

Republique Algerienne Democratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

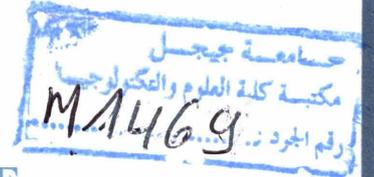


Université de Jijel

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département d'Automatique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE



*Pour l'obtention du Diplôme Master en Automatique et
Traitement de Signal*

Thème :

**Commande anti-windup des systèmes
saturés**

Membres de jury :

- SAIFIA Dounia (MCB), Encadreur
- Oucief Nabil (MAA), Examineur
- Doudou Sofiane (MCB), Président

Réalisé par :

- BENT MOHAMED OULD
SIDI LAMINE Marieme
- CHEBBAHE Nesrine

Promotion : 2013

Remerciement

Nous remercions DIEU le tout puissant de nous avoir donné le courage et la volonté d'achever ce travail et sans lequel il n'aurait jamais été accompli.

Nous tenons à remercier notre encadreur Mme. Dounia SAIFIA pour nous avoir donné l'opportunité de travailler sur ce projet, pour les conseils, les suggestions et les encouragements qu'elle nous a apportés durant ce projet.

Nous remercions aux membres de jury qui ont accepté de juger notre travail.

Merci à tous les enseignants qui nous ont suivis tout le long de notre formation.

Merci à toute personne qui a participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Louange à DIEU

A le plus cher homme du monde, mon père : Mohamed ould Sidi Elemine la source de patience, la volonté, et le courage.

(Je remercie du fond de mon cœur) ;

A la femme la plus chère au monde, ma très chère mère : Salka Valle bente Dey la source de tendresse qui a tout donné sans rien recevoir.

(Je remercie du fond de mon cœur) ;

A tous chers frères, mes chères sœurs, ses enfants, et toute ma famille.

Pour leur affection, compréhension et patience

Au mes chères amies et copines et tout de son nom.

Au symbole de tolérance mon binôme Nesrine.

Tous mes collègues de la promotion 2ieme année master automatique 2013 /2014 option ATS

A tous ceux que J'aime et n'aiment ;

Je dédie ce modeste travail.

MARIEME

Dédicace

Louange à DIEU

A le plus cher homme du monde, mon père : Ramdane la source de patience, la volonté, et le courage.

(Je remercie du fond de mon cœur) ;

A la femme la plus chère au monde, ma très chère mère : Masouda la source de tendresse qui a tout donné sans rien recevoir.

(Je remercie du fond de mon cœur) ;

A tous chers frères, mes chères sœurs, ses enfants, et toute ma famille.

Pour leur affection, compréhension et patience

Au mes chères amies et copines Siham et Nawal et djamil et tout de son nom.

Au symbole de tolérance mon binôme Marieme.

Tous mes collègues de la promotion 2ieme année master automatique 2013 /2014 option ATS

A tous ceux que J'aime et n'aiment ;

Je dédie ce modeste travail.

NESRINE

Symboles et abréviations

Ensembles et domaines

$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$	espace réel (resp. complexe) euclidien de dimension n
$\mathbb{R}^{n \times m}, \mathbb{C}^{n \times m}$	ensemble des matrices réelles (resp. complexe) de dimension $n \times m$
ε	Ellipsoidal
$S(R_j, d_j)$	région polynomiale
n_c	l'ordre dynamique de sortie de compensateur
\mathbb{R}, \mathbb{C}	ensemble des nombres réels (resp. Complexe)
\mathbb{R}^+	ensemble des nombres réel positifs

Sous-espaces de fonctions

j	nombre imaginaire tel que $j^2 = -1$
s	variable de la transformée de Laplace d'un signal continu
ℓ_2	espace des signaux continus

Matrices, opérations et lois matricielles

$P > 0, P \geq 0$	matrice P symétriques définis (resp. semi définie) positive.
$A(i)$	la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice (A)
A'	matrice transposée
I_m	matrice d'identité eux commande
W, Y, Z	matrice diagonales définies positive
A, B, C, D	matrices constantes de dimension appropriées
$I_n, 0_{n \times m}$	matrice identité (resp. nulle) de dimension $n \times m$

Symboles et abréviations

$I, 0$	matrice identité (resp. nulle) de dimension appropriée.
$P > Q, P - Q > 0$ (resp. $P - Q > 0$)	pour P, Q symétriques $\in \mathbb{R}^{n \times n}$
$diag(A_1, \dots, A_p)$	matrice bloc-d'éléments
$V(x)$	fonction de Lyapunov
P_{Af}	matrice en boucle fermée
$(M)^{-1}$	inverse de matrice
<i>trace</i>	trace de matrice
$H(p)$	fonction de transfert
$P_A(\lambda)$	polynôme caractéristique
$\psi(v)$	non-linéarité de zone morte

Abréviations

P	Proportionnel
PI	Proportionnel Intégrale
AW	Anti-windup
LMI	Linear Matrix Inequality
LPV	Linéaire Paramètre Variantes
Sat	Saturation
BMI	Bilinear Matrix Inequality
LTI	Linear Time Invariant

Symboles et abréviations

SISO Signale Input Signal Out-put, Mono-Entrée Mono-Sortie

LFT Lineare Fontinal Transformation

Ud Entrés désiré



Liste des figures

Figure 1.1 : représentation d'état	7
Figure 1.2 : retour d'état	10
Figure 1.3 : contractilité des trajectoires.....	17
Figure 2.1 : la fonction de saturation	25
Figure 2.2 : Saturation de position.....	26
Figure 2.3 : la normalisation des entrées	26
Figure 2.4 : Saturation en position normalisée	27
Figure 2.5 : zone-morte de saturation de position.....	27
Figure 2.6 : saturation de vitesse.....	27
Figure 2.7 : Conditions de secteur généralisées.....	31
Figure 2.8 : Schéma fonctionnel représentant le passage manuel – automatique- emballement du régulateur	34
Figure 2.9 : schéma de principe du compensateur anti-windup.....	34
Figure 2.10 : trajectoires des réponse pour l'état initiale $x_0 = [-1 \quad -3]^T$	35
Figure 2.11 : trajectoires des réponse pour l'état initiale $x_0 = [-3 \quad -3]^T$	36
Figure 3.1 : Schéma de principe du système avec saturation d'actionneurs.....	40
Figure 3.2 : Schéma de principe d'une commande anti-windup avec saturation d'actionneurs	41
Figure 3.3 : trajectoire de la sortie X avec et sans gain anti-windup pour $X_0 = 9$ et $X_0 = 5$..	48
Figure 3.4 : trajectoire de la commande avec la condition initiale $X_0 = 9$ et $X_0 = 5$	48
Figure 3.5 : simulation de la commande anti-windup.....	49
Figure 4.1 : Schéma de principe du système avec saturation d'actionneurs et de capteurs...	53

Liste des figures

- Figure 4.2** : Schéma de principe d'une commande anti-windup avec saturation d'actionneurs et de capteurs.....64
- Figure 4.3** : la réponse du système de saturation de capteur et actionneur pour l'état initiale $X_{01} = 2$ et $X_{02} = 0$ 65
- Figure 4.4** : la réponse du système de saturation de capteur et actionneur pour l'état initiale $X_{01} = 5$ et $X_{02} = 0$ 66

Table des matières

Introduction générale	1
------------------------------------	---

Chapitre1 .Représentation d'état et Stabilisation des systèmes linéaires

1.1 Introduction	5
1.2 Concept d'état	5
1.3. Conversions Etat / Transfert	7
1.3.1 Matrices de transfert (ou description externe)	7
1.3.2. Représentations d'état d'une fonction de transfert	8
1.4 Commande par retour d'état	10
1.4.1 Principe	10
1.4.2 Systèmes d'écrits sous forme commandable	11
1.5 Le retour d'état statique et dynamique.....	11
1.5.1 Synthèse de correcteurs par retour d'état statique pour systèmes LTI	11
1.6 Retour de sortie	12
1.6.1 Retour de sortie statique	12
1.6.2 Retour de sortie dynamique	13
1.7 Stabilité	13
1.7.1 Stabilité Classique	14
1.7.2 Stabilité au sens de Lyapunov.....	14
1.7.3 Stabilité quadratique	17
1.8. Les Inégalités Matricielles Linéaires LMIs	18
1.8.1 Histoire des LMIs.....	18
1.8.2 Définition	18
1.9 Conclusion	21
Chapitre 2. Saturation d'actionneur	
2.1. Introduction.....	24
2.2. Définition de saturation.....	25

Table des matières

2.3. Fonction de saturation	25
2.4 type des saturations	26
2.4.1 Saturations des actionneurs	26
2.4.2 Saturation en position	26
2.4.3 Saturation en vitesse	27
2.5. Commande saturante et commande contrainte	27
2.6. Modélisation des saturations	28
2.6.1 Modèle polytopique des saturations	28
2.6.2 Modélisation par région de saturation	31
2.6.3 Modélisation de saturation dans chaque région.....	32
2.7 Propriétés géométriques	32
2.7.1. Définition d'un polyèdre	32
2.7.2. Inclusion d'un ellipsoïde dans un polyèdre	33
2.8. anti-windup	33
2.8.1 Le problème d'Emballlement (windup)	33
2.8.2 Anti-emballement (Anti –Windup)	34
2.9 Exemple d'application	35
2.10 Conclusion	37
Chapitre 3. Synthèse anti-windup	
3.1 Introduction.....	39
3.2 Position du problème	39
3.3 Conditions de stabilisation anti-windup.....	42
3.4 Optimisation de la région d'attraction	45
3.5 Application.....	47
3.6 Conclusion	50

Table des matières

Chapitre 4. Saturation d'actionneur et de capteur

4.1. Introduction.....	52
4.2. Position du problème	52
4.3. Stabilisation d'une commande anti-windup en présence de saturation d'actionneurs et de capteurs	55
4.4. Optimisation de la région d'attraction.....	62
4.5. Application.....	64
4.6. Conclusion	68



Introduction générale

Introduction générale

La théorie de la commande moderne se développe dans le but d'expliquer et de résoudre des problèmes qui émanent de l'environnement industriel [1]. Des raisons économiques et sécurité conduisent à la recherche de lois de commande de plus en plus performantes afin de grandir l'efficacité et le rendement et la production d'une part et d'assurer la sûreté et la fiabilité des équipements industriels d'autre part, pour cela, il est important de prendre en compte toutes les particularités d'un système de commande [1].

Au cours de ces dernières années, la théorie de la commande des systèmes linéaires a permis, à partir d'outils mathématiques relativement simples, le développement de techniques et de stratégies de commande pour traiter des problèmes qui sont difficiles à résoudre avec la théorie de la commande classique. Il existe aujourd'hui des méthodes de détermination de lois de commande par exemple, la garantie de certains niveaux de performance, de robustesse vis-à-vis des incertitudes de modélisation. D'une manière générale, ces lois de commande sont conçues sans considérer, a priori de contraintes sur l'amplitude de la commande et/ou des états [1].

Néanmoins, à cause des limitations physiques et technologiques, les actionneurs et les capteurs ne peuvent fournir que des signaux restreints à un certain intervalle d'amplitude. En outre, pour des raisons de sécurité, les états d'un système doivent, en général, rester confinés dans un ensemble spécifique de l'espace d'état. Quelques exemples de ces limitations sont : des vannes qui présentant une ouverture maximale et une ouverture minimale ; des amplificateurs électriques qui doivent opérer dans des frontières d'alimentation en tension ; des actionneurs de chauffage ou de refroidissement ; dont la puissance fournie ou retirée du système ne peut pas dépasser certaines limites ; des convertisseurs de puissance électriques, qui ne peuvent pas actionner des machines que dans les limites des puissances pour lesquelles ils ont été conçus ; des contraintes sur le couple moteur et la vitesse des machines électriques. Nous pouvons donc conclure que, le problème de saturation des commandes et/ou des états est présent dans pratiquement tous les systèmes de commande [1]. L'application de lois de commande sans prendre en compte la possibilité de saturation peut avoir des conséquences indésirables ou même catastrophiques [2]. Si le système de commande en boucle fermée est conçu d'une façon linéaire pour satisfaire certains objectifs de commande, l'apparition imprévue de la saturation peut alors dégrader la satisfaction de tels objectifs. Par ailleurs, le système en boucle fermée peut présenter des points d'équilibre parasites, ou même devenir instable à cause de caractéristiques non linéaires de la saturation [4]. C'est des problèmes issus de la pratique qui sont nés la motivation et l'intérêt pour l'analyse et la synthèse des systèmes de commande soumis à la saturation.

Introduction générale

Un sujet qui a suscité beaucoup d'intérêt de puis quelques années, c'est le phénomène de windup en anglais apparait si aucune précaution n'est prise lors de la synthèse du correcteur. L'origine de ce phénomène est le fait que la commande calculée par le correcteur est différente de celle appliquée réellement au système, la saturation est convertie en zone morte. Les conditions de stabilité pour le système sont établies formulées et résolus par un problème d'optimisation LMI (Linear Matrice Inégalité) [7].

De nombreux travaux, concernant l'étude de la stabilité du modèle linéaire avec saturation de capteurs et d'actionneurs par la fonction de Lyapunov ont été publiés [7]. Certains travaux ont fait appelés aux fonctions de Lyapunov quadratiques et sa formulation LMI [7].

L'objectif principal de ce travail est d'analyser une loi de commande stabilisante avec un compensateur anti-windup pour les systèmes linéaires en présence de saturation de capteurs et d'actionneurs.

Notre mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous introduisons des généralités sur les systèmes linéaires ainsi leur stabilisation par la fonction de Lyapunov quadratique.

Dans le deuxième chapitre, nous exposons le problème de l'analyse de stabilité des systèmes linéaires en présence de saturation. Nous décrivons les différents modèles de l'effet de saturation. Ce chapitre, inclut également les différentes méthodes de la conception de lois de commande avec contraintes sur l'entrée et la sortie.

Dans le chapitre trois, nous présentons la synthèse de correcteurs anti-windup pour les systèmes linéaires en présence de saturations d'actionneurs. Les conditions de stabilisation sont issues par les fonctions de Lyapunov quadratiques et écrites sous forme LMI. Une simulation numérique est utilisée pour démontrer l'efficacité de la méthode proposée.

Le chapitre quatre présente la synthèse des systèmes linéaires avec saturation des capteurs et d'actionneurs via la commande anti-windup. La synthèse d'une loi de commande stabilisante est formulée et résolue comme un problème d'optimisation convexe (LMI). En fin, des résultats de simulation sont présentés afin d'illustrer les approches développées au cours de ce chapitre.

Enfin, nous terminons ce mémoire par une conclusion générale avec prospective du travail.

Résumé :

La théorie de la commande des systèmes linéaires a permis, à partir d'outils mathématiques relativement simples, le développement de techniques et de stratégies de commande pour traiter des problèmes qui sont difficiles à résoudre avec la théorie de la commande classique.

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les outils fondamentaux que nous allons utiliser dans ce mémoire. Comme la représentation d'état des systèmes linéaires, la commandabilité, l'observabilité et les différentes méthodes utilisées pour analyser et synthétiser des systèmes saturés, telles que la stabilité au sens de Lyapunov et l'approche LMI.

Sommaire

1.1 Introduction	5
1.2 Concept d'état	5
1.3. Conversions Etat / Transfert	7
1.3.1 Matrices de transfert (ou description externe)	7
1.3.2. Représentations d'état d'une fonction de transfert	8
1.4 Commande par retour d'état	10
1.4.1 Principe	10
1.4.2 Systèmes d'écrits sous forme commandable	11
1.5 Le retour d'état statique et dynamique.....	11
1.5.1 Synthèse de correcteurs par retour d'état statique pour systèmes LTI	11
1.6 Retour de sortie	12
1.6.1 Retour de sortie statique	12
1.6.2 Retour de sortie dynamique	13
1.7 Stabilité	13
1.7.1 Stabilité Classique	14
1.7.2 Stabilité au sens de Lyapunov.....	14
1.7.3 Stabilité quadratique	17
1.8. Les Inégalités Matricielles Linéaires LMIs	18

1.8.1 Histoire des LMIs.....	18
1.8.2 Définition	18
1.9 Conclusion	21

1.1 Introduction

En automatique, une représentation d'état permet de modéliser un système dynamique sous forme matricielle en utilisant des variables d'état. Cette représentation, qui peut être linéaire ou non, continue ou discrète [1].

L'idée de base des représentations d'état est que le futur d'un système dépend de son passé, de son présent et de ses entrées ; le futur peut alors être d'écrit à partir d'un ensemble de variables bien choisies. Contrairement à l'analyse des systèmes qui font appel à la représentation de Laplace, dans le cas des représentations d'état, l'analyse a lieu dans le domaine temporel [2].

1.2 Concept d'état

Soit un processus possédant r entrées $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)^t$ et m sorties $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^t$. Si un vecteur $x(t)$ à n composantes (i.e. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$) est proposé pour représenter l'état du système, cette proposition sera pertinente, s'il lui correspond un système d'équations de la forme:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \text{ dite } \mathbf{\text{équation d'état}}$$

$$y = h(x, u, t) \text{ dite } \mathbf{\text{équation de sortie}}$$

$$\text{ou } f = (f_1, \dots, f_n)^t, \text{ et } h = (h_1, \dots, h_m)^t.$$

Dans cette représentation $x(t) \in R^n$ est appelé vecteur d'état, $u(t) \in R^r$ est appelé vecteur de commande, et $y(t) \in R^m$ est appelé vecteur de sorties.

Dans certaines situations où l'état, les commandes ou les sorties sont soumises à des contraintes (par exemple: saturation des actionneurs), il convient d'être plus précis sur les ensembles dans lesquels évoluent ces vecteurs. On note alors [2] :

- $x(t) \in \chi \subseteq R^n$ avec (x, χ) est le vecteur et espace d'état.
- $u(t) \in u \subseteq R^r$ avec (u, U) est le vecteur et espace de commande.
- $y(t) \in y \subseteq R^m$ avec (y, Y) est le vecteur et espace de sortie.

➤ Système linéaire

Dans de nombreuses situations, la nature du processus ou encore le domaine (réduit) dans lequel évoluent les variables sont tels que les fonctions $f(x, u, t)$ et $h(x, u, t)$ possèdent les propriétés particulières suivantes:

- Elles sont **stationnaires** (ou invariants dans le temps), en ce sens que le temps n'intervient pas explicitement dans les équations. En d'autres termes,

$$f(x, u, t) := f(x, u) \text{ et } h(x, u, t) := h(x, u) \quad (1.1)$$

- Elles sont **linéaires** par rapport à leurs arguments (x et u) soit encore

$$f(x_1 + x_2, 0) = f(x_1, 0) + f(x_2, 0), f(0, u_1 + u_2) = f(0, u_1) + f(0, u_2) \quad (1.2)$$

pour $h(x, u)$. Dans ce cas la représentation d'état précédente pourra toujours se mettre sous la forme matricielle:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

dans la quelle A est une matrice carrée de taille $n \times n$, B est de taille $n \times r$, C est de taille $m \times n$, et D est de taille $m \times n$. Pour alléger l'écriture, on note parfois $\sum(A, B, C, D)$ un système linéaire stationnaire noté et décrit par les matrices (A, B, C, D) .

Note: Dans le cas linéaire mais non invariant dans le temps, on obtient la représentation matricielle précédente avec des matrices qui dépendent du temps ; $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ et $D(t)$ [2].

➤ Systèmes non linéaires, Linéarisation

Soit un système d'écrit par les équations d'état non linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{aligned} \quad (1.4)$$

ou f et h sont suffisamment dérivables par rapport à leurs arguments. Supposons qu'il existe une trajectoire nominale (ou d'équilibre) c'est à dire un triplet $x_e(t)$, $y_e(t)$, et $u_e(t)$ qui vérifie:

$$\dot{x}_e = f(x_e, u_e)$$

$$y_e = h(x_e, u_e) \tag{1.5}$$

Si on suppose de plus que $x(t)$, $y(t)$, et $u(t)$ restent voisins de $x_e(t)$, $y_e(t)$, et $u_e(t)$, on peut linéariser ces équations, c'est à dire fournir une représentation d'état linéaire, valable pour des petits déplacements au voisinage de la trajectoire nominale. On introduit pour cela les écarts comme suit [2] :

$\zeta = x - x_e$, $\omega = u - u_e$, $z = y - y_e$ et un développement en série de Taylor au premier ordre fournit :

$$\dot{\zeta} = A\zeta + B\omega \tag{1.6}$$

avec :

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_e, \quad B = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right)_e$$

$$C = \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right)_e, \quad D = \left(\frac{\partial h_i}{\partial u_j} \right)_e \tag{1.7}$$

à l'équation $\dot{x} = (\cdot)$ correspond un intégrateur (vectoriel), ce qui permet de représenter les systèmes linéaires invariants dans le temps, i.e. régis par (1.3) sous la forme du diagramme fonctionnel suivant dont les grandeurs sont vectorielles [2].

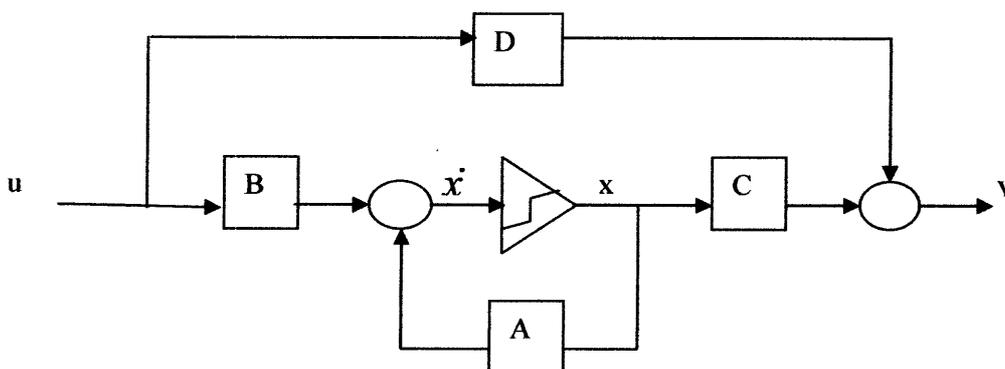


Figure 1.1 : d'un système linéaire

1.3. Conversions Etat / Transfert

1.3.1 Matrices de transfert (ou description externe)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} pX(p) - x(0) = AX(p) + BU(p) \\ Y(p) = CX(p) + DU(p) \end{cases} \quad (1.8)$$

Par inversion formelle de la matrice $(pI_n - A)$ un simple calcul conduit à la relation :

$$Y(p) = [C(pI - A)^{-1}B + D]U(p) + [C(pI - A)^{-1}]x(0) \quad (1.9)$$

Comme dans le cas SISO, l'hypothèse des conditions initiales nulles conduit à la relation entrée/sortie suivante :

$Y(p) = H(p)U(p)$ avec $H(p) = C(pI - A)^{-1}B + D$ dans laquelle $H(p)$ représente une matrice $(m \times n)$ de fonctions de transfert.

1.3.2. Représentations d'état d'une fonction de transfert

Ayant vu qu'il existe une infinité de représentations d'état pour un même système, l'objectif ici est de fournir quelques formes de représentation dites canoniques pour une fonction de transfert $H(p)$ d'entrée $u(t)$, de sortie $y(t)$, et écrite sous la forme (on notera la normalisation $a_n = 1$) suivante [2] :

$$H(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{\text{Num}(p)}{\text{Den}(p)} = \frac{Y(p)}{U(p)} \quad (1.10)$$

➤ Commandabilité, observabilité

La commandabilité et l'observabilité sont deux concepts développés pour la représentation d'état des systèmes qui permettent de caractériser respectivement la possibilité que la commande exerce une influence sur un des états et la possibilité d'obtenir une certaine information d'un des états. Cependant leur concept peut être utilisé dans d'autres représentations.

A. Commandabilité

La commandabilité est une caractéristique d'une représentation d'état d'un système, qui nous indique si une ou plusieurs de ces dynamiques peuvent être modifiées par les entrées.

A.1 Définition :

Un état x_i est commandable en t_0 s'il est possible de déterminer $u(t)/[t_0, t_f]$ conduisant tout état initial $x_i(t_0)$ vers 0 en $t_0 \leq t_1 \leq t_f$. Si cette propriété est vraie $\forall t_0$ et $\forall i = 1, \dots, n$ alors le système est complètement commandable.

Remarques : Si un système n'est pas complètement commandable, alors pour certaines conditions initiales, il n'existe pas d'entrée de commande pouvant ramener le système à l'origine.

La commandabilité est une notion importante puisqu'elle établit le fait que l'on puisse commander le système afin de modifier son comportement (stabilisation d'un système instable, modification des dynamiques propres). Cette notion joue donc un rôle très important dans la théorie de la synthèse de systèmes de commande dans l'espace d'état [2].

A.2 Critère de commandabilité (Kalman)

C'est un critère qui permet de définir la commandabilité d'un système LTI (Linéaire Time Invariant) avec l'information des matrices A et B. Un système LTI représenté par l'équation dynamique d'état :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.11)$$

où $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$ est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité, est de rang n.

$$\text{rang}(Q_c) = \text{rang}\left[\begin{array}{c} B \\ AB \\ \vdots \\ A^{n-1}B \end{array} \right] = n \quad (1.12)$$

Remarque. La commandabilité d'un système de matrices caractéristiques (A, B) sera appelée commandabilité de la paire (A, B).

Rappel. Le rang d'une matrice A est: le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants, et peut se calculer par la taille du plus grand mineur non nul de A. [2].

B. Observabilité

L'observabilité est une caractéristique structurelle complémentaire d'une représentation d'état d'un système, ou d'un système en soi même, qui nous indique la capacité pour un système à déterminer l'historique d'un état à partir de la seule connaissance des variables de sortie mesurées.

B.1 Définition : Un système est dit observable si l'observation de ses entrées et sorties pendant un intervalle de temps fini $[t_i, t_f]$ permet de déterminer l'état initial $x(t_i)$, et donc, par

intégration de l'équation d'état, de connaître $x(t)$ à tout instant appartenant à l'intervalle $[t_i, t_f]$. La condition nécessaire et suffisante d'observabilité ci-après est appelé le critère de Kalman pour l'observabilité. Le système considéré est observable si et seulement si :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} C & CA & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T = n$$

1.4 Commande par retour d'état

1.4.1 Principe

On considère le système décrit par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{1.13}$$

$x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^p$ et pour lequel on suppose que l'ensemble des composantes du vecteur d'état sont accessibles (directement ou par reconstruction). Une commande par retour d'état est une commande de la forme :

$$u = -kx + f v \tag{1.14}$$

Où $v \in R^r$ est une nouvelle consigne, $k \in R^{m \times n}$ et $f \in R^{m \times r}$ sont des matrices généralement constantes. Souvent, f sert à corriger le statisme et k réalise les différents types de commande.

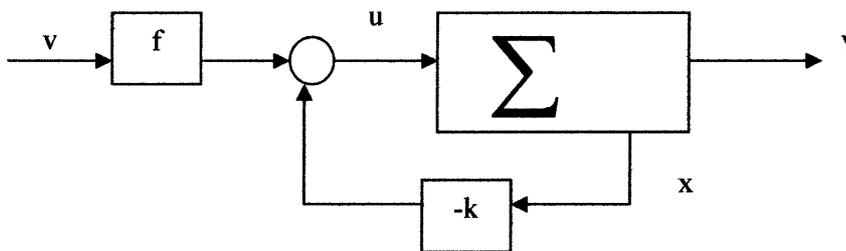


Figure 1.2 : retour d'état

La combinaison des deux relations précédentes conduit à :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - Bk)x + Bfv \\ y = Cx \end{cases} \tag{1.15}$$

Théorème [1.1] : Les valeurs propres de $A - Bk$ peuvent être fixées arbitrairement si et seulement si la paire (A, B) est commandable (c.-à-d. $\text{rang } Q_{C(A, B)} = n$). L'hypothèse de

commandabilité de la paire (A, B) assure donc que l'on peut fixer arbitrairement le polynôme caractéristique de la matrice (A - Bk), et donc placer arbitrairement les pôles de la matrice de transfert du système corrigé [2].

1.4.2 Systèmes d'écrits sous forme commandable

Soit un système d'écrit par :

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u \quad (1.16)$$

et donc de polynôme caractéristique est le suivant :

$$P_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} \quad (1.17)$$

En tenant compte le retour d'état (1.14), on obtient :

$$A^* = A - Bk = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \\ -k_1 - a_0 & -k_2 - a_1 & \dots & -k_n - a_{n-1} \end{bmatrix}}_A x \quad (1.18)$$

Si on se fixe a priori les pôles du système corrigé (coefficients α_i), il vient

$$P_{A^*}(\lambda) = (a_0 + k_1) + (a_1 + k_2)\lambda + \dots + (a_{n-1} + k_n)\lambda^{n-1} + \lambda^n = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \dots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n \quad (1.19)$$

Par identification on a : $\alpha_0 = a_0 + k_1, \dots, \alpha_{n-1} = a_{n-1} + k_n$, d'ou

$$k = [k_1, \dots, k_n] = [(\alpha_0 - a_0), \dots, (\alpha_{n-1} - a_{n-1})] \quad (1.20)$$

1.5 Retour d'état statique

1.5.1 Synthèse de correcteurs par retour d'état statique pour systèmes LTI

On considère toujours le système donné par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.21)$$

Dans le cas de retour d'état, la loi de commande est en général donnée par :

$$u(t) = Kx(t) \quad (1.22)$$

$K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ est la matrice des gain à déterminer. Le modèle du système en boucle fermée s'écrit comme suit :

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \quad (1.23)$$

Remarque: Lors d'un contrôle par retour d'état statique, il s'agit de trouver une loi de commande (1.22), pour le système (1.21) tel que : $Ax(t) + BKx(t)$ soit asymptotiquement stable. Le théorème suivant donne les conditions de stabilisation du système en boucle fermée (1.23).

Théorème [2.2] : Le système linéaire (1.21) est stabilisable asymptotiquement en boucle fermée, par retour d'état (1.22), si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et une matrice $R \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ telles que :

$$AP + PA^T + B_2R + R^T B_2 < 0 \quad (1.24)$$

Dans ce théorème, le gain du retour d'état est donnée par : $K = RP^{-1}$. Dans les commandes par retour d'état, la loi de commande est mise en œuvre à travers la mesure de l'état du système. Cependant la connaissance des états du système n'est pas toujours garantie, ce qui nous amène à parler de contrôleurs par retour de sortie statique et dynamique [4].

1.6 Retour de sortie

1.6.1 Retour de sortie statique

Pour le système LTI (1.23). Nous considérons une loi de commande par retour de sortie statique suivante :

$$u = Ky \quad (1.25)$$

Problème : pour le système en boucle fermée composé par (1.23) et (1.24), il s'agit de déterminer K tel que la loi de commande $u(t) = Ky(t)$, $K \in \mathfrak{R}^{r \times m}$ tel que $A + BKC$ soit asymptotiquement stable.

Théorème [1.3] : le système en boucle fermée composé par (1.21) et la commande : (1.24) est stable si les inégalités suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} (A+BKC)^T P + P(A+BKC) < 0 \\ P = P^T > 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

$K \in \mathfrak{R}^{r \times m}$ est le gain de retour de sortie [5].

1.6.2 Retour de sortie dynamique :

Considérons la commande par retour dynamique de sortie suivante

$$\begin{aligned} \dot{x}_K(t) &= A_K x_K(t) + B_K y(t) \\ u(t) &= C_K x_K(t) + D_K y(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Position : Notre objectif dans ce paragraphe est de déterminer les matrices $A_K \in \mathfrak{R}^{k \times k}$, $B_K \in \mathfrak{R}^{k \times r}$, $C_K \in \mathfrak{R}^{m \times k}$, $D_K \in \mathfrak{R}^{m \times r}$ tel que la matrice dynamique en boucle fermée A_{bf} soit asymptotiquement stable. (1.4).

La matrice dynamique en boucle fermée A_{bf} est donnée par $A_{bf} = \begin{pmatrix} A_K + BA_K C & BC_K \\ B_K C & D_K \end{pmatrix}$

Une condition suffisante pour la stabilisation par retour de sortie de ce système est donnée par le théorème suivant :

Théorème [1.4] : D'après le théorème de Lyapunov, le système (1.27) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice $P = P^T > 0$ tel que :

$$A_{bf} P + P A_{bf} < 0 \quad (1.28)$$

1.7 Stabilité

Intuitivement, on dira qu'un système dynamique est stable, relativement à une trajectoire, si de faibles perturbations appliquées au système entraînent de faibles écarts de la trajectoire. Pour des systèmes linéaires, cette trajectoire est souvent celle de l'équilibre $x(t) = 0, t \geq 0$.

1.7.1 Stabilité Classique

Dans les cas du système linéaire invariant la propriété de stabilité peut être testée en vérifiant la localisation des pôles de la matrice de transfert $G(s)$, ou de façon équivalente, des valeurs propres de la matrice A , dans certaine région du plan complexe. Pour les systèmes continus, cette région est le demi-plan complexe gauche ouvert. Pour les systèmes discrets, il s'agit du disque unitaire ouvert, centré en 0 et de rayon 1. D'autres régions plus complexes peuvent également être considérées pour assurer une certaine performance du système. Il existe différents critères algébriques permettant de tester cette localisation des pôles, comme le critère de Routh-Hurwitz ou le critère de Schur-Cohn [6]. Dans le cas d'un système saturé, la stabilité au sens de Lyapunov reste la plus utilisée.

1.7.2 Stabilité au sens de Lyapunov

Dans ce mémoire nous étudions plus particulièrement la méthode de Lyapunov, proposée en 1892 dans le cadre de l'étude de la stabilité des systèmes mécaniques Il s'agit de construire une fonction $V(x)$ de l'état x du système telle que les signes de cette fonction et de sa dérivée temporelle dans certain voisinage du point d'équilibre donnent une information sur la stabilité du système.

La théorie de stabilité de Lyapunov fait appel à de nombreux concepts que nous ne rappellerons pas, on pourra par exemple trouver les définitions mathématiques rigoureuses de point d'équilibre et de stabilité asymptotique globale [24]. Le principal résultat issu de l'approche de Lyapunov affirme que l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système dynamique autonome a temps continu $\dot{x} = A(t)x$ s'il existe une fonction $V(x)$ positive telle que sa dérivée est négative pour tout x non nul et telle que $v(0)=0$ et $v(\infty) \rightarrow \infty$. Un résultat équivalent existe dans le cas des systèmes discrets mais par simplicité nous nous restreignons a l'étude du cas continu. Une fonction $V(x)$ satisfaisant les conditions ci-dessus est appelée fonction de Lyapunov du système dynamique.

La notion de fonction de Lyapunov est liée à celle de région d'attraction de l'origine [3], [8] définie comme étant le plus grand domaine dans l'espace d'état dans lequel toute trajectoire qui y commence converge vers l'origine. Si un système est globalement asymptotiquement stable, alors la région d'attraction de l'origine est tout l'espace d'état. En générale, la détermination exacte et analytique de la région d'attraction de l'origine d'un système non-linéaire (comme par exemple le système à commande saturée a étudié) est une tache difficile. La notion de stabilité locale, permet alors de déterminer une approximation de la région

Une classe de fonctions de Lyapunov qui jouent un rôle important est la classe des fonctions quadratiques de la forme :

$$V(x) = x'Px \quad (1.29)$$

Cette fonction est définie positive si P est une matrice symétrique définie positive, c'est-à-dire dont toutes les valeurs propre (réelles) sont positives. Nous écrivons alors $P = P' > 0$

Dans le cas du système linéaire autonome introduit $\dot{x} = Ax$ une condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée :

$$\dot{V}(x) = x'A'p + pAx \quad (1.30)$$

Soit négative consiste à trouver une matrice $p = p' > 0$ telle que l'inégalité matricielle :

$$A'P + PA < 0 \quad (1.31)$$

Soit vérifiée. De façon équivalente, on peut choisir une matrice $Q = Q' > 0$ quelconque et résoudre l'équation matricielle :

$$A'P + PA + Q = 0 \quad (1.32)$$

Supposons que $V(x)$ est une fonction de Lyapunov pour le système $\dot{x} = Ax$ la surface de Lyapunov définie dans l'espace d'état est définie par :

$$\{x : V(x) \leq 1/r_0\} \quad (1.33)$$

Avec r_0 est un scalaire positif, $V(x)$ est appelée surface de Lyapunov ou surface de niveau. La condition $\dot{V}(x) < 0$ implique que si $x(t_0)$ appartient à cette surface alors $x(t_1)$ pour $t_1 > t_0$ appartient à l'ensemble défini par (1.33). Autrement dit, la trajectoire du système évolue vers une surface de Lyapunov intérieure (1.33) de r_1 pour $r_1 > r_0$. Ainsi, à mesure que le temps progresse, la surface sur laquelle se trouve le vecteur d'état se contracte vers l'origine. Nous pouvons alors montrer que l'ensemble [25] :

$$\varepsilon = \{x : x'Px \leq 1/r\} \quad (1.34)$$

Pour $r > 1$ est un domaine contractif pour le système $\dot{x} = Ax$, c'est-à-dire que pour toute condition initiale choisie dans ε , la trajectoire du système reste confinée à l'intérieur condition initiale choisie dans, la trajectoire du système reste confinée à l'intérieur de ε

Notons que les fonctions de Lyapunov ne sont pas nécessairement quadratiques. D'autres classes peuvent être définies, comme par exemple la fonction Lyapunov polyédrales [3,9] ou la fonction de type Lure avec un terme intégrale additif [26].

Théorème [1.5] : soit l'origine ($x=0$) un point d'équilibre du système et. Soit la fonction $V : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^n$ une fonction continue dans \mathcal{R}^n . Si :

- i. $V(0) = 0$ et $V(x) > 0, \forall x \neq 0$,
- ii. $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$,
- iii. $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0, \forall x(k) \in \mathcal{R}^n, x(k) \neq 0$

alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.

Une interprétation géométrique des théorèmes 5 et 6 peut être donnée a partir du concept de surfaces de Lyapunov et la région d'attraction

➤ **Stabilité locale et région d'attraction**

La notion de stabilité au sens de Lyapunov est liée a celle de la région d'attraction, définie comme étant le grand domaine dans l'espace d'état dans lequel toute trajectoire qui commencé converge vers l'origine. Si un système est globalement asymptotiquement stable, alors la région d'attraction de l'origine est tout espace d'état [2]. La détermination exacte de cette région par la méthode analytique est une tache difficile voire impossible [2]. Cependant, il est possible de déterminer des régions de stabilité asymptotique à partir du domaine de Lyapunov et l'ensemble positivement invariant.

Soit le système dynamique autonome obéissant a l'équation aux différentielles :

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.35}$$

Avec $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$.

Définition 5: soit $V(x)$ une fonction de Lyapunov. La surface est définie dans l'espace d'état par :

$$\{x \in \mathcal{R}^n; V(x) = c\}$$

est appelée surface de Lyapunov ou surface de niveau.

La condition $\dot{V}(x) < 0$ implique que si $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq c\}$ c'est un ensemble contractif invariant.

Autrement dit, la trajectoire du système (1.35) évolue vers une surface de Lyapunov intérieur $V(x) = c_1, c_1 < c$. Ainsi, à mesure que le temps progresse, la surface sur laquelle est $x(t)$ se contracte vers l'origine, ce qui montre que l'état du système s'approche asymptotiquement de l'origine. Ce raisonnement est illustré par la figure 1.2. La fonction de Lyapunov est associée à une distance généralisée entre l'état du système (1.35) à l'instant t et l'origine. Si cette distance n'augmente pas à l'instant t suivant, alors le système est stable. De plus, si elle diminue alors le système est asymptotiquement stable [8].

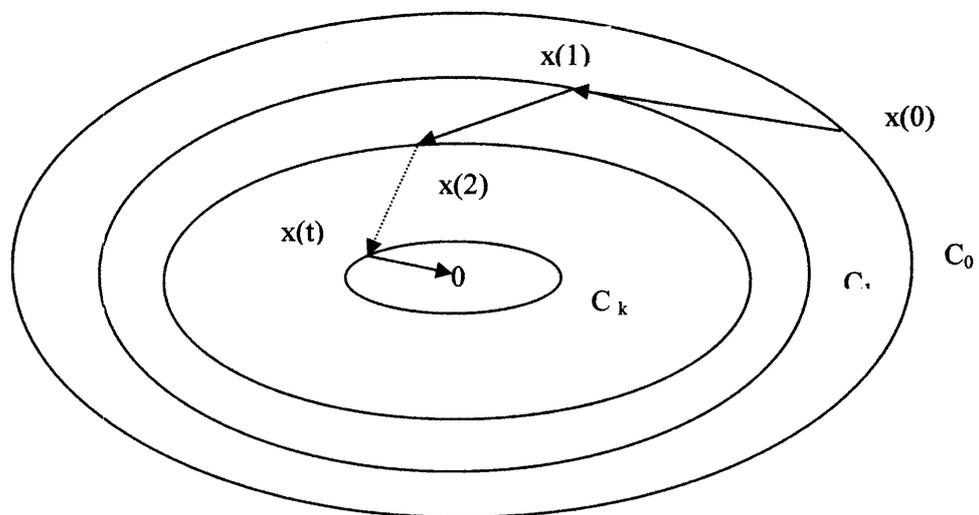


Figure.1.3 : Ensemble contractif-invariant

1.7.3 Stabilité quadratique

La notion de stabilité quadratique est le prolongement de la notion de stabilité de Lyapunov lorsque l'on considère des systèmes saturés, la fonction de Lyapunov retenues étant des fonctions quadratiques.

L'historique de la stabilité quadratique est retracé dans les mémoires et donc nous nous contenterons de rappeler les résultats principaux. Nous considérons le système linéaire:

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1.36}$$

ce système est dit stable quadratiquement lorsqu'il existe une matrice $P=P>0$ telle que, quelle que soit la matrice A appartenant à l'ensemble nous avons

$$x' [A'P + PA] x < 0 \tag{1.37}$$

$$x' [A^T P + PA] x < 0 \quad (1.37)$$

Par analogie, la fonction $V(x) = x^T P x$ s'avère être une fonction de Lyapunov du système assurant la stabilité asymptotique de l'origine [7].

1.8. Les Inégalités Matricielles Linéaires LMIs

1.8.1 Histoire des LMIs

L'histoire des LMIs dans l'analyse des systèmes dynamiques date depuis plus de 100 ans. L'histoire a commencé dans les années 1890, quand Lyapunov a publié ses travaux introduisant ce que l'on appelle de nos jours la théorie de Lyapunov. Il a montré que l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) \quad (1.38)$$

est stable (c'est à dire que toutes les trajectoires convergent vers zéro) si et seulement s'il existe une matrice définie positive P tel que (1.31).

La condition $P > 0$, (1.31) est ce que nous appelons maintenant l'inégalité de Lyapunov en P , qui est une forme particulière de LMI. Lyapunov a également montré que cette première LMI peut être explicitement résolue. En effet, nous pouvons choisir n'importe quelle $Q = -Q^T > 0$ puis résoudre l'équation linéaire $A^T P + PA = -Q$ en P , qui est définie positive si le système (1.37) est stable. En résumé, la première LMI utilisée dans l'objectif d'analyser la stabilité d'un système dynamique est l'inégalité de Lyapunov (1.37).

1.8.2 Définition

Une inégalité matricielle linéaire (en terminologie anglo saxone Linear Matrix Inequality (LMI)), a la forme suivante :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^N x_i F_i > 0 \quad (1.39)$$

Où $x \in \mathcal{R}^M$ est la variable, et les matrices $F_i = F_i^T \in \mathcal{R}^{N \times N}; i = 0, \dots, N$ sont données.

Le symbole d'inégalité dans (1.39) signifie que $F(x)$ est définie positive, c'est à dire $u^T F(x) u > 0$ Pour tout $u \in \mathcal{R}^N$ non nul. Bien évidemment, la LMI (1.39) est équivalente a un

ensemble de N inégalités polynomiales en x , cela veut dire que l'ide principal minores de $F(x)$ doivent être positifs. Nous pourrons également rencontrer des LMIs non strictes, de la forme :

$$F(x) \geq 0 \tag{1.40}$$

La LMI stricte (1.39) et la LMI non stricte (1.40) sont proches.. La LMI (1.40) est une contrainte convexe, c'est à dire que l'ensemble $\{x \rightarrow si \rightarrow F(x) > 0\}$ est convexe. Même si la LMI (1.39) parait avoir une forme spécialisée, elle peut représenter une large variété de contraintes convexes en x . En particulier, les inégalités linéaires, les inégalités quadratiques (convexes) et les contraintes que l'on rencontre dans la théorie de contrôle, comme les inégalités de Lyapunov et les inégalités quadratiques convexes, peuvent toutes être transformées en la forme d'une LMI.

Parmi les techniques existantes de transformation d'un problème d'optimisation d'inégalités matricielles non linéaires à un problème d'optimisation LMI sont :

◆ **Le complément de Schur** permet de transformer des non-linéarités convexes en LMIs

Lemme 1.1 [74]: Soient trois matrices $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ et $S(x)$ affines par rapport à la variable x , les LMIs suivantes sont équivalentes:

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S^T(x) > 0 \tag{1.41}$$

$$\begin{pmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{pmatrix} > 0 \tag{1.42}$$

◆ **La technique de S-procédure** est une méthode permettant l'obtention d'une contrainte convexe à partir d'un ensemble de contraintes non convexes.

Lemme 1.2 : Soient $F_0, F_1, \dots, F_r, \forall i, F_i \geq 0$, des fonctions quadratiques en $x \in \mathfrak{R}^n$:

$$F_i(x) \square x^T T_i x + 2u_i^T x + v_i, i \in I_p \tag{1.43}$$

où $T_i = T_i^T$, on considère la condition

$$F_0(x) \geq 0 \text{ et } \forall x \neq 0, \text{ tel que } F_i(x) \geq 0, i \in I_p \tag{1.44}$$

s'il existe : $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_p \geq 0$, tels que pour tout x ,

$$F_0(x) - \sum_{i=1}^p \tau_i F_i(x) \geq 0 \quad (1.45)$$

alors (1.44) est vérifiée.

♦ **Propriété de la congruence :**

Soit W une matrice définie positive, symétrique et de dimension appropriée et X est une matrice non singulière de dimension compatible avec W . Si $W \succ 0$, alors :

$$X^T W X \succ 0 \quad (1.46)$$

Le produit matriciel $X^T W X$ est appelé la transformation congruence de W .

1.9 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les outils fondamentaux que nous allons utiliser dans ce mémoire. Comme la représentation d'état du système linéaire, Commandabilité observabilité, etc. Nous avons fait également, un bref rappel sur les commandes existantes dans le cadre des systèmes linéaires telles que : la commande par retour d'état, par retour de sortie statique et dynamique. Il existe plusieurs critères pour l'analyse de la stabilisation des systèmes linéaires, à titre des exemples ; les valeurs propres, le critère de Routh, etc. qui donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité. Cependant, dans ce travail, nous nous sommes intéressés par la stabilité au sens de Lyapunov. Malgré que les conditions de stabilisations issues par la candidate de Lyapunov quadratique donnent des conditions suffisantes, elles sont les plus utilisées dans le cas des systèmes saturés.

Résumé :

Ce chapitre présente l'analyse et la commande des systèmes en présence des saturations des actionneurs. Premièrement, le problème d'analyse de la stabilisation des systèmes avec les lois de commande contrainte et commande saturante. Les différentes méthodes de la modélisation de l'effet de saturation sont présentées. Par la suite, un bref rappel sur le problème windup et le correcteur à utiliser. Finalement, on a un exemple avec et sans saturation.

Sommaire

2.1. Introduction.....	24
2.2. Définition de saturation.....	25
2.3. Fonction de saturation.....	25
2.4 Type des saturations.....	26
2.4.1 Saturations des actionneurs	26
2.4.2 Saturation en position	26
2.4.3 Saturation en vitesse	27
2.5. Commande saturante et commande contrainte	27
2.6. Modélisation des saturations.....	28
2.6.1 Modèle polytopique des saturations	28
2.6.2 Modélisation par région de saturation	31
2.6.3 Modélisation de saturation dans chaque région.....	32
2.7 Propriétés géométriques.....	32
2.7.1. Définition d'un polyèdre	32
2.7.2. Inclusion d'un ellipsoïde dans un polyèdre	33
2.8. anti-windup	33
2.8.1 Le problème d'Emballlement (windup)	33
2.8.2 Anti-emballement (Anti –Windup)	34

2.9 Exemple d'application35

2.10 Conclusion37

2.1. Introduction

Il est bien connu qu'en pratique tous les systèmes dynamiques sont soumis à des limitations sur leurs entrées. Parmi ces limitations physiques, les plus répondues en pratique sont celles qui s'attachent à l'amplitude des commandes. L'un des effets de ces limitations des commandes se traduit par saturation ; c'est la non-linéarité dominante en pratique, qui entraîne la dégradation des performances et même, c'engendre dans la plus part des cas l'instabilité. De tels effets de saturation des commandes sont décrits dans la littérature. Il apparait donc nécessaire de prendre en compte ces contraintes physiques, lors de la synthèse de loi de commande.

Les saturations (position, vitesse, accélération) sont : présentes dans la plupart des systèmes (en particulier au niveau des actionneurs et des capteurs), d'autant plus actives que le niveau de performance recherché est élevé (temps de réponse faible, consigne de forte amplitude) sachant en outre que le dimensionnement des actionneurs et des capteurs est souvent vu au plus juste, généralement responsables d'une : dégradation du niveau de performance, dégradation de la stabilité (taille du domaine d'attraction) non inversibles [13].

Généralement, la conception de loi de commande avec la saturation d'actionneur est traitée, soit par la synthèse d'une loi de commande contrainte ou bien par la conception d'une loi de commande saturante. Dans la première loi, la commande ne sature jamais et le problème est traité par la détermination d'une limite de conditions initiales de d'état du système qui évité la saturation de la commande. Dans la deuxième loi, la commande peut saturer et donc il nécessaire de définir les modèles mathématiques adéquats pour représenter la saturation.

Le windup est un phénomène bien connu qui se manifeste par un fort dépassement du signal de consigne et un temps de réponse excessif, i.e. par une dégradation des performances. Il survient notamment dans le cas où un système commandé par des actionneurs susceptibles de saturer est rebouclé par un correcteur linéaire comportant des intégrateurs [mémoire]. Pour résoudre ce problème on peut utiliser la commande anti-windup cette commande est une technique qui permet de faire face aux saturations. La synthèse de cette commande minimise la dégradation de performance due à la présence de saturation.

Ce chapitre donne des généralités sur l'effet de saturation ainsi les différentes méthodes de modélisation de cet effet.

2.2. Définition de la saturation

Un système présente une saturation lorsque la sortie n'évolue plus haut d'une valeur limite. Les saturations sont à la limite mécanique du système soit à des limites des interfaces puissance (saturation d'amplitude). Ainsi, la présence de limitations en amplitude, et donc de possibles saturations sur les différents signaux intervenant dans tout système physique. Autre part, les saturations et autres non-linéarités statiques sont omniprésentes dans les problématiques industrielles modernes. L'un des enjeux majeurs de l'automatique non-linéaire consiste donc à synthétiser de lois de commande performantes pour des systèmes linéaires saturés.

2.3. Fonction de saturation

Les saturations pouvant affecter les états ou les commandes d'un système sont des phénomènes non linéaires par essence, une fonction de saturation associée, à un vecteur de commande u de m composantes un vecteur de commande saturée :

$$\text{sat}(u) = [\text{sat}(u_1) \cdots \text{sat}(u_m)]^T \quad (2.1)$$

comportant également m composantes qui sont des fonctions mono variables et non linéaires définies comme suit :

$$\text{sat}(u_i) = \begin{cases} u_{\max(i)} \rightarrow \text{si} \rightarrow u_i > u_{\max(i)} \\ u_i \rightarrow \text{si} \rightarrow u_{\min(i)} < u_i < u_{\max(i)} \\ -u_{\min(i)} \rightarrow \text{si} \rightarrow u_i < u_{\min(i)} \end{cases} \quad (2.2)$$

ou u_{\min} et u_{\max} sont des scalaires positifs donnés. La figure suivante explique la fonction de saturation :

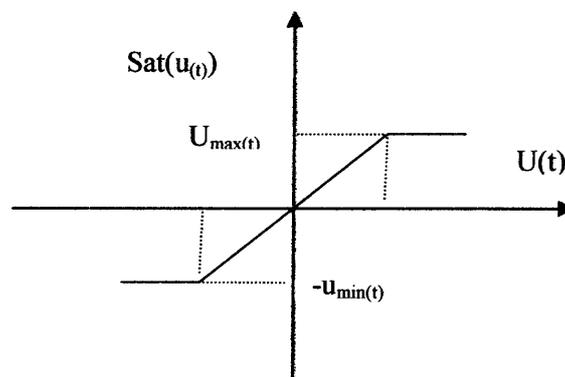


Figure 2.1 : la fonction de saturation.

2.4 type des saturations

2.4.1 Saturations des actionneurs :

Dans la littérature, il ya deux types de saturations des actionneurs :

- Saturation sur la vitesse d'actionneur : dans ce type de saturation, l'actionneur est soumis a des contraintes sur le taux de variation de la commande [1] :

$$-\Delta \underline{u}_i \leq \Delta u(t) \leq \Delta \bar{u}_i \quad (2.3)$$

- Saturation sur l'amplitude d'actionneur : dans ce cas, l'actionneur est soumis à une saturation sur l'amplitude :

$$-\underline{u}_i \leq u(t) \leq \bar{u}_i \quad (2.4)$$

2.4.2 Saturation en position

La saturation, parfois dissymétrique, limite l'amplitude d'un signal entre une valeur minimale et une valeur maximale [14].

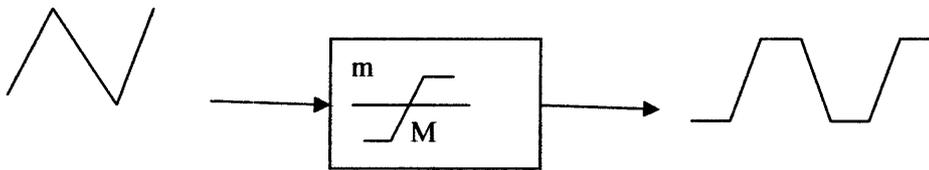


Figure 2.2 : Saturation de position

La symétrie peut être restaurée en retranchant puis en ajoutant une entrée constante en amont et en aval de la saturation

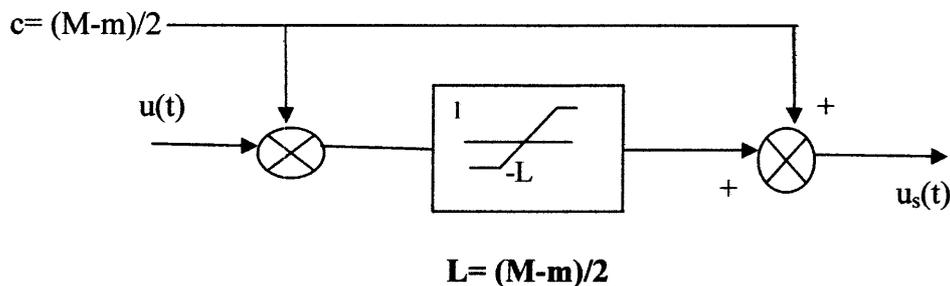


Figure 2.3 : la normalisation des entrées

a) Saturation en position normalisée

La symétrie étant restaurée, la saturation en position peut être normalisée :

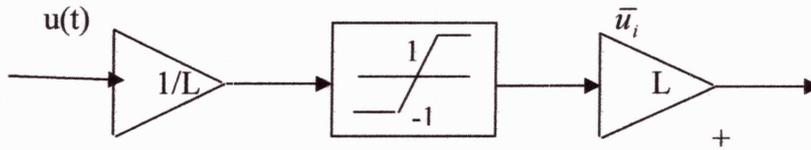


Figure 2.4 : Saturation en position normalisée

On peut remplacer par une fonction zone-morte qui présente l'avantage de rester nulle en fonctionnement nominal (non saturé) :

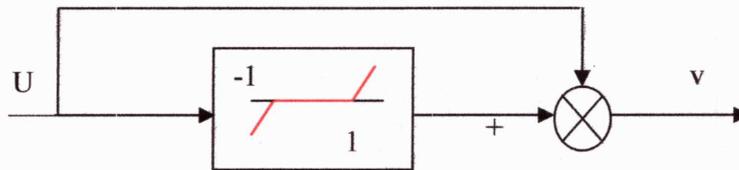


Figure 2.5 : zone-morte de saturation de position

2.4.3 Saturation en vitesse

Dans ce type de saturation, l'actionneur est soumis à des contraintes sur le taux de variation de la commande

$$-\Delta u_i \leq \Delta u(t) \leq \Delta \bar{u}_i \tag{2.5}$$



Figure 2.6 : saturation de vitesse.

2.5. Commande saturante et commande contrainte

La distinction entre les différences commandes saturantes et commandes contraintes n'est pas toujours bien comprises [15]. Nous allons essayer de les souligner en prenant par exemple un système linéaire continu similaire à celui défini dans le modèle suivant :

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.6}$$

que nous supposons commander par retour d'état suivant :

$$u = Kx \tag{2.7}$$

ou K est une matrice des gains donnée, si aucune contrainte d'amplitude n'affecte les états et/ou la commande, le système en boucle fermée prend la forme classique

$$\dot{x} = (A + BK)x \quad (2.8)$$

La stabilité de ce système est alors caractérisée de façon classique par les valeurs propres de la matrice $A + BK$. Supposons maintenant que chaque composante u_i de la commande u est soumise à des contraintes d'amplitude [16].

$$-\underline{u}_i \leq u_i \leq \bar{u}_i \quad (2.9)$$

ou $\bar{u}_i, \underline{u}_i$ sont des scalaires positifs donnés. La loi de commande effectivement appliquée au système en boucle ouverte est alors [17] :

$$u = \text{sat}(Kx) = \text{sat}[K_1x \dots K_mx]^T \quad (2.10)$$

et le système en boucle fermée écrit :

$$\dot{x} = Ax + B\text{sat}(Kx), \quad (2.11)$$

La nature non linéaire de la fonction de saturation implique que le système est non- linéaire si nous définissons la région de linéarité de ce système comme l'ensemble des états pour lesquels les commandes ne sont pas saturés, c'est -à- dire l'ensemble :

$$\{x : -\underline{u}_i \leq K_i x \leq \bar{u}_i, i = 1, \dots, m\} \quad (2.12)$$

Alors nous pouvons dire que le système non linéaire admet localement dans cette région le modèle linéaire la notion de modèle local est étroitement liée à celle de stabilité locale et d'ensemble d'attraction.

La loi de commande contrainte est conçue de telle sorte que l'état du système ne quitte jamais la région de linéarité, par conséquent la commande du système ne sature jamais et le modèle linéaire reste valide localement pour le système [18].

La loi de commande n'est pas conçue de telle sorte que l'état du système reste dans la région de linéarité, donc la commande du système peut se saturer et seul le modèle non linéaire est valide. On parle alors de loi de commande saturante [18].

2.6. Modélisation de saturation

L'effet de saturation sur le système peut se modéliser de plusieurs manières différentes : non linéarité de secteur, par diviseur l'état la région de saturation, ou bien par l'utilisation d'une représentation polytopique de l'effet de saturation.

2.6.1 Modèle polytopique des saturations

Parmi les différentes méthodes de la modélisation de l'effet de saturation, une première possibilité consiste à représenter le système saturée à l'aide d'un modèle polytopique. Dans le

cas du retour d'état saturé considérée au paragraphe précédent, on peut écrire de manière équivalente chaque composante de saturation comme [19] :

$$\text{sat}(K_i x) = g_i(x) K_i x \tag{2.13}$$

$$g_i(x) = \begin{cases} \bar{u}_i / K_i x \rightarrow \text{si } K_i x > \bar{u}_i \\ 1 \rightarrow \text{si } -\underline{u}_i \leq K_i x \leq \bar{u}_i \\ -\underline{u}_i / K_i x \rightarrow \text{si } K_i x < -\underline{u}_i \end{cases} \tag{2.14}$$

et donc par définition :

$$0 < g_i(x) \leq 1 \tag{2.15}$$

Pour tout $i = 1, \dots, m$. Le système non linéaire en boucle fermée peut alors s'écrire :

$$\dot{x} = (A + BG(x)K)x \tag{2.16}$$

Où $G(x)$ est une matrice diagonale ayant pour composantes les scalaires $g_i(x)$ définis ci-dessus en supposant que l'état du système reste dans un ensemble compact E incluant l'origine nous pouvons définir une borne minimale pour chaque composant $g_i(x)$ notée :

$$\underline{g}_i = \min \{g_i(x) : x \in E\} \tag{2.17}$$

et qui satisfait également $\underline{g}_i < g_i(x) \leq 1$

Pour tout $i = 1, \dots, m$. Nous pouvons alors définir 2^m matrices diagonales G_k pour $k = 1, \dots, 2^m$.

Exemple 2.1 : chaque composante prend la valeur 1 ou g_i Pour $i = 1, \dots, m$. Par exemple pour $m=2$ nous construisons les 4 matrices :

$$\underline{G}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{G}_2 = \begin{bmatrix} \underline{g}_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{G}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \underline{g}_2 \end{bmatrix} \underline{G}_4 = \begin{bmatrix} \underline{g}_1 & 0 \\ 0 & \underline{g}_2 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

En utilisant les résultats classiques d'inclusions différentielles, les trajectoires du système saturée peuvent alors être représentées par les trajectoires du système polytopique :

$$\dot{x} = \underline{A}(t)x \tag{2.19}$$

ou la matrice A appartient a un polytope de matrices ayant pour sommets les matrices :

$$A + B\underline{G}_k K \tag{2.20}$$

Pour $k = 1, \dots, 2^m$, il est important d'insister sur le fait que le système polytopique ne représente le système saturé que dans la région de l'espace d'état où $0 < \underline{g}_i \leq g_i(x) \leq 1$ pour $i = 1, \dots, m$. Par définition cette région contient l'ensemble compact E [20].

➤ Modèle zone morte

Le bloc zone morte fournit une zone avec une sortie égale à zéro. On considère dans un premier temps le cas d'un système soumis à une unique saturation symétrique d'amplitude quelconque L et représentée par la fonction $\psi_L(\cdot)$:

$$\psi_L(u) = \text{signe}(u) \min(|u|, L)$$

Cette saturation est normalisée puis convertie en zone morte $\varphi(\cdot)$ suivant la relation

$$\varphi(\cdot) = 1 - \psi(\cdot) \quad (2.21)$$

où $\psi(\cdot)$ désigne la fonction de zone morte suivante *et*

$$\varphi(u) = \begin{cases} 0 & |u| \leq 1 \\ u - 1 & |u| > 1 \\ u + 1 & |u| < -1 \end{cases} \quad (2.22)$$

Remarque : Cette transformation est justifiée car la fonction zone morte est nulle dans le domaine de fonctionnement linéaire du système. La matrice A du système ainsi modifié correspond donc à la dynamique en fonctionnement nominal.

On introduit alors les conditions de secteur généralisées de [16] pour obtenir une caractérisation de la fonction zone morte compatible avec l'obtention de conditions de stabilité et de performance. Ces conditions de secteur s'appuient sur le lemme suivant :

Lemme [1] : Soit les conditions de secteur $\varphi(\cdot)$

Soit l'ensemble $\varphi = \{(\alpha, \beta) / -\underline{u}_i \leq -\alpha_{(i)} - \beta_{(i)} \leq \bar{u}_i\}$. La condition du secteur est décrite selon le lemme suivant :

Lemme [2]:

Si $(\alpha, \beta) \in \varphi$ alors $\varphi(\alpha)^T \cdot W \cdot [\varphi(\alpha) - \beta] \leq 0$. Ou W est une matrice diagonale positive.

la fonction zone morte normalisée définie par les relations (2.22).

On a :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, |u + v| \leq 1 \Rightarrow \varphi(u)(\varphi(u) + v) \leq 0 \quad (2.23)$$

La figure 2 ci-dessous fournit une interprétation graphique de ce résultat : la fonction zone morte normalisée est tracé en noir et l'ensemble des valeurs pouvant être prises par une fonction $\varphi(\cdot)$ satisfaisant la relation (2.22) est représenté en rose.

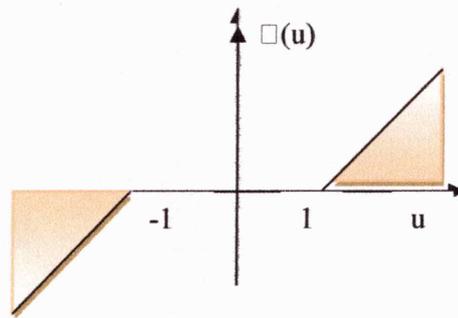


Figure 2.7 : Conditions de secteur généralisées

Ces conditions de secteur se révèlent donc particulièrement intéressantes, car elles sont non conservatives dans la zone de fonctionnement linéaire du système.

2.6.2 Modélisation par région de saturation

On définit un vecteur $\xi \in \mathfrak{R}^m$ dont chaque composante ξ_i , pour $i = 1, \dots, m$, peut prendre les valeurs -1, 0 ou 1 selon la composante de la commande est saturée (à la limite supérieure et à la limite inférieure) ou est non saturée. Dans ce qui suit, on donne un bref rappel sur ce type de modélisation et le lecteur intéressé peut se référer à [23]. soit :

$$\xi_i = \begin{cases} 1 \rightarrow si \rightarrow u_i > \bar{u}_i \\ 0 \rightarrow si \underline{u}_i \leq u_i \leq \bar{u}_i \\ -1 \rightarrow si \rightarrow u_i \leq -\underline{u}_i \end{cases} \quad (2.24)$$

Chaque vecteurs ξ représente une combinaison possible entre entrées saturées et non-saturées. Il est possible de construire 3^m vecteurs ξ Pour chacun de ces vecteurs, que l'on note $\xi_j \in \mathfrak{R}^m$, $j=1, \dots, 3^m$, le vecteur d'état x appartient à une région bien définie dans \mathfrak{R}^m qui sera appelée région de saturation.

Exemple 2.2

Soit un système avec deux entrées ($u_1(t) = K_1 x(t), u_2(t) = K_2 x(t)$) tel qu'à l'instant 't' la première est saturée à \bar{u}_1 et la deuxième n'est pas saturée. Ceci correspond à un vecteur $\xi = [1 \ 0]^T$ et on a :

$$x(t) \in S(R, d) \triangleq \left\{ x \in \mathfrak{R}^n; \begin{bmatrix} -K_1 \\ K_2 \\ -K_2 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} -\bar{u}_1 \\ \bar{u}_1 \\ u_{-1} \end{bmatrix} \right\} \quad (2.25)$$

$S(R, d)$ est la région de saturation associée au vecteur $\xi = [1 \ 0]^T$

➤ **Cas général**

Soit $\xi_j, j = 1, \dots, 3^m$ est le vecteur associe a une région polymérase du type :

$$S(R_j, d_j) = \{x \in R^n; R_j x \leq d_j\} \quad (2.26)$$

$d_j \in R^l$ est un vecteur composé a partir des composantes de $\bar{u}_i, -\bar{u}_i, \underline{u}_i$ ou $-\underline{u}_i$ et $R_j \in R^{l \times n}$ est une $R_j \in R^{l \times n}$ matrice formée a partir des lignes de K et $-K$

2.6.3 Modélisation de saturation dans chaque région

Exemple 2.3 : considérons l'exemple précédant dans le quel on avait $\xi = [1 \ 0]^T$

$$\text{sat}(u) = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ K_2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Kx + \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou d'une manière équivalente :

$$\text{sat}(u) = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) Kx + \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

➤ **Cas général**

$$\text{sat}(u) = \text{diag} \left(I_m - |\xi_j| \right) K + u(\xi) \quad (2.28)$$

ou

$$u_i(\xi_j) = \begin{cases} \bar{u}_i \rightarrow si \rightarrow \xi_j^i = 1 \\ 0 \rightarrow si \xi_j^i = 0 \\ -\underline{u}_i \rightarrow si \rightarrow \xi_j^i = 1 \end{cases}, j = 1, \dots, 3^m, i = 1, \dots, m$$

2.7 Propriétés géométriques

La saturation des problèmes convexes d'analyse et de synthèse pour un système incertain avec limitation en amplitude du signal de commande est basée sur l'utilisation de deux types d'ensembles les polyèdres et les ellipsoïdes. Tous deux définissent des ensembles contractifs de la stabilité asymptotique locale.

2.7.1. Définition d'un polyèdre

Un polyèdre Π est défini comme étant l'intersection d'une famille finie de demi-plans.

Etant donnée un ensemble de vecteurs colonnes m_i et de scalaires η_i , nous pouvons écrire :

$$\mathbb{I} = \{x / m_i^T x \leq \eta_i\}, i = 1, \dots, m \quad (2.29)$$

2.7.2. Inclusion d'un ellipsoïde dans un polyèdre

Lemme [3] :

Soit l'ellipsoïde $\varepsilon(P, \rho)$ définie par :

$$\varepsilon(P, \rho) = \{x \in \mathfrak{R} : x'Px \leq \rho\} \quad (2.30)$$

$\varepsilon(P, \rho)$ est inclus dans le polyèdre $\mathbb{I} = \{x / m_i^T x \leq \eta_i\}$ si et seulement si :

$$(m_i)^T \left(\frac{P}{\rho} \right)^{-1} m_i \leq \eta_i^2 \quad (2.31)$$

2.8. anti-windup

2.8.1 Le problème d'Emballlement (windup)

L'emballement (windup) est un phénomène bien connu qui se manifeste par un fort dépassement du signal de consigne et un temps de réponse excessif, i.e. par une dégradation des performances [25]. Il survient notamment dans le cas où un système commandé par des actionneurs susceptibles de saturer est rebouclé par un correcteur linéaire comportant des intégrateurs, par exemple un PID (Proportional-Intégrale-Dérive). Lorsque les saturations sont actives, l'erreur continue à être intégrée, et ce bien que les commandes envoyées au système soient altérées. Les états du correcteur peuvent donc devenir très grands, ce qui entraîne la poursuite du fonctionnement saturé [20].

Emballlement du régulateur dû à l'incohérence entre l'état du régulateur et le signal réglant appliqué au système réglé en particulier, en cas d'action par intégration dans le régulateur, l'erreur est cumulée dans l'état intégrateur (emballement du régulateur - Controller windup).

Le phénomène du windup a été observé originellement dans les contrôleurs PI (Proportionnel Intégrale) [20].

Dans le cadre des systèmes de contrôle, il peut arriver qu'un contrôleur fonctionne très bien pour une certaine gamme de valeurs du signal de référence alors les performances se trouvent considérablement détériorées en cas de signaux de référence qui sortent même de peu de cette gamme. Dans beaucoup de cas, la sortie d'un contrôleur n'attaque pas directement le système mais passe par des dispositifs de limitation d'amplitude (saturation) ou par d'autres non-linéarités. La figure suivante représente l'emballement classique du régulateur [26] :

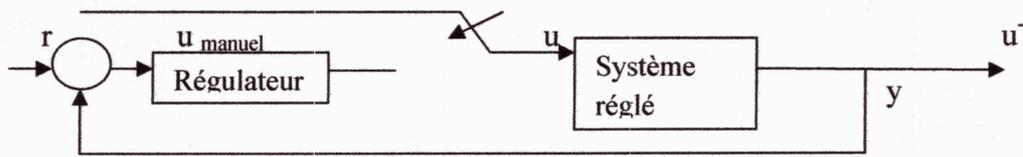


Figure 2.8: Schéma fonctionnel représentant le passage manuel – automatique- Emballement du régulateur.

2.8.2 Anti-emballement (Anti –Windup)

De manière plus générale, un dispositif d'anti-emballement permet de prendre en compte tout problème temporaire de discordance entre la sortie du régulateur et le signal réglant appliqué au système réglé (avec saturation)

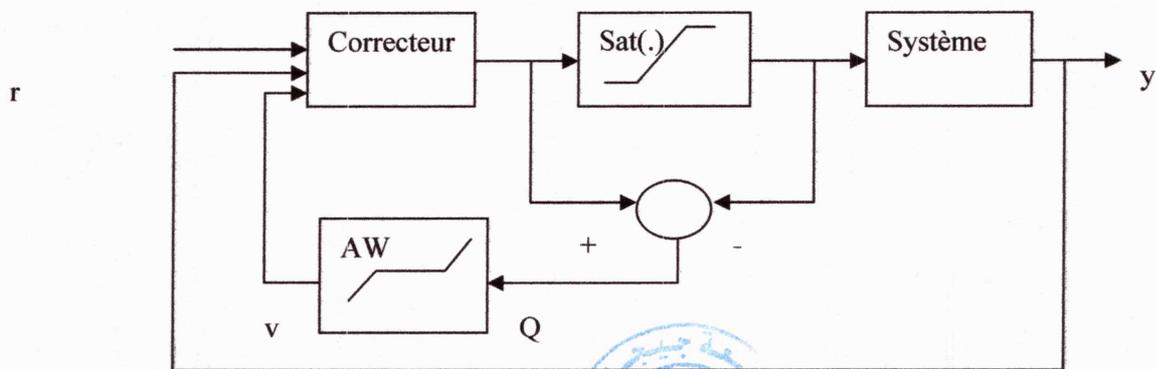


Figure 2.9: schéma de principe du compensateur anti-windup

Remarque : le dispositif sur la figure 2.9 : la différence entre les signaux a l'entrée et a la sortie des non-linéarités est calculée ou estimée puis vient agir sur la dynamique et sur les sorties du correcteur nominal par l'intermédiaire d'un correcteur anti-windup à optimiser.

2.9 Application

➤ système avec et sans saturation

Considérer le système de la forme suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2.32}$$

avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Ce système n'est pas stable en boucle ouverte ($\dot{x} = Ax(t)$), les valeurs propres de la matrice

A sont : $eig\{A\} = \{-1; 1\}$. on considère la commande par retour d'état linéaire suivante :

$$u(t) = Kx \tag{2.33}$$

Cette commande associée a un gain $K = [13 \ 7]$ peut stabiliser le système en boucle fermée ; les valeurs propres de la matrice $A+BK$ sont : $eig\{A+BK\} = \{-3; -4\}$. Donc, théoriquement, l'origine est asymptotiquement stable pour les trajectoires du système ($\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$).

Maintenant, on suppose que la commande est bornée entre 5 et -5, i.e. : $-5 \leq u(t) \leq 5$, le système en boucle fermée devient :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bsat(u(t)) \tag{2.34}$$

avec :

$$sat(u(t)) = \begin{cases} 5 & Kx \geq 5 \\ Kx & -5 \leq Kx \leq 5 \\ -5 & Kx \leq -5 \end{cases} \tag{2.35}$$

Les figures (1.13) et (1.14) illustrent les réponses du système en boucle fermée sans et avec saturation pour différentes conditions initiales. La réponse du système dans l'espace d'état de ce système. Donc, en présence de saturation.

➤ D'après l'expression (2.35), il existe deux points d'équilibre du système en plus de $x = 0$ quand la commande sature : $x_{e1} = [-5 \ 0]^T$, et $x_{e21} = [5 \ 0]^T$.

➤ D'après les figures 2.10 et 2.11, il existe certains valeurs initiales (par exemple le point initiale $x_0 = [-3 \ -3]^T$ qui ne sont pas stables en boucle fermée.

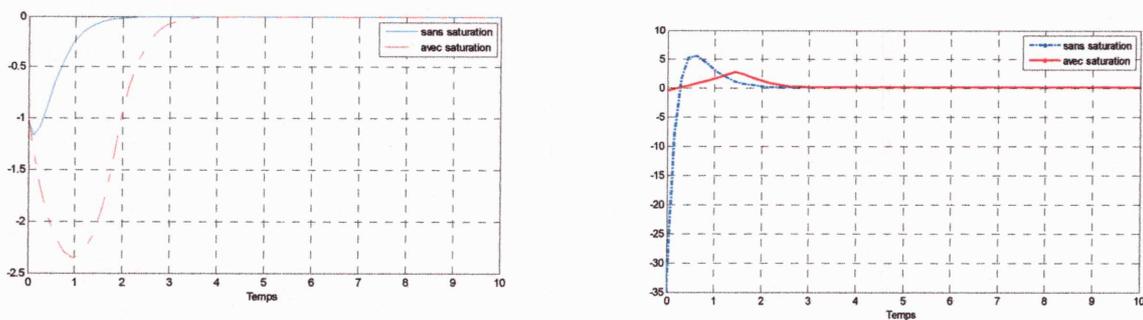


Figure 2.10 : trajectoires des réponse pour l'etat initiale $x_0 = [-1 \ -3]^T$

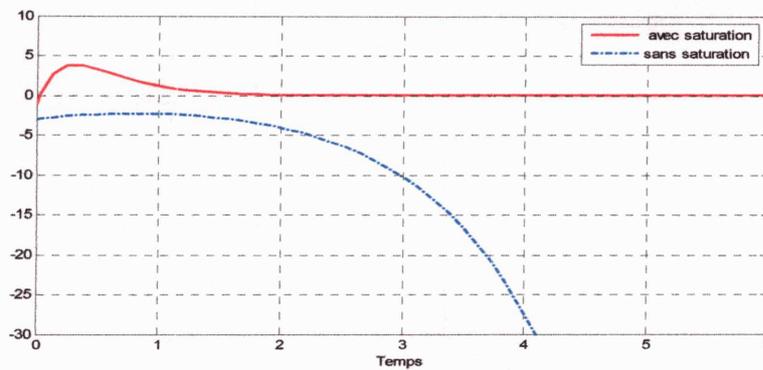


Figure 2. 11 : trajectoires des réponse pour l'état initiale $x_0 = [-3 \quad -3]^T$

La présence de saturation d'actionneur peut dégrader les performances du système en boucle fermée (points d'équilibre parasites, l'instabilité, etc.). L'application de lois de commande conçues sans prise en compte de cette contrainte de saturation peut avoir des conséquences indésirables (instabilité, temps de réponse lent) ou même néfaste sur le comportement du système en boucle fermée.

Dans cet exemple on remarque à partir de cette comparaison que la saturation influe sur la rapidité et la stabilité.

2.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué un bref tour d'horizon sur les modèles mathématiques utilisés pour modéliser la saturation. Par la suite, un rappel sur le phénomène windup et la commande anti-windup. Cette étude, nous a permis de dire que :

1. La présence de saturation d'actionneur peut dégrader les performances du système en boucle fermée (points d'équilibre parasites, l'instabilité, etc.). L'application de lois de commande conçues sans prise en compte de cette contrainte de saturation peut avoir des conséquences indésirables (instabilité, temps de réponse lent) ou même néfaste sur le comportement du système en boucle fermée.
2. Une commande anti-windup peut être une bonne solution pour la saturation d'actionneur d'ou l'objectif du 2eme chapitre.

Résumé :

Dans ce travail nous avons traité la conception d'une commande gain anti-windup de système en boucle fermée avec saturation de d'actionneur.

On présenter les techniques existantes d'analyse des systèmes en présence de saturation d'actionneurs avec un compensateur anti-windup. L'analyse de la stabilisation fait appel aux : fonctions de Lyapunov quadratique, L'approche LMI et la commande par retour de sortie dynamique.

Mots clés : saturation d'actionneur, antiwindup, matrice linéaire inégalité

(LMI), la stabilité

Sommaire

3.1 Introduction.....	39
3.2 Position du problème	39
3.3 Conditions de stabilisation anti-windup.....	42
3.4 Optimisation de la région d'attraction	45
3.5 Application.....	47
3.6 Conclusion	50

3.1 Introduction

Les saturations et les autres non-linéarités statiques sont omniprésentes dans les problématiques industrielles modernes. L'un des enjeux majeurs de l'automatique non-linéaire consiste donc à synthétiser des lois de commande performantes pour des systèmes linéaires saturés. La littérature est abondante sur ce sujet et de nombreuses approches permettent désormais de formuler des conditions de stabilité et de stabilisation plus ou moins conservatives [1].

L'actionneur comme tous les systèmes physiques a des limitations de fonctionnement. Ces limitations peuvent dégrader les performances du système en boucle fermée et parfois déstabilise un système stable en boucle fermée [2]. Donc, l'application de lois de commande conçues sans prise en compte de cette contrainte de saturation peut avoir des conséquences indésirables ou même néfastes sur le comportement du système bouclé [3].

Le windup est un phénomène indésirable due à la présence de la saturation. On appelle ce phénomène l'emballement du terme intégral (windup). Il se manifeste par un fort dépassement du signal de consigne et un temps de réponse excessif.

L'anti-windup est une technique qui permet de faire face aux saturations. Il s'agit d'une procédure en deux étapes qui consiste à minimiser cette dégradation de performance due à la présence de saturations [4] :

- ◆ Un correcteur nominal est d'abord synthétisé pour le système non saturé afin d'assurer la stabilité et le niveau de performance requis dans la zone linéaire.
- ◆ Un correcteur additionnel est alors introduit afin de contrer les effets négatifs des saturations et retrouver dans la mesure du possible le niveau de performance nominal.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les techniques existantes d'analyse des systèmes

En présence de saturation d'actionneurs avec un compensateur anti-windup. L'analyse de la stabilisation fait appel aux : fonctions de Lyapunov quadratique, l'approche LMI et la commande par retour de sortie dynamique.

3.2 Position du problème

Considérons le système linéaire en temps continu :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^p$ sont l'état, du vecteurs d'entrée, et de sorties mesurer, respectivement. Les matrices A, B et C sont des matrices constantes réelles de dimensions appropriées. La paires (A, B) et (C, A) supposée commandable et observable, respectivement.

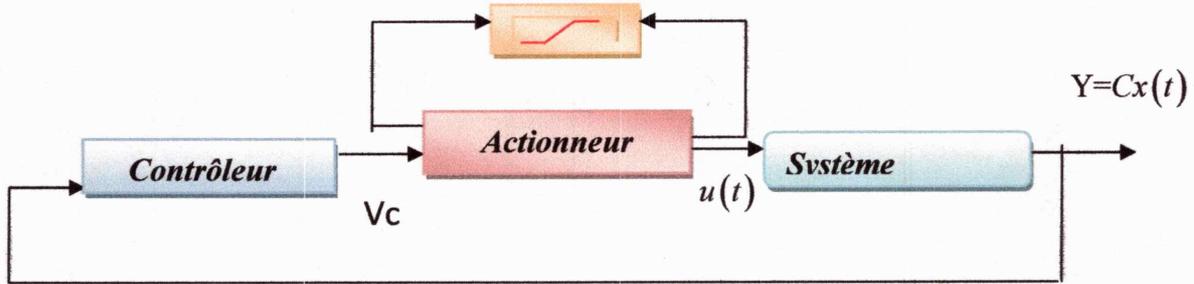


Figure 3.1: Schéma de principe du système avec saturation d'actionneurs

Considérons système (3.1), on suppose que n_c l'ordre dynamique du compensateur :

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= A_c \eta(t) + B_c y(t) \\ v_c(t) &= C_c \eta(t) + D_c y(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Où $\eta(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ est l'état du contrôleur, $u_c(t) = y(t)$ est le dispositif de commande d'entrée et $v_c(t)$ est la sortie du régulateur, a été conçu dans le but de garantir une certaine stabilité de la performance exigences et du système en boucle fermée en l'absence de saturation de commande. Supposons maintenant que le vecteur d'entrée u est soumis à des limitations d'amplitude comme suit:

$$-u_{0(i)} \leq u_{(i)} \leq u_{0(i)}, u_{0(i)} > 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.3)$$

Par conséquent, la commande est saturante et écrite comme suit :

$$u(t) = \text{sat}(v_c(t)) = \text{sat}(C_c \eta(t) + D_c Cx(t)) \quad (3.4)$$

Où chaque élément de la fonction $\text{sat}(v_c(t))$ est définie $\forall i = 1, \dots, m$ par :

$$\text{sat}(v_c(t)) = \text{sign}(v_{c(i)}(t)) \min(|v_{c(i)}(t)|, u_{o(i)}) \quad (3.5)$$

Pour adoucir les effets indésirables du windup dus à la saturation, nous ajoutons un terme d'anti-windup $E_c(\text{sat}(v_c(t)) - v_c(t))$ au contrôleur (figure 3.1).

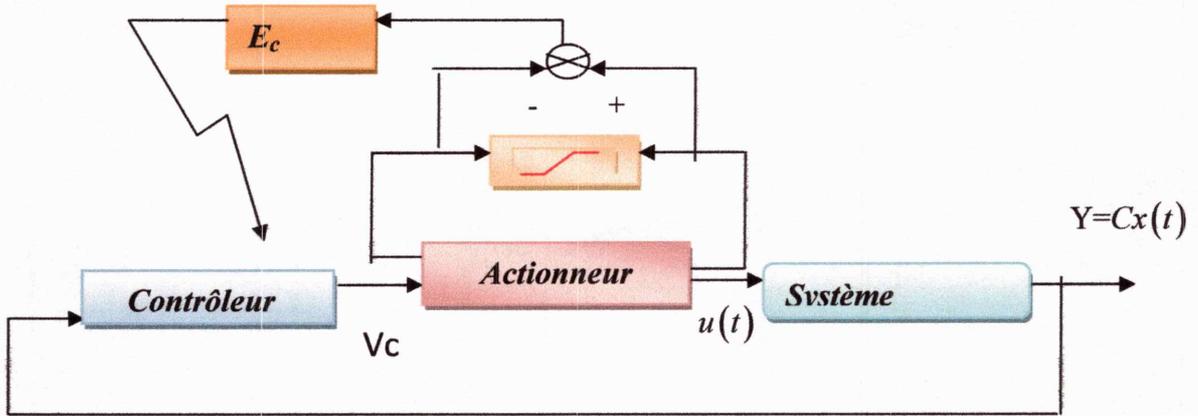


Figure 3.2: Schéma de principe d'une commande anti-windup avec saturation d'actionneurs
Le système en boucle fermée peut être donné par la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B\text{sat}(v_c(t)) \\ \dot{\eta}(t) &= A_c\eta(t) + B_cCx(t) + E_c(\text{sat}(v_c(t)) - v_c(t)) \\ v_c(t) &= C_c\eta(t) + D_cCx(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Nous définissons $\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n+n_c}$ et $\psi(K\xi(t)) = v_c - \text{sat}(v_c(t))$, le système (3.6) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B\text{sat}(v_c(t)) \\ &= Ax(t) + B(v_c - \psi(K\xi(t))) \\ &= Ax(t) + B(C_c\eta(t) + D_cCx(t) - \psi(K\xi(t))) \\ &= Ax(t) + BC_c\eta(t) + BD_cCx(t) - B\psi(K\xi(t)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= A_c\eta(t) + B_cCx(t) + E_c(\text{sat}(v_c(t)) - v_c(t)) \\ &= A_c\eta(t) + B_cCx(t) - E_c(v_c(t) - \text{sat}(v_c(t))) \\ &= A_c\eta(t) + B_cCx(t) - E_c\psi(K\xi(t)) \end{aligned}$$

Finalement, le système global est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BD_cC)x(t) + BC_c\eta(t) - B\psi(K\xi(t)) \\ \dot{\eta}(t) = A_c\eta(t) + B_cCx(t) - E_c\psi(K\xi(t)) \end{cases}$$

où de la forme matricielle suivante :

$$\dot{\xi}(t) = \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} \xi(t) + \left(\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} E_c \right) \psi(K\xi(t))$$

on suppose :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}; \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}; K = [D_c C \quad C_c]$$

donc, le système en boucle fermée est le suivant :

$$\dot{\xi}(t) = \bar{A}\xi(t) - (\bar{B} + REc)\psi(K\xi(t)) \quad (3.7)$$

avec la fonction :

$$\psi(v) = v - sat(v)$$

Notons que, dans ce cas, $\psi(v)$ Correspond à une non-linéarité zone morte décentralisée :

$$\psi(v) = [\psi(v_{(1)}) \dots \psi(v_{(m)})]'$$

où $\forall i = 1 \dots m$

$$\psi(v_{(i)}) = \begin{cases} v_{(i)} - u_{0(i)} & \text{si } v_{(i)} > u_{0(i)} \\ 0 & \text{si } -u_{0(i)} \leq v_{(i)} \leq u_{0(i)} \\ v_{(i)} + u_{0(i)} & \text{si } v_{(i)} < -u_{0(i)} \end{cases} \quad (3.8)$$

Position du problème 1:

Dans une commande anti-windup, la commande peut saturer et le problème est traité par l'estimation du domaine d'attraction à l'intérieur duquel toute initialisation du système n'engendre pas d'instabilité en présence de saturation [5]. Donc notre problème peut être énoncé comme suit :

Déterminer le gain antiwindup de la matrice Ec et la région de stabilité asymptotique pour le système en boucle fermée (3.7).

3.3 Conditions de stabilisation anti-windup

Considérons une matrice $G \in \mathfrak{R}^{m \times (n+n_c)}$ et nous définissons le polyèdre suivant:

$$S = \left\{ \xi \in \mathfrak{R}^{n+n}; |(K_{(i)} - G_{(i)})\xi| \leq u_{0(i)}, i = 1 \dots m \right\} \quad (3.9)$$

Le lemme suivant est basé sur la condition du secteur (3.9) et l'ensemble S et qui sera utilisé dans le développement des résultats de stabilisation.

Lemme [3.1]: Soit la fonction $\psi(v)$ définie dans (3.8). Si $\xi \in S$, alors la relation

$$\psi(K\xi)'T[\psi(K\xi) - G\xi] \leq 0 \quad (3.10)$$

avec $T \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ diagonale et définie positive.

Preuve: Considérons les trois cas suivants:

Cas1 : $-u_{0(i)} \leq K_{(i)}\xi \leq u_{0(i)}$

Dans ce cas, par définition, $\psi(K_{(i)}\xi) = 0$ et aussi $\psi(K_{(i)}\xi)T_{(i,i)}[\psi(K_{(i)}\xi) - G_{(i)}\xi] = 0$.

Cas2 : $K_{(i)}\xi > u_{0(i)}$. Dans ce cas, $\psi(K_{(i)}\xi) = K_{(i)}\xi - u_{0(i)}$.

si $\xi \in S$ alors : $K_{(i)}\xi - G_{(i)}\xi \leq u_{0(i)}$.

Par conséquent, $\psi(K_{(i)}\xi) - G_{(i)}\xi = K_{(i)}\xi - u_{0(i)} - G_{(i)}\xi \leq 0$

et, d'autre part, on a : $\psi(K_{(i)}\xi) > 0$.

on obtient : $\psi(K_{(i)}\xi)T_{(i,i)}[\psi(K_{(i)}\xi) - G_{(i)}\xi] \leq 0, \forall T_{(i,i)} > 0$

Cas 3 : $K_{(i)}\xi < -u_{0(i)}$. Dans ce cas, $\psi(K_{(i)}\xi) = K_{(i)}\xi + u_{0(i)}$.

Si $\xi \in S$, alors : $K_{(i)}\xi - G_{(i)}\xi \geq -u_{0(i)}$.

d'où $\psi(K_{(i)}\xi) - G_{(i)}\xi = K_{(i)}\xi + u_{0(i)} - G_{(i)}\xi \geq 0$ et dans ce cas $\psi(K_{(i)}\xi) < 0$, on obtient

$\psi(K_{(i)}\xi)T_{(i,i)}[\psi(K_{(i)}\xi) - G_{(i)}\xi] \leq 0, \forall T_{(i,i)} > 0$

De ces trois cas, à condition que $\xi \in S$, nous pouvons conclure que :

$\psi(K_{(i)}\xi)T_{(i,i)}[\psi(K_{(i)}\xi) - G_{(i)}\xi] \leq 0, \forall T_{(i,i)} > 0, \forall i = 1 \dots m$, d'où la fin de preuve.

Maintenant, nous Considérons, la fonction de Lyapunov quadratique suivante

$$V(\xi(t)) = \xi(t)'P\xi(t). P = P' > 0, P \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)} \quad (3.11)$$

Le résultat suivant propose une loi de commande par retour de sortie dynamique avec un compensateur anti-windup.

Théorème [3.1]: S'il existe une matrice symétrique définie positive $W \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$, des matrices $Y \in \mathfrak{R}^{m \times (n+n_c)}$ et $Z \in \mathfrak{R}^{n_c \times m}$ des matrices diagonales définies positives $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ telles que :

$$\begin{bmatrix} WA' + AW & BS + RZ - Y' \\ SB' + Z'R' - Y & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (3.12)$$

$$\begin{bmatrix} W & WK'_{(i)} - Y'_{(i)} \\ K_{(i)}W - Y_{(i)} & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad i = 1 \dots m \quad (3.13)$$

l'ellipsoïde $\varepsilon(p) = \{ \xi \in \mathfrak{R}^{n+n_c}; \xi' P \xi \leq 1 \}$, avec $P = W^{-1}$, est d'une région attractive pour le système (3.7).

La matrice de gain de compensateur est donné par : $E_c = ZS^{-1}$

Preuve: Si les inégalités matricielles (3.13) sont vérifiées, alors l'ensemble $\varepsilon(p)$ est inclus dans l'ensemble S défini par (3.9) avec $G = YP$.

La dérivée de la fonction de Lyapunov quadratique (3.11) associée au système (3.7) est :

$\dot{v}(\xi(t)) = \xi(t)' (A'P + PA)\xi(t) - 2\xi(t)' P(B + RE_c)\psi(K\xi(t))$ Ainsi, en utilisant la condition de secteur (3.10), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{v}(\xi(t)) &\leq \dot{v}(\xi(t)) - 2\psi(K\xi(t))' T \psi(K\xi(t)) + 2\psi(K\xi(t))' T G \xi(t) \\ &\leq [\xi(t)' - \psi(K\xi(t))'] \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2' & M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ -\psi(K\xi(t)) \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec :

$$\begin{aligned} M_1 &= A'P + PA \\ M_2 &= PB + PRE_c - G'T \\ M_3 &= -2T \end{aligned}$$

Donc, si $\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2' & M_3 \end{bmatrix} \prec 0$ pour tout $\xi \in \varepsilon(p)$, alors $\dot{v}(\xi(t)) \prec 0$

Multipliant, respectivement, à gauche (3.12) et à droite par son transposé par :

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}$$

Et considérons $W = P^{-1}$, $S = T^{-1}$ et $Z = E_c T^{-1}$, on trouve :

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2' & M_3 \end{bmatrix} \prec 0$$

La dernière inégalité est équivalente à (3.14).

Fin de preuve.

3.4 Optimisation de la région d'attraction

Basé sur le résultat utilisé dans le théorème 1, dans cette section, nous présentons un problème d'optimisation convexe afin d'obtenir un compensateur anti-windup qui assure la stabilité locale du système en boucle fermée dans une région de stabilité est la plus grande possible. Dans ce cas, notre objectif est de :

- 1) chercher un ensemble de conditions initiales admissibles. $\Xi_0 \subset \mathfrak{R}^{n+n_c}$, pour lesquels la stabilité asymptotique doit être assurée.
- 2) de concevoir le gain antiwindup afin de maximiser une estimation de la zone d'attraction qu'il associe.

Autrement dit, nous allons calculer E_c , telle que, la région de la stabilité asymptotique est la plus grande possible.

On considère un ensemble Ξ_0 comme une enveloppe convexe définie par ses sommets $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ et un scalaire positif β . C.à.d. :

$$\Xi_0 = Co\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad (3.15)$$

Avec : $v_r \in \mathfrak{R}^{n+n_c}$, $r = 1, \dots, n_r$

Le problème de la stabilisation par retour d'état dynamique soumis à une contrainte sur l'entrée avec un compensateur anti-windup dans un domaine d'attraction aussi large que possible, peut être formulé par les conditions LMIs énoncées par les théorèmes suivants :

Théorème [3.2]: S'il existe une matrice symétrique définie positive $W \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$, des matrices $Y \in \mathfrak{R}^{m \times (n+n_c)}$ et $Z \in \mathfrak{R}^{n_c \times m}$ et des matrices diagonales définies positives $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ telles que :

$$\begin{cases} \min & W.Z.S.Y.\mu^\mu \\ \text{subject to} & \\ (i) & \begin{bmatrix} \mu & v_r' \\ v_r & w \end{bmatrix} \geq 0 \quad r = 1, \dots, n_r \\ & \text{LMI (3.12) et (3.13)} \end{cases} \quad (3.16)$$

L'ellipsoïde $\varepsilon(p) = \{ \xi \in \mathfrak{R}^{n+n_c}; \xi' P \xi \leq 1 \}$, avec $P = W^{-1}$, est d'une région attractive la plus grande possible pour le système (3.7).

La matrice de gain du compensateur est donné par : $E_c = ZS^{-1}$ et $\beta = 1/\sqrt{\mu}$.

Preuve :

Si Ξ_0 est donné par (3.15), l'ensemble, $\beta \Xi_0 \subset \varepsilon(p)$ est équivalent à :

$$\beta(v_r)' P \beta v_r \leq 1 \quad r = 1, \dots, n_r \quad (3.17)$$

ou bien sous la forme LMI suivante:

$$\begin{bmatrix} \mu & v_r' \\ v_r & w \end{bmatrix} \geq 0 \quad r = 1, \dots, n_r \quad (3.18)$$

Fin de preuve.

3.5 Application

Exemple 1: Considérons le système linéaire instable en boucle ouverte suivant [49]:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 0.1x(t) + u(t) \\ y(t) &= x(t)\end{aligned}$$

et le régulateur:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_c(t) &= -0.2y(t) \\ v_c(t) &= \eta_c(t) - 2y(t)\end{aligned}$$

Soit l'ensemble Ξ_0 est le suivant :

$$\Xi_0 = Co \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Compte tenu un niveau de saturation $u_0 = 1$, la résolution de l' problème LMI des théorèmes 3.1 et 3.2, nous donne respectivement les paramètres suivants:

◆ **Sans optimisation :**

$$P = \begin{bmatrix} 4.0097 & -1.7977 \\ -1.7977 & 1.8488 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0.4421 & 0.4299 \\ 0.4299 & 0.9589 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0.0594 \\ 0.0991 \end{bmatrix}$$

$$s = 0.3356$$

$$z = 0.0991$$

$$E_c = 0.2953$$

◆ **Avec optimisation :**

$$W = \begin{bmatrix} 2.3224 & 0.9141 \\ 0.9141 & 3.0757 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} 0.4876 & -0.1449 \\ -0.1449 & 0.3682 \end{bmatrix}$$

$$m = 0.0230$$

$$z = 1.9709$$

$$s = 1.8558$$

$$y = [-2.7571 \quad 1.6368]$$

$$E_c = 0.5232$$

Le figure 3.2 montre la réponse du système avec le compensateur anti-windup et la réponse du système de sans le compensateur gain anti-windup pour des conditions initiales différentes $X_0 = 5$ (figure 3.2-a) et $X_0 = 9$ (figure 3.2-b).

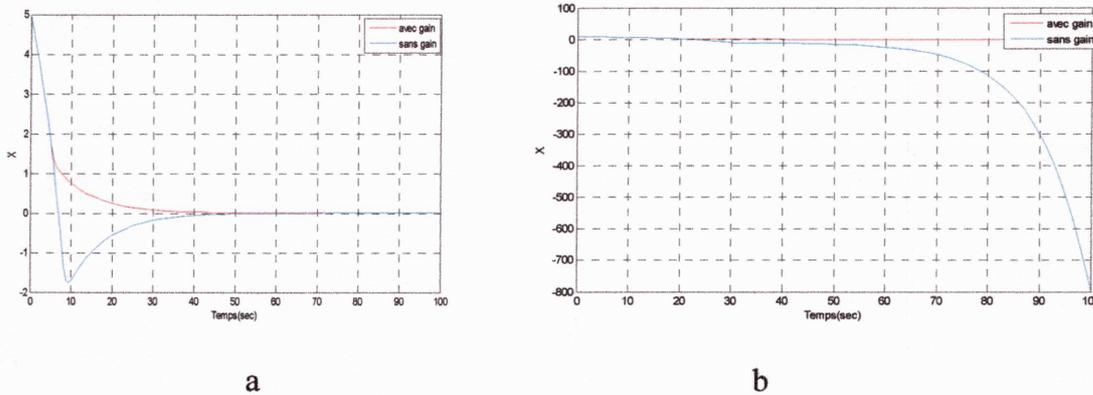


Figure 3.3: trajectoire de la sortie X avec et sans gain anti-windup pour $X_0 = 9$ et $X_0 = 5$

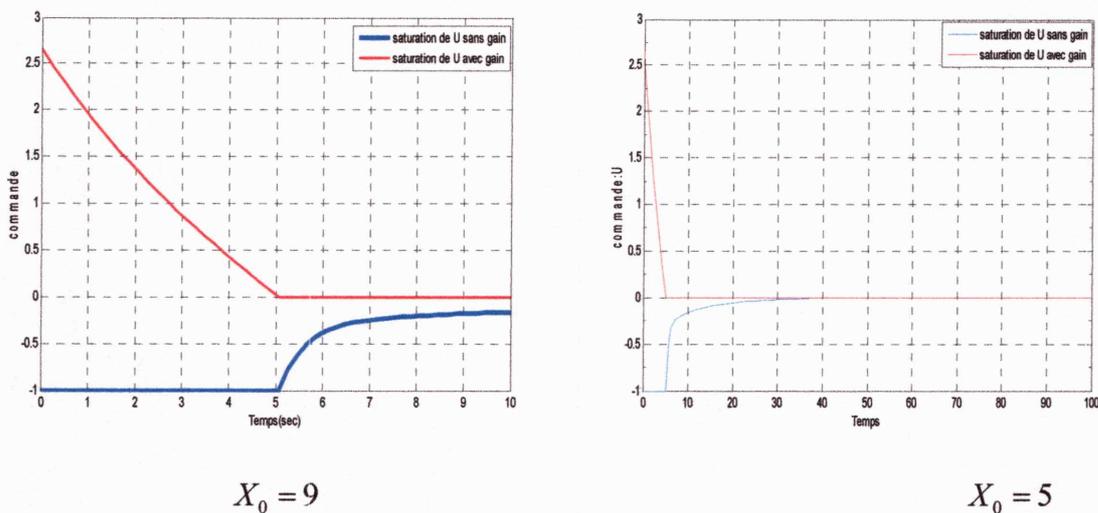


Figure 3.4 : trajectoire de la commande avec la condition initiale $X_0 = 9$ et $X_0 = 5$

La figure 3.3 montre que la commande anti-windup garantit les meilleures performances du système en boucle fermée. En plus, il ya quelques point instables par la commande sans anti-windup et sont stables avec un compensateur anti-windup.

La figure 3.4 illustre la trajectoire de la commande ($v_c(t)$) et la sortie de compensateur anti-windup. D'après cette figure, on remarque la sortie de la commande anti-windup est active (non nulle) si la commande dans sa zone de saturation et elle est nulle dans la zone de fonctionnement nominal de la commande (non saturée).

Les résultats de simulation obtenus, nous a permis de dire que:

Malgré la présence de saturation d'actionneur, la commande anti-windup arrive à garantir des meilleures performances (stabilité et temps de réponse) au système en boucle fermée. Elle montre aussi sa capacité à stabiliser des points qui sont instables sans compensateur anti-windup.

Les résultats de simulation présentés dans cette section sont obtenus en utilisant logiciel MATLAB-Tolbox simulink (figure 3.5).

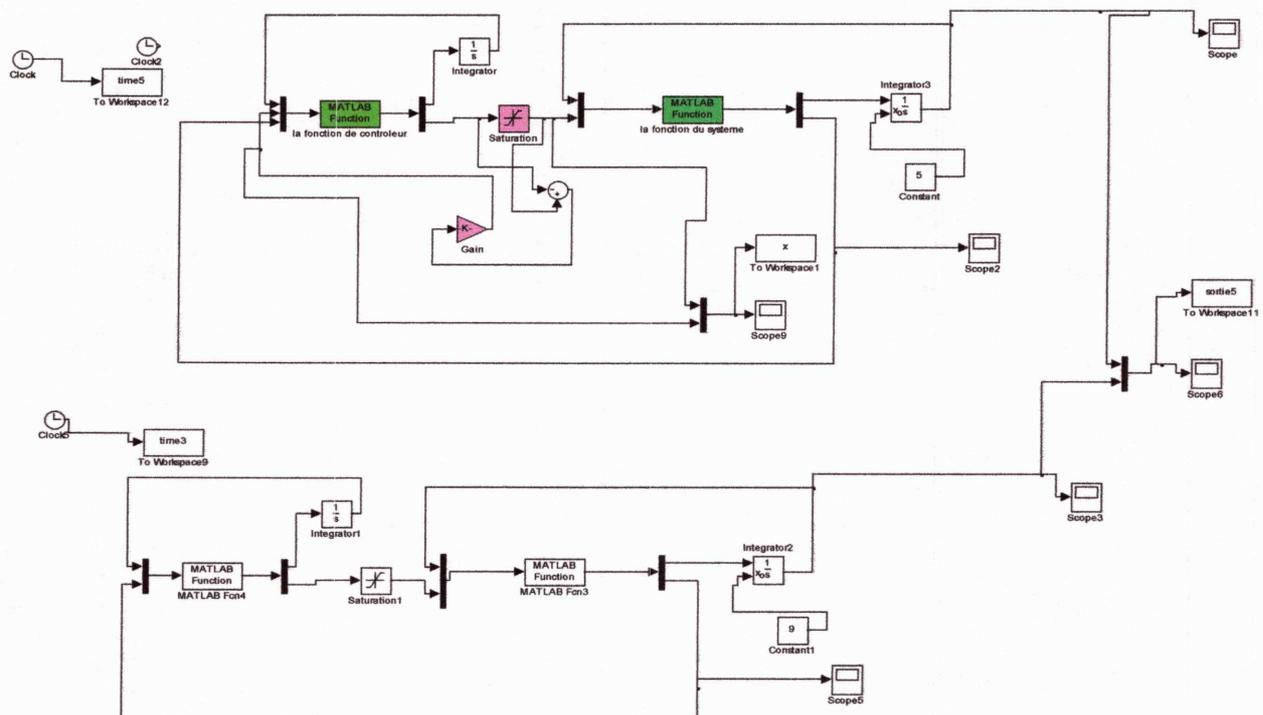


Figure 3.5: simulation de la commande anti-windup

3.6. Conclusion :

Il existe un réel besoin de développer des outils permettant d'évaluer les propriétés de stabilité et de performance d'un système linéaire saturé et en particulier avec un correcteur anti-windup.

Dans ce chapitre, nous avons proposé des conditions de stabilisation des systèmes linéaires, s'appuyant sur la condition de secteur de la fonction saturation et la fonction de Lyapunov quadratique. Elles conduisent à des formulations LMI et donc convexes qui peuvent être résolues efficacement par les outils numériques.

Les résultats de simulation présentés montrent qu'une commande anti-windup peut garantir des meilleures performances (stabilité et temps de réponse) au système en boucle fermée. Ils montrent aussi sa capacité à stabiliser des points qui sont instables sans compensateur anti-windup.

Résumé :

Nous considérons des capteurs non linéaires de caractéristique entrée sortie linéaire aux faibles amplitudes et saturantes aux grandes amplitudes. Nous proposons une méthodologie pour étendre la gamme d'amplitude de signaux pour laquelle ces capteurs répondent de manière fidèle au delà de leur région linéaire. L'extension de dynamique est obtenue via une application des capteurs `a saturation associées en présence de saturation d'actionneurs.

Dans ce travail, Notre objectif est de concevoir une loi de commande par retour de sortie dynamique avec un compensateur anti-windup garantissant la stabilité des systèmes linéaires en présence de la saturation d'actionneurs et de capteurs. Les conditions de la synthèse basée sur LMI et la zone d'attraction du système en boucle fermée.

Sommaire

4.1. Introduction.....	52
4.2. Position du problème	52
4.3. Stabilisation d'une commande anti-windup en présence de saturation d'actionneurs et de capteurs	55
4.4. Optimisation de la région d'attraction	62
4.5. Application.....	64
4.6. Conclusion	68

4.1. Introduction

Les capteurs sont des dispositifs permettant de rendre accessible une grandeur physique donnée. Donc, ils sont également présent dans les systèmes de régulation où la grandeur à régulée est d'abord mesurée par un capteur avant d'être envoyée au calculateur pour déterminer la commande à appliquer au processus.

Des comportements de saturation sont couramment observés chez les capteurs linéaires soumis à des signaux de grandes amplitudes. De tels comportements se traduisent, aux grandes amplitudes, par des distorsions qui affectent la qualité de l'information transmise lors de la transduction de signaux. La zone linéaire de la caractéristique entrée sortie d'un capteur à saturation délimite, donc, habituellement la dynamique des signaux qu'il est capable de transmettre de manière fidele. Nous montrons un moyen original pour étendre la zone linéaire de capteurs à saturation en réduisant la distorsion due à la saturation.

Pour réduire l'effet indésirable de saturation, notre objectif est de concevoir une loi de commande par retour de sortie dynamique avec un compensateur anti-windup garantissant la stabilité du système en présence de la saturation d'actionneurs et de capteurs. Les conditions obtenues sont formulées et résolues comme un problème d'optimisation LMI.

4.2. Position du problème :

Considérer le système continu suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= \text{sat}_{y_0}(Cx(t)) \\ u(t) &= \text{sat}_{u_0}(y_c(t)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Quand $x \in R^n$ est le vecteur d'état, $u \in R^m$ est la sortie d'actionneur, $y \in R^p$ est la sortie mesurée et $y_c \in R^m$ est le vecteur de commande. A, B et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

En pratique, à cause des limitations physiques et technologiques, les actionneurs et les capteurs ne peuvent fournir que des signaux d'amplitude restreinte, autrement. Donc, les signaux $u(t)$ et $y(t)$ sont saturés à des niveaux de saturations sont, respectivement, $u_0 \in R^m$ et $y_0 \in R^p$

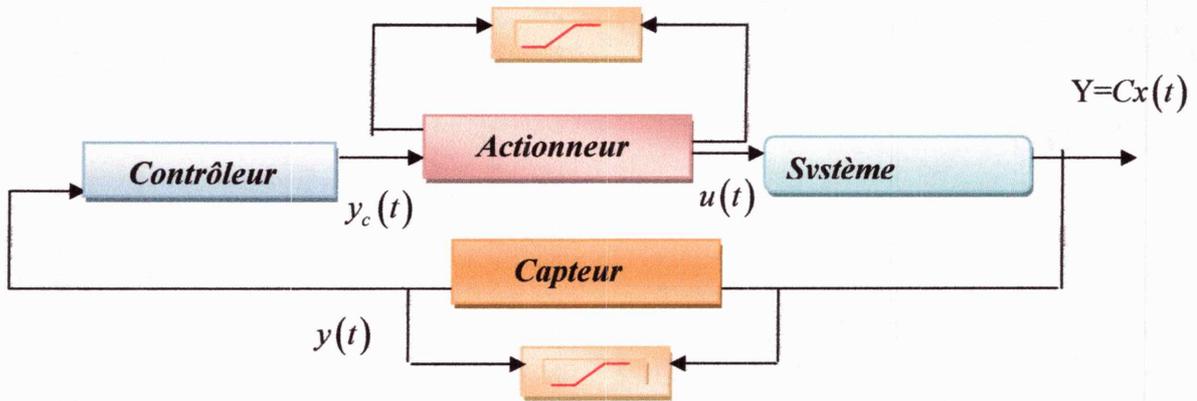


Figure 4.1: Schéma de principe du système avec saturation d'actionneurs et de capteurs.

On suppose (A, B) et (C, A) c'est pairs, commandable et observable, respectivement. Dans ce travail, Notre objectif est de concevoir la loi de commande par (retour de sortie dynamique avec un compensateur anti-windup garantissant la stabilité du système (4.1) en présence de la saturation d'actionneurs et de capteurs. Pour atteindre cet objectif, nous définissons la loi de commande par retour de sortie dynamique suivant (figure 4.2) :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t) + E_c (sat_{u_0}(y_c(t)) - y_c(t)) \\
 &= A_c x_c(t) + B_c sat_{y_0}(Cx(t)) + E_c (sat_{u_0}(y_c(t)) - y_c(t)) \quad (4.2) \\
 y_c(t) &= C_c x_c(t) + D_c y(t) \\
 &= C_c x_c(t) + D_c sat_{y_0}(Cx(t))
 \end{aligned}$$

où :

$x_c \in R^{n_c}$ est le vecteur d'état du contrôleur, $y \in R^p$ est le vecteur d'entrée du contrôleur et $y_c \in R^m$ est le vecteur de sortie du contrôleur et. A_c, B_c, C_c, D_c sont des matrices de dimensions appropriées. E_c est le gain anti-windup statique.

Le système on boucle fermée composé par (4.1) et (4.2) est le suivant :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bsat_{u_0}(C_c x_c + D_c sat_{y_0}(Cx(t))) \\
 \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c sat_{y_0}(Cx(t)) + E_c (sat_{u_0}(y_c(t)) - y_c(t)) \quad (4.3) \\
 y_c(t) &= C_c x_c(t) + D_c sat_{y_0}(Cx(t))
 \end{aligned}$$

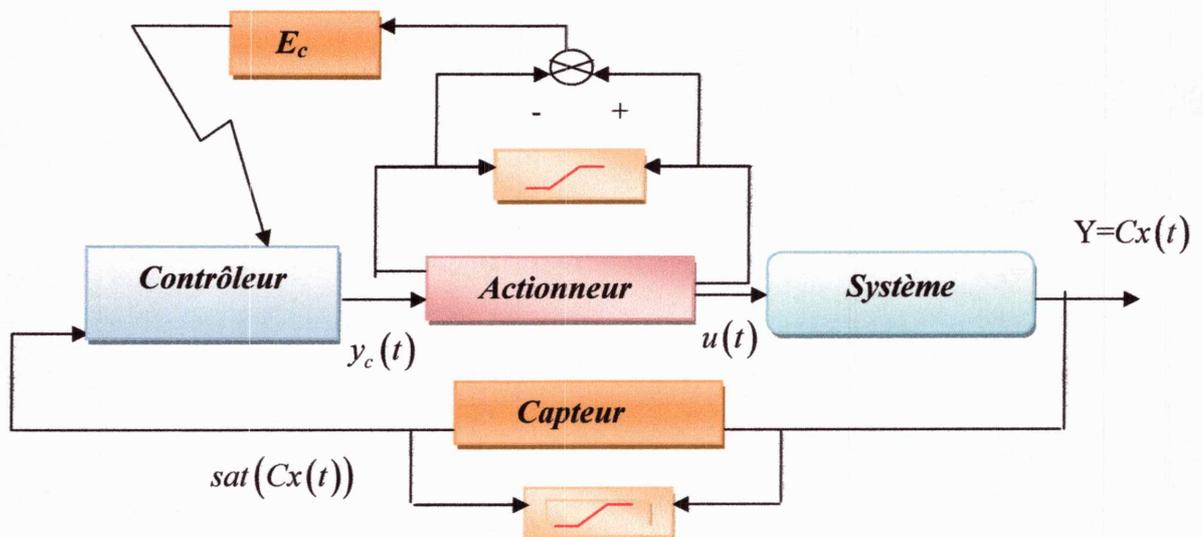


Figure 4.2: Schéma de principe d'une commande anti-windup avec saturation d'actionneurs et de capteurs

Il est intéressant de noter à cause de l'effet de saturation de capteurs et d'actionneurs, le système en boucle fermée (4.3) présente forte non linéarité avec une saturation du système imbriqué.

On suppose que, la région d'attraction du système (4.3) est β_α . Donc, tous le $(x, x_c) \in R^n \times R^{n_c}$ avec $(x(0), x_c(0)) \in \beta_\alpha$ correspondant la trajectoire converges asymptotiquement vers l'origine. En pratique, si la région d'attraction est tous l'espace d'état, stabilité obtenue est globale. Cependant, à cause de l'effet de saturation, la stabilité devient un effet locale et l'un des enjeux consiste à déterminer le plus grand domaine de stabilité à l'intérieure du quel toutes initialisations n'engendre pas l'instabilité.

Dans ce travail, nous sommes particulièrement intéressé à déterminer un dispositif de commande anti-windup avec une région d'attraction la plus grande possible du système en boucle fermée (4.3). Ce problème peut être donc indirectement adressé à la recherche des matrices A_c, B_c, C_c, D_c, E_c qui donnent une grande région de stabilité du système en boucle fermée (4.3).

4.3. Stabilisation d'une commande anti-windup en présence de saturation d'actionneurs et de capteurs

On définit le vecteur suivant :

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ x_c \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{n+n_c} \quad (4.4)$$

On tenu en compte le système en boucle fermée donnée par l'équation (4.1), on a :

$$u(t) = sat_{u_0}(y_c(t)) \quad (4.5)$$

en utilisant la représentation par secteur non linéaire, la saturation d'actionneur $sat_{u_0}(y_c(t))$ dans le contrôleur (4.2) peut s'écrire comme suit :

$$sat_{u_0}(y_c(t)) = y_c(t) + \phi_{y_0} \quad (4.6)$$

Avec : définir ϕ_{y_0}

$$sat_{y_c}(Cx(t)) = Cx(t) + \phi_{y_0} \quad (4.7)$$

On remplace (4.6) et (4.7) dans l'équation (4.1) et (4.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(sat_{u_0}y_c(t)) \\ \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c(C_c x_c(t) + D_c y(t)) + E_c(sat_{u_0}(y_c(t)) - y_c(t)) \end{aligned}$$

et

$$sat(y_c(t)) = (C_c x_c(t) + D_c \phi_{y_0}) + \phi_{u_0}(C_c x_c(t) + D_c \phi_{y_0})$$

donc :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(C_c x_c(t) + D_c(Cx(t) + \phi_{y_0})) + B\phi_{u_0}(y_c(t)) \\ \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c(C_c x_c(t) + \phi_{y_0}) + B\phi_{y_0} + E_c \phi_{u_0} \end{cases}$$

où bien sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A+BD_cC & BC_c \\ BC_c & A_c \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} BD_c & B \\ B & E_c \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} \phi_{y_0} \\ \phi_{u_0} \end{bmatrix}$$

On suppose :

$$\begin{aligned} D &= D_c \\ C &= (D_cC \ C_c), C_y = (C \ 0) \\ C_y &= (C \ 0) \\ B_y &= \begin{pmatrix} BD_c \\ B_c \end{pmatrix}, B_u = \begin{pmatrix} BD_c \\ B_c \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} A+BD_cC & BC_c \\ B_cC & A_c \end{pmatrix}; B_u = \begin{pmatrix} B \\ E_c \end{pmatrix} \\ B_y &= \begin{pmatrix} BD_c \\ B_c \end{pmatrix}; C_y = (C \ 0) \\ C &= (D_cC \ C_c); D = D_c \end{aligned} \quad (4.8)$$

En utilisant (4.8), le système en boucle fermée est le suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A\xi(t) + B_u\phi_{u_0} + B_y\phi_{y_0} \\ y_c(t) &= C\xi(t) + D\phi_{y_0} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Les non-linéarités ϕ_{y_0} et ϕ_{u_0} sont définies par :

$$\begin{aligned} \phi_{y_0} &= \text{sat}_{y_0}(C_y\xi(t)) - C_y\xi(t) \\ \phi_{u_0} &= \text{sat}_{u_0}(C\xi(t) + D\phi_{y_0}) - (C\xi(t) + D\phi_{y_0}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Maintenant, en considérant les matrices $G \in \mathcal{R}^{p \times (n+n_c)}$, $H_1 \in \mathcal{R}^{m \times (n+n_c)}$ et $H_2 \in \mathcal{R}^{m \times p}$ les polyèdres suivants :

$$S(y_0) = \{\xi \in \mathcal{R}^{(n+n_c)}; -y_0 \leq (C_y - G)\xi \leq y_0\} \quad (4.11)$$

$$S(u_0) = \{\xi \in \mathcal{R}^{(n+n_c)}, \phi_{y_0} \in \mathcal{R}^p; -u_0 \leq (C - H_1)\xi + (D - H_2)\phi_{y_0} \leq u_0\} \quad (4.12)$$

Les non-linéarités ϕ_{y_0} et ϕ_{u_0} vérifiant les propriétés suivantes :

Propriété 1 : si ξ a partir de $S(y_0)$, donc :

$$\phi'_{y_0} T_y (\phi_{y_0} + G\xi) \leq 0 \quad (4.13)$$

$T_y \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ est une matrice diagonale positive.

Propriété 2 : si ξ et ϕ_{y_0} a partir de $S(u_0)$, donc :

$$\phi'_{u_0} T_u (\phi_{u_0} + H_1\xi + H_2\phi_{y_0}) \leq 0 \quad (4.14)$$

La matrice $T_u \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ est une matrice diagonale positive.

Soit l'ellipsoïdal $\varepsilon(P)$ de la forme :

$$\varepsilon(P) = \xi(t)' P \xi(t) \quad (4.15)$$

avec : $P = P' > 0$

Lemme 1 : il existe un matrice diagonale positive la définie $T_y \in \mathfrak{R}^{p \times p}$, telle que les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{pmatrix} P & C'_{y^{(i)}} - G'_{(i)} \\ \bullet & y_{0(i)}^2 \end{pmatrix} \geq 0, i = 1, \dots, p \quad (4.16)$$

$$\begin{pmatrix} P & G'T_y & C'_{(i)} - H'_{1(i)} \\ \bullet & 2T_y & D'_{(i)} - H'_{2(i)} \\ \bullet & \bullet & u_{0(i)}^2 \end{pmatrix} \geq 0, i = 1, \dots, m \quad (4.17)$$

L'ellipsoïde $\varepsilon(p)$ est inclut dans l'ensemble des contraintes $S(u_0) \cap S(y_0)$.

Preuve:

Si l'inégalité (4.16) est vérifiée implique que $\varepsilon(P) \subset S(y_0)$. Dans ce cas, à partir de la propriété 1, alors $\varepsilon(P) \subset S(u_0) \cap S(y_0)$, Si et seulement si,

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \phi_{y_0} \end{pmatrix}' \left(\Omega - \begin{pmatrix} \Gamma'_{(i)} \\ \Theta'_{(i)} \end{pmatrix} \frac{1}{u_{0(i)}^2} \begin{pmatrix} \Gamma'_{(i)} & \Theta_{(i)} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \xi \\ \phi_{y_0} \end{pmatrix} \geq 0, \forall i = 1, \dots, m \quad (4.18)$$

Avec :

$$\forall \xi, \phi_{y_0} \quad 2\phi'_{y_0} T_y (\phi_{y_0} + G\xi) \leq 0 \quad (4.19)$$

comme $\Omega = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Gamma_{(i)} = C_{(i)} - H_{1(i)}$ et $\Theta_{(i)} = D_{(i)} - H_{2(i)}$.

On a :

on a $\xi^T P \xi \geq 0$ et donc

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \phi_{y_0} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \phi_{y_0} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.20)$$

et

$$2\phi'_{y_0} T_y (\phi_{y_0} + G\xi) \leq 0 \quad (4.21)$$

Par conséquence, elle peut s'écrire comme suit:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \phi_{y_0} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & (T_y G)' \\ T_y G & T_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \phi_{y_0} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.22)$$

Tenant compte les inégalités (4.21) et (4.22) et la propriété de S-Procedure, on a :

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \phi_{y_0} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & (T_y G)' \\ T_y G & T_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \phi_{y_0} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.23)$$

Par conséquence :

$$\begin{bmatrix} 0 & (T_y G)' \\ T_y G & T_y \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.24)$$

Par l'utilisation de complément de Schur sur la dernière inégalité et l'inégalité (4.14), on trouve :

$$\begin{pmatrix} P & G'T_y & C'_{(i)} - H'_{1(i)} \\ \bullet & 2T_y & D'_{(i)} - H'_{2(i)} \\ \bullet & \bullet & u_{0(i)}^2 \end{pmatrix} \geq 0 \quad (4.25)$$

Fin de preuve.

Les conditions de stabilisation du système en boucle fermée (4.6) sont donnés par le théorème 1 et sont issues pour $n_c = n$ et le vecteur d'état ξ est un élément de \mathcal{R}^{2n} .

Théorème 4.1: S'il existe des matrices symétriques définies positives $X \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathcal{R}^{n \times n}$, les matrices diagonales définies positives $S_u \in \mathcal{R}^{m \times m}$, $S_y \in \mathcal{R}^{p \times p}$ et les matrices

$Z \in \mathcal{R}^{m \times n}$, $L \in \mathcal{R}^{m \times n}$, $F \in \mathcal{R}^{n \times p}$, $D \in \mathcal{R}^{m \times p}$, $W_1 \in \mathcal{R}^{m \times n}$, $W_2 \in \mathcal{R}^{m \times n}$, $W_3 \in \mathcal{R}^{p \times n}$, $W_4 \in \mathcal{R}^{p \times n}$, $R \in \mathcal{R}^{n \times m}$, $Q \in \mathcal{R}^{m \times p}$ Satisfaisant:

$$\begin{pmatrix} AY + YA' + BL + L'B' & Z & BS_u - W'_1 & BDS_y - W'_3 \\ \bullet & A'X + XA + FC + C'F' & R - W'_2 & FS_y - W'_4 \\ \bullet & \bullet & -2S_u & -Q \\ \bullet & \bullet & \bullet & -2S_y \end{pmatrix} < 0 \quad (4.26)$$

$$\begin{pmatrix} Y & I_n & YC'_{(i)} - W'_{3(i)} \\ \bullet & X & C'_{(i)} - W'_{4(i)} \\ \bullet & \bullet & y_{0(i)}^2 \end{pmatrix} \geq 0, i = 1, \dots, p \quad (4.27)$$

$$\begin{pmatrix} Y & I_n & W'_3 & L'_{(i)} - W'_{1(i)} \\ \bullet & X & W'_4 & C'D'_{(i)} - W'_{2(i)} \\ \bullet & \bullet & 2S_y & S_y D'_{(i)} - Q'_{(i)} \\ \bullet & \bullet & \bullet & u_{0(i)}^2 \end{pmatrix} \geq 0, i = 1, \dots, m \quad (4.28)$$

a partir de contrôleur (4.2)

$$\begin{aligned} D_c &= D \\ E_c &= U^{-1}(R - XBS_u)S_u^{-1} \\ C_c &= (L - D_cCY)(V')^{-1} \\ B_c &= U^{-1}(F - XBD_c) \\ A_c &= U^{-1}\left(Z' - (A + BD_cC)' - XAY - XBL - B_cCY\right)(V')^{-1} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Les matrices U et V qui vérifie $UV' = I_n - XY$.

alors

$$\varepsilon(P) = \{\xi \in \mathfrak{R}^{2n}; \xi' P \xi \leq 1\} \quad (4.30)$$

est une région asymptotiquement stable du système en boucle fermée.

Avec :

$$P = \begin{pmatrix} X & U \\ U' & \hat{X} \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Preuve:

Soient la candidate de Lyapunov $V(\xi(t)) = \xi' P \xi$, sa dérivée $\dot{V}(\xi(t))$ et les conditions (4.17) et (4.18), on a :

$$\dot{V}(\xi(t)) \leq \dot{V}(\xi(t)) - 2\phi'_{y_0} T_y (\phi_{y_0} + G\xi) - 2\phi'_{u_0} T_u (\phi_{u_0} + H_1\xi + H_2\phi_{y_0}) = \mu' E \mu$$

avec

$$\mu = (\xi' \quad \phi'_{u_0} \quad \phi'_{y_0})' \quad (4.32)$$

et

$$E = \begin{pmatrix} A'P + PA & PB_u - H_1'T & PB_y - G'T_y \\ \bullet & -2T_u & -T_u H_2 \\ \bullet & \bullet & -2T_y \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Définie par :

$$P = \begin{pmatrix} X & U \\ U' & \hat{X} \end{pmatrix}; P^{-1} = \begin{pmatrix} Y & V \\ V' & \hat{Y} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

avec $X \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $\hat{X} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $\hat{Y} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ sont des matrices symétriques définies positives et U, V matrices de dimensions appropriées. La relation (4.32), nous donne les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} XY + UV' &= I_n; U'V + \hat{X}\hat{Y} = I_n \\ U'Y + \hat{X}V' &= 0; XV + U\hat{Y} = 0 \end{aligned}$$

Maintenant définie les matrices [20], [5] ;

$$J = \begin{pmatrix} Y & V \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

Notez maintenant que, de la condition (4.27) et (4.28), la matrice $I_n - XY$ est inversible, ce qui implique que c'est toujours possible de calculer les matrices V et U vérifiant l'équation $UV' = I_n - XY$. Par conséquent, J est inversible.

En multipliant, respectivement, gauche et droite (4.32) $Diag(J; S_u; S_y)$ et $Diag(J'; S_u; S_y)$ avec $S_y = T_y^{-1}$ et $S_u = T_u^{-1}$, on obtient:

$$E = \begin{pmatrix} JA'PJ' + JPAJ' & JPB_u S_u - JH'_1 & JPB_y S_y - JG' \\ \bullet & -2S_u & -H'_2 S_y \\ \bullet & \bullet & -2S_y \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Soient :

$H_1 = (H_{11} \ H_{12})$ et $G = (G_1 \ G_2)$, et considérons les changements de variables suivants :

$$L = D_c CY + C_c V', F = XBD_c + UB_c, M = VA'_c U', Z = M + A + BD_c C + YA'X + L'B'X + YC'B'_c,$$

$$R = XBS_u + UE_c S_u, D = D_c,$$

$$W_1 = H_{11}Y + H_{12}V', W_2 = H_{11},$$

$$W_3 = G_1Y + G_2V', W_1 = G_1.$$

Donc :

$$\begin{aligned} JA'PJ' &= \begin{pmatrix} YA' + L'B' & Z - (A + BD_c C) \\ (A + BD_c C) & A'X + C'F' \end{pmatrix} \\ JPB_u S_u &= \begin{pmatrix} B_u S_u \\ R \end{pmatrix}; JPB_y S_y = \begin{pmatrix} BDS_y \\ FS_y \end{pmatrix} \\ JH'_1 &= \begin{pmatrix} W'_1 \\ W'_2 \end{pmatrix}; JG' = \begin{pmatrix} W'_3 \\ W'_1 \end{pmatrix}; > H_2 S_y = Q \end{aligned} \quad (4.37)$$

Ainsi, depuis J, S_y et S_u sont inversibles, alors, si (4.26) est vérifiée, $\dot{V}(\xi(t)) < 0$.

En utilisant le lemme 1, si les conditions dans (4.27) et (4.28) sont vérifiées, alors $\varepsilon(P) \subset S(u_0) \cap S(y_0)$. Ainsi, si les relations (4.26), (27) et (4.28) sont satisfaites, donc : $\dot{V}(\xi(t)) < 0, \forall \xi \in \varepsilon(P)$.

Fin de la preuve.

4.4. Optimisation de la région d'attraction

L'objectif de synthèse considérée dans cette section concerne la détermination d'un dispositif de commande qui donne une région de stabilité, la plus grande possible, parmi toutes les solutions possibles, une manière de maximiser indirectement le volume de l'ensemble $\varepsilon(P)$ est de minimiser la trace de P qui peut s'écrire sous la forme :

$$\text{trace}(P) = \text{trace}(X) + \text{trace}(\hat{X}) \quad (4.38)$$

En tenant en compte la définition de P et P^{-1} , nous pouvons déduire que :

$$\hat{X} = U'(X - Y^{-1})^{-1}U \quad (4.39)$$

et pour réduire la trace de P , on peut être minimiser :

$$\text{trace}(X) + \rho$$

où ρ est choisit, telle que :

$$\hat{X} \leq \rho I_n$$

Cette dernière inégalité est équivalente à :

$$\begin{pmatrix} \rho I_n & U' & 0 \\ U & X & I_n \\ 0 & I_n & Y \end{pmatrix} \geq 0 \quad (4.40)$$

Notez que dans cette dernière inégalité, la matrice U apparaît. En suivant les étapes de la démonstration du théorème 1, on peut noter que la matrice U est un degré de liberté en rapport avec contrôleur réalisation. L'inégalité précédente, son rôle est de sélectionner les matrices, X , Y et U parmi toutes les solutions possibles, qui nous donnent une région de la stabilité la plus grande possible. D'autre part, on a, la matrice U n'est pas singulière, nous considérons également la contrainte suivante :

$$U + U' > 0$$

Le problème de la stabilisation par retour de sortie dynamique avec un compensateur anti-windup dynamique soumis à des contraintes sur l'entrée et la sortie dans un domaine d'attraction le plus grand possible, peut être formulé par les conditions BLMs suivantes :

$$\min \text{trace}(P) + \rho$$

$$X, Y, S_u, S_y, W_1, W_2, W_3, W_4, L, F, Z, D, R, Q$$

Sujets des (4.26), (4.27), (4.28).

Ce problème d'optimisation non convexe en raison des produits DS_y et FS_y apparaissant dans les conditions (4.26) et (4.27). Notez, cependant, que $S_y \in \mathcal{R}^{p \times p}$ est matrice définitivement diagonale positif. Dans le cas particulier des systèmes mono-sorti ($p = 1$). S_y est un scalaire et la solution de (4.28) peut être obtenu à partir d'une recherche itérative linéaire. Pour $p = 2$, un recherche de la solution optimale sur une recherche itérative bidimensionnelle (composé des 2 éléments de S_y) peut être envisagée. Pour des systèmes présentant un nombre élevé de sorties, le nombre d'itération augmente selon la fixation S_y ou (F, D) à chaque étape. Dans ce cas, la convergence de la procédure est toujours assurée, mais pas nécessairement à valeur optimal. En outre, la valeur de convergence dépendra de l'initialisation de S_y ou (F, D) dans la procédure itérative. Ainsi, dans tous ces cas une solution optimale ou sous-optimale pour (4.28) peut être obtenue facilement le problème à partir de la solution de LMI.

4.5. Application

Considérer le système en boucle fermée de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= \text{sat}_{y_0}(c(t)) \\ u(t) &= \text{sat}_{u_0}(y_c(t))\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 \\ -0.7 & 0.5 \end{pmatrix} \\ ; B &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \end{pmatrix}; C = (-1 \quad 1)\end{aligned}$$

et le système de contrôleur :

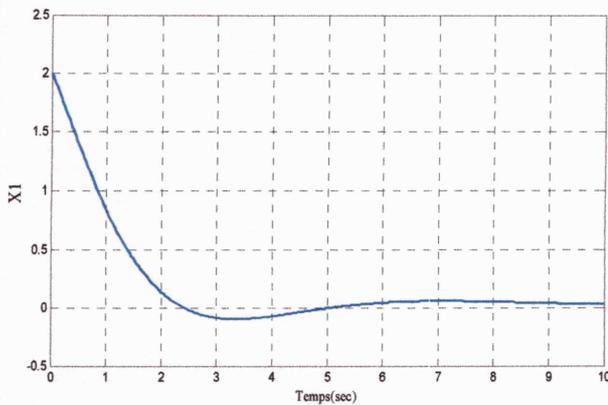
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t) + E_c (\text{sat}_{u_0}(y_c(t)) - y_c(t)) \\ &= A_c x_c(t) + B_c \text{sat}_{y_0}(Cx(t)) + E_c (\text{sat}_{u_0}(y_c(t)) - y_c(t)) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + D_c y(t) \\ &= C_c x_c(t) + D_c \text{sat}_{y_0}(Cx(t))\end{aligned}$$

Les limites de saturation sont définies par: $u_0 = 2$ et $y_0 = 2$. Le système en boucle ouverte est exponentiellement instable. Notre objectif est de calculer un contrôleur qui rende le système stable en boucle fermée.

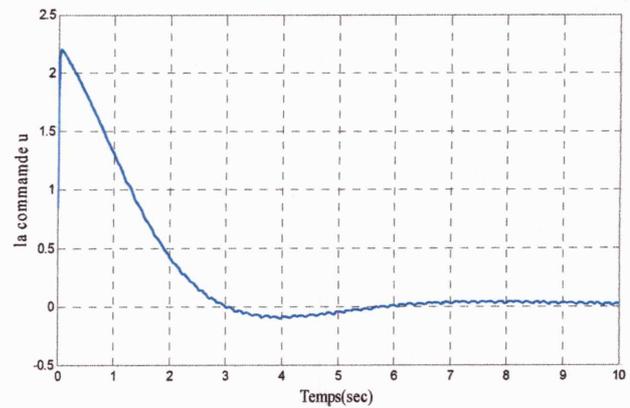
La résolution du problème LMI (4.26) et (4.27),(4.28) pour $S_y = 2.5$, nous donne les matrices suivantes :

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 \\ -0.7 & 0.5 \end{pmatrix} \\ ; B &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \end{pmatrix}; C = (-1 \quad 1) \\ \\ A_1 &= \begin{pmatrix} -35.9230 & 40.1722 \\ 60.2952 & -69.5907 \end{pmatrix} \\ B_1 &= \begin{pmatrix} 0.6212 \\ -0.5030 \end{pmatrix}; C_1 = (-60.3087 \quad 67.7170) \\ D_1 &= -0.4226; E_c = \begin{pmatrix} 0.5859 \\ -1.0448 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

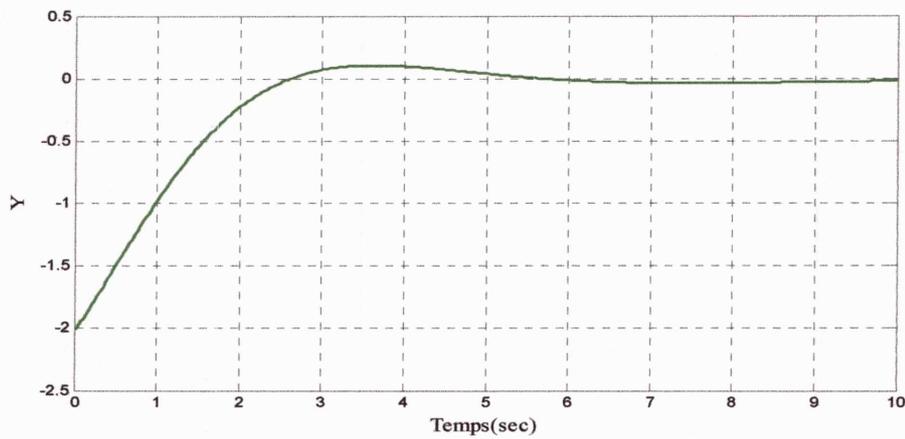
Le résultat de simulation pour différentes conditions initiales est illustré par la figure suivante:



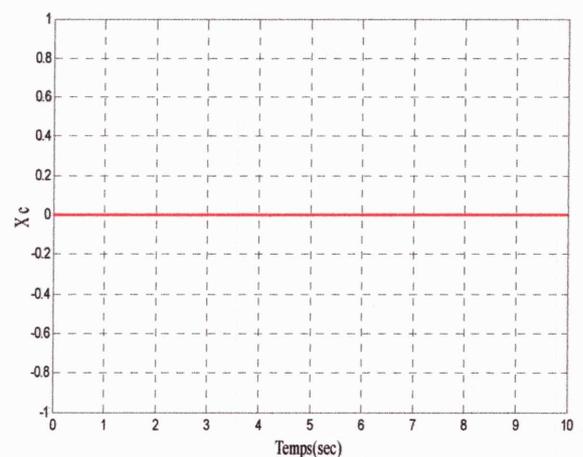
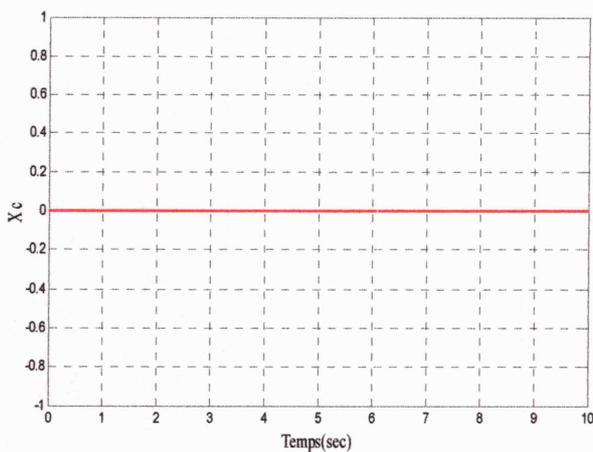
Sortie de système



Sortie d'actionneur

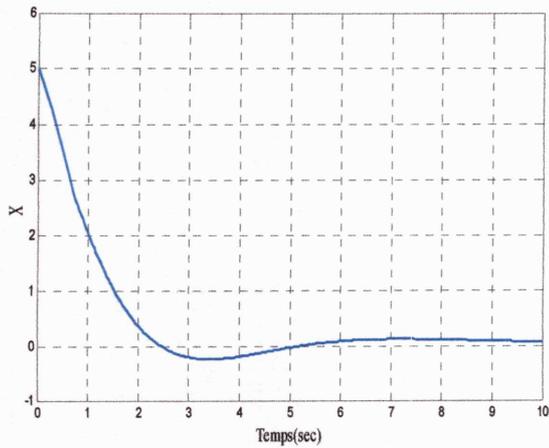


Sortie du capteur

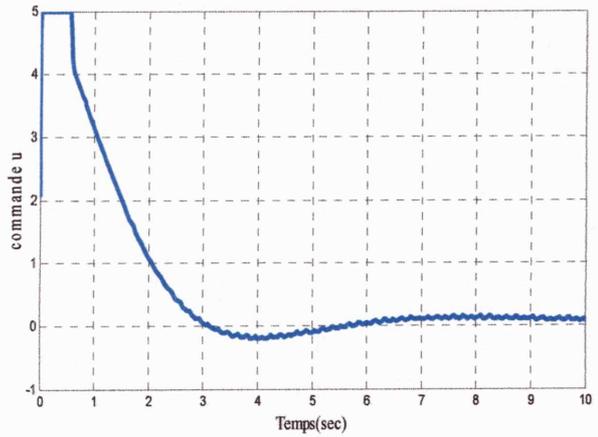


Sortie du compensateur

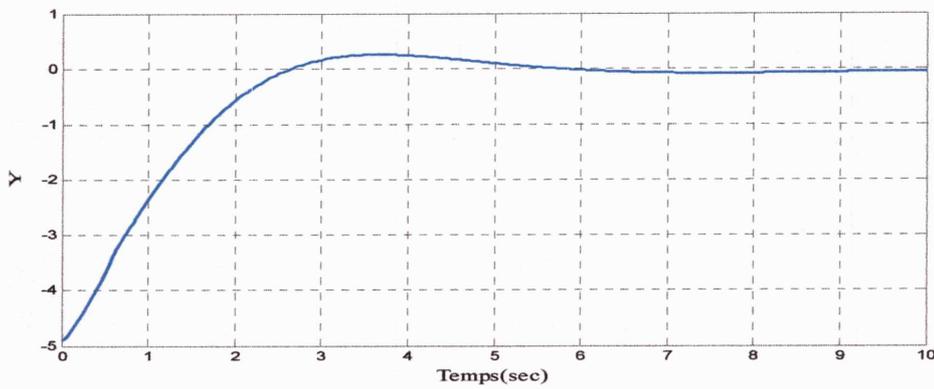
Figure 4.3 la réponse du système avec saturation de capteurs et d'actionneurs pour à condition initiale $X_0 = 2$ et $X_0 = 0$



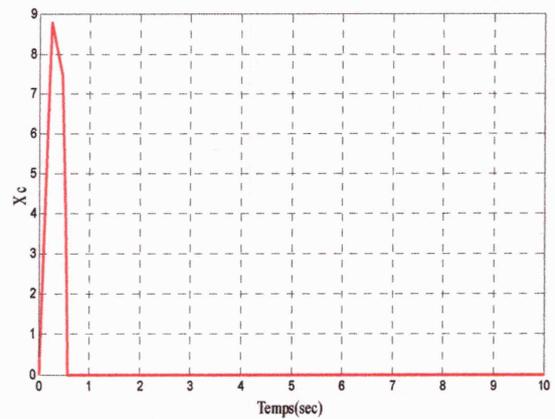
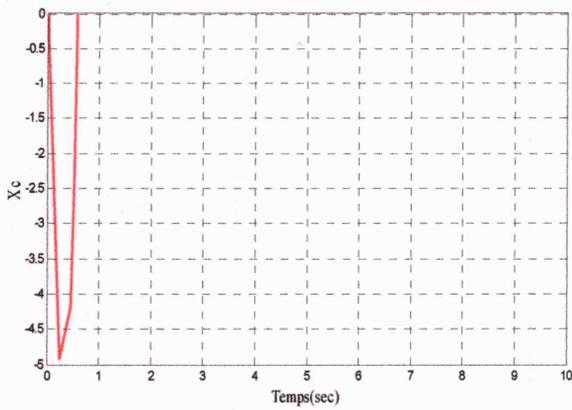
Sortie de système



Sortie d'actionneur



Sortie du capteur



Sortie du compensateur

Figure 4.4 la réponse du système avec saturation des capteurs et d'actionneurs pour la condition initiale $X_0 = 5$ et $X_0 = 0$

D'après la figure 4.3, et figure 4.4 on remarque que la commande par retour de sortie dynamique associée à un compensateur anti-windup arrive à stabiliser les conditions initiales choisies. Ce résultat montre l'efficacité de la méthode de stabilisation proposée pour résoudre les problèmes de saturation de capteurs et d'actionneurs.

1. La sortie de compensateur est nulle dans le mode de fonctionnement nominale de système (Actionneur et capteur ne sont pas saturés) (figure 4,3).
2. la sortie de compensateur est différente de zéro si l'actionneur ou bien le capteur saturés) (figure 4.4).

Malgré la présence de saturation d'actionneur et de capteur, la commande anti-windup arrive à garantir des meilleures performances (stabilité et temps de réponse) au système en boucle fermée. Elle montre aussi sa capacité à stabiliser des points qui sont instables sans compensateur anti-windup.

4.6. Conclusion

dans ce chapitre, nous avons proposé des conditions de stabilisation des systèmes linéaires en de saturation des capteurs et d'actionneurs, s'appuyant sur la condition de secteur de la fonction saturation et la fonction de Lyapunov quadratique. Elles conduisent à des formulations LMI et donc convexes qui peuvent être résolues efficacement par les outils numériques.

Les résultats de simulation obtenus montrent, que la commande par retour de sortie dynamique associée à un compensateur anti-windup arrive à stabiliser les conditions initiales choisies. Ces résultats montrent l'efficacité de la méthode de stabilisation proposée pour résoudre les problèmes de saturation des capteurs et d'actionneurs.

- La sortie de compensateur est nulle dans le mode de fonctionnement nominal de système (Actionneur et capteur ne sont pas saturés) .
- la sortie de compensateur est différente de zéro si l'actionneur ou bien le capteur saturés)

Conclusion générale

Conclusion générale

Il existe un réel besoin de développer des outils permettant d'évaluer les propriétés de stabilité et de performance d'un système linéaire saturé. Dans la littérature, ce sujet largement abordé, s'appuyant notamment sur une modélisation polytopique ou par condition de secteur de la fonction saturation. Elles conduisent à de fonction de Lyapunov en formulations de LMI et donc du problème d'optimisation convexe, mais leur extension à la synthèse, et en particulier à la détermination d'un correcteur anti-windup, reste moins abordé, en particulier avec saturation de capteur. On se heurte en effet le plus souvent à des contraintes non-convexes, et des schémas de résolution itératifs sont parfois [12].

Les méthodes proposées dans ce travail sont dédiées à l'analyse et la synthèse de lois de commande pour le système linéaire en présence de la saturation des actionneurs et des capteurs. Leur développement est basé essentiellement sur la fonction de Lyapunov, les outils LMIs et la modélisation par secteur non linéaire de saturation.

Les résultats issus de ce travail présentent deux parties principales. La première traite la synthèse d'une commande anti-windup pour les systèmes linéaires avec saturation d'actionneurs. La deuxième donne des conditions sur la stabilité sur le système en boucle fermée avec un gain anti-windup en présence de saturation d'actionneur et de capteurs.

Les résultats obtenus dans ce travail, nous a permis de conclure:

- ◆ L'importance de la prise en considération de la saturation d'actionneurs et de capteurs
- ◆ Les correcteurs anti-windup obtenus permettent en effet d'assurer la stabilité des systèmes saturés pour des consignes d'amplitude élevée tout en minimisant la dégradation de performance due à la présence des saturations quelle que soit d'actionneur ou de capteur [13].

À la lumière d'analyse développée et les résultats obtenus, nombres perspectives pourront être dégagé pour le suivi de ce travail dont les principaux sont citées ci-dessous :

- ◆ La prise en considération d'autre contraintes comme les incertitudes affectant les systèmes
- ◆ La prise en considération la non linéarité des systèmes.
- ◆ La prise en considération d'autre types de saturation comme la saturation sur la vitesse d'actionneurs ou de capteurs.

Bibliographie

- [1] Thèse des doctorats en informatique industrielle de Nadia AouANI ingénieur (2006) sur la commande Robuste des systèmes Linéaires Continus a Paramètres Variant dans le Temps.
- [2] Henri Bourlès, *Linear Systems*, John Wiley & Sons, 2010, 544 p. (ISBN 1848211627).
- [3] DeCaigny, J., Camino, J., Oliveira, R., Peres, P. et Swevers, J. (2009). Gain scheduled hinf control for discrete time polytypic l pave systems using homogenous polynomially parameter dependent Lyapunov functions. 16th IFAC Symposium on robust control design.
- [4] DeCaigny, J., Camino, J., Oliveira, R., Peres, P. ET Swevers, J. (2011). Gain scheduled dynamic output feedback control for discrete time lpv systems. *International Journal of robust and non linear control*.
- [5] Doyle. J. (1989). State space solution to standard h2 et h1 control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vole 34(8).pp.831.847.
- [6] Doyle, J. (1982). "Analysis of control systems with structured uncertainty." *IEEE Proceedings*, vol.129.pp.1483.1485.
- [7] Doyle, J. et A. Packard and, A. et Zhou, K. (1991). "Review of lft's, lmi's and." *Proceeding of 30th IEEE Conf. on Decision and Control*, vol. 2(2).pp.1227.1232.
- [8] H. A. Fertik andC. W. Ross, "Direct digital control algorithm with antiwindup feature," *ISA Trans.*, vol. 6, pp. 317–328, 1967.
- [9] K. J. Åström and L. Rundqwist, "Integrator windup and how to avoid it," in *Proc. Amer. Control Conf.*, Pittsburgh, PA, 1989, pp. 1693–1698.
- [10] C. Barbu, R. Reginatto, A. R. Teel, andL. Zaccarian, "Anti-windup for exponentially unstable linear systems with inputs limitedin magnitude andrate, " presented at the *Amer. Control Conf.*, Chicago, IL, June 2000.
- [11] M. V. Kothare andM. Morari, "Multiplier theory for stability analisys of anti-windup control systems," *Automatica*, vol. 35, pp. 917–928, 1999.
- [12] A. R. Teel, "Anti-windup for exponentially unstable linear systems," *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 9, no. 10, pp. 701–716, 1999.
- [13] C. Burgat andS. Tarbouriech, "Intelligent anti-windup for systems with input magnitude saturation," *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 8, pp. 1085–1100, 1998.
- [14] N. Kapoor, A. R. Teel, and P. Daoutidis, "An anti-windup design for linear systems with input saturation," *Automatica*, vol. 34, no. 5, pp. 559–574, 1998.

Bibliographie

- [15] A. R. Teel and N. Kapoor, "The L anti-windup problem: its definition and solution," presented at the Eur. Control Conf., Brussels, Belgium, July 1997.
- [18] M. V. Kothare and M. Morari, "Stability analysis of anti-windup control schème: A review and some generalizations," presented at the Eur. Control Conf., Brussels, Belgium, 1997.
- [16] A. Miyamoto and G. Vinnicombe, "Robust control of plants with saturation nonlinearity based on coprime factor représentation," in Proc. IEEE Conf. Decision and Control, Kobe, Japan, Dec. 1996, pp. 2838–2840.
- [17] Y. Cao, Z. Lin, and D. G. Ward, "An antiwindup approach to enlarging Domain of attraction for linear systems subject to actuator saturation," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 47, pp. 140–145, Jan. 2002.
- [18] J. M. Gomes da Silva, Jr., S. Tarbouriech, and R. Reginatto, "Analysis of régions of stability for linear systems with saturating inputs through an anti-windup scheme," presented at the IEEE Conf. Control Applications (CCA/CACSD'02), Glasgow, U.K., 2002.
- [19] J. M. Gomes da Silva, Jr. and S. Tarbouriech, "Local stabilization of discrete-time linear systems with saturating controls: an LMI-based approach," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 46, pp. 119–125, Jan. 2001.
- [20] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [21] T. Hu and Z. Lin, "Exact characterization of invariant ellipsoid for single input linear systems subject to actuator saturation," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 47, pp. 164–169, Jan. 2002.
- [22] S. Tarbouriech, J. M. Gomes da Silva, Jr., and G. Garcia, "Delay-dependent anti-windup loops for enlarging the stability region of time-delay systems with saturating inputs," ASME J. Dyna. Syst., Measure., Control, vol. 125, no. 1, pp. 265–267, June 2003.
- [23] "A note on delay-dependent anti-windup loop for systems with saturating delayed-inputs," LAAS-CNRS, Toulouse, France, Tech. Rep. 04 178, 2004.
- [24] C.T.Chen. Linear system Theory and Design. Holt, Rinehart and Winston, Tnc, new York, 1984
- [25] A.T.Fuller. In the large stability of relay and saturated control system with actuator saturation. System et control Letters, 15 :486-505,1977.
- [26] P.O. Gutmann and P. Hagander. A new design of constrained controlleurs for linear systems. IEEE Trans. Automate. Contr, 30 :32-33,1958.
- [27] J.B.Gonwoy. A course in functional analysis, volume 96 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-verlarge, Berlin, new York, 1990.

Bibliographie

- [28] R. M. Dol plus and W. E. Schintendorf. Stability analysis for a class of linear controllers under control constraints. in proc, of 30 th IEEE conference on Decision and control (CDC'91), page 77-80, Brighton (UK), 1991.
- [29] Y. Yang. Global stabilization of linear systems with bounded controls. PhD thesis, Rutgers University, février 1993.
- Y. Yang: Y. Yang, J. Sussmann, and E. Sontag. Stabilization of linear systems with bounded controls. In Proc. Of 1992 IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium (NOLCOS'92), pages 15-20, Bordeaux, France, 1992.
- [30] M. Sznaier. A set induced norm approach to the robust control of constrained systems. SIAMJ. Contr. And Optim, 31(3) :733-746, 1993.
- [31] S. Tarbouriech. Sur la stabilité des régulateurs a retour d'état saturé. Ph D thesis, université Paul Sabatier, Toulouse, France, février 1991. Rapport LAAS No. 91047.
- [32] F. Blanchini and S. Miani. Constrained stabilization of continuous-time linear systems. Systems et control Letters, 28 :95-102 , 1996.
- [33] G. Bitsoris. On the positive invariance of polyhedral sets for discrete-time systems. Systems et control Letters, 11(4) :243-248,1988.
- [34] Stabilisation robuste des systèmes non linéaires décrits pour les modeles flous de Takagi-Sugeno en presence de saturation d'actionneur.
- [35] H. A. Fertik and C. W. Ross, "Direct digital control algorithm with antiwindup feature," ISA Trans., vol. 6, pp. 317-328, 1967.
- [37] K. J. Åström and L. Rundqwist, "Integrator windup and how to avoid it," in Proc. Amer. Control Conf., Pittsburgh, PA, 1989, pp. 1693-1698.
- [36] C. Barbu, R. Reginatto, A. R. Teel, and L. Zaccarian, "Anti-windup for exponentially unstable linear systems with inputs limited in magnitude and rate, " presented at the Amer. Control Conf., Chicago, IL, June 2000.
- [37] M. V. Kothare and M. Morari, "Multiplier theory for stability analysis of anti-windup control systems," presented at the Amer. Control Conf., Pittsburgh, PA, 1991.
- [38] A. R. Teel, "Anti-windup for exponentially unstable linear systems," Int. J. Robust Nonlinear Control, vol. 9, no. 10, pp. 701-716, 1999.
- [39] C. Burgat and S. Tarbouriech, "Intelligent anti-windup for systems with input magnitude saturation," Int. J. Robust Nonlinear Control, vol. 8, pp. 1085-1100, 1998.
- [40] N. Kapoor, A. R. Teel, and P. Daoutidis, "An anti-windup design for linear systems with input saturation," Automatica, vol. 34, no. 5, pp. 559-574, 1998.

Bibliographie

- [41] A. R. Teel and N. Kapoor, "The L anti-windup problem: its definition and solution," presented at the Eur. Control Conf., Brussels, Belgium, July 1997.
- [42] M. V. Kothare and M. Morari, "Stability analysis of anti-windup control scheme: A review and some generalizations," presented at the Eur. Control Conf., Brussels, Belgium, 1997.
- [43] A. Miyamoto and G. Vinnicombe, "Robust control of plants with saturation nonlinearity based on coprime factor representation," in Proc. IEEE Conf. Decision and Control, Kobe, Japan, Dec. 1996, pp. 2838–2840.
- [44] Y. Cao, Z. Lin, and D. G. Ward, "An antiwindup approach to enlarging Domain of attraction for linear systems subject to actuator saturation," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 47, pp. 140–145, Jan. 2002.
- [45] J. M. Gomes da Silva, Jr., S. Tarbouriech, and R. Reginatto, "Analysis of regions of stability for linear systems with saturating inputs through an anti-windup scheme," presented at the IEEE Conf. Control Applications (CCA/CACSD'02), Glasgow, U.K., 2002.
- [46] J. M. Gomes da Silva, Jr. and S. Tarbouriech, "Local stabilization of discrete-time linear systems with saturating controls: an LMI-based approach," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 46, pp. 119–125, Jan. 2001.
- [47] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [48] T. Hu and Z. Lin, "Exact characterization of invariant ellipsoid for single input linear systems subject to actuator saturation," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 47, pp. 164–169, Jan. 2002.
- [49] S. Tarbouriech, J. M. Gomes da Silva, Jr., and G. Garcia, "Delay-dependent anti-windup loops for enlarging the stability region of time-delay systems with saturating inputs," ASME J. Dyna. Syst., Measure., Control, vol. 125, no. 1, pp. 265–267, June 2003.
- [50] "A note on delay-dependent anti-windup loop for systems with saturating delayed-inputs," LAAS-CNRS, Toulouse, France, Tech. Rep. 04 178, 2004.
- [51] T. Alamo, A. Cepeda, and D. Limon. Improved computation of ellipsoidal invariant sets for saturated control Systems. In Proc. Of 44th IEEE-CDC, pages 6216 – 6221, Sevilla, Spain, 2005.
- [52] D. S. Bernstein. A plant taxonomy for designing control experiments. IEEE Control Systems Magazine, pp. 7–14.2001.
- [53] Y.Y. Cao, Z. Lin, and B.M. Chen. An output feedback H_{∞} controller design for linear systems subject to sensor nonlinearities. IEEE Trans. On Circuits and Systems-I, vol.50(7).pp.914–921. 2003.
- [54] M. Chilali and P. Gahinet. H_{∞} design with pole placement constraints: an LMI approach. IEEE Transactions on Automatic Control, vol.41(3).pp.358–367.1996.

Bibliographie

- [55] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and J. Bernussou. Design of dynamic output feedback decentralized controllers via a separation procedure. *International Journal of Control*, vol.73(5),pp.371–381.2000.
- [56] T. Fliegner, H. Logemann, and E.P. Ryan. Time-varying and adaptive integral control of linear systems with actuator and sensor nonlinearities. In Proc. Of 15th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), Perpignan, France, 2000.
- [57] A.H. Glattfelder and W. Schaufelberger. Control systems with input and output constraints. Springer-Verlag, London, 2003.
- [58] J.M. Gomes da Silva Jr. and S. Tarbouriech. Anti-windup design with guaranteed region of stability: an LMI-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.50(1),pp.106–111.2005.
- [59] J.M. Gomes da Silva Jr., S. Tarbouriech, and G. Garcia. Local stabilization of linear systems under amplitude and rate saturating actuators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.48(5),pp.842–847.2003.
- [60] T. Hu and Z. Lin. Control systems with actuator saturation: Analysis And design. Birkhauser, Boston, 2001.
- [61] T. Hu, Z. Lin, and B.M. Chen. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. *Automatica*, vol. 38,pp.351–359.2002.
- [62] V. Kapila and K. Grigoriadis. Actuator saturation control. Marcel Dekker, Inc., 2002.
- [63] H. K. Khalil. Nonlinear Systems. MacMillan, 1992.
- [64] T. Kiyama and T. Iwasaki. On the use of multi-loop circle for saturating control synthesis. *Systems et Control Letters*, vol.41,pp.105–114.2000.
- [65] G. Kreisselmeier. Stabilization of linear systems in the presence of output measurement saturation. *Scl*, vol.29,pp.27–30.1996.
- [66] R.M. Murray. Geometric approach to control in the presence of magnitude and rate saturation. Technical Report 99-001, Division of Eng. And Appl. Science, California Institute of Technology, 1999.
- [67] T. Nguyen and F. Jabbari. Output feedback controllers for disturbance attenuation with actuator amplitude and rate saturation. *Automatica*, vol.36,pp.1339–1346.2000.
- [68] I. Queinnec, S. Tarbouriech, and G. Garcia. Anti-windup design for aircraft control. In Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications (CCA), Munich, Germany, 2006.
- [69] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.42(7),pp.896–911. 1997

Bibliographie

- [70] A. A. Stoorvogel and A. Saberi (Eds.). Special issue: Control problems with constraints. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol.9, pp.583–734.1999.
- [71] S. Tarbouriech and G. Garcia (Eds.). *Control of uncertain systems with bounded inputs*. Springer Verlag., 1997.
- [72] S. Tarbouriech and G. Garcia. Preliminary results about anti-windup strategy for systems subject to actuator and sensor saturations. In *Proceedings of the World IFAC Congress, Prague, Czech Republic*, 2005.
- [73] S. Tarbouriech, C. Prieur, and J.M. Gomes da Silva Jr. Stability analysis and stabilization of Systems presenting nested saturations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.51(8), pp.1364–1371. 2006.
- [74] M. Turner and L. Zaccarian (Editors). Special issue: Anti-windup. *Int. J. of Systems Science*, vol.37(2), pp.65–139.2006.
- [75] M. Turner and S. Tarbouriech. Anti-windup for Linear Systems with sensor saturation: Sufficient conditions for global stability and L2 gain. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control (CDC), San Diego, USA*, 2006.
- [76] L. Zaccarian and A.R. Teel. Nonlinear scheduled anti-windup design for Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.49(11), pp.2005–2061. 2004.