

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université de Jijel

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département d'Automatique



Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme

De Master en Automatique

Option : Automatique et Traitement de Signal

Thème :

# Approche multimodèle appliquée sur un engin volant de type Quadrirotor

Proposé et dirigé par :

M<sup>me</sup>. OUAAR M

Réalisé par :

DORBANE Besma

Membres du jury :

- |                                         |           |
|-----------------------------------------|-----------|
| - Mr. BOUBERTAHK Hamid (MCA),           | Président |
| - Mr. OUCIEF Nabil (MAA),               | Examineur |
| - M <sup>me</sup> . OUAAR Mounia (MAA), | Encadreur |

Soutenu le : 25 juin 2013.

Année universitaire : 2012/ 2013

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

"Une personne qui n'a jamais commis d'erreurs  
n'a jamais tenté d'innover"

*Albert Einstein*

A decorative border of pink lilies with dark spots on their petals, arranged in a circular pattern around the central text.

## *REMERCIEMENT*

Je tiens à remercier en premier lieu DIEU, le tous puissant, qui ma donné le courage, la force et la volonté pour bien mener ce travail.

Je tiens particulièrement à exprimer toute ma gratitude à **M<sup>me</sup>.OUAAR.M**, prof à l'Université de JIJEL d'avoir bien voulu accepter de diriger ce travail, et pour l'intérêt constant qu'elle n'a cessé de porter à ce travail. Qu'elle en soit respectueusement remerciée.

Je remercie vivement **Mr.YACEF.F** Attaché de recherche au CDTA (Centre de Développement des Technologies Avancés), à son soutien illimité, c'est grâce à lui que je suis arrivé à terminer mon travaille. Merci de tout mon cœur.

J'adresse également mes remerciements aux membres de jury **Mr.BOUBERTAKH** et **Mr.OUCIEF** qui m'ont fait l'honneur de juger mon travail.

Enfin, je remercie ma famille que je ne serais certainement pas arrivé au bout de ces années d'étude sans leurs soutiens, et encouragements. Merci à vous.

Merci à tous les collègues que j'ai partagé avec eux mes années d'études. Merci plus particulièrement à mes chers amis pour le climat de bonne humeur qu'ils contribuent à créer et à maintenir.

*MERCI*



*DEDICACS*

*Je dédie se travail :  
A mes chers parents ;  
A mes sœurs et frères ;  
A ma grande famille ;  
A mes chers amis ;  
A tous que j'ai la chance  
De rencontrer ;*

*Et enfin je le dédie à toute la promotion  
Master automatique 2012/2013.*

*Besma*

# SOMMAIRE

# SOMMAIRE

Listes des figure.....	V
Introduction Générale.....	1

## CHAPITRE I

### *L'approche multimodèle*

I.1. Introduction.....	3
I.2. Origine de l'approche multimodèle.....	3
I.3. Principe de l'approche multimodèle.....	4
I.4. Différentes structures multimodèle.....	5
I.4.1. Structure couplée (Multimodèle de Takagi-Sugeno).....	5
I.4.2. Structure découplée (multimodèle découplé).....	6
I.4.3. Structure hiérarchisée.....	7
I.5. Obtention d'une structure multimodèle.....	8
I.5.1. Recherche des modèles locaux par identification.....	9
I.5.2. Recherche des modèles locaux par linéarisation.....	10
I.5.3. Approche par secteur non linéaire.....	12
I.6. Structures des commandes multimodèles.....	13
I.6.1. Commutation.....	13
I.6.2. Fusion.....	14
I.7. Conclusion.....	14

## CHAPITRE II

### *Modélisation dynamique du quadrirotor*

II.1. Introduction.....	15
II.2. Description générale du quadrirotor.....	15
II.3. Principe de fonctionnement.....	16

II.4. Les mouvements du quadrirotor.....	16
II.5. Le modèle dynamique du quadrirotor.....	18
II.5.1. Modèle dynamique de translation.....	20
II.5.2. Modèle dynamique de rotation.....	21
II.6. Linéarisation du modèle du quadrirotor .....	23
II.7. Construction du réseau des modèles locaux.....	25
II.8. Conclusion.....	26

### CHAPITRE III

#### *Le modèle flou de Takagi-Sugeno*

III.1. Introduction.....	28
III.2. Concepts et définitions.....	28
III.2.1. Sous ensembles flous.....	28
III.2.2. Variables linguistiques.....	28
III.3. Différents types de modèle flous.....	29
III.4. Le multimodèle flou de Takagi-Sugeno.....	30
III.4.1. Modèle flou continu (MFC).....	30
III.4.2. Modèle flous discrets (MFD).....	31
III.5. Conclusion.....	32

### CHAPITRE IV

#### *Stabilité des modèles Flous de Takagi-Sugeno*

IV.1. Introduction.....	33
IV.2. Analyse convexe et inégalités linéaires matricielles.....	33
IV.2.1. Analyse convexe.....	33
IV.2.2. Inégalités linéaires matricielles.....	34
IV.2.3. Problème d'optimisation convexe sous contrainte LMI.....	34

IV.2.3.1. Remarques.....	35
IV.2.3.2. Propriétés.....	35
IV.2.4. Les outils techniques pour la formulation LMI.....	35
IV.2.4.1. Lemme de Schur.....	36
IV.2.5. Régions LMI.....	36
IV.2.6. Placement de pôles par l'approche LMI.....	37
IV.3. Stabilité des modèles flous de Takagi-Sugeno.....	37
IV.3.1. Stabilité au sens de Lyapunov: méthode directe.....	38
IV.3.2. Fonctions de Lyapunov.....	38
IV.4. Conclusion.....	40

## CHAPITRE V

### *Synthèse des lois de commande*

V.1. Introduction.....	41
V.2. Stabilisation de l'attitude du quadrirotor.....	41
V.2.1. Modèle de l'attitude du quadrirotor.....	41
V.2.2. La commande PDC.....	42
V.2.2.1. Construction d'un régulateur PDC.....	43
V.2.2.2. Conditions de stabilité.....	43
V.2.2.3. Détermination des gains de la commande.....	44
V.2.2.4. Résultats de simulation.....	45
V.2.3. Commande PDC avec placement de pôles (PDCPP).....	46
V.2.3.1. Placement de pôles dans une région circulaire.....	47
V.2.3.2. Détermination des gains de la commande.....	48
V.2.3.3. Résultats de simulation.....	49
V.3. Etude de robustesse.....	51
V.3.1. Commande sans perturbation.....	51

V.3.1.1. Commande PDC.....	51
V.3.1.2. Commande PDCPP.....	52
V.3.2. Commande avec variation paramétrique.....	54
V.3.2.1. Commande PDC.....	54
V.3.2.2. Commande PDCPP.....	55
V.3.3. Commande avec perturbation ajoutée à l'entrée de commande.....	56
V.3.3.1. Commande PDC.....	56
V.3.3.2. Commande PDCPP.....	57
V. 4. Conclusion.....	59
Conclusion Générale.....	60
Bibliographie.....	62

## Table des figures

<b>Figure I.1</b> : L'approche multimodèle.....	4
<b>Figure I.2</b> : Architecture du multimodèle couplé.....	6
<b>Figure I.3</b> : Architecture du multimodèle découplé.....	7
<b>Figure I.4</b> : Architecture du multimodèle hiérarchique.....	7
<b>Figure I.5</b> : Structure d'un système multimodèle.....	9
<b>Figure I.6</b> : Structure d'une approche multimodèle.....	13
<b>Figure I.7</b> : Principe de commutation.....	13
<b>Figure I.8</b> : Principe de l'interpolation.....	14
<b>Figure II.1</b> : Le quadrirotor.....	15
<b>Figure II.2</b> : Les quatre mouvements du quadrirotor.....	17
<b>Figure II.3</b> : Le modèle dynamique de quadrirotor.....	18
<b>Figure II.4</b> : La géométrie du quadrirotor.....	19
<b>Figure III.1</b> : Architecture du multimodèle Takagi-Sugeno.....	31
<b>Figure IV.1</b> : Exemples de régions LMI.....	36
<b>Figure V.1</b> : Représentation du concept de compensation parallèle distribuée (PDC).....	43
<b>Figure V.2</b> : Attitude du quadrirotor : roulis, tangage et lacet (PDC).....	45
<b>Figure V.3</b> : commande de stabilisation $u_2, u_3, u_4$ (PDC).....	46
<b>Figure V.4</b> : Région circulaire ( $D$ ) pour le placement des pôles.....	47
<b>Figure V.5</b> : Attitude du quadrirotor : roulis, tangage et lacet (PDCPP).....	50
<b>Figure V.6</b> : Commandes de stabilisation $u_2, u_3, u_4$ (PDCPP).....	50
<b>Figure V.7</b> : Attitude du quadrirotor, (PDC, sans perturbation).....	52
<b>Figure V.8</b> : Commandes appliquées (PDC, sans perturbation).....	52
<b>Figure V.9</b> : Attitude du quadrirotor, (PDCPP, sans perturbation).....	53
<b>Figure V.10</b> : Commandes appliquées (PDCPP, sans perturbation).....	53

<b>Figure V.11</b> : Attitude du quadrirotor, (PDC, Variation paramétrique).....	54
<b>Figure V.12</b> : Commandes appliquées (PDC, Variation paramétrique).....	55
<b>Figure V.13</b> : Attitude du quadrirotor, (PDCPP, Variation paramétrique).....	55
<b>Figure V.14</b> : Commandes appliquées (PDCPP, Variation paramétrique).....	55
<b>Figure V.15</b> : Attitude du quadrirotor, (PDC, perturbation ajoutée à la commande).....	57
<b>Figure V.16</b> : Commandes appliquées (PDC, perturbation ajoutée à la commande).....	57
<b>Figure V.17</b> : Attitude du quadrirotor, (PDCPP, perturbation ajoutée à la commande).....	58
<b>Figure V.18</b> : Commandes appliquées (PDCPP, perturbation ajoutée à la commande).....	58

*INTRODUCTION*  
*GENERALE*

## *Introduction Générale*

Les automaticiens se trouvent toujours confrontés à des problèmes de commande plus en plus complexes vu la complexité des modèles représentant les systèmes non linéaires. En général, la synthèse de commande des systèmes repose sur plusieurs approches différentes. Les méthodes les plus fréquentes sont l'utilisation des commandes classiques, ainsi que l'application des différentes approches comme l'approche multimodèle.

Ces dernières années, l'approche multimodèle a attiré l'attention de la communauté des automaticiens et en particulier les problèmes de stabilité ont suscité un intérêt certain. Ce choix est motivé par le désir d'asseoir les problèmes d'analyse et de synthèse (de lois de commande et d'estimation d'état) sur des bases numériques. De telles possibilités sont devenues envisageables grâce à l'approche multimodèle et le développement d'outils numériques de résolution efficaces. L'avancée récente des outils informatiques et mathématiques basés sur les programmes d'optimisation convexe permet de résoudre une large classe de problèmes d'analyse et de commande multicritères.

Le but de ce travail est la synthèse des lois de commande pour une classe de systèmes non linéaires, spécifiquement le quadricoptère (un robot volant à quatre rotors sous actionner et difficile à commander), en utilisant l'approche multimodèles. Notre démarche est exclusivement basée sur la deuxième méthode de Lyapunov et sa formulation LMI (Linear Matrix Inequality), en utilisant des fonctions de Lyapunov quadratiques.

Dans ce sens, le travail est décomposé en cinq chapitres organisés comme suit :

Le premier chapitre, est dédié à l'approche multimodèle. Nous y présentons quelques principaux termes utilisés dans un contexte de modélisation multimodèle, ainsi que les différentes structures multimodèles, et les méthodes d'obtention d'une structure multimodèle.

Dans le deuxième chapitre le modèle mathématique du quadricoptère sera présenté, suivi par la linéarisation de ce modèle autour d'un point de fonctionnement arbitraire, et la construction d'un réseau de modèles locaux. On a fait la construction pour un multimodèle à états couplés, et pour l'obtention d'une structure multimodèle on procède par linéarisation.

Dans le troisième chapitre on a donné un ensemble des concepts et définitions sur les modèles flous et leurs différents types. Nous nous intéressons également à des modèles flous de Takagi Sugeno et le potentiel offert par ce type de modèles.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de la stabilité des multimodèles et des modèles flous de Takagi-Sugeno en utilisant la fonction de Lyapunov. Il présente également quelques notions sur l'analyse convexe et les inégalités matricielles linéaires.

Dans le dernier chapitre on a fait la synthèse des lois de commande par retour d'état en utilisant des fonctions de Lyapunov quadratiques. Dans le cadre de la stabilisation du quadrirotor, deux commandes seront proposées. La première, PDC (Parallel Disturbance Compensation), est basée sur un placement de pôles arbitraire dans la partie gauche du plan complexe. La deuxième, PDCPP (Parallel Disturbance Compensation with Poles Placement), utilise un placement de pôles régional où les pôles du système en boucle fermée sont placés dans un cercle. Une étude de robustesse sera réalisée sur les différentes lois de commande développées dans ce chapitre, pour vérifier la robustesse de l'approche proposée face aux variations paramétriques, et aux perturbations ajoutées à l'entrée de commande.

Enfin, on termine par une conclusion générale et les perspectives envisageables à ce travail.

# CHAPITRE I

## L'approche multimodèle

## *L'approche multimodèle*

### **I.1. Introduction :**

La modélisation d'un processus vise à établir les relations qui lient les variables caractéristiques de ce processus entre elles et à représenter d'une manière rigoureuse le comportement de ce processus dans un domaine de fonctionnement donné. En fonction des connaissances a priori sur le processus à étudier, on peut envisager différents types de modèles en vue de représenter son comportement. Dans notre travail, on se limitera à l'étude de la modélisation par l'approche multimodèle.

L'idée de l'approche multimodèle est basée sur la décomposition du comportement dynamique du système en un nombre de zones de fonctionnement, chaque zone étant caractérisée par un sous-modèle. En fonction de la zone où le système évolue, la sortie de chaque sous-modèle contribue plus ou moins à l'approximation du comportement global du système non linéaire. La contribution de chaque sous-modèle est définie par une fonction de pondération.

### **I.2. Origine de l'approche multimodèle:**

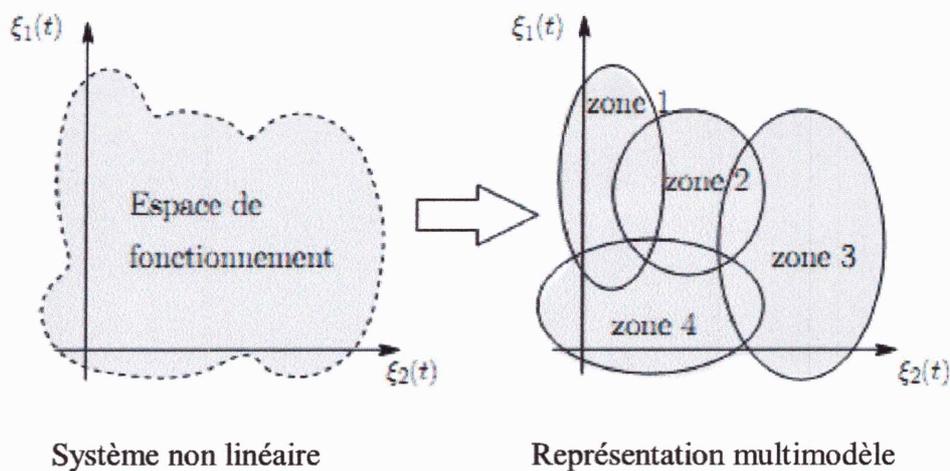
Un modèle devrait représenter le mieux possible le fonctionnement dynamique d'un processus. Les lois dynamiques définissant un tel système doivent être les plus complètes possibles et représentent tous les modes de fonctionnement et toutes les interactions entre les différentes grandeurs. Afin de pallier la complexité de cette tâche, la tendance a été d'utiliser des modèles Linéaires Invariants dans le Temps (LTI). Cette approximation permet ainsi d'étudier un système ayant un comportement non linéaire en le représentant par un seul modèle linéaire (linéarisé tangent autour d'un point d'équilibre) [1].

L'inconvénient d'une telle approche est son aspect uniquement local, le modèle linéaire n'est qu'une description locale du comportement du système. Une approche globale basée sur de multiples modèles LTI (linéaires ou affines) autour de différents points de fonctionnement a été élaborée ces dernières années [12]. L'interpolation de ces modèles locaux à l'aide de fonctions d'activation normalisées permet de modéliser le système global non linéaire. Cette approche, dite multimodèles, s'inspire des modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S). En effet, un multimodèle réalise une partition floue de l'espace caractéristique  $Z$  dit aussi espace

de décision (c'est l'espace caractérisé par l'ensemble des variables caractéristiques (de décision)  $z(t)$  qui peuvent être des variables d'état mesurables et/ou la commande).

### I.3. Principe de l'approche multimodèle :

Le principe de l'approche multimodèle repose sur la réduction de la complexité du système par le fractionnement de son espace de fonctionnement en un nombre fini des zones de fonctionnement (*Figure I.1*).



*Figure I.1* : L'approche multimodèle.

Un sous-modèle de structure simple, souvent linéaire, peut servir à la description du comportement dynamique du système dans une zone spécifique. Le comportement global du système est ensuite représenté en considérant judicieusement la contribution relative de chaque sous-modèle au moyen d'une fonction de pondération associée à chaque zone de fonctionnement. Un multimodèle peut être alors considéré comme un ensemble de sous-modèles agrégés au moyen d'un mécanisme d'interpolation.

Dans ce contexte de modélisation, deux grandes familles de multimodèles sont recensées selon que les sous-modèles sont homogènes, c'est-à-dire qu'ils partagent le même espace d'état (multimodèle de Takagi-Sugeno) ou hétérogènes, lors que leur structure et leur espace d'état diffèrent (multimodèle découplé). Ces deux structures font appel à des mécanismes différents d'agrégation des sous-modèles.

#### I.4. Différentes structures multimodèle :

On peut énumérer différentes formes de multimodèle selon que l'on fait la segmentation sur l'entrée ou sur la sortie (c.-à-d. sur les variables d'état mesurables) et aussi selon la nature du couplage entre les modèles locaux associés aux zones de fonctionnement. Cependant, on peut noter trois structure de multimodèles [2]:

- ❖ Structure couplée.
- ❖ Structure découplée.
- ❖ Structure hiérarchisée.

##### I.4.1. Structure couplée (Multimodèle de Takagi-Sugeno) :

La structure du multimodèle de Takagi-Sugeno (T.S) ou à état couplés, est certainement la structure la plus couramment utilisée dans le cadre de l'approche multimodèle. Le multimodèle de T.S est connu sous différentes appellation : réseaux de modèle locaux à mélange de paramètres, multimodèle à modèles locaux couplés ou à état couplé ou encore multimodèle à état unique, etc.

Cette structure est obtenue par interpolation des modèles locaux linéaires :

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i x_m(t) + B_i u_m(t) + E_i) \\ y_m(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(C_i x_m(t) + D_i u_m(t) + N_i) \end{cases} \quad (I.1)$$

Où  $\mu_i(\xi(t))$ ,  $i \in I_r$  sont les fonctions d'activation et  $\xi(t)$  est le vecteur des variables de décision dépendant des variables d'état mesurables et éventuellement de la commande  $u(t)$ .

De nombreuses techniques de modélisation des systèmes non linéaires partagent la même structure (**Figure I.2**). Le choix de la structure des sous-modèles et des fonctions de pondération est à l'origine de leurs différences. Il est possible de citer différents modèles basés sur cette structure :

- Modèles affines par morceaux.
- Réseaux de fonctions à base radiale.
- Modèles flous de Takagi-Sugeno.
- Modèles linéaires à paramètres variant.

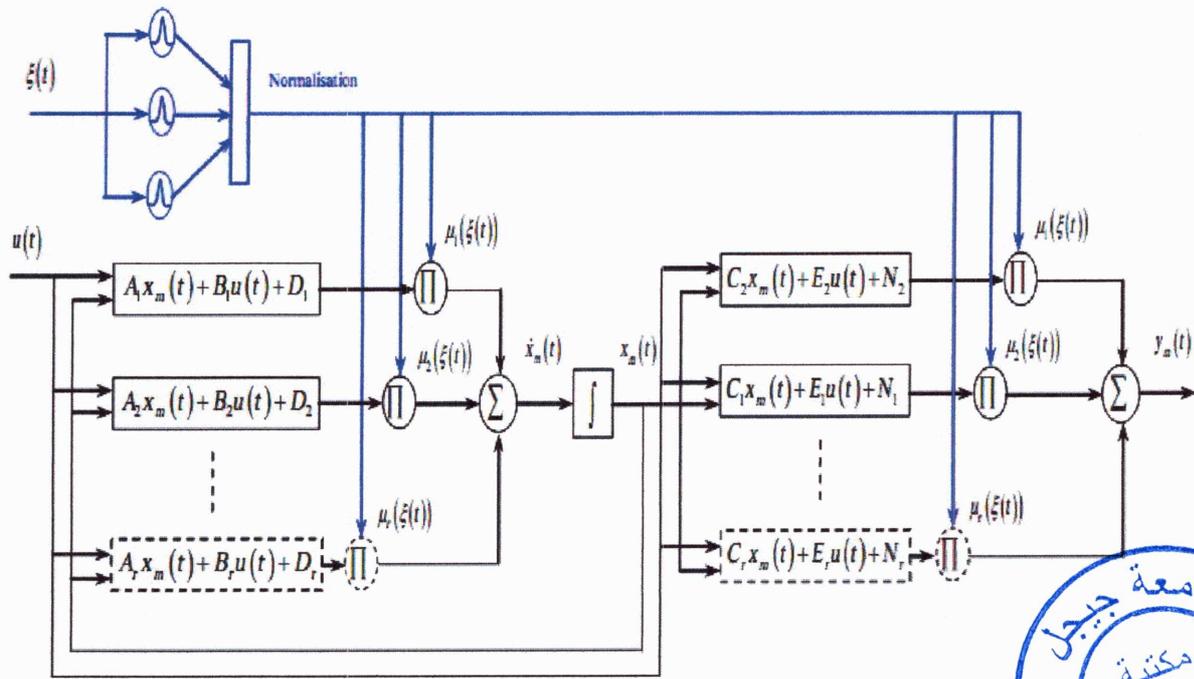


Figure 1.2 : Architecture du multimodèle couplé.



**I.4.2. Structure découplée (multimodèle découplé) :**

Une autre forme de multimodèle, résulte de l'agrégation des modèles locaux décrits d'une façon découplée [1]. La différence entre cette structure et celle présentée précédemment réside dans le fait que chaque modèle local est indépendant de tous les autres :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) + E_i \\ y_i(t) = C_i x_i(t) + D_i u(t) + N_i \end{cases} \quad (I.2)$$

Dans cette structure, la notion d'état local correspondant à un domaine de fonctionnement apparaît beaucoup clairement. Le multimodèle (modèle global) est ainsi donné par:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) + E_i \\ y_m(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(C_i x_i(t) + D_i u(t) + N_i) \end{cases} \quad (I.3)$$

Rappelons que les variables locales  $x_i(t)$  n'ont pas forcément un sens physique [2]. Les matrices  $A_i$ ,  $B_i$  et  $D_i$  ainsi que les fonctions d'activation  $\mu_i(\xi(t))$  sont calculées de la même façon que précédemment (structure couplée). Cette structure peut être vue comme la connexion parallèle de  $M$  modèles affines pondérés par leurs poids respectifs.

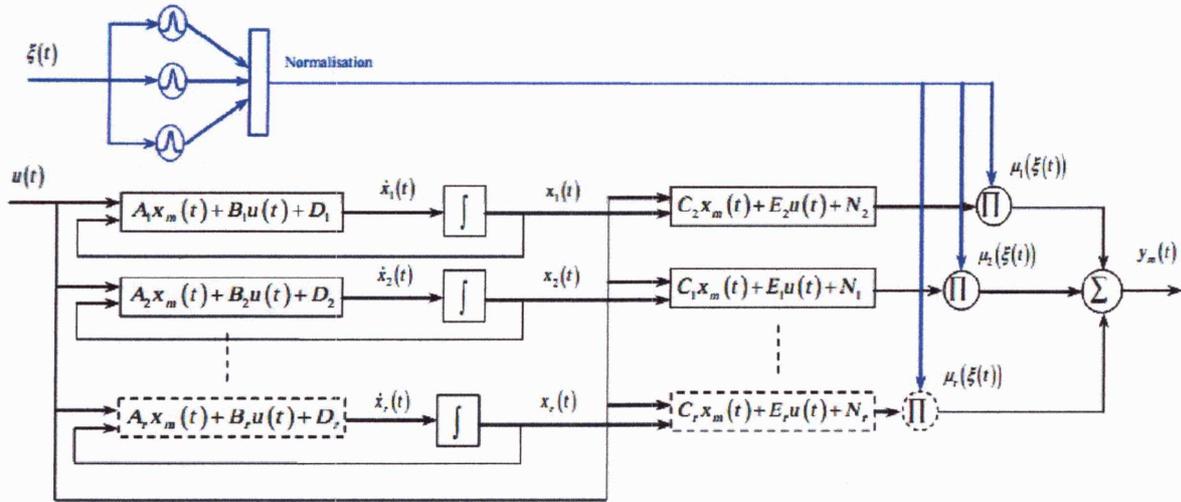


Figure I.3 : Architecture du multimodèle découplé.

I.4.3. Structure hiérarchisée :

Bien que l'approche multimodèle ait connu un grand succès dans beaucoup de domaines (commande, diagnostic, ...), son application est limitée aux systèmes ayant peu de variables (dimension réduite). Le nombre de modèles locaux augmente d'une façon exponentielle avec l'augmentation du nombre de variables. Par exemple, un multimodèle à sortie unique avec  $n$  variables et  $m$  fonctions d'activation définies pour chaque variable est composé de  $m^n$  modèle local. Pour cette raison un modèle hiérarchique à été proposé afin de réduire le nombre de modèles locaux [19]. La Figure I.4 montre un exemple typique d'un multimodèle hiérarchique qui comporte  $n$  entrées et  $n-1$  sorties, dans cette structure, les modèles locaux ont deux entrées chacun, le modèle global est alors composé de  $n$  modèles locaux.

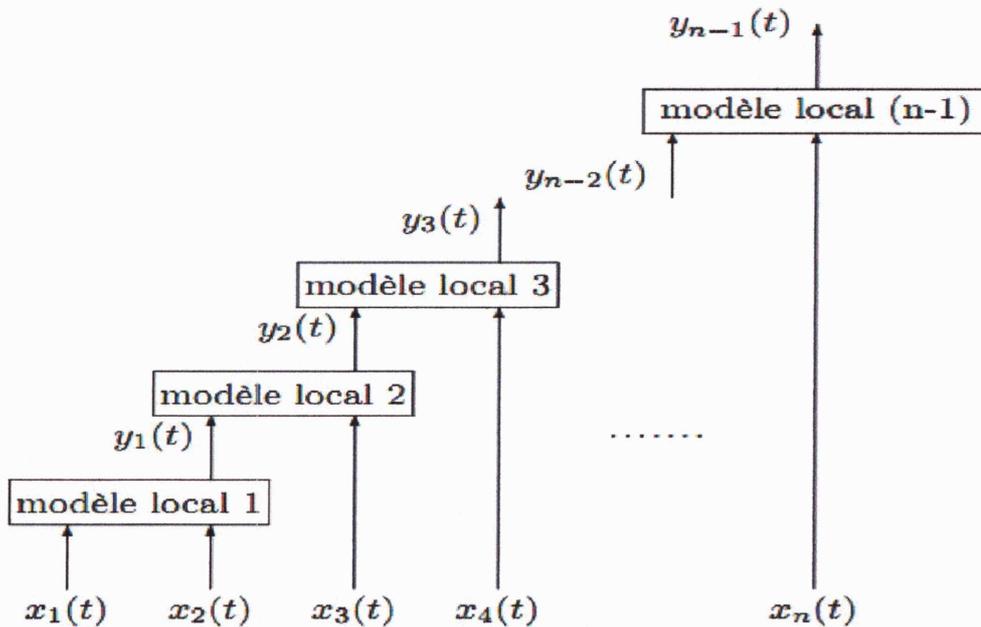


Figure I.4 : Architecture du multimodèle hiérarchique.

### I.5. Obtention d'une structure multimodèle :

Selon l'information disponible sur le système étudié, généralement trois différentes méthodes peuvent être utilisées pour l'obtention d'une base multimodèle. Si l'on ne dispose que des mesures des entrées et des sorties du système on procède par identification en cherchant ou en imposant la structure du multimodèle. Si en revanche, on dispose d'un modèle non linéaire explicite que l'on souhaite simplifier ou rendre plus manipulable on pourra procéder par transformation polytopique convexe ou par linéarisation autour du différent point de fonctionnement [2].

Considérant un système statique non linéaire (I.4), pour lequel nous cherchons à déterminer une représentation multimodèle permettant de décrire son comportement.

$$y(t) = F(x(t)) \quad (\text{I.4})$$

Supposons qu'on dispose d'un ensemble de  $M$  modèles locaux  $f_i(x(t))$ , lesquels décrivent le comportement du système dans différentes zones de fonctionnement. Ces modèles peuvent être construits par exemple à partir des connaissances physiques sur le fonctionnement du système dans ces zones. La validité locale de chaque modèle  $f_i$  est indiquée par une fonction de validité  $w_i(x(t))$  pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Le modèle global s'obtient de la manière suivant :

$$y_m(t) = \frac{\sum_{i=1}^N w_i(x(t)) f_i(x(t))}{\sum_{j=1}^N w_j(x(t))} \quad (\text{I.5})$$

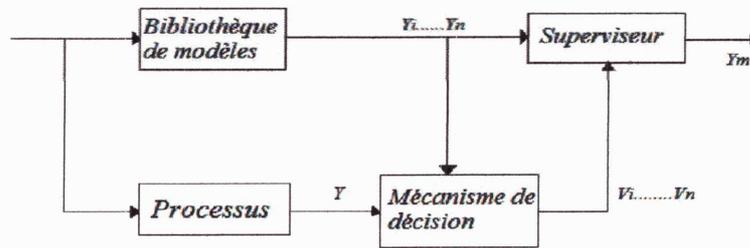
Posons :

$$v_i(x(t)) = \frac{w_i(x(t))}{\sum_{j=1}^N w_j(x(t))} \quad (\text{I.6})$$

En combinant les équations (I.5) et (I.6), on obtient l'expression générale d'une structure multimodèle [3]:

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^N v_i(x(t)) f_i(x(t)) \quad (\text{I.7})$$

Pour les systèmes complexes, les approches multimodèles proposent des schémas ayant une structure générale bien déterminée (*Figure I.5*).



**Figure I.5 :** Structure d'un système multimodèle.

La structure se compose en général d'une bibliothèque de modèles, d'un mécanisme de décision et d'un superviseur.

La bibliothèque se compose de modèles  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , qui peuvent être de même ordre ou d'ordre plus faible que le modèle non linéaire, de même structure ou de structures différentes. Chaque modèle, représente le système dans des circonstances bien déterminées. De ce fait, on fait appel au mécanisme de décision là où on aura le calcul des validités pour chaque modèle. Enfin, le superviseur a pour rôle de fusionner ces informations et choisir la stratégie adéquate (commutation ou interpolation).

Chaque modèle ne peut être valide que dans un mode de fonctionnement particulier du système. Par conséquent, dans le cas idéal, les modèles sont complémentaires, c'est-à-dire que chaque modèle ne représente qu'une zone particulière de l'espace de fonctionnement du système considéré.

### I.5.1. Recherche des modèles locaux par identification :

Les modèles de type « boîte noire » sont identifiés à partir des données sur les entrées et sur les sorties autour de différents points de fonctionnement. Indépendamment du type de modèle choisi, cette identification requiert la recherche d'une structure optimale, l'estimation des paramètres et la validation du modèle final.

En représentant un système non linéaire sous forme multimodèle, le problème de l'identification des systèmes non linéaires est réduit à l'identification des sous-modèles définis par des modèles locaux linéaires. Les méthodes d'estimation basées sur les moindres carrés sont alors utilisées pour identifier les paramètres des modèles locaux et ceux des fonctions d'activation. Cependant, cette méthode exige la connaissance des données entrées-sorties du système non linéaire autour de différents points de fonctionnement afin de pouvoir caractériser les modèles locaux [1].

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (\text{I.8})$$

Où  $\xi(t)$  est le vecteur des variables de décision et  $\mu_i(\cdot)$ ,  $i \in I_r$  sont les fonctions d'activation. Elles déterminent le degré d'activation de l' $i^{\text{ème}}$  modèle local associé.

Généralement la construction d'un multimodèle à partir des entrées/sorties exige :

- La définition d'une structure de multimodèles.
- La définition des fonctions d'appartenance.
- L'estimation des paramètres des fonctions d'activation et des modèles locaux.
- L'évaluation des performances du multimodèle.

Pour l'estimation des paramètres, plusieurs méthodes d'optimisation numérique peuvent être utilisées, selon les informations disponibles a priori. Elles sont généralement basées sur la minimisation d'une fonction de l'écart entre la sortie estimée du multimodèle  $y_m(t)$  et la sortie mesurée du système  $y(t)$ .

Le critère le plus utilisé est le critère qui représente l'écart quadratique entre deux sorties indiquées.

$$J(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{y}_m(t) - y(t))^2 \quad (\text{I.9})$$

Où  $(N)$  est l'horizon d'observation et  $(\theta)$  est le vecteur de paramètres des modèles locaux et ceux des fonctions d'activation.

### I.5.2. Recherche des modèles locaux par linéarisation :

Dans ce cas, on dispose de la forme analytique du modèle non linéaire du processus physique qu'on linéarise autour de point de fonctionnement judicieusement choisis [5]. Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) \\ y(t) = G(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

Où  $[F, G] \in \mathbb{R}^{2n}$  sont des fonctions non linéaires continues,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée. Le système (I.10) peut être défini par une représentation multimodèle faisant intervenir un nombre de modèles linéaire locaux. Ces

derniers sont obtenus par la linéarisation du modèle non linéaire autour de différent point de fonctionnement.

On considère un point de fonctionnement  $(x_i, u_i)$ ,  $i=1, \dots, N$ . Un modèle  $M_i$  peut définir une approximation de la fonction non linéaire par un plan tangent au point  $(x_i, u_i)$ , en utilisant le développement de Taylor du premier ordre du système (I.10) on obtient:

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = A_i(x_m(t) - x_i) + B_i(u_m(t) - u_i) + F(x_i, u_i) \\ y_m(t) = C_i(x_m(t) - x_i) + D_i(u_m(t) - u_i) + G(x_i, u_i) \end{cases} \quad (\text{I.11})$$

Que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = A_i x_m(t) + B_i u_m(t) + E_i \\ y_m(t) = C_i x_m(t) + D_i u_m(t) + N_i \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_i &= \left. \frac{\partial F(x,u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, B_i = \left. \frac{\partial F(x,u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, E_i = F(x_i, u_i) - A_i x_i - B_i u_i \\ C_i &= \left. \frac{\partial G(x,u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, D_i = \left. \frac{\partial G(x,u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, N_i = G(x_i, u_i) - C_i x_i - D_i u_i \end{aligned}$$

En supposant que les modèles locaux (dit aussi sous-modèles) sont issus d'une linéarisation autour de  $r$  points de fonctionnement  $(x_i, u_i)$ , la formulation multimodèle du système non linéaire est comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i x_m(t) + B_i u_m(t) + E_i) \\ y_m(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(C_i x_m(t) + D_i u_m(t) + N_i) \end{cases} \quad (\text{I.13})$$

Où  $\mu_i(\xi(t))$ ,  $i \in I_r$ , sont les fonctions d'activations et  $\xi(t)$  est le vecteur des variables de décision dépendant des variables d'état mesurables et éventuellement de la commande  $u(t)$ . Notons que dans ce cas, le nombre des modèles locaux  $r$  dépend de la précision de modélisation souhaitée, de la complexité du système non linéaire et de la structure des fonctions d'activation [1].

### I.5.3. Approche par secteur non linéaire :

Nous proposons d'étudier cette transformation dans le cas général d'un système continu non linéaire:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + B(x(t))u(t) \\ y(t) = g(x(t)) + D(x(t))u(t) \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

Avec  $y(t)$  la sortie du système.

La méthode est basée sur une transformation polytopique convexe de fonctions scalaires origine du non linéarité [1]. L'avantage d'une telle méthode est de ne pas engendrer d'erreur d'approximation et de réduire le nombre des modèles par rapport à la méthode de linéarisation.

La méthode présentée est basée uniquement sur la bornitude des termes non linéaires. En effet, soit  $h(x)$  une fonction bornée de  $[-a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  pour tout  $x(t) \in [-a, b]$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Alors, il existe deux fonctions :

$$\begin{aligned} F_i(\cdot) : [-a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x(t) &\mapsto F_i(x(t)) \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

Avec :  $F_1(x(t)) + F_2(x(t)) = 1, \forall (\alpha, \beta)$  tels que :

$$h(x(t)) = \alpha F_1(x(t)) + \beta F_2(x(t)) \quad (\text{I.16})$$

Bien évidemment, cette décomposition n'est pas unique. Une décomposition évidente de  $h(x(t))$  est de considérer sur  $[-a, b]$  :

$$\beta \leq h(x(t)) \leq \alpha \quad (\text{I.17})$$

Avec :  $\beta = \min_{x(t) \in [-a, b]} h(x(t)), \alpha = \max_{x(t) \in [-a, b]} h(x(t))$ .

$$\text{Et : } F_1(x(t)) = \frac{h(x(t)) - \beta}{\alpha - \beta}, F_2(x(t)) = \frac{\alpha - h(x(t))}{\alpha - \beta}.$$

Rappelons que dans le contexte de la synthèse de régulateurs par analyse convexe, le nombre de contraintes LMI (Linear Matrix Inequalities) dépend du nombre de modèles locaux [20]. La réduction de ce nombre, dépendant de la méthode de transformation, est synonyme de moins de conservatisme. Ces méthodes s'appliquent également au cas continu qu'au cas discret.

### I.6. Structures des commandes multimodèles :

L'adoption d'une approche multimodèle pour la modélisation des processus mène naturellement à la conception de commande multimodèle. La commande globale est déduite à partir des commandes partielles  $u_i$ ,  $i=1, \dots, n$  relatives respectivement au modèle  $M_i$  tout en tenant compte des degrés de pertinence de ces derniers [7]. Ceci se traduit par les considérations de coefficient de pondérations appelées validités. Si l'on dispose du vecteur de validité  $v_i$  de chaque modèle de la base, selon l'expression des validités deux technique sont envisageables à savoir la commutation ou l'interpolation.

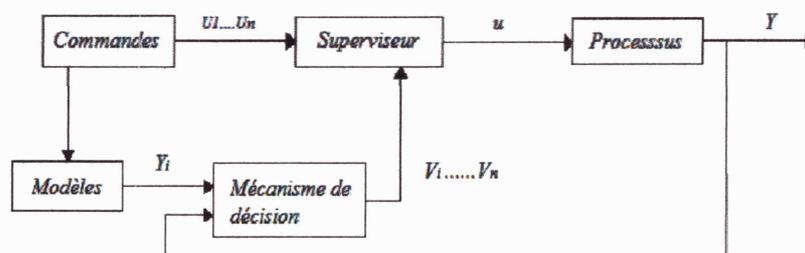


Figure I.6 : Structure d'une approche multimodèle.

#### I.6.1. Commutation :

La stratégie de commande par commutation consiste à concevoir pour chaque modèle de la bibliothèque une commande  $u_i$ . La commande globale sera égale à chaque instant à l'une des commandes en particulier la commande du modèle qui représente mieux le système [7].

Dans ce cas, les validités sont de type binaire. La validité du modèle correspondant vaut 1 et les autres sont nulles.

$$u(t) = u_i(t), v_i(t) = 1 \quad (\text{I.18})$$

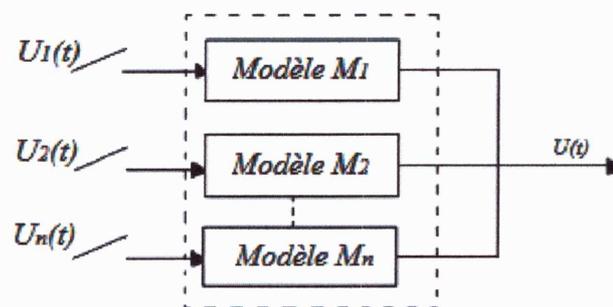


Figure I.7 : Principe de commutation.

Cette méthode est facile à manipuler puisqu'elle utilise des commandes simples linéaires. Par contre, elle présente aussi quelques défaillances. Le modèle global est représenté chaque instant par un modèle local qui ne peut en aucun cas être identique au système.

De plus, la commutation implique une discontinuité qui agit négativement sur la stabilité du système.

### I.6.2. Interpolation :

Contrairement à la commutation, le principe de l'interpolation repose sur la participation des différents modèles locaux à la représentation du système donnant une commande globale lisse égale à la somme des commandes partielles chacune pondérée par la validité correspondante [7].

$$u(t) = \sum_{i=1}^N v_i(t)u_i(t) \quad (\text{I.19})$$

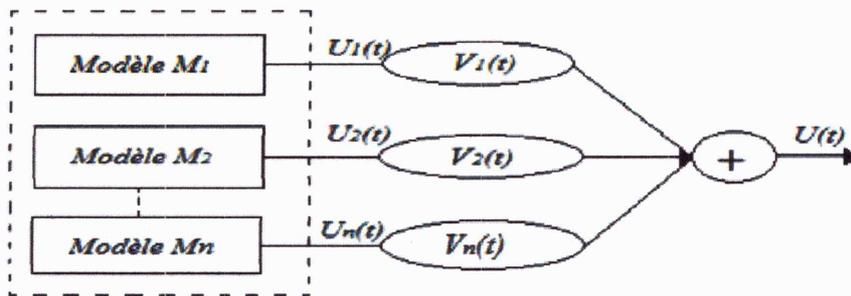


Figure I.8 : Principe de l'interpolation.

### I.7. Conclusion :

La représentation des systèmes complexes par un modèle unique conduit à une complexité croissante de ce dernier, ce problème est d'autant plus marqué pour les systèmes non linéaires. Le principe de remplacer le modèle unique complexe par une base de modèles simples, adopté par l'approche multimodèle, permet d'assurer une bonne représentation des processus tout en évitant les difficultés rencontrées avec les modèles non linéaires lors de la phase d'analyse et de synthèse.

Après la détermination de la base de modèles, on doit choisir le mode adéquat, commutation ou interpolation pour les systèmes de commande multimodèle. Contrairement à la commutation, l'interpolation présente une commande plus lisse se qui améliore la stabilité du système [7].

## *Modélisation dynamique du quadrirotor*

### **II.1. Introduction :**

L'apparition des premiers drones, véhicules volants sans pilote humain à bord date de la fin de la seconde guerre mondiale. Tout d'abord principalement utilisés comme cibles militaires pour l'entraînement au combat, ils furent ensuite employés pour des missions de reconnaissance [8]. Leur utilisation pour des missions de surveillance s'est ensuite répandue lors de nombreux conflits. Depuis, de nombreux drones ont été développés, et leur usage à des fins civiles a également débuté, le quadrirotor est un parmi ces engins volant.

### **II.2. Description générale du quadrirotor :**

Le quadrirotor est un engin volant doté de quatre rotors placés aux extrémités d'une croix. Ce sont ces quatre rotors qui fournissent la force verticale (portance) qui permet à l'appareil de élever. Afin d'éviter un mouvement de lacet (l'appareil tourne sur lui-même), il est nécessaire que deux rotors tournent dans un sens et que les deux autres tournent dans l'autre sens [9]. De plus, afin de diriger l'appareil, les rotors tournant dans le même sens doivent être placés l'un en face de l'autre.

Il existe quatre mouvements possibles pour un quadrirotor : la puissance, le lacet, le tangage et le roulis. Le mouvement de puissance correspond à la montée ou à la descente de l'appareil. Pour faire s'élever le quadrirotor, il suffit d'augmenter la vitesse des quatre moteurs et pour le faire redescendre, il faut réduire cette dernière.



*Figure II.1* : Le quadrirotor.

## *Modélisation dynamique du quadrirotor*

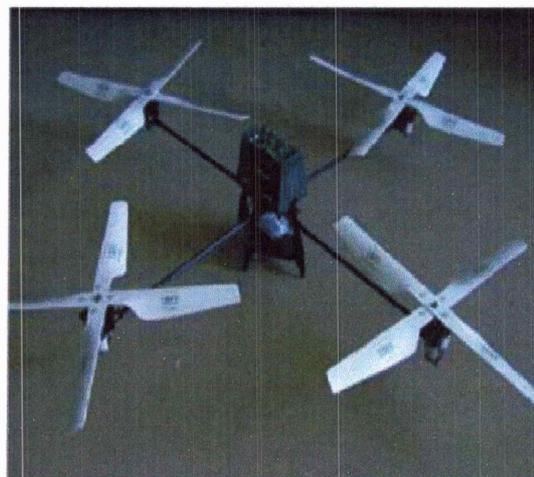
### **II.1. Introduction :**

L'apparition des premiers drones, véhicules volants sans pilote humain à bord date de la fin de la seconde guerre mondiale. Tout d'abord principalement utilisés comme cibles militaires pour l'entraînement au combat, ils furent ensuite employés pour des missions de reconnaissance [8]. Leur utilisation pour des missions de surveillance s'est ensuite répandue lors de nombreux conflits. Depuis, de nombreux drones ont été développés, et leur usage à des fins civiles a également débuté, le quadrirotor est un parmi ces engins volant.

### **II.2. Description générale du quadrirotor :**

Le quadrirotor est un engin volant doté de quatre rotors placés aux extrémités d'une croix. Ce sont ces quatre rotors qui fournissent la force verticale (portance) qui permet à l'appareil de élever. Afin d'éviter un mouvement de lacet (l'appareil tourne sur lui-même), il est nécessaire que deux rotors tournent dans un sens et que les deux autres tournent dans l'autre sens [9]. De plus, afin de diriger l'appareil, les rotors tournant dans le même sens doivent être placés l'un en face de l'autre.

Il existe quatre mouvements possibles pour un quadrirotor : la puissance, le lacet, le tangage et le roulis. Le mouvement de puissance correspond à la montée ou à la descente de l'appareil. Pour faire s'élever le quadrirotor, il suffit d'augmenter la vitesse des quatre moteurs et pour le faire redescendre, il faut réduire cette dernière.



**Figure II.1 :** Le quadrirotor.

### II.3. Principe de fonctionnement :

Avant de penser pouvoir le piloter, il faut arriver à le stabiliser. Pour cela, les quatre moteurs sont sollicités de la manière suivante :

**Axe de roulis:** en agissant sur les moteurs gauche et droit, on peut maintenir l'horizontalité. Par exemple, si le quadrirotor penche à gauche, on augmente la vitesse du moteur gauche tout en diminuant le droit.

**Axe de tangage:** les moteurs avant et arrière permettent de garder une assiette stable sur cet axe. Si le quadrirotor est orienté vers l'arrière, il faut donner plus de vitesse au moteur arrière et baisser celle du moteur avant.

Ensuite, pour des soucis de commodité, il doit être stabilisé sur son axe de lacet. On réalise cela en agissant sur les moteurs par paires : on augmente la vitesse de rotation de deux moteurs face à face (avant et arrière) et on diminue la vitesse des deux autres (gauche et droite).

Pour finir, l'altitude doit être stable et cela est facilement réalisé en jouant sur la vitesse de rotation de l'ensemble des moteurs. On diminue la vitesse des quatre moteurs pour faire descendre le quadrirotor tandis qu'on l'augmente pour le faire monter.

### II.4. Les mouvements du quadrirotor :

Les mouvements de base de quadrirotor sont réalisés en variant la vitesse de chaque rotor changeant de ce fait la poussée produite. Le quadrirotor incline vers la direction du rotor plus lent, qui tient compte alors de la translation le long de cet axe. Par conséquent, comme à un hélicoptère classique, les mouvements sont couplés, signifiant que le quadrirotor ne peut pas réaliser la translation sans roulement ou tangage.

En réalité, ceci signifie qu'un changement de la vitesse d'un rotor se traduit dans un mouvement en au moins trois degrés de liberté. En générale, On distingue quatre mouvements possibles pour le vol d'un quadrirotor :

- **Le mouvement vertical (montée et descente) :** obtenu par la variation de la vitesse de rotation des moteurs, si la force de portance est supérieure au poids du quadrirotor le mouvement est de montée, est si la force de portance est inférieure au poids du quadrirotor le mouvement est de descente.

- **Le mouvement de roulis :** augmentant la vitesse de rotor 2, le quadrirotor incline vers le rotor plus lent (rotor 4). Ce mouvement est couplé avec un mouvement de translation selon l'axe  $y$ .
- **Le mouvement de tangage :** dans ce cas, nous voulons appliquer un couple autour de l'axe  $y$ , c'est-à-dire en appliquant une différence de poussée entre le rotor 1 et le rotor 3. Ce mouvement est couplé avec un mouvement de translation selon l'axe  $x$ .
- **Le mouvement de lacet :** l'équilibre entre les rotors qui tourne dans le sens des aiguilles d'une montre et les rotors qui tourne dans le sens inverse est perturbé ayant pour résultat un mouvement de rotation horizontal.

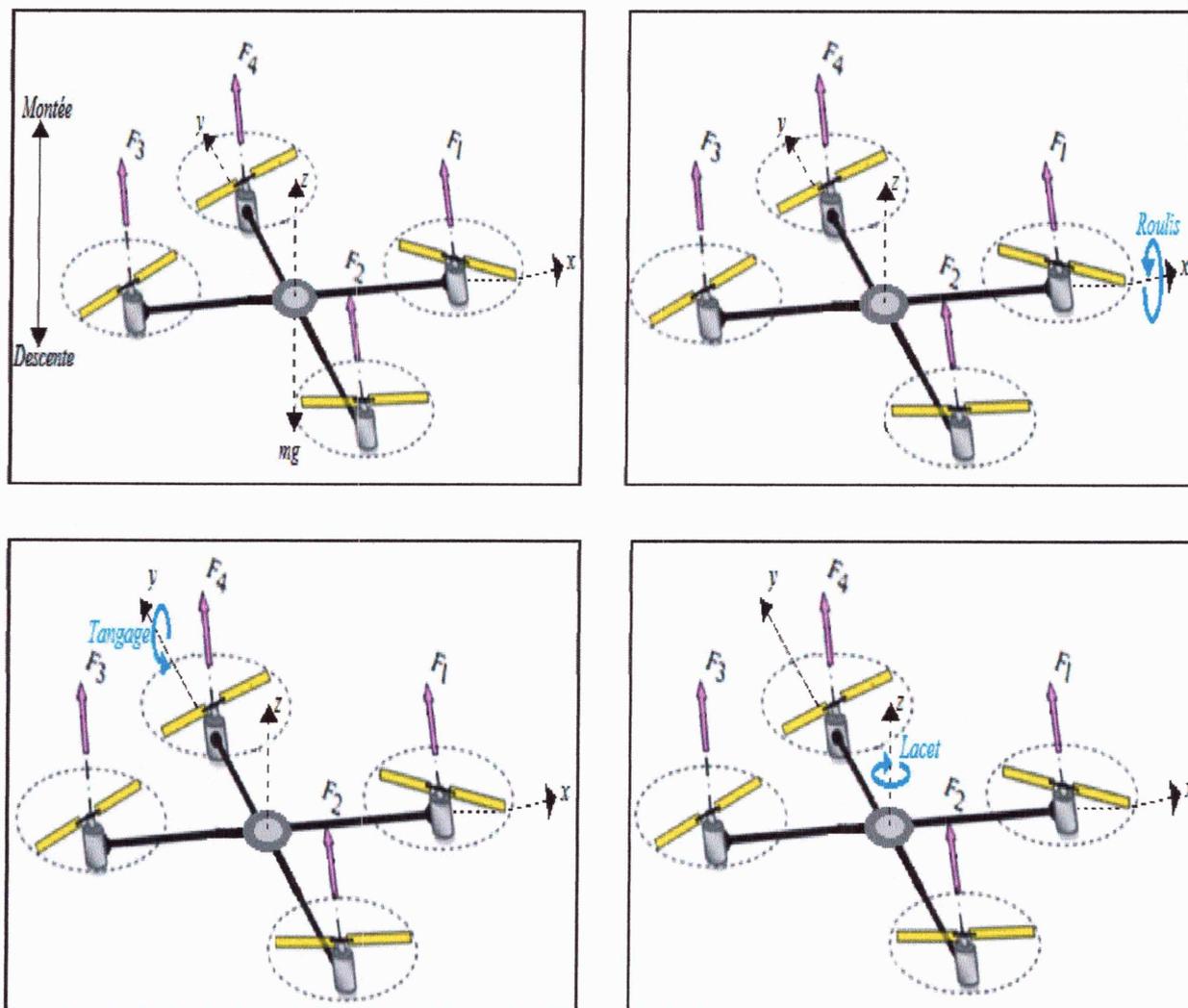
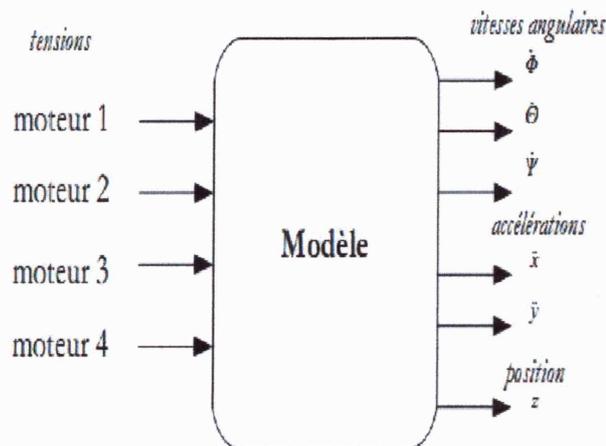


Figure II.2 : Les quatre mouvements du quadrirotor.

### II.5. Le modèle dynamique du quadrirotor :

Le modèle dynamique du quadrirotor peut être vu comme un système où les évolutions spatiales du quadrirotor sont les sorties et la tension de chacun de ses moteurs sont les entrées.



*Figure II.3* : Le modèle dynamique de quadrirotor.

En réalité, un grand nombre d'effets physiques ont lieu sur les robots volant. Malgré tout, il est nécessaire dans un premier temps d'effectuer des hypothèses afin d'éliminer ceux de plus faible importance:

- La structure du quadrirotor est supposée rigide et symétrique (c.-à-d. sa matrice d'inertie est diagonale).
- Le centre de masse et l'origine du repère lié à la structure coïncident.
- Les hélices sont supposées rigides.
- Les forces de portance et de traînée sont proportionnelles aux carrés de la vitesse de rotation des rotors.

Pour évoluer le modèle mathématique du quadrirotor on utilise deux repères, un est fixe lié à la terre  $R^b$  et un autre mobile  $R^m$  fixé au centre de masse de quadrirotor.

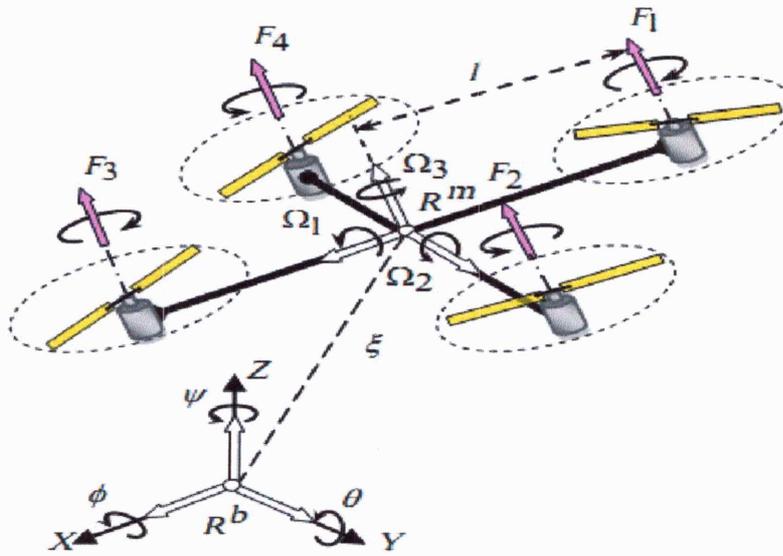


Figure II.4 : La géométrie du quadrirotor.

La dynamique est décrite dans l'espace par six degrés de liberté relatifs au référentiel fixe lié au sol  $R^b$  et se partage entre les positions  $(x, y, z)$  et l'attitude est décrite généralement par les angles d'Euler  $(\phi, \theta, \psi)$  pour former le vecteur des coordonnées généralisées  $q = (\phi, \theta, \psi, x, y, z)$ . La position absolue du centre de gravité du quadrirotor est représentée par le vecteur  $\xi = [x \ y \ z]^T$ , et son attitude est donnée par les angles d'Euler  $\alpha = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ . Ces angles sont respectivement l'angle de roulis  $(-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2})$ , l'angle de tangage  $(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ , et l'angle de lacet  $(-\pi \leq \psi \leq \pi)$ [9]. La matrice de transformation entre le repère mobile  $R^m$  et le repère fixe  $R^b$  est donnée par :

$$R = Rot_z(\psi) \times Rot_y(\theta) \times Rot_x(\phi) \tag{II.1}$$

$$R = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{bmatrix} \tag{II.2}$$

$$R = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & s\psi s\theta c\psi - s\psi c\phi & c\psi s\theta c\psi + s\psi s\phi \\ s\psi c\theta & s\psi s\theta s\psi + c\psi c\theta & c\psi s\theta s\psi - s\psi c\phi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix} \tag{II.3}$$

Avec :  $c(.) = \cos(.)$ ,  $s(.) = \sin(.)$

### II.5.1. Modèle dynamique de translation :

La stabilisation du quadrirotor peut être définie comme une réalisation d'équilibre de forces et de couples. Un vol stationnaire est réalisé lorsque la somme des forces agissantes sur tous les degrés de liberté est nulle, la moindre force produit alors une accélération linéaire du système [10].

Le mouvement du quadrirotor est contrôlé par trois sources de forces à savoir : la force de la gravité, l'inertie et la traînée d'air. La force de gravité oppose le mouvement vertical tandis que la traînée de d'air crée un amortissement sur le mouvement linéaire et la rotation. En appliquant la loi de Newton sur le mouvement de translation nous obtenons l'équation suivante :

$$F_f + F_{dt} + F_G = m\ddot{\xi} \quad (\text{II.4})$$

Avec  $m$  la masse du quadrirotor, et  $F_f, F_{dt}$  et  $F_G$  sont respectivement les forces générées par les moteurs, la force de traînée, et la force de gravité, tel que :

$$F_{dt} = K_{dt} \dot{\xi} \quad (\text{II.5})$$

$$F_G = mG \quad (\text{II.6})$$

Avec  $K_{dt} = \text{diag}(K_{dtx}, K_{dty}, K_{dtz})$  est la matrice des coefficients de traînée en translation, et  $G = [0, 0, g]^T$  est le vecteur de gravité. Les forces  $F_f = [F_x \ F_y \ F_z]_{/R^b}$  générées par les moteurs du quadrirotor décrit dans le repère fixe lié au sol  $R^b$ , sont données par l'équation suivante :

$$F_f = R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 F_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ c\phi c\theta \end{bmatrix} \sum_{i=1}^4 F_i \quad (\text{II.7})$$

Dans cette équation,  $F_i$  est la force de portance générée par le rotor  $i$ , proportionnelle au carré de la vitesse angulaire  $w_i$  tel que :

$$F_i = bw_i^2 \quad (\text{II.8})$$

Où  $b$  est le coefficient de portance, dépend de la densité de l'air  $\rho$ , de la constante de portance  $C_z$ , la surface des pales  $S$ , et des caractéristiques des pales (forme, nombre, diamètre, ...), il est donné par :

$$b = \frac{1}{2} \rho S C_z \quad (\text{II.9})$$

En utilisant l'équation (II.5), l'équation dynamique de translation devient :

$$m\ddot{\xi} = F_f - K_{at} - mG \quad (\text{II.10})$$

### II.5.2. Modèle dynamique de rotation :

Les principaux effets physiques agissants sur le quadrirotor sont : les effets aérodynamiques, l'anti couple inertiel, les frottements aérodynamiques et les effets gyroscopiques.

En utilisant la loi de Newton sur le mouvement de rotation, la somme des moments est donnée par [10] :

$$\tau_f - \tau_a - \tau_g = J\dot{\Omega} + \Omega \wedge J\Omega \quad (\text{II.11})$$

Avec  $J = \text{diag}(I_x, I_y, I_z)$  la matrice d'inertie diagonale (structure du quadrirotor symétrique), et  $\wedge$  représente le produit vectoriel.

$\Omega$ : La vitesse angulaire exprimée dans le repère mobile lié au corps du quadrirotor :

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \dot{\alpha} \quad (\text{II.12})$$

$\tau_f$ : Le moment produit par le quadrirotor relativement au repère lié à son corps est donné par :

$$\tau_f = \begin{bmatrix} l(F_4 - F_2) \\ l(F_3 - F_1) \\ M_1 - M_2 + M_3 - M_4 \end{bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

Avec  $l$  la distance entre le centre de gravité du quadrirotor et l'axe de rotation des hélices, et  $M_i$  le moment autour de l'axe  $z$  :

$$M_i = d w_i^2 \quad (\text{II.14})$$

Où  $d$  est le coefficient de traînée de rotation.

$\tau_a$ : Le couple de frottement aérodynamique tel que :

$$\tau_a = K_{af}\Omega \quad (\text{II.15})$$

Avec  $K_{af} = \text{diag}(K_{afx}, K_{afy}, K_{afz})$  la matrice des coefficients des frottements aérodynamique.

$\tau_g$ : Le couple gyroscopique.

Les axes des moteurs sont parallèles à l'axe  $z$  de la plate forme. Lorsque le quadrirotor effectue un roulis ou un tangage, il change la direction du vecteur moment des quatre moteurs ce qui produit un couple gyroscopique qui tente de tourner les axes des moteurs de sorte qu'ils s'alignent avec la rotation autour de l'axe  $z$ .

$$\tau_g = \sum_1^4 \Omega \wedge I_r [0 \ 0 \ (-1)^{i+1} w_i]^T \quad (\text{II.16})$$

Avec  $I_r$  est l'inertie des rotors.

On suppose  $\Omega = \dot{\alpha}$  pour un vol plané. Tout calcul fait, le modèle dynamique du quadrirotor est le suivant :

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi} \frac{(I_y - I_z)}{I_x} - \dot{\theta}\Omega_r \frac{I_r}{I_x} - K_{afx}\dot{\phi} + \frac{U_2}{I_x} \\ \ddot{\theta} = \dot{\psi}\dot{\phi} \frac{(I_z - I_x)}{I_y} + \dot{\phi}\Omega_r \frac{I_r}{I_y} - K_{afy}\dot{\theta} + \frac{U_3}{I_y} \\ \ddot{\psi} = \dot{\phi}\dot{\theta} \frac{(I_x - I_y)}{I_z} - K_{afz}\dot{\psi} + \frac{U_4}{I_z} \\ \ddot{x} = -\frac{K_{dtx}}{m}\dot{x} + \frac{(c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi)U_1}{m} \\ \ddot{y} = -\frac{K_{dty}}{m}\dot{y} + \frac{(c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi)U_1}{m} \\ \ddot{z} = -g - \frac{K_{dtz}}{m}\dot{z} + \frac{(c\phi c\theta)U_1}{m} \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

Avec :  $\Omega_r = w_1 - w_2 + w_3 - w_4$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b & b & b \\ 0 & -lb & 0 & lb \\ -lb & 0 & lb & 0 \\ d & -d & d & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^2 \\ w_2^2 \\ w_3^2 \\ w_4^2 \end{bmatrix}$$

## II.6. Linéarisation du modèle du quadrirotor :

Dans notre travail, on va utiliser un multimodèle à état couplé, et puisque on dispose d'un modèle non linéaire du système, on procède par linéarisation pour l'obtention des modèles locaux.

Le modèle dynamique du quadrirotor peut être écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

Avec  $x(t)$  est le vecteur des variables d'états donnés par :

$$x(t) = [\phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi} \ x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ z \ \dot{z}]^T.$$

La fonction  $f(x(t), u(t))$  est donnée par l'équation suivante :

$$f(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \frac{1}{I_x} \left( (I_y - I_z) \dot{\theta} \dot{\psi} - I_r \Omega_r \dot{\theta} - K_{afx} \dot{\phi} + U_2 \right) \\ \dot{\theta} \\ \frac{1}{I_y} \left( (I_z - I_x) \dot{\phi} \dot{\psi} + I_r \Omega_r \dot{\phi} - K_{afy} \dot{\theta} + U_3 \right) \\ \dot{\psi} \\ \frac{1}{I_z} \left( (I_x - I_y) \dot{\theta} \dot{\phi} - K_{afz} \dot{\psi} + U_4 \right) \\ \dot{x} \\ \frac{1}{m} \left( (c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi) U_1 - K_{dtx} \dot{x} \right) \\ \dot{y} \\ \frac{1}{m} \left( (c\phi s\theta c\psi - s\phi s\psi) U_1 - K_{dty} \dot{y} \right) \\ \dot{z} \\ \frac{1}{m} \left( (c\phi c\theta) U_1 - K_{dtz} \dot{z} \right) - g \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

Le comportement du système non linéaire autour d'un point de fonctionnement  $(x_i, u_i)$ , peut être approximé par un système linéaire invariant dans le temps (LTI).

On utilise le développement de Taylor du premier ordre on obtient :

$$\dot{x}(t) = A_i(x(t) - x_i) + B_i(u(t) - u_i) + f(x_i, u_i) \quad (\text{II.20})$$

Que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + d_i \quad (\text{II.21})$$

Avec :

$$A_i = \left. \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}$$

$$B_i = \left. \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}$$

$$d_i = f(x_i, u_i) - A_i x_i - B_i u_i$$

Pour le modèle du quadrirotor, on obtient les matrices  $A_i$ ,  $B_i$  suivantes :

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \dot{\psi} + a_3 & 0 & a_2 \dot{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 + a_4 \dot{\psi} & 0 & a_6 & 0 & a_4 \dot{\phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_7 \dot{\theta} & 0 & a_7 \dot{\phi} & 0 & a_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_9 & 0 & a_{10} & 0 & a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{13} & 0 & a_{14} & 0 & a_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{17} & 0 & a_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{19} \end{bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

Avec :

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{K_{afx}}{I_x} \\ a_2 = \frac{(I_y - I_z)}{I_x} \\ a_3 = -\frac{I_r}{I_x} \Omega_r \\ a_4 = \frac{(I_z - I_x)}{I_y} \\ a_5 = \frac{I_r}{I_y} \Omega_r \\ a_6 = -\frac{K_{afy}}{I_y} \end{cases} \begin{cases} a_7 = \frac{(I_x - I_y)}{I_z} \\ a_8 = -\frac{K_{afz}}{I_z} \\ a_9 = \frac{U_{1i}}{m} (-s\phi c\psi s\theta + s\phi s\psi) \\ a_{10} = \frac{U_{1i}}{m} (c\phi c\psi c\theta) \\ a_{11} = \frac{U_{1i}}{m} (-c\phi s\psi s\theta + s\phi c\psi) \\ a_{12} = -\frac{K_{dtx}}{m} \end{cases} \begin{cases} a_{13} = \frac{U_{1i}}{m} (-s\phi s\psi s\theta - c\phi c\psi) \\ a_{14} = \frac{U_{1i}}{m} (c\phi s\psi c\theta) \\ a_{15} = \frac{U_{1i}}{m} (c\phi c\psi s\theta + s\phi s\psi) \\ a_{16} = -\frac{K_{dty}}{m} \\ a_{17} = \frac{U_{1i}}{m} (-s\phi c\theta) \\ a_{18} = \frac{U_{1i}}{m} (-c\phi s\theta) \\ a_{19} = -\frac{K_{dtz}}{m} \end{cases}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{12} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

Avec :

$$\begin{cases} b_1 = -\frac{I_r}{I_x} \dot{\theta} C_1 \\ b_2 = -\frac{I_r}{I_x} \dot{\theta} C_2 + \frac{1}{I_x} \\ b_3 = -\frac{I_r}{I_x} \dot{\theta} C_3 \\ b_4 = -\frac{I_r}{I_x} \dot{\theta} C_4 \\ b_5 = \frac{I_r}{I_y} \dot{\phi} C_1 \\ b_6 = \frac{I_r}{I_y} \dot{\phi} C_2 \end{cases} \quad \begin{cases} b_7 = \frac{I_r}{I_y} \dot{\phi} C_3 + \frac{1}{I_y} \\ b_8 = \frac{I_r}{I_y} \dot{\phi} C_4 \\ b_9 = \frac{1}{I_z} \\ b_{10} = \frac{1}{m} (c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi) \\ b_{11} = \frac{1}{m} (c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi) \\ b_{12} = \frac{1}{m} (c\phi c\theta) \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{d\Omega_r}{du_1}, C_2 = \frac{d\Omega_r}{du_2}, C_3 = \frac{d\Omega_r}{du_3}, C_4 = \frac{d\Omega_r}{du_4}$$

La matrice  $C$  est donnée par :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

## II.7. Construction du réseau des modèles locaux :

Pour construire le réseau on utilise 3 modèles locaux affines ( $r=3$ ), ces modèles seront interpolés par des fonctions d'activation de type gaussienne normalisée, dans une structure couplée, la fonction du réseau est donnée par :

$$\begin{cases} x_m(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (A_i x_m(t) + B_i u(t) + d_i) \\ y_m(t) = C x_m(t) \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

Où  $\mu_i(\xi(t)), i = 1, \dots, r$  sont les fonctions d'activation et  $\xi(t)$  est le vecteur des variables de décision dépendant des variables d'état mesurables.

$$w_i(\xi(t)) = \prod_{j=1}^m \exp\left(-\frac{(\xi_j(t)-c_{i,j})^2}{2\sigma_{i,j}^2}\right), \mu_i(\xi(t)) = \frac{w_i(\xi(t))}{\sum_{j=1}^r w_j(\xi(t))}$$

$m$  est la dimension du vecteur des variables de décision  $\xi(t)$ .

La fonction d'activation  $\mu_i(\xi(t))$  détermine le degré d'activation du  $i^{eme}$  Modèle local associé. Selon la zone où évolue le système, cette fonction indique la contribution plus ou moins importante du modèle local correspondant dans le modèle global (multimodèle). Elle assure un passage progressif de ce modèle aux modèles locaux voisins [1]. Ces fonctions sont généralement de forme triangulaire, sigmoïdale ou Gaussienne, et doivent satisfaire les propriétés suivantes (convexité) :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) = 1 \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \end{cases}, \forall i = 1, \dots, r \quad (\text{II.26})$$

Les modèles locaux sont définis comme suit :

- Un modèle défini autour de l'angle de roulis, ( $\phi = 30^\circ$ ).
- Un modèle défini autour de l'angle de tangage, ( $\theta = 30^\circ$ ).
- Un modèle définis autour de l'angle de lacer, ( $\psi = 30^\circ$ ).
- Les points de fonctionnement sont choisis d'une façon qu'un petit nombre de modèles locaux couvre le maximum de l'espace de fonctionnement.

Et donc, le vecteur des points de fonctionnement et le vecteur des variables de décision  $\xi(t)$  contiennent l'attitude, sont donnée par les équations suivantes :

$$P_i = [\phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi} \ x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ z \ \dot{z} \ u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T.$$

$$\xi(t) = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T.$$

## II.8. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons essayé d'éclaircir la notion d'un quadrirotor en donnant des concepts préliminaires et des généralités sur sa dynamique et son principe de fonctionnement en utilisant le formalisme de Newton-Euler. Nous avons présenté le modèle dynamique complet du quadrirotor prenant en compte tous les effets agissant sur son comportement, et à partir de ce modèle on conclut que le quadrirotor est un système complexe,

non linéaire, multivariables fortement couplé et sous actionné ce qui rend son contrôle relativement difficile.

Nous avons synthétisé un réseau de modèles locaux à partir du modèle non linéaire du quadrirotor. Ce réseau sera utilisé dans la partie traitant la commande qui sera abordée dans le dernier chapitre.

# CHAPITRE III

## *Le modèle flou de Takagi-Sugeno*

## *Le modèle flou de Takagi-Sugeno*

### III.1. Introduction:

L'attitude des automaticiens à l'égard de la commande floue a d'abord été réservée : après avoir pendant des décennies, affirmé la nécessité d'identifier le mieux possible un système pour pouvoir construire une commande ayant des performances satisfaisantes, fallait-il faire confiance à cette méthode nouvelle, qui prétendait remplacer des commandes plus ou moins sophistiquées, basées sur l'identification par des techniques s'appuyant sur le savoir-faire humain plutôt que sur des équations.

Actuellement, cette attitude a évolué. On peut penser que la commande floue va peu à peu prendre place dans la panoplie de l'ingénieur contemporain, sans supplanter les méthodes traditionnelles, et qu'elle constituera un complément précieux dans le cas des systèmes difficilement identifiables dont les paramètres subissent des variations brutales.

Dans ce chapitre nous introduisons d'abord d'une manière très succincte la structure générale ainsi que différents types de modèles flous. Ensuite nous nous focalisons en particulier sur une description du multimodèle flou de type Takagi-Sugeno.

### III.2. Concepts et définitions :

#### III.2.1. Sous ensembles flous :

**Définition:** Un sous-ensemble flou  $A$  dans un univers du discours  $X$  est caractérisé par sa fonction d'appartenance  $\mu_A(x)$  qui associe à chaque élément  $x$  de  $X$  une valeur dans l'intervalle des nombres réels  $[0, 1]$ .

$$\mu_A : X \rightarrow [0,1] \quad (\text{III.1})$$

Ainsi un sous-ensemble flou  $A$  dans  $X$  peut être représenté par un ensemble de couples ordonnés :

$$A = \{(x, \mu_A(x)); x \in X, \mu_A(x) \in [0, 1]\} \quad (\text{III.2})$$

#### III.2.2. Variables linguistiques :

Toutes les variables que l'on considère, en physique ou en économie, par exemple, prennent une valeur unique de leur ensemble de définition  $X$  dans une situation

donnée. Néanmoins, les conditions d'observations ne permettent pas toujours de connaître parfaitement cette valeur unique. Donc, une variable linguistique sert à modéliser les connaissances imprécises ou vagues sur une variable dont la valeur précise peut être inconnue.

**Définition:** Une variable linguistique est un triplet  $(V, X, Tv)$ , dans lequel :  $V$  est une variable définie sur un ensemble de référence  $X$ . L'ensemble  $Tv = \{A1, A2, \dots\}$ , fini ou infini, contient des sous-ensembles flous normalisés de  $X$ , utilisables pour caractériser  $V$ . Selon l'utilisation qui doit être faite, le nombre d'éléments de  $Tv$  est plus ou moins grand [14].

### III.3. différents types de modèles flous :

En général les systèmes flous s'appuient sur une représentation de la connaissance sous forme de règles « Si-Alors » qui permettent de représenter les relations entre les variables d'entrée et de sortie dont l'expression générique est de la forme :

*Si prémisse Alors conclusion*

Dans un premier temps et afin de faciliter l'interprétation, on peut considérer l'antécédent (prémisse) comme une description linguistique qui indique les conditions de validité du phénomène représenté. Pour sa part, le conséquent (conclusion) représente le comportement associé aux conditions de validité décrites par l'antécédent.

Selon la structure particulière de la proposition conséquente, on peut distinguer deux types de modèles flous basés sur des règles [16] :

➤ **Modèle flou linguistique (ou modèle Mamdani) :**

Dans lequel l'antécédent et le conséquent sont tout les deux des propositions floues qui utilisent des variables linguistiques [11].

➤ **Modèle flou Takagi-Sugeno (TS) :**

Dans lequel le conséquent utilise des variables numériques plutôt que des variables linguistiques, sous la forme d'une constante, d'un polynôme ou de manière plus générale d'une fonction ou d'une équation différentielle dépendant des variables associées à la proposition antécédente [15].

### III.4. Le multimodèle flou de Takagi-Sugeno :

Le modèle flou Takagi-Sugeno (TS) est décrit par des règles "si-alors" qui représentent des modèles LTI. Ainsi, tout modèle flou TS d'un système non linéaire est structuré comme une interpolation de systèmes linéaires. Il est prouvé que les modèles flous TS sont des approximateurs universels [23].

Les modèles flous TS sont représentés sous la forme suivante, où MFC et MFD indiquent respectivement, les modèles flous continus et les modèles flous discrets.

#### III.4.1. Modèles flous continus (MFC) :

Règle  $R^i$ : ( $i=1, 2, \dots, r$ ), du modèle :

$$\text{Si } \xi_i(t) \text{ est } F_1^i \text{ et } \dots \text{ et } \xi_p(t) \text{ est } F_p^i \text{ alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

Où  $x \in R^n$  est le vecteur d'état, la notation  $R^i$ : ( $i=1, 2, \dots, r$ ) indique la  $i$ -ème règle,  $r$  est le nombre des règles « si...alors »,  $F_j^i$ : ( $j=1, 2, \dots, r$ ) sont les fonctions d'appartenance des ensembles flous.  $u \in R^m$  Est le vecteur d'entrée,  $y \in R^p$  le vecteur de sortie.  $A_i \in R^{n \times n}$ ,  $B_i \in R^{n \times m}$ ,  $C_i \in R^{p \times n}$ ,  $\xi_1(t), \dots, \xi_p(t)$  Sont les variables des prémisses qui peuvent être des fonctions des variables d'état, des entrées ou une combinaison des deux. A chaque règle  $R^i$  est attribué un poids  $w_i(\xi(t))$  qui dépend du vecteur  $\xi(t) = [\xi_1(t), \dots, \xi_p(t)]$  et du choix de l'opérateur logique. Le connecteur « et » est souvent choisi comme étant le produit, d'où :

$$w_i(\xi(t)) = \prod_{j=1}^p F_j^i(\xi_j(t)), i = 1, 2, \dots, r \text{ avec } w_i(\xi(t)) \geq 0, \text{ pour tout } T \quad (\text{III.11})$$

Le modèle global est:

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(\xi(t))}, y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\xi(t))C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(\xi(t))} \quad (\text{III.12})$$

Qui peuvent être réécrites :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}, y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) C_i x(t) \quad (\text{III.13})$$

La fonction  $\mu_i(\xi(t))$  dite d'activation déterminé le degré d'activation du  $i^{me}$  modèle local associé. Selon la zone où évolue le système, cette fonction indique la contribution plus ou moins importante du modèle local correspondant dans le modèle global. Elle assure un

passage progressif de ce modèle aux modèles locaux voisins. Ces fonctions dépendent généralement du vecteur d'état  $x(t)$ . Elles peuvent être de forme triangulaire, sigmoïdale ou gaussienne, et satisfont les propriétés suivantes (convexité) :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) = 1 \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \end{cases}$$

**III.4.2. Modèles flous discrets (MFD) :**

De façon tout à fait analogue, les modèles flous TS discrets sont définis comme suit :

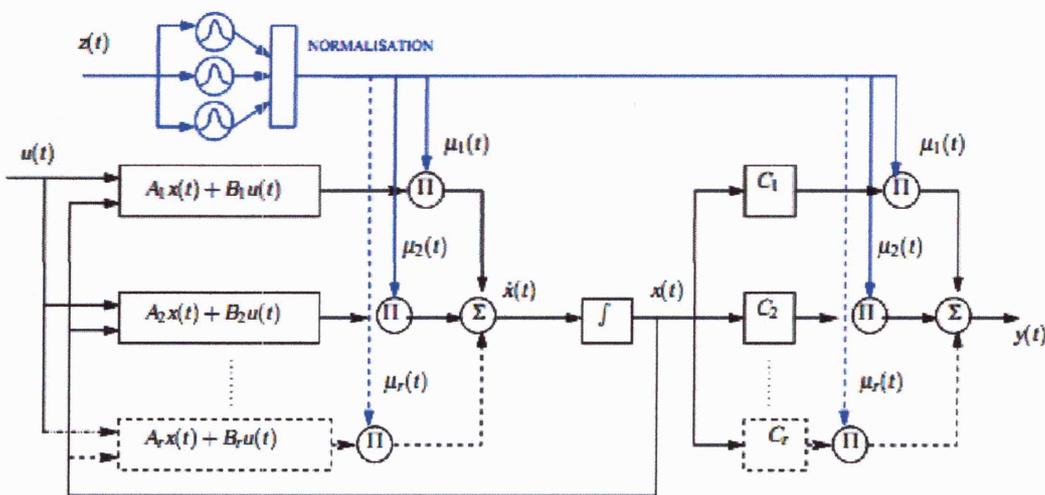
Règle  $R^i$  : ( $i=1, 2, \dots, r$ ), du modèle :

$$\text{Si } \xi_i(t) \text{ est } F_1^i \text{ et ... et } \xi_p(t) \text{ est } F_p^i \text{ alors } \begin{cases} x(t+1) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Ou, de façon plus compacte, avec la même définition des  $\mu_i(\xi(t))$ :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}, y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) C_i x(t) \quad (\text{III.15})$$

L'intérêt suscité par le multimodèle de Takagi-Sugeno lors de la modélisation, de la commande ou de l'estimation d'état des systèmes non linéaires a largement été démontré depuis une vingtaine d'années [18]. Remarquons toutefois que d'un point de vue structurel tous les sous-modèles de ce multimodèle ont la même dimension, un vecteur d'état unique  $x$  étant utilisé. Le multimodèle ainsi obtenu peut être alors sur-paramétré et sa complexité inutilement augmentée. La *Figure III.1* illustre l'architecture détaillée du multimodèle de Takagi-Sugeno.



*Figure III.1* : Architecture du multimodèle Takagi-Sugeno.

### III.5. Conclusion :

Classée parmi les techniques de l'intelligence artificielle, la logique floue permet de modéliser puis de remplacer l'expertise de conduite de processus, expertise en provenance du concepteur ou de l'utilisateur. Ses avantages viennent notamment de ses capacités à :

- ✓ Formaliser et simuler l'expertise d'un opérateur ou d'un concepteur dans la conduite et le réglage d'un procédé.
- ✓ Donner une réponse simple pour les procédés dont la modélisation est difficile.
- ✓ Prendre en compte sans discontinuité des cas ou exceptions de natures différentes, et les intégrer au fur et à mesure dans l'expertise.
- ✓ Prendre en compte plusieurs variables et effectuer de la « fusion pondérée » des grandeurs d'influence.

Les modèles flous TS peuvent être des modèles flous continus ou des modèles flous discrets. La particularité de ce type de modèles est que les ensembles flous sont seulement utilisés dans la partie prémisse des règles. La partie conclusion est décrite par des modèles numériques. Cette particularité rend un modèle flou TS équivalent à un multimodèle.

# CHAPITRE IV

## *Stabilitée des modèles flous de Takagi-Sugeno*

## *Stabilité des modèles Flous de Takagi-Sugeno*

### IV.1. Introduction :

La stabilité des systèmes de type Takagi-Sugeno a été étudiée à partir de plusieurs points de vue : approche de type Lyapunov, analogie avec des systèmes linéaires variant dans le temps, mise sous la forme d'un système linéaire avec des incertitudes de modélisation, etc. Dans le cas de la stabilité quadratique, des conditions nécessaires et suffisantes ont été proposées. La plupart des travaux font appel, pour vérifier les conditions de stabilité, aux outils LMI (Linear Matrix Inequalities) [5].

L'objectif de ce chapitre, est de représenter quelques approches permettant l'étude de la stabilité des modèles flous de type Takagi-Sugeno. Nous présentons également l'outil numérique LMI et comment transformer un problème d'optimisation en un problème d'optimisation équivalent sous contraintes LMI.

### IV.2. Analyse convexe et inégalités linéaires matricielles :

#### IV.2.1. Analyse convexe :

La convexité d'un problème d'optimisation a un double avantage :

- Les temps de calcul pour trouver une solution sont raisonnables.
- Il n'existe pas de minimum local de la fonction de coût à optimiser, le résultat obtenu correspond à un minimum global unique.

La convexité est une notion à la fois ensembliste et fonctionnelle. Voici les définitions dans chacun des cas.

#### Définition 1 : (ensemble convexe)

Soit un ensemble  $\varphi \in R^n$ , est un ensemble convexe si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0, 1] \subset R, \forall (x_1, x_2) \in \varphi^2, \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \varphi \quad (\text{IV.1})$$

#### Définition 2 : (fonction convexe)

Soit une fonction convexe  $f: \varphi \subset R^n \rightarrow R$  avec  $\varphi$  un ensemble convexe, alors  $f$  est convexe si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0, 1] \subset R, \forall (x_1, x_2) \in \varphi^2, f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (\text{IV.2})$$

Un problème d'optimisation convexe s'énonce donc comme suit :  $\min_{x \in \varphi} (f(x))$ , où  $\varphi$  est un ensemble convexe et  $f$  est une fonction convexe.

De même, une contrainte  $f_i(x) \leq 0$  est dite convexe si la fonction  $f_i$  est convexe. Un des avantages de la convexité est que toute optimisation d'une fonction convexe définie sur un ensemble convexe peut se traiter localement, car toute solution locale devient globale.

#### IV.2.2. Inégalités linéaires matricielles :

On appelle inégalité matricielle affine ou linéaire (Linear Matrix Inequality note LMI) le problème suivant: étant données une famille de matrices carrées et symétriques  $F_0$  et  $F_i$ ,  $i=1 \dots n$ , de  $R^{p \times p}$  et un vecteur  $x_i = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$  tels que :

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_n F_n > 0 \quad (\text{IV.3})$$

$$\text{Ou} \quad F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i > 0 \quad (\text{IV.4})$$

Avec :  $x_i = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$  appelé vecteur de décision ou vecteur d'optimisation.

Remarquons que l'ensemble  $E$  défini par  $E = \{x \in R: F(x) > 0\}$  est convexe, ce qui nous amène à considérer une contrainte LMI comme une contrainte convexe.

#### IV.2.3. Problème d'optimisation convexe sous contrainte LMI :

$$\text{Soit :} \quad \begin{array}{l} C \subset R^n \rightarrow R \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

Alors un problème d'optimisation convexe s'écrit :

$$\min_{\xi \in C} f(\xi) \quad (\text{IV.5})$$

$$\text{Où } C = \{\xi \in R^m \mid \forall x \in R^n, x^T F(\xi) x \geq 0\}.$$

Avec :

- $F(\xi) = F_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i F_i$
- $\xi$  : vecteur de décision ou vecteur d'optimisation,  $\xi \in R^m$ .
- $F_i$  : sont n matrice symétrique données de  $R^{n \times n}$ .
- $C \subset R^m$  : l'ensemble des contraintes.
- $f$  : fonction de coût ou c'est l'objectif.

Cette contrainte est appelée contrainte Inégalité Matricielle Affine ou simplement contrainte LMI.

#### IV.2.3.1. Remarques :

1) Quand  $C = R^m$ , on parle de problème d'optimisation sans contrainte sinon de problème d'optimisation sous contraintes.

2) Un problème d'optimisation convexe est dit convexe si :

Condition de problème convexe n°.1 :  $f$  est une fonction convexe.

Condition de problème convexe n°.2 :  $C$  est convexe.

Dans ce cas-là, quelque soit le point initial  $x_0$ , les algorithmes convergent vers le minimum global.

#### IV.2.3.2. Propriétés :

➤ L'ensemble  $C = \{x \in R^m \mid F(x) > 0\}$  est convexe ce qui nous amène à considérer une contrainte LMI comme une contrainte convexe.

➤ Un système de plusieurs LMIs est une LMI :

$$\text{Soient: } \begin{cases} C_1 = \{x \in R^m, Q(x) > 0\} \\ C_2 = \{x \in R^m, P(x) > 0\} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} Q(x) > 0 \\ P(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} Q(x) & 0 \\ 0 & P(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{IV.6})$$

Alors l'intersection de deux domaines de contraintes est défini par :

$$C_{1 \cap 2} = \left\{ x \in R^n \mid \begin{bmatrix} Q(x) & 0 \\ 0 & P(x) \end{bmatrix} > 0 \right\} \quad (\text{IV.7})$$

#### IV.2.4. Les outils techniques pour la formulation LMI :

Ces outils permettent d'exprimer des problèmes d'analyse ou de commande de système d'optimisation sous contraintes LMI. En effet la mise sous forme LMI d'un problème d'optimisation consiste dans un premier temps à traduire les contraintes par des inégalités matricielles que l'on tente en suite de rendre affine en fonction des variables d'optimisations [6].

**IV.2.4.1. Lemme de Schur :**

Le complément de Schur ou le Lemme de Schur est un outil fondamental dans la manipulation des inégalités matricielles, en effet, il permet dans certain cas de mettre sous forme LMI des contraintes non linéaires.

**Définition :**

Soient les trois matrices symétriques  $(Q, S) \in R^{n \times n} \times R^{n \times m}$  et  $R \in R^{n \times m}$  affines par rapport à la variable  $x$ . Alors les LMI suivantes sont équivalentes :

- ✓  $S(x) > 0$  et  $Q(x) - R(x)S^{-1}(x)R^T(x) > 0$ .
- ✓  $\begin{bmatrix} Q(x) & R(x) \\ R^T(x) & S(x) \end{bmatrix} > 0$ .

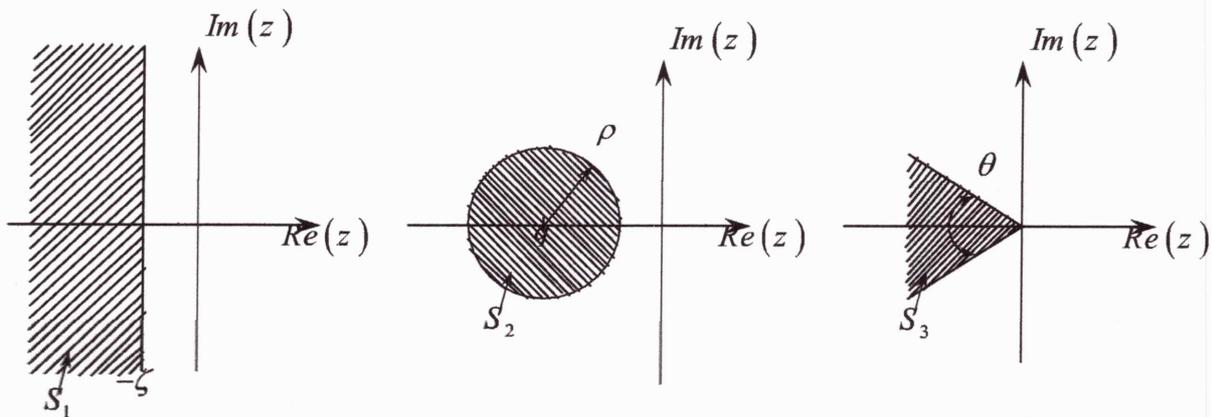
**IV.2.5. Régions LMI :**

Une région  $S$  du plan complexe est appelée une région LMI s'il existe deux matrices symétriques  $\alpha, \beta \in R^{m \times m}$  telle que :

$$S = \{z \in \mathbb{C} : f_s(z) < 0\} \tag{IV.8}$$

Avec  $f_s(z) = \alpha + z\beta + z^*\beta^T$ . La notation  $z^*$  désigne le conjugué de  $z$ ,  $f_s(z)$  est appelée la fonction caractéristique de  $S$ .

En d'autres termes, une région LMI est une région du plan complexe qui est caractérisée par une LMI en fonction de  $z$  et de  $z^*$ , ou de  $a = Re(z)$  et  $b = Im(z)$ . les régions LMI sont donc des ensembles convexes.



**Figure IV.1 :** Exemples de régions LMI.

### IV.2.6. Placement de pôles par l'approche LMI :

#### Théorème:

Les valeurs propres d'une matrice réelle  $A$  sont placées dans une région LMI (IV.8) du plan complexe si et seulement si, il existe une matrice symétrique  $X$  telle que [2]:

$$M_s(A, X) = \alpha \otimes X + \beta \otimes AX + \beta^T \otimes XA^T < 0 \quad (\text{IV.9})$$

$\otimes$  dénote le produit matriciel de Kronecker.

En d'autres termes, les valeurs propres d'une matrice réelle  $A$  sont toutes dans une région du plan complexe, s'il existe une matrice  $X > 0$  telle que la LMI  $M_s(A, X) < 0$  soit réalisable, où  $M_s(A, X)$  est déterminée en effectuant la substitution suivante dans la fonction caractéristique  $S$ :

$$(X, AX, XA^T) \leftrightarrow (1, z, z^*) \quad (\text{IV.10})$$

Les valeurs propres de la matrice  $A$  sont donc toutes dans la région  $S_1$  du plan complexe si et seulement si:

$$\exists X > 0: 2\zeta X + AX + XA^T < 0 \quad (\text{IV.11})$$

De même, les valeurs propres de la matrice  $A$  sont toutes dans la région  $S_2$  du plan complexe si et seulement si:

$$\exists X > 0: \begin{pmatrix} -\rho X & qX + AX \\ qX + XA^T & -\rho X \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{IV.12})$$

Enfin, les valeurs propres de la matrice  $A$  sont toutes dans la région  $S_3$  du plan complexe si et seulement si:

$$\exists X > 0: \begin{pmatrix} \sin\theta(AX + XA^T) & \cos\theta(AX - XA^T) \\ \cos\theta(XA^T - AX) & \sin\theta(AX + XA^T) \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{IV.13})$$

### IV.3. Stabilité des modèles flous de Takagi-Sugeno:

On s'intéresse à la stabilité et à la stabilisation quadratique des modèles flous TS, c'est-à-dire en utilisant la fonction de Lyapunov  $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$  avec  $P > 0$ . Les théorèmes suivants basés sur la seconde méthode de Lyapunov donnent les conditions suffisantes

permettant de garantir la stabilité de modèles flous continus et discrets décrits respectivement par les expressions (III.6) et (III.8).

#### IV.3.1. Stabilité au sens de Lyapunov: méthode directe.

La méthode directe de Lyapunov s'appuie sur une observation physique fondamentale : si l'énergie totale d'un système linéaire ou non linéaire, est continûment dissipée (on parle de système dissipatif), alors on peut espérer que le système tende vers un point d'équilibre. Ainsi l'idée de Lyapunov est d'examiner la variation d'une fonction scalaire dépendant de l'énergie pour étudier la stabilité d'un système donné [2]. Considérons tout d'abord le système non linéaire en régime libre décrit par :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (\text{IV.14})$$

Avec  $f(x(t)) \in C^1: R^n \rightarrow R^n$ . Le système (IV.14) est dit en équilibre autour de  $x_0$  si, en l'absence d'influence externe, son état ne varie pas au cours du temps,  $x_0$  est alors point d'équilibre.

#### IV.3.2. Fonctions de Lyapunov:

Dans le cas général, il n'existe pas de méthode pour trouver toutes les fonctions candidates de Lyapunov. Dès lors, la théorie de Lyapunov conduit à des conditions suffisantes de stabilité dont le pessimisme dépend de la forme particulière imposée à la fonction  $V(x(t))$  et de la structure du système. Ce pendant, il existe des familles de fonctions de Lyapunov souvent utilisées et dont l'adoption dépend de la nature du système à étudier (systèmes linéaires, systèmes continus par morceaux, systèmes à retard, systèmes linéaires incertains,...).

L'étude de la stabilité à l'aide de ce type de fonction a constitué la base de très nombreux travaux jusqu'à maintenant [2]. Dans le cas des systèmes incertains, quand aucune information n'est connue sur la vitesse d'évolution des paramètres incertains, c'est pratiquement la seule méthode possible. Le choix le plus classique consiste à choisir une fonction de Lyapunov sous forme quadratique :

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t). \quad P > 0 \text{ Et symétrique} \quad (\text{IV.15})$$

Où  $x(t)$  représente la solution de l'équation d'état (IV.14). La dérivée par rapport au temps de la fonction de Lyapunov le long de la trajectoire de la variable  $x(t)$  est:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x(t)) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) \\
&= 2x^T(t)P\dot{x}(t) \\
&= 2x^T(t)Pf(x(t))
\end{aligned}$$

**Définition:** pour le système (IV.14), l'origine est dite quadratiquement stable s'il existe des matrices symétriques et définies positives  $P, Q \in R^{n \times n}$  telle que la dérivée de la fonction de Lyapunov est négative et vérifie la condition suivante :

$$\dot{V}(x(t)) = 2x^T(t)Pf(x(t)) \leq -x^T(t)Qx(t) \quad (IV.16)$$

**Théorèmes :**

**A.** L'équilibre d'un modèle flou continu, décrit par (III.6) (en boucle ouverte), est asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $P$  commune définie positive telle que :

$$A_i^T P + P A_i < 0, i = 1, 2, \dots, r \quad (IV.17)$$

**B.** L'équilibre d'un modèle flou discret, décrit par (III.8), est asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $P$  commune définie positive telle que :

$$A_i^T P A_i - P < 0, i = 1, 2, \dots, r \quad (IV.18)$$

Les conditions de stabilité obtenues sont évidemment conservatives puisque la partie prémisse des règles n'est pas prise en compte.

Toutes les paires  $(A_i, B_i)$  intervenant dans les règles peuvent être réécrites en fonction d'une paire  $(A_0, B_0)$  unique :  $\forall i, A_i = A_0 + \delta A_i, B_i = B_0 + \delta B_i$  d'où (III.8) peut réécrire avec  $\sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) = 1$  :

$$x(t+1) = (A_0 + \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi) \delta A_i) x(t) + (B_0 + \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi) \delta B_i) u(t) \quad (IV.19)$$

Le modèle  $(A_0, B_0)$  doit être choisi avec attention pour que les normes de  $\delta A_i$  et  $\delta B_i$  soient faibles. On peut envisager, par exemple, de prendre le modèle obtenu par moyennage des autres modèles.

Le modèle  $(A_0, B_0)$  est supposé stable, il existe, donc deux matrices  $P > 0$  et  $Q > 0$  telles que :  $A_0^T P A_0 - P = -Q$  Définissons les matrices symétriques :

$$D_i = (A_0 + \delta A_i)^T P (A_0 + \delta A_i) - P = \delta A_i^T P \delta A_i + \delta A_0^T P A_0 + A_0^T P \delta A_i - Q$$

**IV.4. Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons donné un aperçu général en considérant les problèmes de la stabilité (analyse) des modèles flous de type TS. La plupart des travaux font appel, pour vérifier les conditions de stabilité, à la méthode de Lyapunov. La stabilité dépend de l'existence d'une matrice commune, symétrique et définie positive, qui garantit la stabilité des modèles locaux.

L'intérêt de la méthode quadratique vient du fait que la recherche d'une fonction de Lyapunov (et des gains de retour d'état dans le cas de la stabilisation) est facile à mettre en œuvre et peut être énoncé comme un problème d'optimisation convexe en terme de LMI résolu efficacement. Cependant, la méthode quadratique s'est avérée très conservatrice du fait que cette approche néglige toutes les informations contenues dans les fonctions d'activation.

# CHAPITRE V

## Synthèse des lois de commande

## *Synthèse des lois de commande*

### V.1. Introduction :

La commande est fondée sur un concept très ancien, nommé de contre réaction et connu sous sa dénomination anglo-saxonne : *feedback*. Tenant compte des sorties mesurées et de l'information disponible sur le système, l'objectif principal est de déterminer la commande à appliquer à l'entrée du système pour obtenir un comportement désiré de celui-ci. Très souvent, la commande est une fonction assurée par un autre système appelé système de commande.

Dans ce chapitre, nous allons présenter la synthèse de deux techniques de commande pour la stabilisation de l'orientation du système du quadrirotor, en se basant sur l'approche multimodèle et la théorie de Lyapunov:

- La commande PDC (Parallel Disturbance Compensation).
- La commande PDC par placement de pôles.

Les simulations effectuées et le calcul des gains des lois de commande se font par le logiciel *Matlab* pour des raisons de simplicité et de rapidité de programmation.

### V.2. Stabilisation de l'attitude du quadrirotor:

#### V.2.1. Modèle de l'attitude du quadrirotor :

Avant d'aller à l'étape de synthèse des lois de commande, nous présentons le multimodèle qui représente la dynamique de l'attitude du quadrirotor qui sera utilisé pour synthétiser les lois de commande stabilisantes. Il est très réduit par rapport au modèle présenté dans le chapitre II, par ce que ce dernier représente toutes les dynamiques du quadrirotor (translation, rotation).

Le modèle de l'attitude du quadrirotor est donné par :

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi}\frac{(I_y-I_z)}{I_x} - \dot{\theta}\Omega_r\frac{I_{rotor}}{I_x} - K_{afx}\dot{\phi} + \frac{U_2}{I_x} \\ \ddot{\theta} = \dot{\psi}\dot{\phi}\frac{(I_z-I_x)}{I_y} + \dot{\phi}\Omega_r\frac{I_{rotor}}{I_y} - K_{afy}\dot{\theta} + \frac{U_3}{I_y} \\ \ddot{\psi} = \dot{\phi}\dot{\theta}\frac{(I_x-I_y)}{I_z} - K_{afz}\dot{\psi} + \frac{U_4}{I_z} \end{cases} \quad (V.1)$$

Le multimodèle correspondant est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i x_m(t) + B_i u(t) + d_i) \\ y_m(t) = C x_m(t) \end{cases} \quad (\text{V.2})$$

Avec :

$r = 3$  : Le nombre de modèles locaux.

$d_i$  : Les constants de linéarisation.

$\xi(t)$  : Le vecteur des variables de décision  $\xi(t) = [\phi \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^T$ .

Les matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C$  sont :

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \dot{\psi} + a_3 & 0 & a_2 \dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 + a_4 \dot{\psi} & 0 & a_6 & 0 & a_4 \dot{\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_7 \dot{\theta} & 0 & a_7 \dot{\phi} & 0 & a_8 \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_7 \end{bmatrix} \quad (\text{V.3})$$

Avec :

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{K_f a_x}{I_x} \\ a_2 = \frac{(I_y - I_z)}{I_x} \\ a_3 = -\frac{I_r}{I_x} \Omega_r \\ a_4 = \frac{(I_z - I_x)}{I_y} \end{cases} \begin{cases} a_5 = \frac{I_r}{I_y} \Omega_r \\ a_6 = -\frac{K_f a_y}{I_y} \\ a_7 = \frac{(I_x - I_y)}{I_z} \\ a_8 = -\frac{K_f a_z}{I_z} \end{cases} \begin{cases} b_1 = -\frac{I_r}{I_x} \dot{\theta} C_2 + \frac{1}{I_x} \\ b_2 = -\frac{I_r}{I_x} \dot{\theta} C_3 \\ b_3 = -\frac{I_r}{I_x} \dot{\theta} C_4 \\ b_4 = \frac{I_r}{I_y} \dot{\phi} C_2 \end{cases} \begin{cases} b_5 = \frac{I_r}{I_y} \dot{\phi} C_3 + \frac{1}{I_y} \\ b_6 = \frac{I_r}{I_y} \dot{\phi} C_4 \\ b_7 = \frac{1}{I_z} \end{cases}$$

$$C_2 = \frac{\partial \Omega_r}{\partial U_2}, C_3 = \frac{\partial \Omega_r}{\partial U_3}, C_4 = \frac{\partial \Omega_r}{\partial U_4}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.4})$$

### V.2.2. La commande PDC:

A partir du concept PDC (Parallel Distributed Compensation), la détermination d'une loi de commande revient à déterminer pour chaque modèle local une matrice de gains, par exemple en utilisant une synthèse quadratique ou des LMI. L'idée principale de ce concept est de calculer une loi de commande linéaire par retour d'état, pour chaque sous-modèle du modèle flou. La *Figure V.1* illustre le concept de ce type de commande.

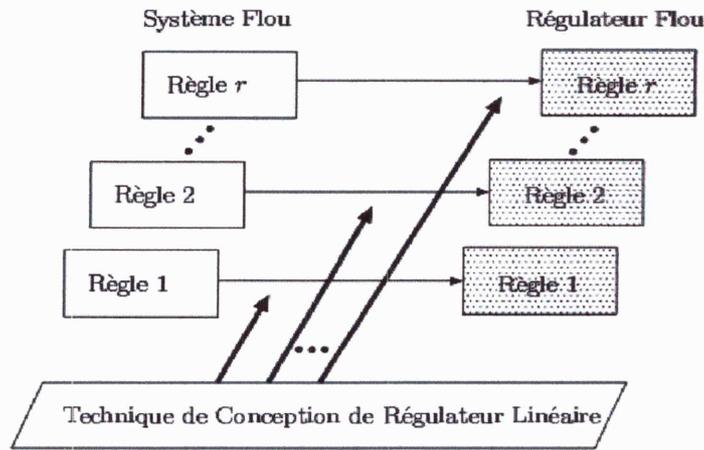


Figure V.1 : Représentation du concept de compensation parallèle distribuée (PDC).

**V.2.2.1. Construction d'un régulateur PDC :**

Le régulateur flou PDC partage les mêmes ensembles flous que le modèle, donc, il garde les mêmes parties prémises ainsi que les mêmes fonctions d'appartenance. Pour les modèles flous, la réalisation du régulateur se fait de la façon suivante. Règle  $R^i$  du régulateur :

$$\text{Si } \xi_i(t) \text{ est } K_1^i \text{ et } \dots \text{ et } \xi_p(t) \text{ est } K_p^i \text{ alors } u(t) = -K_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (V.5)$$

La sortie finale du régulateur flou est inférée de la manière suivante :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) K_i x(t) \text{ avec } \mu_i(\xi(t)) = \frac{w_i(\xi(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(\xi(t))} \quad (V.6)$$

Vérifiant toujours la même propriété de somme convexe.

La réalisation du régulateur flou consiste à déterminer les gains de contre-réaction  $K_i$  dans les parties conclusions.

**V.2.2.2. Conditions de stabilité :**

Pour obtenir l'expression de la boucle fermée, il suffit de substituer (V.6) à (III.6) (cas continu) et à (III.8) (cas discret). Ainsi les expressions sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) - B_i \sum_{j=1}^r \mu_j(\xi(t)) K_j x(t)) \\ \text{MFC:} \quad &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\xi(t)) \mu_j (A_i - B_j K_j) x(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \mu_i^2(\xi(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i < j}^r \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} x(t) \end{aligned} \quad (V.7)$$

Avec  $G_{ij} = A_i - B_j K_j$ .

$$\text{MFD: } x(t+1) = \sum_{i=1}^r \mu_i^2(\xi(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i < j}^r \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} x(t) \quad (V.8)$$

Notons que le nombre des conditions à vérifier est  $r(r+1)/2$ , et que ce nombre croît en fonction du nombre de modèles  $r$ . Il est alors clair que le nombre des modèles locaux est un des facteurs importants du conservatisme des résultats issus des conditions (V.11).

La résolution des conditions (V.11), en utilisant *Toolbox LMI de Matlab*, donne les gains du contrôleur suivant :

$$K1 = \begin{bmatrix} 0.3827 \times 10^{-2} & 0.1317 \times 10^{-2} & 0.5341 \times 10^{-9} & 0.6488 \times 10^{-4} & -0.1041 \times 10^{-2} & 0.1423 \times 10^{-2} \\ 0.2671 \times 10^{-8} & 0.7859 \times 10^{-4} & 0.3828 \times 10^{-2} & 0.1254 \times 10^{-2} & 0.1041 \times 10^{-2} & -0.1189 \times 10^{-2} \\ 0.2415 \times 10^{-7} & 0.2932 \times 10^{-3} & -0.3852 \times 10^{-7} & -0.7609 \times 10^{-3} & 0.7656 \times 10^{-2} & 0.3192 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$K2 = \begin{bmatrix} 0.3827 \times 10^{-2} & 0.1231 \times 10^{-2} & 0.7745 \times 10^{-8} & -0.1137 \times 10^{-3} & 0.1041 \times 10^{-2} & -0.1106 \times 10^{-2} \\ -0.4554 \times 10^{-8} & 0.3613 \times 10^{-3} & 0.3828 \times 10^{-2} & 0.1236 \times 10^{-2} & -0.1041 \times 10^{-2} & 0.1123 \times 10^{-2} \\ -0.3474 \times 10^{-7} & -0.9265 \times 10^{-3} & 0.2996 \times 10^{-7} & 0.8925 \times 10^{-3} & 0.7656 \times 10^{-2} & 0.3192 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$K3 = \begin{bmatrix} 0.3827 \times 10^{-2} & 0.1357 \times 10^{-2} & -0.1916 \times 10^{-8} & -0.1543 \times 10^{-4} & -0.1084 \times 10^{-8} & -0.1013 \times 10^{-5} \\ 0.4299 \times 10^{-8} & 0.1544 \times 10^{-4} & 0.3828 \times 10^{-2} & 0.1357 \times 10^{-2} & -0.1936 \times 10^{-8} & -0.4515 \times 10^{-5} \\ 0.2799 \times 10^{-8} & 0.2027 \times 10^{-5} & 0.4745 \times 10^{-9} & 0.9030 \times 10^{-5} & 0.7656 \times 10^{-2} & 0.3192 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

**V.2.2.4. Résultats de simulation :**

Les valeurs initiales des angles de roulis, de tangage, et de lacet sont égales à  $25^\circ, -20^\circ, 30^\circ$  respectivement. Les résultats obtenus pour la stabilisation d'attitude du quadrirotor par la commande PDC sont donnés sur les figures suivantes.

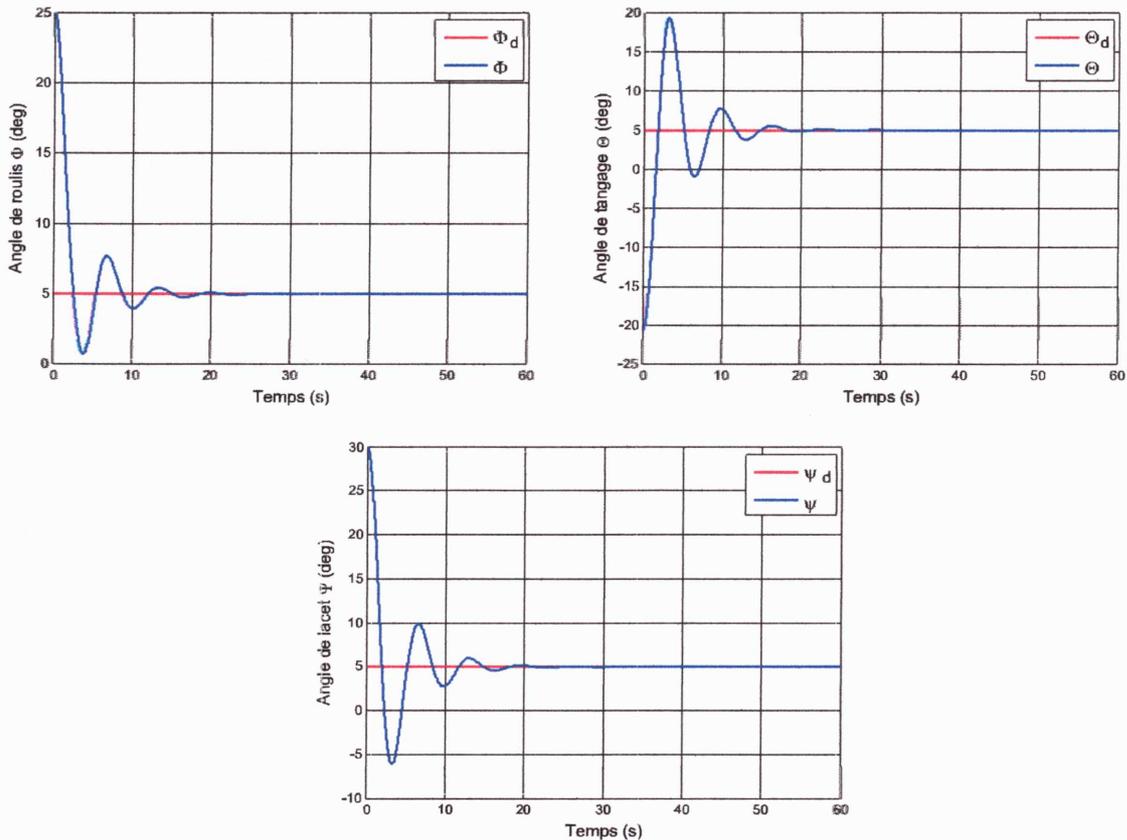


Figure V.2 : Attitude du quadrirotor : roulis, tangage et lacet (PDC).

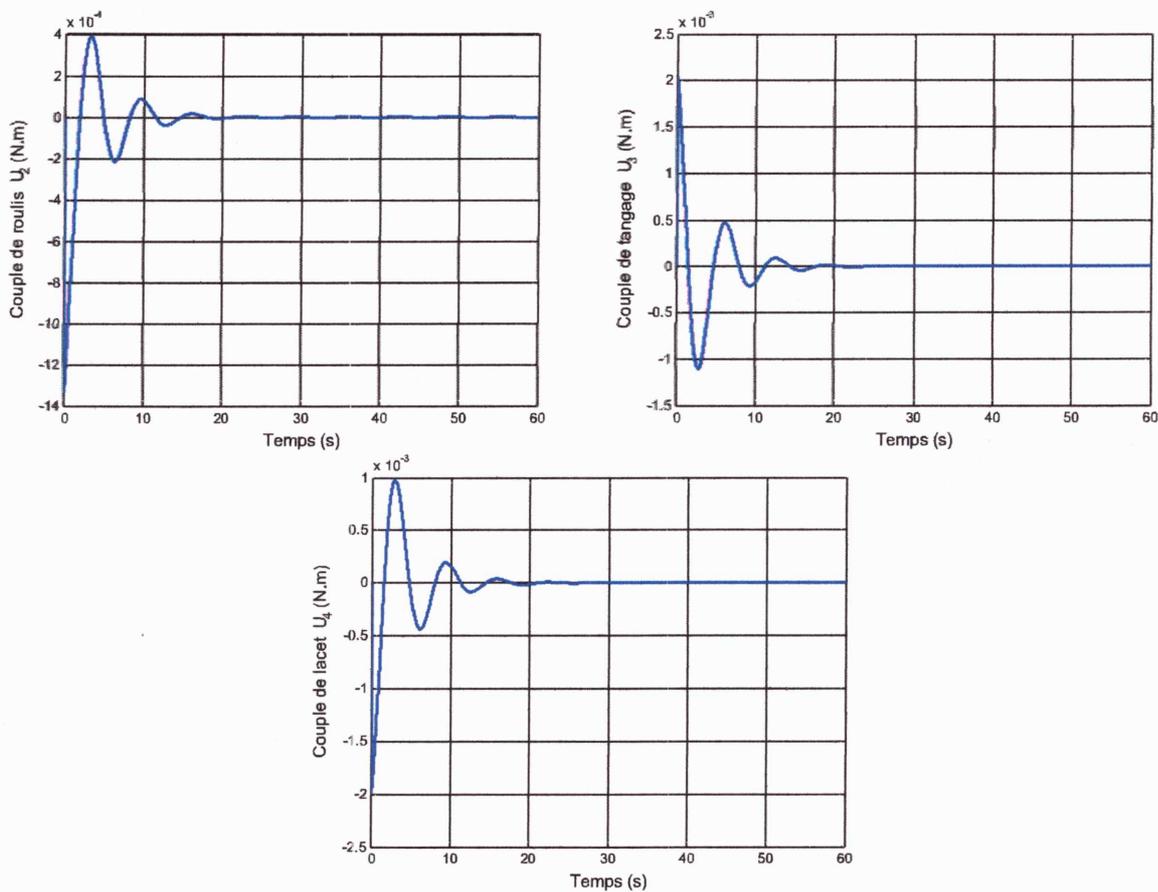


Figure V.3 : commande de stabilisation  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $u_4$  (PDC).

La *Figure V.2* montre que la commande assure la convergence des angles du quadrirotor vers les angles désiré, mais le temps de stabilisation est un peut lent par ce que cette commande donne un placement de pôles arbitraires (pas spécifique), elle assure que la partie réelle des pôles en boucle fermée soit négative.

Pour améliorer la vitesse de convergence (diminuer le temps de stabilisation) on utilise un placement de pôles régional (dans une zone bien déterminer).

### V.2.3. Commande PDC avec placement de pôles (PDCPP) :

La commande par placement de pôles est parmi les méthodes utilisées pour spécifier les performances souhaitées. Cette approche, consiste à construire une loi de commande de telle manière à ce que les valeurs propres en boucle fermée pour chaque sous modèle linéaire soient situées dans un domaine prédéfini ( $D$ ), i.e. :  $\sigma(A_i + B_i K_j) \subset D$ .

Bien entendu, ce placement de pôles n'est qu'une description du comportement du modèle non linéaire obtenu sous forme TS. La performance attendue (temps de réponse, coefficient d'amortissement...) sera donc une approximation attendue des dynamiques fixées

pour tous les modèles locaux. Dans le cadre des modèles TS, l'idée est de caractériser des régions dans le demi-plan complexe gauche avec une fonction de Lyapunov en termes de problèmes LMI.

En utilisant la méthode PDC et un placement de pôles régional pour synthétiser le contrôleur qui assure les performances suivantes :

- Stabilisation du système en boucle fermée (stabilité asymptotique) :  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .
- Placer les valeurs propres de la boucle fermée dans une région prédéfinie (cercle) de la partie gauche de plan complexe :  $\sigma(A_i + B_i K_j) \subset D$ . Pour toutes les conditions  $x(0)$ .

### V.2.3.1. Placement de pôles dans une région circulaire :

Nous considérons la région  $D$  du cercle LMI :

$$D_{q,\rho} = \{x + jy \in \mathbb{C} : (x + q)^2 + y^2 < \rho^2\} \quad (\text{V.12})$$

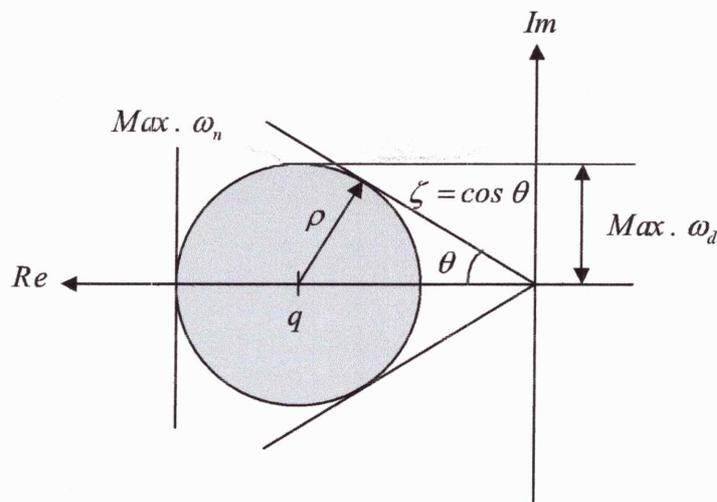


Figure V.4 : Région circulaire ( $D$ ) pour le placement des pôles.

De centre  $(-q, 0)$  et de rayon  $\rho > 0$ , avec sa fonction caractéristique donnée par :

$$f_D(z) = \begin{pmatrix} -\rho & z^* + q \\ z + q & -\rho \end{pmatrix} \quad (\text{V.13})$$

On sait que la réponse transitoire d'un système linéaire est liée au placement de ces pôles. Par exemple la réponse indicielle d'un système de deuxième ordre avec le pôle  $\lambda = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$  est entièrement caractérisée par la pulsation propre non amortie  $\omega_n$ , le

facteur d'amortissement  $\zeta$ , et la pulsation propre amortie  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ . Si  $\lambda$  est un pôle lié à la région  $D_{q,\rho}$  (**Figure V.4**), on peut mettre des limites inférieures ou supérieures pour ces quantités :  $\zeta \geq \sqrt{1 - (\frac{\rho^2}{q^2})}$ ,  $\omega_n \leq q + \rho$  et  $\omega_d \leq \rho$ . Par conséquent, cette région de cercle met une limite inférieure sur le facteur d'amortissement de la réponse indicielle en boucle fermée, est très commune dans la synthèse de commande en pratique. Un théorème de Lyapunov prolongé pour les multimodèles (V.7) est développé avec la définition ci-dessus d'une région circulaire de pôles sous forme LMI.

### Théorème V.2 :

Le multimodèle (V.7) est D-stable (tous les pôles complexes appartiennent à la région  $D_{q,\rho}$ ) pour un retour d'états  $K_i$ , si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive  $X$  tel que :

$$\begin{pmatrix} -\rho X & qX + X(A_i + B_i K_j)^T \\ qX + (A_i + B_i K_j)X & -\rho X \end{pmatrix} \quad (\text{V.13})$$

Cette condition n'est pas convexe en  $X$  et  $K_j$  un simple changement de variable  $N_i = K_j X$  aboutie à une LMI convexe en  $N_i$  et  $X$  donnée par :

$$\begin{pmatrix} -\rho X & qX + X A_i^T + N_i^T B_i^T \\ qX + A_i X + B_i N_i & -\rho X \end{pmatrix} < 0, \quad i = j \quad (\text{V.14})$$

Notons que la condition (V.14) sera utilisée comme une contrainte supplémentaire dans notre problème, l'utilisation de cette condition dans les deux cas  $i=j$  et  $i < j$  n'est pas nécessaire il suffit de placer les pôles des modèles dominants (dans le cas  $i=j$ ) dans la région prédéfinie (circulaire dans notre cas).

#### V.2.3.2. Détermination des gains de la commande :

Nous considérons la synthèse d'une commande PDC (retour d'état) qui garantit la stabilité du système en boucle fermée (V.11) et satisfait des contraintes additionnelles sur le placement de pôles de système en boucle fermée (V.14). Pour la réalisabilité dans le cadre de LMI nous cherchons la même matrice  $X$ , en imposant les deux objective de stabilité et de placement de pôles.

La résolution de ces deux de contraintes LMI (V.11) (V.14) conduit directement à une commande, qui assure la stabilité globale du système et les performances transitoires désirées simultanément.

### Théorème V.3 :

Le multimodèle (V.7) est stabilisé dans la région spécifique  $D_{q,\rho}$  par la commande PDC si et seulement si existe des matrices symétriques  $X$  et  $N_i$  communes tels que les LMI suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
 & X > 0 \\
 & XA_i^T + A_iX - N_i^T B_i^T - B_i N_i + S_{ii} < 0, \forall i \in I_r \\
 & XA_i^T + A_iX + XA_j^T + A_jX - N_j^T B_i^T - B_i N_j - N_i^T B_j^T - B_j N_i + 2S_{ij} \leq 0, \forall (i, j) \in I_r^2, i < j \\
 & \begin{pmatrix} -\rho X & qX + XA_i^T + N_i^T B_i^T \\ qX + A_iX + B_i N_i & -\rho X \end{pmatrix} < 0 \\
 & \begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & \cdots & S_{nn} \end{pmatrix} > 0
 \end{aligned} \tag{V.15}$$

Avec :  $S_{ij} = XQ_{ij}X$ ,  $K_i = N_i P$  et  $P = X^{-1}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ , et  $r = 3, \rho = 1, q = 10$ .

La résolution des conditions (V.15), en utilisant *LMI toolbox* de *Matlab* conduit aux gains de commande suivants :

$$\begin{aligned}
 K1 &= \begin{bmatrix} 0.3528 & 0.07323 & 0 & 0.2004 \times 10^{-2} & -0.0960 & -0.0179 \\ 0 & -0.2004 \times 10^{-2} & 0.3529 & 0.0732 & 0.0960 & 0.0179 \\ -0.1 \times 10^{-14} & 0.5236 \times 10^{-6} & 0 & 0.5236 \times 10^{-6} & 0.7058 & 0.1469 \end{bmatrix} \\
 K2 &= \begin{bmatrix} 0.3528 & 0.0732 & 0 & -0.2004 \times 10^{-2} & 0.0960 & 0.0179 \\ 0 & 0.2004 & 0.3529 & 0.0732 & -0.0960 & -0.0179 \\ -0.1 \times 10^{-14} & -0.5236 \times 10^{-6} & 0.3 \times 10^{-14} & -0.5236 \times 10^{-6} & 0.7058 & 0.1469 \end{bmatrix} \\
 K3 &= \begin{bmatrix} 0.3528 & 0.0732 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3529 & 0.0732 & 0.1 \times 10^{-14} & 0 \\ -0.1 \times 10^{-14} & 0 & 0.2 \times 10^{-14} & 0 & 0.7058 & 0.1469 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

### V.2.3.3. Résultats de simulation :

Le dispositif de commande décrit ci-dessus a été simulé pour le système quadrirotor non linéaire. Les simulations sont faites pour des valeurs initiales égales à  $(\phi, \theta, \varphi) = 25^\circ, -20^\circ, 30^\circ$  pour la stabilisation, Les résultats obtenus pour la stabilisation d'attitude du quadrirotor par la commande par placement de pôles sont donnés sur les figures suivantes.

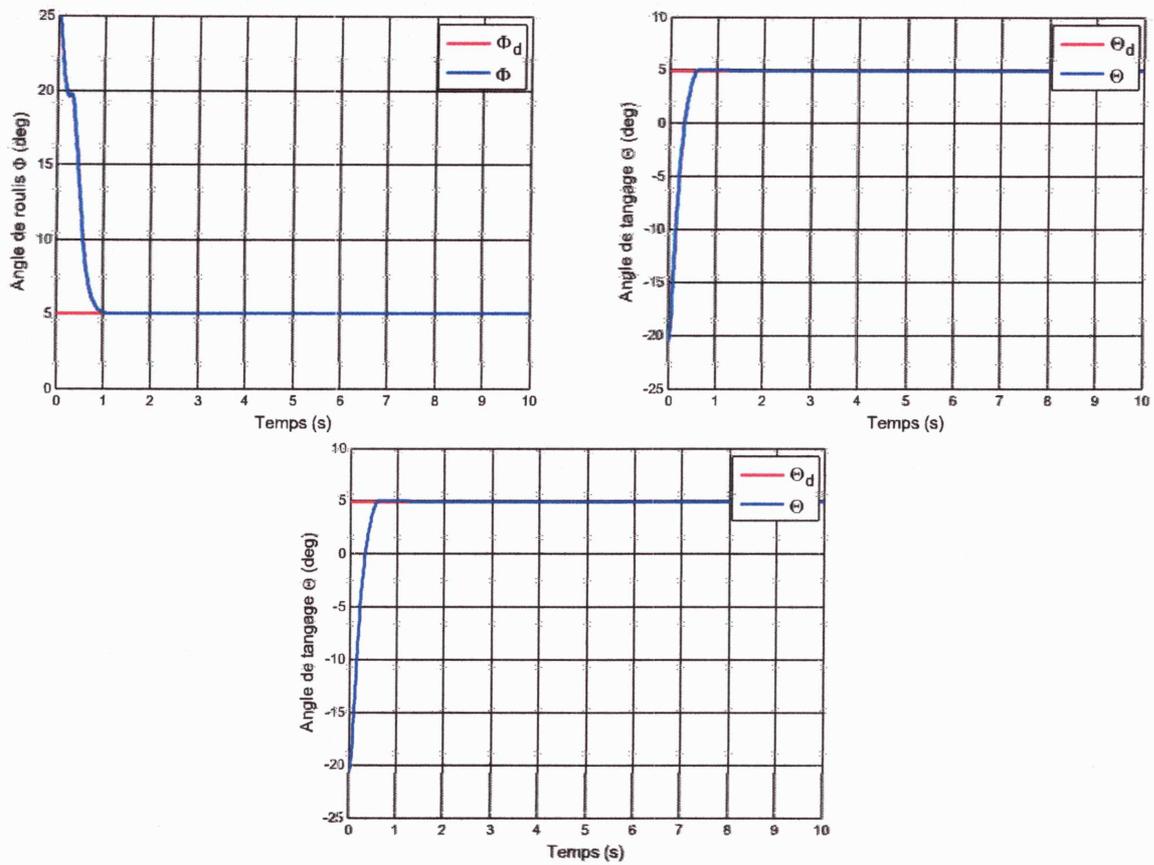


Figure V.5 : Attitude du quadrirotor : roulis, tangage et lacet (PDCPP).

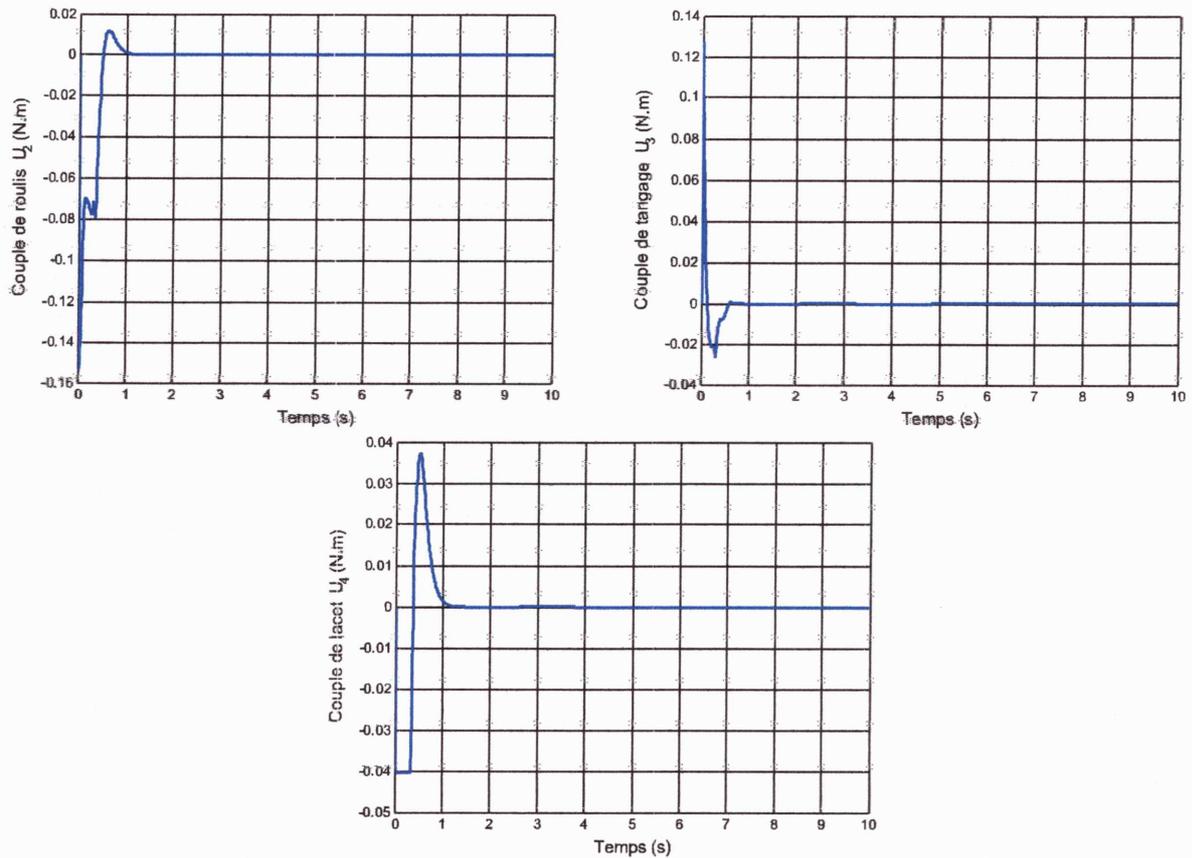


Figure V.6 : Commandes de stabilisation  $u_2, u_3, u_4$  (PDCPP).

La **Figure V.5** montre que la commande par placement de pôles améliore les performances de la réponse transitoire par rapport à la commande PDC, elle augmente la rapidité du système (diminue le temps de stabilisation) et améliore la stabilité (pas d'oscillation au régime transitoire). La **Figure V.6** montre aussi que les commandes sont plus lisses et réalisables.

### V.3. Etude de robustesse :

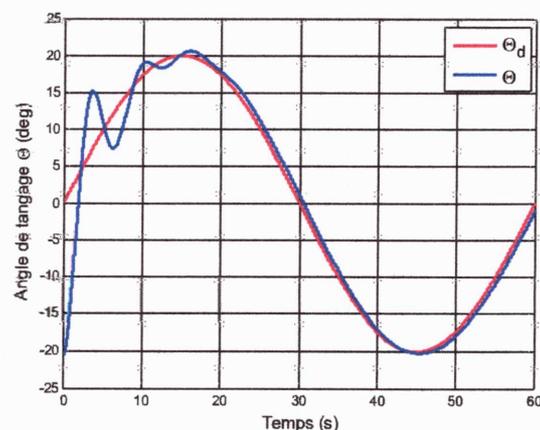
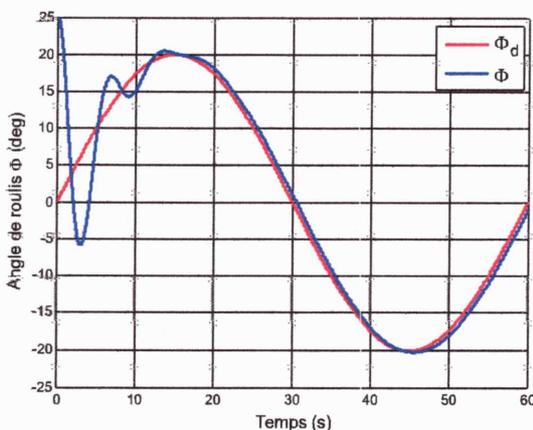
En général, pour analyser la robustesse d'un système incertain, on est amené à introduire les termes incertains dans la dynamique du système et ensuite étudier la stabilité et la convergence du système en présence de ces incertitudes. Trois catégories d'incertitudes peuvent être considérées. La première catégorie regroupe les bruits de mesures. La deuxième catégorie regroupe les incertitudes dues à la variation des paramètres du système par rapport aux paramètres nominaux. La troisième catégorie regroupe les perturbations extérieures qui peuvent affecter le système. Dans ce qui suit, une étude de robustesse est réalisée sur les lois de commande développées précédemment, pour vérifier la robustesse de l'approche proposée face aux variations paramétriques et aux perturbations ajoutées à l'entrée de commande.

Dans la suite, nous allons visualiser les commandes sans ou avec perturbations pour l'attitude du quadrirotor, en utilisant, les commandes synthétisées précédemment. Pour faire ces tests, nous avons fixé les états initiaux à  $(\phi, \theta, \varphi) = 25^\circ, -20^\circ, 30^\circ$  et le pas d'échantillonnage à 0.01 sec et le temps de simulation à 60 sec.

#### V.3.1. Commande sans perturbation :

Dans ce test, une trajectoire sinusoïdale est testée pour visualiser la qualité de poursuite des commandes PDC, PDCPP.

##### V.3.1.1. Commande PDC :



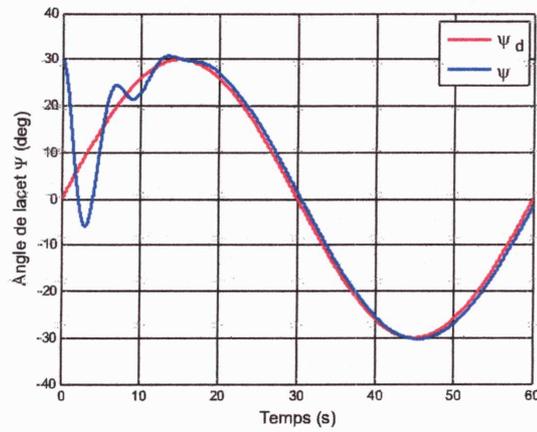


Figure V.7 : Attitude du quadrirotor, (PDC, sans perturbation).

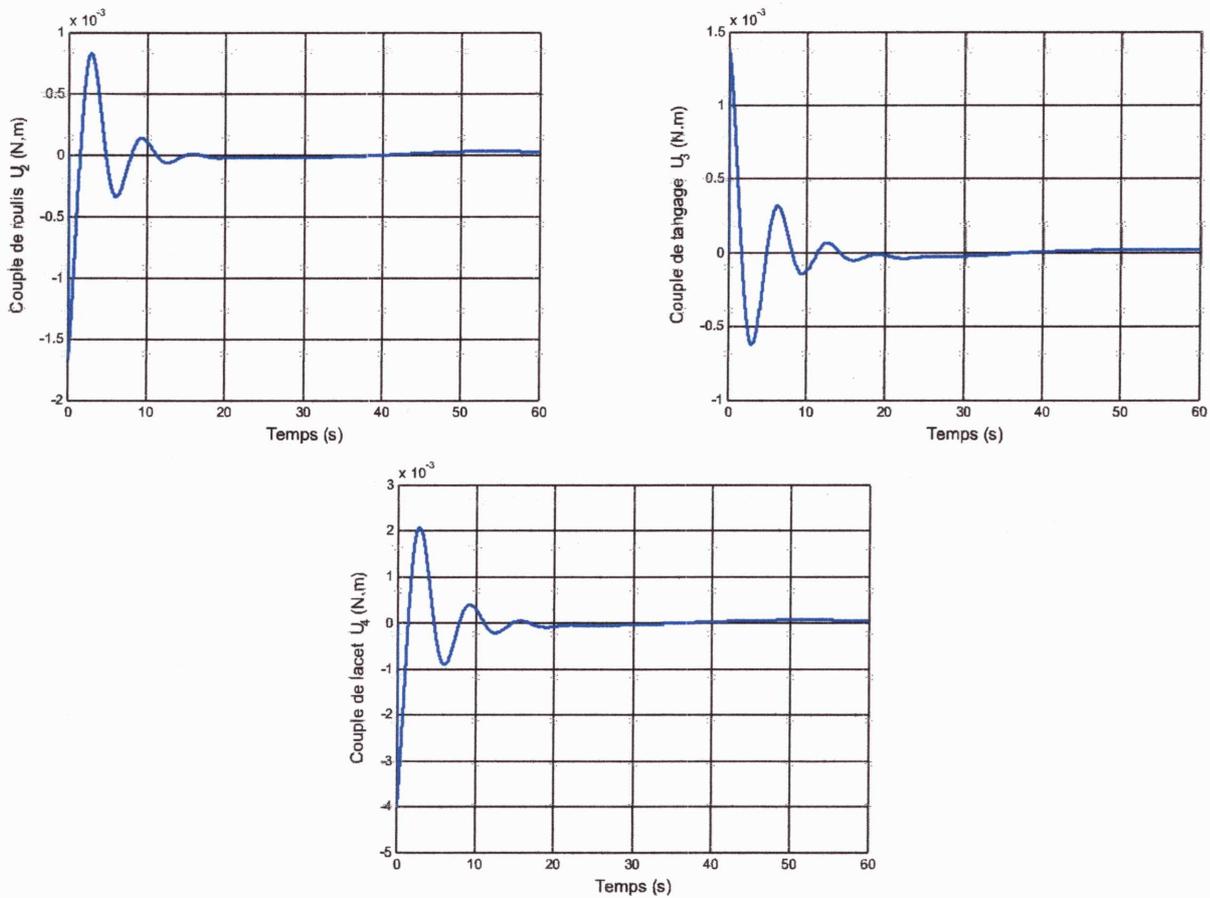


Figure V.8 : Commandes appliquées (PDC, sans perturbation).

**V.3.1.2. Commande PDCPP :**

Pour la commande avec placement de pôles régional PDCPP, on prend les paramètres suivants :  $\rho = 3, q = 8$ .

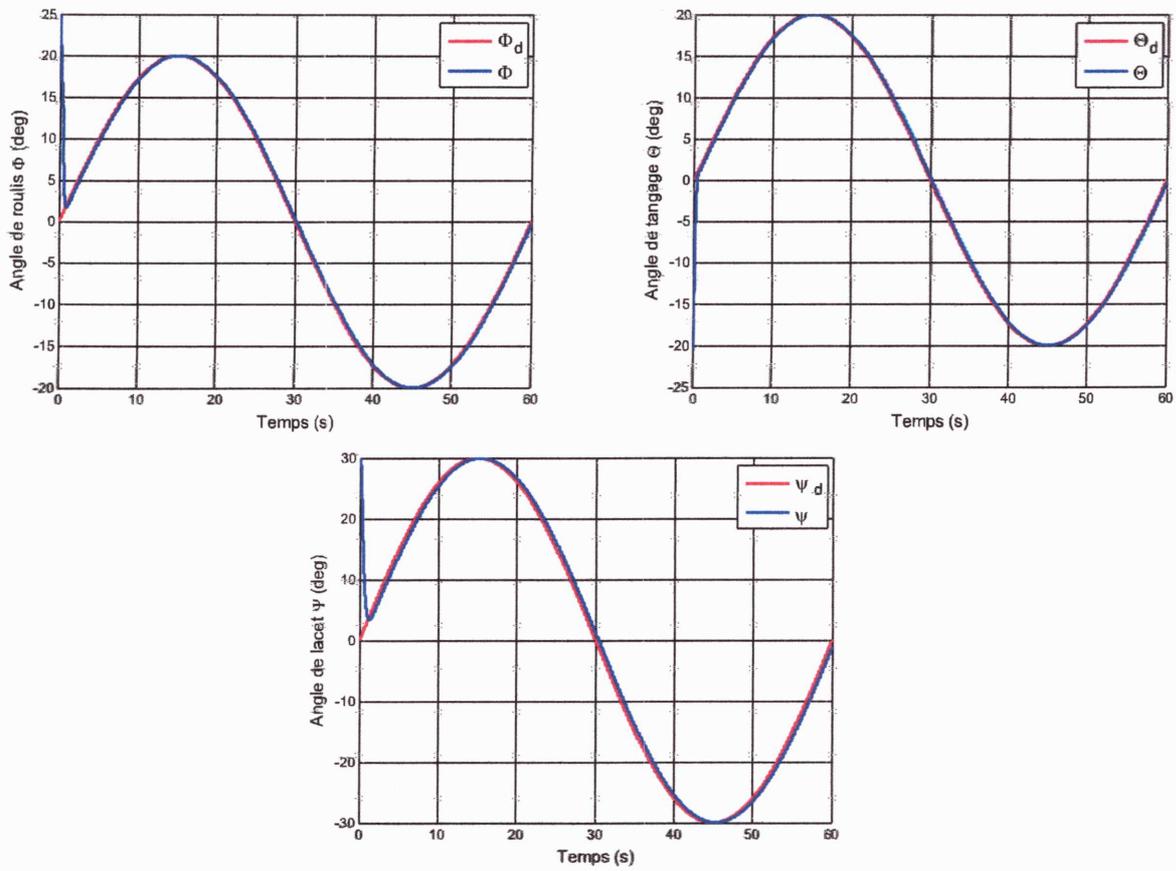


Figure V.9 : Attitude du quadrirotor, (PDCPP, sans perturbation).

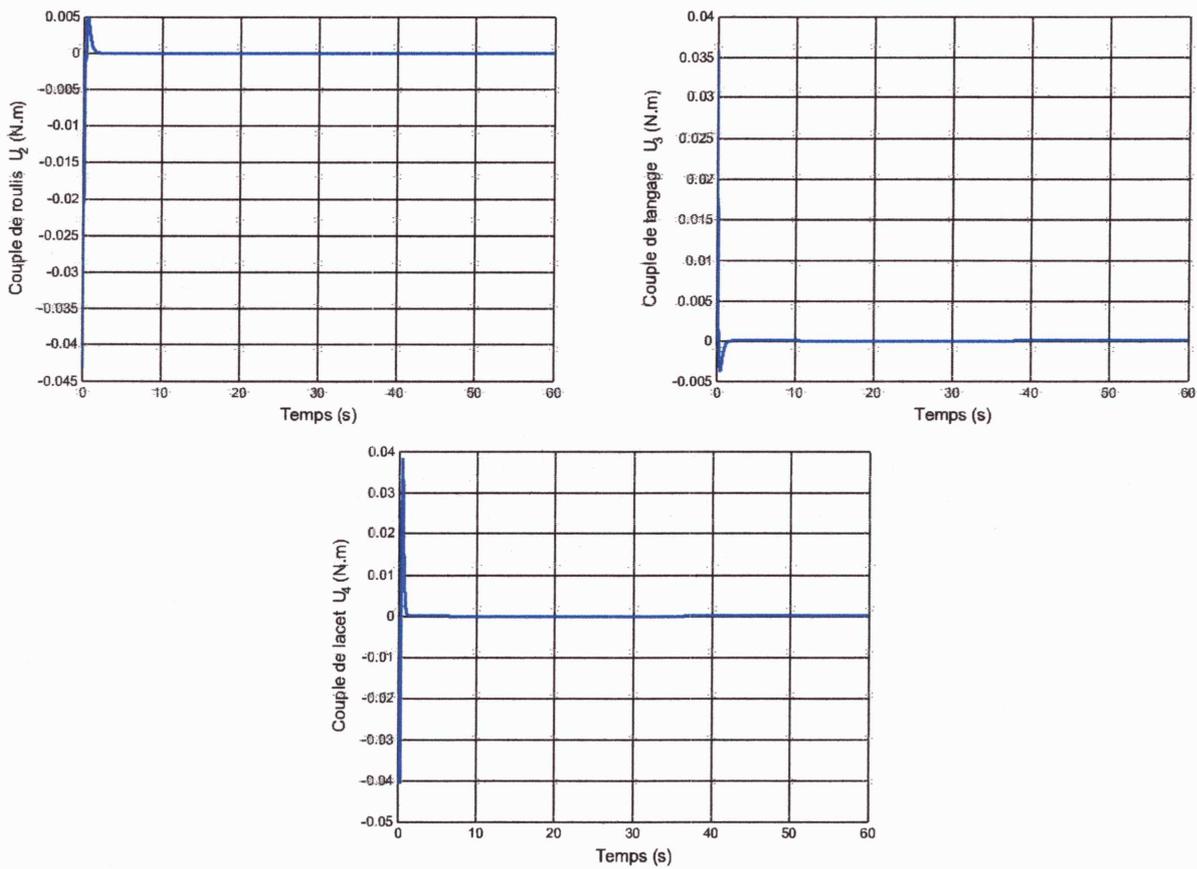


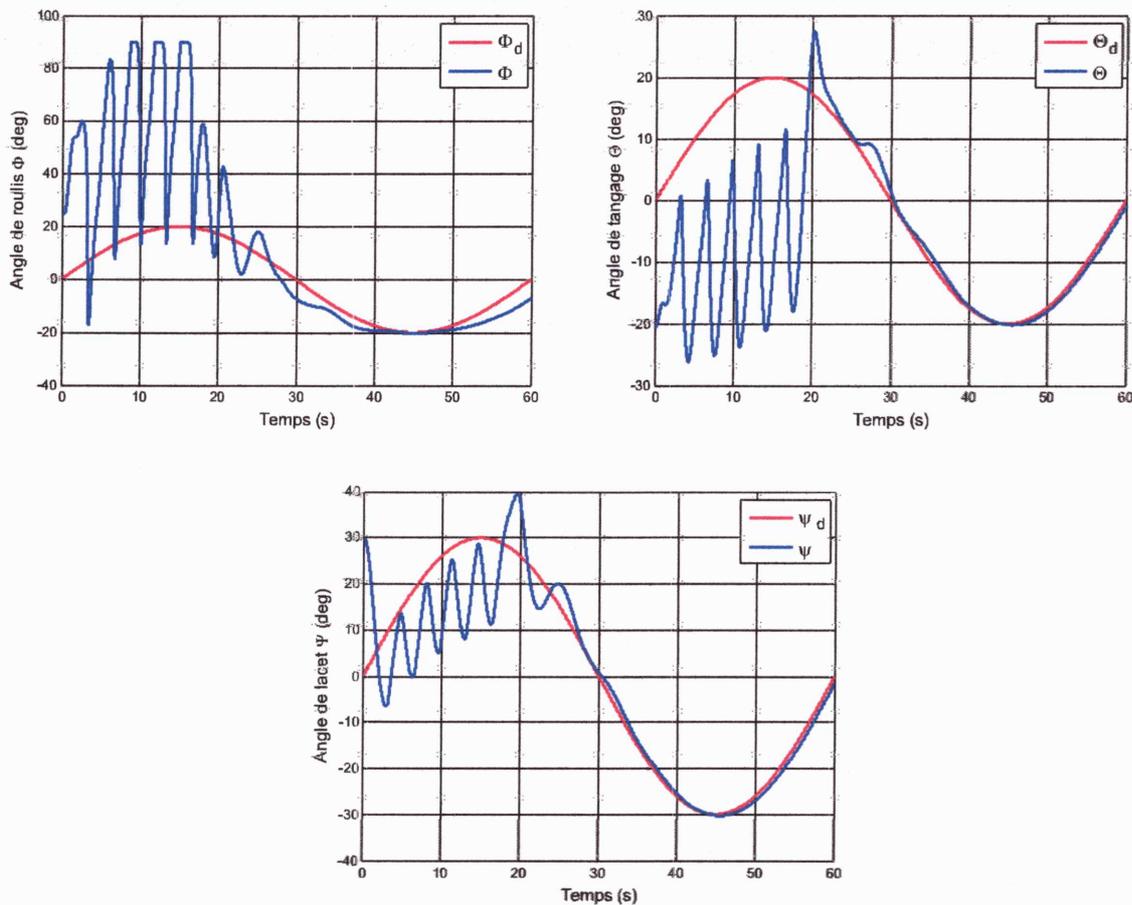
Figure V.10 : Commandes appliquées (PDCPP, sans perturbation).

### V.3.2. Commande avec variation paramétrique :

Certains paramètres dans le système peuvent être incertains dans certains cas ; dans d'autres cas, ces paramètres peuvent changer avec le temps. Pour le système du quadrirotor, c'est le cas des paramètres d'inerties (les paramètres  $I_x, I_y, I_z$ ). La densité de l'air, la géométrie de l'hélice, la longueur de la corde, la forme et l'angle du tangage des hélices du rotor et d'autres facteurs peuvent produire des incertitudes dans le paramètre  $b_i$ .

Pour vérifier la robustesse du contrôleur face aux variations paramétriques, une variation de 100% des paramètres ( $I_x, I_y, I_z$ ). Les résultats obtenus sont représentés sur les *Figures (IV.11) (IV.13)*. Celles-ci illustrent la robustesse du contrôleur aux variations paramétriques.

#### V.3.2.1. Commande PDC :



*Figure V.11* : Attitude du quadrirotor, (PDC, Variation paramétrique).

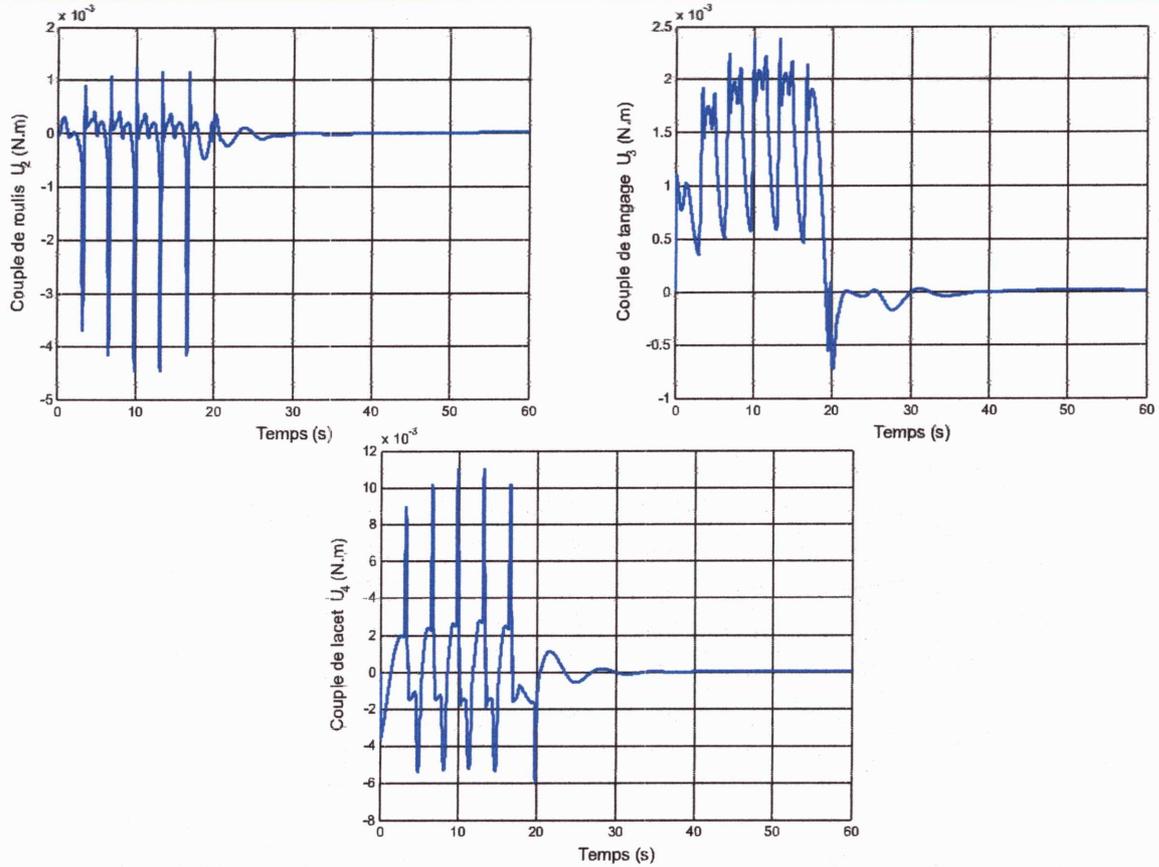


Figure V.12 : Commandes appliquées (PDC, Variation paramétrique).

V.3.2.2. Commande PDCPP :

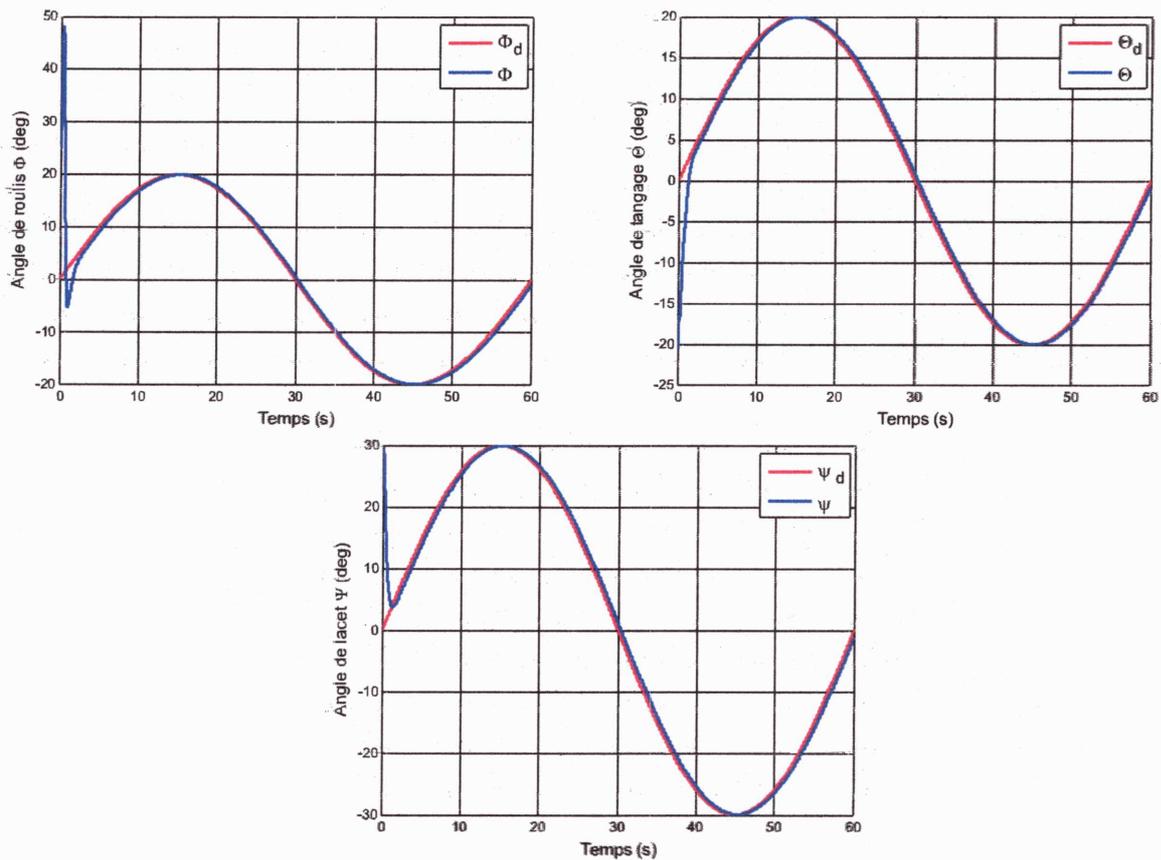


Figure V.13 : Attitude du quadrirotor, (PDCPP, Variation paramétrique).

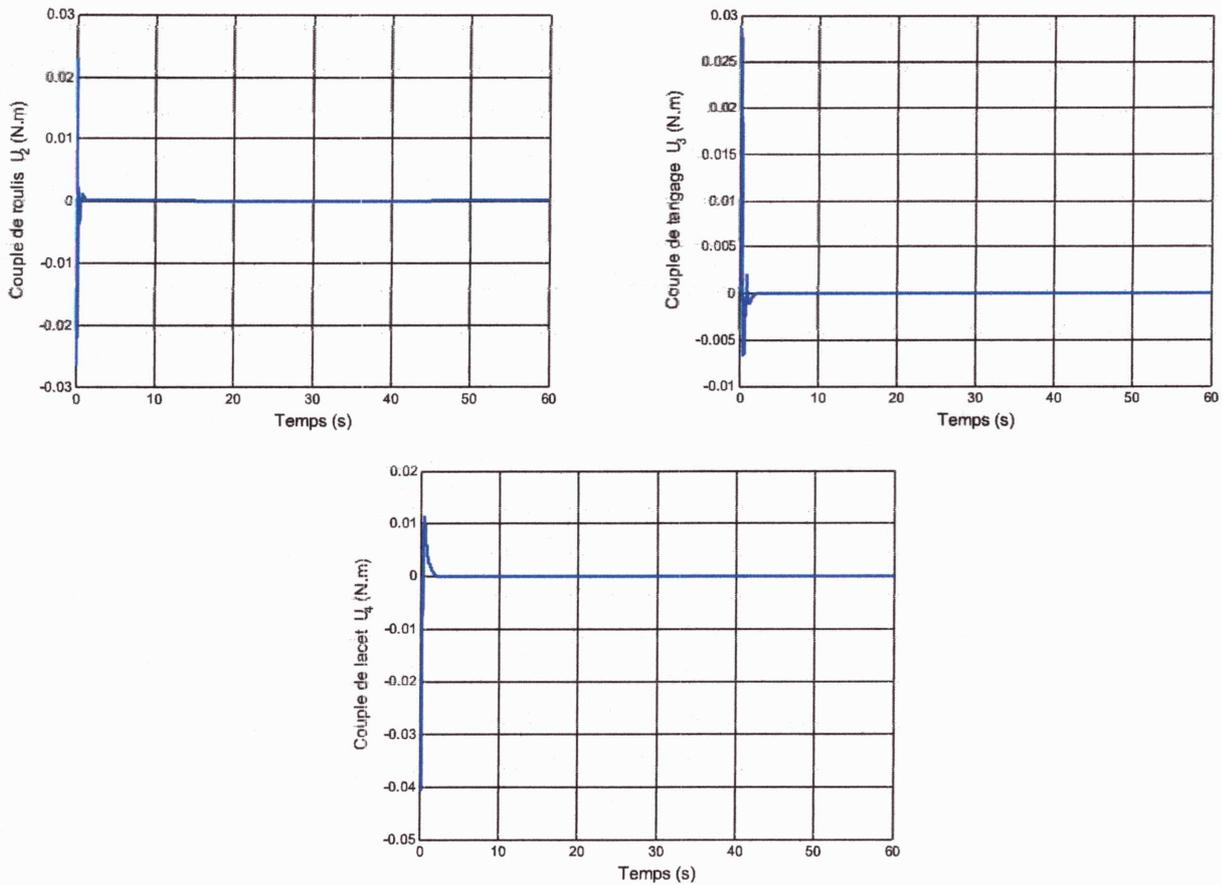
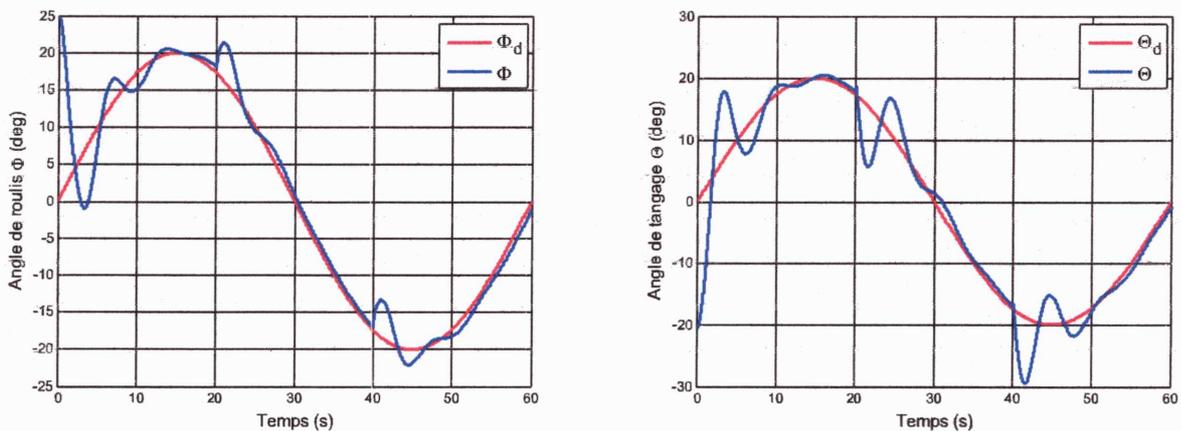


Figure V.14 : Commandes appliquées (PDCPP, Variation paramétrique).

**V.3.3. Commande avec perturbation ajoutée à l'entrée de commande :**

Dans ce test la commande sera sujette à une entrée de perturbation qui sera ajoutée au vecteur de commande. La perturbation est ajoutée à l'entrée de commande à l'instant 20, et 40 secondes pour les angles de roulis, de tangage et de lacet respectivement.

**V.3.3.1. Commande PDC :**



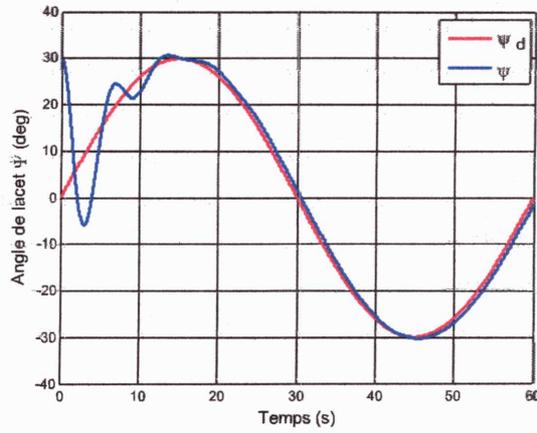


Figure V.15 : Attitude du quadrirotor, (PDC, perturbation ajoutée à la commande).

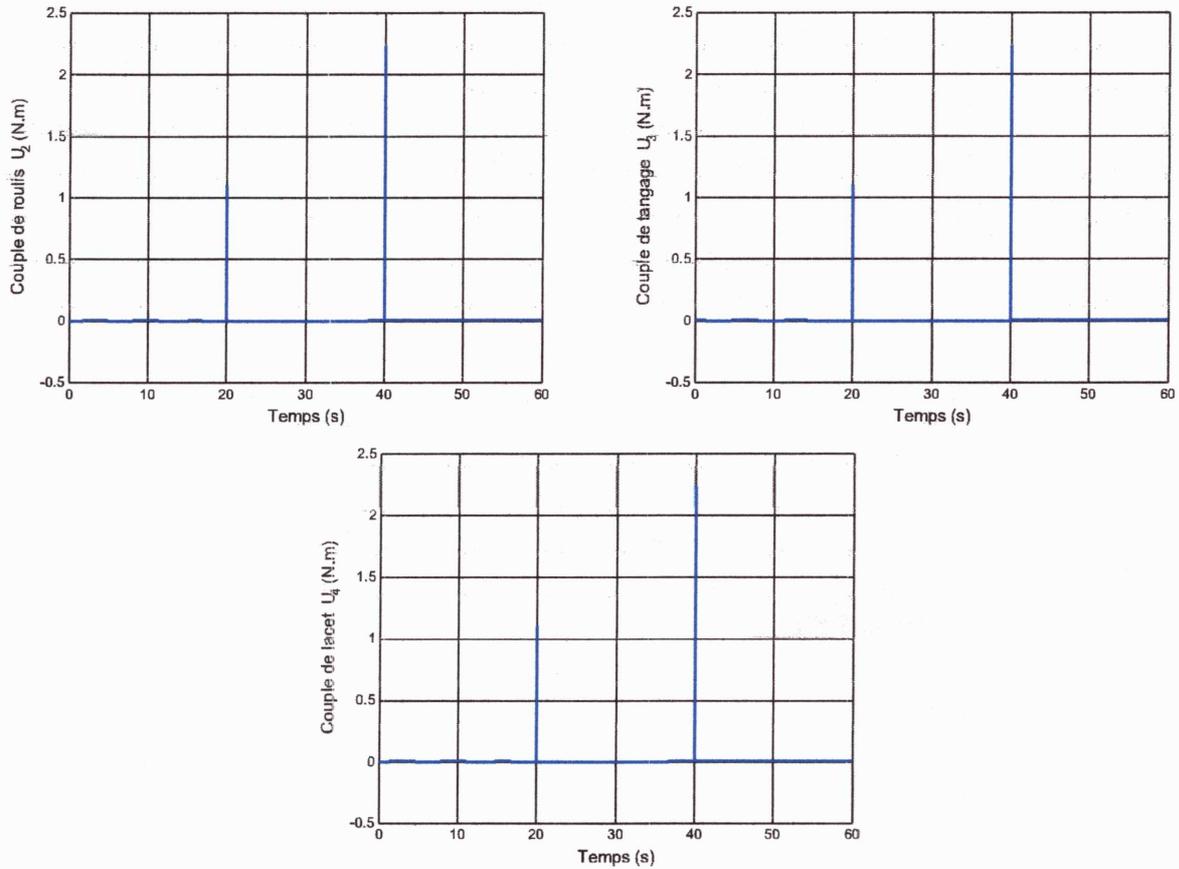
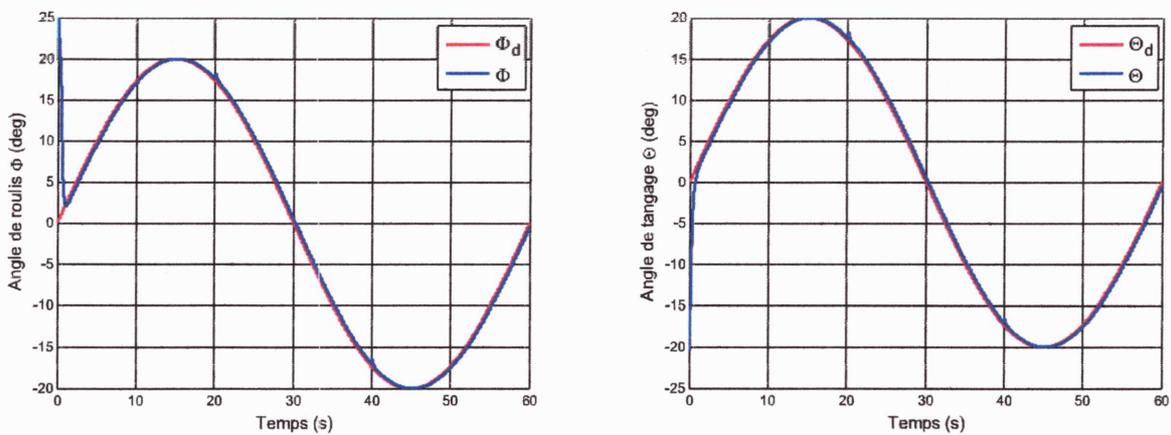


Figure V.16 : Commandes appliquées (PDC, perturbation ajoutée à la commande).

V.3.3.2. Commande PDCPP :



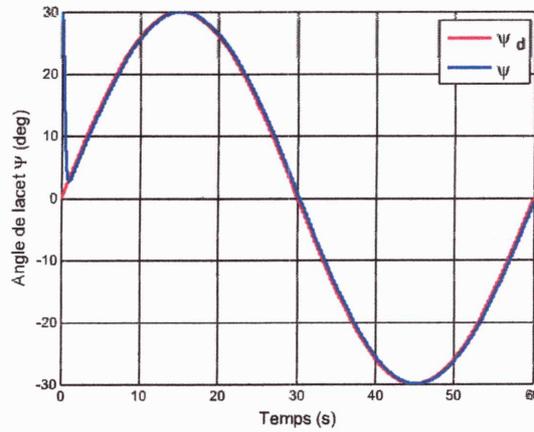


Figure V.17 : Attitude du quadrirotor, (PDCPP, perturbation ajoutée à la commande).

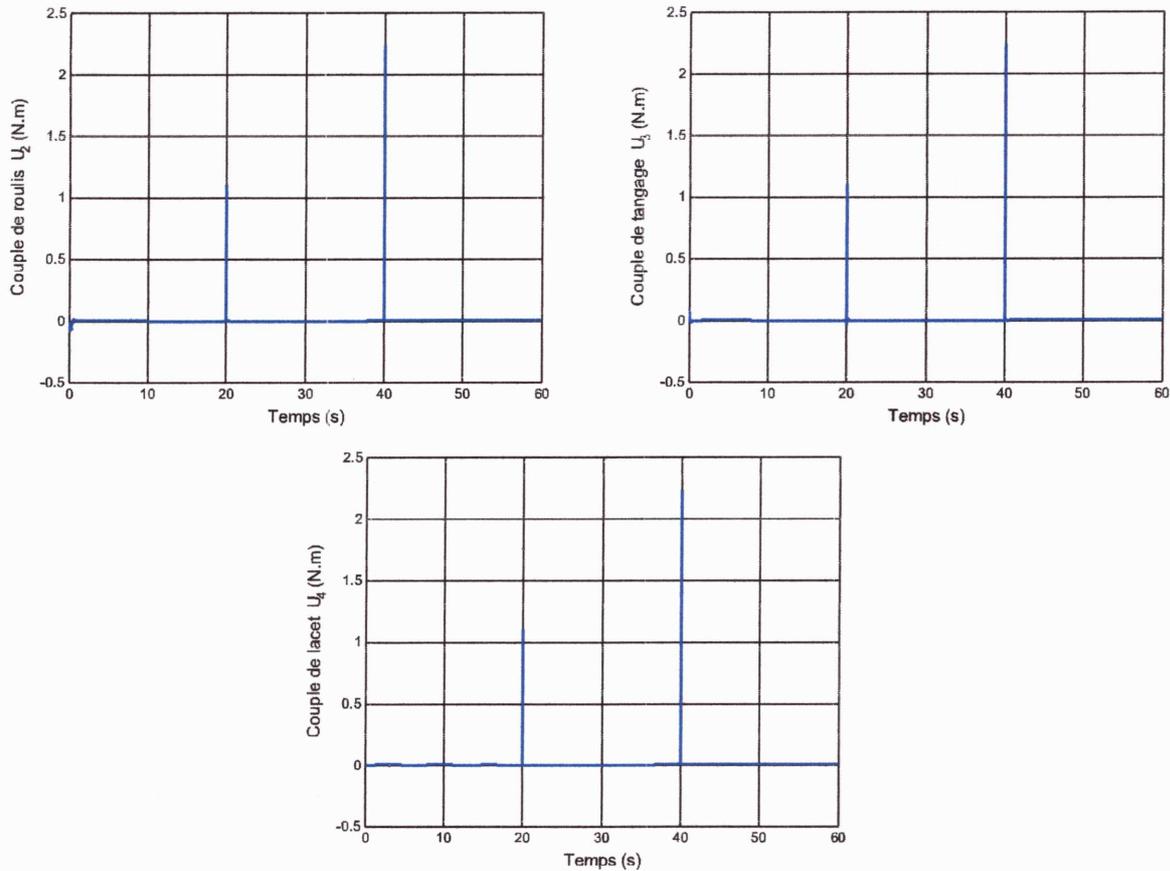


Figure V.18 : Commandes appliquées (PDCPP, perturbation ajoutée à la commande).

Dans la *Figure V.15* on remarque une augmentation importante des angles lors de l'injection de la perturbation après elles reviennent à suivre leurs références, alors qu'une légère augmentation est notée dans la *Figure V.17*, et sa preuve que la commande PDCPP est plus robuste que la commande PDC vis à vis les perturbations à l'entrée de commande.

Ces résultats montrent la capacité de l'approche proposée au rejet de perturbations externes, on peut citer à titre d'exemple, les rafales de vent lors des vols réalisés à l'extérieur.

#### V. 4. Conclusion :

Dans ce chapitre, La stabilisation de l'attitude de quadrirotor représenté par un modèle TS est considérée. Pour cela nous avons étudié et développé une commande non linéaire à base de commande linéaire en utilisant l'approche multimodèle. Deux commandes ont été développées et testées avec succès sur le quadrirotor la commande PDC et la commande PDCPP, en remarque que la commande PDCPP améliore les performances de la réponse transitoire par rapport à la commande PDC, elle augmente la rapidité du système (diminue le temps de stabilisation) et améliore la stabilité (pas d'oscillation au régime transitoire), la commande aussi est plus lisse et réalisable.

Les résultats de teste de robustesse sur les différentes commandes développées pour le système du quadrirotor, confirment que ces commandes synthétisées par l'approche multimodèle, sont robustes vis-à-vis les variations paramétriques et les perturbations ajoutées à l'entrée de commande, et que la commande avec placement de pôles régional (PDCPP) est la plus robuste.

*CONCLUSION  
GENERALE*

## *Conclusion Générale*

Notre travail a pour objectif d'aborder une approche de commande sans modèle stabilisant pour les engins volants de type quadrirotor. Afin d'atteindre notre objectif nous avons présenté dans le premier chapitre l'approche multimodèle et ces différentes structures. Dans le contexte de la modélisation, l'approche multimodèle a été choisie pour les nombreux avantages qu'elle apporte au niveau de l'analyse de stabilité. Cette structure a fait l'objet de nombreuses études dans différents domaines comme l'identification, la commande ou l'estimation d'état.

Nous avons établi le modèle dynamique du quadrirotor par le formalisme de Newton-Euler qui décrit presque tous les phénomènes physique agissant sur le quadrirotor par un vecteur des équations différentielles non linéaires de deuxième ordre. Ce modèle montre la nature couplée, complexe, non linéaire, multivariables et sous-actionné de ce système, ce qui rend son contrôle relativement difficile. Une linéarisation du modèle établie est effectuée autour d'un point de fonctionnement a fin de synthétiser un réseau des modèles locaux qui représente le modèle non linéaire du quadrirotor.

Après avoir établi le modèle dynamique et synthétisé le réseau des modèles locaux, nous avons donné un aperçu général sur la logique floue et les différents types des modèles flous. Nous intéressants également des modèles flous de Takagi Sugeno qui peuvent être continu ou discrète et à la stabilité de ce type des modèles flous en utilisent une fonction quadratique de Lyapunov qui nous conduit à des conditions de stabilité sous forme LMI. L'utilisation d'une telle fonction de Lyapunov nous permet d'assurer la stabilité globale du système.

Dans le cadre de la commande du quadrirotor nous allons présenter la synthèse de deux techniques de commande pour la stabilisation de l'attitude du quadrirotor, la commande PDC et la commande PDCPP. Elles sont des commandes simples et faciles à mettre en œuvre. Elles sont basées sur un modèle linéaire tiré à partir d'un modèle non linéaire simplifié du quadrirotor. Les résultats de simulation effectuée sur le quadrirotor nous permirent de valider les commandes synthétisées et la robustesse vis-à-vis des perturbations en entrées, et des variations paramétriques. Les commandes proposées peuvent être appliquées à n'importe quel quadrirotor avec différentes masses et longueurs.

L'ensemble des perspectives que nous estimons abordables sera présenté. Elles peuvent apporter soit des améliorations, soit des nouveautés aux contributions apportées par ce travail.

- On espère bien l'implémentation de nos lois de commande pour la stabilisation de l'attitude du quadrirotor.
- Il serait très intéressant de tester ces lois de commande dans un environnement réel (par l'ajout des perturbations) et pratique (sur un quadrirotor réel).

# BIBLIOGRAPHIE

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] YACEF Fouad. Réseaux de modèles locaux pour la commande d'un UAV de type Quadrotor. Thèse de Magistère de l'Ecole Militaire Polytechnique 2011.
- [2] Abdelkader AKHENAK. Conception d'observateurs non linéaires par approche multimodèle: application au diagnostic. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, December 2004.
- [3] T. A. Johansen et A. B. Foss, Constructing NARMAX using ARMAX, International Journal of Control, 1993.
- [4] Mohammed OUDGHIRI, Commande multimodèles tolérante aux défauts : Application au contrôle de la dynamique d'un véhicule automobile. Thèse de Doctorat de L'université De Picardie Jules Verne, Octobre 2008.
- [5] V-H GRISALES PALACIO, Modélisation Et Commande Floucs De Type Takagi-Sugeno Appliquées À Un Bioprocédé De Traitement Des Eaux Usées. Thèse de Doctorat Université Paul Sabatier – Toulouse. février 2007.
- [6] ZIANI Salim, Contrôle Multiobjectif Via la Paramétrisation de Youla et l'Optimisation LMI. Thèse de Magistère Université Mentouri, Constantine. Novembre 2006.
- [7] Ahmed RHIF, Commande par approche à mode glissant multimodèle, Mastère En Automatique et Traitement de Signal. Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis. Octobre 2008.
- [8] Sylvain BERTRAND, Commande de drone miniature à voilure tournante, l'université de Nice Sophia Antipolis, novembre 2007.
- [9] H. Osmani, Mise en oeuvre d'une unité de commande pour robot volant de type Quadrotor. Thèse Magistère, Ecole Militaire Polytechnique, Alger, Algérie, 2009.
- [10] L. Derafa, *et al.*, Dynamic Modelling and Experimental Identification of Four Rotors Helicopter Parameters. in *IEEE International Conference on Industrial Technology* , Mumbai, India, 2006, pp. 1834-1839
- [11] ZADEH, L., Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes, *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, vol.1, pp.28-44, 1973.
- [12] R. Murray-Smith and T.A. Johansen. Multiple model Approaches to Modelling and Control. Taylor & Francis, London, 1997.
- [13] BABUŠKA, R., Fuzzy Modeling for Control. Kluwer Academic Publishers, Mass., USA, 1998.

- [14] DJAABOUB Salim. Logique floue et SMA : Aide à la décision floue dans les systèmes multi-agents. Thèse de Magister Universitaire Mentouri de Constantine. 2009.
- [15] TAKAGI, T., SUGENO, M., Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control, IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, vol.15, n1, pp.116-132, 1985.
- [16] SUGENO, M., KANG, G.T., Structure identification of Fuzzy model, Fuzzy Sets and Systems, vol.28, pp.15-33, 1988.
- [17] M. Boutayeb, Identification of Nonlinear Systems in the Presence of Unknown but Bounded Disturbances, IEEE Trans. On Automatic Control, 2000.
- [18] Gonzalo Cabodevila, Commande et Identification floue, École Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques. France, 2007.
- [19] G.V.S. Raju, Hierarchical fuzzy control. International Journal of Control, vol. 54, pp. 1201-1216, 1991.
- [20] M. Chadli, Stabilité et commande des systèmes décrits par des multimodèles. Thèse doctorat, département de formation doctorale en automatique, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 2002.

**Résumé-** L'objectif de ce travail est en premier lieu de synthétiser un réseau de modèles locaux pour un UAV de type Quadrirotor par l'approche multimodèle. En second lieu, de développer des commandes non linéaires basées sur une commande linéaire, simple et efficace afin d'assurer les performances requises et de tenir compte des limitations énergétiques, en utilisant l'approche multimodèle. La structure des commandes proposées considère le système global non linéaire comme un ensemble de sous systèmes linéaires, en divisant l'espace de fonctionnement en plusieurs zones. Pour chaque système linéaire, une commande est synthétisée, celle-ci assure la stabilité du système global autour d'un point de fonctionnement. La commande du système global est obtenue par interpolation des commandes linéaires en utilisant des fonctions d'activations normalisées, elle assure la stabilité du système global.

**Mots clés :** Réseaux de modèles locaux, Commande linéaire, Quadrirotor, Approche multimodèle.

**Abstract-** The aim of this work is to design in first step a local model network for an UAV (Quadrirotor) using multiple model approach. Secondly, to develop nonlinear control based on a simple and effective linear control in order to ensure the necessary performances and to take account of the energy limitations, by multiple model approach. The structure of the suggested controls considers the non linear global system as a set of sub-linear systems, by dividing the operation space into several zones. For each sub-linear system a controller is synthesized, this controller ensures global system stability around the operation point. Normalized activation functions are used to interpolate the linear controllers in order to generate the global system controller.

**Key words:** Local model network, Linear control, Quadrirotor, Multiple model approach.

**ملخص:** يهدف هذا العمل إلى تصميم شبكة أنظمة محلية لروبوت طائر ذو أربع محركات باستخدام نظرية النماذج المتعددة. كما يهدف هذا العمل إلى تطوير أساليب التحكم غير الخطية المستندة إلى تقنيات تحكم خطية بسيطة وفعالة بالاعتماد على نظرية النماذج المتعددة. قوانين التحكم السابقة تعتمد على تقسيم النظام إلى مجموعة أنظمة خطية وذلك بتقسيم فضاء عمل النظام إلى عدة مناطق. كل منطقة ممثلة بنظام خطي. لكل نظام خطي نقوم بتصميم قانون تحكم خطي. قانون التحكم في النظام الإجمالي صمم عن طريق تجميع قوانين التحكم الخطية باستخدام دوال تفعيل معيرة، هذا القانون يضمن استقرار النظام الإجمالي.

**كلمات مفتاحية :** شبكة أنظمة محلية، تحكم خطي،، روبوت طائر ذو أربع محركات، نظرية النماذج المتعددة.