémentation des circuits         électriques analogiques</b>	<b>35</b>

---

<b>II.6 conclusion</b>	<b>38</b>
<b>Chapitre III : La commande CRONE (Etude théorique)</b>	
<b>III.1 Introduction</b>	<b>40</b>
<b>III.2 Définition de la commande CRONE</b>	<b>41</b>
<i>III.2.1 Commande CRONE de première génération</i>	<b>41</b>
<i>III.2.1.1 La synthèse de 1<sup>ère</sup> génération CRONE</i>	<b>43</b>
<i>III.2.1.2 Exemple d'application</i>	<b>46</b>
<i>III.2.2 Comande CRONE de deuxième génération</i>	<b>47</b>
<i>III.2.2.1 Exemple d'application</i>	<b>51</b>
<i>III.2.3 Commande CRONE de troisième génération</i>	<b>51</b>
<b>III.3 La fonction de transfert de la boucle idéale de Bode</b>	<b>52</b>
<i>III.3.1 Analyse temporelle de la BIB</i>	<b>53</b>
<i>III.3.2 Analyse fréquentielle de la BIB</i>	<b>55</b>
<b>III.4 La synthèse des correcteurs d'ordre fractionnaire</b>	<b>56</b>
<i>III.4.1 Correcteur <math>PI^\alpha D^\beta</math> d'ordre fractionnaire</i>	<b>56</b>
<i>III.4.1.1 La Structure et la synthèse du correcteur <math>PI^\alpha D^\beta</math> fractionnaire</i>	<b>56</b>
<i>III.4.2 Correcteur <math>PI^\alpha</math> et <math>PD^\beta</math> d'ordre fractionnaire</i>	<b>63</b>
<i>III.4.2.1 Structure et la synthèse du correcteur <math>PI^\alpha</math> et <math>PD^\beta</math> fractionnaire</i>	<b>63</b>
<i>III.4.3 Exemple d'application</i>	<b>64</b>
<b>III.5 conclusion</b>	<b>67</b>

---

## Chapitre IV : La commande CRONE (Application)

<b>IV.1 Introduction</b>	<b>69</b>
<b>IV.2 Application à des systèmes académiques</b>	<b>69</b>
<i>IV.2.1 Système académique d'ordre entier</i>	<b>69</b>
<i>IV.2.1.1 Application du PID entier au procédé</i>	<b>70</b>
<i>IV.2.1.2 Application du contrôleur CRONE et <math>PI^\alpha D^\beta</math> fractionnaire au procédé</i>	<b>71</b>
<i>IV.2.1.3 PID fractionnaire exacte et PID entier</i>	<b>72</b>
<i>IV.2.1.4 PID fractionnaire avec approximation et PID entier</i>	<b>73</b>
<i>IV.2.2 Système académique d'ordre entier avec un grand retard</i>	<b>76</b>
<i>IV.2.2.1 Correcteur <math>DI^\alpha</math></i>	<b>76</b>
<i>IV.2.2.2 Correcteur <math>PI^\alpha</math></i>	<b>78</b>
<b>IV.3 Application au moteur à courant continu</b>	<b>79</b>
<i>IV.3.1 Principe du moteur à courant continu MCC</i>	<b>80</b>
<i>IV.3.2 Modélisation du moteur à courant continu (modèle linéaire)</i>	<b>80</b>
<i>IV.3.2.1 Moteur à vide</i>	<b>80</b>
<i>IV.3.2.2 Moteur avec charge</i>	<b>81</b>
<i>IV.3.3 Synthèse des correcteurs</i>	<b>83</b>
<i>IV.3.3.1 Contrôleurs PID (classique et fractionnaire)</i>	<b>83</b>
<i>IV.3.3.2 Synthèse de contrôleur PID fractionnaire</i>	<b>85</b>
<i>IV.3.3.3 Synthèse de contrôleur CRONE</i>	<b>85</b>
<i>IV.3.4 Test de robustesse</i>	<b>88</b>
<b>IV.4 conclusion</b>	<b>89</b>
<b>Conclusion générale et perspective</b>	<b>91</b>

---

# Listes des figures et des tableaux

## Listes des figures

Figure	Titre	Page
Figure I.1 :	<i>Dérivation d'ordre 0,1/2,1 de la fonction sinusoïdale</i>	12
Figure I.2 :	<i>Dérivation d'ordre 0,1/2,1 de la fonction cosinus</i>	13
Figure I.3 :	<i>Dérivation d'ordre 0, 1/2, 1 de l'exponentielle</i>	14
Figure II.1 :	<i>Domaine de la stabilité des systèmes d'ordre entier et non entier</i>	25
Figure II.2 :	<i>Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire <math>s^{-0.6}</math></i>	28
Figure II.3 :	<i>Réponse indicielle de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire <math>s^{-0.6}</math></i>	29
Figure II.4 :	<i>Tracés de Bode la fonction d'approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire <math>s^{0.6}</math></i>	32
Figure II.5:	<i>Comparaisons de réponses indicielles des approximations de :Charef, Oustaloup, Matsuda d'un intégrateur d'ordre 0.6</i>	34
Figur II.6:	<i>Comparaisons de diagrammes de Bode des approximations de :Charef, Oustaloup, Matsuda d'un intégrateur d'ordre 0.6</i>	35
Figure II.7 :	<i>Circuit RC du type Foster première forme</i>	36
Figure II.8 :	<i>Circuit RC du type Foster deuxième forme</i>	37
Figure III.1 :	<i>Diagramme de commande à retour unitaire</i>	41
Figure III.2 :	<i>Diagramme de Bode du régulateur CRONE idéal à phase constante</i>	42
Figure III.3 :	<i>Détermination l'ordre de correcteur CRONE</i>	44
Figure III.4 :	<i>Réponse indiciel de H avec régulateur CRONE</i>	47
Figure III.5 :	<i>Représentation du gabarit vertical dans le plan de Black</i>	48
Figure III.6 :	<i>Réponse indiciel de H avec régulateur CRONE (Boucle Fermer)</i>	51
Figure III.7 :	<i>Diagramme de la boucle idéale de Bode</i>	53
Figure III.8 :	<i>Réponses indicielles de la boucle idéale de Bode pour différentes valeurs de A et <math>\alpha</math></i>	54
Figure III.9 :	<i>Diagramme de Bode en boucle ouverte de la boucle idéale de Bode</i>	55
Figure III.10 :	<i>Système de commande à retour unitaire classique</i>	57
Figure III.11 :	<i>Structure du correcteur <math>PI^\alpha D^\beta</math> d'ordre fractionnaire</i>	58

## Listes des figures et des tableaux

---

Figure III.12 :	<i>Trace de l'amplitude et de la phase asymptotique du correcteur <math>PI^{\alpha}D^{\beta}</math> d'ordre fractionnaire et PID classique</i>	59
Figure III.13 :	<i>Commande PID à partir d'un point (a) jusqu'au plan (b)</i>	59
Figure III.14 :	<i>Système de commande en boucle fermée avec <math>PI^{\alpha}D^{\beta}</math> fractionnaire</i>	60
Figure III.15 :	<i>Trace de l'amplitude et de la phase asymptotique du correcteur PI fractionnaire et PI classique</i>	60
Figure III.16 :	<i>Réponse indicielle du système corrigé pour un gain statique <math>k_0</math></i>	65
Figure III.17 :	<i>Réponse fréquentielle (diagramme de Bode) du système corrigé pour un gain statique <math>k_0</math></i>	66
Figure IV.1 :	<i>Réponse fréquentielle de système non corrigé</i>	70
Figure IV.2 :	<i>Réponse indicielle du système : a) corrigé par PID et b) non corrigé</i>	71
Figure IV.3 :	<i>Réponse fréquentielle du système corrigé par PID entier</i>	71
Figure IV.4 :	<i>Réponses indicielle et fréquentielle du système corrigé par PID entier et PID fractionnaire</i>	72
Figure IV.5 :	<i>Réponses indicielle et fréquentielle du système corrigé par PID entier et PID fractionnaire (Approximation de Charef)</i>	73
Figure IV.6 :	<i>Réponses indicielle et fréquentielle du système corrigé par PID entier et contrôleur CRONE</i>	73
Figure IV.7 :	<i>Réponses indicielle et fréquentielle du système corrigé par PID entier et PID fractionnaire (Approximation de Matsuda)</i>	73
Figure IV.8 :	<i>Réponse indicielle et fréquentielle du système corrigé par PID entier Le model qui correspondant</i>	74
Figure IV.9 :	<i>La poursuite de la consigne choisie par les réponses correspondantes du système corrigé par PID entier et PID fractionnaire sans approximation</i>	75
Figure IV.10 :	<i>Réponse fréquentielle du système avec retard de temps</i>	76
Figure IV.11 :	<i>Réponses temporelle et fréquentielle du système corrigé avec correcteur <math>DI^{\alpha}</math> pour différentes variations de gain K</i>	78
Figure IV.12 :	<i>Réponses temporelle et fréquentielle du système corrigé avec correcteur <math>PI^{\alpha}</math> pour différentes variations de gain K</i>	79
Figure IV.13 :	<i>Moteur à courant continu</i>	80
Figure IV.14 :	<i>Moteur à courant continu a vide</i>	81
Figure IV.15 :	<i>Moteur à courant continu avec charge</i>	82
Figure IV.16 :	<i>Le schéma fonctionnel du Moteur à courant continu avec charge</i>	83

---

## Listes des figures et des tableaux

---

Figure IV.17 :	<i>Réponses indicielle et fréquentielle du système corrigé par PID entier</i>	84
Figure IV.18 :	<i>Réponses indicielle et fréquentielle du système corrigé par PID entier et fractionnaire et contrôleur CRONE</i>	86
Figure IV.19 :	<i>Réponses indicielle et fréquentielle du système corrigé par PID fractionnaire (approximation) et model</i>	87
Figure IV.20 :	<i>La poursuite de vitesse du rotor commandé par les contrôleurs PID classique et PID fractionnaire exacte et le contrôleur CRONE</i>	88
Figure IV.21 :	<i>Réponses indicielles du système en boucle fermée avec le correcteur PID classique et fractionnaire</i>	89

### Listes des tableaux

<b>Tableau</b>	<b>Titre</b>	<b>Page</b>
Tab. III.1 :	<i>Paramètres du PID obtenus à partir du point critique (Ziegler-Nichols)</i>	63
Tab. IV.1 :	<i>Comparaison des performances du <math>PI^\alpha D^\beta</math> et leurs approximations avec PID entier</i>	75
Tab. IV.2 :	<i>Paramètres du moteur</i>	84
Tab. IV.3 :	<i>Comparaison des performances du <math>PI^\alpha D^\beta</math> et leurs approximations avec PID entier</i>	87

---

# *Introduction générale*

## Introduction générale

Les systèmes physiques animés par une commande automatique sont très répandus dans l'industrie et ils nous côtoient également dans la vie quotidienne, l'objectif de l'automatique au premier lieu, est le réglage de l'algorithme approprié, afin que la sortie mesurée d'un processus, appelée grandeur à commander, suive une trajectoire désirée, en dépit de perturbations éventuelles. Le développement récent de la théorie des systèmes, des outils informatiques tels que les processeurs (augmentation de la puissance de calcul), ont considérablement amplifié de la commande des processus.

La naissance du calcul d'ordre fractionnaire remonte à l'année 1695 [1], quand Leibniz a soulevé la question suivante dans une lettre à l'Hôpital, " Peut la signification des dérivés avec ordre entier  $\left(\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right)$  être généralisée aux dérivés avec des ordres non entier?".

L'Hôpital, a soulevé une question en réponse: " Qu'en est-il si l'ordre sera 1/2? ". La réponse historique de Leibniz était, " Il mènera à un paradoxe, duquel un jour des conséquences utiles seront tirées". Le concept de la dérivation et l'intégration d'ordre non entier, également appelés la dérivation et l'intégration fractionnaire est une généralisation des fonctions de dérivation et d'intégration usuelles à un ordre quelconque. Longtemps considéré comme une curiosité mathématique, il n'est devenu populaire que durant ces trois dernières décennies. L'intérêt pratique et théorique de ce nouveau concept est maintenant bien établi puisqu'il est utilisé dans nombreux domaines de la science et de la technologie. Du point de vu théorique, beaucoup de points restent encore ouverts en particulier les outils mathématiques permettant la manipulation du calcul fractionnaire. Du point du vue application, l'ordre de dérivation introduit par ce concept constitue un degré de liberté supplémentaire permettant une modélisation plus exacte de beaucoup de phénomènes physiques tels que les phénomènes de diffusion, ou encore l'amélioration des méthodes classiques utilisant la dérivation entière notamment dans le domaine de la commande des systèmes. Dans ce dernier, l'objectif est le concepteur, conformément à un compromis entre ses exigences et les limites physiques du procédé. Actuellement, des travaux concernant l'implémentation pratique des contrôleurs fractionnaires pour la commande des systèmes réels commencent à être publiés.

## *Introduction générale*

---

Historiquement, le premier qui a vraiment présenté un correcteur d'ordre fractionnaire est Oustaloup. Il a développé le correcteur de commande robuste d'ordre non entier (CRONE) et il l'a appliqué dans divers domaines de commande. Plus récemment, Podlubny a proposé une généralisation du correcteur **PID** classique, à savoir le correcteur **PID** fractionnaire, qui implique une action d'intégration d'ordre fractionnaire  $\alpha$  et une action de différentiation d'ordre fractionnaire  $\beta$ . Beaucoup de chercheurs ont été intéressés à l'utilisation ou au réglage du correcteur **PID** fractionnaire. L'intérêt de ce type de correcteurs est justifié par une meilleure flexibilité, puisqu'il a deux paramètres supplémentaires qui sont une action d'intégration d'ordre fractionnaire  $\alpha$  et une action de différentiation d'ordre fractionnaire  $\beta$ . Ces paramètres peuvent être employés pour remplir des caractéristiques additionnelles pour l'amélioration ou l'optimisation des performances ou d'autres conditions intéressantes pour le système à commander. Ces dernières années, les chercheurs ont annoncé que les correcteurs utilisant de dérivée et d'intégrale d'ordre fractionnaire pourraient assurer des performances et une robustesse supérieure à celles obtenus avec les correcteurs classiques (d'ordre entier).

Ce travail porte essentiellement sur l'utilisation des techniques de la synthèse de **PID** classique en utilisant les concepts (Ziegler-Nichols) et les nouvelles techniques de la synthèse de **PID** fractionnaire. Comme il porte aussi sur l'étude théorique de la commande robuste **CRONE** et ses différentes générations en vue des applications. Dans ce travail, on a montré aussi, les avantages de ces types de commande en les appliquant aux différents types de systèmes.

Le mémoire est organisé comme suit :

**Le premier** chapitre, est consacré à la représentation des notions essentielles des calculs fractionnaires avec quelques exemples.

Dans **le deuxième** chapitre, nous exposerons les différentes représentations de système d'ordre fractionnaire (équation différentielle, la fonction de transfert et la représentation d'état) ; les notions de la commandabilité, l'observabilité et la condition de la stabilité pour ce type de système dans le cas linéaire et ainsi les différentes méthodes d'approximation de ces derniers (approximation rationnelle de Charef, approximation d'Oustaloup et celle de Matsuda).

## *Introduction générale*

---

Le **troisième** chapitre, est réservé à l'étude théorique de la commande **CRONE**, ou on va présenter ses différentes générations et la structure et la synthèse de **PID** fractionnaire en utilisant la boucle idéale de Bode (**BIB**) comme un modèle de référence pour calculer les paramètres des correcteurs fractionnaires.

**Quant au quatrième** chapitre, il est réservé à l'application de méthodes étudiées dans le chapitre 3, sur quelques systèmes choisis.

On termine ce mémoire par une conclusion et des perspectives.

## I.1 Introduction

L'opération fractionnaire intégrro-différentielle (calcul fractionnaire) est une généralisation de l'intégration et de la différentiation des opérateurs d'ordre entier. La question des dérivées fractionnaires est abordée dès 1695 par Leibniz dans une lettre adressée à l'Hôpital, lorsque celui-ci lui demande : quelle pourrait être la dérivée d'ordre un demi de la fonction  $x(t)$ , par rapport à la variable  $t$  ? Leibniz répond que cela mène à un paradoxe dont on tirera profit, un jour d'utiliser conséquence : le calcul fractionnaire est alors né.

Dans ces dernières années, l'intérêt considérable pour ce type de calcul a été simulé par des applications dans les domaines de physique et de l'ingénierie [1, 2, 3]. On présente dans ce chapitre, les principes et quelques approches mathématiques de la dérivation non entière [4], leurs principales propriétés qui nous seront utiles dans la suite de notre étude et quelques méthodes de résolution d'équation différentielle mettant en œuvre des dérivées non entières. Donc on peut généraliser les calculs d'intégration et différentiation en un seul opérateur fondamental  ${}_a D_t^\alpha$  ou  $a$  et  $t$  sont les limites de l'opération. L'opérateur intégrro-différentiel continu est défini comme suit [5] :

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0 \\ \int_a^t d(t) & \alpha < 0, \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \text{ l'ordre de l'operation} \\ 1 & \alpha = 0 \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Généralement l'opération fractionnaire est une façon synthétique de décrire des comportements intermédiaires entre les dérivées classiques. Cela se voit simplement dans le domaine fréquentiel où ces modèles apparaissent comme des généralisations ou des transitions entre les filtres analogiques du traitement du signal.

Dans le domaine temporel en revanche, plusieurs mathématiciens ont contribué à l'élaboration de la théorie de la dérivation d'ordre non entier et les différentes définitions de l'opérateur fractionnaire [6,7]. Les plus familières sont celles de Riemann-Liouville, de

Caputo et Grunwald-Letnikov. Pour la compréhension de ces définitions, nous présentons quelques fonctions de base utilisées dans le calcul fractionnaire.

## I.2 Fonctions utilisées dans le calcul fractionnaire

Dans cette partie, on va représenter deux fonctions plus utilisées et permettent de faciliter les calculs, les deux fonctions fournissent en général des solutions aux problèmes du calcul fractionnaire, il s'agit de la fonction Gamma et de la fonction de Mittag-Leffler [7]-[8].

### I.2.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base utilisée dans le calcul fractionnaire, est la fonction Gamma d'Euler. Son interprétation est simplement la généralisation du factoriel  $n$  ( $n!$ ) et elle permet à  $n$  de prendre des valeurs non entières.

La définition intégrale de la fonction Gamma est donnée par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{z-1} du \quad z > 0 \quad (\text{I.2})$$

Elle est plus souvent utilisée même si elle est restreinte aux valeurs positives de  $z$ . L'intégration par partie (I.2) conduit à la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\text{I.3})$$

Alors :

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n.(n-1)! = n! \quad (\text{I.4})$$

L'autre propriété importante de la fonction Gamma est qu'elle possède des pôles simples pour  $z=0, -1, -2, -3, \dots$

Son expression est donc :

$$\Gamma(z) = \Phi(z) + \frac{(-1)^0}{0!} \frac{1}{0+z} + \frac{(-1)^1}{1!} \frac{1}{1+z} + \frac{(-1)^2}{2!} \frac{1}{2+z} \dots \quad (\text{I.5})$$

Ceci signifie que pour des valeurs entières négatives, la fonction Gamma tend asymptotiquement vers l'infini.

### 1.2.2 Fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler est une fonction importante dans le monde de calcul fractionnaire. Son rôle est analogue à celui joué par la fonction exponentielle dans le cas du calcul entier.

La définition standard de cette fonction à un paramètre est donnée par:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (\alpha > 0) \quad (I.6)$$

Cette fonction a été introduite par Mittag-Leffler en 1903.

La fonction exponentielle usuelle correspond pour une valeur de  $\alpha = 1$  :

$$E_{\alpha}(z) = e^z \quad (I.7)$$

Il est aussi courant de représenter la fonction de Mittag-Leffler avec deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , comme suite :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (I.8)$$

Cette fonction a été introduite par Agarwal et Erdélyi en 1953-1954.

### 1.3 Les calculs fractionnaires

Autant dit précédemment la dérivation non entière c'est une généralisation de dérivée classique, donc la dérivation fractionnaire est une modélisation des conceptions scientifiques et physiques et mathématiques..., etc. Et l'intégration c'est opération inverse de dérivation.

De nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, en particulier Euler (1730), Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847), ..., etc. Différentes approches ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation aux ordres non-entiers [9].

- La limite du taux d'accroissement d'une fonction se généralise sous la forme de la formule de Grunwald-Letnikov, très utile numériquement.

- L'intégration, opération inverse de la dérivation, mène, via la formule intégrale de Liouville, aux formules de Riemann-Liouville et de Caputo.
- Enfin les transformations de Fourier et de Laplace associent la dérivation fractionnaire à une multiplication par  $(j\omega)^\alpha$  ou  $p^\alpha$  avec  $\alpha$  non entier. Mais ces différentes définitions ne sont pas toujours équivalentes. Cette incohérence apparente a pu être dissipée dans le nouveau cadre proposé par la théorie des distributions de Laurent Schwartz [10].

Dans cette partie on va représenter les définitions et les propriétés les plus utilisées dans les calculs non entiers.

### I.3.1 Calcul des intégrations non entières

**Définition :** soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0, \infty[$ , l'intégrale d'ordre  $\alpha$  de  $f$  de borne inférieure  $t_0$  définie par [8]:

$${}_{t_0}I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d(\tau) \tag{I.9}$$

Est appelée d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville avec  $\Gamma(\alpha)$  la fonction Gamma d'Euler. Quand on s'intéresse aux systèmes dynamiques, la fonction  $f(t)$  est une fonction causale, alors l'intégrale d'ordre non entier est définie comme suit :

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d(\tau) \quad , t > 0, \alpha \in \mathbb{R}^+ \tag{I.10}$$

Dans (I.10), nous pouvons voir que l'intégrale d'ordre fractionnaire peut être exprimée sous forme de produit de convolution de la forme suivante [11]:

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \Phi_\alpha(t) * f(t) \tag{I.11}$$

Avec :

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \text{ pour } \begin{cases} t_+^{\alpha-1} = 0 & \text{si } t < 0 \\ t_+^{\alpha-1} = t_+^{\alpha-1} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \tag{I.12}$$

**I.3.2 Calculs des dérivations non entières**

**I.3.2.1 Définition Grunwald-Letnikov(G.L)**

Une définition élémentaire de la dérivée d'une fonction  $f$  peut être formalisée de la façon suivante [7] :

$$D_t^m f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^N (-1)^k \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} f(t - k.h) \tag{I.13}$$

Où  $N = \frac{t-t_0}{h}$ ,  $h$  est la période d'échantillonnage et les coefficients  $\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}$  sont donnés par :

$$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(m-k+1)} \tag{I.14}$$

Si  $f$  est causale, pour un pas de discrétisation  $h$  « petit », on peut écrire:

$$D_t^\alpha f(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N (-1)^k \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} f(t - k.h) \tag{I.15}$$

On montre plus précisément que dans le cas d'un échantillonnage la dérivation d'ordre  $\alpha$  à l'instant  $t_m = h.m$ , où  $h$  est le pas d'échantillonnage, est donnée par :

$$D_t^\alpha f(t_m) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N (-1)^k \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} f_{m-k} \quad \text{où} \quad f_m = f(t_m) \tag{I.16}$$

Cette expression permet de déterminer numériquement par discrétisation la dérivation non entière d'une fonction  $f$  causale.

**I.3.2.2 Définition de Caputo**

Caputo a reformulé la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire comme suit [1] :

$$D_t^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \tag{I.17}$$

Où  $n-1 < \alpha < n$ ;  $n \in \mathbb{N}$

**Remarque 1:** ces définitions montrent que la dérivée d'ordre non entière prend que les valeurs de  $f(t)$  à tous les instants passée grâce à l'intégration qui y apparait. Elle fournit donc sur  $f(t)$ . L'effet de l'opérateur de dérivation non entière un excellent outil de modélisation des phénomènes de diffusion connus pour être à mémoire longue.

### I.3.3 Dérivations non entières implicite et explicite

Il est possible de différencier deux classes particulières de systèmes d'ordre non entier : ceux à caractère explicite et ceux à caractère implicite. Dans le premier cas, l'opérateur  $D^\alpha$  porte directement sur la fonction  $f$ , alors que dans l'autre cas cet opérateur porte sur le produit de  $f$  par une exponentielle [9].

Ainsi, pour un système d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $y(t)$ , à caractère explicite est décrit par une équation différentielle du type :

$$\tau^\alpha \cdot D^\alpha y(t) + y(t) = u(t) \quad (\text{I.18})$$

Un système à caractère implicite est décrit par une équation différentielle du type :

$$\tau^\alpha \cdot D^\alpha [y(t)e^{t/\tau}] = u(t)e^{t/\tau} \quad (\text{I.19})$$

### I.3.4 Quelques propriétés de la dérivation non entière [14]

- 1) si  $f(t)$  est une fonction analytique en  $t$ , alors sa dérivée fractionnaire est une fonction analytique.
- 2) pour  $\alpha=n$ , où  $n$  est un nombre entier, l'opération de dérivée fractionnaire obtient même résultat que la dérivation classique d'ordre entier.
- 3) pour  $\alpha=0$ , l'opérateur  $D_t^\alpha$  est l'opérateur identité [4] :

$$D_t^\alpha f(t) = f(t)$$

- 4) la différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaire [13]

$$D^\alpha (\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \cdot D^\alpha (f) + \mu \cdot D^\alpha (g) \quad (\text{I.20})$$

- 5) Les opérateurs de dérivation d'ordre fractionnaire (réel ou complexe), ne vérifient la propriété de semi-groupe que sous certaines conditions [4]:

$$D^\alpha D^\beta f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t) \text{ Si } \begin{cases} \alpha: \text{entier positif} \\ \beta: \text{arbitraire} \end{cases} \quad (\text{I.21})$$

6) La dérivée d'ordre fractionnaire de l'intégrale de même ordre d'une fonction temporelle  $y(t)$  donne [4]:

$$D^\alpha \circ I^\alpha f(t) = f(t) \text{ avec } \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \quad (\text{I.22})$$

### 1.3.5 Transformée de Laplace [4,7]

La transformée de Laplace  $F$ , d'une fonction  $f$  temporelle est définie par la relation :

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \quad (\text{I.23})$$

#### 1.3.5.1 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire

La méthode de la transformée de Laplace est souvent utilisée comme étant un outil pour la résolution des équations fractionnaires. Nous citons dans ce qui suit, la transformée de Laplace des différentes définitions de la dérivée fractionnaire [7] :

- *Au sens de Caputo*

$$L\{D^\alpha[f(t)]\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\alpha-1-k} f(t)]_{t=0} \quad (\text{I.24})$$

$$n-1 < \alpha < n ; n \in \mathbf{N}$$

Les conditions initiales apparaissant dans (I.24) sont données en fonction d'une dérivée entière évaluée à l'origine.

- *Au sens de Grunwald-Letnikov(G.L)*

$$L\{D^\alpha[f(t)]\} = s^\alpha L\{f(t)\} \quad (\text{I.25})$$

**Remarque 2 :** La résolution d'équation différentielle par la transformée de Laplace d'ordre fractionnaire se fait de la même manière que celle d'équation différentielle d'ordre entier.

#### 1.3.5.2 Transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire

La transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov(G.L) et Caputo [14], est donnée par la formule générale suivante:

$$L\{I^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s) \quad (\text{I.26})$$

En appliquant l'opérateur de Laplace aux équations différentielles (I.18) et (I.19) définissant les systèmes à caractère implicite et explicite, il est possible de les caractériser sous la forme d'une fonction de transfert. Soit, pour les systèmes à caractère explicite :

$$F_{exp}(s) = \frac{1}{1+(\tau s)^\alpha} \quad (I.27)$$

Et pour les systèmes à caractère implicite :

$$F_{imp}(s) = \frac{1}{(1+\tau s)^\alpha} \quad (I.28)$$

Il est alors possible de caractériser fréquentiellement ces systèmes par leur tracé dans le plan de Bode.

### 1.3.6 Exemples de calcul de dérivée d'ordre fractionnaire

#### 1.3.6.1 Dérivation d'ordre fractionnaire d'un cosinus (ou d'un sinus)

En utilisant le fait qu'un cosinus (resp. un sinus) est égal à la partie réelle (resp. imaginaire) d'une exponentielle, et que l'opérateur dérivée non entière est linéaire [13].

On peut déterminer facilement la dérivation fractionnaire d'ordre  $m$  d'un cosinus (resp. un sinus)

$$D^\alpha[\sin(\omega_0 t - \varphi)] = \omega_0^\alpha \cdot \sin(\omega_0 t - \varphi + \alpha \frac{\pi}{2}) \quad (I.29)$$

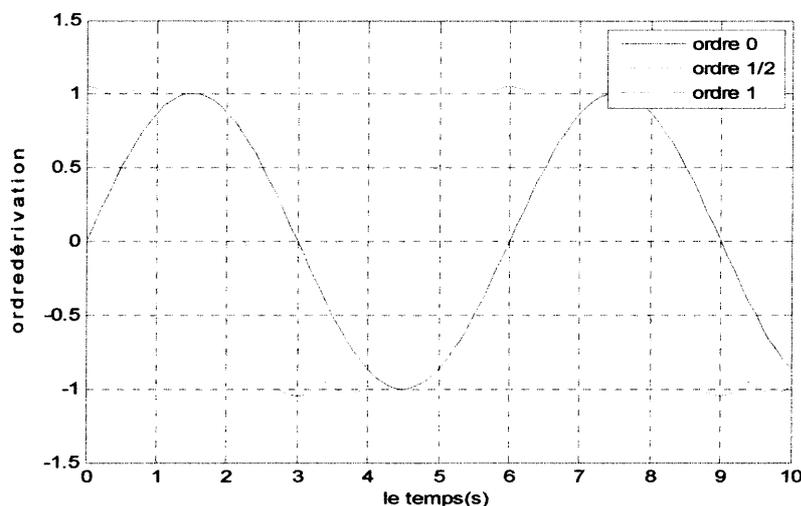


Figure I.1. Dérivation d'ordre 0,1/2,1 de la fonction sinusoïdale

$$D^\alpha [\cos(\omega_0 t - \varphi)] = \omega_0^\alpha \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi + \alpha \frac{\pi}{2}) \quad (I.30)$$

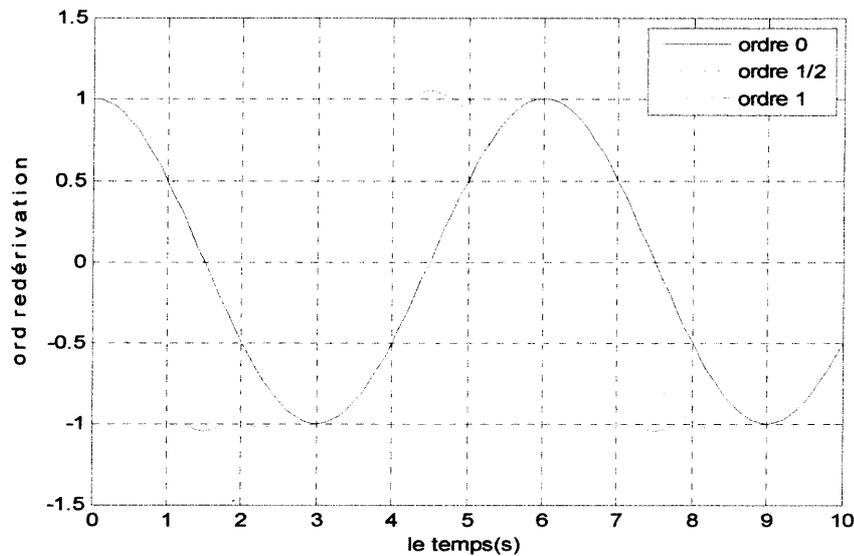


Figure I.2. Dérivation d'ordre 0, 1/2, 1 de la fonction cosinus

### I.3.6.2 Dérivation non entière d'une fonction sinusoïdale amortie

En utilisant le fait qu'un sinus est égal à la partie imaginaire d'une exponentielle et que l'opérateur dérivé d'ordre fractionnaire est linéaire [13], on trouve la relation suivante :

$$D^\alpha [\sin(\omega_0 t) \cdot e^{t/\tau}] = R^\alpha \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha \cdot \theta) \cdot e^{t/\tau} \quad (I.31)$$

$$\text{avec } R = \left| \frac{1}{\tau} + j\omega_0 \right| \quad \text{et} \quad \theta = \arg \left( \frac{1}{\tau} + j\omega_0 \right)$$

### I.3.6.3 Dérivation non entière d'une exponentielle

Pour un nombre z quelconque, on a [13] :

$$D^\alpha [\exp(z.t)] = z^\alpha \cdot \exp(z.t) \quad (I.32)$$

Où  $D^\alpha$  est la dérivation d'ordre  $\alpha$  par rapport à la variable t.

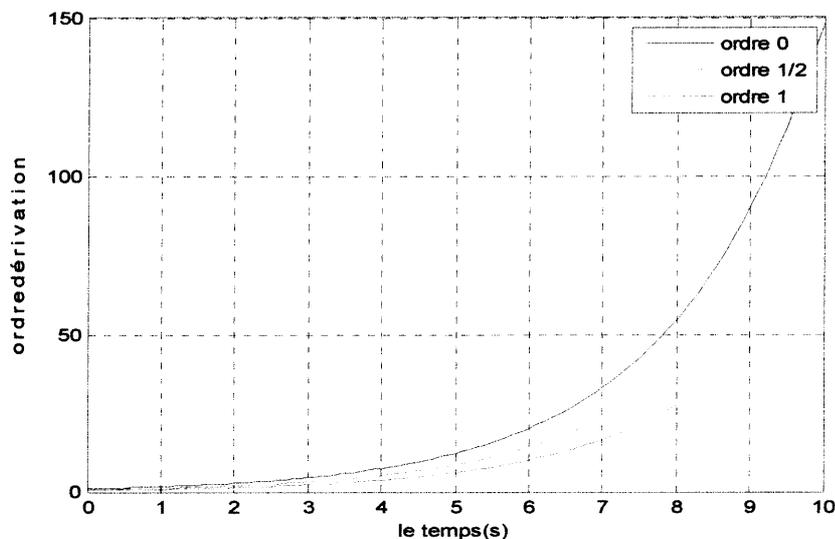


Figure I.3. Dérivation d'ordre 0,  $\frac{1}{2}$ , 1 de l'exponentielle

**Remarque général :**

On peut différencier deux classes de systèmes d'ordre non entier : les systèmes à caractère explicite et ceux à caractère implicite. Dans le premier cas, l'opérateur  $D^\alpha$  porte directement sur la fonction  $f$ , alors que, dans le deuxième cas, cet opérateur porte sur le produit de  $f$  par l'exponentielle.

#### I.4 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté les notions de dérivation et d'intégration fractionnaires, les fonctions utiles pour faire les calculs d'ordre fractionnaire telles que les fonctions Gamma Euler, Mittag Leffler et enfin, la transformée de Laplace d'une dérivation et d'une intégration non entière. A la fin de ce chapitre, on a présenté aussi des exemples des calculs fractionnaires.

*L'analyse de système  
fractionnaire*

## II.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter les différentes représentations des systèmes d'ordre fractionnaire à partir de leurs équations différentielles. Comme nous allons aussi, étudier et implémenter quelques méthodes d'approximation et de simulation d'une classe de systèmes d'ordre fractionnaire. En évoquant, les notions de la commandabilité, de l'observabilité et de la stabilité. A la fin de ce chapitre, nous présenterons quelques exemples des systèmes d'ordre fractionnaire, et la synthèse des ces systèmes.

## II.2 Représentation d'un système d'ordre fractionnaire

Dans cette partie trois représentations essentielles et qui sont les plus utilisées dans le domaine automatique pour la modélisation des systèmes seront décrites. A savoir la représentation par des équations différentielles, la représentation par des fonctions de transfert et la représentation d'état.

### II.2.1 Représentation par des équations différentielles

Un système d'ordre non entier linéaire d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $y(t)$ , est représenté par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} a_n \cdot D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} \cdot D^{\alpha_{n-1}} y(t) + a_{n-2} \cdot D^{\alpha_{n-2}} y(t) + \dots + a_0 \cdot D^{\alpha_0} y(t) \\ = b_p \cdot D^{\beta_p} u(t) + \dots + b_0 \cdot D^{\beta_0} u(t) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Où :  $a_i$  et  $b_j$ , ( $i \in \{0 \dots \dots n\}$  et  $j \in 0 \dots \dots p$ ) sont des coefficients constants,  $\alpha_i, \beta_j \in R$  sont les ordres de dérivation.

Cette équation est dite une équation différentielle généralisée (E.D.G).

### II.2.2 Représentation par fonction de transfert

Pour passer d'une représentation différentielle à la représentation par une fonction de transfert, on utilise l'approximation de la transformées de Laplace de l'équation (II.1) et qui sera donnée par l'équation suivante :

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0 s^{\beta_0} + \dots + b_M s^{\beta_M}}{a_0 s^{\alpha_0} + \dots + a_L s^{\alpha_L}} \quad (\text{II.2})$$

### II.2.2.1 Fonction de transfert d'ordre fractionnaire explicite

Dans le domaine temporel, un système est dit d'ordre fractionnaire explicite lorsqu'il est fondé sur une représentation par une équation différentielle de la forme

$$\sum_{l=0}^L a_l D^{n_{a_l}} y(t) = \sum_{m=0}^M b_m D^{n_{b_m}} u(t) \quad (\text{II.3})$$

Avec :  $\{a_l, n_{a_l}, b_m, n_{b_m}\} \in R$

$u(t)$  et  $y(t)$  désignent respectivement l'entrée et la sortie du système.

La fonction de transfert du système (II.3) est donnée par deux polynômes à puissances fractionnaires.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{b_0 s^{n_{b_0}} + \dots + b_M s^{n_{b_M}}}{a_0 s^{n_{a_0}} + \dots + a_L s^{n_{a_L}}} \quad (\text{II.4})$$

Dans le cas où tous les exposants de  $s$  sont multiples d'une certaine valeur réelle  $q$  (ordres commensurables), la fonction de transfert (II.2) peut être réécrite sous la forme :

$$H(s) = \frac{\sum_{m=0}^M (b_m s^{mq})}{\sum_{l=0}^L (a_l s^{lq})} \quad (\text{II.5})$$

où  $q$  est un nombre réel,  $M$  et  $L$  sont des entiers tel que  $M < L$ .

Un système d'ordre fractionnaire décrit par une fonction de transfert de la forme (II.3) est appelé *système commensurable*.

Bien que n'importe quelle valeur réelle  $q$  suffise pour que le système soit commensurable, la valeur de  $q$  est généralement prise comme étant un nombre rationnel  $1/Q$ , avec  $Q \in \mathbb{N}$ , soit :

$$H(s) = \frac{\sum_{m=0}^M (b_m s^{\frac{m}{Q}})}{\sum_{l=0}^L (a_l s^{\frac{l}{Q}})} \quad (\text{II.6})$$

### II.2.2.2 Fonction de transfert d'ordre fractionnaire implicite

La dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction  $h(t)$  est dite implicite lorsqu'elle ne porte pas directement sur  $h(t)$  mais sur le produit de  $h(t)$  par une fonction exponentielle croissante de constante du temps  $\tau$ ,  $e^{t/\tau}$  [15], soit :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{imp}^\alpha h(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^\alpha \left(h(t)e^{t/\tau}\right) \quad (\text{II.7})$$

La relation (II.7) définit ce que nous appelons la dérivée implicite d'ordre  $\alpha$  de  $h(t)$ . La transformée de Laplace de cette équation est donnée par [1]:

$$H(s) = \frac{1}{(1+\tau s)^\alpha} \quad \text{avec } \tau \in R^+ \text{ et } R(\alpha) > 0 \quad (\text{II.8})$$

Dans le cas général, un système est dit à dérivée d'ordre fractionnaire implicite lorsqu'il est fondé sur le produit de pôles et de zéros d'ordre fractionnaire, soit :

$$H(s) = \prod_{i=1}^N (1 + s\tau_i)^{\alpha_i} \quad (\text{II.9})$$

avec  $\tau_i \in R^+$  et  $\alpha_i (i = 1, \dots, N) \in R$

### II.2.3 Représentation d'état d'un système d'ordre fractionnaire

La représentation d'état d'un système d'ordre fractionnaire dans le cas générale est donnée par l'équation suivante [7] :

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Où :

$u$  : est le vecteur des entrées de dimension  $n_u \times 1$ ;

$x$  : est le vecteur d'état d'ordre fractionnaire de dimension  $n_x \times 1$ ;

$y$  : est le vecteur des sorties de dimension  $n_y \times 1$ ;

$\alpha$  : est l'ordre de dérivation tel que  $0 < \alpha < 1$  ;

$A, B, C$  et  $D$  sont tous des matrices ou des vecteurs à éléments constants et de dimension appropriée.

- La représentation d'état d'un système d'ordre fractionnaire n'est pas unique. Les systèmes d'ordre fractionnaire réels commensurables, permettent aussi une représentation dans l'espace d'état :

$$\begin{cases} D^{\frac{1}{Q}} x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

$$D^{\frac{1}{Q}} x_i = x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1.$$

En introduisant les variables d'états  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  définies ci-dessus, on obtient la représentation d'état augmentée suivante (cas monovariante) :

$$D^\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_N} & -\frac{a_1}{a_N} & \dots & \dots & -\frac{a_{N-1}}{a_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{N-1}(t) \\ x_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{b_M}{a_N} \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{II.12})$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & \dots & c_{n-1} & c_p \end{bmatrix} [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_N(t)]^T \quad (\text{II.13})$$

**Remarque :** Pour les systèmes fractionnaires, il convient de parler de “pseudo-état” et non d'état car “l'historique” de l'état initial peut influencer sur le comportement du système [16].

○ Pour le cas des systèmes d'ordre fractionnaire non commensurables, on aura la représentation suivante :

$$\sum_{l=0}^L a_l D^{\alpha_l} y(t) = \sum_{m=0}^M b_m D^{\beta_m} u(t) \quad (\text{II.14})$$

Qu'on écrit sous la forme semi-condensée :

$$\begin{aligned} a_n \cdot D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} \cdot D^{\alpha_{n-1}} y(t) + a_{n-2} \cdot D^{\alpha_{n-2}} y(t) + \dots + a_0 \cdot D^{\alpha_0} y(t) \\ = \sum_{m=0}^M b_m D^{\beta_m} u(t) \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

On obtient donc la relation suivante :

$$D^{\alpha_n} y(t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} D^{\alpha_{n-1}} y(t) - \dots - \frac{a_0}{a_n} D^{\alpha_0} y(t) + \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{a_n} D^{\beta_m} u(t)$$

Qui peut être réécrite en introduisant des variables d'état sous la forme :

$$x_n^{\alpha_n - \alpha_{n-1}}(t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(t) - \frac{a_{n-2}}{a_n} x_{n-1}(t) - \dots - \frac{a_1}{a_n} x_2(t) - \frac{a_0}{a_n} x_1(t) + \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{a_n} D^{\beta_m} u(t) \quad (\text{II.16})$$

Dont la représentation matricielle est donnée comme suit :

$$\begin{bmatrix} x_1^{(\alpha_1 - \alpha_0)}(t) \\ x_2^{(\alpha_2 - \alpha_1)}(t) \\ \vdots \\ x_{N-1}^{(\alpha_{N-1} - \alpha_{N-2})}(t) \\ x_N^{(\alpha_N - \alpha_{N-1})}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_N} & -\frac{a_1}{a_N} & \cdots & \cdots & -\frac{a_{N-1}}{a_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{N-1}(t) \\ x_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 \\ \frac{b_1}{a_N} \cdots \frac{b_M}{a_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(\beta_1)}(t) \\ \vdots \\ u^{(\beta_M)}(t) \end{bmatrix} \quad \text{II.17}$$

Ou sous la forme condensée :

$$\begin{cases} \bar{x}^{(\bar{n})}(t) = A. \bar{x}(t) + B. \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = C. \bar{x}(t) + D. \bar{u}(t) \end{cases} \quad \text{(II.18)}$$

Ainsi, comme dans le cas entier, une représentation d'état d'ordre non entier comporte deux équations [1] :

- o Une équation d'état généralisée dans laquelle le vecteur d'état ne fait plus l'objet d'une dérivation unitaire mais d'une dérivation d'ordre non entier réel;
- o Une équation d'observation.

Les vecteurs intervenant dans l'équation (II.18) sont :

- o Le vecteur d'état :  $\bar{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_N(t)]^T$  ;
- o Le vecteur d'entrée (ou de commande) :  $\bar{u}(t) = [u^{(\beta_1)}(t) \ u^{(\beta_2)}(t) \ \cdots \ u^{(\beta_M)}(t)]^T$  ;
- o Le vecteur de sortie (ou d'observation) :  $\bar{y}(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ \cdots \ y_p(t)]^T$ .

On voit également apparaître l'opérateur vectoriel  $(\bar{n}) = (\alpha_1 - \alpha_0, \dots, \alpha_N - \alpha_{N-1})$  appliqué au vecteur d'état. Ainsi, ce vecteur n'est pas forcément composé de termes identiques. Néanmoins, dans les études de stabilité, on cherchera systématiquement un arrangement des variables d'état pour que les composants de ce vecteur  $(\bar{n})$  soient les mêmes. Il pourra alors être assimilé à un nombre  $n$  réel.

Pour un système d'ordre  $\frac{1}{2}$  ( $n=0.5$ ). Le système d'état s'écrit alors :

$$\begin{cases} \bar{x}^{(0.5)}(t) = A. \bar{x}(t) + B. \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = C. \bar{x}(t) + D. \bar{u}(t) \end{cases} \quad \text{(II.19)}$$

Pour  $n = 1$ , nous retrouvons la représentation d'état classique d'un système d'ordre entier :

$$\begin{cases} \bar{x}^{(1)}(t) = A. \bar{x}(t) + B. \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = C. \bar{x}(t) + D. \bar{u}(t) \end{cases} \quad \text{(II.20)}$$

- L'utilisation de la transformée de Laplace et de la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo, l'équation (II.10) devient :

$$s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) = AX(s) + BU(s) \Rightarrow$$

$$X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1} BU(s) + (s^\alpha I - A)^{-1} s^{\alpha-1} x(0) \quad (\text{II.21})$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (\text{II.22})$$

La solution apportée par la définition de Caputo est nécessaire si nous voulons que les conditions initiales soient exprimées comme les valeurs des états à l'instant  $t=0$ . Dans le cas où les conditions initiales sont nulles, l'équation (II.21) devient :

$$X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1} BU(s) \quad (\text{II.23})$$

Et l'équation (II.22) s'écrit :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = c(s^\alpha I - A)^{-1} B + D \quad (\text{II.24})$$

Où  $I$  est la matrice identité de dimension  $n \times n$  et  $H(s)$  représente la matrice fonction de transfert de dimension  $p \times m$ . Son numérateur et son dénominateur sont des polynômes exprimés en termes de puissances non entiers de  $s^\alpha$ .

- La représentation d'état (II.11) correspond à la matrice de transfert [18]:

$$Y = (c(s^{\frac{1}{Q}} I - A)^{-1} B + D) U \quad (\text{II.25})$$

Avec l'hypothèse que toutes les conditions initiales sont nulles.

À partir de la dernière hypothèse on peut écrire :

$$\begin{cases} s^{\frac{1}{Q}} X = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s^{\frac{1}{Q}} I - A)X = BU \\ Y = CX + DU \end{cases} \Rightarrow X = \left( s^{\frac{1}{Q}} I - A \right)^{-1} BU$$

En substituant  $X$  dans l'équation :  $Y=CX+DU$ , on obtient l'équation (II.23).

### II.2.3.1 Commandabilité et observabilité d'un système d'ordre fractionnaire

La définition de la commandabilité de système d'ordre fractionnaire est la même que celle utilisée dans la théorie des systèmes linéaires entiers [17, 18].

Le système non entier commensurable de l'équation (II.11) est commandable si pour un temps donné  $t_0$  il existe un temps fini  $t_1 > t_0$  tel que, quelque soient deux états  $x(t_0) = x_0$  et  $x(t_1) = x_1$  dans l'espace d'état, il existe une entrée de commande  $u(t), t \in [t_0, t_1]$  qui permet de transférer l'état  $x(t)$  de  $x_0$  à  $x_1$ . Le système non entier commensurable (II.11) est donc commandable si le rang de la matrice de commandabilité :

$$C = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (\text{II.26})$$

est égal à  $n$ .

De la même manière la condition d'observabilité des systèmes non entiers commensurable est (en utilisant la définition d'observabilité des systèmes entiers) donnée par :

Le système non entier commensurable d'équation (II.11), est observable pendant l'intervalle de temps  $[t_0, t_1]$ ,  $t_1 > 0$ , si n'importe quel état  $x(t_0)$  peut être déduit à partir des observations de la sortie  $y(t)$  et l'entrée  $u(t)$  pendant un temps fini  $t \in [t_0, t_1]$ .

Dans ce cas aussi, la condition d'observabilité du système (II.10) est que le rang de la matrice d'observabilité est égal à  $n$ :

$$O = [C \ CA \ CA^2 \ \dots \ CA^{n-1}]^T \quad (\text{II.27})$$

### II.2.3.2 Matrice de transition fractionnaire

Considérons un système fractionnaire commensurable dont la représentation d'état est de la forme :

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

L'application de la transformée de Laplace nous permet d'avoir les équations précédentes (II.21) et (II.22). A partir de cette représentation d'état matricielle dans le domaine de Laplace, on peut obtenir la fonction de transfert du système pour des conditions initiales nulles (II.24).

D'autre part, en appliquant la transformée de Laplace inverse à (II.21) on obtient

L'expression de l'état du système :

$$x(t) = l^{-1}[x(s)] = l^{-1}[(s^\alpha I - A)^{-1}BU(s) + s^{\alpha-1}(s^\alpha I - A)^{-1}x(0)] \quad (\text{II.29})$$

On définit ainsi  $\Phi(t)$  : la matrice de transition généralisée aussi appelée la matrice de transition fractionnaire (Par analogie avec les systèmes d'ordre entier), comme étant la Transformée de Laplace inverse de  $s^{\alpha-1}(s^\alpha I - A)^{-1}$ , c'est-à-dire :

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}(s^{\alpha-1}(s^\alpha I - A)^{-1}) \quad (\text{II.30})$$

Il suffit donc de calculer (II.30) pour avoir l'expression de Mittag-Leffler:

$$\mathcal{L}^{-1}(s^{\alpha-1}(s^\alpha I - A)^{-1}) = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-k\alpha-1}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} = E_\alpha(A t^\alpha)$$

On remarque donc que cette matrice de transition relative au système (II.24) n'est rien d'autre que la fonction de Mittag-Leffler généralisée  $E_\alpha(A t^\alpha)$  :

$$E_\alpha(A t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} = \Phi(t).$$

### II.3 Stabilité des systèmes fractionnaires

Dans la théorie de la stabilité des systèmes linéaires à temps invariant et à dérivée d'ordre entier, nous savons bien qu'un système est stable si les racines du polynôme caractéristique sont à parties réelles strictement négatives, donc situées sur la moitié gauche du plan complexe. Par ailleurs, dans le cas des systèmes fractionnaires linéaires à temps invariant, la définition de la stabilité est différente des systèmes d'ordre entier.

En effet, les systèmes fractionnaires ou d'ordre non entier peuvent bel et bien avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe et être stables [19].

#### II.3.1 Condition de stabilité

La condition de la stabilité dans le système d'ordre entier, est que les valeurs propres sont à partie réelle négative.

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\bar{x}^{(n)}(t)] = A. \mathcal{L}[\bar{x}(t)] + B. \mathcal{L}[\bar{u}(t)] \\ \mathcal{L}[\bar{y}(t)] = C. \mathcal{L}[\bar{x}(t)] + D. \mathcal{L}[\bar{u}(t)] \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

On suppose que les valeurs initiales des toutes les grandeurs étant nulles et que :

$$\mathcal{L}[\bar{x}(t)] = \bar{X}(s) = [X_1(s) \quad X_2(s) \quad \dots \quad X_N(s)], \quad \mathcal{L}[\bar{u}(t)] = \bar{U}(s), \quad \mathcal{L}[\bar{y}(t)] = \bar{Y}(s)$$

Le système (II.31) devient alors :

$$\begin{cases} \bar{x}^{(n)}(t) = A.\bar{x}(t) + B.\bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = C.\bar{x}(t) + D.\bar{u}(t) \end{cases}$$

Et on aura par la suite :

$$\begin{cases} s^n.\bar{X}(s) = A.\bar{X}(s) + B.\bar{U}(s) \\ \bar{Y}(s) = C.\bar{X}(s) + D.\bar{U}(s) \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

Supposant que les valeurs initiales sont nulles.

Finalement, en combinant les deux relations de l'équation précédente, nous trouvons l'expression de la sortie du système :

$$\bar{Y}(s) = [C(s^n I - A)^{-1}B + D].\bar{U}(s) = H(s).\bar{U}(s) \quad (\text{II.33})$$

Où  $H(s)$  est la fonction de transfert d'ordre non entier.

Pour  $n=1$ , l'équation (II.32) se présente le système d'ordre entier comme suite :

$$\bar{Y}(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D].\bar{U}(s) = H(s).\bar{U}(s) \quad (\text{II.34})$$

Les valeurs propres de :

$$\det(s^n I - A) = 0 \quad (\text{II.35})$$

Sont toujours savoir la stabilité de système, mais dans le système d'ordre non entier sont des valeurs qui calculé à partir de la matrice  $A$  ne nécessite, donc pas des méthodes qui sont connaissant la stabilité des ces systèmes. La solution générale de l'équation (II.35) sous la forme :

$$s^n - \lambda_l = 0 \quad (\text{II.36})$$

Donc la condition de la stabilité des systèmes d'ordre entier et non entier selon [15] :

$$|\arg(\lambda_l)| > \frac{n.\pi}{2} \quad (\text{II.37})$$

Cette expression représente une généralisation de la condition de stabilité d'un système d'ordre non entier.

Dans le cas où  $n = 1$ :

$$|\arg(\lambda_l)| > \frac{\pi}{2} \quad (\text{II.38})$$

La relation (II.38) se traduit dans le plan complexe par une coupure entre la zone de stabilité et la zone d'instabilité. La Figure (II.1) illustre cette coupure dans le cas où l'ordre de dérivation est égal à  $\frac{1}{2}$ .

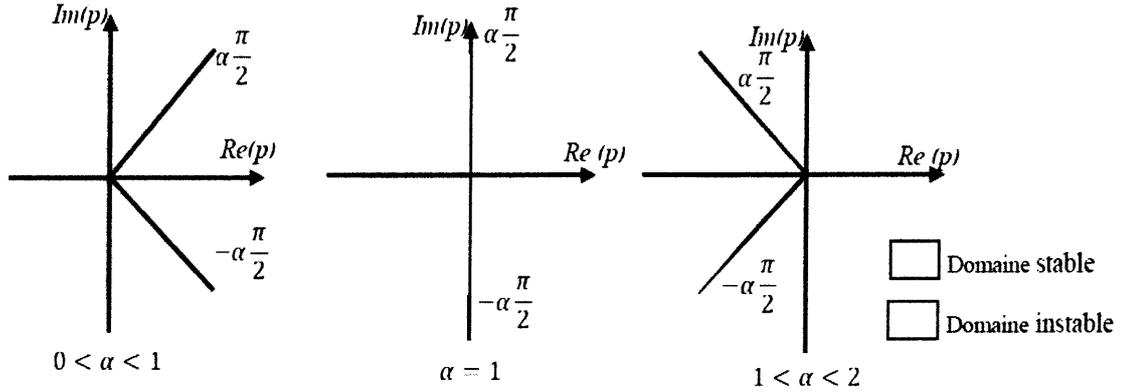


Figure II.1. Domaine de la stabilité des systèmes d'ordre entier et non entier.

## II.4 Approximation des systèmes d'ordre fractionnaire

### II.4.1 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire (Approximation de Charef)

La fonction de transfert d'un intégrateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$H_1(s) = \frac{1}{s^m} \tag{II.39}$$

Avec  $s = j\omega$  la fréquence complexe et  $m$  est un nombre positif tel que  $0 < m < 1$ .

Dans une bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_a]$ , cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modelé par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) comme suit :

$$H(s) = \frac{k_1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \tag{II.40}$$

Si on suppose que pour  $\omega \in [\omega_b, \omega_a]$  on a  $\omega \gg \omega_c$ , on peut écrire :

$$H(s) = \frac{k_1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} = \frac{k_1 \omega_c^m}{s^m} = \frac{1}{s^m} = H_1(s) \tag{II.41}$$

Avec  $K_l = (1/\omega_c^m)$  et  $\omega_c$  est la fréquence de coupure de PPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence  $\omega_b$  :  $\omega_c = \omega_b \sqrt{10 \left(\frac{\varepsilon}{10^m}\right) - 1}$  où  $\varepsilon$  est l'erreur maximale permise entre la pente de l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (II.40) et le PPF de l'équation (II-39) dans la bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ .

Dans le but de représenter le PPF de l'équation (II.40), et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle [20], [21]. La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de -20dB/dec sur le tracé de Bode du PPF par un nombre de lignes en zig-zag produisant une alternance de pente -20 dB/de et 0 dB/dec correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négative du plan s tel que  $p_0 < z_0 < p_1 < z_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$ .

D'où l'approximation suivante :

$$H(s) = \frac{k_1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \cong k_1 \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II.42})$$

Les  $p_i$  et les  $z_i$  sont les pôles et les zéros de l'approximation. En utilisant une méthode graphique [25], les pôles et les zéros de l'approximation s'avèrent sous une forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation commence par une erreur d'approximation  $y$  en dB et une bande de fréquence d'approximation  $h$ ,  $w_{\max} = 100w_h$ . Le nombre de pôles d'approximation N est donné par [21] :

$$N = \text{partie entière} \left[ \frac{\log \left[ \frac{w_{\max}}{p_0} \right]}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (\text{II.43})$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$p_i = (ab)^i p_0, \text{ pour } i=0,1,\dots,N \quad (\text{II.44})$$

$$z_i = (ab)^i ap_0, \text{ pour } i=0,1,\dots,N-1 \quad (\text{II.45})$$

Où a et b sont appelés les rapports de position, leurs expressions en fonction de y et m sont données par :

$$a = 10^{\left(\frac{y}{10(1-m)}\right)}, b = 10^{\left(\frac{y}{10m}\right)} \quad (\text{II.46})$$

Et le premier pôle  $p_0$  et le premier zéro  $z_0$  sont donnés par [21] :

$$p_0 = w_c \sqrt{b}, z_0 = ap_0 \quad (\text{II.47})$$

Afin de connaître la contribution de chaque pôle au processus de relaxation. On doit décomposer la fonction rationnelle en somme de fractions élémentaires :

$$H_I(s) = K_I \cdot \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left( 1 + \frac{s}{(ab)^i ap_0} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left( 1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} \quad (\text{II.48})$$

Où les coefficients  $h_i$  sont les résidus et qui sont déterminés par :

$$H(s) = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left( 1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j ap_0} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left( 1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j p_0} \right)} = k_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left( 1 - \frac{(ab)^{(i-j)}}{a} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left( 1 - (ab)^{(i-j)} \right)}, i = 0,1,\dots,N \quad (\text{II.49})$$

#### II.4.1.1 Exemple d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

Pour bien illustrer la théorie de calcul fractionnaire citée précédemment, prenons un exemple numérique tel que un intégrateur d'ordre fractionnaire représenté par :

$$H_I(s) = \frac{1}{s^{0.6}} \quad (\text{II.50})$$

Pour obtenir la fonction rationnelle d'approximation de cet opérateur d'ordre

fractionnaire, on suppose que la bande de fréquence :  $[\omega_b, \omega_a] = [100 \text{rad/s}, 100000 \text{rad/s}]$ , et pour  $\varepsilon = 10^{-5}$ , on obtient  $\omega_c = 0.1175$  et  $K_I = 8.5078$  et par suite le modèle PPF de cet opérateur d'ordre fractionnaire est donné par :

$$H(s) = \frac{8.5078}{\left(1 + \frac{s}{0.1175}\right)^{0.6}} \quad (\text{II.51})$$

On choisit l'erreur du PPF par une fonction rationnelle  $y = 1$  dB et la bande fréquentielle d'approximation  $\omega_{max} = 100\omega_h = 10^6 \text{ rad/s}$ , les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $p_0$ ,  $z_0$  et  $N$  peuvent être facilement calculés et ils sont donnés comme suit :

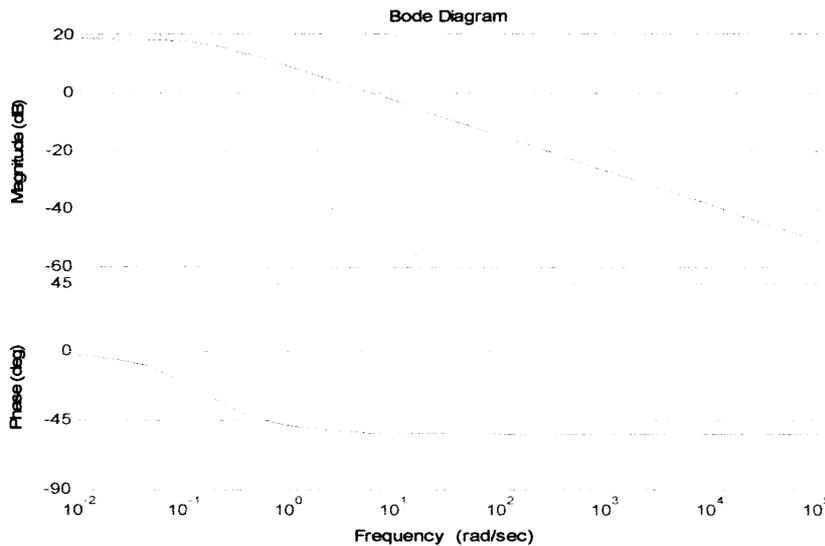
$$a=1.1885, \quad b=1.1220, \quad p_0=0.1245 \text{ rad/s}, \quad z_0=0.1480 \text{ rad/s} \quad \text{et} \quad N=64.$$

Les pôles et les zéros de l'approximation sont donnés par les équations suivantes :

$$p_i = 1.3335(0.1245)^i, \quad \text{pour } i=0,1,\dots,64 \quad (\text{II.52})$$

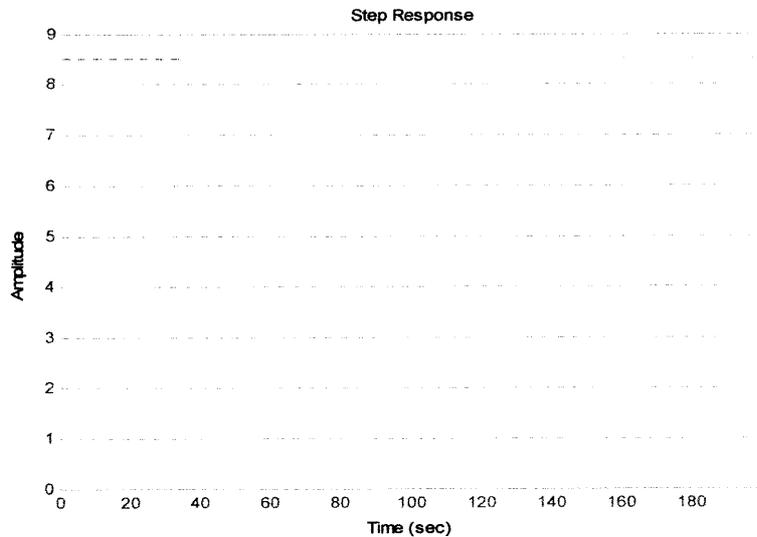
$$z_i = 1.3335(0.1480)^i, \quad \text{pour } i=0,1,\dots,63 \quad (\text{II.53})$$

Les tracés de Bode de la fonction rationnelle d'approximation sont présentés dans la figure (II.1).



**Figure II.2. Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire  $s^{-0.6}$ .**

On remarque bien que dans la plage de fréquence  $[100, 100000]$ , la pente de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire à une pente de  $+10 \text{ dB/dec}$  (20m), et la phase est de  $-50^\circ$  ce qui implique la justesse de l'approximation.



**Figure II.3. Réponse indicielle de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire  $s^{-0.6}$ .**

**II.4.2 Approximation de dérivateur d'ordre fractionnaire (Approximation de Charef)**

La fonction de transfert de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est donnée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$H_D(s) = s^m \tag{II.54}$$

Avec  $s = j\omega$  : la fréquence complexe et  $m$  : est un nombre positive tel que  $0 < m < 1$ . Dans une bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_a]$  cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modelé dans le domaine fréquentiel par un zéro à puissance fractionnaire (ZPF) comme suit [21] :

$$H_D(s) = K_D \left( 1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^m \tag{II.55}$$

Si on suppose que pour  $\omega \in [\omega_b, \omega_a]$  on a  $\omega \gg \omega_c$  , on peut écrire :

$$H_D(s) = K_D \left( \frac{s}{\omega_c} \right)^m = \frac{K_D}{\omega_c^m} s^m = s^m \tag{II.56}$$

Avec  $K_D = \omega_c^m$  et  $\omega_c$  est la fréquence de coupure de ZPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence  $\omega_b$  :  $\omega_c = \omega_b \sqrt{10 \left( \frac{\varepsilon}{10^m} \right) - 1}$  ou  $\varepsilon$  est l'erreur maximale permise entre la pente de

l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (II.63) et le ZPF de l'équation (II.55) dans la bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ .

Dans le but de représenter le zéro d'ordre fractionnaire de l'équation (II.55), et par conséquent le dérivateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une rationnelle.

La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de 20mdB/dec sur le tracé de Bode du ZPF par un nombre de ligne sous forme Zig-Zag, produite par une alternance de pente 20 dB/de cet 0 dB/dec correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négative du plan  $s$  tel que  $z_0 < p_0 < z_1 < p_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$  [21]. D'où l'approximation suivante :

$$H_D(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II.57})$$

En utilisant une méthode graphique simple [20], les pôles et les zéros de l'approximation s'avèrent sous une forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation a commencé par une erreur d'approximation  $y$  en dB et une bande de

$$N = \text{partie entière} \left[ \frac{\log \left[ \frac{w_{\max}}{p_0} \right]}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (\text{II.58})$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$z_i = (ab)^i z_0, \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (\text{II.59})$$

$$p_i = (ab)^i az_0, \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (\text{II.60})$$

Avec :

$$z_0 = w_c \sqrt{b}, p_0 = az_0 \quad (\text{II.61})$$

Par conséquent, la fonction rationnelle d'approximation dans une bande de fréquence donnée est :

$$H_D(s) = s^m = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m \approx K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i z_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i az_0}\right)} \quad (\text{II.62})$$

Pour des raisons concernant la réalisation, on va développer  $\frac{H(s)}{s}$  en fonctions élémentaires, alors :

$$\frac{H_D(s)}{s} = \frac{1}{s} \cdot K_D \cdot \prod_{i=0}^N \frac{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i z_0}\right)}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i az_0}\right)} \quad (\text{II.63})$$

Calculant les résidus des pôles, on obtient :

$$H_D(s) = H_0 + \sum_{i=0}^N \frac{h_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II.64})$$

Avec  $H_0 = K_D$

Et 
$$h_i = K_D \cdot \frac{\prod_{j=0}^N (1 - (ab)^{(i-j)} a)}{(- (ab)^i az_0) \prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{(i-j)})} \text{ Pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{II.65})$$

#### II.4.2.1 Exemple d'un dérivateur d'ordre fractionnaire

Soit l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire suivant :

$$H_D(s) = s^{0.6} \quad (\text{II.66})$$

De la même façon que l'exemple de PPF, le modèle ZPF du dérivateur d'ordre fractionnaire est donné par :

$$H_D(s) = 0.2768 \left( 1 + \frac{s}{0.1175} \right)^{0.6} \quad (\text{II.67})$$

Avec :  $K_D=0.2768$  ,  $[\omega_b, \omega_h]=[100\text{rad/s}, 100000\text{rad/s}]$  ,  $\varepsilon = 10^{-5}$  ,  $\omega_C = 0.1175$

On choisit l'erreur du ZPF par une fonction rationnelle  $y = 0.5$  dB et la bande fréquentielle d'approximation  $\omega_{\max} = 100\omega_h = 10^7 \text{ rad/s}$  , les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $p_0$ ,  $z_0$  et  $N$  peuvent être facilement calculés et ils sont donnés comme suit :

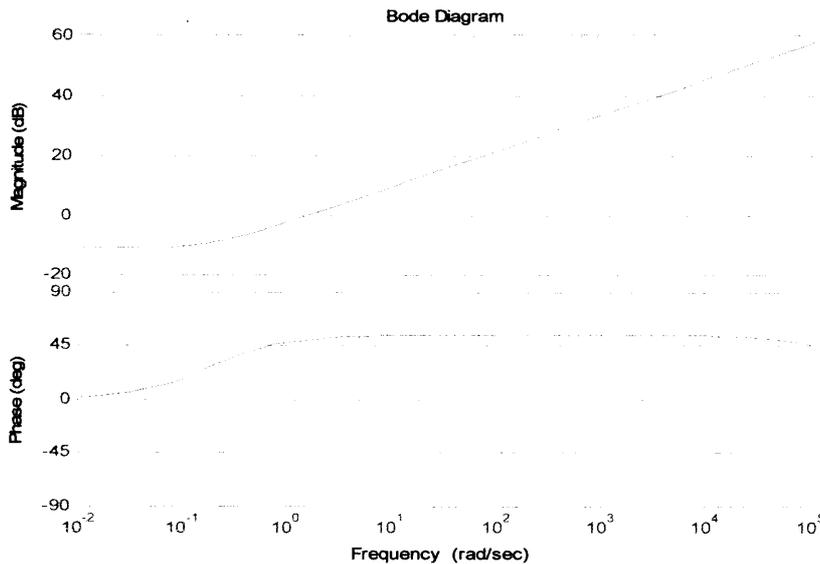
$$a=1.3335, b=1.2115, p_0 = 0.1725 \text{ rad/s}, z_0 = 0.1299 \text{ rad/s} \text{ et } N=33.$$

Les pôles et les zéros de l'approximation sont donnés par les équations suivantes :

$$p_i = 1.6156(0.1299)^i , \text{ pour } i=0,1,\dots,28 \quad (\text{II.68})$$

$$z_i = 1.6156(0.1725)^i , \text{ pour } i=0,1,\dots,28 \quad (\text{II.69})$$

Les tracés de Bode de la fonction rationnelle d'approximation sont représentés dans la figure (II.3).



**Figure II.4. Tracés de Bode la fonction d'approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire  $s^{0.6}$ .**

On voit bien que dans la plage de fréquence  $[100\text{rad}/s, 10000\text{rad}/s]$ , la pente de la fonction d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire à une pente de 10dB/dec (20m), et la phase est de  $+50^\circ$ , ce qui implique la justesse de l'approximation.

### II.4.3 La méthode d'Oustaloup

La méthode d'Oustaloup [22], repose sur l'approximation en temps continu de l'opérateur d'ordre fractionnaire  $H(s) = s^\alpha, \alpha \in R$ , par une fonction rationnelle en utilisant une distribution récursive de zéros et pôles d'ordre non entier, répartis dans une bande de fréquence limitée.

Ainsi, l'approximation de l'opérateur  $s^\alpha$  dans une bande de fréquence  $[\omega_b, \omega_h]$  et  $H_0 \in [-N, N]$  est donnée par :

$$H(s) = s^\alpha \approx \hat{H}(s) = H_0 \prod_{i=1}^N \left( \frac{1 + \frac{s}{z_i}}{1 + \frac{s}{p_i}} \right) \quad (\text{II.70})$$

$$\text{avec : si } \alpha > 0: \begin{cases} z_1 = \omega_b \sqrt{\eta} \\ p_i = z_i \lambda, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ z_{i+1} = p_i \eta, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\ \omega_h = p_N \sqrt{\eta} \end{cases}, \text{ si } \alpha < 0: \begin{cases} p_1 = \omega_b \sqrt{\eta} \\ z_i = p_i \lambda, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ p_{i+1} = z_i \eta, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\ \omega_h = z_N \sqrt{\eta} \end{cases}$$

$$N = \text{integer} \left\{ \frac{\log(\frac{\omega_h}{\omega_b})}{\log(\lambda \eta)} \right\}, \quad \lambda = \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{|\alpha|/N}, \quad \eta = \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{1-|\alpha|}{N}} \quad (\text{II.71})$$

Le modèle rationnel est obtenu ensuite en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire du système original par son approximation rationnelle.

### II.4.4 La méthode de Matsuda

La méthode suggérée dans [23] est basée sur l'approximation d'une fonction irrationnelle par une autre rationnelle, obtenue par le CFE et l'ajustage de la fonction originale dans un ensemble de points logarithmiquement espacés. Supposant que les points choisis sont  $s_k$ ,

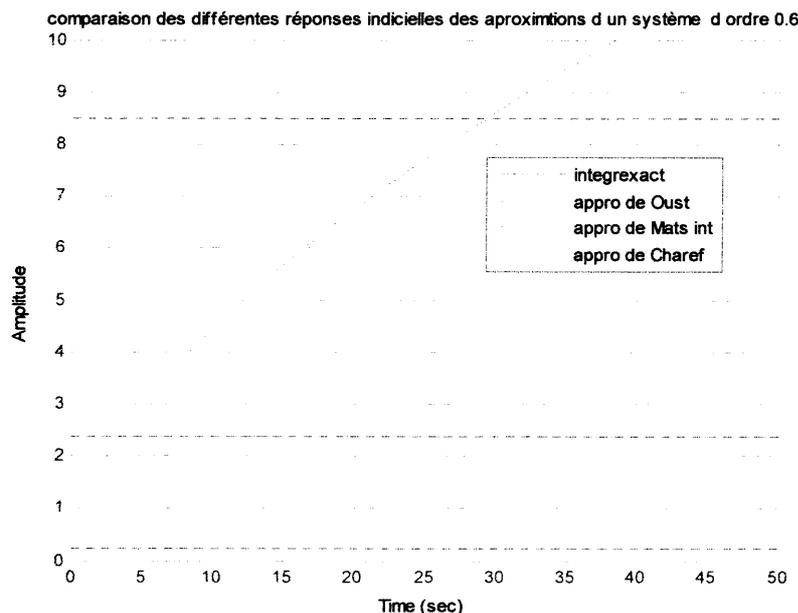
$k = 0, 1, 2, \dots$ , l'approximation prend la forme :

$$H(s) = a_0 + \frac{s-s_0}{a_1 + \frac{s-s_1}{a_2 + \frac{s-s_2}{a_3 + \dots}}} \quad (\text{II.72})$$

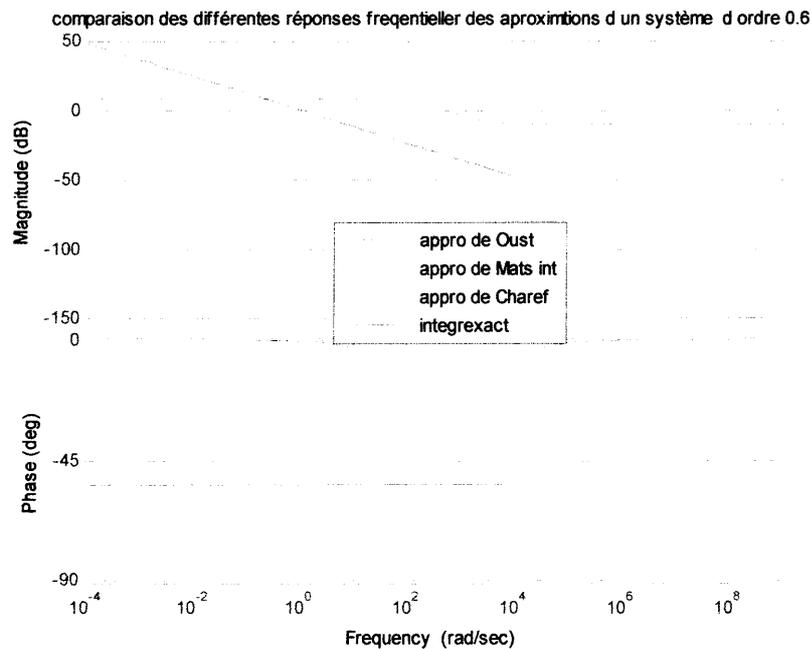
où :  $a_i = v_i(s_i)$ ,  $v_0(s) = H(s)$ ,  $v_{i+1}(s) = \frac{s-s_i}{v_i(s)-a_i}$

#### II.4.5 Comparaisons de réponses de quelques approximations d'un intégrateur d'ordre 0.6

En ce paragraphe, quelques approximations des opérateurs d'ordre fractionnaire ont été considérées (approximation de: Charef, Matsuda et Oustaloup), afin de les employer pour mettre en application des contrôleurs d'ordre non entier. Ces approximations ont été comparées, dans les domaines fréquentiel et temporel, pour un intégrateur fractionnaire d'ordre 0.6. À partir des résultats obtenus figure (II.5), et le figure (II.6) on peut conclure, que dans le domaine continu il est possible d'employer des approximations rationnelles afin d'avoir les formes réalisables appropriées dans des applications de commande (avec une certaine limitation concernant la largeur de bande de fréquence ou l'intervalle de temps).



**Figure II.5. Comparaisons de réponses indicielles des approximations de :  
Charef, Oustaloup, Matsuda d'un intégrateur d'ordre 0.6.**



**Figure II.6. Comparaisons de diagrammes de Bode des approximations de : Charef, Oustaloup, Matsuda d'un intégrateur d'ordre 0.6.**

### II.5 Approximation par Implémentation des circuits électriques analogiques

L'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire dans une bande fréquentielle donnée par une fonction rationnelle a la forme :

$$H(s) = \frac{K_I}{s^m} = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \approx K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (II.73)$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle approximant l'intégrateur d'ordre fractionnaire  $H_I(s)$  donne :

$$H(s) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (II.74)$$

Avec les  $h_i$  sont les résidus des pôles donnés par l'équation (II.48), Cet équation correspond à l'impédance d'un réseau RC du type Foster 1<sup>ère</sup> forme dont le schéma est représenté comme suit :

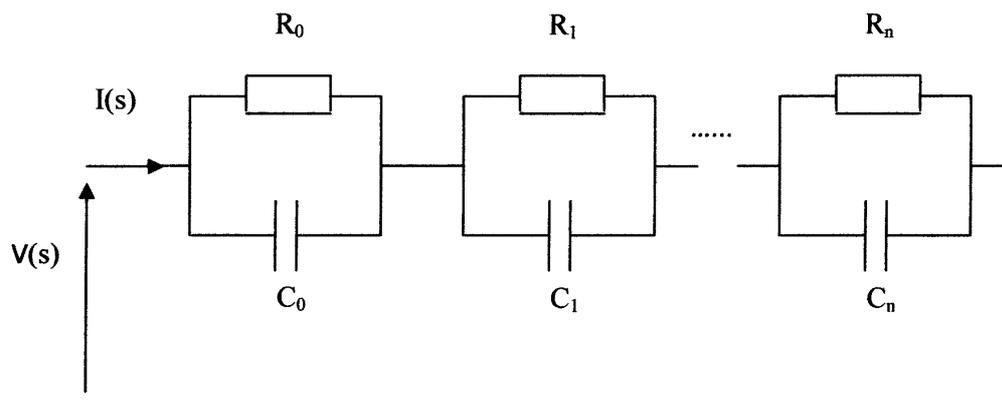


Figure II.7. Circuit RC du type Foster première forme.

L'impédance de ce réseau est donnée par :

$$H(s) = \sum_{i=0}^N \left( \frac{R_i}{1 + sR_iC_i} \right) \tag{II.75}$$

Alors 
$$\left. \begin{matrix} R_i C_i = \frac{1}{p_i} \\ R_i = h_i \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} R_i = h_i \\ C_i = \frac{1}{p_i h_i} \end{cases} \quad \text{Pour } i=0,1,\dots,N \tag{II.76}$$

De la même façon, l'approximation de l'opérateur dérivée d'ordre fractionnaire dans une bande fréquentielle donnée par une fonction rationnelle a la forme :

$$H(s) = K_D s^m = K_D \left( 1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^m = K_D \cdot \frac{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{p_i} \right)} \tag{II.77}$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle approximant le dérivateur d'ordre fractionnaire  $H_D(s)$  donne :

$$H(s) = H_0 + \sum_{i=0}^N \frac{h_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II.78})$$

Avec les  $h_i$  sont les résidus des pôles donnés par l'équation (II.63).

Cette équation correspond à l'admittance d'un réseau du type Foster 2<sup>eme</sup> forme dont le schéma est représenté comme suit :

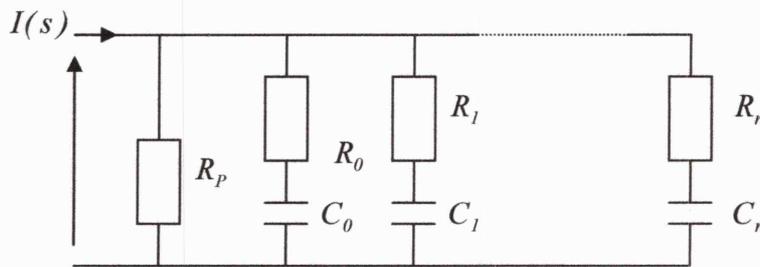


Figure II.8. Circuit RC du type Foster deuxième forme.

L'admittance de ce réseau est de la forme :

$$Y(s) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=0}^N \frac{sC_i}{(1 + sR_iC_i)} \quad (\text{II.79})$$

Alors :

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \frac{1}{R_i C_i} \\ h_i &= C_i \\ H_0 &= \frac{1}{R_p} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} C_i = h_i \\ R_i = \frac{1}{h_i C_i} \\ R_p = H_0 \end{cases}$$

**II.7 conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons abordé les notions de calcul fractionnaire et les approximations (l'approximation des dérivateurs et d'intégrateurs) et de système d'ordre non entier nécessaires et la modélisation des systèmes d'ordre fractionnaire par une fonction de transfert d'ordre fractionnaire ou par une représentation d'état généralisée. Comme nous avons également montré la condition de stabilité de ces systèmes.

Dans les chapitres qui suivent, nous allons étudier la théorie de la commande CRONE et les propriétés des cette commande dans un premier lieu et l'application des les lois de cette commande dans deuxième lieu.

*La commande CRONE*  
*Etude théorique*

### III.1 Introduction

Dans le domaine de la commande, l'objectif est de déterminer le régulateur qui assure au procédé réglé, les performances fixées par le concepteur conformément à un compromis entre ces exigences et les limites physiques du procédé. La synthèse du régulateur ainsi adapté est effectuée à partir d'un état paramétrique donné du procédé (état paramétrique nominal).

La robustesse est une notion très large qui traduit toujours la même idée, à savoir l'insensibilité ou par défaut la quasi-insensibilité. Aussi, dans un même domaine, il existe autant de types de robustesses que de grandeurs insensibles. Le domaine de la commande n'y échappe pas. Dans celui-ci, il est fréquent de considérer la robustesse de la stabilité dont l'objectif est le maintien de la stabilité ou en d'autre terme, la garantie d'une valeur maximale du facteur de résonance en asservissement ou en régulation.

Les avantages du calcul fractionnaire ont été décrits et mentionnés dans les dernières décennies par de nombreux auteurs. Il a été montré que les modèles d'ordre fractionnaire des systèmes réels sont régulièrement plus appropriés que ceux utilisés habituellement par les modèles entiers. Les applications de ces modèles fractionnaires se trouvent dans de nombreux domaines, comme par exemple, la mécanique, la physique, la robotique et dans beaucoup d'autres. Les correcteurs fractionnaires sont ceux qui renferment des systèmes d'ordre fractionnaire dans leur conception. Ils peuvent être conçus à la fois pour des systèmes d'ordre entier et d'ordre non entier.

Dans l'approche fractionnaire qui utilise la commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) [22], la robustesse est de nature plus sévère puisqu'il s'agit de la robustesse du degré de stabilité. L'objectif étant alors le maintien de la performance dynamique fréquentielle ou temporelle qui mesure ce degré (robustesse en performance). Plus précisément, la robustesse dont il s'agit est celle du degré de stabilité de la commande vis-à-vis des incertitudes du procédé.

Ce chapitre est composé de deux points essentiels, le premier point présente un rappel des principes et différentes générations de la commande CRONE. Quant au deuxième point, on utilise la boucle idéale de Bode (BIB) comme un modèle de référence pour calculer les paramètres des correcteurs fractionnaires. Et à la fin de ce chapitre, on présente quelques correcteurs et la méthode utilisée pour leur synthèse pour des systèmes linéaires d'ordre entier.

### III.2 Définition de la commande CRONE

Elle a été proposée par Oustaloup au début des années 90 [22]. Abréviation de « *Commande Robuste d'Ordre Non Entier* », Oustaloup a étudié les algorithmes d'ordre fractionnaire pour la commande des systèmes dynamiques et a montré la supériorité des performances de la commande CRONE sur le PID classique. L'idée développée pour la synthèse du contrôleur CRONE dans le domaine fréquentiel, vient sans doute des caractéristiques de robustesse que possède la fonction de transfert idéale de Bode, prise comme modèle de référence. L'objectif est alors d'obtenir en boucle ouverte une marge de phase constante autour de la fréquence de transition (fréquence au gain unité) et par conséquent un dépassement constant des réponses temporelles aux variations de gain du système. Ce correcteur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquence donnée. Trois stratégies bien distinctes assurant d'excellentes performances de robustesse et ont fait l'objectif de développements théoriques et technologiques importants. Chacune d'elles définit une génération de la commande CRONE, 1<sup>ère</sup>, 2<sup>ème</sup>, 3<sup>ème</sup> génération [09,22].

#### III.2.1 Commande CRONE de la première génération

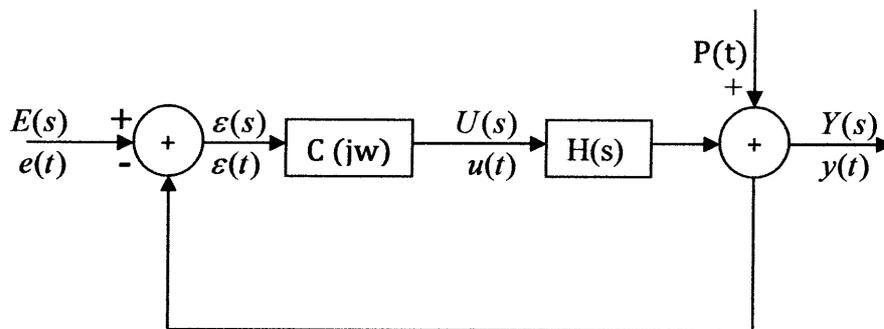


Figure III.1. Diagramme de commande à retour unitaire

La première stratégie repose sur une phase constante du régulateur  $C(j\omega)$  autour de la fréquence au gain unité en boucle ouverte  $\omega_u$  (fréquence de coupure). Si  $C(j\omega)$  désigne la réponse fréquentielle du régulateur en cascade avec le procédé figure (III.1), les variations de la marge de phase résultent toujours des variations additives de la phase du procédé et du régulateur autour de la fréquence de coupure, dans cette stratégie, le régulateur présente au

moins le mérite de ne pas contribuer aux variations de la marge de phase. Celles-ci se réduisent en effet aux variations de la phase du procédé [12].

La version idéale du régulateur CRONE à phase constante est définie par une transmittance d'ordre fractionnaire de la forme :

$$C_\alpha(s) = C_0 \left( \frac{1 + \frac{s}{w_b}}{1 + \frac{s}{w_h}} \right)^\alpha \quad \text{avec } w_b, w_h, \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{III.1})$$

Avec :

$C_0$  : le gain statique.

$w_b$  et  $w_h$  : les fréquences de troncature.

Dont le diagramme de Bode est donné par la figure (III.2).

Sa version réelle est définie par une transmittance d'ordre entier résultant d'une distribution récursive de zéros et de pôles, soit:

$$C_N(s) = C_0 \prod_{i=1}^N \frac{1 + \frac{s}{z_i}}{1 + \frac{s}{p_i}} \quad \text{avec } z_i, p_i \in \mathbb{R} \text{ et } N \in \mathbb{N} \quad (\text{III.2})$$

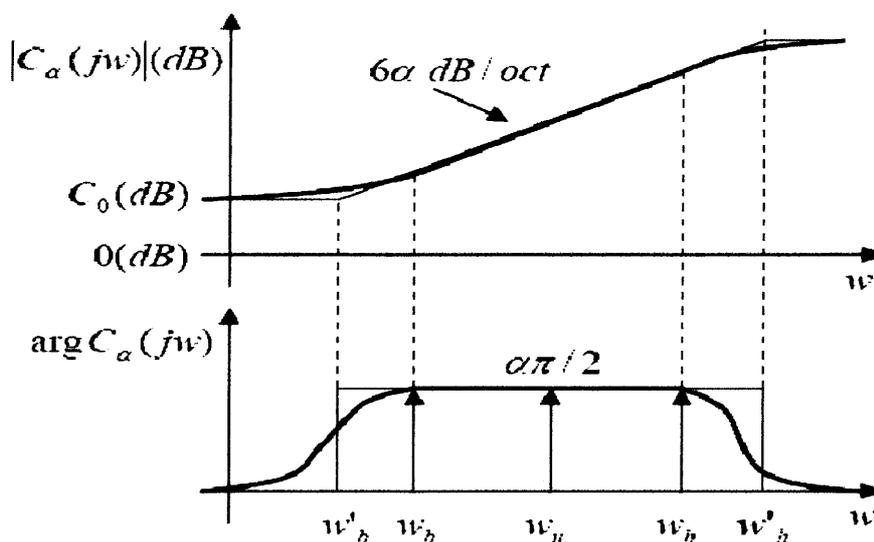


Figure III.2. Diagramme de Bode du régulateur CRONE idéal à phase constante.

$$\text{Où : si } \alpha > 0 : \begin{cases} z_1 = w_b \sqrt{b} \\ p_i = z_i a, i = 1, \dots, N \\ z_{i+1} = p_i b, i = 1, \dots, N-1 \\ w_h = p_N \sqrt{b} \end{cases} \quad \text{si } \alpha < 0 : \begin{cases} p_1 = w_b \sqrt{b} \\ z_i = p_i a, i = 1, \dots, N \\ p_{i+1} = z_i b, i = 1, \dots, N-1 \\ w_h = z_N \sqrt{b} \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

$$w_h = w_b (ab)^N \Leftrightarrow N = \text{integer} \left\{ \frac{\log \left( \frac{w_h}{w_b} \right)}{\log(ab)} \right\}, \quad a = \left( \frac{w_h}{w_b} \right)^{\frac{|\alpha|}{N}}, \quad b = \left( \frac{w_h}{w_b} \right)^{\frac{(1-|\alpha|)}{N}} \quad (\text{III.4})$$

La robustesse de la marge de phase est obtenue seulement lorsque  $w_u$ , appartient à la bande de fréquence où la phase du procédé est constante.

Dans le cas où on ne peut pas utiliser la bande de fréquence à phase constante, la deuxième génération de la commande CRONE peut être utilisée.

### III.2.1.1 La synthèse de la Commande CRONE de la première génération

**Hypothèse :** le système présente une plage de fréquences où la phase est constante.

- **Choix de  $w_u$**

Le choix de la fréquence unité repose sur un compromis entre plusieurs critères. Ainsi, en choisissant  $w_u$  grand vis-à-vis de la fréquence de coupure du système  $w_c$  :

1. Dynamique rapide du système corrigé.
2. Fortes sollicitations de la commande.
3. Problèmes d'échantillonnage.
4. Bon asservissement.
5. Bonne régulation.

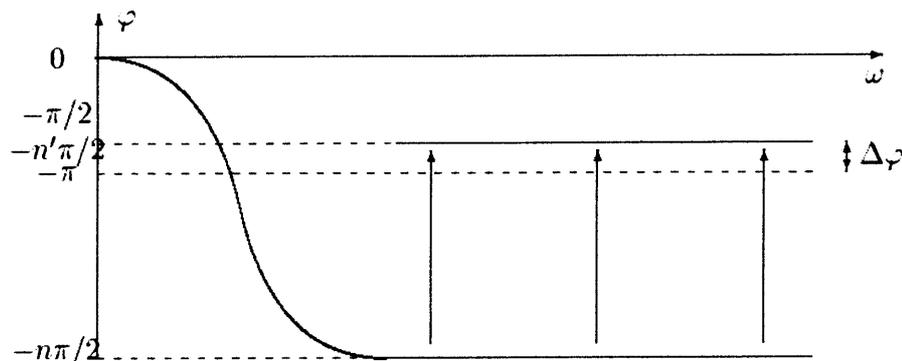
En pratique on choisit :

$$w_u \cong 5 \text{ à } 20 \times w_c$$

Le régulateur est de la forme de l'équation (III.1).

- **Détermination de l'ordre  $\alpha$**

a) à partir de la marge de phase  $\Delta\varphi$



**Figure III.3. Détermination de l'ordre du correcteur CRONE.**

$$\Delta\varphi = \pi - n' \frac{\pi}{2} \Rightarrow n' = \frac{2}{\pi} (\pi - \Delta\varphi) \quad (\text{III.5})$$

Donc :  $\alpha = n - n'$  avec (n) l'ordre de dénominateur (III.6)

b) à partir du facteur de résonance

$$\xi = \frac{1}{\sin(\alpha \frac{\pi}{2})} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{\xi}\right) \quad (\text{III.7})$$

c) à partir du facteur d'amortissement

$$\zeta = -\cos \frac{\pi}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{\arccos(-\zeta)} \quad (\text{III.8})$$

d) à partir du premier dépassement

$$D_1 = 79,159\alpha^2 - 138,507\alpha + 59,528 \quad (\text{III.9})$$

- **Choix de  $w_b$  et  $w_h$**

Il s'agit de choisir deux pulsations  $w_b$  et  $w_h$  qui entourent les pulsations  $w_A$  et  $w_B$  délimitant le domaine d'action du correcteur CRONE :

1. Si les pulsations  $w_b$  et  $w_h$  sont trop proches de  $w_A$  et  $w_B$ , le comportement idéal n'est pas observé.

2. Si les pulsations  $w_b$  et  $w_h$  sont trop éloignées de  $w_A$  et  $w_B$ , le correcteur sera difficile à implanter.
3. Dans la pratique on choisit :

$$\begin{aligned} w_b &\leq \frac{w_A}{10} \\ w_h &\leq w_B \times 10 \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

• **Calcul du gain statique  $C_0$**

$$|B(jw_u)| = 1$$

Donc :  $|C_\alpha(jw_u) \times H(jw_u)| = 1$

$$\text{Où : } C_\alpha(jw_u) = C_0 \left( \frac{1 + \frac{s}{w_b}}{1 + \frac{s}{w_h}} \right)^\alpha$$

$H(jw_u)$  : La fonction transfert de système.

On en déduit :

$$C_0 = \frac{1}{|H(jw_u)|} \left( \frac{1 + \left(\frac{w_u}{w_h}\right)^2}{1 + \left(\frac{w_u}{w_b}\right)^2} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \quad (\text{III.11})$$

• **Choix des pulsations  $w_A$  et  $w_B$**

C'est là une fonction de la robustesse du système désirée. Plus  $w_A$  et  $w_B$  sont éloignées, plus la partie verticale sur le lieu de Black sera grande et donc plus le système sera robuste.

En d'autres termes,  $\Delta w = w_B - w_A$  est fonction de la variation des paramètres du système

Par ailleurs, dans la majorité des applications  $w_A$  et  $w_B$  seront choisies symétriques par rapport

à  $w_u$  soit :

$$\begin{aligned} w_A &\leq \frac{w_u}{\gamma} \\ w_B &\leq w_u \times \gamma \end{aligned} \quad \text{avec : } \gamma \approx 10 \quad (\text{III.12})$$

**III.2.1.2 Exemple d'application**

Soit le système :

$$H(s) = \frac{20}{1+s^3} \quad (\text{III.13})$$

Les considérations de robustesse poussent à choisir :

$\Delta\varphi=50^\circ$  à une pulsation de 31.6 rad/s.

$\Delta\omega=1$  décade centrée sur  $w_u$

**1. Calcul de l'ordre de correcteur  $\alpha$** 

$$\alpha = n - n' = 3 - \frac{2}{180}(180 - 50) = 1.55$$

**2. Calcul des pulsations de coupure  $w_b$  et  $w_h$** 

D'après le cahier des charges :  $\Delta\omega = 1$  décade centrée sur  $w_u$  donc :

$$\begin{aligned} \frac{w_B}{w_A} &= 10 \\ w_u^2 &= w_B \times w_A \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} w_u^2 &= 10w_A^2 \\ w_B &= 10w_A = 100 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Puis en choisissant 1 décade d'écart entre les pulsations de coupure  $w_b$  et  $w_h$  et les pulsations  $w_A$  et  $w_B$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} w_b &= 1 \text{ rad/s} \\ w_h &= 1000 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

**3. Calcul gain statique  $C_0$** 

$$C_0 = \frac{1}{|H(jw_u)|} \left( \frac{1 + \left(\frac{w_u}{w_h}\right)^2}{1 + \left(\frac{w_u}{w_b}\right)^2} \right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

D'après l'application numérique :  $C_0=7.5$ .

Vérification du gain statique en boucle ouverte :

$$B_0 = C_0 H_0 = 150$$

Ce correcteur présente bien un gain statique  $B_0 \gg 1$ , et par conséquent le système présentera une erreur statique faible en boucle fermée :

$$\varepsilon_s = \frac{1}{1 + B_0} \approx 0.07$$

D'après la synthèse on obtient le correcteur suivant :  $C_\alpha(s) = 7.5 \left( \frac{1+s}{1+\frac{s}{1000}} \right)^{1.55}$

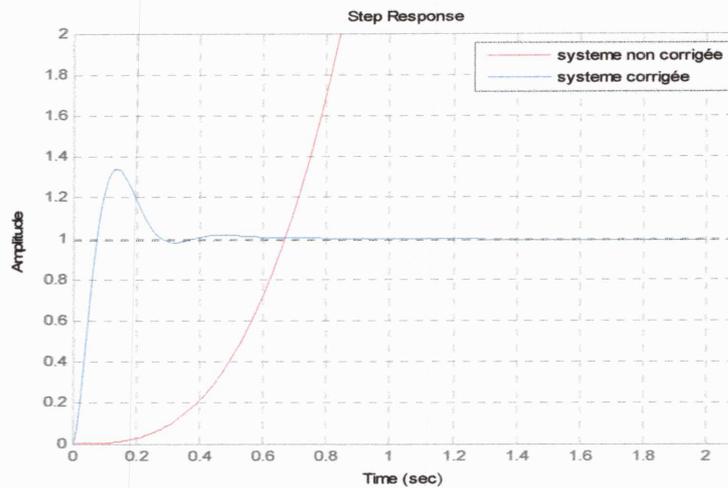


Figure III.4. Réponse indicielle de H avec régulateur CRONE.

III.2.2 Commande CRONE de la deuxième génération

Cette approche est basée sur la fonction de transfert en boucle ouverte autour de  $w_u$  définie à partir de la fonction de transfert en boucle ouverte d'un intégrateur d'ordre fractionnaire de la forme [12] :

$$T(s) = \left( \frac{w_u}{s} \right)^\alpha \quad \text{avec: } \alpha \in [1,2] \tag{III.15}$$

L'objectif consiste en l'annulation directe des variations de marge de phase par un gabarit vertical figure (III.5), que forme le lieu de Black en boucle ouverte entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $-\pi$  autour de  $w_u$ , pour l'état paramétrique nominal du procédé, et la

réalisation d'un glissement de ce gabarit sur lui-même lors d'une reparamétrisation du procédé (variations du gain autour de  $w_u$ ).

La forme et le glissement vertical du gabarit assure, non seulement la constance de la marge de phase  $\phi_m$ , mais également :

- La constance du premier dépassement réduit de la réponse indicielle en asservissement ou en régulation, à travers la tangence du gabarit à un même contour d'iso-dépassement.
- La constance du facteur d'amortissement en asservissement et en régulation, à travers la tangence du gabarit à un même contour d'iso-amortissement.

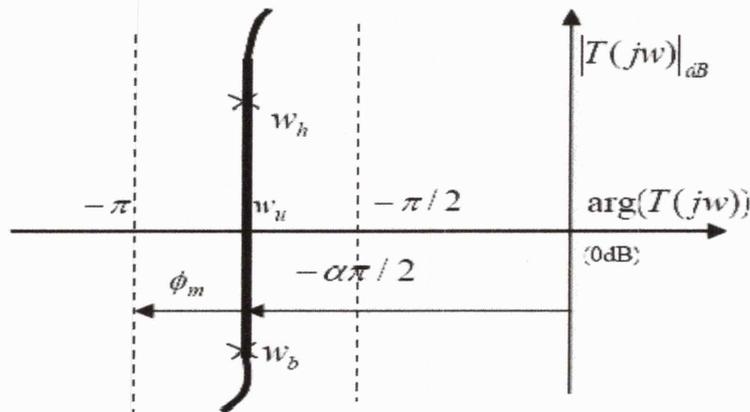


Figure III.5. Représentation du gabarit vertical dans le plan de Black.

Le comportement dynamique en boucle fermée est exclusivement lié au comportement en boucle ouverte au voisinage de la fréquence de coupure. Aussi, l'étude d'un tel comportement peut être fondée sur les transmittances en asservissement  $H(s)$  et en régulation  $H_R(s)$  déterminées à partir de la transmittance en boucle ouverte réduite à la transmittance de description du gabarit  $T(s)$ , soit :

$$H(s) = \left( \frac{Y(s)}{E(s)} \right)_{P(s)=0} = \frac{T(s)}{1+T(s)} = \frac{1}{1 + \left( \frac{s}{w_u} \right)^\alpha} \tag{III.16}$$

$$\text{Et } H_R(s) = \left( \frac{Y(s)}{P(s)} \right)_{E(s)=0} = \frac{1}{1+T(s)} = \frac{\left( \frac{s}{w_u} \right)^\alpha}{1 + \left( \frac{s}{w_u} \right)^\alpha} \quad (\text{III.17})$$

Dans l'objectif de déduire analytiquement le comportement en boucle ouverte (pour le procédé nominal) qui prend en compte à la fois les spécifications de précision aux basses fréquences, le gabarit vertical au voisinage de la fréquence  $\omega_u$  et le comportement du procédé aux hautes fréquences conformément aux spécifications sur la sensibilité de l'entrée à ces fréquences, la transmittance en boucle ouverte peut être fondée sur l'intégration d'ordre fractionnaire bornée en fréquence, soit :

$$T(s) = \left( k_b \left( \frac{w_b}{s} + 1 \right) \right)^{n_b} \left( \frac{w_u}{w_b} \cdot \frac{1 + \frac{s}{w_h}}{1 + \frac{s}{w_b}} \right)^\alpha \left( \frac{k_h}{1 + \frac{s}{w_h}} \right)^{n_h} \quad (\text{III.18})$$

$$\text{Où : } n_b, n_h \in \mathbb{N}, \quad k_b = \left( 1 + \left( \frac{w_b}{w_u} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad k_h = \left( 1 + \left( \frac{w_u}{w_h} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Si  $n_{pb}$  représente l'ordre du comportement asymptotique du procédé en basses fréquences ( $w > w_b$ ), l'ordre  $n_b$  du proportionnel-intégrateur est défini par :

$$n_b \geq 1 \text{ si } n_{pb} = 0 \quad \text{et} \quad n_b \geq n_{pb} \text{ si } n_{pb} \geq 1$$

Si  $n_{ph}$  représente l'ordre du comportement asymptotique du procédé en hautes fréquences ( $w > w_h$ ), l'ordre  $n_h$  du filtre passe-bas est défini par :  $n_h \geq n_{ph}$

Les fréquences transitionnelles basse et haute ( $w_b$  et  $w_h$ ), sont réparties symétriquement par rapport aux fréquences extrémales  $\omega_A$  et  $\omega_B$  du gabarit vertical. Dans le cas où elles sont suffisamment pour permettre d'écrire :

$$w_b = \frac{w_A}{10} \quad \text{et} \quad w_h = 10w_B$$

On a :  $w_u \gg w_b$  et  $w_u \ll w_h$ .

Dans le cas où la fréquence  $w_u$  appartient à un comportement quelconque du procédé et où la différence de phase entre le gabarit vertical et le procédé varie alors avec la fréquence, le régulateur placé en cascade avec le procédé doit présenter une phase variable sur l'étendu du gabarit.

Le régulateur est défini par une transmittance non entière  $C_{ne}(jw)$ , déduite du rapport :

$$C_{ne}(s) = \frac{T(s)}{G_0(s)} \quad (\text{III.19})$$

Où  $T(s)$  est donné par la relation (III.18) et  $G_0(s)$  désigne la transmittance nominale du procédé.

La synthèse de la transmittance entière d'ordre réduit du régulateur  $C_{ne}(jw)$ , consiste à réaliser l'identification par modèle rationnel entier de la réponse fréquentielle  $C_{ne}(jw)$ , Cette synthèse revient alors à adapter les paramètres d'une transmittance de structure prédéfinie à la réponse fréquentielle  $C_{ne}(jw)$ . Le modèle rationnel entier sur lequel est fondée l'estimation paramétrique est de la forme :

$$C_{en}(s) = \frac{\sum_{k=0}^n b_k s^k}{\sum_{k=0}^d a_k s^k} \quad (\text{III.20})$$

L'objectif est d'estimer le vecteur des paramètres,  $v$ , donné par :  $v = [a_0, a_1, \dots, a_d, b_0, b_1, \dots, b_n]^T$  qui annule l'écart entre la réponse fréquentielle approchée  $C_{en}(jw)$  et la réponse fréquentielle à identifier  $C_{ne}(jw)$ , soit :

$$\varepsilon(jw) = C_{en}(jw) - C_{ne}(jw) \quad (\text{III.21})$$

Sur  $M$  fréquences  $w_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, M$ ), définies par le concepteur.

### III.2.2.1 Exemple d'application

Soit le système suivant :

$$H(s) = \frac{400}{0.001s^3 + s^2} \quad (\text{III.22})$$

D'après digramme de Bode, il n'existe pas une marge de phase constante, donc la 1<sup>ère</sup> génération de la commande CRONE n'est pas suffisante pour corriger ce système. On passe à la 2<sup>ème</sup> génération de la commande CRONE.

La figure suivante présente la réponse indicielle du système non corrigé et système corrigé.

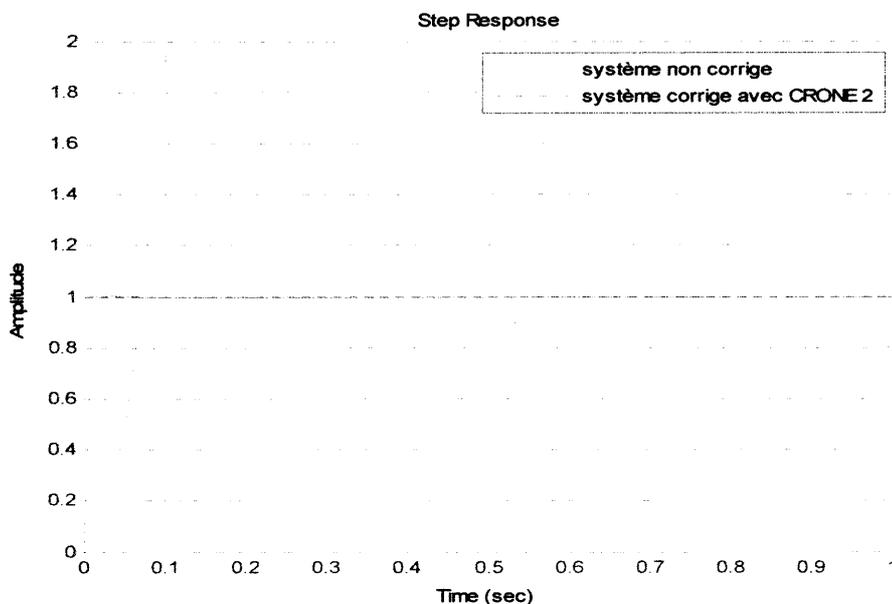


Figure III.6. Réponse indicielle de  $H$  avec régulateur CRONE.

### III.2.3 Commande CRONE de troisième génération

Lorsque la seconde condition ne peut être vérifiée, il n'y a aucune raison pour que le gabarit vertical assure au mieux la robustesse de la commande. Il convient alors de le généraliser conformément à deux niveaux. Le premier niveau consiste à considérer un gabarit, toujours défini comme un segment de droite pour l'état paramétrique nominal du procédé,

mais de direction quelconque, appelé gabarit généralisé. Le gabarit ainsi défini est décrit par une transmittance fondée sur celle d'un intégrateur d'ordre complexe, dont sa fonction de transfert d'ordre complexe  $\alpha = a + ib$  est définie sur deux plans complexes indépendants,  $C_i$  (pour l'ordre complexe  $\alpha$ ) et  $C_j$  (pour la variable ( $s$ )), de la forme [12] :

$$T(s) = \left( \coth \left( b \frac{\pi}{2} \right) \right)^{\text{sign}(b)} \cdot \left( \frac{W_u}{s} \right)^a \cdot \left( \left[ \frac{W_u}{s} \right]_{C_j}^{ib} \right)^{-\text{sign}(b)} \quad (\text{III.23})$$

La partie réelle  $a$  de l'ordre complexe détermine le placement en phase du gabarit et la partie imaginaire  $b$  détermine ensuite sa pente par rapport à la verticale.

Dans le cadre de cette généralisation, la recherche d'un gabarit optimal au sens de la minimisation d'un critère quadratique (sous contraintes) portant sur les variations du facteur de résonance en asservissement ou du facteur d'amortissement en asservissement et en régulation, définit la stratégie optimale qu'utilise la version initiale de la commande CRONE de troisième génération. Le deuxième niveau consiste à substituer au gabarit généralisé un ensemble de gabarits du même type, appelé *multi-gabarit*. Sa description par un produit de transmittances d'ordre complexes bornées en fréquence, définit un gabarit curviligne qui étend le gabarit rectiligne que forme le gabarit vertical ou généralisé. La recherche d'un gabarit curviligne optimal, au sens de la minimisation, du critère précédent, définit la stratégie optimale la plus évoluée qu'utilise la commande CRONE de troisième génération.

### III.3 La fonction de transfert de la boucle idéale de Bode (BIB)

La fonction de transfert idéale de Bode a été proposée pour la première fois par Bode dans son travail sur la conception des amplificateurs à retour en 1945.

Le diagramme d'un tel amplificateur à retour unitaire est donné par la figure (III.7), dont la fonction de transfert en boucle ouverte est définie par un intégrateur d'ordre fractionnaire de la forme :

$$R(s) = \frac{A}{s^\alpha} \quad , \quad 1 < \alpha < 2 \quad (\text{III.24})$$

Où  $\alpha$  est la pente de la caractéristique idéale du gain.

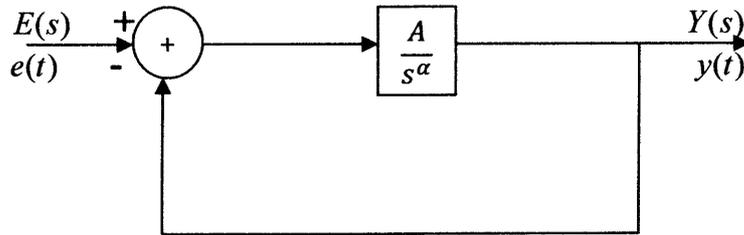


Figure III.7. Diagramme de la boucle idéale de Bode.

### III.3.1 Analyse temporelle de la BIB

La fonction de transfert en boucle fermée de la boucle idéale de Bode est de la forme:

$$R_{BF}(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{A}{s^\alpha + A} \tag{III.25}$$

La réponse indicielle est de la forme :

$$y(t) = At^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-At^\alpha) \tag{III.26}$$

où  $E_{\alpha, \alpha+1}$  est la fonction de Mittag-Leffler :

$$E_{\alpha, \alpha+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{\Gamma(1 + k.\alpha)} \tag{III.27}$$

Les réponses indicielles du système  $R_{BF}(s)$  correspondent au coefficient d'amortissement  $\zeta$ , à la pulsation naturelle  $w_n$ , et à la fréquence propre  $w_p$  donnés par les formules suivantes :

$$\zeta = -\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) ; w_n = A^{\frac{1}{\alpha}} ; w_p = A^{\frac{1}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) \tag{III.28}$$

Le dépassement maximal peut être exprimé en fonction de l'ordre  $\alpha$  par :

$$D_{\max} = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r(\infty)} \approx 0.8(\alpha - 1)(\alpha - 0.75)(\%) ; 1 < \alpha < 2 \tag{III.29}$$

Le temps du premier dépassement et le temps de montée (2% à 90%) peuvent être donnés d'une façon approximative par les formules [12]:

$$w_u t_d \approx \frac{1.106(\alpha - 0.255)^\alpha}{(\alpha - 0.921)^2} ; 1 < \alpha < 2 \tag{III.30}$$

$$w_u t_m = \frac{0.131(\alpha - 1.157)^2}{(\alpha - 0.724)} ; 1 < \alpha < 2 \tag{III.31}$$

Où  $w_u$  est la fréquence au gain unité.

La figure (III.8) représente la réponse indicielle du système de l'équation (III.25) pour différentes valeurs de A et  $\alpha$ . Cette figure montre que le dépassement est d'environ de 29.62% et indépendant du gain A. Cette propriété est dite iso-amortissement ( $\zeta = cst \approx 0.35$ ).

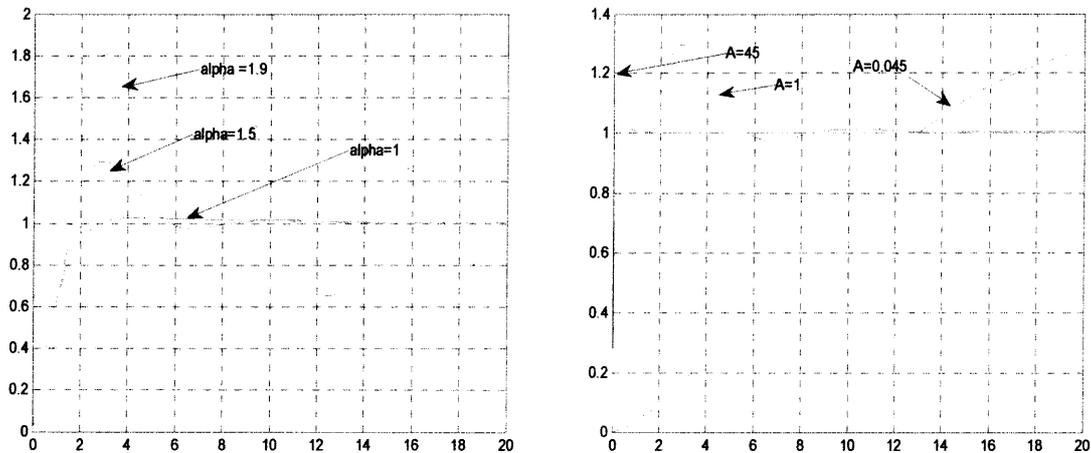


Figure III.8. Réponses indicielles de la boucle idéale de Bode pour différentes

Valeurs de A et  $\alpha$ .

III.3.2 Analyse fréquentielle de la BIB

Le diagramme de Bode de la chaîne directe de la boucle idéale de Bode est donné par la Figure (III.9). La réponse fréquentielle est caractérisée par une pente de  $-20\alpha dB/dec$  et une phase constante de  $-\frac{\alpha\pi}{2} rad$ . Ainsi, la marge de phase en boucle fermée est indépendante du gain A et égale à :

$$\phi_m = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\pi.$$

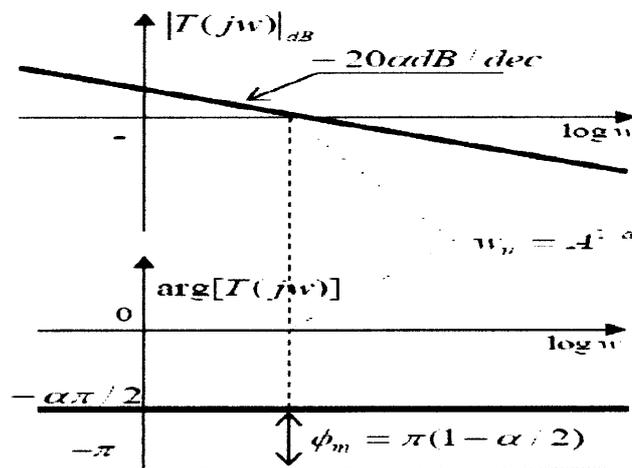


Figure III.9. Diagramme de Bode en boucle ouverte de la boucle idéale de Bode

Le facteur de résonance  $\xi$  et la fréquence de résonance  $w_r$  peuvent être déterminés de la même manière comme dans le cas des systèmes entiers.

Soit la transmittance  $R_{BF}(jw)$  en boucle fermée :

$$R_{BF}(jw) = \frac{A}{(jw)^\alpha + A} = \frac{A}{A + w^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + jw^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \tag{III.32}$$

Son module est donné par :

$$|R_{BF}(jw)| = \frac{A}{\sqrt{w^{2\alpha} + 2Aw^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + A^2}} \tag{III.33}$$

Le module (III.33) possède un maximum pour :

$$w_r = \left( -A \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \alpha > 1 \quad (\text{III.34})$$

Ce qui correspond à un facteur de résonance donné par :

$$\xi = \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \quad (\text{III.35})$$

### III.4 La synthèse des correcteurs d'ordre fractionnaire

La décennie précédente a connu des efforts de recherche très remarquables reliés au calcul d'ordre fractionnaire et son application dans la théorie de commande des systèmes. Dans cette partie on a étudié quelques correcteurs d'ordre fractionnaire pour savoir l'effet de ces correcteurs sur les deux systèmes entier et non entier. Pour commander ces systèmes en boucle fermée il existe quatre situations : système d'ordre entier avec correcteur d'ordre entier, système d'ordre entier avec correcteur d'ordre fractionnaire et système d'ordre fractionnaire avec correcteur d'ordre entier, et système d'ordre fractionnaire avec correcteur d'ordre fractionnaire [24,25].

#### III.4.1 Correcteur $PI^\alpha D^\beta$ d'ordre fractionnaire

##### III.4.1.1 Structure et synthèse du correcteur $PI^\alpha D^\beta$ fractionnaire

###### a) Structure du correcteur $PI^\alpha D^\beta$ fractionnaire

Aujourd'hui, le correcteur PID est la structure de commande la plus utilisée dans les boucles de rétroaction. Plus de 90% des boucles d'asservissement sont des correcteurs PID. Retour unitaire classique donné par la figure (III.10). Où  $u(t)$  désigne le signal de commande et  $\varepsilon(t)$  l'écart résultant de la différence entre la consigne  $e(t)$  et la grandeur à commander  $y(t)$ ,  $H_p(s)$  est la fonction de transfert du correcteur,  $H(s)$  est la fonction de transfert de système. Le correcteur proportionnel intégral dérivé (PID) classique est basé sur le présent (P), le passé (I) et le futur (D) de l'erreur de commande  $\varepsilon(t)$ , son comportement peut être décrit par l'équation suivante :

$$u(t) = K_p \left[ \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + T_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right] \quad (\text{III.36})$$

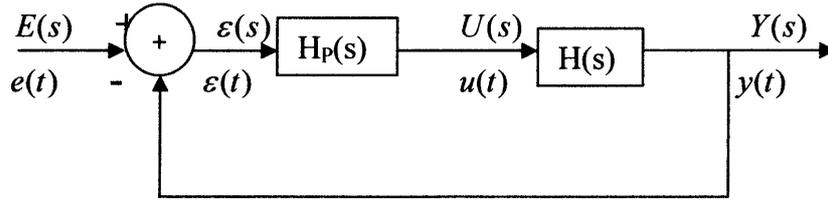


Figure III.10. Système de commande à retour unitaire classique.

Les paramètres du correcteur associés à ces différents termes sont le gain proportionnel  $K_p$ , la constante d'intégration  $T_i$  et la constante de dérivation  $T_D$ . Les trois termes proportionnel, intégral et dérivé possèdent des caractéristiques différentes et agissent de manière complémentaire.

L'amélioration du correcteur PID classique, nous permet de proposer une version de correcteur d'ordre fractionnaire. La forme la plus commune de ce type de correcteurs d'ordre fractionnaire est donnée par :  $\text{PI}^\alpha \text{D}^\beta$  [7], impliquant un intégrateur d'ordre  $\alpha$  et un différentiateur d'ordre  $\beta$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont n'importe quels nombres réels.

L'équation de la sortie du correcteur  $\text{PI}^\alpha \text{D}^\beta$  d'ordre fractionnaire dans le domaine de temps est donnée sous la forme:

$$u(t) = K_p \left[ \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} D^{-\alpha}(\varepsilon(t)) + T_D D^\beta(\varepsilon(t)) \right] \quad (\text{III.37})$$

$\alpha$  est l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration et  $\beta$  est l'ordre fractionnaire de l'action de différentiation.

L'algorithme du correcteur  $\text{PI}^\alpha \text{D}^\beta$  d'ordre fractionnaire tel que décrit en équation (III.36) peut être représenté par la fonction de transfert suivante :

$$H_p(s) = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i s^\alpha} + T_D s^\beta \right] \quad (\text{III.38})$$

Une expression équivalente, où les paramètres apparaissent de manière linéaire, est souvent plus appréciée pour les calculs analytiques. Une telle formulation est donnée par la forme parallèle :

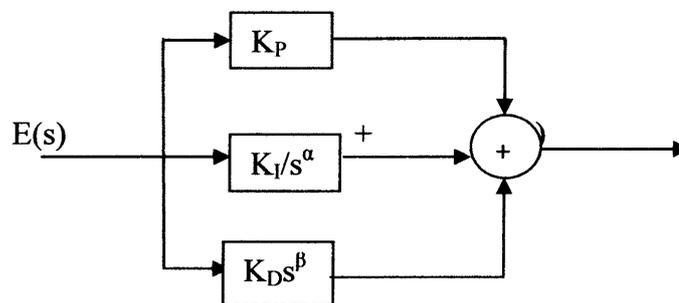
$$H_p(s) = K_p + \frac{K_I}{s^\alpha} + K_D s^\beta \quad (\text{III.39})$$

Les gains d'intégration  $K_I$  et de dérivation  $K_D$  sont liés aux paramètres de la forme standard par les relations suivantes :

$$K_I = \frac{K_p}{T_I} \quad (\text{III.40})$$

$$K_D = K_p T_D \quad (\text{III.41})$$

La figure (III.11), présente la structure interne du correcteur  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire, elle consiste on la connexion parallèle des parties proportionnelle, intégrale d'ordre fractionnaire et dérivée d'ordre fractionnaire.



**Figure III.11. Structure du correcteur  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire.**

En tenant compte de la discussion précédente, le tracé asymptotique de Bode du correcteur  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire de l'équation (III.39) peut être obtenu dans la figure (III.11), On peut observer les pentes de  $-20\alpha$  dB/dec et  $20\beta$  dB/dec des parties intégrale et dérivée, respectivement, du correcteur  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire. Les tracés exacts du correcteur  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire (amplitude et phase) sont représentés dans la figure (III.12), Par comparaison avec celles du correcteur PID, on peut observer l'effet des ordres fractionnaires sur les pentes des parties intégrales et dérivée, du correcteur  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire

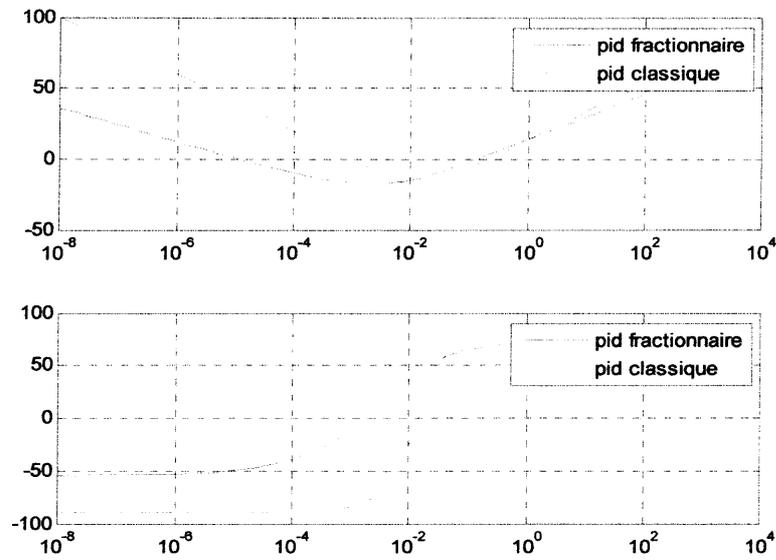
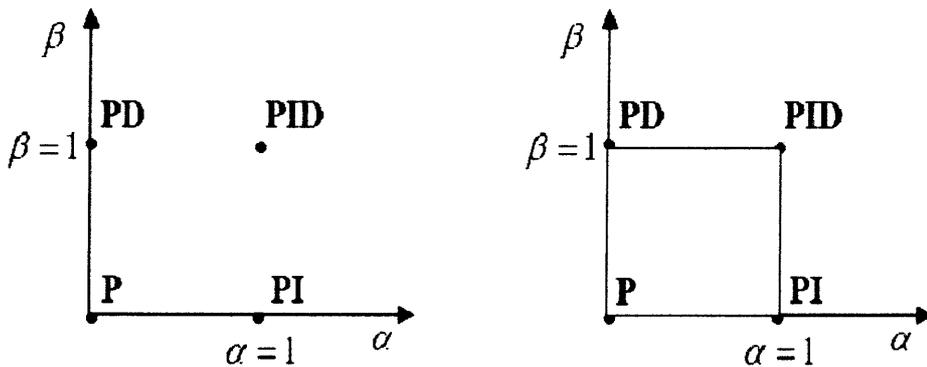


Figure III.12. Trace de l'amplitude et de la phase asymptotique du correcteur  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire et PID classique.

Comme il est montré sur la figure (III.13), le  $PI^\alpha D^\beta$  fractionnaire généralise le PID conventionnel et l'étend du point au plan. Cette extension donne plus de flexibilité dans la conception des commandes PID.



a) PID classique (conventionnel)

b) PID fractionnaire

Figure III.13. Commande PID à partir d'un point (a) jusqu'au plan (b)

### b) Synthèse du correcteur $PI^\alpha D^\beta$ fractionnaire

Le problème de conception de ce système asservi est donc de régler les cinq paramètres du correcteur d'ordre fractionnaire  $H_P(s)$ ,  $(k_P, k_D, k_I, \alpha, \beta)$  pour garantir que la fonction de transfert en boucle fermée se comporte comme un système de référence  $R_m(s)$  qui lui-même répond aux spécifications du cahier de charge du système asservi projeté.

En 1942, Ziegler et Nichols ont proposé deux approches heuristiques basées sur leur expérience et quelques simulations pour ajuster rapidement les paramètres des régulateurs P, PI et PID. La première méthode nécessite l'enregistrement de la réponse indicielle en boucle ouverte, alors que la deuxième demande d'amener le système bouclé à sa limite de stabilité. Nous avons établi une conception simple d'un système de correcteur d'ordre fractionnaire élémentaire basé sur les paramètres  $m$  et  $\omega_u$ . Par conséquent, dans cette section nous utilisons l'intégrateur d'ordre fractionnaire de l'équation (III.39) comme une fonction de référence  $R_m(s)$  pour le système de commande  $PI^\alpha D^\beta$ .

$$R_m(s) = \frac{A}{S^m} \quad (\text{III.42})$$

Nous commençons par considérer le système en boucle fermée montré dans la figure (III.14), où  $H_P(s)$  est le contrôleur  $PI^\alpha D^\beta$  et  $H(s)$  est la fonction de transfert du processus, caractérisée par un ordre asymptotique à basse fréquence  $0 \leq n' \leq 2$  et à haute fréquence  $2 \leq n \leq 4$  avec  $n' < n$  (figure (III.14)).

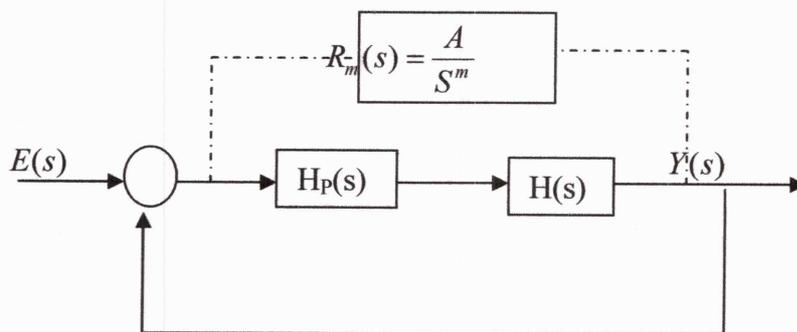


Figure III.14. Système de commande en boucle fermée avec  $PI^\alpha D^\beta$  fractionnaire.

La fonction de transfert idéale du contrôleur  $PI^\alpha D^\beta$  est de la forme d'équation(III.38).

d'intégration et  $T_D$  est une constante de Avec  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres réels positifs,  $K_P$  est le gain proportionnel,  $T_I$  est une constante dérivation. La fréquence de coupure  $w_u$  est considérée supérieure que 10 fois la fréquence transitionnelle du processus. La fonction de transfert du modèle de référence en boucle ouverte est de la forme :

$$R_m(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^m} \quad (\text{III.43})$$

Où  $w_u$  et  $m$  sont fixés selon les performances désirées en boucle fermée.

La méthode de synthèse du  $PI^\alpha D^\beta$  est basée sur l'interprétation de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{BO}(s)$  qui peut être écrite sous la forme :

$$H_{BO}(s) = H(s)H_p(s) \quad (\text{III.44})$$

La transmittance  $H_{BO}(s)$  peut ici être considérée comme l'approximation de la fonction de transfert en boucle ouverte du modèle de référence  $R_m(s)$ , alors nous pouvons écrire:

$$K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_I s^\alpha} + T_D s^\beta \right] H(s) = \frac{K_\mu}{s^m} \quad \text{où } K_\mu = w_\mu^m \quad (\text{III.45})$$

On donne la bande de fréquence :  $w_{\min} \ll 10w_0$ , et  $1 < m < 2$ ,  $w_u \ll w_{\max}$  où  $w_0$  est la fréquence de coupure du processus, la transmittance  $H_{BO}(s)$  devrait présenter :

- Une pente asymptotique de -20dB/dec à la basse et à la haute fréquence de la largeur de la bande limitée  $[w_{\min}, w_{\max}]$  qui permet de calculer les paramètres  $\beta$  et  $\alpha$ .
- Le même gain avec la référence  $R_m(s)$  en haute et basse fréquences, ainsi, les valeurs initiales des paramètres  $T_i'$  et  $T_d'$  peuvent être estimées avec une valeur initiale de  $K_p$  considérée  $K_p=1$ .
- Une fréquence de coupure égale à  $w_u$ ,  $K_p$  le paramètre peut être déduit en utilisant les valeurs initiales  $T_i'$  et  $T_d'$

- Finalement, on fait l'ajustement des paramètres  $T_i'$  et  $T_d'$  pour obtenir les deux paramètres  $T_i$  et  $T_d$ .

Prenant  $n$  et  $n'$  comme un ordre asymptotique du processus  $H(s)$  à haute et à basse fréquences respectivement, les paramètres du contrôleur peuvent être donnés par les équations suivantes [26] :

$$\beta = n - m, \alpha = m - n' \quad (\text{III.46})$$

$$T_d' = \frac{K_u}{|H(j\omega_{max})|\omega_{max}^n} \quad (\text{III.47})$$

$$T_i' = \frac{K_u}{|H(j\omega_{min})|\omega_{min}^{n'}} \quad (\text{III.48})$$

$$k_p = \frac{|H(j\omega_u)|^{-1}}{|1 + T_i'(j\omega_u)^{-\alpha} + T_d'(j\omega_u)^\beta|} \quad (\text{III.49})$$

$$T_i = k_p T_i' \quad \text{et} \quad T_d = k_p T_d' \quad (\text{III.50})$$

### c) Synthèse PID classique

En 1942, *Ziegler et Nichols* ont proposé deux approches heuristiques basées sur leur expérience et quelques simulations pour ajuster rapidement les paramètres des régulateurs P, PI et PID. La première méthode nécessite l'enregistrement de la réponse indicielle en boucle ouverte, alors que la deuxième demande d'amener le système bouclé à sa limite de stabilité.

La deuxième méthode est basée sur la connaissance du point critique du processus. Expérimentalement, on boucle le processus sur un simple régulateur proportionnel dont on augmente le gain jusqu'à amener le système à osciller de manière permanente ; on se trouve ainsi à la limite de stabilité. Après avoir relevé le gain critique  $k_{cr}$  du régulateur et la période d'oscillation  $T_{cr}$  de la réponse, on peut calculer les paramètres du régulateur choisi à l'aide du tableau (III.1) [2].

type	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5K_{cr}$		
PI	$0.4K_{cr}$	$0.8T_{cr}$	
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5T_{cr}$	$0.125T_{cr}$

Tab. III.1 Paramètres du PID obtenus à partir du point critique (Ziegler-Nichols)

### III.4.2 Correcteur $PI^\alpha$ et $PD^\beta$ d'ordre fractionnaire

#### III.4.2.1 Structure et la synthèse du correcteur $PI^\alpha$ et $PD^\beta$ fractionnaire

##### a) Structure

Nous proposons une généralisation du correcteur PI et PD, à savoir le correcteur  $PI^\alpha$  et  $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire, impliquant une action d'intégration d'ordre fractionnaire  $\alpha$  et une action de différentiation d'ordre fractionnaire  $\beta$ . L'intérêt pour ces types des correcteurs sont justifiés par une meilleure flexibilité, puisqu'il a encore deux paramètres qui sont l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration  $\alpha$  et l'ordre fractionnaire  $\beta$  de l'action de différentiation.

La fonction de transfert du correcteur  $PI^\alpha$  d'ordre fractionnaire est donnée comme:

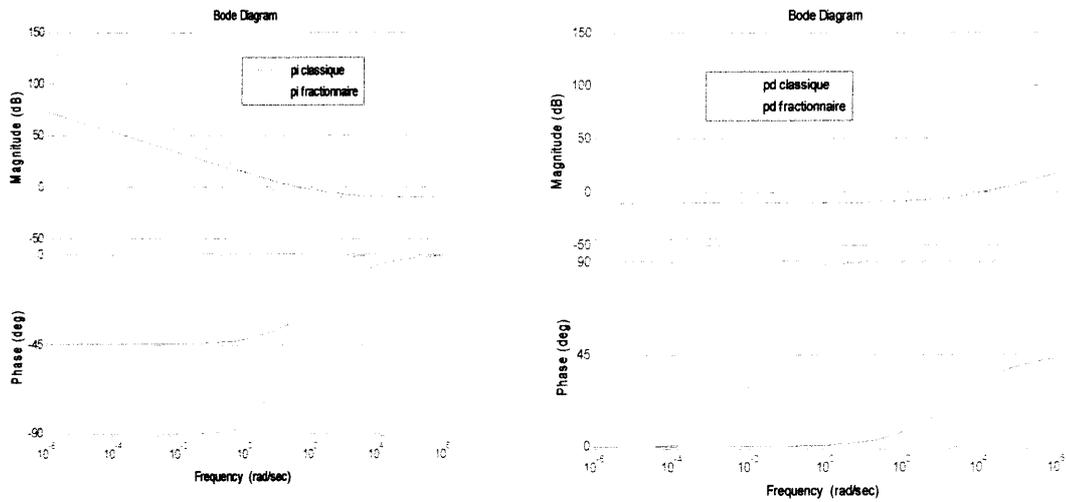
$$H_{PI^\alpha}(s) = (K_{PI^\alpha} + \frac{K_{IF}}{s^\alpha}) \quad (III.51)$$

Où  $K_{PI^\alpha}$  et  $K_{IF}$  sont les gains proportionnel et intégral, respectivement,  $\alpha$  est l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration, avec  $0 < \alpha < 1$ .

La fonction de transfert du correcteur  $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire est donnée comme:

$$H_{PD^\beta}(s) = (K_{PDF} + K_{DF}s^\beta) \quad (III.52)$$

Où  $K_{PDF}$  et  $K_{DF}$  sont les gains proportionnel et dérivée, respectivement,  $\beta$  est l'ordre fractionnaire de l'action de différentiation, avec  $0 < \beta < 1$ .



**Figure III.15. Trace de l'amplitude et de la phase asymptotique du correcteur PI fractionnaire et PI classique.**

**b) La synthèse**

Généralement la synthèse des correcteurs d'ordre fractionnaire sont obtenit à partir de la synthèse de correcteur PID fractionnaire selon les nombres des inconnus est différentes [20,27].

**III.4.3 Exemple d'application**

Dans cet exemple nous présentons une étude comparative des performances de robustesse obtenues avec le contrôleur et le contrôleur PID classique.

Considérons le système de commande à retour unitaire de la figure (III.14), dont le procédé est un système de deuxième ordre défini par une fonction de transfert de la forme :

$$H(s) = \frac{k_0}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_0} + 1} \tag{III.53}$$

Les valeurs nominales des paramètres  $k_0$ ,  $w_0$  et  $\xi$  sont:

$$K_0=20, w_0=50, \xi=0.025$$

Les spécifications fréquentielles désirées en boucle fermée sont données ci-dessous:

$$\Phi_m=65^0, w_u=500\text{rad/s}$$

Pour assurer ces spécifications autour de  $\omega_u$  la fonction de transfert idéale de Bode (Fonction de transfert en boucle ouverte du modèle), doit être tel que :

$$R(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_u}\right)^m} = \frac{1}{\left(\frac{s}{500}\right)^{1.2}} \tag{III.54}$$

A partir de l'ordre de la fonction de transfert idéale de Bode  $m=1.2$  et du comportement asymptotique du procédé en basse fréquence  $n=1$  et en haute fréquence  $n=3$  on peut déduire l'ordre de dérivation  $\beta$  et l'ordre d'intégration  $\alpha$  de la commande  $PI^\alpha D^\beta$

$$\beta=1.2 \text{ et } \alpha=0.8$$

Les paramètres  $k_i$  et  $k_p, k_d$  sont ensuite calculés en utilisant les équations (III.46, ..., III.50).

Les fonctions de transfert des commandes PID, calculées pour assurer les mêmes spécifications, sont données respectivement par les équations suivantes :

$$H_{PID}(s) = 50.79 \times \frac{\left(1 + \frac{s}{3.77}\right)\left(1 + \frac{s}{188.98}\right)}{\left(1 + \frac{s}{0.63}\right)\left(1 + \frac{s}{1322.90}\right)} \tag{III.55}$$

$$H_{PIDF}(s) = 2.4067 + \frac{9.9845}{s^{0.8}} + 2.3204s^{1.2} \tag{III.56}$$

Les figures suivantes représentent respectivement les réponses indicielles et diagramme de Bode du système  $H(s)$  corrigée par correcteur PID classique,  $PI^\alpha D^\beta$  en boucle fermée et observée la différence entre les figures.

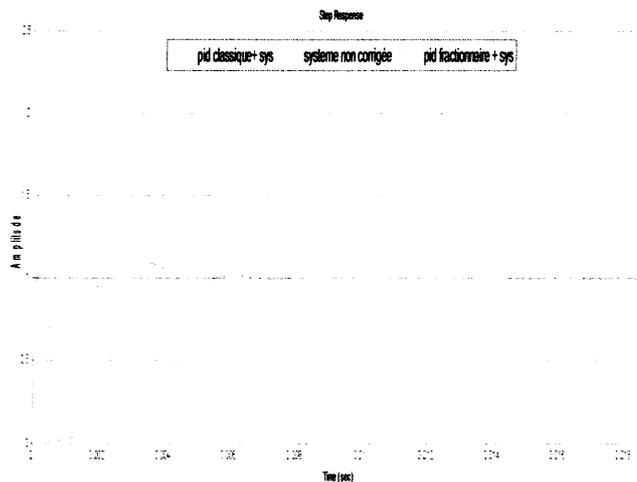
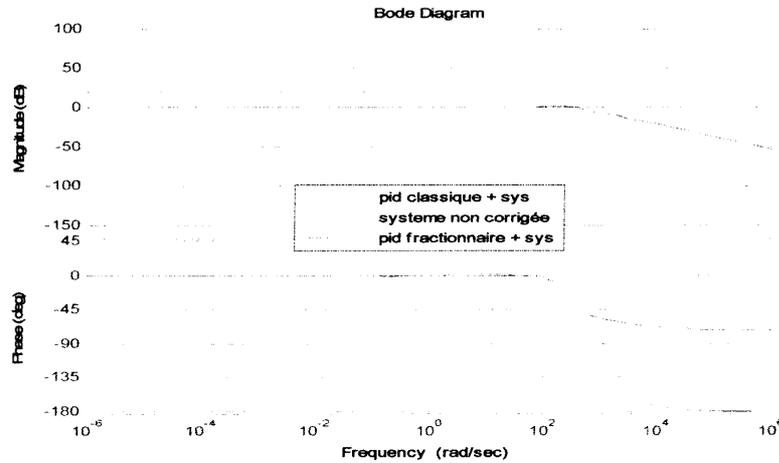


Figure III.16. Réponse indicielle du système corrigé pour un gain statique  $k_0$ .



**Figure III.17. Réponse fréquentielle (diagramme de Bode) du système corrigé pour un gain statique  $k_0$ .**

L'observation des réponses et diagrammes des Bode, il apparaît que Les résultats de comparaison sont donnés comme suit :

- La marge de phase du système de commande à retour unitaire avec le correcteur PID d'ordre fractionnaire a augmenté et la marge de gain a diminué.
- Le temps de réponse du système de commande à retour unitaire avec le correcteur PID d'ordre fractionnaire est plus petit que celui avec le correcteur PID classique.
- Le dépassement du système de commande de retour unitaire avec le correcteur PID d'ordre fractionnaire est plus petit que celui avec le correcteur PID classique.

### III.5 Conclusion

Ce Chapitre porte sur la commande robuste d'ordre fractionnaire. Après avoir rappeler les principes de base de la commande CRONE et les performances caractéristiques remarquables de la boucle idéale de Bode , nous avons présenté le principe de la synthèse de commandes robustes d'ordre fractionnaire et la synthèse de la première génération de la commande CRONE. La synthèse de la commande est effectuée dans le domaine fréquentiel en calculant les paramètres du contrôleur  $PI^\alpha D^\beta$  qui permet d'avoir un système de commande dont les performances sont celles de la boucle idéale de Bode.

Nous avons montré, par un exemple de simulation, que les performances de la commande fractionnaire ( $PI^\alpha D^\beta$ ), sont clairement meilleures que celles obtenues par la commande PID classique.

*La commande CRONE*  
*Application*

## IV.1 Introduction

Dans ce chapitre on va commander un système académique par les contrôleurs PID entier et  $PI^\alpha D^\beta$  fractionnaire (avec différentes approximations d'intégration et de dérivation d'ordre fractionnaire), et la commande CRONE. Et des nouvelles règles de synthèse de correcteur  $DI^\alpha$  et  $PI^\alpha$  appliqués sur des systèmes avec grand retard.

Quant à la deuxième application moteur a courant continu, notre objectif est toujours l'application du  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire et la commande CRONE. Comme on va s'intéresser à la robustesse des ces systèmes corrigés.

## IV.2 Application à un système académique

Dans une première application, on va commander un système académique par le contrôleur  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire (avec les différentes approximations) et la commande CRONE en comparant ses performances (temporelles et fréquentielles) avec celles du contrôleur PID entier.

### IV.2.1 système académique d'ordre entier

Nous considérons le système donné par :

$$H(s) = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + s} \quad (\text{IV.1})$$

C'est un système de troisième ordre. On applique les différentes commandes (PID entier,  $PI^\alpha D^\beta$  fractionnaire et la commande CRONE) au système Linaire(IV.1) pour satisfaire le cahier de charges suivant :

$$\begin{cases} D\% \leq 20\% \\ t_{r5\%} \leq 2 \text{ s} \\ 40^\circ \leq MP \leq 70^\circ \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

### IV.2.2.1 Application du PID entier au procédé

On fait le réglage et l'ajustage des paramètres du PID entier, par la méthode de Ziegler-Nichols (fréquentielles) pour stabiliser le système et satisfaire le cahier de charges.

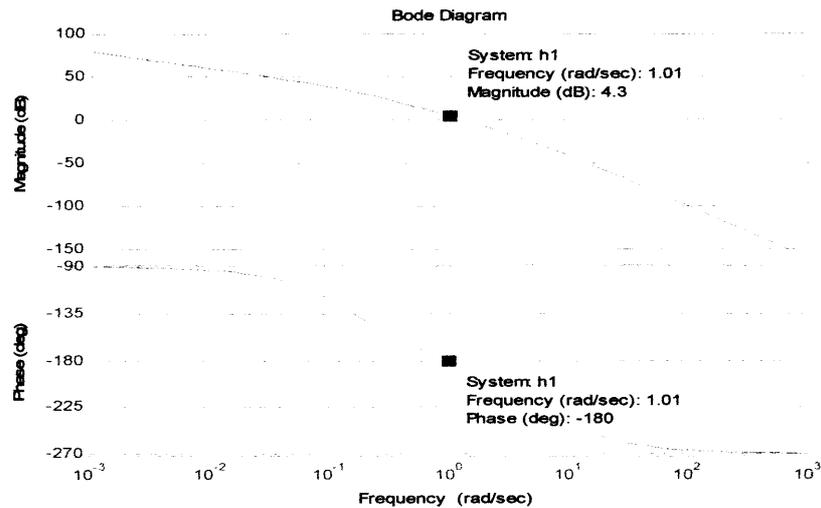


Figure IV.1. Réponse fréquentielle de système non corrigé.

Retirer la période critique  $w_\pi$  pour laquelle la phase vaut  $-180^0$  et le gain  $G_\pi$  correspondant a cette pulsation et on trouve a partir de l'équation suivante le gain critique et la période critique:

$$K_{cr} = \frac{1}{G_\pi} \quad (IV.3)$$

$$T_{cr} = \frac{2\pi}{w_\pi} \quad (IV.4)$$

A partir du tableau (III.1) on déduit les valeurs de paramètres du contrôleur PID entier ( $k_p$ ,  $T_i$  et  $T_d$ ).

$$\begin{aligned} K_p &= 0.6.K_{cr} = 3. \\ T_i &= 0.5.T_{cr} = 0.7776 \text{ sec.} \\ T_d &= 0.125.T_{cr} = 38.7 \text{ sec.} \end{aligned} \quad (IV.5)$$

Les réponses indicielles et fréquentielles du système et du système corrigé sont illustrées en figure (IV.2) et figure (IV.3). On remarque que la marge de phase est environ de  $40.5^\circ$ , ainsi ce résultat obtenu satisfait le cahier de charges (IV.2).

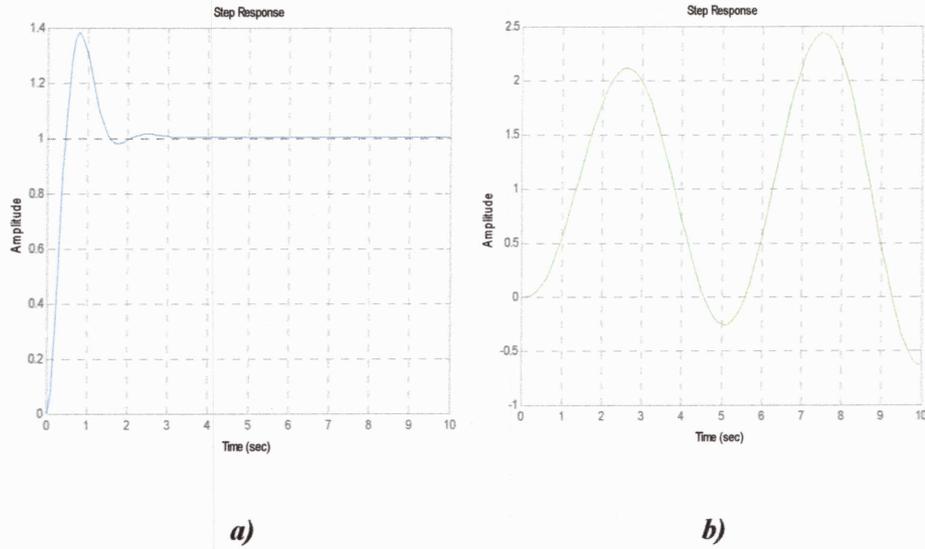


Figure IV.2. Réponse indicielle du système : a) corrigé par PID et b) non corrigé.

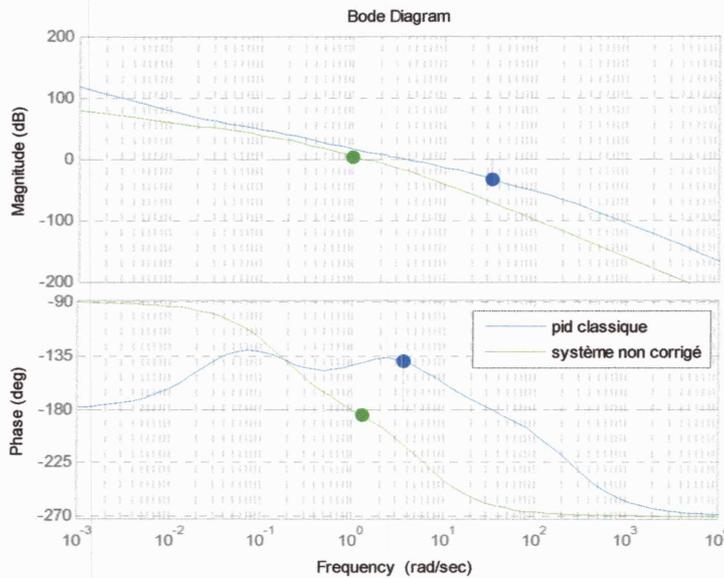


Figure IV.3. Réponse fréquentielle du système corrigé par PID entier.

IV.2.1.2 Application du contrôleur CRONE et  $PI^\alpha D^\beta$  fractionnaire au procédé

On va déterminer un contrôleur  $PI^\alpha D^\beta$  fractionnaire selon la méthode décrite dans le chapitre III. Pour assurer les spécifications du cahier de charges (IV.2). La fonction de transfert idéale de Bode doit être tel que:

$$T(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{s}{130}\right)^{1.5}} \tag{IV.6}$$

Les paramètres du contrôleur  $PI^\alpha D^\beta$  ( $k_p, k_i$  et  $k_d$ ) sont ensuite calculés en utilisant les équations (III.46...III.50) du chapitre III. Nous obtenons le contrôleur CRONE et le  $PI^\alpha D^\beta$  fractionnaire suivant :

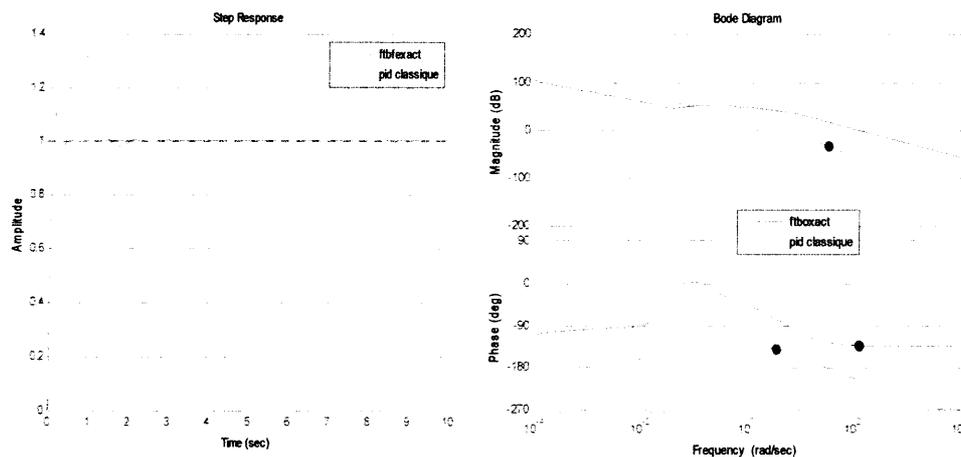
$$H_{CRONE}(s) = \frac{322.6s^3 + 355s^3 + 2.15s + 1.20}{223.9s^4} \tag{IV.7}$$

$$H_{PIDF}(s) = 1.002 + \frac{0.0068}{s^{0.5}} + 148.3986s^{1.5} \tag{IV.8}$$

On utilise les approximations de Charef, Oustaloup (CRONE : 2<sup>ème</sup> génération), Matsuda, et la formule analytique exacte (IV.8) du  $PI^\alpha D^\beta$  pour la synthèse de la commande du procédé dans une bande de fréquences de  $[10^{-5}, 10^5]$  rad/sec. On a choisi aussi l'ordre d'approximation  $n = 10$  pour les contrôleurs d'Oustaloup, de Matsuda, et une erreur d'approximation  $y = 1dB$  pour le contrôleur de Charef (voir chapitre II et III).

Les figures (IV.10) et (IV.11) représentent respectivement les réponses indicielles et les diagrammes de Bode du système  $H(s)$  commandé par PID classique et  $PI^\alpha D^\beta$  (avec la formule analytique et différentes approximations).

**IV.2.1.3 PID fractionnaire exacte et PID entier**



**Figure IV.4. Réponses indicielle et fréquentielle du système corrigé par PID entier et PID fractionnaire.**

IV.2.1.4 PID fractionnaire avec approximation et PID entier

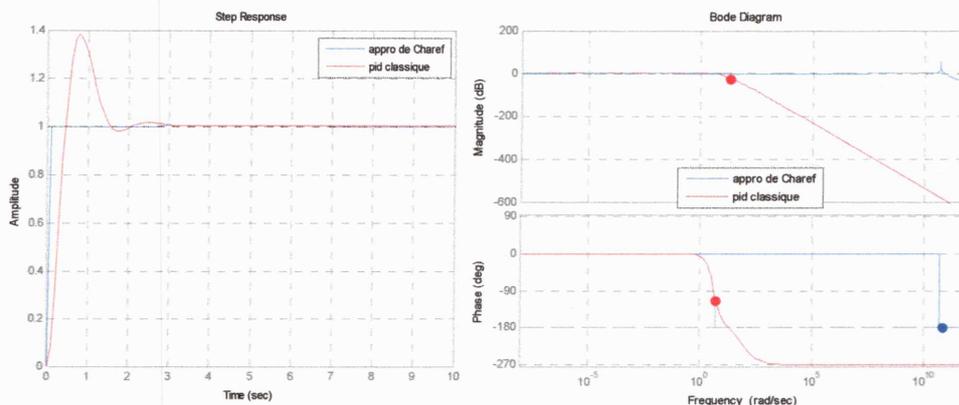


Figure IV.5. Réponses indicielle et fréquentielle du système corrigé par PID entier et PID fractionnaire (Approximation de Charef).

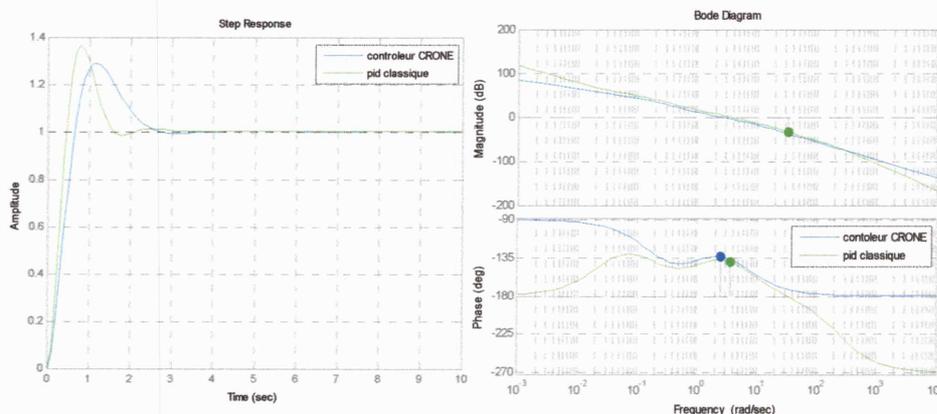


Figure IV.6. Réponses indicielle et fréquentielle du système corrigé par PID entier et contrôleur CRONE.

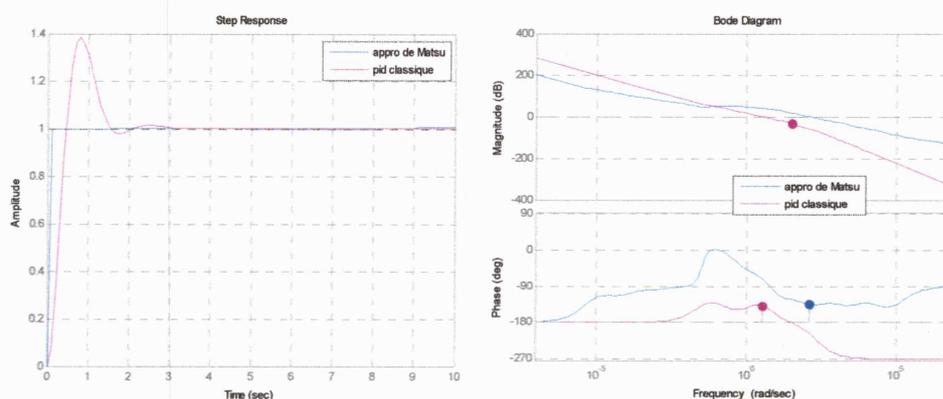
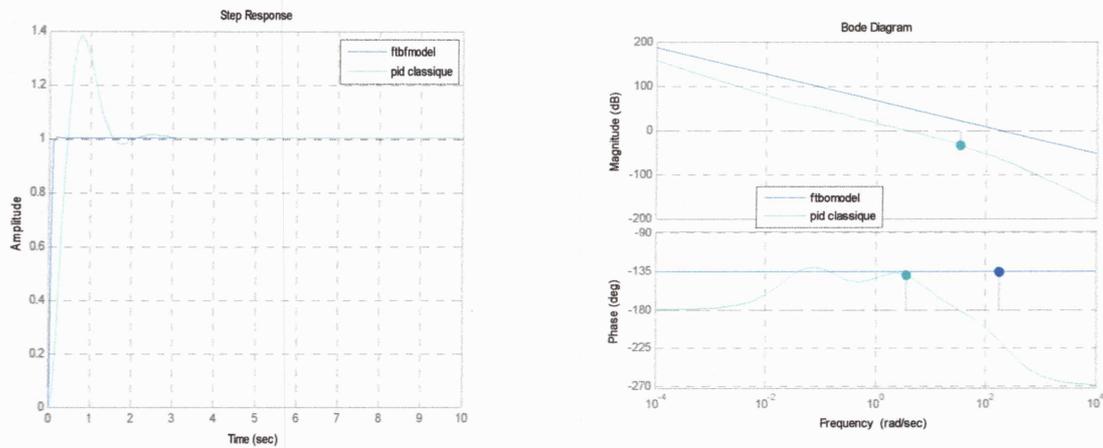


Figure IV.7. Réponses indicielle et fréquentielle du système corrigé par PID entier et PID fractionnaire (Approximation de Matsuda).



**Figure IV.8. Réponses indicielle et fréquentielle du système corrigé par PID entier et Le model qui correspondant.**

A partir des figures (IV.2) à (IV.6), on peut voir que les diagrammes de gain de différentes approximations sont proches de celui du modèle de référence caractérisé par une boucle idéale de Bode dans la bande fréquentielle  $[10^{-5}, 10^5]$  rad/sec.

En outre, les marges de phase appartiennent aussi à l'intervalle du cahier de charges imposé :  $40^{\circ} \leq MP \leq 70^{\circ}$ . Par contre, le diagramme de phase du  $PI^{\alpha}D^{\beta}$  fractionnaire défini par son expression exacte, représente une différence de phase égale à  $-47.6^{\circ}$  par rapport aux autres approximations, cela est interprété par la nature de la fonction de transfert irrationnelle pour le contrôleur  $PI^{\alpha}D^{\beta}$ . On remarque aussi que la phase est constante autour de la fréquence de coupure  $\omega_u = 160 \text{ rad/sec}$  du système corrigé par le  $PI^{\alpha}D^{\beta}$  et ses approximations traduisant la propriété de la constance de phase de la boucle idéale de Bode ( $\varphi = -m \frac{\pi}{2} = -135^{\circ}$ ).

Suivant les figures des approximations, le contrôleur  $PI^{\alpha}D^{\beta}$  fractionnaire assure des meilleurs résultats de robustesse (la rapidité caractérisée par des petits temps de montée et de réponse ( $0.03s < T_m < 0.1s$  et  $0.01s < T_m < 0.9s$ ) et aussi un faible dépassement d'environ de 10%).

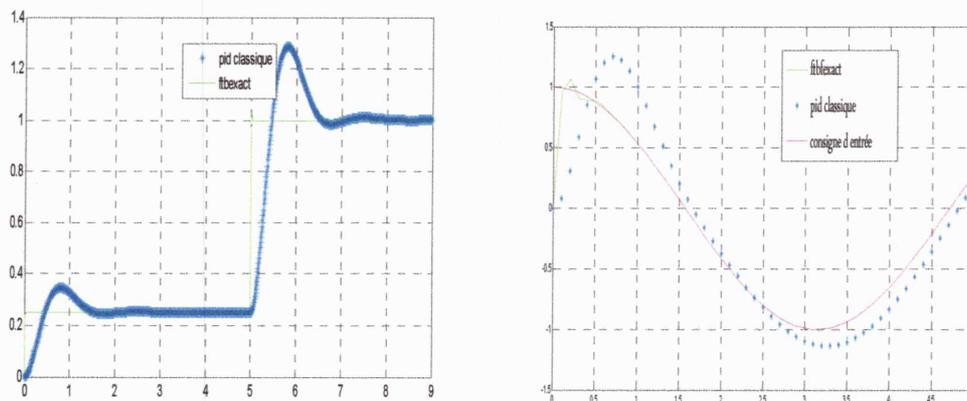
La comparaison des résultats de différentes approximations du  $PI^{\alpha}D^{\beta}$  avec le régulateur PID entier est résumée dans le tableau ci-dessous :

	MP(deg)	$T_m$ (sec)	$t_{r5\%}$ (sec)	D%	$V_{finale}$
PID fractionnaire exact	47.5	0.1900	0.2000	10	01
<b>Approx- Charef</b>	<b>60.2</b>	<b>0.0407</b>	<b>0.0115</b>	<b>09</b>	<b>01</b>
Contrôleur CRONE	47.8	0.1100	0.2000	29	01
<b>Approx- Matsuda</b>	<b>45.5</b>	<b>0.0802</b>	<b>0.0982</b>	<b>09</b>	<b>01</b>
Le model	45.0	0.0500	0.2010	01	01
PID entier	40.5	0.3040	1.4000	37	01

**Tab. IV.1** Comparaison des performances du  $PI^\alpha D^\beta$  et leurs approximations avec PID entier.

En ce qui concerne la comparaison des performances de robustesse (Tab. IV.1), elles révèlent clairement que la robustesse est bien meilleure dans le cas du contrôleur fractionnaire  $PI^\alpha D^\beta$  et ces approximations, en faveur de l'approximation proposée par Charef, Matsuda et le contrôleur CRONE.

La figure (IV.7) présente l'asservissement des réponses du système corrigé en boucle fermée par PID entier et PID fractionnaire sans approximation.



**Figure IV.9.** La poursuite de la consigne choisie par les réponses correspondantes du système corrigé par PID entier et PID fractionnaire sans approximation.

On peut voir que les réponses du système corrigé par le contrôleur fractionnaire  $PI^\alpha D^\beta$  sans approximation suivent rapidement la consigne par rapport à celle obtenue par le contrôleur PID entier.

**IV.2.2 système académique d'ordre entier avec un grand retard**

Le modèle dynamique du PH dans le processus de neutralisation du sucre de canne (procédé ordre avec retard). Les variations observées du retard et la constante de temps du procédé le long de la récolte sont insignifiantes [29].

On a observé d'importantes variations du gain le long de la récolte.

$$H(s) = \frac{K}{(1 + \tau s)} e^{-sl} \quad (0.15 < K < 0.94) \tag{IV.9}$$

Le modèle de procédé nominal est comme suit :

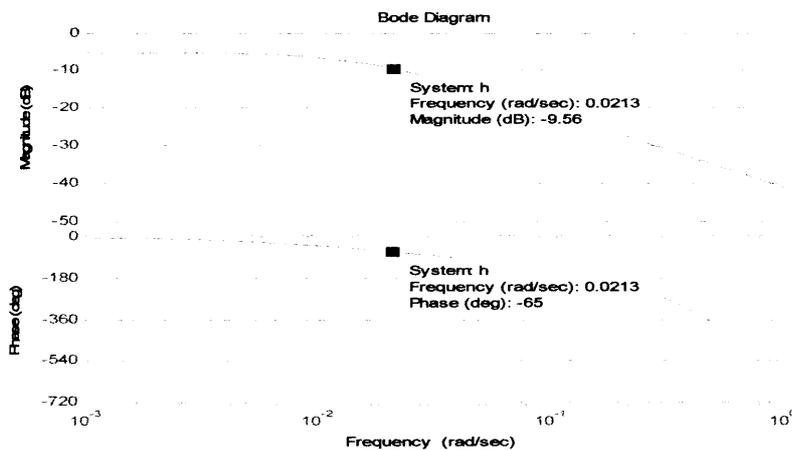
$$H(s) = \frac{0.55}{(1 + 62s)} e^{-10s} \tag{IV.10}$$

**IV.2.2.1 correcteur DI<sup>α</sup>**

Dans cet exemple on présente une nouvelle méthode de la synthèse du système avec retard par un DI fractionnaire :

$$H_p(s) = k_{DI} \left( \frac{1 + \tau s}{s^\alpha} \right) \tag{IV.11}$$

à partir de la présentation fréquentielle (figure IV.8), on relève la phase ( $\omega_c$ ) et l'amplitude ( $\phi_m$ ) pour ce système:



**Figure IV.10. Réponse fréquentielle du système avec retard de temps.**

Un autre point essentiel dans cette synthèse est la spécification fréquentielle du système (IV.10) avec correcteur DI fractionnaire en boucle ouvert. Qui (système corrigé en boucle ouvert) est donnée par :

$$\begin{cases} H(s).H_p(s) = \frac{k e^{-sl}}{(1 + \tau s)} k_{DI} \left( \frac{1 + \tau s}{s^\alpha} \right) = \frac{k k_{DI}}{s^\alpha} e^{-sl} \\ \varphi = - \left( \alpha \frac{\pi}{2} + \omega l \right) \\ |H(j\omega).H_p(j\omega)| = \frac{k k_{DI}}{\omega^\alpha} \end{cases} \quad (IV.12)$$

D'après le principe général de la synthèse des correcteurs classiques:

$$\begin{aligned} \varphi_{total} &= \pi + \text{Arg}(H(j\omega_c)) \\ |H(j\omega_c)| &= 1 \end{aligned} \quad (IV.13)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \varphi_{total} &= \pi - \left( \alpha \frac{\pi}{2} + \omega_c l \right) \\ \frac{k k_{DI}}{\omega_c^\alpha} &= 1 \end{aligned} \quad (IV.14)$$

Les spécifications fréquentielles désirées en boucle ouvert sont données ci-dessous:

$$\begin{aligned} \varphi_m &= -65^\circ \\ \omega_c &= 0.02 \text{ rad/sec} \end{aligned} \quad (IV.15)$$

Donc les paramètres du correcteur sont :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{\pi} (-\varphi_m + \pi - \omega_c l) = 1.1235 \\ k_{DI} &= \frac{\omega_c^\alpha}{k} = 0.2407 \\ \tau &= 62 \end{aligned} \quad (IV.16)$$

La fonction de transfert du correcteur DI<sup>α</sup>, calculée pour assurer ces spécifications, est donnée par :

$$H_p(s) = 0.2407 \left( \frac{1 + 62s}{s^{1.1235}} \right) \quad (IV.17)$$

Les figures suivantes représentent diagramme de Bode du système H(s) corrigé par correcteur  $DI^\alpha$  et la réponse indicielle pour différentes valeurs de K:

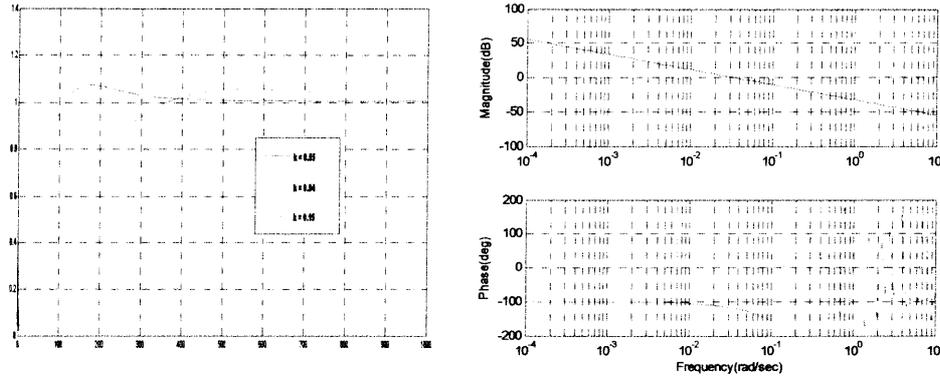


Figure IV.11. Réponses temporelle et fréquentielle du système corrigé avec correcteur  $DI^\alpha$  pour différentes variations de gain K.

- L'avantage de correcteur  $DI^\alpha$ , est de rendre le système plus robuste aux variations du gain.
- Inconvénients de ce correcteur, le fait d'annuler le pôle du procédé n'est pas trivial, et l'effort de contrôle peut être important.

#### IV.2.2.2 correcteur $PI^\alpha$

Dans cet exemple on présente une nouvelle méthode de la synthèse du système avec retard par un PI fractionnaire :

$$H_p(s) = k_{PI} \left( 1 + \frac{1}{T_i s^\alpha} \right) \quad (IV.18)$$

Les étapes de la synthèse sont faites comme dans le cas de la synthèse de DI fractionnaire.

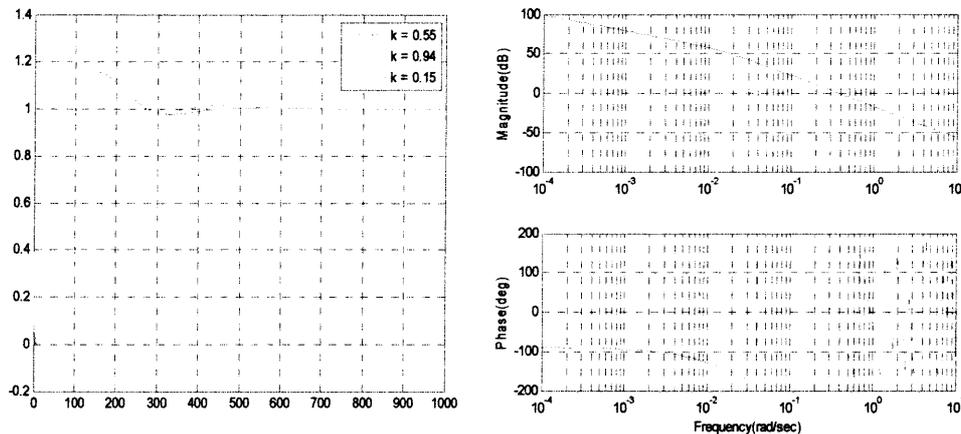
On trouve les résultats suivants [29]:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_{total} &= \arctan \left( \frac{T_i w_c^\alpha \sin\left(\frac{\alpha \pi}{2}\right)}{1 + T_i w_c^\alpha \cos\left(\frac{\alpha \pi}{2}\right)} \right) - \left( w l + \alpha \frac{\pi}{2} + \arctan(w_c \tau) \right) = -(\pi - \varphi_m) \\ |H(j\omega_c) \cdot H_p(j\omega_c)| &= \frac{k k_{PI}}{T_i \omega_c^\alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + (w_c \tau)^2}} \sqrt{\left( 1 + T_i w_c^\alpha \cos\left(\frac{\alpha \pi}{2}\right) \right)^2 + \left( T_i w_c^\alpha \sin\left(\frac{\alpha \pi}{2}\right) \right)^2} = 1 \\ \frac{d\varphi_{total}}{dw} &= \frac{T_i (w_c^\alpha)^2 \sin\left(\frac{\alpha \pi}{2}\right) \alpha \cos\left(\frac{\alpha \pi}{2}\right)}{w_c \left[ \left( 1 + T_i w_c^\alpha \cos\left(\frac{\alpha \pi}{2}\right) \right)^2 + T_i^2 (w_c^\alpha)^2 \sin\left(\frac{\alpha \pi}{2}\right)^2 \right]} - \frac{T_i^2 (w_c^\alpha)^2 \sin\left(\frac{\alpha \pi}{2}\right) \alpha \cos\left(\frac{\alpha \pi}{2}\right)}{w_c \left[ \left( 1 + T_i w_c^\alpha \cos\left(\frac{\alpha \pi}{2}\right) \right)^2 + T_i^2 (w_c^\alpha)^2 \sin\left(\frac{\alpha \pi}{2}\right)^2 \right]} - l + \frac{\tau}{1 + (w_c \tau)^2} = 0 \end{aligned} \right. \quad (IV.19)$$

D'après le calcul mathématique fait (résolution du système d'équation IV.18), on trouve les paramètres du correcteur PI fractionnaire :

$$\begin{aligned} \alpha &= 1.0019 \\ k_{PI} &= 0.9451 \\ T_i &= 18 \end{aligned} \quad (IV.20)$$

Les figures suivantes représentent le diagramme de Bode du système  $H(s)$  corrigé par correcteur  $PI^\alpha$  et la réponse indicielle pour différentes valeurs de  $K$ :



**Figure IV.12.** Réponses temporelle et fréquentielle du système corrigé avec correcteur  $PI^\alpha$  pour différentes variations de gain  $K$ .

- L'avantage de correcteur  $PI^\alpha$ , est de rendre le système plus robuste aux variations du gain.
- Presque le système corrigé est isodépassement (le dépassement  $\leq 20\%$ ).

### IV.3 Application au moteur à courant continu

Le but de cette partie est de faire la synthèse et la simulation d'un contrôleur PID classique et d'un autre  $PI^\alpha D^\beta$  fractionnaire avec ses différentes approximations pour commander un moteur à courant continu [5].

### IV.3.1 Principe du moteur à courant continu MCC

Tous les moteurs électriques sont basés sur le principe physique du couplage magnétique entre deux champs magnétiques. La transformation de l'énergie électrique en énergie mécanique s'opère à travers ce couplage magnétique ou interaction magnétique. De ce principe il découle que tout moteur comporte deux circuits magnétiques, appelés stator (partie fixe) et rotor (partie mobile).

Dans le cas du moteur à courant continu le stator, aussi appelé inducteur, crée un champ magnétique  $B_s$ . Le rotor, aussi appelé induit, est alimenté par un courant continu. Les conducteurs du rotor traversés par le courant sont immergés dans le champ  $B_s$ , or le physicien Laplace découvrit que le conducteur est soumis à une force. C'est cette force qui va faire tourner le rotor et créer le couple moteur.

La constitution technologique du moteur matérialise ce principe de fonctionnement.

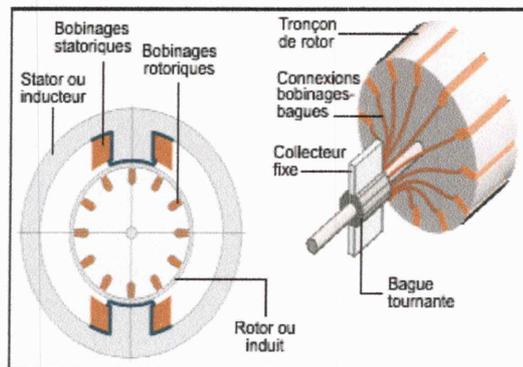


Figure IV.13. Moteur à courant continu.

### IV.3.2 Modélisation du moteur à courant continu (modèle linéaire)

#### IV.3.2.1 Moteur à vide

Le flux inducteur  $\Phi_m$  est produit par un aimant permanent de sorte que l'on peut écrire les relations suivantes (figure(IV.14)):

$$\begin{aligned}
 E_m &= K_1 \Phi_m \omega_m = K_w \omega_m \\
 \gamma_m &= K_2 \Phi_m i = K_c i \\
 v_l - E_m &= R_l i + L_l \frac{di}{dt}
 \end{aligned}
 \tag{IV.21}$$

Où l'on définit les variables suivantes:

- $E_m$  : Tension de la force contre-électromotrice (Volts).
- $\Gamma_m$  : Couple produit par le moteur (N.m).
- $I$  : Courant d'induit (Ampères).
- $v_1$  : Tension appliquée aux bornes de l'induit (Volts).
- $W_m$  : Vitesse du rotor (Rad/sec)
- $R_I$  : Résistance du circuit de l'induit (Ohms).
- $L_I$  : Inductance du circuit d'induit (Henrys).
- $K_w$  : Constance de la force contre-électromotrice (Volts.sec/rad).
- $K_C$  : Constante de couple (N/amp).

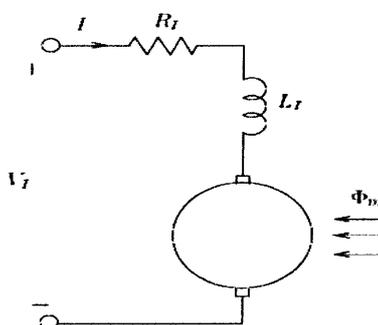


Figure IV.14. Moteur à courant continu a vide.

Les constantes  $K_1$  et  $K_2$  sont fixées par la géométrie du moteur de sorte qu'on peut les regrouper avec la variable  $\Phi_m$ , qui est pratiquement constante pour un aimant permanent. On définit donc les deux constantes  $K_w$  et  $K_c$  pour le moteur.

Le couple  $\gamma_m$  entraîne une charge mécanique composée de :

$$\gamma_m = J_m w_m' + B_m w_m + c_m \tag{IV.22}$$

$J_m$  : Moment d'inertie du rotor (Kg.m<sup>2</sup>).

$B_m$  : Coefficient de frottement visqueux du rotor (N.m.sec/rad).

$C_m$  : Couple de friction de Coulomb du rotor (N.m).

#### IV.3.2.2 Moteur avec charge

Lorsque le moteur entraîne une charge à travers un rapport d'engrenages  $N$ , on a :

$$w_c = N w_m \tag{IV.23}$$

$w_c$  : Vitesse d'entraînement de la charge (Rad/sec).

$N$  : Rapport d'engrenage.

Soit  $\gamma_e$  et  $\gamma_c$  les couples d'entraînement de l'engrenage et de la charge, respectivement la puissance mécanique de chaque coté du rapport  $N$  étant la même, on a :

$$\gamma_e w_m = \gamma_c w_c = \gamma_c N w_m \quad (IV.24)$$

D'où :

$$\gamma_e = \gamma_c N \quad (IV.25)$$

Pour ramener le couple d'entraînement de la charge  $\gamma_c$  du coté moteur du rapport d'engrenages, il faut le multiplier par  $N$ . Définissant la charge mécanique total par les constantes :

$\gamma$  : couple de la charge (N.m).

$J_c$  : Moment d'inertie de la charge (Kg.m<sup>2</sup>).

$B_c$  : coefficient de frottement visqueux de la charge (N.m.sec/rad).

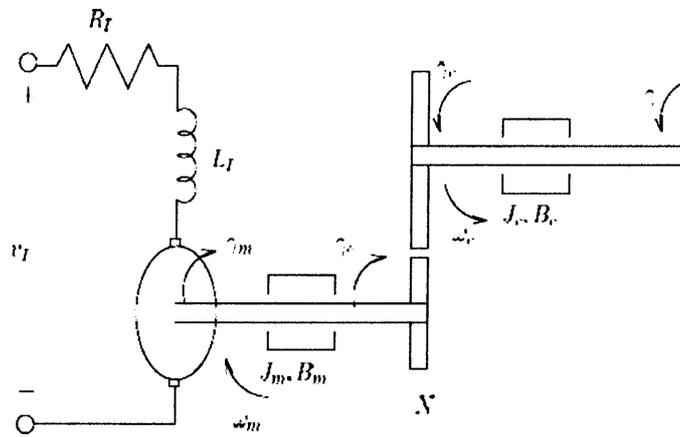


Figure IV.15. Moteur à courant continu avec charge.

On obtient :

$$\gamma_c = J_c w_c' + B_c w_c + \gamma \quad (IV.26)$$

En ajoutant au moteur une charge mécanique à travers un rapport d'engrenages  $N$ , l'équation (IV.23) devient :

$$\begin{aligned} \gamma_m &= J_m w_m' + B_m w_m + c_m + \gamma_e \\ &= J_m w_m' + B_m w_m + c_m + N \gamma_c \\ &= J_m w_m' + B_m w_m + c_m + N (J_c w_c' + B_c w_c + \gamma) \\ &= J_m w_m' + B_m w_m + c_m + N (J_c (N w_m') + B_c N w_m + \gamma) \\ &= J_E w_m' + B_E w_m + c_m + N \gamma \end{aligned} \quad (IV.27)$$

Définitions les constantes :

$$\begin{aligned} J_E &= J_m + N^2 J_c \\ B_E &= B_M + N^2 B_c \end{aligned} \tag{IV.28}$$

On peut donc généraliser le schéma bloc pour le moteur en charge, d'après la transformées de Laplace des équations (IV.21) et (IV.27) on trouver la fonction de transfert suivant (avec  $c_m=0$ ):

$$\frac{w_m(s)}{V_l(s)} = \frac{K_c}{(sL_l + R_l)(sJ_E + B_E) + K_C K_W} \tag{IV.29}$$

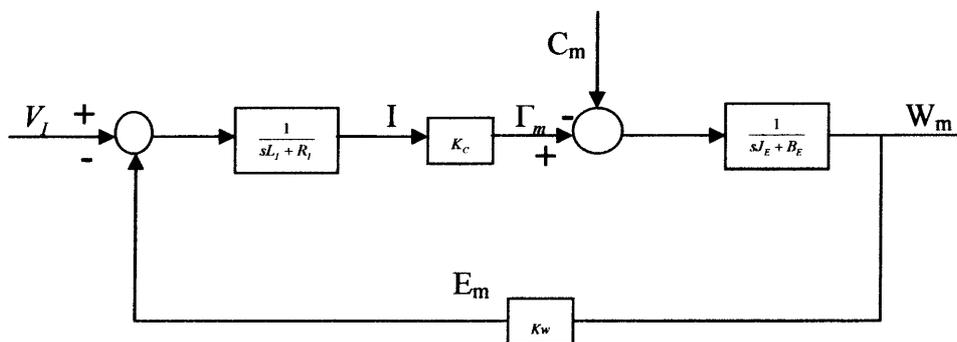


Figure IV.16. Le schéma fonctionnel du Moteur à courant continu avec charge.

### IV.3.3 Synthèse des correcteurs

Dans cette partie on va chercher le correcteur qui donne les meilleures performances désirées. Le cahier de charges est défini comme suit :

$$\begin{cases} D\% \leq 20\% \\ 0.1 \leq t_{r5\%} \leq 2s \\ 30^\circ \leq MP \leq 75^\circ \end{cases}$$

#### IV.3.3.1 Contrôleurs PID (classique et fractionnaire)

Cette partie consiste à faire la synthèse d'un contrôleur PID d'ordre entier (classique) et un contrôleur  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire avec ses différentes approximations, afin de satisfaire les performances désirées. On utilise un moteur à courant continu avec les paramètres donnés dans le tableau suivant :

$R_I$	$10\Omega$
$K_C$	$0.347N \times m/Amp$
$B_E$	$8.6 \times 10^{-6} N \times m \times sec/Rad$
$J_E$	$2.2 \times 10^{-3} Kg \times m$
$K_w$	$0.3 V \times sec /Rad$
$L_I$	Negligible

Tab. IV.2 Paramètres du moteur.

Avec ces paramètres, on trouve la fonction de transfert suivante:

$$H(s) = \frac{0.347}{0.6 \times 10^{-2} s^2 + 0.022s + 3} \tag{IV.30}$$

D'après les méthodes de la synthèse par les équations (IV.3 et 4 à 5), on trouve le PID suivant :

$$H_{PID}(s) = 0.1 + \frac{0.00066}{s} + \frac{0.0017s}{1 + \frac{0.0017}{N}s}, N = 10^3 \tag{IV.31}$$

La réponse indicielle et la réponse fréquentielle de la vitesse de rotor, correspondantes à la correction par ces contrôleurs PID classiques (IV.31), sont illustrées dans la figure (IV.18):

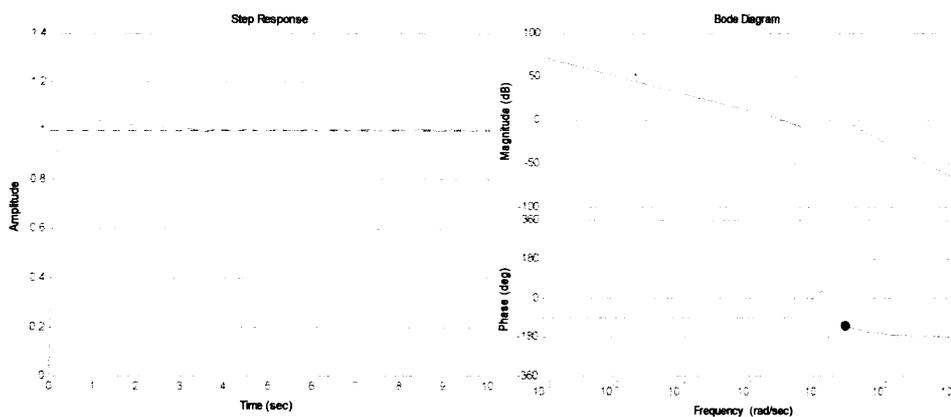


Figure IV.17. Réponses indicielle et fréquentielle du système corrigé par PID entier.

### IV.3.3.2 Synthèse de contrôleur PID fractionnaire

On va déterminer régulateur PID d'ordre fractionnaire selon la méthode décrite en section (III.15). Pour qui assurer la marge de robustesse ( $30^0 < MP < 75^0$ ), les fonctions de transfert idéales de Bode doivent être tels que :

$$T(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{s}{150}\right)^{1.66}} \quad (\text{IV.32})$$

Les paramètres du contrôleur  $PI^\alpha D^\beta$  ( $k_p, k_i$  et  $k_d$ ) sont ensuite calculés en utilisant les équations (III.46...III.50) du chapitre III. Nous obtenons le contrôleur  $PI^\alpha D^\beta$  fractionnaire suivant :

$$H_{PIDF}(s) = 0.1 + \frac{1}{s^{0.5}} + 148.3986s^{1.5} \quad (\text{IV.33})$$

On utilise les approximations de Charef, Matsuda, et la formule analytique exacte (IV.29) du  $PI^\alpha D^\beta$  pour la synthèse de la commande du procédé dans une bande de fréquences:  $[10^{-3}, 10^3]$  rad/sec. On a choisi aussi l'ordre d'approximation  $n = 10$  pour le contrôleur de Matsuda, et une erreur d'approximation  $y = 1dB$  pour le contrôleur de Charef (voir chapitre II et III).

### IV.3.3.3 Synthèse de contrôleur CRONE

D'après le diagramme de Bode, il ya une marge de phase constante, donc une commande CRONE de la première génération est suffisante :

Les considérations de robustesse nous poussent à choisir :

$\Delta\phi = 50^0$  à une pulsation de 31.6 rad/s.

$\Delta w = 1$  décade centrée sur  $w_u$

#### 1. Calcul de l'ordre de correcteur $\alpha$

$$\alpha = n - n' = 2 - \frac{2}{180}(180 - 50) = 0.5$$

2. Calcul des pulsations de coupure  $w_b$  et  $w_h$

D'après le cahier des charges :  $\Delta w = 1$  décade centrée sur  $w_u$  donc :

$$\frac{w_B}{w_A} = 10$$

$$w_u^2 = w_B \times w_A$$

Puis en choisissant 1 décade d'écart entre les pulsations de coupure  $w_b$  et  $w_h$  et les

pulsations  $w_A$  et  $w_B$  nous obtenons :  $w_b = 1 \text{ rad/s}$   
 $w_h = 1000 \text{ rad/s}$

3. Calcul gain statique  $C_0$

$$C_0 = \frac{1}{|H(jw_u)|} \left( \frac{1 + \left(\frac{w_u}{w_h}\right)^2}{1 + \left(\frac{w_u}{w_b}\right)^2} \right)^{\frac{\alpha}{2}} = 250 \left( \frac{1+s}{1+\frac{s}{1000}} \right)^{0.25}$$

Donc :

$$H_{CRONE}(s) = \frac{5187s^{10} + 9.852 \times 10^6 s^9 + 7.195 \times 10^9 s^8 + 2.64 \times 10^{12} s^7 + 5.37 \times 10^{14} s^6}{s^{11} + 2931s^9 + 2.198 \times 10^6 s^8 + 1.016 \times 10^9 s^7 + 2.594 \times 10^{11} s^6} \quad (IV.34)$$

$$\frac{6.25 \times 10^{16} s^5 + 4.225 \times 10^{18} s^4 + 1.666 \times 10^{20} s^3 + 3.60 \times 10^{21} s^2 + 3.992 \times 10^{22} s + 1.64 \times 10^{23}}{3.814 \times 10^{13} s^5 + 3.266 \times 10^{15} s^4 + 1.609 \times 10^{17} s^3 + 4.386 \times 10^{18} s^2 + 3.1621 \times 10^{19} s + 3.162 \times 10^{20}}$$

Les figures (IV.17) et (IV.18) représentent respectivement les réponses temporelles et fréquentielles du système  $H(s)$  commandé par PID classique et  $PI^\alpha D^\beta$  exact et Contrôleur CRONE, la formule analytique et différentes approximations avec le model.

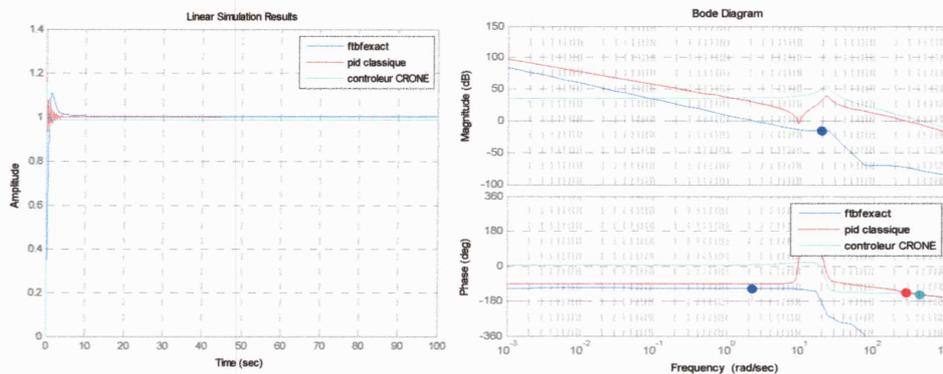
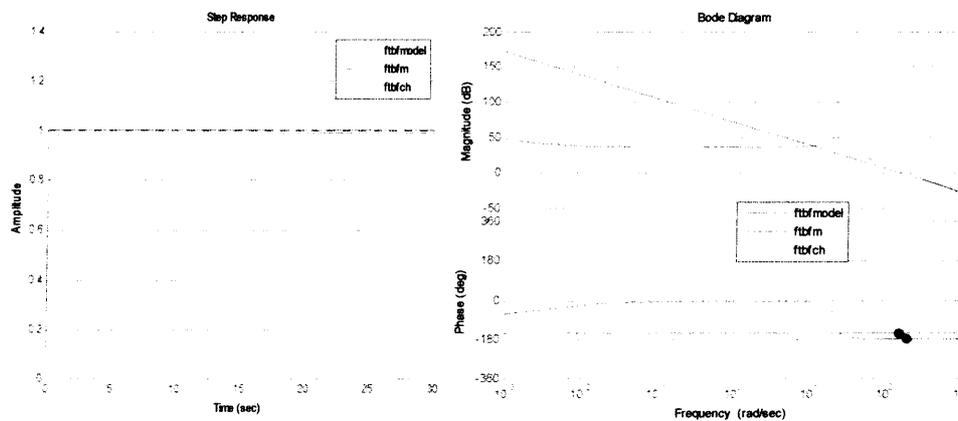


Figure IV.18. Réponses indicielle et fréquentielle du système corrigé par PID entier et fractionnaire et contrôleur CRONE.



**Figure IV.19. Réponses indicielle et fréquentielle du système corrigé par PID fractionnaire (approximation) et model.**

On peut voir dans les figures (IV.18) et (IV.19) que les diagrammes de gain de différentes approximations sont proches de celui du modèle de référence caractérisé par une boucle idéale de Bode dans la bande fréquentielle  $[10^{-3}, 10^3] \text{ rad/s}$ . On remarque aussi que les phases sont constantes autour des fréquences de coupure ( $\omega_u = 150 \text{ rad/sec}$ ).

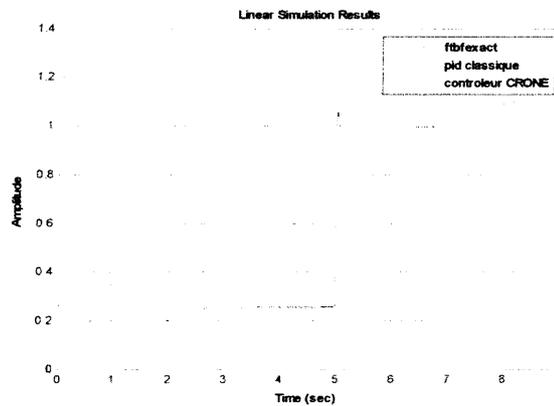
Le  $PI^\alpha D^\beta$  et ses approximations traduisent la propriété de la constance de phase de la boucle idéale de Bode ( $\varphi \approx -150^\circ$ ).

Suivant les figures (IV.18) et (IV.19), les contrôleurs  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire assurent des meilleurs résultats de robustesse en les comparants avec ceux d'ordre entier (la rapidité caractérisée par des petits temps de montée et de réponse ( $0.1 < t_{r5\%} < 2 \text{ sec}$  et  $t_m < 0.3 \text{ sec}$ ) et aussi des faibles dépassements d'environ de 10%:

	MP(deg)	$T_m$ (sec)	$t_{r5\%}$ (sec)	D%	$V_{finale}$
PID fractionnaire exact	30.1	0.1000	1.9800	10	01
<b>Approx- Charef</b>	<b>73.2</b>	<b>0.0807</b>	<b>0.0905</b>	<b>10</b>	<b>01</b>
<b>Contrôleur CRONE</b>	<b>33.1</b>	<b>0.0067</b>	<b>0.0260</b>	<b>18</b>	<b>01</b>
<b>Approx- Matsuda</b>	<b>31.7</b>	<b>0.3000</b>	<b>0.0750</b>	<b>09</b>	<b>01</b>
Le model	30.6	0.0300	0.1010	01	01
PID entier	48.5	0.3040	1.4000	20.3	01

**Tab. IV.3 Comparaison des performances du  $PI^\alpha D^\beta$  et leurs approximations avec PID entier.**

Figure (IV.20) présente l'asservissement des réponses de la vitesse de rotor en boucle fermée, par PID entier et fractionnaire et le contrôleur CRONE.



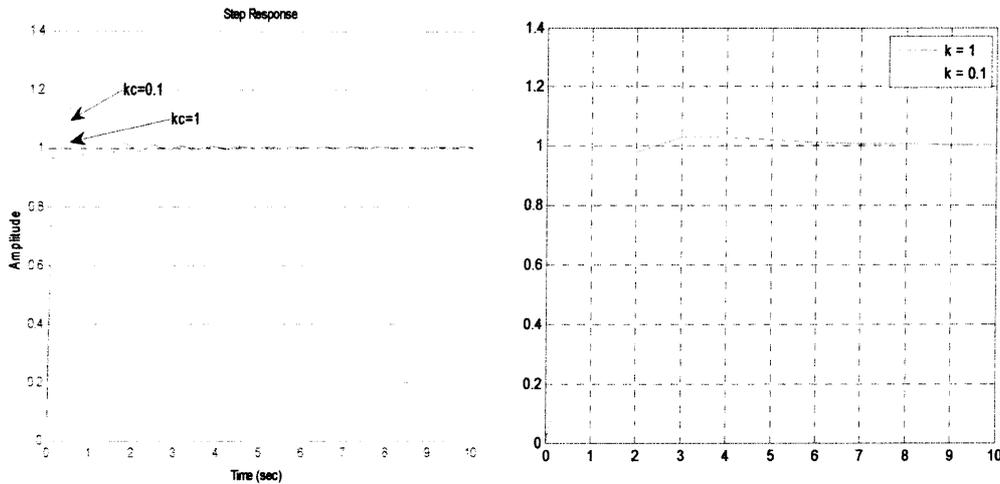
**Figure IV.20. La poursuite de vitesse du rotor commandé par les contrôleurs PID classique et PID fractionnaire exacte et le contrôleur CRONE.**

On peut voir que les réponses du système corrigé par le contrôleur fractionnaire  $PI^\alpha D^\beta$  sans approximation et le contrôleur CRONE suivent rapidement la consigne par rapport à celle obtenue par le contrôleur PID entier.

#### IV.3.4 Test de robustesse

La robustesse des systèmes de commande aux perturbations et aux incertitudes est un objectif important dans les boucles de commande. La rétroaction ne serait pas nécessaire pour la plupart des systèmes de commande s'il n'y avait aucune perturbation et incertitude. En général, la conception des correcteurs est effectuée en utilisant les valeurs nominales des paramètres du processus à commander. Cependant, ils existent toujours des incertitudes sur les valeurs de ces paramètres. Nous pouvons dire qu'une conception est robuste, si elle garde les performances du système de commande pour la variation substantielle en valeurs des paramètres du processus.

Pour cette partie de simulation, nous comparerons les performances du système de commande pour les deux correcteurs, le correcteur PID classique et fractionnaire, avec la variation du gain  $K_c$  du processus. Les figures (IV.21) et (IV.22), présentent les réponses indicielles du système de commande en boucle fermée avec les correcteurs PID classique et PID d'ordre fractionnaire, respectivement, pour trois valeurs différentes du gain  $K_c$ ; la valeur nominale  $K_c=1$ , plus de la valeur nominale  $K_c=0.1$  et moins de la valeur nominale.



**Figure IV.21. Réponses indicielles du système en boucle fermée avec le correcteur PID classique et fractionnaire.**

Beaucoup moins de changements de ses caractéristiques de performances pour des variations du gain  $K_c$  que le système de commande avec le correcteur PID classique. Alors, nous pouvons dire que l'utilisation du correcteur PID d'ordre fractionnaire fournit de bonnes performances et robustesse.

#### IV.4 conclusion

Dans ce chapitre nous avons appliqué les contrôleurs PID d'ordre entier et  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire et le contrôleur CRONE à un système académique d'ordre trois donné par sa fonction de transfert. Comme nous avons corrigé par DI et PI fractionnaire un deuxième système du premier ordre avec retard. Ensuite nous avons commandé la vitesse du rotor d'un moteur à courant continu.

Les résultats des simulations montrent que les performances caractéristiques et la robustesse de la commande fractionnaire  $PI^\alpha D^\beta$  (avec approximations) et le contrôleur CRONE sont clairement meilleures que celles obtenues par la commande PID classique.

*Conclusion générale*  
*Et perspectives*

## *Conclusion générale et perspectives*

---

Dans ce mémoire, nous avons utilisé des outils de la commande des systèmes par **PID** fractionnaire et la commande **CRONE**.

On a commencé, dans un premier temps par l'étude des calculs et l'analyse des systèmes fractionnaires, et dans un deuxième temps par l'étude de la régulation classique **PID** dans le domaine fréquentiel où on a choisi la méthode de Ziegler-Nichols pour la synthèse des **PIDs** classiques et aussi la régulation de **PID** fractionnaire synthétisés à partir de la boucle idéale de Bode (**BIB**), et la commande **CRONE** -abréviation de **Commande Robuste d'Ordre Non Entier**-. Ces études faites, ont pour but d'améliorer les performances dynamiques des systèmes asservis, de façon à les rendre capables de continuer à bien fonctionner, même si les conditions de fonctionnement du système changent. Comme on 'a arrivé à exploiter les propriétés de l'analyse fréquentielle, afin de concevoir des correcteurs basés sur la commande **CRONE** associés à des systèmes asservis. Et finalement on'a appliqué ces outils développés pour commander un système de troisième ordre, pour choisir entre (**PI** et **DI**) pour le cas d'un système de premier ordre avec grand retard et on a terminé par commander la vitesse de rotor d'un moteur a courant continue MCC.

La comparaison des résultats obtenus par un **PID** fractionnaire (avec les approximations) et la commande **CRONE** vis-à-vis à un **PID** classique, a montré une nette amélioration des performances fréquentielles et temporelles et une meilleure robustesse aux incertitudes des paramètres des modèles des processus.

Comme perspectives de ce travail :

- Amélioration des méthodes de synthèse des **PID** que se soient classiques ou fractionnaires.
- Adaptation de la synthèse de la commande **CRONE** de la première génération aux deux générations qui suivent (Deuxième et troisième).
- Application des **PIDs** fractionnaires aux systèmes non linéaires et fractionnaires.
- Développement des codes sources pour l'implémentation des **PIDs** fractionnaires et des régulateurs **CRONE**.

## *Bibliographie*

---

- [1] N. Makris and M. C. Constantinou, "Fractional-derivative Maxwell model for Viscous Dampers", *Journal of structural Engineering*, Vol.17, N°9, 1991.
- [2] A. Scotti and S. G. Meneveau, "Fractal dimension of velocity signals in high Reynolds Numbers hydrodynamic turbulence", *physical review journal*, Vol. 51, PP.:5594-5608, 1995.
- [3] B.M. Vinagre and V. Feliù, "Some approximations of fractional operators used in control theory and applications", *41<sup>st</sup> Fractional calculus App, Anal*, Vol. 3, N°3, PP.: 231-248, 2000.
- [4] K. S. Miller and B. Ross, "An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations", Wiley, New York, USA 1993.
- [5] I. Petras, L. Dorcak and I. Kostial, "Design of Fractional - Order Controllers with Given Stability and Dumping Measures", in: *9th International BERG Conference*, September 2-5, Kosice, Slovak Republic, PP.: 119-119, 1997 (in Slovak).
- [6] K. B. Oldham and J. Spanier, "Fractional Calculus", Academic Press, New York 1974.
- [7] I. Podlubny, "Fractional Differential Equations", Academic Press, San Diego 1999.
- [8] M. Chossat, "Aide mémoire de mathématique de l'ingénieur", Bordas, Paris 1977.
- [9] A. Oustaloup, "La dérivation non entière", Hermes 1995.
- [10] L. Schwartz, "Théorie des distributions", Hermann Paris 1966.
- [11] Y. Q. Chen and K.L. Moore, "Discretization schemes for fractional-order differentiators and integrators", *IEEE, Trans. On circuits and systems-I: fundamental theory and applications*, Vol. 49, N°3, PP.: 363-367. 2002.
- [12] A. Djouambi, "Contribution à la commande CRONE", thèse de Doctorat, Université de Constantine, Algérie 2008.
- [13] B. Oldham and J. Spanier, "The fractional calculus", Academic Press, New York 1974.
- [14] A. Erdélyi, "Tables of Integral Transforms", Vol. 1, McGraw-Hill 1954.
- [15] A. Oustaloup and O. Cois, L. Le Lay, "Représentation et identification par modèle non Entier", Hermes Science Publishing LTD, Paris 2005.
- [16] C. F. Lorenzo and T. T. Hartley, "Initialization in fractional order systems", In *Proc. European Conference on Intelligent Systems and Applications*, Porto, Portugal 2001.
- [17] M. Bettayeb and S. Djennoune, "A note on the controllability and the observability of fractional dynamical systems", Porto, Portugal 2006.

## Bibliographie

---

- [18] D. Matignon and B. Andrea-novel, "Some results on controllability and the observability of finite dimensional fractional differential systems". Lille, France 1996.
- [19] C. Farges, M. Moze, and J. Sabatier, "Pseudo-state feedback stabilization of Commensurate fractional order systems", *Automatic*, Vol.46, PP.:1730-1734, 2010.
- [20] A. Charef, "Analogue realisation of fractional order integrator, differentiator and fractional  $PI^\lambda D^\mu$  controllers", *IEE proceedings on Control Theory and Applications*, 2006.
- [21] A. Charef and H. H. Sun, Y.Y. Tsao and B. Onaral, "Fractal system as represented by singularity function", *IEEE Trans. Auto. Control*, Vol.37, PP.: 1465-1470, Vol 153, Issue 6, PP.: 714-720, sept. 1992.
- [22] A. Oustaloup, "La commande CRONE", Editions Hermes, Paris 1991.
- [23] K. Matsuda and H. Fujii, "H1 optimized wave-absorbing control: Analytical and experimental results", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1993.
- [24] S. Manabe, "The non-integer integral and its application to control systems". *JIEE (Japanese Institute of Electrical Engineers) Journal*, vol.80 (860), PP.: 589-597, 1960.
- [25] M. Axtell and E.M. Bise, "Fractional calculus applications in control systems". In *Proc. of the IEEE Nat. Aerospace and Electronics Conf*, PP.: 563-566, New York, USA 1990.
- [26] A. Djouambi, "Fractal robustness and parameter tuning  $PI^\alpha D^\beta$  controllers", *proceedings of the 5<sup>th</sup>WSEAS int. conf. on SSIP, Corfu, Greece 2005*.
- [27] A. Charef, "Analogue realization of fractional order integrator, differentiator and fractional  $PI^\lambda D^\mu$  controllers", *IEE Proceeding on Control Theory Applications*, Vol.135 (6), PP.:714-720, 2006.
- [28] D. Xue and Y. Q. Chen, "A Comparative Introduction of Four Fractional Order Controllers". *Proc. of the 4th IEEE World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA02)*, PP.: 3228-3235, Shanghai, China. June 10-14, 2002.
- [29] C. A. Monje and B. M. Vinagre, Y. Q. Chen, and V. Feliu. Une Proposition pour la Synthèse de Correcteurs PI d'Ordre Non Entier. In *Action Thématique SDNE, Bordeaux, Mars 2003*. Available at. <http://www.laps.u-bordeaux1.fr/AT-sdne/>.